МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.П.АСТАФЬЕВА»

(КГПУ им. В. П. Астафьева)

Институт математики физики и информатики

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

Направление: 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Математика»

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой алгебры, геометрии и
методики их преподавания,
руководитель ________________В.Р. Майер
«10» июня 2015 г.

Выпускная квалификационная работа

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕГЭ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11 КЛАССА

Выполнила студентка группы 42
Т. В. Архентова ______ 10.06.15 (подпись, дата)
Форма обучения: заочная

Научный руководитель
Старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии
и методики их преподавания
Е. А. Аёшина ______ 10.06.15 (подпись, дата)

Рецензент
Старший преподаватель кафедры математического анализа
и методики обучения математике в ВУЗе
О. В. Берсенева ______ 10.06.15 (подпись, дата)

Дата защиты 22.06.2015г.

Оценка отлично

Красноярск
2015

Введение 3

5

Глава I. Координатно-векторный метод как универсальный метод решения стереометрических задач

1.1. Единый государственный экзамен. Стереометрические задачи части С 5

1.2. Системы координат в пространстве. Способы задания систем координат на многогранниках 10

1.3. Решение стереометрических задач координатно-векторным методом 20

Глава II. Элективный курс «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ»» для учащихся 11 класса 32

2.1. Элективные курсы в образовательном процессе 32

2.2. Описание элективного курса «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ» 39

2.3. Конспекты уроков и методические рекомендации к проведению элективного курса 47

Заключение 66

Библиографический список 67

Введение

С приходом Единого государственного экзамена в образовательную практику школ, особенно актуально расширение и углубление знаний и умений учащихся по применению универсальных методов, алгоритмов решения геометрических и алгебраических задач. К такому классу методов можно отнести координатно-векторный, являющийся базовым методом для решения многих геометрических задач. Координатно-векторный метод решения задач при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математических, астрономических, физических и технических задач.

Сущность координатно-векторного метода в том, что задавая фигуры аналитически, мы можем решать геометрические задачи средствами алгебры. Координатно-векторный метод является универсальным. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Что касается школьного курса геометрии, то с уверенностью можно утверждать, что в некоторых случаях координатно-векторный метод позволяет доказывать и решать многие задачи более рационально и красиво, чем геометрическими способами. Правда, существует некоторая сложность при использовании данного метода: одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от выбора системы координат. И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно. Метод координат дает возможность наиболее легко решать стереометрические задачи части С Единого государственного экзамена на нахождение геометрических величин. Все это определяет актуальность данной работы.

Объект исследования: процесс обучения математике на старшей ступени.
Предмет исследования: организация элективных курсов в школе.
Цель работы: разработать элективный курс «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ» для учащихся 11 класса, привести методические рекомендации для учителей к его проведению.

Задачи:

1. Рассмотреть общие положения по созданию элективных курсов.
2. Выявить организационно-методические особенности разработки элективных курсов по математике.
3. Отобрать содержание элективного курса «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ» для учащихся 11 класса, разработать его структуру и методические рекомендации по его использованию в образовательном процессе.

Глава I. Координатно-векторный метод как универсальный метод решения стереометрических задач

1.1. Единый государственный экзамен. Стереометрические задачи части С

Выпускной экзамен по математике в российских школах в новом учебном году претерпел ряд изменений.

Математика «раздвоилась». Единый государственный экзамен по математике в новом учебном году в соответствии с Концепцией развития математического образования в РФ, утвержденной Правительством в декабре 2013 года, разделен на два уровня: базовый и профильный. Для получения аттестата об окончании школы достаточно будет сдать предмет на базовом уровне, доказав владение "математикой для жизни".

Однако успешная сдача базового уровня не даст возможности для поступления в ВУЗ, в котором математика включена в перечень вступительных испытаний. Для этого абитуриентам предстоит сдать профильный ЕГЭ по математике, по уровню сложности аналогичный ЕГЭ 2014 года [38].

Структура экзаменационной работы

Базовый уровень

Минимальный порог (7 баллов)

На выполнение экзаменационной работы отводится 3 часа (180 минут).

Экзаменационная работа состоит из одной части, включающей 20 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Ответом к каждому из заданий 1–20 является целое число или конечная десятичная дробь, или последовательность цифр. Задание с кратким ответом считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби [29].

Профильный уровень

Минимальный порог – 27 баллов.

На выполнение экзаменационной работы отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий.

Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

- часть 1 содержит 9 заданий (задания 1–9) с кратким ответом;
- часть 2 содержит пять заданий (задания 10–14) с кратким ответом и семь заданий (задания 1 –21) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–9 имеют базовый уровень, задания 10–19 – повышенный уровень, задания 20 и 21 относятся к высокому уровню сложности.

Задания первой части предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне. Задание с кратким ответом (1–14) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 15–21 с развёрнутым ответом, в числе которых пять заданий повышенного и два задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов. При выполнении заданий с развёрнутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов № 2 должно быть записано полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи.

Остановимся подробнее на задании 16 второй части ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задания 16 являются практически полным аналогом заданий С2 КИМ предыдущих лет. Стереометрическая задача позиционируется как задача для большинства успевающих учеников, а не только для избранных. В связи с этим в контрольно-измерительных материалах предлагается достаточно простая задача по стереометрии, решить которую возможно с минимальным количеством геометрических построений и технических вычислений. Итак, в заданиях 16 прежними остались уровень сложности, тематическая принадлежность (геометрия многогранников) и максимальный балл (2 балла) за их выполнение.

Несколько изменилась структура постановки вопроса. Теперь он разделён на пункты *а* и *б* примерно так же, как и предыдущее задание 15 (С1). Соответственно уточнился и общий характер оценивания выполнения решений. Для получения 2 баллов нужно, чтобы выполнялись два условия одновременно (конъюнкция), а для получения 1 балла хватает выполнения хотя бы одного из этих условий (дизъюнкция).

Содержание критерия, задание 16, 2015 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* И обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Для сравнения приведем критерии предыдущих лет.

Содержание критерия, задание С2, 2013, 2014 гг	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Пункт *а* в заданиях 16 может по-разному соотноситься с пунктом *б*. А именно, он может быть утверждением независимым от *б*, дополняющим или проверяющим понимание общей конструкции. Возможен и второй вариант, когда в пункте *а* следует доказать утверждение, необходимое для полной корректности вычислений в пункте *б*. [30]

Проведем сравнительный анализ решаемости стереометрической задачи части С Единого государственного экзамена за последние годы.

В Красноярском крае, в течение последних четырех лет, наблюдается низкий процент выполнения задания 16 (С2). Максимальный балл, получаемый при выполнении данного задания равен 2б. Сравнительные результаты выполнения экзаменационного задания С2 представлены на рис. 1.

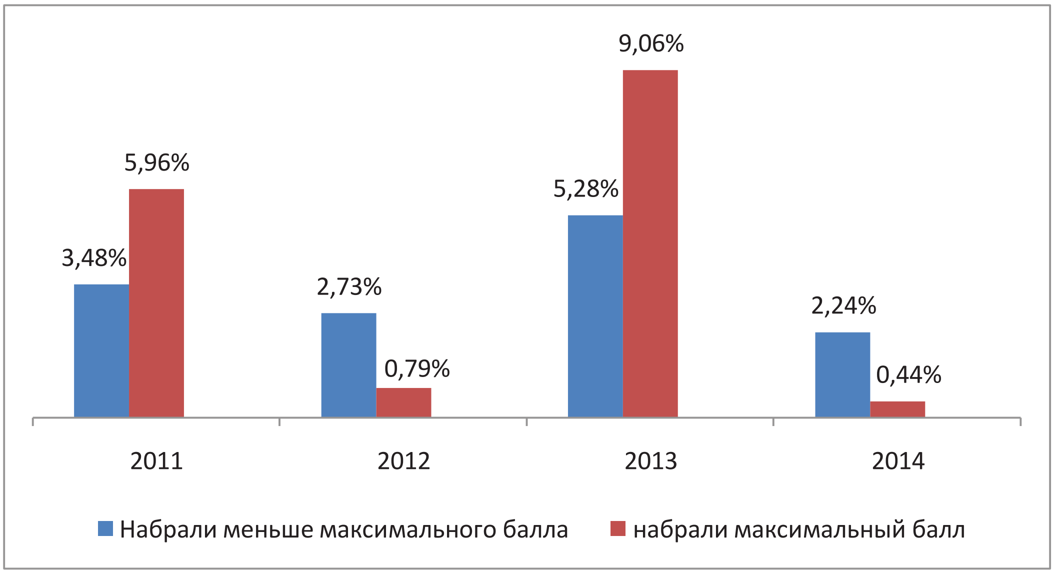

Рис. 1 Результаты выполнения задания С2 ЕГЭ за последние 4 года

По данным диаграммы можно увидеть, что процент выполнения данного задания низкий и стремительно падает. Резкий скачок наблюдается в 2013 году. Возможно, это связано с тем, что контрольно-измерительные материалы по математике были опубликованы в сети Интернет до начала экзамена.

Судя по информации, представленной в отчетах Красноярского «Центра оценки качества образования» по результатам единого государственного экзамена по математике, из года в год большое количество ошибок допускается не только при выполнении геометрических построений (линейного угла между плоскостями, угла между прямыми, расстояния между объектами), но и при переходе к планиметрической задаче.

Лишь немногие пытаются применить при решении данного задания координатно-векторный метод, причем эти попытки не всегда успешные (неправильно вводятся системы координат, некорректно определяются координаты точек и т.д.). Поэтому, на наш взгляд, на уроках геометрии в старшей школе необходимо больше внимания уделять решению подобного рода стереометрических задач, целенаправленно работать над использованием различных методов нахождения геометрических величин [17, 18, 19, 20].

Существует большое количество методов решения стереометрических задач. Наиболее распространенными считаются «поэтапно-вычислительный», «метод построений», «метод объемов», «координатно-векторный метод».

Чтобы решать стереометрические задачи С2 с использованием «поэтапно-вычислительного метода» необходимым условием является безупречное знание и понимание основных теорем стереометрии.

«Метод построений» универсален и подходит для решения практически любой из задач С2, но при этом зачастую приходится проводить множество различных доказательств, поэтому его не всегда можно назвать целесообразным.

Использование «метода объемов» не является универсальным. С идейной точки зрения этот метод весьма прост, но вычислений обычно получается несколько больше, чем в других методах.

Если у школьника имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, то можно построить работу по заданию С2 с помощью «координатно-векторного метода»

Данный метод позволяет рассматривать множество самых трудных задач на вычисление всех видов углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) и любых расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми).

Преимущество этого метода перед альтернативным решением средствами дополнительных построений состоит в том, что удаётся полностью отстраниться от чертежа и заниматься исключительно числами (координатами). Также с помощью координатно-векторного метода появляется возможность алгоритмизировать основные виды стереометрических задач С2 на нахождение геометрических величин и выполнять их решение «по шаблону». Поэтому в определенных условиях подготовки к единому государственному экзамену по математике удается «натаскать» ученика на стандартные решения. Причем за весьма короткий срок и в обход большого количества тем.

1.2. Системы координат в пространстве. Способы задания систем координат на многогранниках

Положение любой точки P в пространстве (в частности, на плоскости) может быть определено при помощи той или иной системы координат. Числа, определяющие положение точки, называются координатами этой точки.

Наиболее употребительные координатные системы – декартовы прямоугольные.

Иногда на плоскости применяют полярные системы координат, а в пространстве – цилиндрические или сферические системы координат.

Обобщением всех перечисленных систем координат являются криволинейные системы координат (рис. 2).

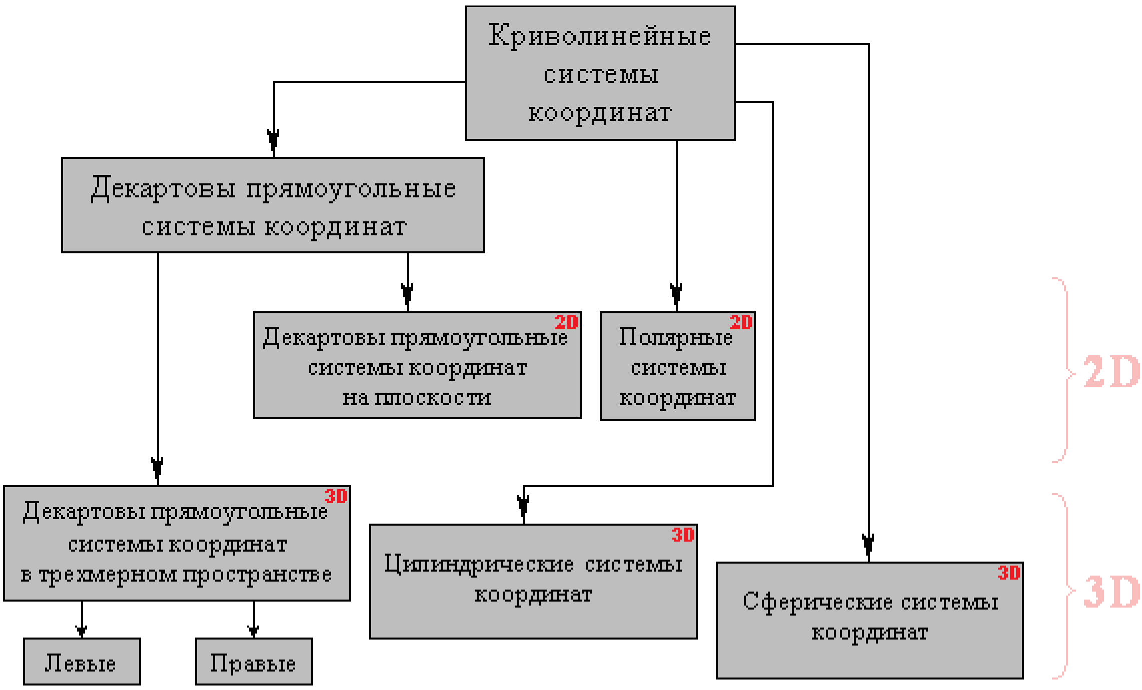

Рис. 2

В двухмерном пространстве задаются *два* семейства *линий* (координатных линий), зависящих каждое от одного параметра, причем через каждую точку проходит только по одной линии каждого семейства. Значения параметров, соответствующие этим кривым, являются криволинейными координатами этой точки.

В трехмерном пространстве задаются *три* семейства координатных *поверхностей*, таких, что через каждую точку проходит по одной поверхности каждого семейства. Положение точки в такой системе определяется значениями параметров координатных поверхностей, проходящих через эту точку.

Декартовы прямоугольные системы координат

Для задания декартовой прямоугольной системы координат нужно выбрать несколько взаимно перпендикулярных прямых, называемых осями. Точка пересечения осей О называется началом координат.

На каждой оси нужно задать положительное направление и выбрать единицу масштаба. Координаты точки P считаются положительными или отрицательными в зависимости от того, на какую полуось попадает проекция точки P.

Декартовыми прямоугольными координатами точки P *на плоскости* называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в единицах масштаба) этой точки до *двух* взаимно перпендикулярных прямых - осей координат или, что то же, проекции радиус-вектора r точки P на *две* взаимно перпендикулярные координатные оси (рис. 3).

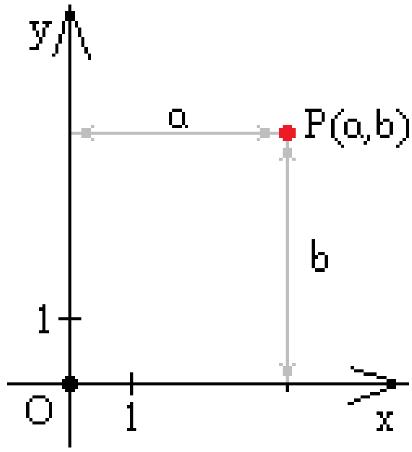

Рис. 3

Когда говорят про двухмерную систему координат, горизонтальную ось называют осью абсцисс (осью Ox), вертикальную ось – осью ординат (осью Oy). Положительные направления выбирают на оси Ox – вправо, на оси Oy – вверх. Координаты x и y называются соответственно абсциссой и ординатой точки.

Запись P(a;b) означает, что точка P на плоскости имеет абсциссу a и ординату b (рис. 3).

Декартовыми прямоугольными координатами точки P *в трехмерном пространстве* называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в единицах масштаба) от этой точки до *трех* взаимно перпендикулярных координатных плоскостей. Другими словами проекции радиус-вектора **r** точки P на *три* взаимно перпендикулярные координатные оси.

В зависимости от взаимного расположения положительных направлений координатных осей возможны левая и правая координатные системы (рис. 4 а, б).

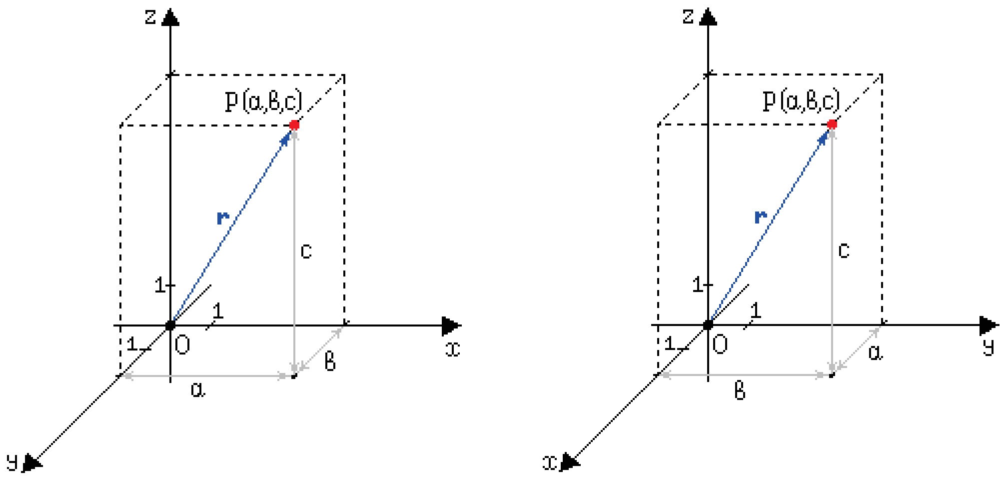

Рис. 4

а) левая координатная система б) правая координатная система

Как правило, пользуются правой координатной системой. Положительные направления выбирают: на оси Ox – на наблюдателя; на оси Oy – вправо; на оси Oz – вверх. Координаты x, y, z называются соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой.

Координатными поверхностями, для которых одна из координат остается постоянной, здесь являются плоскости, параллельные координатным плоскостям, а координатными линиями, вдоль которых меняется только одна координата, – прямые, параллельные координатным осям. Координатные поверхности пересекаются по координатным линиям.

Запись P(a;b;c) означает, что точка Q имеет абсциссу a, ординату b и аппликату c [39].

Полярные, цилиндрические и сферические системы координат в школьном курсе математики не рассматриваются, поэтому подробно на них не останавливаемся.

Способы задания систем координат на многогранниках

Для решения стереометрических задач координатно-векторным методом необходимо научиться находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат.

Ниже представлены координаты вершин некоторых многогранников, помещенных в систему координат.

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром а. Пусть начало координат находится в точке А, направление координатных осей показано на рис. 5. Тогда вершины куба имеют координаты:

$A(0,0,0), A_1(0,0,a), B(0,a,0), B_1(0,a,a),$
$C(a,a,0), C_1(a,a,a), D(a,0,0), D_1(a,0,a)$.

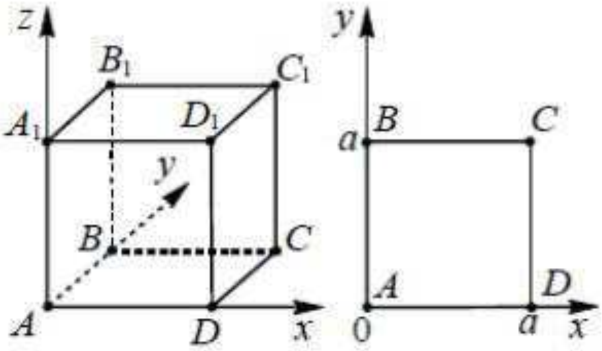

Рис. 5

Такое же расположение системы координат удобно использовать для прямоугольного параллелепипеда. Еще один вариант расположения прямоугольного параллелепипеда (куба) относительно декартовой системы координат связан с размещением начала координат в точке пересечения диагоналей основания (рис 6).

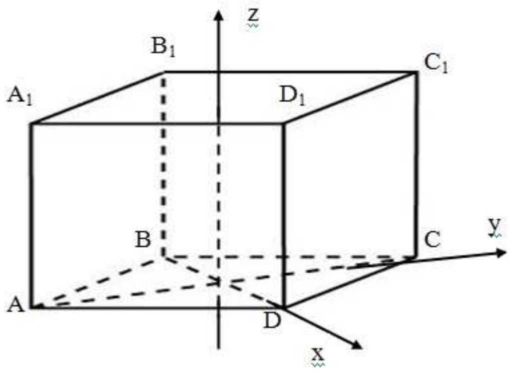

Рис. 6

1. Правильная треугольная призма $ADCA_1B_1C_1$. Сторона основания равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось OX направлена вдоль ребра AC, ось OУ проходит через точку A перпендикулярно AC, ось OZ направлена вдоль бокового ребра AA_1 (рис. 7). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0,0,0), A_1(0,0,b), B(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0), B_1(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},b), C(a,0,0), C_1(a,0,b)$$

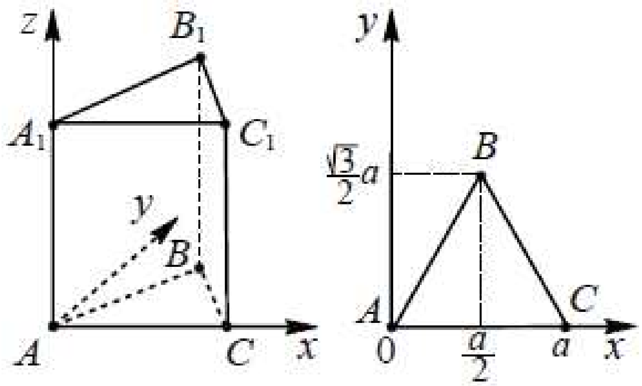

Рис. 7

Другой вариант расположения правильной треугольной призмы относительно прямоугольной декартовой системы координат показан на рис. 8.

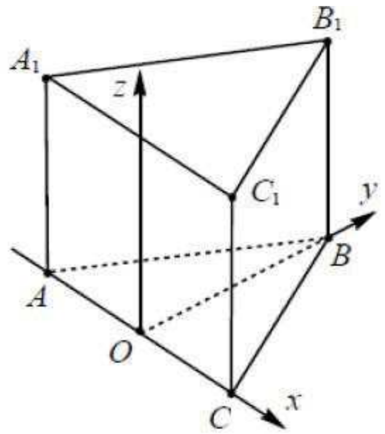

Рис. 8

2. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось OX направлена вдоль ребра AF, ось OУ проходит

через точку A перпендикулярно AF, ось OZ направлена вдоль бокового ребра AA_1 (рис. 9). Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0,0,0), A_1(0,0,b), B(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0), B_1(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},b), C(0,a\sqrt{3},0), C_1(0,a\sqrt{3},b), D(a,a\sqrt{3},0),$ $D_1(a,a\sqrt{3},b), E(\frac{3a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0), E_1(\frac{3a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},b), F(a,0,0), F_1(a,0,b).$

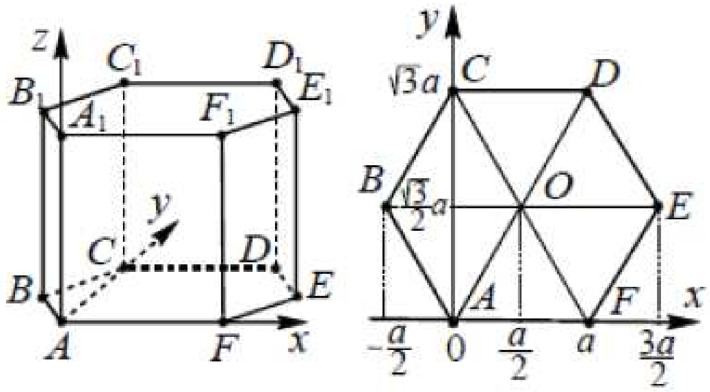

Рис. 9

На выносном чертеже основания AD=BE=CF=2a, $AC = \sqrt{CF^2 - AF^2} = a\sqrt{3}$. Другой вариант расположения правильной шестиугольной призмы относительно прямоугольной декартовой системы координат представлен на рис. 10.

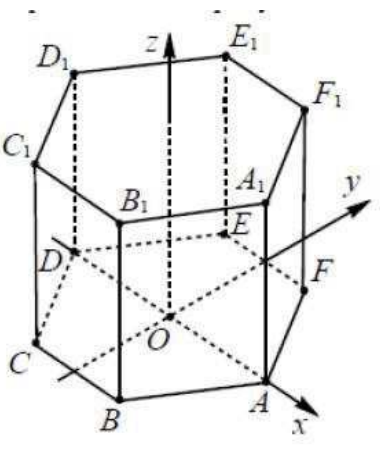

Рис. 10

3. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота равна h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

4.1. Пусть начало координат находится в точке А, ось ОХ направлена вдоль ребра АС, ось ОУ проходит через точку А перпендикулярно АС, ось OZ проходит через точку А перпендикулярно плоскости (АВС) (рис. 11). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0,0,0), B(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0), C(a,0,0), M(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, h).$

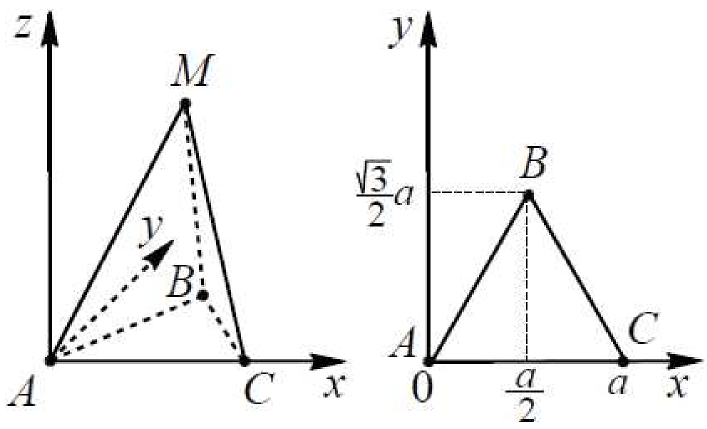

Рис. 11

Пусть начало координат находится в центре треугольника АВС в точке О, ось ОХ проходит через точку О параллельно ребру АС, ось ОУ проходит через точку О перпендикулярно плоскости (АВС) (рис. 12).

Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0), B(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0), C(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0), M(0,0,h).$

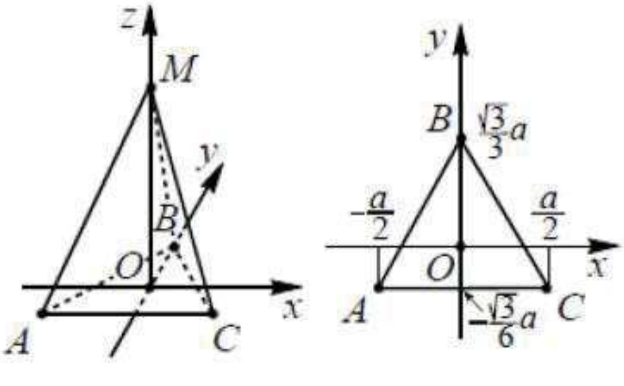

Рис. 12

Еще один вариант расположения правильной треугольной пирамиды относительно прямоугольной декартовой системы координат представлен на рис. 13.

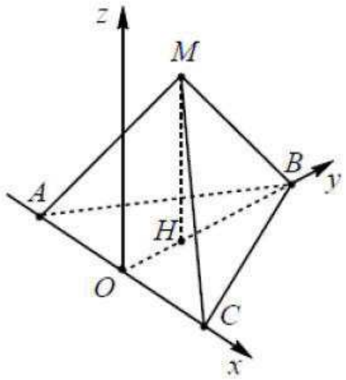

Рис. 13

4. Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, сторона основания которой равна a, а высота равна h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

5.1. Пусть начало координат находится в точке А, ось ОХ направлена вдоль ребра AD, ось ОУ вдоль ребра АВ, ось OZ проходит через точку А перпендикулярно плоскости (АВС) (рис. 14). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0,0,0), B(0,a,0), C(a,a,0), D(a,0,0), M(\frac{a}{2},\frac{a}{2},h).$

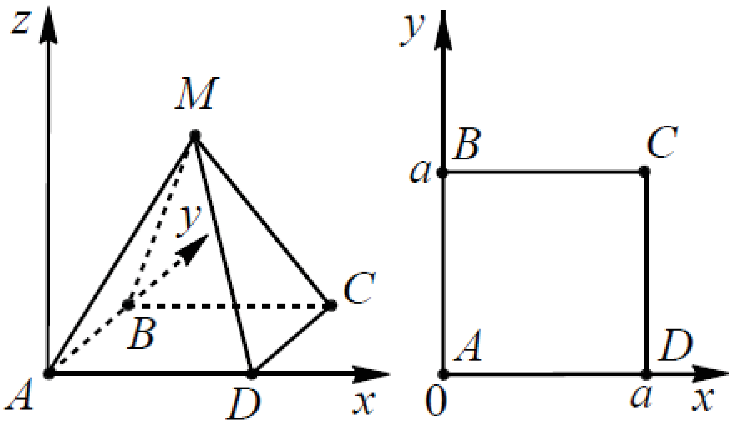

Рис. 14

5.2. Пусть начало координат находится в центре основания в точке O, ось OX проходит через точку O параллельно ребру AD, ось OУ проходит через точку O параллельно ребру AB, ось OZ проходит через точку O перпендикулярно плоскости основания (рис. 15). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0), B(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0), C(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0), D(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0), M(0,0,h)$.

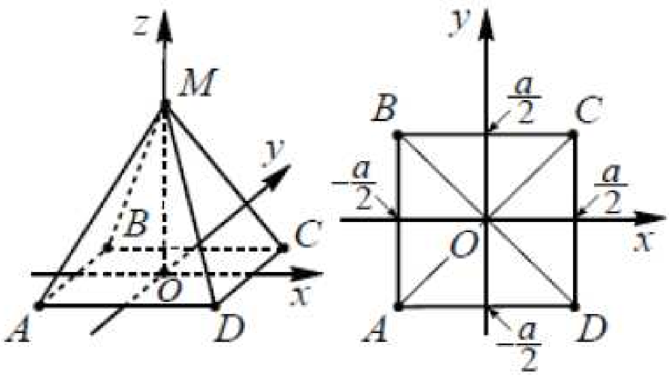

Рис. 15

5. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равны a, а высота равна h. Пусть начало координат находится в точке A, ось OX направлена вдоль ребра AC, ось OУ проходит через точку A перпендикулярно AC, ось OZ проходит через точку A перпендикулярно плоскости (ABC) (рис. 16). Тогда вершины пирамиды имеют следующие координаты:

$$A(0,0,0), B(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0), C(0,a\sqrt{3},0), D(a,a\sqrt{3},0),$$

$$E(\frac{3a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0), F(a,0,0), M(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},h).$$

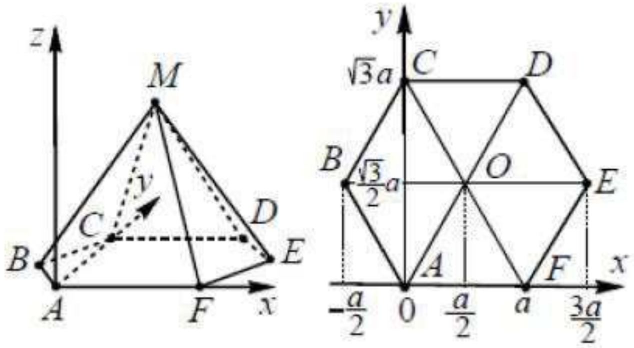

Рис. 16

Еще один вариант расположения правильной шестиугольной пирамиды относительно прямоугольной декартовой системы координат показан на рис. 17.

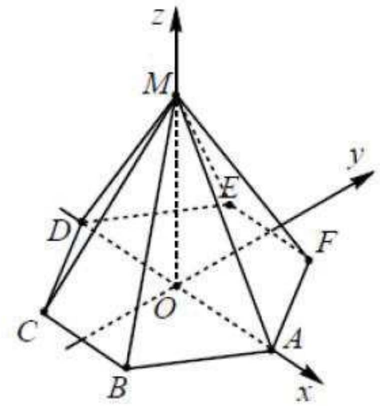

Рис. 17

Мы рассмотрели лишь самые распространенные многогранники, однако этих примеров достаточно, чтобы самостоятельно вычислить координаты любых других фигур [14].

1.3. Решение стереометрических задач координатно-векторным методом

Стереометрические задачи второй части ЕГЭ профильного уровня можно разбить на две основные группы «Нахождение углов» и «Нахождение расстояний».

Рассмотрим более подробно каждую из групп рассматриваемых задач. Задач на нахождение углов в пространстве можно выделить три типа.

1. **Нахождение угла между прямыми.**

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты двух направляющих векторов заданных прямых $AB(x_1;y_1;z_1)$, $CD(x_2;y_2;z_2)$.
- вычислить косинус угла между прямыми по формуле

$$Cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример 1: Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота призмы равна 4. Точка E - середина отрезка CD, точка F – середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.

Решение. Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат (рис. 18).

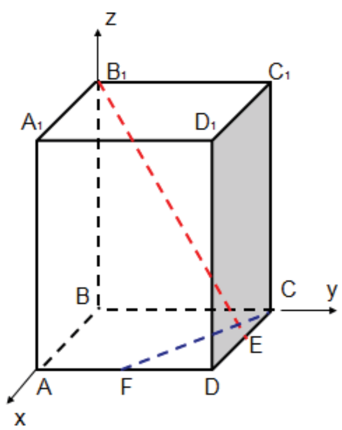

Рис. 18

Найдем искомый угол, как угол между векторами.

Выпишем координаты точек: $B_1(0;0;4), E(1;2;0), C(0;2;0), F(2;1;0)$. Тогда $\overrightarrow{CF}\{2;-1;0\}$, $\overrightarrow{B_1E}\{1;2;-4\}$.

Найдем угол между этими векторами по формуле: $Cos\alpha = \dfrac{2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot(-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$, таким образом, угол между векторами равен 90°, а, следовательно, и угол между прямыми CF и B_1E равен 90°.

Ответ: 90°.

2. Нахождение угла между прямой и плоскостью.

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты направляющего вектора прямой $AB(x;y;z)$
- вычислить координаты нормали к плоскости $\vec{n}(a;b;c)$
- вычислить косинус угла между полученными векторами

$$Cos\gamma = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|xa + yb + zc|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

В результате мы найдем угол γ между прямой и перпендикуляром к плоскости, тогда для нахождения искомого угла β используем равенство $Sin\beta = Cos\gamma$ (синус угла β между прямой l и плоскостью α равен косинусу угла γ между нормалью $(\vec{n})$к плоскости и направляющим вектором прямой $(\vec{m})$, поскольку β+γ =90° (рис. 19)

.

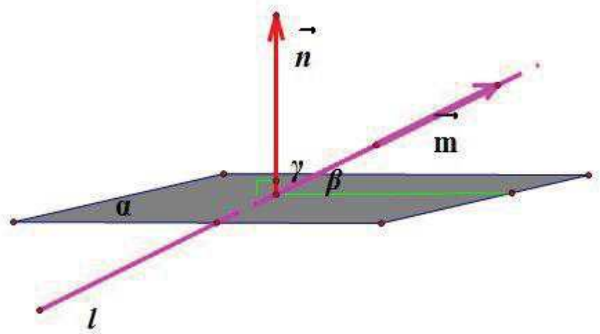

Рис. 19

То есть синус угла β между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты $\vec{m}\{a_1;b_1;c_1\}$ и плоскостью, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$вычисляется по формуле:

$$Sin\beta = Cos\gamma = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|xa + yb + zc|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Пример 2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BD и плоскостью SBC.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BD и плоскостью SBC (рис. 20).

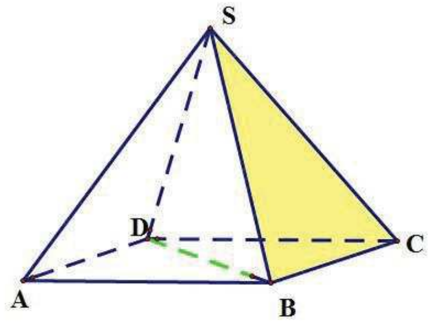

Рис. 20

Решение.

Введем систему координат (рис. 21).

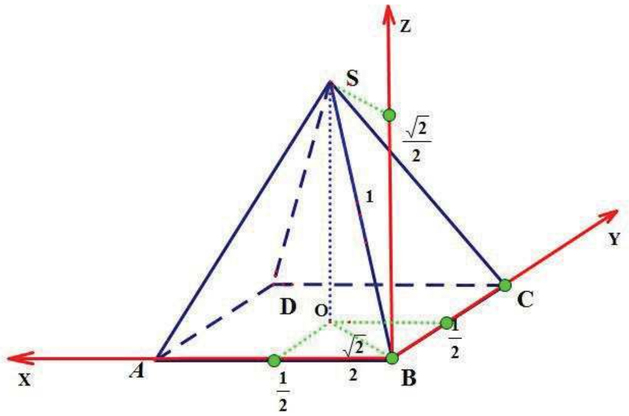

Рис. 21

Начало координат поместили в точку B, поэтому $B(0;0;0)$.

Запишем уравнение плоскости (SBC). Для этого найдем координаты точек S, B, C и подставим их в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$. $B(0;0;0)$, $C(0;1;0)$. Все ребра пирамиды равны 1. чтобы найти координаты точки S, сначала найдем координаты ее проекции на плоскость основания, а затем ее координаты по оси OZ.

$S(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$. Так как плоскость (SBC) проходит через начало координат, d=0. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} d = 0, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow b = 0; \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

Уравнение плоскости имеет вид: $-\sqrt{2}cx + cz = 0$ разделим обе части равенства на c.

$$-\sqrt{2}x + z = 0.$$

Таким образом, вектор нормали к плоскости (SBC) имеет координаты

$$\vec{n}(-\sqrt{2};0;1).$$

Найдем координаты направляющего вектора прямой BD. Для этого найдем координаты точек B и D, а затем из координат конца вычтем координаты начала. $D(1;1;0), B(0;0;0)$, следовательно, $\overrightarrow{BD}\{1;1;0\}$.

$$Sin\beta = \left| \frac{-\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1}\cdot\sqrt{1+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Нахождение угла между плоскостями.

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - нормалей к каждой из двух плоскостей α и β.
- вычислить косинус угла между нормалями

$$Cos(n_1;n_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Пример 3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21, на ребре AA_1 взята точка M так, что AM=8. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K=8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

Решение. Введем систему координат (рис. 22).

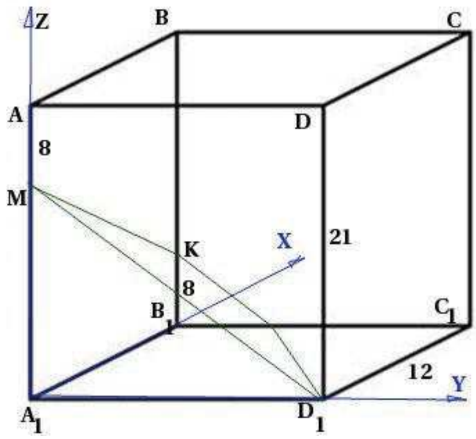

Рис. 22

Теперь перед нами стоит задача написать уравнения плоскостей D_1MK и CC_1D_1.

Запишем координаты точек. $M(0;0;13), K(12;0;8), D_1(0;12;0)$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot a+0\cdot b+13\cdot c+1=0, \\ 12\cdot a+0\cdot b+8\cdot c+1=0, \\ 0\cdot a+12\cdot b+0\cdot c+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\cdot c+1=0, \\ 12\cdot a+8\cdot c+1=0, \\ 12\cdot b+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{1}{13}, \\ a=-\dfrac{5}{156}, \\ b=-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

$-\dfrac{5}{156}x-\dfrac{1}{12}y-\dfrac{1}{13}z+1=0$.

Чтобы избавиться от дробных коэффициентов умножим обе части уравнения плоскости на 156, получим:

$5x+13y+12z-156=0$ - уравнение плоскости D_1MK.

Запишем координаты точек: $C(12;12;21), C_1(12;12;0), D_1(0;12;0)$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 12\cdot a+12\cdot b+21\cdot c+1=0, \\ 12\cdot a+12\cdot b+0\cdot c+1=0, \\ 0\cdot a+12\cdot b+0\cdot c+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0, \\ a=0, \\ b=-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

$-\frac{1}{12}y+1=0$.

Чтобы избавиться от дробных коэффициентов умножим обе части уравнения плоскости на 12, получим:

$y-12=0$ - уравнение плоскости CC_1D_1.

Чтобы найти косинус угла между плоскостями, подставим значения в формулу: $Cos\varphi=\frac{5\cdot 0+13\cdot 1+12\cdot 0}{\sqrt{5^2+13^2+12^2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^\circ$.

Ответ: $\varphi=45^\circ$.

В первую группу задач также входят три типа задач на «нахождение расстояний в пространстве».

1. Нахождение расстояния от точки до плоскости.

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты вектора $\vec{n}$ - нормали к плоскости, вычислить значение $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, где $(x_0;y_0;z_0)$ координаты любой точки плоскости.
- вычислить расстояние по формуле $\rho=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, где $(x_0;y_0;z_0)$ координаты точки, от которой ищется расстояние.

Пример 4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки A до плоскости (CB_1D_1) (рис. 23).

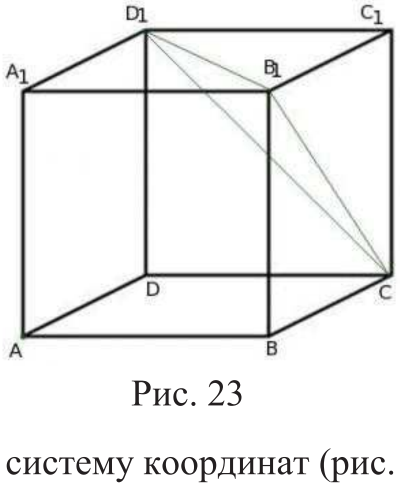

Рис. 23

Решение. Поместим куб в систему координат (рис. 24).

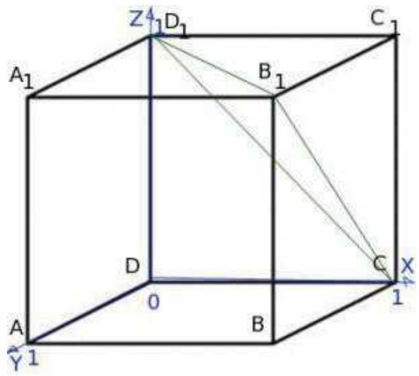

Рис. 24

Точка $A(0;1;0)$. Теперь наша задача найти коэффициенты a,b,c,d уравнения $ax+by+cz+d=0$ плоскости (D_1B_1C) примем *d=1* и подставим координаты точек D_1, B_1 и C в уравнение плоскости. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot a+0\cdot b+1\cdot c+1=0, \\ 1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+1=0, \\ 1\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1=0, \\ a+b+c+1=0, \\ a+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1, \\ b=1, \\ f=-1. \end{cases}$$

Подставим координаты точки A и значения коэффициентов в формулу:

$$\rho=\frac{|(-1)\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 0+1|}{\sqrt{(1)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Нахождение расстояния от точки А до прямой CD.

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты вектора $\vec{n}$ - нормали к плоскости (ACD).
- взяв за начало вектора $\vec{n}$ точку C, вычисляем координаты точки K – конца вектора $\vec{n}$.
- найти координаты нормали плоскости (KCD) и значение d.
- вычислить искомое расстояние по формуле $\rho(A;KCD)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Пример 5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки A до прямой BD_1.

Решение. Введем прямоугольную систему координат (рис. 25).

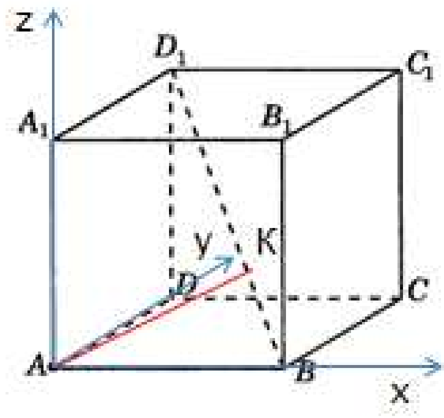

Рис. 25

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра AK. Определим координаты точек: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D_1(0;1;1)$. Так как отрезок BD разделен точкой $K(x;y;z)$ в отношении λ, то координаты точки K определяются по формуле: $K(\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda})$, тогда координаты вектора $AK(\frac{1+0}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda};\frac{0+\lambda}{1+\lambda})$, так как $AK \perp BD_1 \Rightarrow AK \cdot BD = 0 \Rightarrow -\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $K(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, $AK\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\}$.

$|AK| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми AB и CD.

Алгоритм решения задачи:

- вычислить координаты направляющих векторов прямых AB и CD.
- вычислить координаты некоторой точки M – середины AB.
- задать уравнение плоскости (CDM) то есть найти координаты нормали к плоскости (CDM) и значение d.
- вычислить расстояние от точки M до плоскости (CDM)

$$\rho(M;MCD)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ .$$

Пример 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 найдите расстояние между прямыми AB и CB_1 (рис. 26).

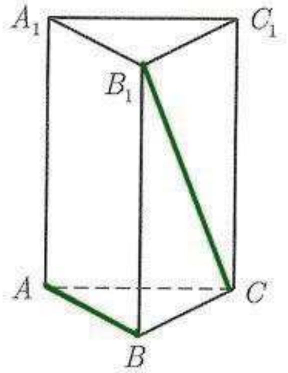

Рис. 26

Решение. Расстояние между прямыми AB и CB_1 есть расстояние от точки M, которая является серединой отрезка AB, до плоскости (A_1B_1C) (рис. 27).

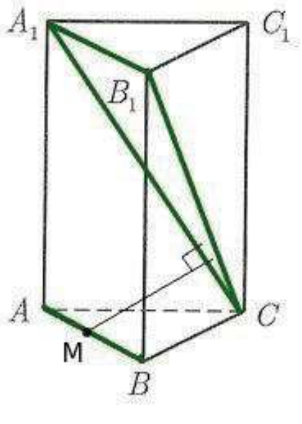

Рис. 27

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$ вычисляется по формуле: $\rho=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Поместим призму в систему координат. Нужно выбрать систему координат таким образом, чтобы координаты точки M и точек A_1, B_1 и C, задающих плоскость (A_1B_1C), вычислялись наиболее простым способом и содержали как можно больше нулей. Поэтому удобно выбрать систему координат следующим образом (рис. 28).

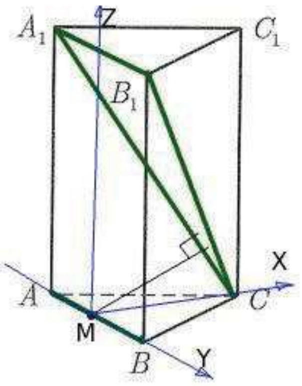

Рис. 28

Запишем координаты нужных нам точек. $A_1(0;\frac{1}{2};1), B_1(0;\frac{1}{2};1), C(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0), M(0;0;0)$.

Чтобы найти коэффициенты a,b,c,d уравнения $ax+by+cz+d=0$ плоскости (A_1B_1C) примем *d=1* и подставим координаты точек A_1, B_1 и C в уравнение плоскости. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot a-\frac{1}{2}b+c+1=0, \\ 0\cdot a+\frac{1}{2}b+c+1=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}b+c+1=0, \\ \frac{1}{2}b+c+1=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+1+0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1, \\ b=0, \\ a=-\frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Подставим значения коэффициентов и координаты точки M в формулу расстояния, получим:

$$\rho=\frac{\left|-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0+0\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\right|}{\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}+1}}}=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Как мы видим, все те соотношения, которые при решении традиционным методом даются с большим трудом (через привлечение большого количества вспомогательных теорем), координатно-векторным методом получаются в ходе несложных алгебраических вычислений. Нам не нужно задумываться, к примеру, как проходит та или иная плоскость, как упадет перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, каким образом скрещивающие прямые перенести, чтобы они были пересекающимися и т.д. Нам просто необходимо поместить тело в прямоугольную систему координат, определить координаты точек, векторов или плоскостей и воспользоваться той или иной формулой.

Глава II. Элективный курс «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ» для учащихся 11 класса

2.1. Элективные курсы в образовательном процессе

Рассмотрим основные теоретические положения организации элективных курсов в старшей школе.

Элективные курсы (курсы по выбору) играют важную роль в системе профильного обучения на старшей ступени школы. В отличие от факультативных курсов, существующих ныне в школе, элективные курсы – обязательны для старшеклассников.

Элективные курсы связаны с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Именно они являются важнейшим средством построения индивидуальных образовательных программ, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, потребностей, последующих жизненных планов. Элективные курсы «компенсируют» во многом достаточно ограниченные возможности базовых и профильных курсов в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Эта роль элективных курсов в системе профильного обучения определяет широкий спектр их функций и задач.

Цель изучения элективных курсов – ориентация на индивидуализацию обучения и социализацию учащихся, на подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности.

Элективные курсы должны помочь в решении следующих задач:

1. создание условий для того, чтобы ученик утвердился или отказался от сделанного им выбора направления дальнейшего учения и связанного с определенным видом профессиональной деятельности.

2. оказание помощи старшекласснику, совершившему в первом приближении выбор образовательной области для более тщательного изучения, в рассмотрении многообразия видов деятельности, с ней связанных [31].

В соответствии с целями и задачами профильного обучения элективные курсы могут выполнять различные функции:

- повышение уровня изучения базовых учебных предметов;
- изучение смежных учебных предметов на профильном уровне, реализация межпредметных связей, интеграция разрозненных представлений, сформированных в рамках отдельных учебных предметов, в целостную картину мира.
- подготовка к сдаче экзаменов на профильном уровне для учеников, изучающих предмет на базовом уровне;
- ориентация в особенностях будущей профессиональной деятельности, «профессиональная проба»;
- ориентация на совершенствование навыков познавательной, организационной деятельности [23].

Каждая из указанных функций может быть ведущей, но в целом они должны выполняться комплексно.

«По назначению можно выделить несколько типов элективных курсов. Одни из них могут являться «надстройкой» профильных курсов и обеспечить для наиболее способных школьников повышенный уровень изучения того или иного учебного предмета.

Другие элективные курсы должны обеспечить межпредметные связи и дать возможность изучать смежные учебные предметы на более высоком уровне. Примером таких курсов могут служить курсы: «Математическая статистика и экономика» для школьников, выбравших экономический профиль, «Компьютерная графика и дизайн» для индустриально-технологического профиля или «История искусств» для гуманитарного профиля.

Третий тип элективных курсов поможет школьнику, изучаемому один из учебных предметов на базовом уровне, подготовиться к сдаче ЕГЭ по этому предмету на профильном уровне.

Еще один тип элективных курсов может быть ориентирован на приобретение школьниками образовательных результатов для успешного продвижения на рынке труда. Примером подобных курсов могут служить курсы «Делопроизводство» или «Деловой английский язык», курсы по подготовке в сфере обслуживания и т.д.

Наконец, познавательные интересы многих старшеклассников часто могут выходить за рамки традиционных школьных предметов, распространяться на области деятельности человека вне круга выбранного ими профиля обучения. Это определяет появление в старших классах элективных курсов, носящих внепредметный и надпредметный характер. Примером подобных курсов могут служить курсы «Основы рационального питания» или «Подготовка автолюбителя»» [6].

Содержание программы курса по выбору прежде всего зависит от особенностей набора профилей на третьей ступени обучения в данной школе и состава учащихся. Часто бывает так, что в одной группе нужно, например, ликвидировать пробелы в знаниях и умениях учеников, а в другой – научить их решать задачи повышенного уровня сложности. Но какие бы задачи не ставил перед собой учитель, он не может не помнить о необходимости соблюдения следующих условий:

• Курс должен быть построен так, чтобы он позволял в полной мере использовать активные формы организации занятий, информационные, проектные формы работы. В противном случае и «ликвидация пробелов» и «углубленная подготовка» переродятся во вполне традиционное натаскивание.

• Содержание курса, форма его организации должны помогать учет через успешную практику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы («Я учусь в социально-гуманитарном классе потому, что не нашел в себе силы выучить таблицу умножения, а потому, намерен стать юристом или журналистом, а для этого буду постулат университет»).

• Отбирая содержание, учитель (автор программы, учебника) должен ответить на вопросы: «Почему ученик выберет именно этот курс, а другой? Чем он будет ему полезен, интересен?».

• Элективные курсы должны способствовать созданию положительной мотивации. Вместе с тем, надо помнить, что чрезмерная перегруженность курса новым содержанием может не позволить ученику ответить на главные вопросы. В связи с этим вполне возможна, на наш взгляд, ситуация, когда не весь объем содержания элективного курс является строго обязательным. Может быть, какой-то его объем минимально необходим, а все остальное — «по потребностям». Доминанта умений позитивного опыта может быть обеспечена на любом завершенном содержательном модуле или блоке. Возможен и такой вариант, при котором ученик может выполнить обязательный набор заданий на одной содержательной теме.

• Курсы должны познакомить ученика со спецификой видов деятельности, которые будут для него ведущими, если он совершит тот или иной выбор (историк, филолог, физик и т.д.), т. е. повлиять на выбор учеником сферы профессиональной деятельности, пути (направления) получения им образования в профессиональной школе (прежде всего высшей). Они должны включать пробы по ведущим для данного профиля видам деятельности (чтобы показать специфику данного профиля через деятельность — работа с текстами, анализ источников, использование правовых документов и т.п.).

• Курсы (по возможности) должны опираться на какое-либо пособие. Это позволит исключить «монополию учителя на информацию».

• Содержание элективных курсов не должно дублировать содержание предметов, обязательных для изучения.

• Если автор относит (условно) свой курс к ориентирующим, он должен так построить учебную программу, чтобы ученик мог получить представление о характере профессиональной деятельности (юрист, экономист, журналист, зоотехник и т.д.) [19].

Хорошо, если программа курса состоит из ряда законченных модулей. Это позволит ученику, в том случае, если он понял, что его выбор ошибочен, пойти в следующей четверти (полугодии) на занятия по другому курсу.

Отобранное содержание должно, с одной стороны, соответствовать познавательным возможностям старшеклассников, а с другой предоставляя ученику возможный опыт работы на уровне повышенных требований, развивать его учебную мотивацию.

Содержание курса может представлять собой:

- расширенный, углубленный вариант какого-то раздела базового курс («Механика», «Международные отношения», «Океаны» и т.д.);
- введение в одну из «сопутствующих» данному предмету наук профессий (астрономия, археология, журналистика и т.д.);
- отдельные фрагменты из различных разделов одного или нескольких предметов, если курс ориентирован на определенный уровень обобщения («Естествознание», например) или освоение определенного вида деятельности («Эксперименты в физике, химии, биологии», «Работа источниками информации») [3].

Охарактеризуем основные *структурные элементы программ элективных курсов:*

1. Титульный лист.
2. Пояснительная записка.

Должна включать: актуальность программы, обоснованность необходимости программы (доводы о важности изучаемого компонента, недостаточность изучения в базовом курсе, соответствие возрасту, связь с наукой и др.); цели и задачи программы (развитие интереса, оказание помощи в выборе профессии и др.); обоснование отбора содержания (элементы программы должны быть взаимосвязаны, должно быть выделено содержание); указание внутрипредметных и межпредметных связей; сведения об учащихся, на которых рассчитана программа технические указания к тексту программы (для всех один текс повышенного уровня – другой).

3. Содержательная часть.

Должна включать: последовательный перечень тем с их кратким содержанием, указанием времени, необходимого на их изучение; список демонстраций, практических и лабораторных работ, экскурсий.

4. Методическая часть.

Должна включать: методические рекомендации; требования к уровню знаний, умений и навыков, полученных в результате обучения; критерии эффективности реализации программы; формы и методы контроля; список рекомендуемой литературы.

5. Приложение.

Должно включать: тематическое планирование; дидактический материал; диски с электронными презентациями.

Итак, чтобы разработать элективный курс необходимо придерживать ряда правил, а так же иметь большой запас знаний и умений.

Так как элективные курсы выбираются самими учащимися, они должны соответствовать их потребностям, целям обучения и мотивам выбора курса. Следует отметить, что к основным мотивам выбора элективных курс в 9-11 классе, которые следует учитывать при разработке и реализации элективных курсов относятся:

- подготовка к экзаменам по профильным предметам;
- приобретение знаний и навыков, освоение способов деятельное для решения практических, жизненных задач, уход от традиционного школьного «академизма»;
- возможности успешной карьеры, продвижения на рынке труда;
- любопытство;

- поддержка изучения базовых курсов;
- интеграция имеющихся представлений в целостную картину мира.

Среди школьных предметов математика занимает совершенно особое место. Впрочем, любой учитель утверждает то же самое о преподаваемом и предмете. И это совершенно справедливо [1].

Возможно, предположить, что в школе математика занимает весьма важное место, учитель математики будет, так или иначе, стремиться к увеличению числа учебных часов по своему предмету. Поэтому, как нам представляется, большинство учителей математики будет заинтересовано в ведении элективных курсов.

С другой стороны, очень важен вопрос о том, какие это будут элективные курсы, как учителя распорядятся отведенным на этот элемент образовательной программы временем.

Можно прогнозировать, что очень многие преподаватели математики захотят, так или иначе, вольно или невольно, явно или неявно, использовать элективные курсы для закрепления содержания основной программы.

На наш взгляд, интерес к математике за годы обучения, в основном уже сформирован. Рассматривая причины интереса к математике у своих учеников, учителю не стоит путать интерес к ней как к средству поступления в высшее учебное заведение интересом к ней как собственно учебному предмету, как к науке.

Одной из важных задач введения элективных курсов является именно развитие у учащихся интереса собственно к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. Поэтому возникает вопрос: кого мы учим или кто, и на какой элективный курс может и должен прийти?

2. 2. Описание элективного курса «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ»

В геометрии применяются различные методы решения задач. Они делятся на методы алгебры и геометрии. Геометрические методы: метод треугольников, метод площадей, метод вспомогательных фигур, метод объёмов, координатный метод, векторный метод и др. Они занимают различное положение в школе. Основным методом считается синтетический, а из других наиболее высокое положение занимает координатно-векторный метод. Изящество синтетического метода достигается с помощью интуиции догадок, дополнительных построений. Векторно-координатный метод этого не требует: решение задач в большинстве случаев алгоритмизировано, что упрощает поиск и само решение задачи.

Можно с уверенностью говорить о том, что изучение данного метода является неотъемлемой частью школьного курса геометрии. Но нельзя забывать, что при решении задач этим методом необходим навык алгебраических вычислений и не нужна высокая степень сообразительности, а это в свою очередь негативно сказывается на способностях учащихся мыслить. Поэтому необходима методика изучения координатно-векторного метода, которая позволит учащимся научиться решать разнообразные задачи данным методом, но, в свою очередь, не показывающая этот метод как основной для решения геометрических задач. Это и поспособствовало выбору темы нашего элективного курса.

Пояснительная записка

Координатно-векторный метод решения задач – наиболее эффективный метод в геометрии. Использование этого метода, позволяет значительно упростить и сократить процесс решения задачи. Общий уровень стереометрической подготовки выпускников средних школ по-прежнему остается достаточно низким. Поэтому в данном курсе рассматриваются эффективные приемы использования указанного метода и примеры решения стереометрических задач. Координатно-векторный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Но, к сожалению, координатно-векторный метод в рамках школьной программы используется достаточно неполно и ограниченно.

Данный элективный курс предназначен и рассчитан на выпускников средних общеобразовательных учреждений, которые желают углубить свои знания по стереометрии, качественно подготовиться к сдаче Единого государственного экзамена на профильном уровне. Он также полезен учащимся, которые планируют в дальнейшем работать по специальности, связанной с математикой.

Цель курса: научить школьников применять координатно-векторный метод при решении стереометрических задач.

Простой в применении координатно-векторный метод является необходимой составляющей решения задач различного уровня. В рамках данного элективного курса рассматриваются типовые стереометрические задачи части С ЕГЭ, их решение с помощью координатно-векторного метода.

Задачи элективного курса:

- развитие пространственных представлений учащихся;
- знакомство учеников с разными типами стереометрических задач, с особенностями методики и способами их решения;
- обобщение изученного в базовой школе материала о векторах на плоскости, систематизация сведений о действиях с векторами в пространстве;
- формирование умений применять координатно-векторный метод к решению задач на нахождение углов между объектами в пространстве;
- формирование умений применять координатно-векторный метод к решению задач на нахождение расстояний между объектами в пространстве.

Требования к уровню усвоения курса

В результате изучения данного курса учащийся должен:

- **Знать:**

1. Теоретические основы векторного и координатного методов к решению геометрических задач.
2. Основные принципы математического моделирования.
3. Математический язык, математическую символику.

- **Уметь:**

1. Разными способами задавать систему координат для данной задачи и находить координаты вершин многогранников.
2. Выполнять необходимые эскизы к решаемым задачам.
3. Приводить полные обоснования при решении задач, используя при этом изученные теоретические сведения, необходимую математическую символику.
4. Находить координаты вектора через координаты начала и конца.
5. Составлять уравнение плоскости по координатам трёх точек принадлежащих этой плоскости.

- **Владеть:**

1. Определённым набором приёмов векторного и координатного методов решения геометрических задач.
2. Навыком составления математических моделей геометрических задач.
3. Навыком описания с помощью математической символики, формул общие свойства геометрических объектов и отношений между ними.

Формы контроля: домашние контрольные работы, зачеты, тестирование.

Организация учебного процесса

Программа рассчитана на один год, один час в неделю (всего 34 часа). Она состоит из трех разделов и содержит систему понятий из областей:

системы координат, векторы и координаты в пространстве, углы между прямыми, прямыми и плоскостями, плоскостями в пространстве, расстояние от точки до плоскости, между двумя прямыми, от точки до прямой. Каждый из разделов состоит из отдельных пунктов, в которых разбираются типовые задачи и задачи более высокого уровня сложности, затем даются задания для самостоятельного решения.

Элективный курс имеет практико-ориентированную направленность. Формы занятий разнообразны: семинары, практикумы, защита индивидуальных проектов.

Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется при выполнении практических заданий, заданий из открытого банка заданий ЕГЭ на сайте ФИПИ. В рамках данного курса предполагается углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе изучения некоторых тем, учитывающих перспективы создания новых стандартов школьного математического образования в профильной школе.

В преподавании данного курса важным является выбор рациональной системы методов и приемов обучения. Учебный процесс ориентирован на рациональное сочетание устных и письменных видов работы. Программа построена с учетом принципов системности, научности, наглядности, доступности и обеспечивает выполнение обязательных требований государственные стандартов.

Учебно-тематический план элективного курса

№ п/п	Тема	Количество часов	Тип урока	Содержание
Декартовы координаты в пространстве (3 ч)				
1	Декартова система координат в пространстве	1	Лекция	Понятие системы координат и координаты точки в пространстве
2	Нахождение координат точек и длин векторов в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Координаты середины отрезка. Понятие вектора. Координаты вектора. Действия над векторами. Длина вектора. Скалярное произведение векторов.
Основы аналитической геометрии (6 ч)				
3	Составление матрицы и нахождение определителей	2	Лекционно-практическое занятие	Определение матрицы, способы ее решения
4	Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм составления уравнения плоскости. Определение вектора нормали. Координаты вектора нормали

5	Вычисление угла между векторами в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Формула нахождения угла между векторами в пространстве
Использование координатно-векторного метода при решении стереометрических задач (23 ч)				
6	Способы задания прямоугольной системы координат в многогранниках	2	Семинар-практикум	Способы задания систем координат на многогранниках. Определение координат вершин многогранников
7	Решение задач на нахождение угла между прямыми в многогранниках и в пространстве	4	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между прямыми
8	Нахождение угла между прямой и плоскостью в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между прямой и плоскостью
9	Нахождение угла между плоскостями в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между плоскостями.
10	Нахождение расстояния от точки до плоскости.	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения расстояния от точки до плоскости
11	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между

				скрещивающимися прямыми
12	Нахождение расстояния между плоскостями в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания
13	Решение задач 16 ЕГЭ профильного уровня	7	Практическое занятие	Решение стереометрических задач на нахождение геометрических величин ЕГЭ профильного уровня
14	Контрольная работа	1	Итоговая работа	
15	Итоговое занятие	1	Практическое занятие	
		34		

Список рекомендуемой учебно-методической литературы для учащихся:

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. ср. шк. – М.: Просвещение, 2010.

2. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решения. Легион, 2013. – 231с.

3. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». [Электронный ресурс] //Задания 16. – Режим доступа: http://reshuege.ru.

4. Ященко И.В.. ЕГЭ-2015. Математика: типовые экзаменационные варианты: 50 вариантов. – М.: Экзамен, 2015. (ЕГЭ-2015. ФИПИ – школе) – 246с.

5. Сергеев И.Н., Панферов В.С. Математика ЕГЭ. Подготовка к выполнению части С. М.: Экзамен, 2014. – 152с.

6. Лаппо Л.Д., Попов М.А. ЕГЭ-2015. Математика. Экзаменационные тесты. Профильный уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. М.: Экзамен, 2015. – 145с.

для учителя:

1. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии: учеб. пособие – М.: Илекса; Народное образование, 2010г. – 78с.

2. Борзенко Е.К., Корнева И.Г. Решение стереометрических задач: Методические рекомендации. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2008. – 67с.

3. Ященко И.В.. ЕГЭ-2015. Математика: типовые экзаменационные варианты: 50 вариантов. – М.: Экзамен, 2015. (ЕГЭ-2015. ФИПИ – школе) – 246с.

4. Стереометрия / Под ред. А. Л. Семенова и И.В.Ященко. — М.: МЦНМО, 2012.

5. Холева, О. В. Нахождение углов между прямыми и плоскостями (координатно-векторный метод)// Математика в школе. - 2011. - №4.

§ 3. Методические рекомендации к проведению элективного курса

В данном параграфе приведены некоторые методические рекомендации по организации занятий разработанного элективного курса для учителей математики.

1. Декартовы координаты в пространстве – 3 часа

Урок *«Декартова система координат в пространстве»* проводится в виде лекции. Учитель рассказывает об истории возникновения координатно-векторного метода, о видах систем координат, о применении координатно-векторного метода в жизни (астрономии, физике, математике).

Уроки *«Нахождение координат точек и длин векторов в пространстве»* проводятся в форме лекционно-практических занятий. Первый урок – повторение основных ключевых моментов: декартовы координаты и понятия, связанные с ними. Второй урок – практический, учащимся предлагается ряд заданий по этой теме. Для нахождения длин векторов целесообразно организовать практическую работу для отработки вычислительных умений, используя ресурсы сайта «Изучение математики онлайн» http://ru.onlinemschool.com/math/assistance.

2. Основы аналитической геометрии – 6 часов

Урок *«Составление матрицы и нахождение определителей».* Данный теоретический материал является частью высшей алгебры. На занятиях рассматриваются основные формулы и решаются задания на нахождение определителей. Для мгновенной проверки учитель (или ученики для самопроверки) могут использовать ресурсы сайта «Изучение математики онлайн» http://ru.onlinemschool.com/math/assistance.

Уроки *«Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости».* Данная тема является основой для решения стереометрических задач координатно-векторным методом. На этом уроке осуществляется отработка алгоритма по составлению уравнения плоскости.

Уроки *«Вычисление угла между векторами в пространстве»*. Проводятся в форме лекционно-практических занятий. Решение задач аналитического характера.

3. Использование координатно-векторного метода при решении стереометрических задач – 23 часа

Уроки *«Способы задания прямоугольной системы координат в многогранниках»* проводится в форме семинара-практикума. Для проведения данных уроков необходимо заранее определить учащихся по группам (или парам, в зависимости от количества учащихся) дать задание: пользуясь методическим пособием [ ] самостоятельно рассмотреть способы введения прямоугольных систем координат на различных многогранниках (вид многогранника распределяет учитель). На первом уроке каждая группа (пара) отчитывается о проделанной работе в следующей форме: построение эскиза многогранника, рассмотрение способов введения системы координат, определение координат вершин многогранника. На втором уроке учащиеся, работая индивидуально, выполняют практическую работу по введению прямоугольной системы координат и определению координат точек многогранника по готовым чертежам и по условиям различных стереометрических задач. Учитель выступает в роли консультанта.

Уроки *«Решение задач на нахождение угла между прямыми в многогранниках и в пространстве»* проходят в виде лекционно-практических занятий. На первом уроке с помощью наглядных пособий (презентация, плакаты, видеоуроки) необходимо рассмотреть взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве, изучить формулы нахождения углов в каждом из случаев, составить алгоритмы решения типовых задач. Второй урок – отработка составленных алгоритмов при решении стереометрических задач части С ЕГЭ на нахождение угла между прямыми в многогранниках. Третий урок посвящен решению задач на нахождение угла между прямыми» проходят в виде лекционно-практических занятий. На этом уроке повторяем способы взаимного расположения прямых в пространстве. Повторяем формулы нахождения угла между прямыми. Знакомимся с формулой канонического уравнения прямой в пространстве. Составляем алгоритм решения задач на нахождение угла между прямыми. Четвертый урок – решение задач по данной теме.

Уроки *«Нахождения угла между прямой и плоскостью в пространстве»* проводятся в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке целесообразно вспомнить определение угла между прямой и плоскостью. Повторить определения направляющего вектора, нормального вектора, уравнения прямой в координатах, уравнения плоскости в координатах. Изучить формулы нахождения угла между прямой и плоскостью. Для этого можно использовать материалы интернет - ресурса http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/angle_between_line_and_plane.html или видеоурок (http://urokimatematiki.ru/11klassgeometriya/item/1853-metod_koordinat_v_prostranstve_vychislenie_uglov_mezhdu_prjamymi_i_ploskostjami.html). Составить алгоритм решения задач данного типа. На втором уроке «оттачиваем» мастерство нахождения угла между прямой и плоскостью.

Уроки *«Нахождение угла между плоскостями в пространстве»* проходят в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке, воспользовавшись информацией интернет ресурса http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/angle_between_two_planes.html, вспомнить основные определения, необходимые для изучения темы, составить алгоритм решения задач. Второй урок – практикум. Решение карточек-заданий (приложение 1).

Уроки *«Нахождение расстояния от точки до плоскости, находящейся в многогранниках»* проводятся в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке вспомнить определение расстояния между объектами, изучить формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости. Составить алгоритм решения задач данного типа. Второй урок - практикум, можно провести в компьютерном классе. Используя интернет-ресурс http://www.mathsolution.ru/math-task/lp-dist-point-plain учащиеся могут быстро проверять свои вычисления.

Уроки *«Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми в многогранниках»* проводятся в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке повторить определения скрещивающихся прямых, расстояния между скрещивающимися прямыми, формулы координат середины отрезка, уравнение плоскости. С помощью системы наводящих вопросов составить алгоритм решения таких задач (приложение 2). Второй урок – решение задач, с нарастающим уровнем сложности.

Уроки *«Нахождение расстояния между плоскостями в пространстве»* проводятся в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке рассмотреть необходимый теоретический материал и составить алгоритм решения задач такого типа. Второй урок – решение стереометрических задач части С ЕГЭ.

Уроки *«Решение задач части С ЕГЭ профильного уровня»* проводятся в виде практических занятий. На первом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между прямыми, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. На втором уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. На третьем уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между плоскостями, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. На четвертом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. На пятом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния от точки до прямой, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. На шестом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы. Для данных уроков можно использовать ресурсы обучающей системы Дмитрия Гущина [35].

Заключительные уроки содержат достаточное количество стереометрических задач, большая часть из которых имеет сложность части С ЕГЭ профильного уровня.

Рассмотрим конспекты занятий разрабатываемого элективного курса.

Тема: Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости.

Цель урока:

образовательная: научить записывать уравнение плоскости, проходящей через три точки в прямоугольной системе координат, находить коэффициенты для уравнения плоскости различными способами.

развивающая: способствовать развитию мышления, логики, пространственного воображения, умению анализировать и обобщать, применять знания на практике;

воспитывающая: побуждать учащихся к самоконтролю и взаимоконтролю, способствовать воспитанию самостоятельности, интереса к предмету.

Форма проведения: фронтальная работа, работа в группах.

Формы организации учебной деятельности: коллективная, индивидуальная.

Оборудование: доска, компьютер, проектор, экран, раздаточный материал, презентация (приложение 3)

План урока:

1. Организационный момент (2 минуты)
2. Актуализация опорных знаний (8 минут)
3. Изучение нового материала (23 минуты)
4. Закрепление знаний (10 минут)
5. Подведение итогов (2 минуты)

Этап	Деятельность учителя	Деятельность ученика	На доске
1.	Здравствуйте, присаживайтесь. Откройте тетради, запишите дата, классная работа. Сегодня на уроке вы познакомитесь с такими определениями, как уравнение плоскости, нормальный вектор плоскости; вы научитесь записывать уравнение плоскости, проходящей через три точки и определять координаты нормального вектора плоскости.	Выполняют требования учителя.	Дата, «Классная работа», тема урока «Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости».
2.	Напомните, с какими определениями мы с вами познакомились на прошлом уроке?	Матрица, определитель матрицы.	
	Что такое матрица?	Прямоугольная таблица специального вида, состоящая n строк и m столбцов, заполненная числами.	
	Какие бывают матрицы?	Квадратные, прямоугольные.	
	Для чего используют матрицы?	Для решения систем уравнений.	
	Что такое определитель матрицы?	это число, которое находится по специальному алгоритму из	

3	Как вычислить определитель третьего порядка? Вспомним алгоритм нахождения определителя третьего порядка. Задание: Составить и вычислить определитель. Сегодня мы с вами рассмотрим еще один вопрос, где применяется определитель матрицы. Непосредственно перейдем к теме нашего урока. Пусть задана прямоугольная система координат Oxyz и дана некоторая поверхность F, например, плоскость. Уравнения с тремя переменными x, y, z называют уравнением поверхности F, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности. Какому определению аналогично уравнение поверхности? Выведем уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к ненулевому	чисел, записанных в квадратной матрице. По правилу треугольника. Выполняют задания (один из учащихся у доски с объяснением). Конспектируют записи со слайдов и слушают учителя. Определению уравнения линии.	Слайд 2. Слайд 3. Задание на слайде 1. На доске ученик записывает решение. Слайд 4. Слайд 5. Слайд 6.

	вектору $\vec{n}\{a;b;c\}$. Пусть дана еще точка $M(x,y,z)$, отличная от M_0, принадлежащая плоскости α. Что вы можете сказать о взаимном расположении векторов $\vec{n}\{a;b;c\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$? Что можем сказать о скалярном произведении этих векторов? Запишем скалярное произведение данных векторов. С места диктует … (учитель пишет на доске под диктовку ученика). $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$ Отметим, что координаты точки M_0 также удовлетворяют этому уравнению. Рассмотрим случай, когда точка $M(x,y,z)$ не принадлежит плоскости α, каким в этом случае будет угол между векторами $\vec{n}\{a;b;c\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$? На величину какого угла он будет отличаться? Что можем сказать о скалярном произведении этих векторов?	Они взаимно перпендикулярны. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0. С места диктует один из учеников. Отличный от 90°. На величину угла между прямой M_0M и плоскостью α. Не равно 0.	Слайд 4. Слайд 7.

	Тогда что мы можем сказать о равенстве $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$?	Равенство не выполняется.	
	Таким образом, уравнению $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$ удовлетворяют координаты любой точки плоскости α и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей в этой плоскости. Следовательно, чем является уравнение $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$?	Уравнением плоскости α.	Слайд 8.
	Через что проходит данная плоскость?	Через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярно к ненулевому вектору $\vec{n}\{a;b;c\}$.	
	Замечание: данное уравнение можно записать в следующем виде: $ax+by+cz+d=0$, где $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Почему $a^2+b^2+c^2\neq 0$?	Потому что вектор $\vec{n}\{a;b;c\}$ ненулевой.	
	Обведите данное уравнение в рамочку.		
	Вернемся к вектору $\vec{n}\{a;b;c\}$. Как взаимно располагаются вектор $\vec{n}$ с плоскостью α?	Перпендикуляр-но.	
	Такой вектор имеет особое название: *вектор, перпендикулярный к плоскости, называется вектором нормали плоскости или нормальным*	Записывают определение.	Слайд 9.

	вектором. Сколько векторов нормали можно провести к плоскости? Верно, но для решения задач нам будет достаточно одного. Обратимся еще раз к уравнению плоскости $ax+by+cz+d=0$, что можем сказать о коэффициентах a,b,c? Значит, зная уравнение плоскости, что мы можем найти? А зная координаты вектора нормали? Выполним задание: Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(2{,}3{,}4)$, $L(6{,}-3{,}4)$, $M(-4{,}6{,}-4)$. Продолжите фразу: если точка принадлежит плоскости, то ее координаты…. У нас имеется три точки и каждая из них удовлетворяет уравнению плоскости, следовательно, подставив поочередно координаты этих точек в уравнение, что мы можем получить? Составим систему уравнений для нашей плоскости: $\begin{cases}2a+3b+4c+d=0;\\6a-3b+4c+d=0;\\-4a+6b-4c+d=0.\end{cases}$ Сколько уравнений в данной системе?	 Бесконечное множество. Это координаты вектора нормали плоскости. Координаты вектора нормали плоскости. Можем записать уравнение плоскости. Удовлетворяют уравнению плоскости. Систему уравнений. Три.	 Слайд 10. $\begin{cases}2a+3b+4c+d=0;\\6a-3b+4c+d=0;\\-4a+6b-4c+d=0.\end{cases}$

	Сколько переменных в данной системе уравнений? Можем решить данную систему уравнений? Действительно, не зная значения коэффициента d, мы не сможем решить эту систему уравнений. Поэтому, в тех случаях, когда известно, что плоскость проходит через начало координат, принимаем $d=0$, в остальных случаях принимаем $d=1$. Проверим справедливость данного утверждения: $\begin{cases} 2a+3b+4c+1=0; \\ 6a-3b+4c+1=0; \\ -4a+6b-4c+1=0. \end{cases}$ Решим эту систему уравнений методом Гаусса.	Четыре. Нет. Конспектируют информацию. Один ученик у доски решает систему уравнений методом Гаусса.	 Слайд 11. $\begin{cases} 2a+3b+4c+1=0; \\ 6a-3b+4c+1=0; \\ -4a+6b-4c+1=0. \end{cases}$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & -4 & -1 \end{array}\right)\sim$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ 6 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & -4 & -1 \end{array}\right)\sim$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ 0 & -12 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 4 & -3 \end{array}\right)\sim$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 12 & 4 & -3 \end{array}\right)\sim$

	Подставим получившиеся коэффициенты в уравнение плоскости $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z+1=0,$ преобразуем, умножив обе части уравнения на -12: $6x+4y-3z-12=0$. Есть способ, который позволяет быстрее и проще выполнить данное задание. Рассмотрим теорему, с помощью которой можно составить уравнение плоскости по координатам трех точек, принадлежащих этой плоскости. Теорема «Уравнение плоскости через определитель»: Пусть даны координаты трех точек $M_0(x,y,z)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, через которые необходимо провести плоскость. Тогда уравнение плоскости можно	Записывают теорему.	$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1&0&1&-0{,}25\\ 0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\\ 0&0&-4&-1\end{array}\right)\sim$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1&0&1&-0{,}25\\ 0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}\\ 0&0&1&0{,}25\end{array}\right)\sim$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1&0&0&-0{,}5\\ 0&1&0&-\frac{1}{3}\\ 0&0&1&0{,}25\end{array}\right)\Rightarrow$ $\begin{cases} a=-\frac{1}{2};\\ b=-\frac{1}{3};\\ c=\frac{1}{4}.\end{cases}$ $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z+1=0,$ $6x+4y-3z-12=0$ Слайд 12.

	записать через определитель: $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$ Теорему принимаем без доказательства.		
	Решим эту же задачу новым способом. Пользуясь теоремой, составим определитель: $$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 6-2 & -3-3 & 4-4 \\ -4-2 & 6-3 & -4-4 \end{vmatrix}=0.$$	Один из учащихся комментирует решение определителя.	Слайд 13. $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 6-2 & -3-3 & 4-4 \\ -4-2 & 6-3 & -4-4 \end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 4 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \end{vmatrix}=0$, раскроем определитель по правилу треугольника. $48(x-2)+0+12(z-4)-$ $-36(z-4)-0+32(y-3)=0$, $\Leftrightarrow \ldots$ $6x+4y-3z-12=0$. Ответ: $6x+4y-3z-12=0$.
	Какой способ вам понравился больше?	(отвечают, аргументируя свой ответ).	
4.	Разделимся на 4 группы. Задание: написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1,0,4)$, $B(0,5,-2)$, $C(4,2,7)$. Первая и третья группы выполняют задание с помощью системы уравнений, а вторая и четвертая группы – с помощью определителя.	В группах выполняют задание.	Слайд 14.
	Сверим результаты, получившиеся в группах.	Группы по очереди называют ответ,	

		делаем вывод о том, какой метод рациональнее.	
5.	Итак, с какими новыми понятиями мы с вами сегодня познакомились? Какой вектор называют вектором нормали плоскости? Дома вам необходимо выучить теоретический материал урока и выполнить карточки с заданиями: Запишите координаты вектора нормали плоскости, заданной уравнением: а) $\frac{1}{5}x-8y+2z-1=0$; б) $x-2y-3z=0$; в) $9x-\frac{1}{2}z+5=0$ 2. Нормальный вектор плоскости $\vec{n}\{-2;0;$ запишите уравнение этой плоскости. 3. Напишите уравнение плоскости, проходящ через три точки $K(1,1,1)$, $L(-2,\frac{1}{2},4)$, $M(0,6,-9)$. Всем спасибо за урок, все свободны!	Уравнение плоскости, вектор нормали плоскости. Который перпендикулярен плоскости. Записывают ДЗ.	Слайд 15.

Тема: Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости. (урок 2 из 2)

Цель урока:

образовательная: закрепить умение записывать уравнение плоскости, проходящей через три точки в прямоугольной системе координат, находить коэффициенты для уравнения плоскости различными способами.

развивающая: способствовать развитию мышления, пространственного воображения, умению анализировать и обобщать, логики, применять знания на практике;

воспитывающая: побуждать учащихся к самоконтролю и взаимоконтролю, способствовать воспитанию самостоятельности, интереса к предмету.

Форма проведения: фронтальная работа, самостоятельная работа.

Формы организации учебной деятельности: индивидуальная.

Оборудование: Карточки с заданиями.

План урока:

6. Организационный момент (2 минуты)
7. Актуализация опорных знаний (10 минут)
8. Решение задач (25 минут)
9. Подведение итогов (8 минут)

Этап	Деятельность учителя	Деятельность ученика	На доске
1. 2.	Здравствуйте, присаживайтесь. Откройте тетради, запишите дата, классная работа. Сегодня на уроке Мы будем «оттачивать» мастерство решения задач на нахождения уравнения плоскости. Дома вам нужно было выучить теоретический материал прошлого урока и решить карточку. Сдайте тетради на проверку. Сейчас я вам раздам листочки (математический диктант). На листочке напишите свою фамилию. Ваша задача дописать недостающие слова. На эту работу вам дается 5 минут. 1. Вектор нормали к плоскости – это вектор____________________ 2. Уравнение прямой имеет вид ____________________ 3. Матрицы решают с помощью метода____________________ 4. Способы решения систем линейных уравнений:____________________ 5. Способы составления уравнения плоскости по трем точкам____________________	Выполняют требования учителя. Выполняют работу на листочках.	Дата, «Классная работа», тема урока «Решение задач. Нахождение уравнения плоскости, проходящей через три точки»

	Время закончилось, сдайте листочки. Назовите способы нахождения уравнения плоскости по трем точкам.	Учащиеся (по желанию) рассказывают о способах. Первый – составление системы уравнений, второй – с помощью теоремы с определителем.	Запись ученика.
	Какой из этих способов наиболее рационален?	Второй.	
	Вспомним алгоритм нахождения уравнения плоскости с помощью определителя.	Один из учеников у доски записывает теорему и рассказывает суть данного способа.	
3.	Сейчас я вам раздам карточки-задания по вариантам, ваша задача за 25 минут решить как можно больше задач. Если возникнут вопросы, поднимайте руку. Вариант 1. 1. Решите систему уравнений с помощью матрицы: а) $\begin{cases} x+4y+3z=18; \\ 2x+2y+3z=15; \\ 4x+4y+z=15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-8y+z=9; \\ -x+2y+3z=15; \\ 3x-2y+6z=21. \end{cases}$ 2. Вычислите определитель матрицы:	Работают с карточками (самостоятельно)	

4.	а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 7 & -6 \end{vmatrix}$ 3. Запишите уравнение плоскости, если вектор нормали $\vec{n}\{3;-2;1\}$. 4. Запишите координаты вектора нормали к плоскости, проходящей через три точки $E(-2,0,1)$, $P(5,-5,0)$, $M(4,-3,1)$. 5. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1,1,-1)$, $B(0,-3,2)$, $C(-7,0,1)$. Вариант 2. 1. Решите систему уравнений с помощью матрицы: а) $\begin{cases} -x+3y+z=7; \\ x+2y+4z=-15; \\ 3x+y-z=10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x-8y+z=10; \\ x+y+3z=12; \\ 2x-y+5z=20. \end{cases}$ 2. Вычислите определитель матрицы: а) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$		

	3. Запишите уравнение плоскости, если вектор нормали $\vec{n}\{0;-2;-1\}$. 4. Запишите координаты вектора нормали к плоскости, проходящей через три точки $E(2,1,1)$, $P(3,5,-1)$, $M(0,-3,2)$. 5. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1,0,-1)$, $B(1,-3,5)$, $C(-6,2,-3)$.		
5.	Заканчиваем работу с карточками, поменяйтесь с соседом по парте тетрадями, я читаю ответы – вы проверяете. Молодцы, хорошо поработали. Те задания, которые вы не успели решить в классе – решите дома. Кто успел решить все задачи, можете взять карточку другого варианта. Повторим еще раз способы нахождения уравнения плоскости по трем точкам. Если у вас остались вопросы, можете их задать. Урок окончен. Всем спасибо за работу.	Обмениваются тетрадями, проверяют задачи. Отвечают на вопрос. Задают вопросы.	

Заключение

Современная Российская система образования давно нуждалась в ориентации на ученика и потребности общества, таким аспектом явилось профильное обучение, которое имеет своей целью помощь ученикам в подготовке и выборе будущей профессии, а соответственно и реализации себя как профессионала. Частью профильного обучения являются элективные курсы, которые дают возможность углубить знания в интересном для школьника направлении.

С приходом Единого государственного экзамена в школы стало актуально углублять и расширять знания школьников по применению универсальных методов решения геометрических задач. К данным методам относится координатно-векторный.

Простой и удобный в применении координатно-векторный метод является необходимой составляющей решения задач различного уровня. Использование данного метода, позволяет значительно упростить и сократить процесс решения задач, что помогает при изучении, как школьного курса математики, так и при изучении математики в высших учебных заведениях.

В соответствии с целью и задачами данной выпускной квалификационной работы, были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены общие положения по созданию элективных курсов.
2. Выявлены организационно-методические особенности разработки элективных курсов по математике.
3. Отобрано содержание элективного курса «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач части С ЕГЭ» для учащихся 11 класса, разработана его структура и методические рекомендации по его использованию в образовательном процессе.

Библиографический список

1. Артемова Л.К. Профильное обучение: опыт, проблемы, пути решения. Педагогическое образование и наука. 2003. – 46с.
2. Артюхова И.С. Проблема выбора профиля обучения в старшей школе. М.: Педагогика. 2004. №2.
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: Учебник для 10-11 кл. ср. шк. – М.: Просвещение, 2009. – 384с.
4. Беккер Б.М., Некрасов В.Б. Применение векторов к решению задач. С-П.: 1997. – 188с.
5. Борзенко Е.К., Корнева И.Г. Решение стереометрических задач: Методические рекомендации. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2008. – 67с.
6. Горычева С., Кирушева Т. Профильная школа: как обеспечить возможность реального выбора?//Практический журнал для учителя и администрации школы. – 2004. - №1. – 24-29с.
7. Гузеев В. Содержание образования и профильное обучение в старшей школе // Народное образование. – 2002. -№9. – 113-122с.
8. Каспржак А. «Элективные курсы в средней школе, задачи, содержание и организация». М.: 2006 г.
9. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года. Нормативные документы в образовании. 2003. №2. 2 – 21с.
10. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. М. 2002. – 21с.
11. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. Официальные документы в образовании. 2002. №27. 3 – 12с.
12. Концепция развития школьного математического образования. Математика в школе. 1990. №1. 2 – 13с.

13. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников Москва Педагогический университет «Первое сентября» 2012. – 100с.
14. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: типы задач и методы их решения. 2013. – 102с.
15. Лаппо Л.Д., Попов М.А. ЕГЭ-2015. Математика. Экзаменационные тесты. Профильный уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. М.: Экзамен, 2015. – 145с.
16. Министерство образования Российской Федерации. Национальный фонд подготовки кадров «Элективные курсы в профильном обучении». М.: 2004 г.
17. МОиНКК КГКСУ «Центр оценки качества образования» Отчет о результатах единого государственного экзамена в Красноярском крае в 2011 году.
18. МОиНКК КГКСУ «Центр оценки качества образования» Отчет о результатах единого государственного экзамена по математике в Красноярском крае в 2012 году.
19. МОиНКК КГКСУ «Центр оценки качества образования» Отчет о результатах единого государственного экзамена по математике в Красноярском крае в 2013 году.
20. МОиНКК КГКСУ «Центр оценки качества образования» Отчет о результатах единого государственного экзамена по математике в Красноярском крае в 2014 году.
21. МОиНРФ ГОУ ВПО «Тобольская государственная социально-педагогическая академия имени Д.И. Менделеева». Учебно-методический комплекс учебной дисциплины «Профильное обучение математике». Тобольск, 2012.
22. Понтрягин Л.С. Метод координат. М.: Наука, 1977. – 136с.
23. Потоскуев Е.В. Векторно-координатный метод при решении стереометрических задач//Математика в школе – 1995. №1. – 23 – 25с.

24. Производов В.В. Поиск угла в геометрических задачах//Математика в школе – 1998. № 5. – 94 – 96с.
25. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии: учеб. пособие – М.: Илекса, Народное образование, 2010. – 78с.
26. Семенов А. Л., Ященко И.В. Стереометрия. М.: МЦНМО, 2012.
27. Сергеев И.Н., Панферов В.С. Математика ЕГЭ. Подготовка к выполнению части С. М.: Экзамен, 2014. – 152с.
28. Смирнов В. А. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С2. Геометрия.
29. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2015 году единого государственного экзамена по математике. Базовый уровень.
30. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2015 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень.
31. Холева О.В. Нахождение углов между прямыми и плоскостями (координатно-векторный метод)// Математика в школе. - 2011. - №4.
32. Элективные курсы в профильном обучении. Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. М.: Вита-Пресс, 2004. – 144с.
33. Якушина Е.В. Об изучении векторов в планиметрии и стереометрии//Математика в школе – 1996. № 3. – 29 – 31с.
34. Ященко И.В. ЕГЭ-2015. Математика: типовые экзаменационные варианты: 50 вариантов /— М. : Экзамен, 2015. (ЕГЭ-2015. ФИПИ — школе) – 246с.
35. Министерство образования Российской Федерации. Департамент общего и дошкольного образования № /13 от 01.01.2001 информационное письмо об элективных курсах в системе профильного

обучения на старшей ступени общего образования. Приложение: на 3 л. [электронный ресурс] // - Режим доступа: http://www.pandia.ru/text/78/253/23035.php.

36. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». [Электронный ресурс] //Задания 16. – Режим доступа: http://reshuege.ru.
37. Ларин А. Сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики. [Электронный ресурс] // Задачи 16. – Режим доступа: http://alexlarin.net.
38. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс] // - Режим доступа: http://www.fipi.ru
39. www.distedu.ru/mirror/_math/algolist.manual.ru/maths/geom/coord.php
40.