

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Красноярский государственный педагогический университет  
им. В.П. Астафьева»**  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

*Кафедра математики и методики обучения математике*

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ  
ФУНКЦИЙ**

Направление подготовки **44.03.01 Педагогическое образование**

Направленность (профиль) образовательной программы

**Математика**

квалификация (степень): бакалавр

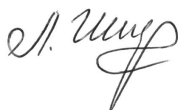
*(заочная форма обучения)*

Красноярск 2018

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» составлена кандидатом педагогических наук, доцентом Н.А. Журавлевой, кандидатом педагогических наук, доцентом М.Б. Шашкиной.

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе  
«20» мая 2015 г., протокол № 9

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева

«27» мая 2015 г. Протокол № 9



Председатель



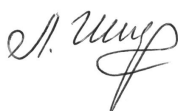
С.В. Бортоновский

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» актуализирована кандидатом педагогических наук, доцентом Н.А. Журавлевой, кандидатом педагогических наук, доцентом М.Б. Шашкиной.

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

«18» мая 2016 г, протокол № 9

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева

«20» мая 2016 г. Протокол № 9

Председатель



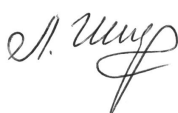
С.В. Бортновский



Рабочая программа дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» актуализирована кандидатом педагогических наук, доцентом Н.А. Журавлевой, кандидатом педагогических наук, доцентом М.Б. Шашкиной.

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе  
«17» мая 2017, протокол № 7

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева

"26" мая 2017, протокол №9



Председатель



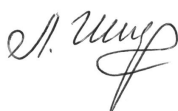
С.В. Бортновский

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» актуализирована кандидатом педагогических наук, доцентом Н.А. Журавлевой, кандидатом педагогических наук, доцентом М.Б. Шашкиной.

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

«21» мая 2018, протокол № 8

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева

"23" мая 2018, протокол №8

Председатель



С.В. Бортновский

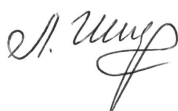


Рабочая программа дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» актуализирована кандидатом педагогических наук, доцентом Н.А. Журавлевой, кандидатом педагогических наук, доцентом М.Б. Шашкиной.

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

«08» мая 2019, протокол № 7

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева

"16" мая 2019, протокол №8

Председатель



С.В. Бортновский

**Лист внесения изменений**

Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины на 2016/2017 учебный год:

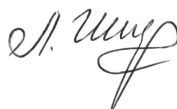
В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

1. Список литературы обновлен учебными и учебно-методическими изданиями, электронными образовательными ресурсами. Обновлен перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

протокол № 9 от «18» мая 2016 г.

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева  
«20» мая 2016 г. Протокол № 9

Председатель



С.В. Бортновский



## Лист внесения изменений

Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины на 2017/2018 учебный год:

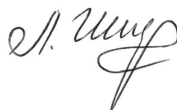
В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

1. Список литературы обновлен учебными и учебно-методическими изданиями, электронными образовательными ресурсами. Обновлен перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

протокол № 17 от «18» мая 2017 г.

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева  
«24» мая 2017 г. Протокол № 8

Председатель



С.В. Бортниковский





## Лист внесения изменений

Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины на 2018/2019 учебный год:

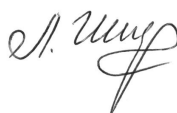
В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

1. Список литературы обновлен учебными и учебно-методическими изданиями, электронными образовательными ресурсами. Обновлен перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.
2. Обновлен перечень лицензионного программного обеспечения.
3. В фонд оценочных средств внесены изменения в соответствии с приказом «Об утверждении Положения о фонде оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой (государственной итоговой) аттестации» от 28.04.2018 №297(п)

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

протокол № 8 от «21» мая 2018 г.

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева  
«08» июня 2018 г. Протокол № 9

Председатель



С.В. Бортновский



### Лист внесения изменений

Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины на 2018/2019 учебный год:

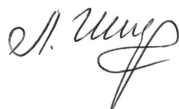
В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

1. На титульном листе РПД и ФОС изменено название ведомственной принадлежности «Министерство науки и высшего образования РФ» на основании приказа «о внесении изменений в сведения о КГПУ им. В.П. Астафьева» от 15.07.2018 № 457 (п).

2. На титульном листе РПД и ФОС изменено название кафедры разработчика «Кафедра математики и методики обучения математике» на основании решения Ученого совета КГПУ им. В.П. Астафьева «О реорганизации структурных подразделений университета» от 01.06.2018

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математики и методики обучения математике протокол № 1 от « 05 » сентября 2018 г.

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева  
«12» сентября 2018 г. Протокол № 1

Председатель



С.В. Бортновский



## Лист внесения изменений

Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины на 2019/2020 учебный год:

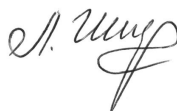
В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

1. Список литературы обновлен учебными и учебно-методическими изданиями, электронными образовательными ресурсами. Обновлен перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.
2. Обновлен перечень лицензионного программного обеспечения.

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа и методики обучения математике в вузе

протокол № 7 от «08» мая 2019 г.

Заведующий кафедрой



Л.В. Шкерина

Одобрено научно-методическим советом  
ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева  
«16» мая 2019 г. Протокол № 8

Председатель



С.В. Бортновский



## Приложение 3

### 3. Пояснительная записка

1. Рабочая программа дисциплины разработана на основе ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование и Профессионального стандарта педагога. Дисциплина «Математический анализ и элементы теории функций» (индекс – Б1.В.10) представлена в вариативной части учебного плана в 3–8 семестрах.

2. Общая трудоемкость дисциплины составляет 20 з.е. (720 ч), в том числе: контактной работы 72 ч (36 ч лекций, 36 ч практических занятий), 608 ч самостоятельной работы, формы контроля – экзамен (3, 5, 6, 7 семестр), зачёт с оценкой (4 семестр).

Семестр	Общая трудоемкость, часы (з.е.)	Контакт, ч			с/р, ч	Форма контроля	
		Лекц	практ	лаб		вид	часы
3	144 (4)	8	8	-	119	экз	9
4	36 (1)	6	6	-	20	зачётО	4
5	101 (2,8)	6	6	-	80	экз	9
6	241 (6,7)	8	8	-	216	экз	9
7	144 (4)	8	8	-	119	экз	9
8	54 (1,5)	-	-	-	54	-	-
ИТОГО	720 (20)	36	36	-	608		

3. Цели освоения дисциплины: овладение базовыми предметными знаниями, основными методами доказательства и методами решения базовых задач курса; формирование готовности решать межпредметные и практико-ориентированные задачи на основе использования известных базовых предметных знаний и методов математического анализа и основ теории функций; овладение основными способами освоения математических знаний и способности обучить им учащихся.

4. Планируемые результаты обучения.

*В результате освоения курса студенты должны знать:*

- определение предела числовой последовательности и его геометрический смысл;
- необходимого и достаточного условия существования предела последовательности;
- теоремы о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей, свойств бесконечно малой последовательности,
- теоремы о пределе монотонной последовательности, теоремы о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности, теоремы о вложенных отрезках, теорему Больцано-Вейерштрасса и их доказательства;

- определения предела функции в точке по Коши, по Гейне и доказательство их эквивалентности; теорему о пределе монотонной функции;
- определения непрерывности функции в точке, основные теоремы о непрерывных функциях и их доказательства;
- понятие дифференцируемой функции;
- связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции;
- правила дифференцирования;
- основные теоремы дифференциального исчисления;
- необходимые и достаточные условия существования экстремума, точек перегиба;
- понятие частных производных 1-го и высших порядков;
- необходимое и достаточное условие существования экстремума функции двух переменных;
- определения неопределенного, определенного, несобственного интеграла; основных свойств неопределенного и определенного интегралов и их доказательства;
- определения квадратуемой фигуры и кубуемого тела, площади и объема; условия квадратуемости фигуры, кубуемости тела и спрямляемости дуги с доказательством;
- определения двойного, тройного и криволинейного интегралов, условий их существования и основных свойств;
- способы вычисления двойного, тройного, криволинейного интегралов;
- понятия числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда, сходящегося и расходящегося рядов, определения гармонического геометрического рядов, свойств сходящихся рядов;
- понятие положительного ряда, признаки сходимости положительных рядов, переместительное свойство сходящихся рядов, условия умножения сходящихся рядов;
- понятие знакочередующегося ряда, теорему Лейбница, понятие абсолютно сходящегося ряда, свойства абсолютно сходящихся рядов, достаточный признак абсолютной сходимости числового ряда;
- понятие функциональной последовательности и ее сходимости, условия равномерной сходимости функциональной последовательности, свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей (непрерывность, интегрирование и дифференцируемость предельной функции), понятие функционального ряда и его области сходимости, понятие равномерной сходимости ряда, необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда, условия непрерывности суммы ряда, интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов;
- понятие степенного ряда, теорему Абеля, теорему о существовании интервала сходимости, понятие равномерной сходимости степенного ряда, свойства рав-

номерно сходящихся степенных рядов, понятие ряда Тейлора, условия разложения функции в ряд Тейлора, разложения в ряд Тейлора-Маклорена функций  $y = e^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ , биномиальный ряд;

- понятия тригонометрического ряда, ортогональных систем функций, ряда Фурье;

- понятие сравнения бесконечных множеств, условия равномощности и неравномощности множеств, понятие мощности множества, понятие множества мощности континуум, мощности множества подмножеств;

- характеристические признаки метрического пространства, полного метрического пространства, компактного множества;

- классификацию точек метрического пространства;

- способ конструирования интеграла Лебега;

- основных свойства интеграла Лебега;

- связь между интегралами Римана и Лебега.

*уметь:*

- раскрывать неопределенности при вычислении пределов;

- применять свойства пределов для вычисления пределов;

- доказывать по определению равенство предела последовательности числу;

- доказывать непрерывность функции по определению;

- классифицировать точки разрыва;

- применять основные теоремы о непрерывных функциях к решению задач и вычислению пределов; доказывать непрерывность основных элементарных функций;

- вычислять производные основных элементарных функций; функций, заданных параметрически;

- вычислять дифференциалы высших порядков основных элементарных функций;

- вычислять приближенные значения функций с помощью их дифференциалов;

- вычислять пределы функций в точке и на бесконечности с использованием правил Лопиталя;

- исследовать функцию и строить ее график, используя ее производную;

- находить область определения функции нескольких переменных;

- строить ее линии уровня;

- вычислять частные производные различных порядков;

- исследовать функцию двух переменных на экстремум;

- находить условные экстремумы;

- выводить формулу первообразной любой табличной функции;

- пользоваться основными методами и приемами интегрирования при вычислении неопределенного и определенного интегралов;

- устанавливать интегрируемость (неинтегрируемость) функции на отрезке, приводить примеры и контрпримеры;

- вычислять несобственные интегралы I и II рода, исследовать их на сходимость

- доказывать квадратуемость криволинейной трапеции и кубичность цилиндра, использовать интеграл при вычислении площадей, длин дуг, статических моментов и координат центров тяжести, моментов инерции, работы переменной силы, кинетической энергии и силы давления, объемов тел;
- вычислять кратные и криволинейные интегралы различными методами, использовать их при вычислении площадей и объемов;
- восстанавливать функцию по ее полному дифференциалу;
- применить критерий сходимости числовой последовательности и числового ряда, свойства сходящихся рядов;
- применять признаки сходимости положительных рядов для исследования рядов на сходимость;
- применять теорему Лейбница, определять сходимость знакочередующегося ряда, применять признак абсолютной сходимости для определения сходимости ряда;
- применять необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда, применять признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда, применять условия непрерывности суммы ряда, интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов для определения свойств предельной функции;
- находить радиус сходимости, область сходимости степенного ряда, разложить функцию в степенной ряд, доказать единственность разложения, разложить функцию в ряд Тейлора, применять разложение биномиального ряда для вычисления значений радикалов, вычислять определенные интегралы с помощью степенных рядов;
- определять мощность множества, доказать свойства счётных множеств, счётность множеств рациональных и алгебраических чисел, несчётность отрезка числовой прямой и множества действительных чисел;
- доказать существование множеств сколь угодно большой мощности, сравнить мощности множеств;
- устанавливать взаимосвязь между сходимостью по различным метрикам;
- конструировать геометрические образы при различных отображениях метрических пространств;
- использовать принцип сжимающих отображений при решении алгебраических и функциональных уравнений.

Требования к результатам освоения курса выражаются в формировании и развитии следующих компетенций:

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-4);
- способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия (ОК-5);

- готовность сознавать социальную значимость своей будущей профессии, обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности (ОПК-1);
- владение основами профессиональной этики и речевой культуры (ОПК-5);
- способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2).

Таблица 1

Планируемые результаты обучения (3 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, первое представление о которых дается в школе (предел последовательности, предел функции).	Знать: понятие предела последовательности, предела функции; правила раскрытия неопределенностей при вычислении предела.	Проекция задачи на компетенции  ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: вычислять пределы последовательностей и функций с раскрытием неопределенностей всех видов.	
Задача: формирование способности студентов к решению математических задач, используя методы вычисления пределов.	Знать: основные теоремы о пределах и их доказательства.	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5
	Уметь: вычислять пределы функций в точке и на бесконечности с использованием теорем.	
	Владеть навыками исследования неопределенностей и выбором метода их раскрытия при вычислении пределов.	
Задача: приобретение студентами опыта по использованию аппарата вычисления пределов для доказательства непрерывности и исследования точек разрыва .	Знать: понятие точек разрыва и их классификации, основные теоремы о непрерывности функции на отрезке и их доказательства.	ОК-5 ОПК-1 ОПК-5 ПК-2
	Уметь: доказывать непрерывность функции в точке и на множестве, выявлять точки разрыва, классифицировать их, строить графики функций.	

Таблица 2

Планируемые результаты обучения (4 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, первое	Знать: понятие дифференцируемой функции; связь между дифференцируе-	Проекция задачи на компетенции



представление о которых дается в школе (производная, дифференцируемая функция, правила дифференцирования).	мостью и непрерывностью функции; правила дифференцирования.	ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: вычислять производные основных элементарных функций; функций, заданных параметрически; вычислять дифференциалы высших порядков основных элементарных функций; вычислять приближенные значения функций с помощью их дифференциалов.	
Задача: формирование способности студентов к решению математических задач, используя методы дифференциального исчисления.	Знать: основные теоремы дифференциального исчисления; необходимые и достаточные условия существования экстремума, точек перегиба.	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5
	Уметь: вычислять пределы функций в точке и на бесконечности с использованием правил Лопиталя.	
	Владеть навыками исследования функции и построения ее графика с использованием производной.	
Задача: приобретение студентами опыта по использованию аппарата дифференциального исчисления в многомерном случае.	Знать: понятие частных производных 1-го и высших порядков; необходимое и достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.	ОК-5 ОПК-1 ОПК-5 ПК-2
	Уметь: находить область определения функции нескольких переменных; строить ее линии уровня; вычислять частные производные различных порядков; исследовать функцию двух переменных на экстремум; находить условные экстремумы.	

Таблица 3

Планируемые результаты обучения (5 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, первое представление о которых дается в школе (первообразная, неопределенный и определенный интеграл, методы и приемы интегрирования).	Знать: понятие первообразной, неопределенного и определенного интеграла; свойств неопределенного и определенного интеграла, условий интегрируемости.	Проекция задачи на компетенции  ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: вывести первообразную любой из основных элементарных функций; вычислять интегралы с помощью различных приемов и методов.	
Задача: формирование способности студентов к решению математических	Знать: геометрический и физический смысл определенного интеграла; .	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5
	Уметь: исследовать на сходимость не-	

задач, используя методы интегрального исчисления.	собственные интегралы.	
	Владеть навыками вычисления площадей, объёмов, длин дуг, статических моментов, работы переменной силы с помощью определённого интеграла.	
Задача: приобретение студентами опыта по использованию аппарата интегрального исчисления в многомерном случае.	Знать: понятие двойного и криволинейного интегралов, связи между ними; условий существования.	ОК-5 ОПК-1 ОПК-5 ПК-2
	Уметь: вычислять двойные и криволинейные интегралы и применять их для нахождения площадей и объёмов; восстанавливать функцию по её полному дифференциалу.	

Таблица 4

Планируемые результаты обучения (6 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, первое представление о которых дается в школе (арифметическая и геометрическая прогрессии, сумма бесконечной геометрической прогрессии – числовых рядов).	Знать: понятие числового ряда, сходимость и расходимость числовых рядов, необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов.	Проекция задачи на компетенции  ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: исследовать числовые ряды на сходимость с помощью признаков с использованием пределов, производных и интегралов.	
Задача: формирование способности студентов к решению математических задач, используя методы исследования числовых и функциональных рядов.	Знать: основные теоремы о функциональных, степенных рядах и рядах Фурье.	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5
	Уметь: находить область сходимости функциональных и степенных рядов, применять степенные ряды для приближенных вычислений.	
	Владеть навыками исследования степенных рядов и применение их для приближенных вычислений определенных интегралов.	
Задача: приобретение студентами опыта по использованию аппарата математического анализа для работы с множествами	Знать: понятие о бесконечных множествах и их мощности, .	ОК-5 ОПК-1 ОПК-5 ПК-2
	Уметь: определять мощности бесконечных множеств, сравнивать мощности бесконечных множеств.	

Таблица 5

### Планируемые результаты обучения (7 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, используемых в анализе (функция, мера, интеграл).	Знать: характеристические признаки метрического пространства, полного метрического пространства, компактного множества; классификацию точек метрического пространства; связь между интегралами Римана и Лебега.	Проекция задачи на компетенции  ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: конструировать геометрические образы при различных отображениях метрических пространств; использовать принцип сжимающих отображений при решении алгебраических и функциональных уравнений.	
Задача: формирование способности студентов к решению задач логическим путём, исходя из набора аксиом	Знать: способ конструирования интеграла Лебега.	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5
	Владеть навыками доказательства различных свойств интеграла Лебега.	
Задача: приобретение студентами опыта по применению теории функций действительного переменного в функциональном анализе.	Знать: взаимосвязь между понятиями меры и метрики открытого и замкнутого ограниченного множеств.	ОК-5 ОПК-1 ОПК-5 ПК-2
	Уметь: устанавливать взаимосвязь между сходимостью по различным метрикам.	

Таблица 6

### Планируемые результаты обучения (8 сессия)

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетентность)
Задача: расширение и углубление понятий, используемых в анализе, их связи со школьным курсом математики (функция и её свойства, предел, непрерывность, производная, интеграл).	Знать: основные понятия математического анализа, их строгие математические определения и связь со школьным программным материалом	Проекция задачи на компетенции  ОК-4 ОК-5 ОПК-5
	Уметь: конструировать любое из определений, его геометрический смысл, свойства	
Задача: развитие опыта работы с математической и научно-методической литературой, связанной с	Владеть навыками поиска, анализа и обобщения информации, имеющей отношение к профессиональной деятельности учителя математики	ОК-4 ОПК-1 ОПК-5

поиском и анализом необходимой информации	Уметь: искать, систематизировать и интерпретировать информацию	
Задача: умение работать над групповым проектом, оформлять и представлять результаты проектной деятельности	Уметь: осуществлять основные этапы проектной деятельности	ОК-4 ОК-5 ОПК-1
	Владеть: опытом выполнения групповых проектов	ОПК-5 ПК-2

## **5. Контроль результатов освоения дисциплины.**

*Методы текущего контроля:* контрольные работы, выполнение и защита индивидуальных домашних заданий, посещение лекций, лабораторных семинарских занятий, выступление на семинарах.

*Методы промежуточного контроля.* Входное тестирование.

*Итоговый контроль.* Зачет, экзамен.

Оценочные средства результатов освоения дисциплины, критерии оценки выполнения задания представлены в разделе «Фонды и оценивающие средства для проведения промежуточной аттестации».

## **6. Перечень образовательных технологий, используемых при освоении дисциплины.**

- 1) Лекции и семинары контекстного типа.
- 2) Педагогические технологии, на основе активизации и интенсификации учебной деятельности обучающихся:
  - технологии проблемного обучения;
  - технологии проектного обучения (метод проектных заданий, кейс-метод).
- 3) Педагогические технологии на основе эффективности управления и организации учебного процесса:
  - коллективный способ обучения (работа в группах).
- 4) Педагогические технологии на основе дидактического усовершенствования и реконструирования учебного материала:
  - модульно-рейтинговое обучение;
  - имитационное обучение.

### **3.1. Организационно-методические документы**

#### **3.1.1. Технологическая карта обучения дисциплине (Приложение 4).**

### 3.1.1. Технологическая карта обучения дисциплине МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки: **44.03.01 Педагогическое образование**

Направленность (профиль) образовательной программы

**Математика**

квалификация (степень): бакалавр

**по заочной форме обучения**

(общая трудоемкость 23 з.е.)

#### Зимняя сессия, 2 курс

Модули. Наименование разделов и тем	Всего часов (з.е.)	Контакт				Самостоятельная работа	Формы и методы контроля
		всего	лекций	практ. занятий	лаборат. работ		
<b>Модуль 1.1. Предел числовой последовательности</b>	<b>46</b>	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>40</b>	Контрольная работа
Определение предела числовой последовательности и его геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие существования предела последовательности		2	1	1	-	10	
Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Основные теоремы о пределах последовательностей. Свойства бесконечно малых последовательностей		1	-	1	-	10	
Предел монотонной последовательности. Лемма Бернулли. Число $e$ .		1	-	1	-	10	
Теорема о вложенных отрезках. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса		2	1	1	-	10	
<b>Модуль 1.2. Предел функции</b>	<b>44</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>40</b>	контрольная работа
Предел функции в точке (по Коши и по Гейне) и его геометрический смысл, эквивалентность определений. Первый и второй замечательные пределы		2	1	1	-	20	

Теорема о пределе монотонной на промежутке функции. Теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел		2	1	1	-	20	
<b>Модуль 1.3. Непрерывность функции</b>		<b>6</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>39</b>	
Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, произведения, частного. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность композиции функций		2	1	1	-	10	
Первая и вторая теоремы Больцано-Коши, их геометрический смысл и применение при решении уравнений и неравенств. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Существование и непрерывность обратной функции. Понятие непрерывной функции в школьном курсе математики	<b>45</b>	2	1	1	-	10	коллоквиум, контрольная работа
Вычисление пределов функций на основании их непрерывности. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность элементарной функции в области ее определения		2	-	2	-	19	
<b>ИТОГО</b>	<b>144(4)</b>	<b>16</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>-</b>	<b>119</b>	

**Летняя сессия, 2 курс**

Модули. Наименование разделов и тем	Всего часов (з.е.)	Контакт				самостоятельная работа	Формы и методы контроля
		всего	Лекций	практических занятий	лаборат. работ		
<b>Модуль 2.1. Производная и дифференциал функции одной переменной</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>7</b>	контрольная работа
1.1. Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность	<b>11</b>	1	1	-	-	2	

дифференцируемой функции.							
1.2. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций.		1	-	1	-	1	
1.3. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически.		2	1	1	-	2	
1.4. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференциалы высших порядков. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.		-	-	-	-	2	
<b>Модуль 2.2. Применение производной к исследованию функций</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>7</b>	
2.1. Теоремы о среднем. Правила Лопиталю. Формула Тейлора.		1	-	1	-	1	
2.2. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума. Достаточные условия существования максимума и минимума.	<b>11</b>	1	1	-	-	2	кон- троль- ная ра- бота
2.3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.		1	-	-	-	2	
2.4. Вопросы применения производной для исследования функции и построения ее графика		1	1	1	-	2	
<b>Модуль 2.3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	
3.1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения и график функции двух переменных. Линии уровня. Предел и непрерывность	<b>10</b>	2	1	1	-	3	

функции нескольких переменных; понятие о повторных пределах.							
3.2. Частные производные и дифференцируемость функции, условия дифференцируемости. Касательная плоскость и нормаль к графику функции двух переменных. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.		2	1	1	-	3	
<b>ИТОГО</b>	<b>36 (1)</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>20</b>	<b>4 (зачет с О)</b>

### Зимняя сессия, 3 курс

Модули. Наименование разделов и тем	Всего часов (з.е.)	Контакт				Самостоятельная работа	Формы и методы контроля
		всего	лекций	практ. занятий	лаборат. работ		
<b>Модуль 3.1. Первообразная и интеграл</b>	<b>30</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>26</b>	Коллоквиум, контрольная работа
Основные свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования (замена переменного и по частям). Интегрирование рациональных функций. Приемы интегрирования тригонометрических и иррациональных функций.		2	1	1	-	10	
Свойства определенного интеграла. Нижние и верхние суммы Дарбу и их свойства. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Формула		2	1	1	-	10	



Ньютона–Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом подстановки и по частям.							
Несобственные интегралы первого и второго рода, признаки сходимости. Вычисление несобственных интегралов.		-	-	-	-	6	
<b>Модуль 3.2. Приложения определенного интеграла.</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>26</b>	
Квадрируемость криволинейной трапеции, необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры. Кубируемость цилиндра, вывод формул для вычисления его объема. Вычисление объема тела по площадям поперечных сечений. Принцип Кавальери. Теорема о вычислении объема тела вращения. Достаточное условие спрямляемости кривой.	<b>30</b>	4	2	2	-	26	кон- трольная работа, доклад
<b>Модуль 3.3. Кратные и криволинейные интегралы и их приложения.</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>28</b>	
Задача об объеме цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла, условия его существования. Основные свойства двойных интегралов. Вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл в полярных координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Объем тела. Площадь плоской фигуры. Площадь поверхности.	<b>32</b>	2	1	1	-	9	кон- трольная работа
Понятие криволинейных		2	1	1	-	9	

интегралов по координатам и условия их существования. Основные свойства криволинейных интегралов по координатам и их вычисление. Формула Грина–Остроградского.							
Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Площадь плоской фигуры.		-	-	-	-	10	
<b>ИТОГО</b>	<b>101 (2,8)</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>-</b>	<b>80</b>	<b>Экзамен 9</b>

### Летняя сессия, 3 курс

Модули. Наименование разделов и тем	Всего часов (з.е.)	Контакт				Самостоятельная работа	Формы и методы контроля
		всего	лекций	практ. занятий	лаборат. работ		
<b>Модуль 4.1. Числовые ряды</b>	<b>80</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>72</b>	Коллоквиум, контрольная работа
Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Гармонический ряд. Геометрические ряды. Критерий сходимости числовой последовательности и числового ряда. Свойства сходящихся рядов.		3	1	2	-	24	
Понятие положительного ряда. Признаки сходимости положительных рядов: необходимый и достаточный, сравнения (допредельный и предельный), Даламбера, Коши, интегральный. Переместительное свойство сходящихся рядов. Умножение сходящихся рядов.		3	2	1	-	24	
Понятие знакочередующегося ряда. Тео-		2	1	1	-	24	

рема Лейбница. Понятие абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Достаточный признак абсолютной сходимости числового ряда.							
<b>Модуль 4.2. Функциональные ряды.</b>		<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>72</b>	
Понятие функциональной последовательности и ее сходимости. Понятие функционального ряда и его области сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.	<b>76</b>	2	1	1	-	36	Коллоквиум, контрольная работа

<p>Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Теорема о существовании интервала сходимости. Радиус сходимости. Область сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда. Свойства равномерно сходящихся степенных рядов. Задача разложения функции в степенной ряд. Единственность разложения. Понятие ряда Тейлора. Необходимое условие разложения функции в ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора-Маклорена функций <math>y = e^x</math>, <math>y = \sin x</math>, <math>y = \cos x</math>, <math>y = \ln(1+x)</math>. Биномиальный ряд. Применение биномиального ряда к вычислению значений радикалов. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.</p>		2	1	1	-	36	
<p><b>Модуль 4.3. Мощность множества.</b></p>		4	2	2	-	72	
<p>Сравнение бесконечных множеств. Равномощные и неравномощные множества. Понятие мощности множества. Счётные множества и их свойства. Счётность множеств рациональных и алгебраических чисел. Несчётность отрезка числовой прямой и множества действительных чисел. Множества мощности континуум. Мощность множества подмножеств. Существование мно-</p>	76	2	2	2	-	72	индивидуальное домашнее задание, контрольная работа

жеств сколь угодно большой мощности. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна. Континуальность множества всех непрерывных функций и гиперконтинуальность множества всех числовых функций.							
<b>ИТОГО</b>	<b>241 (6,7)</b>	<b>16</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>-</b>	<b>216</b>	<b>9 экзамен</b>

### Зимняя сессия, 4 курс

Модули. Наименование разделов и тем	Всего часов (з.е.)	Аудиторных часов				Внеаудиторных часов	Формы и методы контроля
		всего	лекций	практических занятий	лаборат. работ		
<b>Модуль 5.1. Метрические пространства.</b>	<b>47</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>39</b>	кон-трольная работа
1.1. Понятие метрического пространства. Примеры ( $\mathbb{R}^n$ , $C_{[a; b]}$ , $l_2$ и др.).		3	2	1	-	15	
1.2. Окрестности точек в метрическом пространстве. Открытые, замкнутые совершенные множества в метрическом пространстве и их свойства. Строе-ние открытых, замкну-тых совершенных множеств на числовой прямой.		3	2	1	-	15	
1.3. Линейное норми-рованное пространство как пример метриче-ского пространства. Предел последователь-ности точек метриче-ского пространства. Сходимость по метрике и по норме. Показа-ния метрических про-странств. Непрерыв-ность отображений		-	-	2	-	19	
<b>Модуль 5.2. Мера Ле-бега.</b>		<b>43</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	

2.1. Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств на числовой прямой. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Мера Лебега ограниченного множества на числовой прямой. Свойства измеримых множеств.		2	1	1	-	15	защита проектных заданий
2.2. Определение функции одной действительной переменной, измеримой по Лебегу. Основные свойства измеримых функций.		2	1	1	-	15	
2.3. Последовательность измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Егорова.		-	-	-	-	19	
<b>Модуль 7. 3. Интеграл Лебега.</b>	<b>45</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>41</b>	Контрольная работа
3.1. Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции и его основные свойства. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Восстановление первообразной функции.		2	1	1	-	20	
3.2. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Критерий интегрируемости по Риману ограниченной функции.		2	1	2	-	21	
<b>ИТОГО</b>	<b>144 (4)</b>	<b>16</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>-</b>	<b>119</b>	<b>9 Экзамен</b>

### 3.1.2. Содержание основных разделов и тем дисциплины

#### Содержание теоретического курса

##### Зимняя сессия, 2 курс

**Модуль 3.1. Предел числовой последовательности.** Определение предела числовой последовательности и его геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие существования предела последовательности. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Основные теоремы о пределах последовательностей. Свойства бесконечно малых последовательностей. Предел монотонной последовательности. Лемма Бернулли. Число  $e$ . Теорема о вложенных отрезках. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

**Модуль 3.2. Предел функции.** Предел функции в точке (по Коши и по Гейне) и его геометрический смысл, эквивалентность определений. Первый и второй замечательные пределы. Теорема о пределе монотонной на промежутке функции. Теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

**Модуль 3.3. Непрерывность функции.** Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, произведения, частного. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность композиции функций. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши, их геометрический смысл и применение при решении уравнений и неравенств. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Существование и непрерывность обратной функции. Понятие непрерывной функции в школьном курсе математики. Вычисление пределов функций на основании их непрерывности. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность элементарной функции в области ее определения.

##### Летняя сессия, 2 курс

#### **Модуль 4.1. Производная и дифференциал функции одной переменной**

Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференциалы высших порядков. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

**Модуль 4.2. Применение производной к исследованию функций.** Теоремы о среднем. Правила Лопиталю. Формула Тейлора. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума. Достаточные условия существования максимума и минимума. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Вопросы применения производной для исследования функции и построения ее графика.

**Модуль 4.3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.** Понятие функции нескольких переменных. Область определения и график функции двух переменных. Линии уровня. Предел и непрерывность функции нескольких переменных; понятие о повторных пределах. Частные производные и дифференцируемость функции, условия дифференцируемости. Касательная плоскость и нормаль к графику функции двух переменных. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Понятие о функции, заданной неявно. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Вычисление производных неявно заданных функций. Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных. Экстремумы функций двух переменных. Определение максимума и минимума. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума для функции двух переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений. Условные экстремумы.

**Зимняя сессия, 3 курс**

**Модуль 5.1. Первообразная и интеграл.** Основные свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования (замена переменного и по частям). Свойства определенного интеграла. Нижние и верхние суммы Дарбу и их свойства. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом подстановки и по частям. Приближенное вычисление определенного интеграла. Несобственные интегралы первого и второго рода, признаки сходимости. Вычисление несобственных интегралов.

**Модуль 5.2. Приложения определенного интеграла.** Квадрируемость криволинейной трапеции, необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры. Кубируемость цилиндра, вывод формул для вычисления его объема. Вычисление объема тела по площадям поперечных сечений. Принцип Кавальери. Теорема о вычислении объема тела вращения. Достаточное условие спрямляемости кривой. Площадь поверхности вращения. Вычисле-



ние статических моментов и координат центра тяжести материальной кривой. Вычисление статических моментов и координат центров тяжести плоских фигур. Первая и вторая теоремы Гульдина. Вычисление моментов инерции. Вычисление работы переменной силы, кинетической энергии и силы давления.

**Модуль 5.3. Кратные и криволинейные интегралы и их приложения.** Задача об объеме цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла, условия его существования. Основные свойства двойных интегралов. Вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл в полярных координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Объем тела. Площадь плоской фигуры. Площадь поверхности. Определение тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Понятие криволинейных интегралов по координатам и условия их существования. Основные свойства криволинейных интегралов по координатам и их вычисление. Формула Грина-Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Приложения криволинейных интегралов. Работа силы. Площадь плоской фигуры.

**Летняя сессия, 3 курс**

**Модуль 6.1. Числовые ряды.** Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Гармонический ряд. Геометрические ряды. Критерий сходимости числовой последовательности и числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Понятие положительного ряда. Признаки сходимости положительных рядов: необходимый и достаточный, сравнения (допредельный и предельный), Даламбера, Коши, интегральный. Переместительное свойство сходящихся рядов. Умножение сходящихся рядов. Понятие знакопеременного ряда. Теорема Лейбница. Понятие абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Достаточный признак абсолютной сходимости числового ряда.

**Модуль 6.2. Функциональные ряды и ряды Фурье.** Понятие функциональной последовательности и ее сходимости. Равномерная сходимость функциональной последовательности. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей (непрерывность, интегрирование и дифференцирование предельной функции). Понятие функционального ряда и его области сходимости. Понятие равномерной сходимости ряда. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Теорема о существовании интервала сходимости. Радиус сходимости. Область сходимости.

сти степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда. Свойства равномерно сходящихся степенных рядов. Задача разложения функции в степенной ряд. Единственность разложения. Понятие ряда Тейлора. Необходимое условие разложения функции в ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора-Маклорена функций  $y = e^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \ln(1 + x)$ . Биномиальный ряд. Применение биномиального ряда к вычислению значений радикалов. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов. Понятие тригонометрического ряда. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье. Теорема о разложении функции в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Особенности ряда Фурье для четной и нечетной функций. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле. Разложение функции, заданной на отрезке  $[0; \pi]$ , в тригонометрический ряд. Разложение в тригонометрический ряд функции, заданной на отрезке  $[-1; 1]$ .

**Модуль 6.3. Мощность множества.** Сравнение бесконечных множеств. Равномощные и неравномощные множества. Понятие мощности множества. Счётные множества и их свойства. Счётность множеств рациональных и алгебраических чисел. Несчётность отрезка числовой прямой и множества действительных чисел. Множества мощности континуум. Мощность множества подмножеств. Существование множеств сколь угодно большой мощности. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна. Континуальность множества всех непрерывных функций и гиперконтинуальность множества всех числовых функций.

### **Зимняя сессия, 4 курс**

**Модуль 7.1. Метрические пространства.** Понятие метрического пространства. Примеры  $(\mathbb{R}^n, C_{[a,b]}, l_2, L_1, L_2)$ . Окрестности точек в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Замкнутые и открытые множества на прямой, их свойства. Совершенные множества. Строение открытых и замкнутых множеств. Канторово совершенное множество. Линейное нормированное пространство, как пример метрического пространства. Предел последовательности точек метрического пространства. Сходимость по метрике и по норме. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений. Компакты, их замкнутость и ограниченность. Непрерывные отображения компактных множеств. Теорема Вейерштрасса о непрерывном отображении компакта в  $\mathbb{R}^n$ . Полные метрические пространства. Полнота пространств  $\mathbb{R}^n, L_1, L_2$ . Принцип сжимающих отображений и его применения. Понятие гильбертова пространства. Ортогональные системы векторов в гильбертовом пространстве. Критерий полноты ортогональной системы.

**Модуль 7.2. Мера Лебега.** Мера открытых и замкнутых множеств на прямой. Множества, измеримые по Лебегу.

**Модуль 7.3. Интеграл Лебега.** Интеграл Лебега от ограниченной функции и его основные свойства. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Критерий интегрируемости по Риману ограниченной функции.

*Требования к результатам освоения курса выражаются в формировании и развитии следующих компетенций:*

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-4);

- способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия (ОК-5);

- готовность сознавать социальную значимость своей будущей профессии, обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности (ОПК-1);

- владение основами профессиональной этики и речевой культуры (ОПК-5);

- способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2).

Формирование этих компетенций происходит в процессе осуществления следующих видов учебной, внеучебной и проектно-исследовательской деятельности: изучение теоретических основ дисциплины; решение практико-ориентированных задач с межпредметным содержанием, поиск и обработка новой информации; выполнение проектных заданий, представление их результатов и защита.

**3.1.4. Темы курсовых работ.** Не предусмотрены учебным планом.

**3.2. Компоненты мониторинга учебных достижений обучающихся**

**3.2.1. Технологическая карта рейтинга дисциплины.**

## Приложение 5

Наименование дисциплины/курса	Уровень/ступень образования (бакалавриат, магистратура)	Статус дисциплины в рабочем учебном плане (Б.1-Б.6)	Количество зачетных единиц/кредитов
Математический анализ и элементы теории функций	Бакалавр	Б1.В.10 (вариативная часть)	20 кредита (ЗЕТ)
Смежные дисциплины по учебному плану			
Предшествующие: Математика			
Сопутствующие: все дисциплины цикла Б1			
Последующие: Дифференциальные уравнения, История математики			

### ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА РЕЙТИНГА

(зимняя сессия, 2 курс)

ВХОДНОЙ МОДУЛЬ			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 10 %	
		min	Max
Входной контроль	Тестирование	6	10
<b>Итого</b>		<b>6</b>	<b>10</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 1.1			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	Max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	18	30
<b>Итого</b>		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 1.2			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	18	30
<b>Итого</b>		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 1.3			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	Max

Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	18	30
Итого		<b>18</b>	<b>30</b>
Общее количество баллов по дисциплине (по итогам изучения всех модулей)		min	max
		<b>60</b>	<b>100</b>

### Летняя сессия, 2 курс

ВХОДНОЙ МОДУЛЬ			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 10 %	
		min	Max
Входной контроль	Тестирование	6	10
Итого		<b>6</b>	<b>10</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 2.1			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	18	30
Итого		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 2.2			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	12	20
Итого		<b>12</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 3.3			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max

Текущий контроль	Контрольная работа	6	10
Итого		<b>6</b>	<b>10</b>

Итоговый модуль			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Итоговый контроль	Зачет с оценкой	<b>12</b>	<b>20</b>
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>
Общее количество баллов по дисциплине (по итогам изучения всех модулей, без учета дополнительного модуля)		min	max
		<b>60</b>	<b>100</b>

### Зимняя сессия, 3 курс

ВХОДНОЙ МОДУЛЬ			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 10 %	
		min	Max
Входной контроль	Тестирование	6	10
Итого		<b>6</b>	<b>10</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 3.1			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	Max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	9	15
Промежуточный рейтинг-контроль	Коллоквиум	9	15
Итого		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 3.2			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max

Текущая работа	Доклад	6	10
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	6	10
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 3.3			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 25 %	
		min	Max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	15	25
Итого		<b>15</b>	<b>25</b>
Общее количество баллов по дисциплине (по итогам изучения всех модулей, без учета дополнительного модуля)		Min	max
		<b>60</b>	<b>100</b>

### Летняя сессия, 3 курс

ВХОДНОЙ МОДУЛЬ			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 10 %	
		Min	Max
Входной контроль	Тестирование	6	10
Итого		<b>6</b>	<b>10</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 4.1			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		Min	Max
Промежуточный рейтинг-контроль	Коллоквиум	6	10
Промежуточный рейтинг-контроль	контрольная работа	6	10
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 4.2			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	

		min	max
Промежуточный рейтинг-контроль	Коллоквиум	9	15
Промежуточный рейтинг-контроль	контрольная работа	9	15
<b>Итого</b>		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 4.3			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Текущая работа	индивидуальное домашнее задание	3	6
Промежуточный рейтинг-контроль	контрольная работа	9	14
<b>Итого</b>		<b>12</b>	<b>20</b>

Итоговый модуль			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Итоговый контроль	Зачет	<b>12</b>	<b>20</b>
<b>Итого</b>		<b>12</b>	<b>20</b>
Общее количество баллов по дисциплине (по итогам изучения всех модулей, без учета дополнительного модуля)		min	max

### Зимняя сессия, 4 курс

ВХОДНОЙ МОДУЛЬ			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 10 %	
		min	Max
Входной контроль	Тестирование	6	10
<b>Итого</b>		<b>6</b>	<b>10</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ 5.1			
--------------------	--	--	--



Содержание	Форма работы	Количество баллов 30 %	
		Min	max
Промежуточный рейтинг-контроль	Контрольная работа	18	30
Итого		<b>18</b>	<b>30</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ 5.2			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Текущий контроль	Проектные задания	12	20
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>

БАЗОВЫЙ МОДУЛЬ № 3			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Текущий контроль	Контрольная работа	12	20
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>

Итоговый модуль			
Содержание	Форма работы	Количество баллов 20 %	
		min	max
Итоговый контроль	Экзамен	<b>12</b>	<b>20</b>
Итого		<b>12</b>	<b>20</b>
Общее количество баллов по дисциплине (по итогам изучения всех модулей, без учета дополнительного модуля)		min	max
		<b>60</b>	<b>100</b>

### Соответствие рейтинговых баллов и академической оценки:

<i>Общее количество набранных баллов*</i>	<i>Академическая оценка</i>
<b>60 – 72</b>	<b>3 (удовлетворительно)</b>
<b>73 – 86</b>	<b>4 (хорошо)</b>
<b>87 – 100</b>	<b>5 (отлично)</b>

\*При количестве рейтинговых баллов более 100, необходимо рассчитывать рейтинг учебных достижений обучающегося

для определения оценки кратно 100 баллов.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

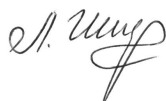
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**Красноярский государственный педагогический университет  
им. В.П. Астафьева»**

Институт математики, физики и информатики  
Кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО  
на заседании кафедры  
протокол № 8  
от «21» мая 2018 г.

Зав. кафедрой



Л.В. Шкерина

ОДОБРЕНО  
на заседании  
научно-методического  
совета ИМФИ протокол № 9  
от «8» июня 2018 г.

Директор



А.С. Чиганов



**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ**

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы

Математика

квалификация (степень): бакалавр

Составители:



Шашкина М.Б., доцент кафедры ма-  
тематики и МОМ



Журавлева Н.А., доцент кафедры ма-  
тематики и МОМ

**Красноярск 2018**

## ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ НА ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Представленный фонд оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации по дисциплине «Математический анализ и элементы теории функций» соответствует требованиям ФГОС ВО и профессиональным стандартам Педагог (профессиональная деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель), утвержденным приказом Минтруда России от 18.10.2013 № 544н.

Предлагаемые формы и средства аттестации адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы Математика.

Оценочные средства и критерии оценивания представлены в полном объеме. Формы оценочных средств, включенных в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС, установленных в Положении о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой (государственной итоговой) аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре – в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» утвержденного приказом ректора № 297 (п) от 28.04.2018.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки по указанной программе.

15.05.2018

Эксперт-работодатель,  
директор МАОУ гимназия № 14  
г. Красноярск



Н.В. Шуляк

## **1. Назначение фонда оценочных средств.**

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Математический анализ и элементы теории функций» **задачи:**

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

**1.3. ФОС разработан на основании нормативных документов:**

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавр);

- основной профессиональной образовательной программы высшего образования;

- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева и его филиалах.

**2. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе изучения дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций»**

**2.1. Перечень компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины:**

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-4);

- способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия (ОК-5);

- готовность сознавать социальную значимость своей будущей профессии, обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности (ОПК-1);

- владение основами профессиональной этики и речевой культуры (ОПК-5);

- способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2).

Компетенция	Дисциплины, практики, участвующие в формировании данной компетенции	Тип контроля	Оценочное средство/КИМ	
			Номер	Форма
способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-4)	Общекультурные основы профессиональной деятельности Иностранный язык Математика Математический анализ и элементы теории функций Алгебра многочленов Линейная алгебра с компьютерной поддержкой Дифференциальные уравнения Дискретная математика Математическая логика Элементы математической логики Элементарная математика (алгебра) Элементы алгебры История математики История школьного курса математики Учебная практика Производственная практика Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности Педагогическая практика Преддипломная практика	промежуточная аттестация	26	Экзамен
		текущий контроль	2, 3, 5, 15, 6	Контрольная работа коллоквиум доклад проектное задание тест
способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные	Общекультурные основы профессиональной деятельности Философия Социология Культурология	входной	1, 11	Зачет
		промежуточная аттестация	21	Зачет
		текущий контроль	7, 8, 9, 12, 13,	Контроль-

различия (ОК-5)	Психология Основы учебной деятельности студента Математика Физика Математический анализ и элементы теории функций Теория алгоритмов Алгоритмы математической обработки данных Элементарная математика (алгебра) Элементы алгебры История математики История школьного курса математики Информационные технологии в Математике Компьютерная алгебра Классный руководитель Производственная практика Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности Педагогическая практика Социальные основы профилактики экстремизма и зависимых форм поведения в молодежной среде	Входной контроль	14, 15, 16  17, 22	ная работа коллоквиум доклад проектное задание тест
готовность сознавать социальную значимость своей будущей профессии, обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности (ОПК-1)	Общекультурные основы профессиональной деятельности Социология Психология Педагогика Математика Физика Геометрия Математический анализ и элементы теории функций Теория вероятности и математическая статистика Линейная алгебра с компьютерной поддержкой Дифференциальные уравнения Дискретная математика Математическая логика Элементы математической логики Элементарная математика (алгебра) Элементы алгебры	промежуточная аттестация  текущий контроль	10  18, 19, 20, 23, 24, 25	Зачет с оценкой  Контрольная работа коллоквиум доклад проектное задание

	<p>История математики  История школьного курса математики  Информационные технологии в математике  Компьютерная алгебра  Классный руководитель  Числовые системы  Компьютерная алгебра в среднем и профессиональном образовании  Элементарная математика (геометрия)  Элементы геометрии  Приложения теории графов  Дополнительные главы дискретной Математики  Учебная практика  Практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности  Производственная практика  Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности  Педагогическая практика  Преддипломная практика</p>			
<p>владение основами профессиональной этики и речевой культуры (ОПК-5)</p>	<p>Общекультурные основы профессиональной деятельности  Социология  Психология  Педагогика  Математика  Физика  Геометрия  Математический анализ и элементы теории функций  Теория вероятности и математическая статистика  Линейная алгебра с компьютерной поддержкой  Дифференциальные уравнения  Дискретная математика  Математическая логика  Элементы математической логики  Элементарная математика (алгебра)  Элементы алгебры  История математики</p>	<p>промежуточная аттестация</p> <p>текущий контроль</p>	<p>10</p> <p>18, 19 20, 23, 24 25</p>	<p>Зачет с оценкой</p> <p>Контрольная работа  коллоквиум  доклад  проектное задание</p>



	<p>История школьного курса математики</p> <p>Информационные технологии в математике</p> <p>Компьютерная алгебра</p> <p>Классный руководитель</p> <p>Числовые системы</p> <p>Компьютерная алгебра в среднем и профессиональном образовании</p> <p>Элементарная математика (геометрия)</p> <p>Элементы геометрии</p> <p>Приложения теории графов</p> <p>Дополнительные главы дискретной Математики</p> <p>Учебная практика</p> <p>Практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности</p> <p>Производственная практика</p> <p>Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности</p> <p>Педагогическая практика</p> <p>Преддипломная практика</p>			
--	--	--	--	--

способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2)	Социология Психология Педагогика Математика Физика Геометрия Математический анализ и элементы теории функций Теория вероятности и математическая статистика Линейная алгебра с компьютерной поддержкой Дифференциальные уравнения Дискретная математика Математическая логика Элементы математической логики Элементарная математика (алгебра) Элементы алгебры История математики История школьного курса математики Информационные технологии в математике Компьютерная алгебра Классный руководитель Числовые системы Компьютерная алгебра в среднем и профессиональном образовании Элементарная математика (геометрия) Элементы геометрии Приложения теории графов Дополнительные главы дискретной Математики Учебная практика Практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности Производственная практика Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности Педагогическая практика Преддипломная практика	промежуточная аттестация	26	экзамен
		текущий контроль	2, 3, 5, 15, 6	Контрольная работа коллоквиум
			1, 11	доклад проектное задание

### 3. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации

3.1 Фонды оценочных средств включают: зачет с оценкой, экзамен.

3.2. Оценочные средства

### 3.2.1. Оценочное средство зачет с оценкой

Формируемые компетенции	Продвинутый уровень сформированности компетенций	Базовый уровень сформированности компетенций	Пороговый уровень сформированности компетенций
	(87-100 баллов) отлично/зачтено	(73-86 баллов) хорошо/зачтено	(60-72 балла)* удовлетворительно/зачтено
ОК-4	Проявляет систематически способность к коммуникации в устной и письменной форме в рамках изучаемого математического материала	Проявляет периодически способность к коммуникации в устной и письменной форме в рамках изучаемого математического материала	Проявляет эпизодически способность к коммуникации в устной и письменной форме в рамках изучаемого математического материала
ОПК-1	Проявляет систематически осознание социальной значимости своей будущей профессии, мотивацию к осуществлению профессиональной деятельности учителя математики	Проявляет периодически осознание социальной значимости своей будущей профессии, мотивацию к осуществлению профессиональной деятельности учителя математики	Проявляет фрагментарное осознание социальной значимости своей будущей профессии, мотивацию к осуществлению профессиональной деятельности учителя математики
ПК-2	Проявляет систематически способность использовать современные методы обучения и диагностики в процессе обучения математике	Проявляет в большинстве случаев систематически способность использовать современные методы обучения и диагностики в процессе обучения математике	Проявляет периодически способность использовать современные методы обучения и диагностики в процессе обучения математике

### 3.2.2. Оценочное средство экзамен

Формируемые компетенции	Продвинутый уровень сформированности компетенций	Базовый уровень сформированности компетенций	Пороговый уровень сформированности компетенций
	(87-100 баллов) отлично/зачтено	(73-86 баллов) хорошо/зачтено	(60-72 балла)* удовлетворительно/зачтено
ОК-5	В процессе сдачи экзамена проявляет систематически способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия	В процессе сдачи экзамена проявляет периодически способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия	В процессе сдачи экзамена проявляет фрагментарное способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия
ОПК-5	Отлично владение ос-	Хорошо владение ос-	В основном освоил

	новыми профессиональной этики и речевой культуры	новыми профессиональной этики и речевой культуры	владение основами профессиональной этики и речевой культуры
ПК-2	Систематически проявляет способности использовать современные методы и технологии обучения и диагностики в процессе обучения математике	Периодически проявляет способности использовать современные методы и технологии обучения и диагностики в процессе обучения математике	Эпизодически проявляет способности использовать современные методы и технологии обучения и диагностики в процессе обучения математике

#### 4. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости

4.1. Фонды оценочных средств включают: Тест 1, 6, 11, 17, 22; контрольная работа 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 25; доклад 15, коллоквиум 5, 13, 19; проектное задание 24, 27.

4.2.1. Критерии оценивания (см. в технологической карте рейтинга в рабочей программе дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций»).

4.2.1. Критерии оценивания по оценочному средству 1, 6, 11, 17, 22 – тест

Критерии оценивания	Количество баллов (вклад в рейтинг)
Содержательная составляющая	10
Максимальный балл	10

4.2.2. Критерии оценивания по оценочному средству 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 25 – Контрольная работа

Критерии оценивания	Количество баллов (вклад в рейтинг)
Содержательная составляющая	18
Оформление работы	2
Максимальный балл	10

4.2.4. Критерии оценивания по оценочному средству 15 – Доклад

Критерии оценивания	Количество баллов (вклад в рейтинг)
Содержательная составляющая	9
Коммуникативная составляющая	1
Максимальный балл	10

4.2.5. Критерии оценивания по оценочному средству 5, 13, 19 – коллоквиум

Критерии оценивания	Количество баллов (вклад в рейтинг)
Содержательная составляющая	7
Коммуникативная составляющая	3
Максимальный балл	10

4.2.6. Критерии оценивания по оценочному средству 24, 27 – проектное задание

Критерии оценивания	Количество баллов (вклад в рейтинг)
Содержательная составляющая	7
Коммуникативная составляющая	3
Максимальный балл	10

## 5. Оценочные средства (контрольно-измерительные материалы)

### Зимняя сессия, 2 курс

1. Ориентировочный вариант теста для входного контроля.
2. Контрольная работа по модулю 1.1.
3. Контрольная работа по модулю 1.2.
4. Контрольная работа по модулю 1.3.
5. Вопросы к коллоквиуму.

#### 1. Тест входного контроля по теме «Функции» (ориентировочный вариант)

1. Функция  $f$  называется ограниченной на множестве  $X$ , если

- а) существует такое число  $M > 0$ , что  $f(x) \leq M$ ;
- б) существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ ;
- в) для любого числа  $M > 0$  существует такое  $x \in X$ , что  $|f(x)| \leq M$ ;
- г) для любого  $x \in X$  существует такое число  $M > 0$ , что  $|f(x)| \leq M$ .

2. Областью определения функции  $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 + x - 1)} + \frac{x+2}{x-3}$  является множество:

во:

- а)  $(-2; 1)$ ;
- б)  $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ ;
- в)  $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$ ;
- г)  $(-\infty; -2] \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$ .

3. Множеством значений функции  $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - 3$  является множество:

- а)  $[0; +\infty)$ ;
- б)  $[0; 1]$ ;
- в)  $[1; 3]$ ;
- г)  $[1; +\infty)$ .

4. Функция  $f(x) = \frac{\sin 5x - 2 \cos x}{6 + \operatorname{ctg}^2 x}$

- а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;
- б) ограничена;
- в) не ограничена ни сверху, ни снизу;
- г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

5. Функция  $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$  убывает на:

- а)  $(-\infty; 0]$ ;
- б)  $[0; +\infty)$ ;
- в)  $(-\infty; +\infty)$  ;
- г)  $(-\infty; \sqrt{2})$ .

6. Наименьший положительный период функции  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{2x}{5}$  равен:

- а)  $2\pi$ ;
- б)  $8\pi$ ;
- в)  $15\pi$ ;
- г)  $30\pi$ .

7. Функция  $f(x) = \frac{3^x - 1}{1 + 3^x}$  является:

- а) четной;
- б) нечетной;
- в) ни четной, ни нечетной.

8. Вы решили систематизировать информацию по теме «Преобразование графиков тригонометрических функций». Какое средство обучения вы примените: (Выберите один вариант ответа):

- а) учебник
- б) опорный конспект
- в) видео-файл
- г) презентация с анимацией

9. В теме «Преобразование графиков тригонометрических функций» Вы решили применить принцип наглядности в динамике. Какое средство обучения вы примените: (Выберите один вариант ответа):

- а) учебник
- б) опорный конспект
- в) плакат
- г) презентация с анимацией

10. Вы проходите педагогическую практику. К вам подходит ученик и просит объяснить его ошибки. Учитель оценил задание на 2. В чем заключаются ошибки (Выберите несколько вариантов).

Доказательство. Докажем, что функция  $y = -x^2 - 2x + 1$  на отрезке  $[1; 4]$  убывает.

$y(2) = -7$ ,  $y(3) = -11$ ,  $-11 < -7$ , тогда, функция убывает на отрезке  $[1; 4]$  по определению.

- а) вычислительная ошибка  $y(2) = -7$ ;  
 б) вычислительная ошибка  $y(3) = -11$ ;  
 в) монотонность функции можно доказать только с помощью производной;  
 г) при доказательстве монотонности функции по определению необходимо брать из отрезка  $[1; 4]$  два произвольных  $x_1$  и  $x_2$ , а не конкретные значения.
11. Вы проходите педагогическую практику. К вам подходит ученик и просит объяснить его ошибки. Учитель оценил задание на 2. В чем заключаются ошибки.  
 Доказательство. Докажем, что функции  $y = x^2 + 2x - 1$  на отрезке  $[1; 4]$  возрастает.  
 $y(2) = 7, y(3) = 11, 7 < 11$ , тогда, функция возрастает на отрезке  $[1; 4]$  по определению.
- а) вычислительная ошибка  $y(2) = 7$ ;  
 б) вычислительная ошибка  $y(3) = 11$ ;  
 в) монотонность функции можно доказать только с помощью производной;  
 г) при доказательстве монотонности функции по определению необходимо брать из отрезка  $[1; 4]$  два произвольных  $x_1$  и  $x_2$ , а не конкретные значения.

## 2. Контрольная работа по модулю 1.1.

1. Используя определение предела числовой последовательности, докажите:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

2. Вычислите:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n}{(n - 3)(n + 5)}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 4} \right)^{\frac{2n+1}{n-1}}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{10n + 3}{10n - 1} \right)^{5n}$ .

## 3. Контрольная работа по модулю 1.2.

1. Используя определение предела функции на бесконечности по Коши, докажите:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = 2$ .

2. Пользуясь определением предела функции в точке по Коши, докажите  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 7x - 6}{x - 2} = 13$ .

3. Запишите в предельной форме следующее выражение  $\forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 \forall x < -c \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

4. Доказать, что предел функции  $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$  в точке  $x = 1$  не существует.

ет.

5. Вычислить:

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^3 - 5x^2 - 13x + 30}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{12x^2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x-2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x^5+1}}{\sqrt[4]{x^7+1} - \sqrt{x+1}}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 7x - 1})$

6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos 3x}{x}$

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+3}{5x-1} \right)^{5x}$

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{2+5x} \right)^{8x}$

#### 4. Контрольная работа по модулю 1.3.

1. Пользуясь определением непрерывности функции «на языке  $\varepsilon - \delta$ », докажите, что функция  $f(x) = 4x^2 + 9$  непрерывна в точке  $x_0 = 4$ .

2. Для функции  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -2, \\ \frac{2}{x}, & -2 < x < 0, \\ 2x+1, & 0 \leq x < 1, \\ -3, & x \geq 1. \end{cases}$  постройте график и найдите:

1) промежутки непрерывности; 2) точки разрыва; 3) классифицируйте точки разрыва; 4) в точках устранимого разрыва доопределите функцию так, чтобы она стала непрерывной.

#### 5. Вопросы к коллоквиуму по модулю 1.3.

1. Определения непрерывной в точке функции, их геометрический смысл. Примеры.
2. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций.



3. Теорема о непрерывности сложной функции.
4. Точки разрыва функции и их классификация.
5. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.
6. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.
7. Теорема о непрерывности обратной функции.
8. Понятие непрерывной функции в школьном курсе математики.
9. Понятие степени с иррациональным показателем.
10. Показательная функция на множестве действительных чисел, ее основные свойства и график.
11. Логарифмическая функция на множестве действительных чисел, ее основные свойства и график.
12. Тригонометрические функции, их основные свойства и графики.
13. Обратные тригонометрические функции, их основные свойства и графики.

### Летняя сессия, 2 курс

6. Ориентировочный вариант теста для входного контроля.
7. Контрольная работа по модулю 4.1.
8. Контрольная работа по модулю 4.2.
9. Контрольная работа по модулю 4.3.
10. Вопросы к зачёту.

### 6. Тест входного контроля по введению в анализ

(ориентировочный вариант)

1. Функция  $f$  называется ограниченной на множестве  $X$ , если
  - а) существует такое число  $M > 0$ , что  $f(x) \leq M$ ;
  - б) существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ ;
  - в) для любого числа  $M > 0$  существует такое  $x \in X$ , что  $|f(x)| \leq M$ ;
  - г) для любого  $x \in X$  существует такое число  $M > 0$ , что  $|f(x)| \leq M$ .
  
2. Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $x_n$ , если
  - а) для  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ;
  - б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ;
  - в) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех четных  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ;
  - г) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что для всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $x_n < a + \varepsilon$ .

**3.** Функция  $f$ , определенная в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

- а) существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$  и такие  $x$ , что из неравенства  $|x - x_0| < \delta$  следует справедливость неравенства  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- в) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x < x_0 + \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- г) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , справедливо неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**4.** Точка  $x_0$  является точкой разрыва II рода для функции  $f$ , если:

- а) предел функции  $f$  в точке  $x_0$  не существует;
- б) функция  $f$  не определена в точке  $x_0$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ ;                      г)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

**5.** Формула  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x - 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$ .

- а) задает функцию на  $(-\infty; +\infty)$ ;
- б) задает функцию на  $[-1; 1]$ ;
- в) не задает функцию на  $(-\infty; +\infty)$ ;
- г) задает функцию на  $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ .

**6.** Для функции  $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 + x - 1)} + \frac{x + 2}{x - 3}$                        $D(f) =$

- а)  $(-2; 1)$ ;
- б)  $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ ;
- в)  $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$ ;
- г)  $(-\infty; -2] \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$ .

**7.**  $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$ .                       $E(f) =$

- а)  $[0; +\infty)$ ;
- б)  $[0; 1]$ ;
- в)  $[1; 3]$ ;
- г)  $[1; +\infty)$ .

**8.** Функция  $f(x) = \frac{\sin 5x - 2 \cos x}{6 + \operatorname{ctg}^2 x}$

- а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;
- б) ограничена;
- в) не ограничена ни сверху, ни снизу;
- г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

**9.** Функция  $f(x) = \frac{1}{2 + x^2}$  убывает на:

- а)  $(-\infty; 0]$ ;
- б)  $[0; +\infty)$ ;
- в)  $(-\infty; +\infty)$ ;
- г)  $(-\infty; \sqrt{2})$ .

**10.** Наименьший положительный период функции  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{2x}{5}$  равен:

- а)  $2\pi$ ;
- б)  $8\pi$ ;
- в)  $15\pi$ ;
- г)  $30\pi$ .

11. Функция  $f(x) = \frac{3^x - 1}{1 + 3^x}$  является:

- а) четной; б) нечетной; в) ни четной, ни нечетной.

12. Если  $(\alpha_n)$  – бесконечно малая, а  $(x_n)$  – ограниченная, то  $(\alpha_n \cdot x_n)$

- а) не имеет предела; б) бесконечно малая;  
в) бесконечно большая; г) ничего определенного сказать нельзя.

13. Если  $(x_n)$  и  $(y_n)$  бесконечно малые при  $n \rightarrow \infty$ , и  $y_n \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$

- а) равен 0; б) равен 1;  
в) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя; г) равен  $+\infty$ .

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+1}{3n-2} \right)^{2n+1} =$

- а) 1; б)  $e^2$ ; в)  $e^{\frac{2}{3}}$ ; г)  $\infty$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} =$

- а) 0; б) -4; в) 4; г) 2.

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) =$

- а) 0; б)  $\frac{1}{2}$ ; в) 1; г)  $\infty$ .

17. Функция  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$  в точке  $x_0 = 0$

- а) непрерывна; б) непрерывна только слева;  
в) непрерывна только справа; г) разрывна.

18. Функция  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } -1 < x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

терпит разрывы первого рода в точках:

- а)  $x = 0$ ;  $x = 1$ ; б)  $x = \pm 1$ ; в)  $x = -1$ ;  $x = 0$ ; г)  $x = \pm 1$ ;  $x = 0$ .

### 7. Контрольная работа по модулю 2.1.

1. Найти производные функций: а)  $y = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ; б)  $y = (x^2 + 3)^{\sqrt{x}}$ ;

$$в) \begin{cases} x = \cos\frac{t}{2}, \\ y = \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}. \end{cases}$$

2. Написать уравнение касательной к кривой  $y = x^2 + 2x - 1$  в точке ее пересечения с кривой  $y = 2x^2$ .
3. Движение материальной точки осуществляется по закону  $f(t) = \sin t^2$ . Найти на траектории движения точки покая.
4. Вычислить приближенное значение функции  $y = \sin 16^0$ .

### **8. Контрольная работа по модулю 2.2.**

1. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 + 2x - 15}$ .
2. Найти асимптоты кривой  $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$ .
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x + \sqrt{x}$  на отрезке  $[0;4]$ .
4. Доказать, что функция  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  не является дифференцируемой в точке  $x = 0$ .

### **9. Контрольная работа по модулю 2.3.**

1. Найти частные производные и дифференциал функции  $z = \frac{x^3 + y^2}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  в точке  $(1;1)$ .
2. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^3 + y + 2x - 3y$  в точке  $(0;0;0)$ .
3. Исследовать на экстремум функцию  $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$ .
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y$  в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой  $x + y - 3 = 0$ .
5. Найти полное приращение и полный дифференциал функции  $f(x,y) = x^2y^2$  в точке  $(2,2)$ , если  $\Delta x = 0,01$  и  $\Delta y = -0,02$ , сравнить их.

### **10. Вопросы к зачету**

1. Понятие функции одной переменной дифференцируемой в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

2. Связь между дифференцируемостью функции одной переменной и ее непрерывностью.
3. Доказательство правил дифференцирования функции одной переменной.
4. Теорема о дифференцировании сложной функции одной переменной.
5. Теорема о дифференцировании обратной функции.
6. Вывод формул для вычисления производных показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
7. Производные высших порядков функции одной переменной. Механическое истолкование производной 2-го порядка.
8. Инвариантность формы дифференциала первого порядка функции одной переменной.
9. Дифференциалы высших порядков функции одной переменной. Нарушение инвариантности их формы.
10. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши.
11. Условие постоянства функции.
12. Условия монотонности и строгой монотонности функций.
13. Экстремумы функции одной переменной. Необходимое условие существования экстремума.
14. Первое достаточное условие существования экстремума функций одной переменной.
15. Второе достаточное условие существования экстремума функции одной переменной.
16. Направление выпуклости кривой. Точки перегиба.
17. Асимптоты графика функции.
18. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня.
19. Предел функции двух переменных.
20. Непрерывность функции двух переменных. Основные понятия и свойства.
21. Понятие дифференцируемой функции нескольких переменных. Необходимые условия дифференцируемости.
22. Достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных.
23. Понятие частных производных функции нескольких переменных. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
24. Дифференцирование сложных функций двух переменных.
25. Понятие дифференциала функции двух переменных, его геометрический смысл, инвариантность формы.
26. Частные производные высших порядков функции двух переменных. Условия равенства смешанных частных производных второго порядка.
27. Экстремумы функции двух переменных.

**Зимняя сессия, 3 курс**

11. Ориентировочный вариант теста для входного контроля.
12. Контрольная работа по модулю 3.1.
13. Вопросы к коллоквиуму по модулю 3.1.
14. Контрольная работа по модулю 3.2.
15. Темы докладов по модулю 3.2.
16. Контрольная работа по модулю 3.3.

## 11. Тест входного контроля по дифференциальному исчислению функций одной переменной

(ориентировочный вариант)

**Часть 1.** В заданиях 1–15 укажите букву правильного ответа

1. Дана функция  $y = \sqrt[3]{x}$ . Ее производная в точке  $x_0 = 2$ , согласно определению, находится по формуле:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$ ;      в)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x + 2} - \sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$ ;      г)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - \sqrt[3]{2}}{\Delta x}$ .

2. Непрерывность функции для ее дифференцируемости является условием

- а) необходимым;      в) необходимым и достаточным;  
б) достаточным;      г) ни необходимым, ни достаточным.

3. Функция дифференцируема в точке  $x_0$ , если

- а) она непрерывна в точке  $x_0$ ;  
б) имеет в этой точке производную;  
в) имеет в точке  $x_0$  односторонние производные;  
г) существует предел функции в точке  $x_0$ .

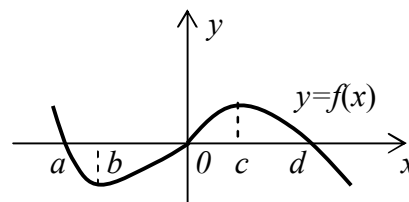


Рис. 1

4. Верно ли, что если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$   $n$  раз, то она дифференцируема в точке  $x_0$   $(n-1)$  раз?

- а) да;      в) ничего определенного сказать нельзя;  
б) нет;      г) другой вариант.

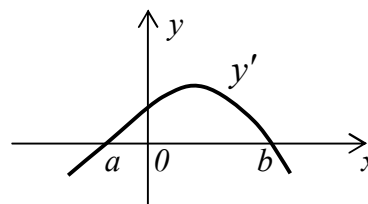
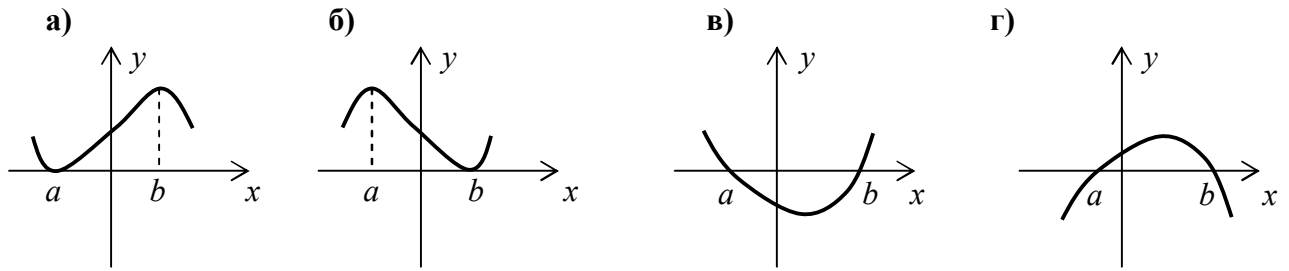


Рис. 2

5. На рис. 1 изображен график функции  $y = f(x)$ . Производная  $y'$  равна нулю в точках

- а)  $a, 0, d$ ;      б)  $b, c$ ;      в)  $b, 0, c$ ;      г)  $a, b, c$ .

6. На рис. 2 изображен график производной некоторой функции. Какой из рис. а)–г) изображает вид графика функции?



7. На рис. 3 изображен график функции  $f$ . Какие из утверждений 1–5 истинны:

- 1) функция  $f$  дифференцируема на множестве  $\mathbb{R}$ ;
- 2) функция  $f$  не дифференцируема в точке  $x_0=0$ ;
- 3) функция  $f$  имеет в точке  $x_0=0$  экстремум;
- 4) функция  $f$  не имеет в точке  $x_0=0$  экстремума;
- 5) точка  $x_0=0$  – критическая точка функции?

а) 1), 2), 5); б) 2), 3); в) 2), 4), 5); г) 2), 3), 5).

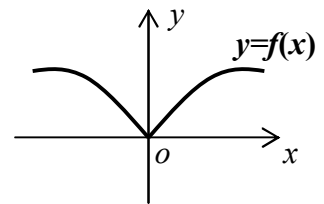


Рис. 3

8. Производная функции  $y = e^{2\pi}$  равна

а)  $e^{2\pi}$ ; б)  $2e^{2\pi}$ ; в) 0; г)  $2\pi e^{2\pi-1}$ .

9. Главной частью приращения  $\Delta f(x_0)$  дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $f$  является выражение

а)  $f'(x_0)$ ; б)  $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ;

в)  $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ,  $f'(x_0) \neq 0$ ; г)  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ .

10. Геометрически дифференциал функции в точке означает

- а) приращение ординаты точки кривой;
- б) приращение ординаты точки касательной;
- в) тангенс угла наклона касательной к оси  $OX$ ;
- г) отрезок секущей, заключенный между точками на кривой.

11. Дифференциал функции  $y = \arcsin 2x$  равен

а)  $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ ; б)  $\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ ; в)  $\frac{dx}{2\sqrt{1-4x^2}}$ ; г)  $\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

12. Угловым коэффициентом касательной, проведенной к кривой  $y = \frac{2x+1}{x}$  в точке

ке  $x_0=1$ , равен

а) 0; б) 1; в) -1; г) 3.

13. Функция  $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x}$  имеет минимум в точке

а)  $\frac{4}{5}$ ; б)  $\frac{4}{3}$ ; в) 0; г) 1.

14. Наибольшее значение функции  $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  на отрезке  $[1;2]$  равно

а) 8; б) 27; в) 64; г) 48.

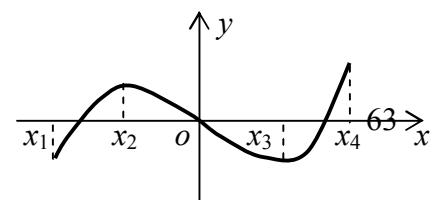


Рис. 4

15. Кривая, изображенная на рис. 4, выпукла вверх на промежутке  
а)  $(x_2; x_3)$ ; б)  $(x_1; 0)$ ; в)  $(x_1; x_3)$ ; г)  $(0; x_4)$ .

**Часть 2. В заданиях 16–20 запишите ответ**

16. Приведите пример функции непрерывной, но не дифференцируемой в точке  $x=1$ .

17. Приведите пример функции, которая имеет в точке  $x_0$  экстремум, но не дифференцируема в ней.

18. Является ли функция  $y = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0, \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$  дифференцируемой в точке  $x_0=0$  ?

19. Найдите производную функции  $y = \ln^2 \sqrt{3x + 4}$ .

20. Найдите значение  $y''(0)$  для функции  $y = e^{2x}$ .

21. Диагностика показала сформированность познавательных УУД Вашего класса на низком уровне (поиск и обработка информации). Вам необходимо часть занятия посвятить историческому экскурсу по теме «Производная». Выберите форму проведения занятия: (Выберите один вариант ответа):

- а) веб-квест
- б) лекция
- в) видео
- г) рассказ

22. Диагностика показала сформированность коммуникативных УУД Вашего класса на низком уровне. Вам необходимо провести контроль с целью выявления знания производных основных функций. Выберите форму контроля: (Выберите один вариант ответа):

- а) тест
- б) самостоятельная работа
- в) математический диктант
- г) устный опрос в парах

**12. Контрольная работа по модулю 3.1.**

Вычислить интегралы:

1.  $\int \ln(4x^2 + 1) dx$ .

2.  $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$ .

3.  $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$ .



$$4. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$5. \int_0^1 x^2 \cdot e^{3x} dx.$$

### **13. Вопросы к коллоквиуму по модулю 3.1.**

1. Понятие первообразной, основные теоремы о первообразных. Примеры. Условие, при котором данная функция является первообразной некоторой функции на промежутке.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования, примеры.
5. Метод замены переменной. Примеры.
6. Метод интегрирования по частям. Примеры.
7. Интегрирование рациональных функций, метод неопределенных коэффициентов.
8. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.
9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

### **14. Контрольная работа по модулю 3.2.**

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ .
2. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y = (x-1)^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$
3. Вычислить длину дуги кривой:
 
$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$
4. Найдите центр тяжести четверти окружности  $x^2 + y^2 = 4$ , расположенной в первой координатной четверти.
5. Найдите работу переменного тока, изменяющегося по формуле  $I = I_0 \sin \omega t$  за промежуток времени  $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$ , если сопротивление цепи равно  $R$ .

### **15. Темы докладов по модулю 3.2.**

1. Вычисление площадей в полярных координатах с помощью определенного интеграла.
2. Принцип Кавальери.
3. Кривизна плоской кривой.
4. Площадь поверхности вращения.
5. Теоремы Гульдина–Паппа.
6. Вычисление моментов инерции с помощью определенного интеграла.
7. Вычисление работы переменной силы с помощью определенного интеграла.

### **16. Контрольная работа по модулю 3.3.**

1. Изменить порядок интегрирования и построить область интегрирования:

$$a) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy; \quad б) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) dx.$$

2. Вычислить интегралы:

$$a) \iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D: y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2};$$

$$б) \int_L (xy - y^2) dx + x dy, \quad L: \text{дуга параболы } y=2x^2 \text{ от } A(0;0) \text{ до } B(1;2).$$

3. С помощью формулы Грина преобразовать данный криволинейный интеграл к двойному (не вычислять):

$$\oint_L \frac{\ln x}{x} \cdot y^2 dx + (x^2 \ln y + \ln^2 x) dy.$$

4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями:  $x+y=6$ ,  $y=\sqrt{3x}$ ,  $z=4y$ ,  $z=0$ .
5. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь фигуры, лежащей в первой координатной четверти и ограниченной частью эллипса:  $x=3\cos t$ ,  $y=2\sin t$ .

### **Летняя сессия, 3 курс**

17. Ориентировочный вариант теста для входного контроля.
18. Контрольная работа по модулю 4.1.
19. Вопросы к коллоквиуму по модулю 4.1.
20. Контрольная работа по модулю 4.2.
21. Вопросы к коллоквиуму по модулю 4.2.
22. Вопросы к зачету.
- 23.

**17. Тест входного контроля по интегральному исчислению.**  
**(ориентировочный вариант)**

1. Первообразной для функции  $y = \cos^2 x$  на множестве  $R$  является функция  
A.  $y = \sin^2 x$       B.  $y = \sin 2x$       C.  $y = 7 + 2x + \sin 2x$       D.  $y = \frac{2x - 11 + \sin 2x}{4}$ .
2. Функция  $y = |x + 2|$  может быть первообразной некоторой функции в промежутке  
A.  $[-3; 0]$ .      B.  $[-5; -1]$ .      C.  $[-1; 0]$ .      D.  $(-\infty; +\infty)$ .
3. Если  $J(x) = \int x e^2 dx$ , то  $J(1) = 3$ , когда  $c$  равно  
A. 3.      B. 0.      C. -3.      D. 1.
4. Если  $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ , то  $J(2) = 4$ , когда  $c$  равно  
A. 3.      B.  $\frac{10}{3}$ .      C. 0.      D. 2.
5. Если  $J(x) = \int \cos^2 x dx$ , то  $J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ , когда  $c$  равно  
A.  $\frac{\pi}{4}$ .      B. 0.      C.  $\frac{\pi}{2}$ .      D.  $-\frac{\pi}{4}$ .
6. В семействе интегральных кривых функции  $y = \frac{1}{\sin^2 x}$  через точку  $P\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$  проходит кривая  
A.  $y = \operatorname{tg} x$ .      B.  $y = 1 - \frac{1}{\sin x}$       C.  $y = 1 - \operatorname{ctg} x$ .      D.  $y = -\operatorname{ctg} x$ .
7. Два тела начали движение по прямой одновременно в разных направлениях из одной точки. Скорость первого  $v_1(t) = 2t^2 - 3t + 1$ , скорость второго  $v_2(t) = 2t^2 + 5t - 3$  (скорость измеряется в м/с). Время, через которое тела будут от начальной точки на одинаковом расстоянии, равно  
A. 2 с.      B. 4 с.      C. 10 с.      D. 1 с.
8. Не вычисляя интегралов, а исходя из условий интегрируемости, убеждаемся, что будет корректно поставить вопрос о вычислении интеграла  $\int_{-3}^3 f(x) dx$  для функции  
A.  $f(x) = \frac{1}{x}$       B.  $f(x) = \operatorname{tg} x$       C.  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$       D.  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ако } -1 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & \text{ако } 0 < x \leq 3. \end{cases}$
9. Среднее значение функции  $y = -3x^2 + 4x$  на отрезке  $[0; 3]$  равно  
A. -3.      B. -9.      C. 3.      D. 9.

10. Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, убежда-

емся, что интеграл  $\int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx$  равен

- A.  $\frac{25}{2}$  □.      B.  $\frac{25}{4}$  □.      C.  $10$  □.      D.  $5$  □.

### **18. Контрольная работа по модулю 4.1 по теме “Числовые ряды”**

1. Укажите, какие из рядов удовлетворяют необходимому признаку сходимости:

1)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$ ;    2)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ ;    3)  $\frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \dots$ ;    4)  $1 + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{16}{17} + \dots$ .

2. Укажите, какие из рядов заведомо расходятся:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^2}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$ .

3. Известно поведение последовательности частичных сумм  $\{S_n\}$  ряда. Укажите, в каких случаях ряд сходится:

4. 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 5$ ;    2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ ;    3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \cos 5$ ;    4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ .

5. Укажите, в каких случаях ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} -|a_n|$  сходится.

### **19. Вопросы к коллоквиуму.**

1. Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, сходящихся и расходящихся рядов, суммы ряда.
2. Гармонический ряд. Геометрические ряды.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Понятие положительного ряда. Признаки сходимости положительных рядов: необходимый и достаточный, предельный признак сравнения, Даламбера, Коши. Переместительное свойство сходящихся рядов.
5. Понятие знакочередующегося ряда. Теорема Лейбница.
6. Понятие абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Достаточный признак абсолютной сходимости числового ряда.
7. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда, их сходимости и равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
8. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Теорема о существовании интервала сходимости. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.

9. Абсолютная и равномерная сходимость степенного ряда в круге сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда.
10. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
11. Задача разложения функции в степенной ряд. Единственность разложения.
12. Понятие ряда Тейлора. Необходимое условие разложения функции в ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.
13. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена) функций  $y = a^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \ln(1+x)$ . Биномиальный ряд. Применение биномиального ряда к вычислению значений радикалов.
14. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.

## **20. Контрольная работа по модулю 4.2**

1. Найдите область сходимости степенного ряда

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^{n+1}}{n}$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\delta+5)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$ .

2. Разложите функцию в ряд Тейлора по степеням  $x - x_0$ :

а)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 3$ ;

б)  $f(x) = 2x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - x$        $x_0 = 0$ .

3. Вычислите приближенное значение  $\sin 1^\circ$ , взяв три первых члена разложения функции в ряд и оцените погрешность.

4. Вычислите  $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$  с точностью до 0,001.

## **21. Вопросы к зачету**

1. Теория множеств: история развития, парадоксы, современное состояние.
2. Проблема сравнения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентные множества и их свойства.
3. Счетные множества и их основные свойства.
4. Счетность множества целых, рациональных и алгебраических чисел.
5. Понятие мощности множества. Несчетность множества точек отрезка  $[0;1]$ .
6. Континуальные множества.
7. Теорема о существовании множества сколь угодно высокой мощности.
8. Признак Кантора–Бернштейна равномощности множеств. Примеры.
9. Сравнение мощностей.

## Дополнительные вопросы по модулям 4.1 и 4.2

1. Числовые ряды. Сходимость ряда. Понятие суммы ряда.
2. Необходимый признак сходимости. Свойства сходящихся рядов. Гармонический ряд. Геометрические ряды.
3. Критерий Коши сходимости числовой последовательности и числового ряда.
4. Понятие положительного числового ряда. Необходимый и достаточный признак сходимости положительного числового ряда.
5. Допределный и предельный признаки сравнения рядов. Примеры.
6. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительных рядов. Примеры.
7. Интегральный признак сходимости положительных рядов. Примеры.
8. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Примеры. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Признак абсолютной сходимости (Даламбера).
9. Переместительное свойство положительных сходящихся рядов. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. О перестановке членов неабсолютно сходящихся рядов. Умножение абсолютно сходящихся рядов.
10. Понятие функциональной последовательности, ее сходимости и равномерной сходимости. Примеры. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.
11. Понятие функционального ряда и его области сходимости. Примеры.
12. Равномерная сходимость функционального ряда. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
13. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.
14. Непрерывность суммы функционального ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Примеры.
15. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда; формулы для его вычисления. Область сходимости степенного ряда. Примеры.
16. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Примеры.
17. Единственность разложения функции в степенной ряд. Понятие ряда Тейлора.
18. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда Тейлора.
19. Достаточный признак сходимости ряда Тейлора.
20. Разложение показательной, логарифмической и тригонометрических функций в ряд Тейлора.
21. Разложение степенной функции в ряд Тейлора.
22. Приближенные вычисления значений функций и интегралов с помощью степенных рядов. Примеры.

23. Понятие тригонометрического ряда. Ряд Фурье. Теорема о разложении функции в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
24. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.
25. Разложение четной (нечетной) функции в ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье функций на отрезке  $[0; \pi]$ . Разложение функций в ряд Фурье на отрезке  $[-l; l]$ .

#### **Зимняя сессия, 4 курс**

22. Примерный вариант теста (входной контроль).
23. Контрольная работа по модулю 5.1.
24. Проектное задание по модулю 5.2.
25. Контрольная работа по модулю 5.3.
26. Вопросы к экзамену.

## 22. Тест (входной контроль)

1. Формула  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -3, \\ 9 - x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 3, \\ -x, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$

а) задает функцию на  $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ ;

б) не задает функцию на

$(-\infty; +\infty)$ ;

в) задает функцию на  $(-\infty; +\infty)$ ;

г) задает функцию на  $[-3; 3]$ .

2. Функция  $f(x) = \frac{\sin 10x - 2 \cos 3x}{6 + \operatorname{ctg}^2 x}$

а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;

б) ограничена;

в) не ограничена ни сверху, ни снизу;

г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3. Если последовательность  $(y_n)$  – бесконечно большая и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d$ ,  $d \neq 0$ , то

а) последовательность  $(x_n \cdot y_n)$  – бесконечно большая;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = d$ ;

в) последовательность  $(x_n \cdot y_n)$  – ограничена;

г) ничего определенного о последовательности  $(x_n \cdot y_n)$  сказать нельзя.

4. Если  $(x_n)$  и  $(y_n)$  – бесконечно большие последовательности, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$

равен:

а)  $\infty$ ;

б) 0;

в) некоторому числу  $a \neq 0$ ;

г) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя.



5. Число  $A$  называется пределом функции  $f$  при  $x \rightarrow \infty$ , если:

- а) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $c > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > c$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ;
- б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $c > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| < c$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ;
- в) для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $c > 0$  и  $x$ , такие, что как только  $|x| > c$ , так  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ;
- г) для  $\varepsilon > \frac{1}{2}$  существует такое  $c > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > c$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

6. Функция  $f$ , заданная в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

а)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \Delta y$ ;

б)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = 0$ ;

в)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ ;

г)  $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} (f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)) = 0$ .

7. Функция  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$  в точке  $x_0 = 0$

- а) непрерывна только слева;
- б) непрерывна только справа;
- в) разрывна;
- г) непрерывна.

8. Не вычисляя интегралов, а исходя из условий интегрируемости, убеждаемся, что будет корректно поставить вопрос о вычислении интеграла

$\int_{-3}^3 f(x)dx$  для функции

а)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

б)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ;

в)  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ ;

г)  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & \text{если } 0 < x \leq 3. \end{cases}$

9. Число  $I$  называется определенным интегралом от функции  $f$  по отрезку  $[a; b]$ , если

а)  $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$  и при любом разбиении отрезка  $[a; b]$  на части, лишь бы  $\lambda < \delta$ , и произвольном выборе точек  $\xi_k$  выполняется неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$ ;

б)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  такое, что при любом разбиении отрезка  $[a; b]$  на части, лишь бы  $\lambda \geq \delta$ , и произвольном выборе точек  $\xi_k$  выполняется неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$ ;

в)  $\forall \varepsilon > 0$  и при любом разбиении отрезка  $[a; b]$  на части и произвольном выборе точек  $\xi_k$  выполняется неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$ ;

г)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  такое, что при любом разбиении отрезка  $[a; b]$  на части, лишь бы  $\lambda < \delta$ , и произвольном выборе точек  $\xi_k$  выполняется неравенство  $|\sigma - I| < \varepsilon$ .

10. Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, убеж-

даемся, что интеграл  $\int_{-5}^0 \sqrt{25 - x^2} dx$  равен

а)  $\frac{25}{2} \pi$ ;

б)  $\frac{25}{4} \pi$ ;

в)  $10\pi$ ;

г)  $5\pi$ .

### **23. Контрольная работа № 1 (модуль 7.1)**

#### *Вариант № 1*

1. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества является открытым множеством.
2. Является ли фундаментальной последовательность  $y_n(x) = x^n$  в пространстве  $C\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ?
3. Докажите, что уравнение  $x - \varepsilon \sin x = m$  при любом  $m$  и  $0 < \varepsilon < 1$  имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.
4. Приведите пример замкнутого множества в  $R^2$ .

### **24. Проектное задание (модуль 5.2)**

#### ***Тема 1. Монотонные функции***

*Цель:* изучив свойства монотонной функции, описать их доказательства и показать применение свойства монотонности функции при решении некоторых математических задач.

*Примерное содержание.* Свойства монотонной функции: множество точек разрыва, интегрируемость, дифференцируемость, интегрируемость производной (и другие, которые студент может выбрать самостоятельно).

#### *Литература*

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.; 1970.
3. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М.; 1968.

#### ***Тема 2. Функции с конечным изменением***

*Цель:* изучив основные свойства функции с конечным изменением, описать их доказательства.

*Примерное содержание.* Связь с ограниченностью, арифметические операции над функциями с конечным изменением, свойства вариации функции с конечным изменением, связь с монотонными функциями, множество точек разрыва, множество точек дифференцируемости, непрерывные функции с конечными изменениями.

Геометрическое приложение класса функций с ограниченным изменением – спрямляемость непрерывной кривой  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

#### *Литература*

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

### **Тема 3. Абстрактная мера Лебега**

*Цель:* построить и описать лебегову меру как продолжение меры по схеме Лебега.

*Примерное содержание.* Доказательство всех теорем на пути построения меры  $m: \sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;  $m$  -  $\sigma$  - аддитивная мера на полукольце  $\sigma$  с единицей:

- 1) продолжить  $m$  ( $m^1$ ) на  $\mathbb{R}(\sigma)$  – минимальное кольцо над полукольцом  $\sigma$ . Доказать единственность продолжения. Доказать  $\sigma$ -аддитивность продолжения  $m^1$ ;
- 2) продолжить  $m^1$  ( $\sigma \in \mathbb{R}(\sigma)$  на булиан единицы полукольца) до внешней меры  $\mu^*$ ;
- 3) построить лебегову меру  $\mu$  как сужение  $\mu^*$  на класс измеримых множеств.

#### *Литература*

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.
2. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.; 1974.

### **Тема 4. Функции, суммируемые с квадратом**

*Цель:* описать пространство суммируемых с квадратом функций.

*Примерное содержание.*  $L_2$  – гильбертово пространство. Последовательное доказательство того, что  $L_2$  – линейное пространство,  $L_2$  – евклидово пространство (т.е. пространство со скалярным произведением),  $L_2$  – полное пространство,  $L_2$  – сепарабельное пространство. Доказательство существования счетного базиса и построение ряда Фурье для  $f \in L_2$  по этому базису с применением общей теории гильбертовых пространств.

### Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

### **25. Контрольная работа (модуль 5.3)**

#### Вариант № 1

1. Покажите, что если функция  $y = f(x)$  измерима на множестве  $E$ , то и функция  $y = k f(x)$  также измерима на этом множестве.
2. Докажите, что следующие функции интегрируемы по Лебегу на отрезке  $[0,1]$  и вычислите интегралы: а)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in J, \\ 2, & x \in Q \end{cases}$ ; б)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 2, & x \in CK \end{cases}$ , где  $K$  - канторово множество, а  $CK$  - его дополнение до всего отрезка  $[0,1]$

### **26. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Докажите, что если  $A$  измеримое множество положительной меры, то в нем существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми рационально.
2. Множества  $A$  и  $B$  измеримы по Лебегу, причем  $A \cap B = \emptyset$ . Докажите, что для любого множества  $E$  верно равенство  $m^*(E \cap (A \cup B)) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$ .
3. Множества  $A$  и  $B$  измеримы по Лебегу, причем  $A \cap B = \emptyset$ . Докажите, что для любого множества  $E$  верно равенство  $m_*(E \cap (A \cup B)) = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B)$ .
4. Докажите, что для любых измеримых по Лебегу множеств  $F$  и  $G$  справедливо соотношение  $m(F \cup G) = m(F) + m(G) - m(F \cap G)$ .
5. Является ли измеримой функцией сумма сходящегося на отрезке  $[a, b]$  ряда измеримых функций?
6. Пусть  $x = \varphi(t)$  - измеримая на множестве  $E$  функция,  $E_1 = \varphi(E)$  - множество ее значений, а  $y = f(x)$  - функция, непрерывная на  $E_1$ . Выясните, является ли измеримой на множестве  $E$  сложная функция  $y = f(\varphi(t))$ .
7. Пусть  $y = f(x)$  измерима на множестве  $E$ ,  $E_0$  - измеримое подмножество множества  $E$ . Обязано ли множество  $f(E_0)$  быть измеримым? Если нет, то приведите соответствующий пример.

8. Пусть  $x = \varphi(t)$  - функция, непрерывная на отрезке  $E = [\alpha, \beta]$ ,  $E_1 = \varphi(E)$  - множество ее значений, а  $y = f(x)$  - функция, измеримая на  $E_1$ . Обязана ли быть измеримой на множестве  $E$  сложная функция  $y = f(\varphi(t))$ ?
9. Покажите, что если  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ,  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[0, 1]$ , то  $f(x) = 1$  почти всюду.

## 27. Проектное задание (модуль 5.2)

В летней сессии 4 курса контактной работы по дисциплине учебным планом не предусмотрено, планируется 54 ч самостоятельной работы. Организовать её предлагается в виде выполнения группового проекта (группами по 3–4 человека).

Выберите по согласованию с преподавателем тему из дисциплины «Математический анализ и элементы теории функций». Подберите теоретический материал по этой теме, который вы изучали в вузе. Обратитесь к школьным учебникам, проанализируйте содержание выбранной темы в них, оцените уровень строгости изложения материала, имеющиеся задания и задачи. Оформите методическую разработку данной темы в виде проекта.

Примерное содержание проекта приведено ниже.

1. Описание проблемы.
2. Цель.
3. Задачи.
4. Распределение ролей в группе.
5. План реализации проекта.
6. Содержание проекта.
7. Выводы и варианты возможного применения результатов.
8. Формулировка гипотезы о возможных путях решения проблемы
9. Список литературы.
10. Приложения (инструменты).

Критерии оценки проекта и шкала оценивания приведены в табл. 4 и 5.

*Таблица*

*Критерии оценки проекта*

	1. Выполнение проекта				
	Объем и полнота работы, законченность	Уровень самостоятельности	Аргументация, обоснованность выводов	Оригинальность подходов, решений	Итого
	0–5	0–5	0–5	0–5	0–20

Оценка эксперта					
Самооценка студента					

	2. Оформление и защита проекта				
	Качество оформления	Качество доклада (содержание и структура, презентация, представление)	Ответы на вопросы	Владение материалом	Итого
	0–5	0–5	0–5	0–5	0–20
Оценка эксперта					
Самооценка студента					
Итоговая оценка (0–40)	(среднее арифметическое двух оценок эксперта и самооценки)				

Таблица

*Шкала оценки проекта*

Баллы	0–23	24–28	29–35	36–40
Оценка	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично

В табл. 6 представлен лист рефлексии совместной и индивидуальной работы над проектом

Таблица

*Лист рефлексии совместной и индивидуальной работы на различных этапах работы над проектом*

№	Критерии оценивания	Да	Нет	Затрудняюсь ответить
1.	Активно принимал участие в обсуждении проблемы проекта			
2.	Предлагал свои решения проблемы, вносил интересные идеи			
3.	Задавал вопросы, пытаясь уточнить все до конца			
4.	Плодотворно сотрудничал с другими членами группы			

5.	Был сосредоточен на выполнении задания			
6.	Ответственно выполнял любую работу при подготовке проекта			
7.	Нравилось исследовать что-либо при выполнении проекта			
8.	Нравилось собирать фактический материал по теме проекта			
9.	Работал с разными источниками информации			
10.	Активно участвовал в оформлении проекта			
11.	Проект был интересен для меня			
12.	Я узнал (а) много нового при работе над проектом			

Подсчет количества ответов «да»: 11–12 соответствует высокому уровню познавательной активности, креативному уровню сформированности проверяемых компетенций, 8–10 – продуктивному уровню, 6–7 – базовому.

#### *Анкета участника проекта*

1. Что нового вы узнали в ходе работы над проектом?  
\_\_\_\_\_
2. Какие новые знания, умения вы приобрели?  
\_\_\_\_\_
3. Где вы сможете использовать приобретенные знания и умения?  
\_\_\_\_\_
4. Какой этап работы над проектом показался вам наиболее трудным почему?  
\_\_\_\_\_
5. Что не удалось реализовать в ходе проекта? Как вы считаете почему?  
\_\_\_\_\_
6. Чтобы вы хотели добавить в данный проект или изменить в нем?  
\_\_\_\_\_
7. Оцените свой вклад в общий результат.  
\_\_\_\_\_
8. Считаете ли вы этот проект полезным для себя, для своей будущей профессиональной деятельности?  
\_\_\_\_\_



**3.3.1. КАРТА ЛИТЕРАТУРНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ**

Направление подготовки: **44.03.01 Педагогическое образование**

Направленность (профиль) образовательной программы

**Математика**

квалификация (степень) «бакалавр»

**по заочной форме обучения**

(общая трудоемкость 20 з.е.)

Наименование	Место хранения/ электронный адрес	Кол-во экземпляров/точек доступа
<b>ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА</b>		
Фихтенгольц, Г. М.. Основы математического анализа: учебник. Ч. 1/ Г. М. Фихтенгольц. - 8-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2006. - 448 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	148
Фихтенгольц, Г. М.. Основы математического анализа: учебник. Ч. 2/ Г. М. Фихтенгольц. - 8-е изд., стер.. - СПб.: Лань, 2006. - 464 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	149
Бохан, К.А.. Курс математического анализа: Учеб. пособие для студ.-заочников физико-математических фак-ов пед. институтов. Т. 1/ К.А. Бохан, И.А. Егорова, К.В. Лашенков. - Мн.: Интеграл, 2004. - 435 с	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	48
Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление: лекции и практикум/ ред. И. М. Петрушко. - 4-е изд., стер.. - СПб.; М.: Лань, 2009. - 288 с.: ил..	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	48
Орловский, Д. Г.. Неопределенный интеграл. Практикум: учебное пособие/ Д. Г. Орловский. - СПб.: Лань, 2006. - 432 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	90

Воробьев, Н. Н. Теория рядов: учебное пособие/ Н. Н. Воробьев. - 6-е изд., стер.. - СПб.: Лань, 2003. - 308 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	30
Виленкин, Н. Я. Математический анализ. Мощность. Метрика. Интеграл: учебное пособие для студентов-заочников IV курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ Н. Я. Виленкин, М. Б. Балк, В. А. Петров. - М.: Просвещение, 1980. - 143 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	201
Багачук, А.В. Теория функций действительного переменного: Теоретические и практические задания / А.В. Багачук, М.П. Шатохина, М.Ш. Якименко. – Красноярск, 2005. – 100с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	121
Журавлева Н. А. "Освоение основных понятий математического анализа посредством решения задач на доказательство". г. Красноярск, 2018. 149с. [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://elib.kspu.ru/document/29466">http://elib.kspu.ru/document/29466</a>	ЭБС КГПУ им. В.П. Астафьева	Индивидуальный неограниченный доступ
<b>ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА</b>		
Белова, Т.И. Вычисление неопределенных интегралов. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие; компьютерный курс/ Т. И. Белова, А. А. Грешилов, И. В. Дубоград; ред. А. А. Грешилова. - М.: Логос, 2004. - 184 с.: ил.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	30
Виленкин, Н. Я. Математический анализ. Введение в анализ: учебное пособие для студентов-заочников I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович. - М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1983. - 191 с.: ил	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	95
Давыдов, Н. А. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. - 4-е изд., доп.. - М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1973. - 256 с	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	246
Задачник по курсу математического анализа: учебное пособие для студентов заочных отделений физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Ч. I/ Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон, И. В. Матвеев и др.; Ред. Н. Я. Виленкина. - М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1971. - 350 с	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	121

Ильин, В.А. Математический анализ: учебник для студентов вузов/ В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; Ред. А. Н. Тихонова. - М.: Наука, 1979.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	187
<b>УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ</b>		
Шкерина, Людмила Васильевна. Математический анализ : индивидуальные домашние задания для студентов I курса [Текст] : сборник задач / Л. В. Шкерина, Е. Н. Михалкин. - Красноярск : КГПУ им. В. П. Астафьева, 2010. - 160 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	85
Лабораторные работы по введению в анализ с использованием компьютера: Метод. разработка/ Сост. Н.А. Журавлева, М.Ш. Якименко. - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2005. - 68 с	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	134
Мордкович, А. Г. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной: учебное пособие для студентов-заочников I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ А. Г. Мордкович, А. Е. Мухин. - М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1985. - 145 с.	Научная библиотека КГПУ им. В.П. Астафьева	144
<b>РЕСУРСЫ СЕТИ ИНТЕРНЕТ</b>		
Интернет-библиотека Виталия Арнольда	<a href="http://ilib.mccme.ru/">http://ilib.mccme.ru/</a>	Свободный доступ
<b>ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ</b>		
Гарант [Электронный ресурс]: информационно-правовое обеспечение : справочная правовая система. – Москва, 1992– .	Научная библиотека	локальная сеть вуза
Elibrary.ru [Электронный ресурс] : электронная библиотечная система : база данных содержит сведения об отечественных книгах и периодических изданиях по науке, технологии, медицине и образованию / Рос. информ. портал. – Москва, 2000. Режим доступа: <a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a> .	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	Свободный доступ
East View : универсальные базы данных [Электронный ресурс] : периодика России, Украины и стран СНГ . – Электрон.дан.	<a href="https://dlib.eastview.com/">https://dlib.eastview.com/</a>	Индивидуальный неограниченный доступ



### 3.3.2. Карта материально-технической базы дисциплины МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Направление подготовки: **44.03.01 Педагогическое образование**

Направленность (профиль) образовательной программы

#### Математика

квалификация (степень): бакалавр

**по заочной форме обучения**

(общая трудоемкость 20 з.е.)

Аудитория	Оборудование
<b>для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации</b>	
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 1-10	Проектор-1шт., учебная доска-2шт., компьютер -1шт Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 1-11а	Маркерная доска-1шт., компьютер-7шт., доска учебная-1шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 2-06	Компьютер с выходом в интернет – 9шт., проектор – 1шт., наглядные пособия (стенды), маркерная доска – 1шт. с устройством для интерактивной доски, доска маркерная – 1шт Альт Образование 8 (лицензия № ААО.0006.00, договор № ДС 14-2017 от 27.12.2017)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 2-11	Учебная доска-1шт., проектор-1шт., компьютер-1шт., маркерная доска-1шт., демонстрационный стол-1шт Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 2-19	Маркерная доска-2шт., интерактивная доска-1шт., проектор-1шт., ноутбук-10шт., телевизор- 1шт., компьютер- 2шт., МФУ-1шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 3-02	Компьютер- 1шт., интерактивная доска - 1 шт., система видеоконференцсвязи Policom – 1 шт. (без сети), учебная доска-1шт Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 3-11	Учебная доска-1шт., экран-1шт., проектор-1шт., компьютер-1шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 3-12	Компьютер с выходом в интернет-10шт, учебная доска-1 шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 3-13, 3-14	Компьютер-15шт., принтер-1шт., маркерная доска-1шт., проектор-1шт., интерактивная доска-1шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7,	Проектор-1шт., компьютер-12шт., маркерная доска-1шт., интерактивная доска-1шт.

ауд. 3-15	Microsoft® Windows® 8.1 Professional (ОЕМ лицензия, контракт № 20А/2015 от 05.10.2015); Kaspersky Endpoint Security – Лиц сертификат №1В08-190415-050007-883-951; 7-Zip - (Свободная лицензия GPL); Adobe Acrobat Reader – (Свободная лицензия); Google Chrome – (Свободная лицензия); Mozilla Firefox – (Свободная лицензия); LibreOffice – (Свободная лицензия GPL); XnView – (Свободная лицензия); Java – (Свободная лицензия); VLC – (Свободная лицензия); Живая математика 5.0 (Контракт НКС-ДБ-294/15 от 21.09.2015, лицензия № 201515111); GeoGebra (Свободно распространяемая в некоммерческих (учебных) целях лицензия)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 4-01	Учебная доска-1шт., библиотека
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 4-02	Компьютер -1шт., проектор-1шт., интерактивная доска-1шт., маркерная доска-1шт., учебная доска-1шт. Linux Mint – (Свободная лицензия GPL)
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 4-11	Учебная доска-1шт.
<b>для самостоятельной работы</b>	
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 1-01 Отраслевая библиотека	Копир-1шт
г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, ауд. 1-02 Читальный зал	Компьютер-10шт., принтер-1шт Альт Образование 8 (лицензия № ААО.0006.00, договор № ДС 14-2017 от 27.12.2017