МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.П.АСТАФЬЕВА»**
(КГПУ им. В. П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Напрвление: 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Математика»

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой алгебры, геометрии и
методики их преподавания
руководитель ______ В.Р. Майер
«10» 06 2015 г.

Выпускная квалификационная работа

# МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ОБУЧЕНИЮ УЧАЩИХСЯ 8 КЛАССА ПРИЕМАМ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ


Выполнила студентка группы 42
А. В. Шакурова ______, 10.06.15 (подпись, дата)
Форма обучения: заочная

Научный руководитель
старший преподаватель кафедры алгебры,
геометрии и методики их преподавания
Е. А. Аёшина ______, 10.06.15 (подпись, дата)

Рецензент
к. ф.-м. н., доцент кафедры
алгебры, геометрии и методики
их преподавания
С. И. Калачева ______, 10.06.15 (подпись, дата)


Дата защиты 23.06.15г.

Оценка хорошо

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» (КГПУ им. В.П. Астафьева) * ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ *

Красноярск
2015

## Содержание

## Введение

Математика проникает почти во все области деятельности человека, что положительно сказалось на темпе роста научно-технического прогресса. В связи с этим стало жизненно необходимым усовершенствовать математическую подготовку подрастающего поколения. Ребенок с первых дней занятий в школе встречается с задачей.

Математическая текстовая задача это связанный лаконичный рассказ, в котором введены значения некоторых величин и предлагается отыскать другие неизвестные значения величин, зависимые от данных и связанные с ними определенными соотношениями, указанными в условии. Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса). В условии соблюдаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекта, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними. Требования задачи это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме («Найти площадь треугольника» или «Чему равна площадь прямоугольника»). Это значение величины называется искомым.

Иногда задачи формулируются таким образом, что часть условия или всё условие включено в одно предложение с требованием задачи. В реальной жизни довольно часто возникают самые разнообразные задачные ситуации, сформулированные на их основе задачи. Сначала и до конца обучения в школе математическая текстовая задача неизменно помогает ученику вырабатывать правильные математические понятия. Решая текстовые задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Текстовые задачи способствуют развитию их логического мышления. Большое значение имеет решение текстовых задач и в воспитании личности учащихся.

В традиционном российском школьном обучении математике текстовые задачи всегда занимали особое место. С одной стороны, практика применения текстовых задач в процессе обучения во всех цивилизованных государствах идет от глиняных табличек Древнего Вавилона и других древних письменных источников, то есть имеет родственные корни. С другой – пристальное внимание обучающих к текстовым задачам, которое было характерно для России, – почти исключительно российский феномен.

Известно, что исторически долгое время математические знания передавались из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания вместе с их решениями. Первоначально обучение математике велось по образцам. Ученики, подражая учителю, решали задачи на определенное «правило».

Подтверждением тому служит фрагмент из книги И. Бёшенштейна, в котором сначала дается «определение» тройного правила, формулируется правило, потом приводится задача и рецепт ее решения по правилу. «Тройным правилом» называется regula aurea (т. е. магистерское правило, или золотое правило), с помощью которого совершаются все торговые расчеты всех ремесленников и купцов; оно называется в гражданском обиходе de try или de tree, ибо содержит в себе три величины, при помощи которых можно вычислить«все заметь еще числа, стоящие сзади и спереди. Надо стоящее сзади число помножить на среднее и разделить на переднее». Это была обычная практика. По-другому в те времена учить не умели[1].

В давние времена обученным считался тот, кто умел решать задачи определенных типов, встречавшихся на практике (в торговых расчетах и пр.). При этом учащие мало заботились о сознательном усвоении учениками того или иного способа действия. Считалось, что понимать-то едва ли нужно было. «Это ничего, что ты ничего не понимаешь, ты и впереди также многого не будешь понимать», — утешал, бывало, наставник своего питомца, и вместо понимания рекомендовал не заноситься, а выучить наизусть все, что задают, и потом стараться применить это к делу. Так в 1923 г. В. Беллюстин описывал старинную практику обучения решению текстовых задач [2].

Одна из причин заключается в том, что исторически долгое время целью обучения детей арифметике было освоение ими определенным кругом вычислительных умений, связанных с практическими расчетами. При этом основная линия арифметики – линия числа – еще не была разработана, а обучение вычислениям велось через задачи. В «Арифметике» Л.Ф.Магницкого, например, дроби рассматривались как именованные числа (не просто 1/2, а 1/2 рубля, пуда и т.п.), а действия с дробями изучались в процессе решения задач. Эта традиция сохранялась довольно долго. Даже много позже встречались задачи с неправдоподобными числовыми данными типа «Продано 317/19 кг сахара по 21/17 рубля за килограмм…», которые были вызваны к жизни не потребностями практики, а потребностями обучения вычислениям. Упомянутые традиции обучения вычислениям через задачи, на наш взгляд, сказываются на обучении математике до сих пор. Как, например, в самых массовых учебниках для 5 классов «доказывается» равенство 2:3 = 2/3? Очень просто — берут два яблока и делят каждое из них на три равные части [4].

Вторая причина повышенного внимания к использованию текстовых задач в России заключается в том, что в России не только переняли и развили старинный способ передачи с помощью текстовых задач математических знаний и приемов рассуждений, но и научились формировать с помощью задач важные общеучебные умения, связанные с анализом текста, выделением условий задачи и главного вопроса, составлением плана решения, постановкой вопроса и поиском условий, из которых можно получить на него ответ, проверкой полученного результата. Немаловажную роль играло также приучение школьников к переводу текста на язык арифметических действий, уравнений, неравенств, графических образов. Использование арифметических способов решения задач способствовало общему развитию учащихся, развитию не только логического, но и образного мышления, лучшему освоению естественного языка, а это повышало эффективность обучения математике и смежных дисциплин. Именно поэтому текстовые задачи играют столь важную роль в процессе обучения в России, и им отводилось так много времени при обучении математике в школе [3].

Текстовые задачи встречаются в итоговой аттестации, модуля алгебры и реальной математики.

Также по-прежнему, наибольшие затруднения у выпускников вызывает задание (B13) «Текстовые задачи», средний процент выполнения задания данного типа в 2014 году составил 29,36%.Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению». Это самый низкий процент выполнения задания части B[35].

В настоящем исследованиирассматриваются способы решения текстовых задач с помощью рациональных уравнений и системы рациональных уравнений и методические подходы к организации уроков по их изучению.

*Объект исследования:* процесс обучения решению текстовых задач в школьном курсе математики.

*Предмет исследования:* использование рациональных уравнений и систем рациональных уравнений для решения текстовых задач.

Методологическими основами исследования являются изучение научной, учебно-методической и справочной литературы по алгебре, отбор, обобщение и систематизация теоретического материала, подбор и решение текстовых прикладных задач.

*Цель исследования:*описать и обобщить способы решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений, раскрыть методические подходы к организации уроков по их изучению.

*Задачиисследования*:

1) проанализировать учебный материал по данной теме;
2) описать способы решения рациональных уравнений и систем рациональных уравнений;
3) рассмотреть алгоритмы решения текстовых задач в общем виде;
4) рассмотреть алгоритмы решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений;
5) разработать элективный курс по теме «Решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений» для учащихся 8 класса;
6) разработать конспекты по данному элективному курсу.

## Глава 1. Использование рациональных уравнений и систем рациональных уравнений при решении текстовых задач

Решение задач – это необычная работа, а именно тяжелый умственный труд. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, с которым придется работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа.

Значит, для того, чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких основных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач. В связи с этим рассмотрим методы и способы решения рациональных уравнений и систем рациональных уравнений.

### 1.1. Способы решения рациональных уравненийи систем рациональных уравнений

***Определение 1.***Уравнение $f(x) = g(x)$ называется рациональным, если $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные алгебраические выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ – целые выражения, то уравнение называется целым; если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ являются дробными, то рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ называется дробным[6].

***Определение 2.***Дробно-рациональным алгебраическим уравнением называются уравнения вида

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$,( I )

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Далее для определенности будем полагать, что $P(x)$ – многочлен m-й степени, а $Q(x)$ - многочлен n-й степени.

Множество допустимых значений рационального уравнения (I) определяется условием $Q(x) \neq 0$, откуда следует, что $x \neq c_1$, $x \neq c_2, \ldots,$ $x \neq c_n$, где $c_1$, $c_2, \ldots, c_n$ – корни многочлена $Q(x)$. Метод решения уравнения (I) заключается в следующем. Решаем уравнение $P(x) = 0$ ,корни которого обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$, …, $x_m$. Сравниваем множества корней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Те корни многочлена $P(x)$, которые не являются корнями многочлена $Q(x)$, являются корнями (решениями) рационального уравнения (I).

**Пример 1.** Найдите действительные корни уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$,

где $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 1$.

**Решение:**

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня (оба простые): $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Многочлен $Q(x)$ имеет один корень $c_1 = 1$. Следовательно, уравнение имеет один действительный корень $x = -1$. Решая то же самое уравнение в множестве комплексных чисел, получим, что уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$,имеет, кроме указательного действительного корня, два комплексных сопряженных корня:

$x_2 = i$, $x_3 = -i$.

**Ответ:** $\{-1\}$.

***Чтобы решить рациональное уравнение, нужно:***

*1) найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;*

*2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;*

*3) решить полученное целое уравнение;*

*4) исключить из его корней те, которые образуют в нуль общий знаменатель.*

**Пример 2.** Решите уравнение: $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$

**Решение**

Общим знаменателем имеющихся дробей является выражение: 2x(2-x).Освободимся от знаменателей, умножим уравнение на это выражение.

Имеем: $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x(2-x)}=0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 2x+x(2-x)-4\cdot 2}{2x(2-x)}=0.$

Получаем: $2\cdot 2x+x(2-x)-4\cdot 2=0,$

$$4x+2x-x^2-8=0,$$

$$-x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0.$$

Корнями уравнения $x^2-6x+8=0$ являются $x_1=2$, $x_2=4$. Осталось проверить, обращают ли найденные корни в нуль выражение $2x(2-x)$,т.е. проверить выполнение условия $2x(2-x)\neq 0$.

Замечаем, что число $x_1=2$ не удовлетворяет этому условию, а число $x_2=4$ удовлетворяет ему. Значит, x=4 – единственный корень уравнения.

**Ответ:** $\{4\}$.

***<u>Способы решения рациональных уравнений</u>***

Основными способами решения дробно - рациональных уравнений являются: *разложение на простейшие дроби, выделение полного квадрата, сведение крешению систем уравнений, сведение к некоторым специальным уравнениям* (например, квадратным, биквадратным, симметричным, возвратным и т.п.). Приведем примеры на озвученные способы.

***Разложение на простейшие дроби***

**Пример 3.** Решите уравнение $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$.

**Решение**

Поскольку $\frac{2x-1}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$, $\frac{3x-1}{x+2}=3-\frac{7}{x-2}$, $\frac{x-7}{x-1}=1-\frac{6}{x-1}$, то данное уравнение имеет вид $\frac{6}{x-1}-\frac{7}{x+7}-\frac{3}{x+1}=0$.

После проведения тождественных преобразований получаем уравнение

$\frac{3x+9}{x^2-1}=\frac{7}{x+7}$.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(3x+9)(x+7)=7(x^2-1),\\ (x^2-1)(x+7)\neq 0.\end{cases} \qquad \text{(II )}$$

Первое уравнение системы приводится к виду $2x^2-15x-35=0$.

Корни этого уравнения есть $x_1=\frac{15+\sqrt{505}}{4}$; $x_1=\frac{15-\sqrt{505}}{4}$;

Так как эти числа удовлетворяют второму условию системы (II), то они являются и корнями исходного уравнения.

**Ответ:** $\left\{\frac{(15+\sqrt{505})}{4};\frac{(15-\sqrt{505})}{4}\right\}$.

***Выделение полного квадрата***

**Пример 4.** Решите уравнение $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$

**Решение**

Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$x^2+2x\cdot\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{x-1}=8$,оно равносильно уравнению $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x-1}=8$, что равносильно $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x-1}=8.$

Полагая$\frac{x^2}{x-1}=y$,получаем уравнение$y^2-2y-8=0$корнями, которого являются числа $4$ и $(-2)$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений, $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x-1}=4,\\ \dfrac{x^2}{x-1}=-2,\end{array}\right.$ решениями которой, а, следовательно, и решением исходного уравнения являются: $x_1=2$; $x_2=-1+\sqrt{3}$; $x_3=-1-\sqrt{3}$.

**Ответ:** $\{2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\}$.

***Сведение к решению систем уравнений***

**Пример 5.** $x(\boldsymbol{\frac{5-x}{x-1}})\left(\boldsymbol{x+\frac{5-x}{x+1}}\right)\boldsymbol{=6}$

Решите уравнение ( III )

**Решение.**

Положим $u=x\dfrac{5-1}{x+1}$ и $v=x+\dfrac{5-x}{x+1}$, тогда

$$u+v=x\frac{5-x}{x+1}+x+\frac{5-x}{x+1}=(x+1)\frac{5-x}{x+1}+x=5$$

Таким образом, $u$ и $v$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}uv=6,\\ u+v=5,\end{cases}$$

откуда $u_1=3$, $v_1=2$ или $u_2=2$, $v_2=3$ следовательно, уравнение ( III ) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x\dfrac{5-x}{x+1}=2,\\ x\dfrac{5-x}{x+1}=3.\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-x^2=2x+2,\\ 5x-x^2=3x+3,\end{array}\right.\\ x+1\neq 0.\end{cases}$$

Решением этой системы а, следовательно, и исходного уравнения являются числа $x_1=2$ и $x_2=1$.

**Ответ:** $\{2;1\}$.

***Сведение к некоторым специальным уравнениям (например, квадратным, биквадратным, симметричным, возвратным и т.п.)***

**Пример 6**

Решите уравнение $x^4 = \frac{11x-6}{6x-11}$ ( IV )

**Решение.**

Уравнение х равносильно системе: $\begin{cases} 6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0, \\ 6x - 11 \neq 0. \end{cases}$

Число $x = -1$ не является его корнем. Поэтому $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = (x+1)(6x^4 - 17x^3 - 17x + 6)$.

Решимуравнение $6x^4 - 17x^3 - 17x + 6 = 0$ (V)

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (V), то оно равносильно уравнению $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0,$ или $6\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 17\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0.$

Последнее равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}. \end{array}\right.$

Первое уравнение этой совокупности корней не имеет, а второе уравнение имеет корни 2 и $\frac{1}{2}$; значит,корни исходного уравнения есть $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. **Ответ:** $\left\{2; \frac{1}{2}\right\}$

Из изложенного выше материала можно заключить, что рациональные уравнения можно решить следующими способами:

• разложением на простейшие дроби;

• выделением полного квадрата;

• сведением к решению систем уравнений;

• сведением к некоторым специальным уравнениям (например, квадратным, биквадратным, симметричным, возвратным и т.п.)[14].

### 1.2.Основные методы решения систем рациональных уравнений

В предыдущем пункте были приведены основные способы решения рациональных уравнений. Здесь мы приведем основные способы решения систем рациональных уравнений.

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x и y, называют *рациональным уравнением с двумя неизвестными x и y*.

Дадим определение понятию «рациональное выражение».

*Рациональное выражение* – это алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных x и y с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Несколько уравнений с двумя переменными x и y образуют *систему уравнений,* если ставится задача об отыскании всех таких пар (x; y), которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений.

*Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что нет решений. Множество решений системы может быть, в частности, пустым – в этом случае говорят, что система не имеет решений или что система несовместна.*

Несколько уравнений с двумя переменными x и y образуют *совокупность систем,* если ставится задача об отыскании всех таких пар (x;y), каждая из которых удовлетворяет, по крайней мере, одной из заданных систем. Каждая пара называется решением совокупности уравнений [15].

Выше было дано определение рационального уравнения с двумя неизвестными. На этом остановиться нельзя. Ввиду этого введем следующее определение:

*Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x, y и z, называется рациональным уравнением с тремя неизвестными x, y и z.*

Например, $\frac{x-y}{x-z}+\frac{x+y}{x+z}=x+y+z$

Аналогично определяется понятие рационального уравнения с n-неизвестными.

Они также могут образовывать систему уравнений. Процесс решения системы уравнений состоит, как правило, в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы к другой, более «удобной», затем ещё к более «удобной» и так далее.

Если в результате некоторых преобразований системы

$$\begin{cases} f_1(x,y) = q_1(x,y), \\ f_2(x,y) = q_2(x,y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x,y) = q_n(x,y). \end{cases} \quad (1)$$

мы перешли ксистеме $\begin{cases} f_1'(x,y) = q_1'(x,y), \\ f_2'(x,y) = q_2'(x,y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n'(x,y) = q_n'(x,y), \end{cases}$ (2)

и если при этом решение системы (1) является в тоже время решением системы (2), то система (2) называется следствием системы (1). Следствием системы может быть и одно уравнение.

*Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают.*

Ясно, что две системы равносильны тогда и только тогда, когда вторая является следствием первой и первая является следствием второй.

Приведем две теоремы применяющиеся при решении систем уравнений.

**<u>Теорема 1</u>**. *Если уравнение* $f_1(x,y) = q_1(x,y)$, *равносильно (является следствием) уравнению* $f_1'(x,y) = q_1'(x,y)$, *а уравнение* $f_2(x,y) = q_2(x,y)$ *равносильно (является следствием) уравнению* $f_2'(x,y) = q_2'(x,y)$; *то системы* $\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y), \end{cases}$ *и* $\begin{cases} f_1'(x,y) = g_1'(x,y), \\ f_2'(x,y) = g_2'(x,y), \end{cases}$ *равносильны (вторая система следствие первой).[13]*

**<u>Теорема 2.</u>** *Если уравнение* $f(x,y)=g(x,y)$ *является следствием уравнений* $f_1(x,y)=g_1(x,y)$ *и* $f_2(x,y)=g_2(x,y)$, *то система* $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f(x,y)=g(x,y), \end{cases}$ *или* $\begin{cases} f_2(x,y)=g_2(x,y), \\ f(x,y)=g(x,y), \end{cases}$ *является следствием системы* $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y), \end{cases}$ *(3), а система* $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y), \\ f(x,y)=g(x,y), \end{cases}$ *равносильна системе (3).*

В частности, следствиями системы (3) будут такие системы:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_1(x,y)\pm f_2(x,y)=g_1(x,y)\pm g_2(x,y). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=g_1(x,y)\cdot g_2(x,y). \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ (f_1(x,y))^2=(g_1(x,y)). \end{cases} \quad (6)$$

Если не существует таких пар (x,y), на которых оба выражения $f_2(x,y)=g_2(x,y)$ одновременно обращаются в нуль, то уравнение $\dfrac{1}{f_2(x,y)}=\dfrac{1}{g_2(x,y)}$ равносильно уравнению $f_2(x,y)=g_2(x,y)$. Тогда системе (3) равносильна следующая система $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ \dfrac{1}{f_2(x,y)}=\dfrac{1}{g_2(x,y)}. \end{cases}$

Её следствием, в свою очередь является система $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_1(x,y)\cdot\dfrac{1}{f_2(x,y)}=g_1(x,y)\cdot\dfrac{1}{g_2(x,y)}. \end{cases}$

Таким образом, приходим к выводу: если не существует таких пар (x,y), при которых оба выражения $f_2(x,y)$ *и* $g_2(x,y)$ одновременно обращаются в нуль, то система $\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ \dfrac{g_2(x,y)}{f_2(x,y)} = \dfrac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)}, \end{cases}$ является следствием системы (3).

Если, решая систему, мы преобразовали её в систему, являющуюся следствием исходной, то найденные решения новой системы, безусловно подлежат проверке (например, подстановкой найденных значений переменных в исходную систему).

*Утверждения.*

1. Система (4) равносильна системе (3).

2. Если не существует таких пар (x;y), при которых обе части уравнения $f_1(x,y) = g_1(x,y)$ одновременно обращаются в нуль, то система (5) равносильна системе (3).

3. Система (6) равносильна системе (3) над полем действительных чисел, если для любых x, y из области определения системы (3) выполняется неравенство $f_2(x,y) \cdot g_2(x,y) \geq 0$ .

4. Если не существует таких пар (x;y), при которых одновременно обращаются в нуль обе части второго уравнения системы (3), то система (7) равносильна системе (3).

Отметим ещё один результат, вытекающий из теорем 1 и 2.

**Теорема 3.** *Если совокупность уравнений* $\left[\begin{array}{l} f_{21}(x,y) = g_{21}(x,y), \\ f_{22}(x,y) = g_{22}(x,y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_{2k}(x,y) = g_{2k}(x,y), \end{array}\right.$ *равносильна уравнению* $f_2(x,y) = g_2(x,y)$ *или является его следствием, то совокупность* *систем* $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_{21}(x,y)=g_{21}(x,y), \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_{22}(x,y)=g_{22}(x,y), \end{cases} \\ \begin{cases} \text{..............................} \\ f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_{2k}(x,y)=g_{2k}(x,y), \end{cases} \end{array}\right.$ *равносильна системе (3) (или является её следствием).*

Основными методами решения систем рациональных уравнений являются:

1) линейное преобразование системы ( или алгебраическое сложение);

2) подстановка;

3) замена переменных.

*Метод алгебраического сложения уравнений основан на том, что если к обеим частям одного из уравнений прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на одно и тоже число, а другое уравнение оставить без изменения, то получится система равносильная данной.*

Метод линейного преобразования системы основан на теореме 4.

**<u>Теорема4.</u>***Если* $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, *то системы* $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0, \end{cases}$ *и* $\begin{cases} a_1 f_1(x,y)+a_2 f_2(x,y)=0, \\ b_1 f_1(x,y)+b_2 f_2(x,y)=0, \end{cases}$ *равносильны.*

Это теорема распространяется на случай когда число уравнений больше двух.

**<u>Теорема.4́</u>***Если* $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, *то системы* $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0, \\ f_2(x,y,z)=0, \\ f_3(x,y,z)=0, \end{cases}$ *и*

$\begin{cases} a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0, \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = 0, \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0, \end{cases}$ *равносильны.*

Метод подстановки основан на теореме 5.

**<u>Теорема 5.</u>***Системы уравнений* $\begin{cases} x = F(y), \\ f(x, y) = g(x, y), \end{cases}$ *и* $\begin{cases} x = F(y), \\ f(F(y), y = g(F(y), y), \end{cases}$ *равносильны.*

*Следствие.*Если уравнение h(x,y)=0, то равносильно уравнению x=F(y), то система $\begin{cases} h(x, y) = 0, \\ f(x, y) = g(x, y), \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} x = F(y), \\ f(F(y), y) = g(F(y), y), \end{cases}$ или системе $\begin{cases} y = F(x), \\ f(x, F(x)) = g(x, F(x)). \end{cases}$

Для систем n уравнений с n неизвестными соответствующая теорема формулируется аналогично.

Например, система уравнений $\begin{cases} y^2 + x = 2(x-5), \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2, \end{cases}$ равносильна следующей системе: $\begin{cases} x = y^2 + 10, \\ \dfrac{y}{y^2+10} + \dfrac{y^2+10}{y} = (y^2+10)^2 + y^2. \end{cases}$

Для системы трех уравнений с тремя переменными соответствующая теорема формулируется следующим образом.

**<u>Теорема</u>** $5'$. *Система уравнений* $\begin{cases} f_1(x, y, z) = g_1(x, y, z), \\ f_2(x, y, z) = g_2(x, y, z), \\ z = F(x, y), \end{cases}$ *равносильна следующей системе:* $\begin{cases} f_1(x, y, F(x, y)) = g_1(x, y, F(x, y)), \\ f_2(x, y, F(x, y)) = g_2(x, y, F(x, y)),. \\ z = F(x, y). \end{cases}$

Метод замены переменных состоит в следующем. Если $F_1(x, y) = f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ и $F_2(x, y) = f_2(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$, то систему $\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases}$ с помощью введения новых переменных $\varphi_1(x, y)$=u , $\varphi_2(x, y)$=v, можно записать в следующем в виде $\begin{cases} f_1(u, v) = 0, \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases}$

Пусть $(u_1; v_1), (u_2; v_2), \ldots, (u_n; v_n)$ - решения последней системы. Тогда задача сводится к решению следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = u_{1,} \\ \varphi_2(x,y) = v_1, \end{cases} ; \quad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = u_2, \\ \varphi_1(x,y) = v_2, \end{cases} \ldots, \begin{cases} \varphi_1(x,y) = u_n, \\ \varphi_1(x,y) = v_n. \end{cases}.$$

Решения этой совокупности будут одновременно и решениями системы

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Приведем конкретные примеры на применении основных методов.

**Пример 1**.

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y, \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$

**Решение:** Вычтем второе уравнение из первого. Тогда по теореме 4 система $\begin{cases} x^2 - y^2 = (13x + 4y) - (4x + 13y), \\ y^2 = 4x + 13y, \end{cases}$ равносильна исходной. Рассмотрим первое уравнение полученной системы. Имеем: $(x-y)(x+y) = 9(x-y)$, и далее

$(x-y)(x+y-9) = 0$.

В итоге мы приходим к следующей системе, равносильной исходной по теореме 1:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-9) = 0, \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$$

По теореме 3 эта система равносильна следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y^2 = 4x + 13y; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 9 = 0, \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$$

Каждую из этих систем решим методом подстановки. Первая система преобразуется к виду: $\begin{cases} x = y, \\ y^2 = 4y + 13y. \end{cases}$ Откуда находим: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 17, \\ y_2 = 17. \end{cases}$.

Вторая система совокупности преобразуется к виду:

$$\begin{cases} x = 9 - y, \\ y^2 = 4(9 - y) + 13y. \end{cases}$$

Из уравнения $y^2 = 4(9 - y) + 13y$ находим: $y_3 = 12, y_4 = -3.$, и далее из соотношения x=9-y получаем $x_3 = -3, \quad x_4 = 12$.

В итоге мы нашли следующие четыре решения: (0;0), (17;17), (-3;12), (12;-3).

**Проверка**. Поскольку в процессе решения заданной системы выполнялись только равносильные преобразования, то найденные решения являются решениями исходной системы.

**Ответ:** (0;0), (17;17), (-3;12), (12;-3).

**Пример 2.**Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + z^2 = 2, \\ yz + x^2 = 2, \\ zx + y^2 = 2. \end{cases}$

**Решение:**

Заменим первое уравнение системы разностью первого и второго уравнений, второе – разностью второго и третьего, а третье оставим без изменения. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} xy - yz + z^2 - x^2 = 0, \\ yz - xz + x^2 - y^2 = 0, \\ zx + y^2 = 2, \end{cases} \text{ то есть систему } \begin{cases} (z - x)(z + x) - y(z - x) = 0, \\ (x - y)(x + y) - z(x - y) = 0, \\ xz + y^2 = 2, \end{cases}$$

которая по теореме 4 равносильна заданной. Имеем далее:

$$\begin{cases} (z - x)(z + x - y) = 0, \\ (x - y)(x + y - z) = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

По теореме 3 этой системе равносильна следующая совокупность систем:

$$\begin{cases} z - x = 0, \\ x - y = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z - x = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z + x - y = 0, \\ x - y = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z + x - y = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

Решим системы этой совокупности методом подстановки, из первой системы находим: (1;1;1), (-1;-1;-1);

из второй: ($\sqrt{2}$;0; $\sqrt{2}$), (-$\sqrt{2}$;0; -$\sqrt{2}$);

из третьей: ($\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$;0), (-$\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$;0);

из четвертой: (0; $\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$), (0;- $\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$).

**Ответ:** (1;1;1), (-1;-1;-1); ($\sqrt{2}$;0; $\sqrt{2}$), (-$\sqrt{2}$;0; -$\sqrt{2}$); ($\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$;0), (-$\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$;0); (0; $\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$), (0;- $\sqrt{2}$;-$\sqrt{2}$).

**Пример3.**Решитесистему уравнений $\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy+24=\dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$ (*)

**Решение:**

Решим систему на множестве действительных чисел. Перемножим уравнения системы, получим систему: $\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ (xy+24)(xy-6)=\dfrac{x^3y^3}{xy}. \end{cases}$ являющуюся следствием исходной. Второе уравнение системы путем несложных преобразований сводится к уравнению xy=8 – следствию второго уравнения последней системы.

Тогда в силу теоремы 1 система $\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy=8. \end{cases}$ будет следствием последней системы. Вычтем теперь первое уравнение системы из второго. Получим систему: $\begin{cases} xy=8, \\ 6=8-\dfrac{y^3}{x}, \end{cases}$ и далее $\begin{cases} xy=8, \\ \dfrac{y^3}{x}=2, \end{cases}$ - в силу теоремы 2 - следствие системы $\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \\ xy=8. \end{cases}$.

$\begin{cases} xy = 8, \\ \dfrac{y^3}{x} = 2 \end{cases}$ - перемножив уравнения системы, получим систему $\begin{cases} xy = 8, \\ y^4 = 16. \end{cases}$ Из второго уравнения системы находим: $y_1 = 2, \quad y_2 = -2.$, а из первого уравнения соответственно $x_1 = 4, \quad x_2 = -4.$

**Проверка**. Так как последняя система-конечная в счете следствий системы (*),то найденные решения подлежат проверке, которую можно выполнить с помощью подстановки найденных решений в систему (*). Эта проверка показывает, что найденные решения, являются решением системы(*).

**Ответ:** (4;2), (-4;-2).

## 1.3. Решение текстовых задач с помощью рациональных уравнений и систем рациональных уравнений

Текстовые задачи – это такие задачи, в которых описываются фактические события. Методы их решения имеют большое развивающее значение, так как нужно описать математическим языком приведенную в условии задачи ситуацию. Решение текстовых задач с помощью систем рациональных уравнений, состоит из следующих этапов: *составление математической модели, работа с составленной моделью, ответ на вопрос задачи.* Далее рассмотрим основные виды задач, решаемые с помощью систем рациональных уравнений, а также привести алгоритмы их решения. Это задачи: на движение, на совместную работу, с геометрическим содержанием, задачи на зависимость между арифметическими действиями, на смеси сплавы. Изучая литературу по данному вопросу, был выделен алгоритм для решения любых текстовых задач. Этот алгоритм удобно использовать учителям в обучении учащихся, так же и студентам различных средних и высших учебных заведений.

**Алгоритм решения текстовых задач**

1. Определить, сколько и какие объекты, процессы рассматриваются в задаче.
2. Указать величины, которые характеризуют каждый объект, процесс.
3. Установить зависимости, существующие между выделенными величинами.
4. Указать, какие из выделенных величин известны.
5. Указать неизвестные величины.
6. Определить зависимость между неизвестными величинами.
7. Выбрать рациональным образом одно из неизвестных, обозначить его через (x, y).
8. Выразить остальные неизвестные через(x, y).
9. Выделить условия для составления уравнения (ий).
10. Составить уравнение (систему уравнений) и решить его (её).
11. Перевести полученное решение на язык задачи.
12. Сделать проверку и записать ответ.

Рассмотрим реализацию указанного выше алгоритма при решении текстовых задач различных типов [23].

**Задачи на движение**

Основными компонентами этого типа задач являются: расстояние (S); скорость (V); время (t). Заметим, что если два каких-либо тела начинают движение одновременно, то в случае, если они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивает, очевидно, одинаковое время. Аналогично, если одно тело догоняет другое. Если же тела выходят в разное время, то до момента встречи затрачивает времени больше то их них, которое выходит раньше.

**Задачи на совместную работу**

Основными компонентами этого типа задач являются: работа (А); производительность труда (П) (работа, выполненная в единицу времени); время (t). Зависимость между указанными величинами выражается следующими формулами: *А=П t;  П=А/ t;  t=А/П.*

**Задачи на «планирование»,** в них сравнивается работа, которая должна быть выполнена по плану, и работа, которая выполнена фактически. Основные компоненты задачи те же, что и в задачах на «совместную работу».

**Алгоритм решения задач на совместную работу:**

1. Принимаем всю работу, которую необходимо выполнить, за 1. Находим производительность труда каждого рабочего в отдельности, т.е. $\frac{1}{t}$, где t – время, за которое этот рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно.
2. Находим ту часть всей работы, которую выполняет каждый рабочий отдельно за то время, которое он работал.
3. Составляем уравнение, приравнивая объем всей работы к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть всей работы, выполненная отдельно каждым из рабочих.

**Алгоритм решения задач на «зависимость между компонентами арифметических действий»:**

1. Вводиться обозначение: х- цифра десятков, у- цифра единиц.

2. Искомое двузначное число (***10x + y)***.
3. Составить систему рациональных уравнений и решить её.

**Задачи на «смеси, растворы, сплавы»**

В условиях таких задач речь чаще всего идет о сплавлении каких-либо металлов, растворении друг в друге различных веществ или переливании жидкостей, состоящих из нескольких компонентов. Основные допущения, которые обычно используются в таких задачах, состоят в следующем: 1) все получающиеся смеси или сплавы однородны; 2) при слиянии двух растворов, имеющие объемы $V_1$ и $V_2$, получается смесь, объем которой равен $V_1 + V_2$.

**Алгоритм решения задач на смеси:**

1. х – масса первого раствора, у – масса второго раствора, (х + у ) – масса полученной смеси.
2. Найти содержание растворенного вещества в растворах, т.е. а % от х, в % от у, с % от (х+у).
3. Составить систему рациональных уравнений и решить ее.

Приведенные выше алгоритмы задач играют огромную роль, при обучении школьников решению задач. Подобные алгоритмы желательно разрабатывать на уроке вместе со школьниками, и далее вносить в них свои коррективы. Именно такие алгоритмы, служат некой опорой для учащихся, и являются главным помощником для слабых учеников. Реализуя дифференцированную помощь учащимся, учитель способствует и помогает отдельному ученику, не только решать задачи, но и создавать условия успеха, которые в свою очередь повышают мотивацию у учащихся в стремлении к учебе, и заинтересованность в предмете [19].

В данной главе приведены примеры решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. Способы решения ниже приведенных задач нашли своё отражение в этой главе.

**Задача №1.**Смешали 30% -ный раствор соляной кислоты с 10% -ным и получили 600г 15% -ого раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

**Решение:**

Введем обозначение. Пусть взяли х (г) - первого раствора, у (г) – второго раствора, тогда масса третьего раствора равна – (х+у) г.

Определим количество растворенного вещества в первом, втором, третьем растворах, т.е. найдем 30% от х, 10% от у, 15% от 600.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 90. \end{cases}$$

Решим её методом подстановки.

$$\begin{cases} y = 600 - x, \\ 0{,}3x + 0{,}1(600 - x) = 90. \end{cases}$$

0,3х+60–0,1х=90;

0,2х=30=>х=30:0,2=>х=150.

Значит, у=600–150=450.

Таким образом, (150; 450) – единственное решение системы.

По смыслу задач искомые величины выражаются положительными числами, найденное решение этим требованиям удовлетворяет.

Если х=150, то значит взяли 150 г первого раствора и 450 г второго раствора.

**Ответ:** 150г; 450г.

**Задача №2.** Пароход, отчалив от пристани А, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани В. Весь путь от А до В пароход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равна 1 км/ч. Найдите собственную скорость парохода.

**Решение:**

Пусть $x$(км/ч) – собственная скорость парохода. Тогда по течению пароход шел со скоростью ($x$+1) км/ч, а по притоку – со скоростью ($x$-1) км/ч. На путь по реке пароход затратил ($\frac{60}{x+1}$) часов, а на путь по приток ($\frac{20}{x-1}$)часов. Весь путь он прошел за 7 часов. Составим и решим уравнение:

$$\frac{60}{x+1} + \frac{20}{x-1} = 7.$$

Корни этого уравнения: $x_1$=11, $x_2$=$\frac{3}{7}$.

По смыслу задачи скорость парохода не может быть меньше 1 км/ч, так как он двигался по притоку против течения, скорость которого 1 км/ч. Следовательно, собственная скорость парохода 11 км/ч.

**Ответ:** 11 км/ч

**Задача №3.** По окружности длиной 60 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через минуту. Определите скорости точек.

**Решение:**

Пусть первая точка проходит полный оборот за $x$ с., а вторая – за $y$ с.

Тогда: $v_1 = \frac{60}{x}\left(\frac{м}{с}\right) = \frac{3600}{x}\left(\frac{м}{мин}\right).$

$$v_1 = \frac{60}{y}\left(\frac{м}{с}\right) = \frac{3600}{y}\left(\frac{м}{мин}\right).$$

Будем полагать, что $x<y$, тогда из условия задачи следует уравнение

$$y\text{-}x=5$$

Так как точки встречаются каждую минуту, и первая движется быстрее, то она должна за 1 мин пройти полный круг, т.е. 60 м и еще столько, сколько успеет пройти за 1 мин вторая точка, т. е. $\frac{3600}{y}(м)$. Отсюда имеем второе уравнение $\frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60.$

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} y-x=5, \\ \frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5, \\ \frac{60}{x}=\frac{60}{y}+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15, \\ y=20. \end{cases}$$

По смыслу задачи искомые величины выражаются положительными числами. Найденное решение удовлетворяют этому условию.

$v_1=\frac{60}{15}=4$ (м/с) - скорость первой точки,

$v_2=\frac{60}{20}=3$ (м/с) - скорость второй точки.

**Ответ:** 4 м/с; 3 м/с.

**Задача №4.** Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

**Решение:**

Пусть $x$ – цифра десятков, $y$ – цифра единиц, тогда $(10x+y)$ – искомое двузначное число. По условию задачи, составляем и решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 10x+y-9=10y+x. \end{cases}$$

Получим два значения для $x$: $x_1=-2$ и $x_2=3.$

По смыслу задачи подходит положительное значение $x$, т. е. $x_2=3$.

Если $x_2=3$, то $y_2=2.$

Само число $3\cdot10+2=32$.

**Ответ:** 32.

**Задача №5.** В магазин поступил товар I и II сортов на общую сумму 4,5 млн. руб. Если весь товар продать по цене II сорта, то убытки составят 0,5 млн. руб., а если товар реализовать по цене I сорта, то будет получена прибыль 0,3 млн. руб. На какую сумму был приобретен товар I и II сортов в отдельности?

**Решение:**

Пусть магазин получил ***x*** единиц товара I сорта по цене ***a*** тыс. руб. за единицу и ***y***единиц товара II сорта по цене***b***тыс. руб. Тогда весь товар I сорта обошелся магазину в ***ax*** тыс. руб., а II сорта — в ***by*** тыс. руб. и, следовательно,

$ax + by = 4500$. Если весь товар продать по цене II сорта, то он будет стоить

$b\cdot(x + y)$ тыс. руб. по условию $b\cdot(x + y) = 4000$. По цене I сорта весь товар был бы продан за $a\cdot(x + y) = 4800$ тыс. руб. Таким образом, приходим к системе.

$$\begin{cases} ax + вy = 4500, \\ вx + вy = 4000, \\ ax + ay = 4800. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $(a – b)\cdot x = 500$, а вычитая из третьего уравнения первое, имеем $(a - b)\cdot y = 300$. Разделив первое из полученных уравнений на второе, придем к отношению:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x.$$

Из уравнения $ax +ay = 4800$ имеем:

$$ax + \frac{3}{5}ax = 4800,$$

$$\frac{8}{5}ax = 4800,$$

$ax = 3000$,

*by*= 4500-3000 = 1500.

**Ответ:** на3000 тыс. руб. был приобретен товар I сорта и на 1500 тыс. руб. был приобретен товар II сорта.

**Задача №6.** Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 ч меньше, чем третьему, и на 1 ч больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле, может быть вспахано за 1ч 12мин. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе трех тракторов?

**Решение:**

Пусть х(ч) – время, необходимое для вспашки поля первому трактору,у(ч )– второму и  z (ч) – третьему трактору. Объем работы (в данном случае это площадь поля) примем равным 1.

Тогда 1/х – производительность первого, 1/ у – второго и 1/ z – третьего трактора. По условию задачи z- х=2 и х-у=1.  Кроме того, сказано, что при совместной работе первого и второго тракторов поле можно быть вспахано за 1ч 12 мин, то есть за 6/5ч. Но за 6/5 ч первый трактор выполнил 6/5 · 1/х часть работы, а второй  -6/5 · 1/ у часть работы. Значит, $\frac{6}{5}x+\frac{6}{5}y=1.$

В итоге приходим к системе трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} z-x=2, \\ x-y=1, \\ \frac{6}{5}x+\frac{6}{5}y=1. \end{cases}$$

Решив ее, получим: (3;2;5), (-0,4; -0,6; 2,4). Условию задачи удовлетворяет только первое решение. Теперь ответим на вопрос задачи.

При совместной работе трех тракторов производительность труда составит$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, то есть$\frac{31}{30}$.Значит, время на вспашку поля тремя тракторами составляет$\frac{30}{31}$часа.

**Ответ:** $\frac{30}{31}$ ч.

**Задача №7.** Имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны вступали в работу последовательно: в первый час работал лишь один комбайн, во второй – два, в третий – три и т. д., до тех пор пока не начали работать все комбайны, действовавшие вместе до полной уборки урожая несколько часов. Время работы, предусмотренное планом, можно было бы сократить на 6 ч, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны, за исключением пяти. Сколько комбайнов было в совхозе?

**Решение:** Примем величину всей работы равной 1 и введем три переменные: n – число комбайнов в совхозе, x – производительность труда комбайна за 1ч, t – время совместной работы всех комбайнов по плану. По условию n комбайнов, производительность каждого из которых x, могут выполнить работу за 24 ч, т. е. 24nx=1. По плану в первый час действовал один комбайн, объем работы, выполненной им за этот час, равен x. Во второй час действовали два комбайна, объем работы, выполненной ими за этот час, равен (2x). В третий час три комбайна выполнили объем работы, равный (3x), и так далее. В (n-1)-й час (n-1)комбайн выполнили объем работы, равный (n-1)x. После этого в течение t ч действовали все n комбайнов, объем выполненной ими работы равен (ntx). Плановая работа комбайнов в итоге описывается следующим уравнением: x+2x+…+(n-1)x+ntx=1. Заметим, что x+2x+…+(n-1)x есть сумма (n-1) члена арифметической прогрессии (an), у которой a1=x, d=x. Значит, x+2x+…+(n-1)x=(x+(n-1)x)/2·(n-1)=(n(n-1)x)/2,иуравнение x+2x+…+(n-1)x+ntx=1 принимает вид nx((n-1)/2+t)=1. Наконец, из условия следует, что если бы с самого начала работали (n-5) комбайнов, то работа длилась бы не (n-1+t) ч, что было предусмотрено планом, а на 6 ч меньше, то есть ((n-1)+t-6) ч, тогда (n+t-7)(n-5)x=1. В итоге получаем систему из трех уравнений относительно трех переменных n, x, t:

24nx=1,

$$nx\frac{(n-1)}{2}+t=1,$$

(n+t-7)(nx-5x)=1.

Из первого уравнения находим nx=1/24. Подставим это выражение во второй и третье уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} nx=1/24, \\ \dfrac{(n-2)}{2+t}=1, \\ (n+t-7)(1/24-5x)=1. \end{cases}$$

Далее система без труда решается методом подстановки. Из первого уравнения находим$x=\frac{1}{24n}$, из второго получаем $-t=\frac{49-n}{2}$,подставив эти выражения в третье уравнение, получим: $\frac{(n+35)(n-5)}{48n}=1$, откуда находим, что n= 25 (второе решение условию не удовлетворяет). Значит, в совхозе было 25 комбайнов.

**Ответ:** 25 комбайнов.

**Задача № 8.** Автобус-экспресс отправился от вокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 120км от вокзала. Пассажир, опоздавший на 10 минут на автобус, решил добраться до аэропорта на такси. Скорость такси на 10км/ч больше скорости автобуса. С какой скорость ехал автобус, если он приехал в аэропорт одновременно с такси?

**Решение:**

Пусть x км/ч - скорость автобуса, тогда составим и заполним таблицу:

| | Скорость (км/ч) | Время (ч) | Путь (км) |
|---|---|---|---|
| Автобус | $x$ | $\frac{120}{x}$ | 120 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Такси | $x+10$ | $\frac{120}{x+10}$ | 120 |

Так как по условию задачи пассажир опоздал на 10минут $=\frac{1}{6}$часа, то составим и решим уравнение:

$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=\frac{1}{6}$,

ОДЗ: $x>$

720(x+10) - 720x= x (x+10),

$x^2$+10x-7200=0,

Далее, решая квадратное уравнение, получаем:

$x_1$=80,$x_2$=-90.

Корень $x_2$=-90 – не подходит по условию задачи, значит, скорость автобуса равна 80 км/ч.

**Ответ:** 80км/ч.

**Задача№9.** Из пункта А в пункт В со скоростью 80 км/ч выехал первый автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью — второй. После остановки на 20 мин в пункте В второй автомобиль поехал с той же скоростью назад. Через 48 км он встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от В в тот момент, когда в пункт В прибыл первый автомобиль. Найти расстояние от А до места первой встречи автомобилей, если АВ = 480 км.

**Решение:**

Самое важное - это понять, что первая встреча автомобилей произошла в тот момент, когда второй автомобиль обгонял первый.

Если обозначить расстояние от *A* до места первой встречи через*5* км, а скорость второго автомобиля - через *v* км/ч, то из условия задачи видно, что расстояние в 72 км (120 - 48 = 72) второй автомобиль пройдет за то же время, которое понадобится первому автомобилю, чтобы преодолеть 48 км. Следовательно,

$\frac{72}{v} = \frac{48}{80}$ ,откуда$v$ = 120 (км/ч).

От места первой встречи до пункта *B* первому автомобилю оставалось пройти (480 -s*)* км скоростью 80 км. На это он затратил$\frac{480 - s}{80}$(ч). За это же время второй автомобиль прошел от места первой встречи (точнее, от места обгона) до пункта *B,* потратил$\frac{1}{3}$ч на стоянку в пункте *B* и еще $\frac{120}{v}$ч на то, чтобы отъехать от *B* на 120км. Таким образом, можно составить еще одно уравнение $\frac{480 - s}{80} = \frac{480 - s}{v} + \frac{1}{3} + \frac{120}{v}$ .

Из него, зная, что $v$ = 120, находим$s$ = 160.

**Ответ:** 160 км расстояние от А до места первой встречи автомобилей.

**Задача №10.** Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через 24 секунды оно будет 26 м (в течение этих 24 секунд тела не встретятся). Найдите скорости тел и длину окружности. [40]

**Решение:**

Пусть ***l***(*м)* длина окружности, ***x***(м/мин) - скорость первого тела, а ***y***(м/мин) - скорость второго, причем для определенности будем считать, что ***x>y***. В задаче речь идет о трех ситуациях, каждую из которых можно описать уравнением.

При движении в одном направлении первое тело догоняет второе со скоростью *(x—y)* м/мин. После одного из обгонов следующий обгон имеет место через столько минут, сколько понадобится, чтобы преодолеть***l*** м со скоростью *(x — y)* м/мин, т.е. через 56 мин:$\frac{1}{x-y} = 56$(1)

При движении в разных направлениях тела сближаются со скоростью (*x* +*y)* м/мин, причем***l***(м) они вместе проходят за 8 мин. Таким образом,

$$\frac{l}{x+y} = 8, \qquad (2)$$

Если первоначальное расстояние было равно 40 м, а осталось пройти до встречи 26 м, то общий пройденный путь составляет 40 - 26= 14м. Он был преодолен со скоростью *(x + y)* м/мин за 24 секунды, т.е. за$\frac{24}{60}$ мин, что равно$\frac{2}{5}$мин. Следовательно, последняя часть условия приводит к уравнению

$$\frac{14}{x+y} = \frac{2}{5}. \qquad (3)$$

Разделив уравнение (2) на (1), получим$\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{7}$, откуда $y = \frac{3}{4}x$. Подставляя в уравнение (3), находим x=20. Следовательно, y=15, а из уравнения (2) получаем*l* = 280.

**Ответ:** 20 м/мин - скорость первого тела, а 15 м/мин - скорость второго тела, 280 м длинна окружности.

Таким образом, в первой главе, приведены алгоритмы решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений, которые проиллюстрированы достаточным количеством примеров.

## Глава 2.Методические подходы при обучении школьников решению текстовых задач с помощью рациональных уравнений и системы рациональных уравнений

Решению текстовых задач уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и главное – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления детей.Существуют различные методические подходы к обучению детей решению текстовых задач. Во второй главе, рассмотрим программы, учебные пособия для школ различных авторов, осуществим их анализ, рассмотрим изучение текстовых задач с методической точки зрения и осуществим разработку элективного курса по данной теме.

### 2.1. Анализ учебных программ по математике и учебных пособий по алгебре разных авторов

Согласно Государственному образовательному стандарту на ступени основного общего образования выпускник по данной теме  должен решать текстовые задачи алгебраическим методом, интерпретировать полученный результат, проводить отбор решений, исходя из формулировки задачи. Осуществлять переход от словесной формулировки соотношений между величинами к алгебраической.

Тема «Использование рациональных уравнений и систем рациональных уравнений при решении текстовых задач» по образовательной программе изучается в 8 классе. Поэтому проанализируем школьные учебники 8 класса.

Для анализа мы взяли учебники трех авторских коллективов под руководством А. Г. Мордковича,С. М. Никольского и К. С. Муравина. Для наглядности занесем данные в таблицу (табл.1).

Таблица 1

| Тема | Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е. «Алгебра 8 класс» [26] | НикольскийС.М., ПотаповМ.К., РешетниковН.Н., ШевкинА.В. «Алгебра 8 класс» [27] | ДорофеевГ.В,МуравинК.С., МуравинГ.К. «Алгебра, 8 класс» [28] |
|---|---|---|---|
| Решение текстовых задач с использованием рациональных уравнений | + | + | + |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Решение текстовых задач с использованием системы рациональных уравнений | + | + | + |

Поясним эту таблицу следующими факторами.

В учебникеМордковича А.Г.[26]  авторы дают поясняющее описание понятия рационального уравнения:если p(x) – рациональное выражение, то уравнение p(x)=0 называют рациональным уравнением.

Алгоритм решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений с позиции авторов учебника должен быть таким.

1 этап. Составление математической модели.

2 этап. Работа с составленной моделью.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

**Пример:** Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 против течения затратив на весь путь 2 часа. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Решение.**

**Первый этап. Составление математической модели.**

Пусть x км/ч – собственная скорость лодки, тогда по течению реки она плывет со скоростью (x +2) км/ч, а против течения – со скоростью (x-2) км/ч.

По течению реки, т. е. со скоростью (x+2) км/ч, лодка прошла путь 10 км. Значит, время, затраченное на этот путь, выражается формулой$\frac{10}{x+2}$ ч.

Против течения реки, т. е. со скоростью (x-2) км/ч, лодка прошла путь 6 км. Следовательно, время, затраченное на этот путь, выражается формулой$\frac{6}{x-2}$ ч.

По условию задачи на весь путь (т. е. на 10 км по течению и 6 км против течения) суммарно затрачено 2 ч. Итак, получаем уравнение $\frac{10}{x+2}+\frac{6}{x-2}=2$ - это и есть математическая модель задачи.

**Второй этап. Работа с составленной моделью.**

Решаем это дробно- рациональное уравнение.

$$\frac{10x-20+6x+12-2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{-2x^2+16}{(x-2)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+16=0, \\ (x-2)(x+2)=0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение: $-2x^2+16x=0,$

Корни уравнения: $x_1=0$, $x_2=8$

**Третий этап. Ответ на вопрос задачи**

Спрашивается: чему равна собственная скорость лодки, т. е. чему равно значение x? Мы получили, что либо x=0, либо x=8. Первое значение нас явно не устраивает: собственная скорость лодки не может быть равной 0 км/ч.Второе значение нас устраивает, потому собственная скорость лодки может быть 8 км/ч.

**Ответ:** собственная скорость лодки равна 8 км/ч.

В задачнике представлено 54 задачи на решение с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений различных типов. Это задачи на движение, на сплавы, на совместную работу и т. д.

В учебнике Никольского С.М. **[27]** 8 класса алгебры этих авторов, отдельной главой представлено «Рациональное уравнение» и отдельным параграфом вынесено «Решение задач при помощи рациональных уравнений».

Изучение темы начинается с конкретного примера.

**Задача 1.** Теплоход, отчалив от пристани А, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани В Весь путь от А до В теплоход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км\ч. Найти собственную скорость теплохода (собственная скорость – скорость в неподвижной воде).

**Решение.**

Обозначим через х (км/ч) собственную скорость теплохода. Тогда вниз по течению реки теплоход шел со скоростью (х+1) км/ч и затратил на путь до устья притока 60/(х+1)ч. По притоку теплоход шел со скоростью (х-1) км/ч и затратил на путь по притоку 20/(х-1) ч. На весь путь теплоход затратил 7 часов, значит $\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7$.Это математическая модель задачи. (1)

Таким образом, искомое число х должно быть корнем рационального уравнения.

Решим это уравнение.

Перенеся все его члены в левую часть и применив к левой части полученного уравнения правила сложения вычитания алгебраических дробей, получим уравнение.

$$\frac{7x^2-80x+33}{(x+1)(x+-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-80x+33=0, \\ (x+1)(x-1)\neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Равносильное уравнению (1).

Уравнение $7x^2$-80x+33=0 имеет корни $x_1$=11, $x_2$=3/7.

Однако, по условию задачи скорость теплохода не может быть меньше 1 км/ч, так как теплоход двигается по притоку против течения, скорость которого равна 1 км/ч. Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь х=11.

**Ответ: 11 км/ч.**

Алгоритма, по которому решаются задачи с использованием рациональных уравнений в учебнике не приведено.

ВучебникеДорофеева Г.В.[28]  решение задач с помощью рациональных уравнений и систем рациональных уравнений, рассматривается в разных главах. Изучение начинается с разбора задачи.

**Задача 1.** Мама может слепить 30 пельменей  на 2 минуты быстрее, чем дочка, так как за одну минуту она лепит на 4 пельменя больше. Сколько пельменей за одну минуту может слепить мама?

**Решение.**

Число пельменей, которые может слепить мама за одну минуту, обозначим буквой х, тогда дочь может слепить за одну минуту (х-4) пельменя. На 30 пельменей у мамы уйдет (30/х) мин, а у дочки- 30/(х-4) мин. Используя условие задачи, получаем уравнение $\frac{30}{x-4}-\frac{30}{x}=2.$

Левая часть полученного уравнения- дробное выражение. Избавимся от дробей, умножив на их общий знаменатель х(х-4) обе части уравнения:

30х-30(х-4)=2х(х-4)

120=2х(х-4),

х(х-4)=60.

Попробуем подобрать корень этого уравнения. Нам нужно найти два натуральных числа, отличающихся на 4, зная, что их произведение равно 60. Это числа 6 и 10. Значит, х=10.

**Ответ:** 10 пельменей.

**Решение задач с помощью систем рациональных уравнений**

**Задача 2.**  Катер, курсирующий между отстоящими друг от друга на 28 км пристанями А и В, через 2 ч после отправления из А встретил плот, отправленный из В по течению реки за 6 ч до этого. Найти скорость течения реки и собственную скорость катера, если известно, что расстояние от А до В и обратно катер проходит за 5 ч 50 мин. [37]

**Решение.** Пусть скорость течения равна х км\ч, а собственная скорость катера (скорость катера в стоячей воде) у км\ч, тогда до встречи с плотом катера за 2 ч против течения 2(y-x) км, а плот до встречи с катером за 6 ч прошел по течению 6x км. Сумма расстояний, пройденных катером и плотом, равна расстоянию между пристанями A и B:

$$2(y-x)+6x=28;$$

$$y+2x=14.$$

Пусть из A в B катер проходит против течения за 28(y-x) ч, а обратно потечению за 28(y+x) ч. По условию задачи

$$\frac{28}{y-x}+\frac{28}{x+y}=\frac{35}{6}$$

($\frac{35}{6}$ ч = 5 ч 50 мин).

Разделив это уравнение почленно на 7, получим:

$$\frac{4}{y-x}+\frac{4}{x+y}=\frac{5}{6}.$$

Решив систему уравнений методом подстановки, найдем $x_1=2$, $y_1=10$.

$$\begin{cases} y+2x=14; \\ \dfrac{4}{y-x}+\dfrac{4}{x+y}=\dfrac{5}{6}, \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяет только пара положительных значений $x_1$ и$y_1$.

**Ответ:** Скорость течения реки равна 2 км/ч, собственная скорость катера равна 10 км/ч.

В результате анализа учебников авторских коллективов под руководством А. Г. Мордковича**,** С. М.Никольского, К. С. Муравина, можно сделать вывод о том, что во всех учебниках, данная тема представлена отдельным параграфом. В учебнике 8 класса под руководством А. Г. Мордковича представлен алгоритм решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. Авторы этого учебника разрабатывают линию математического моделирования. Авторы под руководством К. С. Муравина, в учебнике представляют теоретический материал,разбиваютего на обязательный и дополнительный. В обязательном материалечетко формулируется алгоритм решениязадач.Дополнительные материалы, включающие практикум по решению задач, исследовательские работы, домашние контрольные работы, а также контрольные вопросы и задания, помогающие организовать разнообразную деятельность учащихся на уроке и дома. В учебнике под руководством С. М.Никольского, авторы предлагают задачи из различных областей знаний, где прослеживается межпредметная связь.А также глава заканчиваются дополнительным материалом, в котором приводятся «Исторические сведения» по данной теме.

## 2.2. Особенности методики обучения школьников решению текстовых задач с помощью рациональных уравнений и системы рациональных уравнений

В связи с внедрением в школьную программу элементов высшей математики, с ускоренным развитием и внедрением во все сферы вычислительной математики большое значение имеет формирование у учащихся не отдельных специфических навыков, а тех умений и навыков, которые имеют дальнейшее приложение. К числу этих умений и навыков относятся умения и навыки, которые формируются в процессе решения задач алгебраическим методом.

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, решения неравенства или системы неравенств, составленных по условию задачи. Иногда алгебраическое решение задачи бывает очень сложным [44].

При решении задач алгебраическим методом основная мыслительная деятельность сосредотачивается на первом этапе решения задачи: на разборе условия задачи и составлении уравнений или неравенств по условию задачи.

Вторым этапом является решение составленного уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств.

Третьим важным этапом решения задач является проверка решения задачи, которая проводится по условию задачи.

**На этапе анализа условия задачи:**

1) разбиваем условие задачи на части;
2) выясняем, какие величины известны, а какие требуется найти;
3) устанавливаем связи между величинами.

**На этапе поиска решения**:

1) определяем условия, которые могут быть основанием для составления уравнения, и выбираем одно из них;
2) составляем схему уравнения, соответствующего выбранному условию;
3) определяем, какие величины можно обозначить за х; выбираем одну из них;
4) определяем, какие величины нужно выразить через х, и находим условия, которые позволяют это сделать.

Завершается этап поиска составлением плана решения задачи.

**Проверка решения задачи.**

Проверка проводится по условию задачи.

**Задача.** Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Найти скорости товарного и скорого поездов, если известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 от скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого.

**Анализ задачи.**

1. Какой процесс описывается в задаче?

Речь идёт о процессе движения.

2. Какими величинами характеризуется движение?

Расстояние, скорость, время .

3. Сколько процессов в задаче?

В задаче 3 процесса: движение скорого, пассажирского и товарного поездов.

4. Что требуется найти в задаче?

Скорости товарного и скорого поездов.

5. Что в задаче известно о движении каждого из его участников?

В задаче известно, что:

а) расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного; б) расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 1 час быстрее пассажирского; в) скорость товарного поезда составляет 5/8 от скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого.

6. Что в задаче неизвестно?

В задаче неизвестно расстояние скорого, товарного и пассажирского поездов, время за которое прошли поезда данное расстояние и скорость скорого, товарного и пассажирского поездов.

Пример решения задачи алгебраическим методом.

1. **Составление математической модели**

Пусть x (км/ч) – скорость товарного поезда ($x>0$),

y(ч) – время движения скорого поезда ($y>0$).

Составляем таблицу.

| Величины<br>Процессы | Расстояние (км) | Скорость (км/ч) | Время (ч) |
|---|---|---|---|
| Скорый поезд | $(x+50)y$ | $x+50$ **?** | $y$ |
| Пассажирский поезд | $8/5\ x(y+1)$ | $8/5\ x$ | $y+1$ |
| Товарный поезд | $x(y+4)$ | $x$ **?** | $y+4$ |

По условию задачи поезда прошли одно и то же расстояние. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{8}{5}x(y+1)=x(y+4), \\ (x+50)y=x(y+4). \end{cases}$$

**2. Работа с составленной моделью.**

По условию задачи x>0, тогда

$$\begin{cases} 8(y+1)=5(y+4), \\ (x+50)y=x(y+4). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=12, \\ (x+50)y=x(y+4), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4, \\ (x+50)4=8x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=50. \end{cases}$$

(50;4) – единственное решение системы.

**3. Ответ на вопрос задачи.**

Полученные значения неизвестных удовлетворяют условию x>0, y>0, значит удовлетворяют условию задачи.

50 км/ч – скорость товарного поезда.

50+50 = 100 (км/ч) – скорость скорого поезда.

**Ответ:** 50 км/ч, 100 км/ч.

## 2.3. Элективный курс по теме «Использование рациональных уравнений и систем рациональных уравнений при решении текстовых задач»

Пояснительная записка

«Умение решать задачи - практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на коньках, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь»...

Д. Пойа.

В школьном курсе алгебры решению текстовых задач уделено катастрофически мало учебных часов: в седьмом классе – 7 часов (4 – с помощью уравнений и 3 – с помощью систем уравнений); в восьмом классе

– 4 часа (с помощью квадратных уравнений); в девятом классе – 3 часа (задачи на прогрессии) и несколько уроков по усмотрению учителя в период повторения.

В то же время на выпускном экзамене в 9 классе предлагаются текстовые задачи различных уровней сложности и различных типов: на совместную работу, на движение, на планирование, на проценты, на зависимости между компонентами арифметических действий, и другие виды. Не малое место занимают текстовые задачи на вступительных экзаменах в ВУЗы, в ЕГЭ по математике, об этом следует помнить и готовиться к таким испытаниям заранее.

Каждое занятие предлагаемого курса, а также все они в целом направлены на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с общими идеями и методами (возможно новыми для них), расширить представление об изучаемом в основном курсе материале, а главное - порешать интересные задачи.

Умение решать ту или иную задачу зависит от многих факторов. Однако, прежде всего, необходимо научиться различать основные типы задач и уметь решать простейшие из них. В связи с этим целесообразно рассмотреть типовые задачи и их решения различными методами (с помощью уравнений, с помощью систем уравнений, логически…).

Программа курса рассчитана на 35 часов и предназначена для предпрофильной подготовки учащихся, ориентирована на естественнонаучный профиль.

Цели и задачи курса:

Формирование представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов.

Овладение языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, продолжения образования.

Развитие логического мышления, творческих способностей, алгоритмической культуры, мышления и интуиции для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений.

Требования к уровню подготовки обучающихся:

Учащиеся должны знать: алгоритм решения дробно-рациональных уравнений, способы решения систем уравнений, пропорции и их свойства, приёмы рационального счета.

Учащиеся должны уметь: решать дробно-рациональные уравнения; выражать одно неизвестное через другое; заменять проценты дробью и наоборот.

**Тематический план**

| № п.п. | Наименование разделов и тем | Количество часов |
|---|---|---|
| 1. | Введение. Решение одной задачи тремя способами. | 1 |
| 2. | Задачи на движение: | 9 |
| | а) движение из одного пункта в другой в одном направлении; | 2 |
| | б) движение из одного пункта в другой с остановками в пути; | 2 |
| | в) движение из разных пунктов навстречу друг другу; | 2 |
| | г) движение по водному пути. | 2 |
| | Закрепление | 1 |
| 3. | Задачи на совместную работу: | 7 |
| | а) вычисление неизвестного времени работы; | 2 |
| | б) путь, пройденный движущимися телами, | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| | рассматривается как совместная работа; | |
| | в) задачи на бассейн, заполняемый одновременно разными трубами. | 2 |
| | Закрепление | 1 |
| 4. | Задачи на планирование: | |
| | а) задачи, в которых требуется определить объём выполняемой работы; | 7 |
| | б) задачи, в которых требуется найти производительность труда; | 2 |
| | в) задачи, в которых требуется определить время, затраченное на выполнение предусмотренного объёма работы. | 2 |
| | Закрепление | 2 |
| 5. | Задачи на проценты: | 1 |
| | а) задачи, решаемые арифметическим способом; | 11 |
| | б) задачи, в которых известно, сколько процентов одно число составляет от другого; | 2 |
| | в) задачи, в которых известно, на сколько процентов одно число больше (или меньше) другого; | 2 |
| | г) процентные вычисления в жизненных ситуациях (распродажа, тарифы, штрафы, банковские операции, голосования). | 2 |
| | | 2 |
| | Закрепление | 3 |
| | Всего: | 35 |

## Содержание курса

Тема 1. Введение.

На первом занятии сообщаются цели и задачи курса, систематизируются знания учащихся об уравнениях и системах уравнений, о способах их решений. Рассматривается классическая задача о фазанах и кроликах, которую можно решить с помощью уравнения, с помощью системы уравнений и рассуждая логически (устно). Самостоятельное решение задач такого типа.

Тема 2. Задачи на движение.

В начале занятия рассмотреть:

- основные компоненты этого типа задач (время, скорость, расстояние);
- зависимость между этими величинами в формулах;
- план решения задач на движение (заполнение таблицы);
- обратить внимание на особенности при различных видах движения.

Затем рассматриваем решение задач этого типа.

Тема 3. Задачи на совместную работу.

Начнем с некоторых указаний к задачам данного типа:

- основными компонентами задач являются работа, время, производительность труда (обратить внимание на аналогию с задачами на движение);
- рассмотреть алгоритм решения задач (желательно с помощью таблицы - это универсальный способ, аналогичный задачам на движение).

Далее переходим к решению различных задач данного типа.

Тема 4. Задачи на планирование.

К задачам этого раздела относятся те задачи, в которых выполняемый объём работы известен или его нужно определить (в отличие от задач на совместную работу). При этом сравнивается работа, которая должна быть выполнена по плану, и работа, которая выполнена фактически. Так же как и в задачах на совместную работу, основными компонентами задач на планирование являются работа (выполненная фактически и запланированная), время выполнения работы (фактическое и запланированное), производительность труда (фактическая и запланированная). В некоторых задачах этого раздела вместо времени выполнения работы дается количество участвующих в ее выполнении рабочих.

После предварительных замечаний решаем задачи данного типа.

Тема 5. Задачи на проценты.

Следует заметить, что задачи этого раздела входят как составная часть в решение других типовых задач. Заменяя проценты соответствующим количеством сотых долей числа, легко свести данную задачу на проценты к задаче на части. При решении задач данного типа предполагается использование калькулятора – всюду, где это целесообразно. Применение калькулятора снимает непринципиальные технические трудности, позволяет разобрать больше задач. Кроме того в ряде случаев необходимо считать устно. Для этого полезно знать некоторые факты, например: чтобы увеличить величину на 50%, достаточно прибавить ее половину; чтобы найти 20% величины, надо найти ее пятую часть; что 40% некоторой величины в 4 раза больше, чем ее 10%; что треть величины – это примерно 33% и т. д.

Сюжеты решаемых задач взяты из реальной жизни – из газет, объявлений, документов. Часто задачи могут быть решены разными способами. Важно, чтобы каждый ученик смог самостоятельно выбрать свой способ решения, наиболее ему удобный и понятный [44].

Приведем пример конспекта урока к данному элективному курсу.

**Тема урока: Решение задач с помощью рациональных уравнений.**

«Если вы хотите научиться плавать,
то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи,

то решайте их!»

Д.Пойа

**Цели урока:**

*Обучающая:*

закрепление понятия дробного рационального уравнения;

составление математической модели задачи, перевод условия задачи с обычного языка на математический;

умение проверять соответствие найденного решения условию задачи;

проверка уровня усвоения темы путем проведения проверочной работы.

*Развивающая:*

развитие умения правильно оперировать полученными знаниями, логически мыслить;

развитие интеллектуальных умений;

развитие умения принимать решения.

*Воспитательная:*

воспитание познавательного интереса к предмету;

воспитание самостоятельности при решении учебных задач;

воспитание воли и упорства для достижения конечных результатов.

**Задачи:** 1) актуализировать знанияалгоритмов решения дробных рациональных уравнений, формирование умения решать задачи при помощи рациональных уравнений; добиться усвоения алгоритма решения задач;

2) формирование УУД:

*Познавательные*: овладение основами логического и алгоритмического мышления;

*Регулятивные***:** развитие умения читать и записывать информацию в виде различных математических моделей, планировать действия в соответствии с поставленной задачей;

*Коммуникативные*: строить высказывания, аргументировано доказывать свою точку зрения;

*Личностные*: развитие навыков сотрудничества со сверстниками.

**Оборудование:** конспект урока, карточки.

**Ход урока**

| Этапы | Ход урока | УУД |
|---|---|---|
| **Проверка домашней работы**<br>**Организационный момент**<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>**Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности** | №615,№628(заранее на доску)<br>1)Что изучали на предыдущих уроках?<br>- Решение дробно рациональных уравнений.<br>2) Прочитайте высказывание математика Д. Пойа. Какой совет дает нам ученый?<br>Мудрость высказывания математика Д. Пойа объедините с предыдущей темой и сформулируйте тему урока.<br>Сегодня мы познакомимся с задачами, решение которых сводится к дробным рациональным уравнениям. Запишем тему урока. Назовите цель урока.<br>- Сегодня наша работа будет простроена следующим образом, мы будем коллективно, в парах и индивидуально.<br>Вспомните правила работы в парах. (Прислушиваться к мнению соседа, работать дружно, помогать друг другу).<br>В конце урока каждый из вас оценит свою работу и работу партнёра.<br>Чтобы успешно работать по новой теме ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы: | *На данном этапе урока происходит вовлечение учащихся в деятельность на личностно-значимом уровне. Формируются личностные УУД.*<br><br><br><br><br><br><br><br>*На этапе актуализации идёт повторение изученного материала, необходимого для «открытия нового знания», и выявление затруднений в* |

| | | |
|---|---|---|
| **Актуализация знаний** | -Какие уравнения называются дробными рациональными?<br>-Расскажите алгоритм решения дробных рациональных уравнений.<br>Прежде чем приступать к решению задачи необходимо несколько раз внимательно прочитать условие задачи, установить зависимостьмежду величинами и понять какую величину обозначить занеизвестную. | *индивидуальной деятельности каждого учащегося. Формируются регулятивные УУД.* |
| **Объяснение нового материала** | Рассмотрим пример.<br>**Задача №618.**<br>Из города в село, находящееся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два автомобиля. Скорость одного была на 20км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришел к местуназначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.<br>**Прочитать задачу 3 раза.**<br>**Составление математической модели:**<br>1.Какой процесс описывается в задаче?<br>2.Какими величинами характеризуется этот процесс?<br>3.Как связаны между собой эти величины?<br>4.Сколько реальных процессов описывается в задаче? | *На данном этапе дети учатся добывать информацию различными способами: наблюдение, чтение, слушание. Происходит открытие нового знания. Формируются познавательные УУД. Учатся доносить свою позицию до других (строить высказывания, пользуясь математическо* |

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
5.Значения, каких величин известны?<br>
6.Значения, каких величин сравниваются?<br>
7.Значения, каких величин требуется найти?<br>
8.Составьте краткую запись условия задачи.<br>
9.Обозначьте одну из неизвестных величин x, выразите другие<br>
неизвестные величины через x.<br>
Составим краткую запись условия задачи:<br>
1 а. ……?км/ч 120 км.......?ч на 1 ч раньше(меньше)<br>
2 а. …….?км/ч 120 км …….? ч<br>
x км/ч скорость первого автомобиля, тогда x + 20км/ч – скорость второго автомобиля, поэтому<br>
(Заполним краткую запись условия задачи.)
<table>
<tr><td></td><td>v</td><td>t</td><td>s</td></tr>
<tr><td>1 а.</td><td>x+20км/ч</td><td>$\frac{120}{x+20}$ч</td><td>120 км ч на 1ч раньше(меньше)</td></tr>
<tr><td>2 а</td><td>x x км/ч</td><td>$\frac{120}{x}$ч</td><td>120 км</td></tr>
</table>
Значит, $\mathbf{\frac{120}{x}-\frac{120}{x+20}=1}$
</td>
<td>
й терминологией), слушать других, пытаться принимать другую точку зрения, быть готовым изменить свою точку зрения, при необходимости отстаивать свою точку зрения, аргументировать её. Формируются коммуникативные УУД. Учитель проверяет решение задачи, учащиеся комментируют, как решали задачу.
</td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| **Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи** | Решив полученное уравнение, находим x1=40 км/ч, x 2 = -60 км/ч.<br>-60 не удовлетворяет условию задачи. 40+20=60 км/ч<br>Ответ: 60 км/ч.<br>После решения задачи необходимо еще раз объяснить ход решения и поинтересоваться у учащихся, понятно ли им данное решение. Так же необходимо заметить, что в некоторых случаях целесообразно создавать геометрические модели для лучшего восприятия условия<br>задачи. Чаще всего такие модели составляются к задачам на движение.<br>**Работа в тетрадях** №620<br>Деятельность учащихся – самостоятельно работают в парах.<br>**Прочитать задачу 3 раза.**<br>**Составление математической модели:**<br>1.Какой процесс описывается в задаче?<br>2.Какими величинами характеризуется этот процесс?<br>3.Как связаны между собой эти величины?<br>4.Сколько реальных процессов описывается в задаче?<br>5.Значение, каких величин известны?<br>6.Значение, каких величин | *На данном этапе формируются познавательные УУД: использовать полученную информацию в деятельности, развитие мыслительных операций, решать задания по аналогии, используя алгоритм действий, дети* |

| | | |
|---|---|---|
| | сравниваются?<br>7.Значение, каких величин требуется найти?<br>8.Составьте краткую запись условия задачи.<br>9.Обозначьте одну из неизвестных величин **x**, выразите другие неизвестные величины через **x.**<br>1). Учитель контролирует выполнение задания, отвечает на возникшие вопросы, оказывает помощь слабоуспевающим ученикам. Учащиеся, работающие парами, вместе обсуждают решение задачи.<br>1а**.** …?км/ч на 10 км/ч б. 560 км……. ?ч на 1 ч раньше(меньше)<br>2а**.** ….?км/ч 560 км………?ч<br>x км/ч скорость второго автомобиля, тогда x +10 км/ч скорость 1 автомобиля, поэтому<br>(Заполним краткую запись условия задачи).<br><table><tr><td></td><td>v</td><td>t</td><td>s</td></tr><tr><td>1а.</td><td>x +10?км/ч</td><td>$\frac{560}{x+10}$ км/ч на 1ч раньше(м)</td><td>560 км</td></tr></table> | *учатся самостоятельно применять знания в новой ситуации. Формируются регулятивные УУД. Каждый делает для себя вывод, что он уже умеет. Формируются личностные УУД (самоконтроль, самооценка, саморефлексия, способность к саморазвитию)* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2а. | х км/ч | $\frac{560}{x}$ км/ч | 560 км |

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1$$

НОЗ=х (х +10)

560 (х + 10) – 560 х = х. (х +10)

560 х+5600 – 560 х = х2 + 10х

$x^2$ + 10х - 5600 =0

$x_1$ = -5 -75 = - 80

$x_2$ = -5 +75 = 60

если х =- 80, то х. (х +10) = - 80 (- 80 +10) ≠ 0, значит, - 80 корень уравнения, но – 80 не удовлетворяет .условию задачи.

если х =60, то х (х +10) = 60(60 +10) ≠ 0, значит, 60 корень уравнения.

если х = 60, то х +10 = 60 +10 =70.

Ответ: 70 км/ч; 60 км/ч.

**Выполнение контролирующего задания по изученной теме ивключение в систему знаний повторение.**

Индивидуальная работа выполняется на листочках.

Вариант 1.

I. Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 20 км ему потребовалось на 20 мин меньше, чем второму. Чему равны скорости велосипедистов? (Пусть х км/ч – скорость первого велосипедиста)

*На данном этапе предлагаются не только задания, при решении которых используется новый алгоритм, но и выполняются*

| | | |
|---|---|---|
| | II. Расстояние по реке между двумя деревнями равно 2 км. На путь туда и обратно моторная лодка затратила 22 мин. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч? (Пусть х км/ч – собственная скорость лодки)<br>III* За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано 2/3 поля. За сколько дней можно было вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней быстрее, чем вторым?<br>Вариант2.<br>I. Скорость первого пешехода на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому на путь длиной 5 км ему потребовалось на 15 мин меньше , чем второму. Чему равны скорости пешеходов? (Пусть х км/ч – скорость первого пешехода)<br>II. Моторная лодка курсирует между пристанями, расстояние между которыми по реке равно 4 км. На путь по течению у неё уходит на 3 мин меньше, чем на путь против течения. Чему равна скорость течения реки, если известно, что скорость лодки в стоячей воде равна 18 км/ч? (Пусть х км/ч – скорость течения реки)<br>III.* За 4 дня совместной работы двух | *задания, в которых новое знание используется вместе с ранее изученным. Выполняются универсальные логические действия: анализ, синтез. Дети учатся находить информацию в тексте задачи, выделять главное, применять новые знания в другой ситуации. Формируются познавательные УУД.* |

| | | |
|---|---|---|
| **Подведение итогов** | тракторов различной мощности было вспахано 2/3 поля. За сколько дней можно было вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней быстрее, чем вторым?<br>Учащиеся заполняют листы достижений и сдают учителю | |

## Заключение

Выпускная квалификационная работа посвящена проблеме поиска методических подходов к обучению учащихся приемам решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. Эта тема является актуальной, так как многие учащиеся школ не умеют решать текстовые задачи.

В первой главе выпускной квалификационной работе были определены основные понятия темы, приведена историческая справка о том, как в древности решали задачи, каким способом. Так же были рассмотрены основные типы текстовых задач и схемы решения. В той же главе были описаны методы решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. А также подобраны и решены задачи, при помощи рациональных уравнений и систем рациональных уравнений.

Во второй главе представлен анализ учебников 8 класса различных авторских коллективов по данной теме. Приведена методика изучения решения текстовых задач с использованием рациональных уравнений и систем рациональных уравнений, описан элективный курс для учащихся 8 класса по теме «Использование рациональных уравнений и систем рациональных уравнений при решении текстовых задач».

Данную работу можно использовать как дополнительный источник информации учителю для подготовки к урокам алгебры, а также студентам факультета математики при изучении учебной дисциплины «Элементарная математика (алгебра)».

## Библиографический список

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю.М.,«Алгебра 7,8,9» (М.: Просвещение,2010 и последующие издания).

2. Арнольд И.В. Принципы отбора и составления арифметических задач/Вопросы методики математики. – М., – 2000. – С. 7–28. – (Изв. АПН РСФСР, выпуск 6).

3. Арнольд В.И. Избранное — 60. — М.: ФАЗИС, 2007.

4. Баранов И. А., Богатырев Г. И., Боконев О. А. Математика для подготовительных курсов техникумов. М.: «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 2000.

5. Баданова Т.А. Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики // Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Калуга, 2007Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. – М.–П.: 2001.

6. Бгатова О.В. Применение СКМ при обучении математике.//

7. Вавилов В. В. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. М. «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 2000.

8. ВиленкинН.Я., А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд, В.И. Жохов Математика. Учебник для 5 класса средней школы. М.: 2013. – 304 с.

9. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты/Математика в школе, 2012,№ 4.ВыгодскийМ. Я. Справочник по элементарной математике. – М: АСТ: Астрель, 2006.- 509с.:ил.

10. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. Выпуск I. Арифметика и алгебра. Перев. с нем. П.С.Юшкевича. М.–Л.: 2000.

11. Г у с е в В. А. , М о р к о в и ч А. Г. Г96 Математика: Справочные материалы: кн. для учащихся.- М.: Просвещение, 2001.-416с.:ил.

12. Гусев В. А. «Внеклассная работа по математике в 6 – 8 классах: Книга для учителя » .- 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2001.- 286с., ил.Волович М.Б. Преемственность при обучении математике в 5-6 классах/Математика, 2004, № 33.

13. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX-X Кл. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 2001.-351с.:ил.

14. Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В. Кузнецова Г. М. «Оценка качества подготовки выпускников основной школы по математике». – М.: Дрофа, 2000.- 80 с.: ил.

15. ДорофеевГ.В.,МуравинК.С.,МуравинГ.К. «Учебник алгебры» – М.: Дрофа, 2001.- 240 с.: ил.

16. Доценко В.С. Пятое правило арифметики/Наука и жизнь, № 12, 2004. Азиев И. К. Решение систем уравнений с тремя переменными с помощью скалярного произведения // Математика в школе. 2003. №6. с 34-37.

17. Егоров А. А. Математический кружок. Выпуск 2 .- М.: Бюро Квантум, 2004. – 128с. (Прил. к журналу «Квант» №5/ 98).

18. Жохов, В. И. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса / Под. ред. В. И. Жохов, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк.- 6-е изд.- М.: Просвещение, 2001.- 144 с.

19. Звавич, Л. И. Дидактические материалы по алгебре для 7 класса [Текст].- 3-е изд.- М.: Просвещение, 1998.- 159 с.

20. Колягин Ю.М. Функции задач в обучении математике и развитие мышления школьников/Советская педагогика, 2003, № 6.

21. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике: Кн. для учителей [Текст].- М.: просвещение,1977.- 104 с

22. Крамор В.С. «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа» (М.: Просвещение, 2003).

23. Кузнецова Л.В… «Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы» (М.: ДРОФА, 2001).

24. Менчинская Н.А., Моро М.И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. – М.: Просвещение, 2001. – 224 с.

25. МордковичА.Г.,МишустинаТ.Н.,ТульчинскаяЕ.Е. «Учебник алгебры 8 класс» – М.: Мнемозина, 2005.- 191 с.: ил.

26. Мордкович, А. Г. Беседы с учителями математики: Учеб. - метод. Пособие - 2 - е изд., доп. и перераб.- М.: ООО «Изд. дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Изд. «Мир и Образ.», 2005.- 336 с.

27. Нешков К.И. Единый курс математики I–V классов/Проблемы совершенствования содержания и структуры школьного курса математики. – М.: НИИСиМО АПН СССР, 2005. – С. 59–68.

28. НикольскийС.М.,ПотаповМ.К.,РешетниковН.Н., ШевкинА.В. «Учебник алгебры 8 класс». – М.: Дрофа, 2010.- 352 с.: ил.

29. Оганесян В.А. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. – М., 2001.

30. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей. М., 2002.

31. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 2006.

32. Сорокин П.И. Занимательные задачи по математике. С решениями и методическими указаниями. Пособие для учителей I–IV классов. – М.: 2000

33. Тоом А.Л. Текстовые задачи: приложения или умственные манипулятивы/Математика, 2004, № 47.

34. Тоом А.Л. Наблюдения математика над математическим образованием/Архимед: Научно-методический сборник. Выпуск 1, 2005. – 100 с.

35. Тоом А.Л. Между детством и математикой: Текстовые задачи в математическом образовании/ Математика, 2005, № 14.

36. Пичурин Л.Ф. «За страницами учебника алгебры» (М.: Просвещение, 20030).

37. Репьев В.В., Общая методика преподавания математики // М.: Просвещение, 1958.

38. Журналы «Математика в школе» №10, 2003г., №№4,5, 2004г.

39. Статья «Курс по выбору для девятого класса» - журнал Математика в школе №10 2003год.

40. http://cok.cross-edu.ru

41. Шохор-Троцкий С.И. Методика арифметики для учителей средних учебных заведений. Изд. 2-е испр. и доп.– СПБ.: 2000.

42. Математика: 5-11 кл.: Программы. Тематическое планирование: для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев. /М-во образования РФ; Сост. Г.М.Кузнецова, Н.Г.Миндюк. – М.: Дрофа, 2000.- 320 с.

43. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 2005.

44. Левитас, Г. Г. Об алгебраическом решении текстовых задач// Математика в школе.- 2000.- № 8.- С. 13 - 14.

45. Малкова, Т. В., Монахов, В. М. Математическое моделирование - необходимый компонент современной подготовки школьника // Математика в школе.- 1984.- №3.- С. 46 - 51.

46. Математический справочник школьника и студента: Учеб. пособие / Б. Фраки и др.- М.: изд. дом «Дрофа», 1999.- С. 40.

47. http://nashol.com/tag/gaiashvili/

48. http://nashol.com/2012062165646/ege-matematika-reshenie-zadach-tipa-v-glazkov-u-a-varshavskii-i-k-gaiashvili-m-ya-2012.html

49. http://www.slideshare.net/silvermlm/0vvedenie

50. http://www.ege.edu.ru./