

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В.П. АСТАФЬЕВА»  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Выпускающая кафедра физики и методики обучения физике

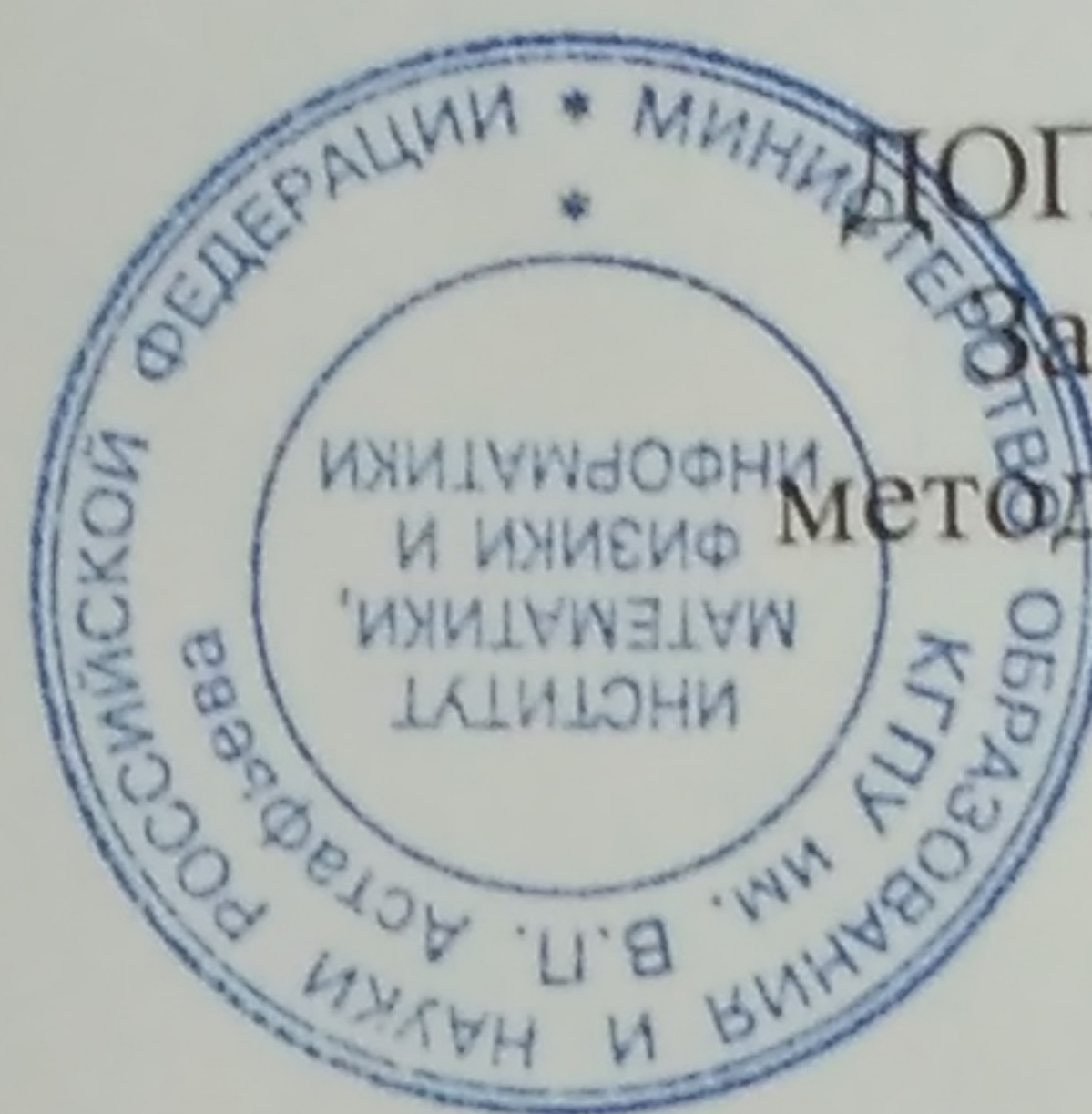
Державин Эдуард Александрович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

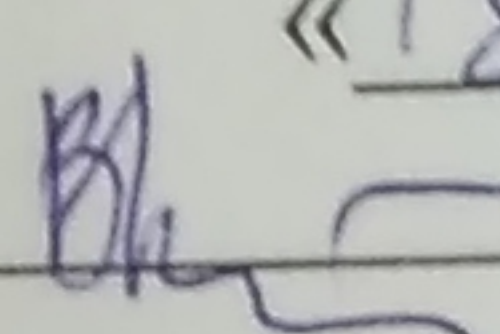
Тема «Методика перехода от нелинейных колебаний к линейным на примере  
физического маятника»

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы Физика и информатика



ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ  
Зав. Кафедрой физики и  
методике обучения физике,  
д.п.н., профессор  
В.И. Тесленко  
«18» июня 2018

  
Руководитель  
Профессор, доктор  
физико-математических наук,  
кандидат  
физико-математических наук  
А.М. Баранов  
Дата защиты «18» июня 2018

Обучающийся Державин Э.А.  
«\_\_» июня 2018  
Оценка удовлетворительно

Красноярск 2018

## Оглавление

Введение.....	2
Глава 1. Физический маятник.....	4
1.1 Теоретические основы движения физического маятника.....	4
1.2. Свойства физического маятника.....	7
1.3. Изучение движения нелинейного физического маятника.....	9
1.4. Получение уравнения колебаний физического маятника.....	13
Глава 2. Методики перехода от нелинейных колебаний к линейным.....	18
2.1. Колебания в нелинейных системах.....	18
2.2. Переход от уравнения физического маятника к уравнению гармонических колебаний методом последовательных приближений.....	19
2.3. Разложение по степеням параметра нелинейности. Осциллятор Дуффинга.....	29
2.4. Метод Линштедта — Пуанкаре.....	31
2.5. Моделирование физического маятника в среде Maple.....	34
Глава 3. Связь со школьной физикой и школьным изложением колебаний. .	37
3.1. Методика изучения механических колебаний и волн в школьном курсе физики. ....	37
3.2. Демонстрация нелинейности колебаний на школьном уроке физики. .	39
Заключение.....	41
Список литературы.....	42

## Введение

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. [16].

Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями. [7].

В связи с этим, *целью работы является* проанализировать методики перехода от нелинейных колебаний к линейным на примере физического маятника.

Цель работы определяет ее ведущие *задачи*:

1. Анализ теоретических основ движения физического маятника для выделение его основных свойств движения.
2. Проанализировать движение нелинейного физического маятника и описать уравнение его колебаний.
3. Рассмотреть некоторые методики перехода от нелинейных колебаний к линейным.
4. Связать со школьной физикой и школьным изложением колебаний.

## Глава 1. Физический маятник.

### 1.1 Теоретические основы движения физического маятника

Физический маятник – осциллятор, представляющий собой твёрдое тело, которое совершает колебания в поле каких-либо внешних сил относительно точки, которая не является центром масс для этого тела, или неподвижной оси, перпендикулярной направлению действия сил и не проходящей через центр масс этого тела. [7].

Уравнение движения маятника можно записать, на основании основного закона динамики вращательного движения, согласно которому вторая производная от угла отклонения по времени равна моменту силы, деленному на момент инерции, [22]. т. е.:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M}{I} \sin \theta$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса:

$$I = m(r^2 + h^2)$$

*Дифференциальное уравнение движения физического маятника.*

Пренебрегая сопротивлением среды, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника в поле силы тяжести записывается следующим образом:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

Полагая, что  $\frac{r^2}{h} + h = l$ , предыдущее уравнение можно переписать в виде:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением колебаний математического маятника длиной  $l$ . Величина  $l$  называется приведённой длиной физического маятника.

*Центр качения физического маятника:*

Центром качения физического маятника является точка, в которой нужно сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы его период колебаний не изменился.

Поместим на луче, проходящем от точки подвеса через центр тяжести точку на расстоянии  $l$  от точки подвеса. Данная точка и будет центром качения маятника.

*Теорема Гюйгенса*

Формулировка Теоремы Гюйгенса. Если физический маятник подвесить за его центр качения, то период колебаний не изменится, а прежняя точка подвеса делается новым центром качения.

Доказательство теоремы Гюйгенса. Вычислим приведенную длину для нового маятника:

$$l = \frac{r^2}{\frac{r^2}{h}} + \frac{r^2}{h} = h + \frac{r^2}{h} = l$$

Совпадение приведённых длин для двух случаев и доказывает утверждение, описанное в теореме.

*Периодические колебания физического маятника*

Для того, чтобы найти период колебаний физического маятника, необходимо решить его уравнение качания. [20].

Интегрируя это уравнение, получаем.

$$l \left( \frac{d\theta^2}{dt} \right) = 2g \cos \theta + C$$

где  $C$  – это произвольная постоянная. Её можно найти из граничного условия, что в моменты, когда  $\theta = \pm\alpha$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ . В итоге получим:  $C = -2\cos\alpha$ . Подставляем и преобразовываем получившееся уравнение:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{\sin^2(\alpha)}{2} - \frac{\sin(\theta)}{2}}$$

Отделяем переменные в уравнении и интегрируем это уравнение:

$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \int_0^{\theta} \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\sin^2(\alpha)}{2} - \frac{\sin^2(\theta)}{2}}$$

В данном уравнении удобно сделать замену переменной, полагая  $\frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sin\alpha}{2} \sin\varphi$ . Тогда искомое уравнение принимает вид:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\varphi \setminus 2}{2}\right)$$

Здесь  $F(\varphi \setminus \alpha)$  нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода. [23]. Для искомого периода колебаний получаем формулу:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\frac{\sin \alpha}{2}\right).$$

Здесь  $K\left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)$  – полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода. Разложив его в ряд, мы тем самым получим удобную для практических вычислений формулу периода, обобщающую формулу для математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right] \sin^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \dots \right\}}.$$

В самом деле, полагая  $\alpha$  равным нулю, сразу получаем период математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

## 1.2. Свойства физического маятника

Изучив данную тему, я определил основные свойства физического маятника. Главным, и максимально используемым свойством является *изохронность* (с греческого - «равномерный») движения физического маятника при малых амплитудах, то есть независимость периода колебаний от амплитуды [14]. Если мы удвоим амплитуду, то период колебания физического маятника остается неизменным, хотя груз пройдет вдвое большее расстояние. Но важно отметить, что на период колебаний физического маятника влияет размеры и формы тела, расстояние между центром тяжести и точкой подвеса, распределения массы тела относительно этой точки.

Если мы увеличим длину маятника, то и увеличивается период его колебаний. На этом свойстве основан механизм часов и построение ряда других технических устройств. Физический маятник широко используют в приложении к системам различной природы, примером может служить электрический маятник. Электрическим маятником называют цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности, экологическим маятником - две взаимодействующие популяции хищников и жертв и т.д. [13].

Любое равномерное вращение физического маятника является повторяющимся движением (периодическим): при каждом обороте мы



можем наблюдать, как всякая точка равномерно вращающегося тела проходит те же положения, что и при предыдущем обороте, причем с той же последовательностью.

При колебаниях физического маятника происходит повторяющийся во времени переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, а период всего этого процесса вдвое короче периода колебаний самого маятника. Но при нахождении суммы потенциальной и кинетической энергий становится заметно ее постоянность. Она равна той энергии, которая была сообщена маятнику при пуске, не важно в каком виде - в виде ли потенциальной энергии (начальное отклонение) или в виде кинетической (начальный толчок).

Для любого физического маятника можно найти такие положения чечевиц и призм, при которых он будет колебаться с одинаковым периодом. На данном факте основана теория *оборотного маятника*, с помощью которой измеряется ускорение свободного падения [8]. Еще одним важным фактором является то, что при измерении таким способом не нужно определять положение центра масс, что гораздо повышает точность измерений. Для этого достаточно измерить зависимость периода колебаний маятника от положения оси вращения и по этой экспериментальной зависимости найти приведенную длину. Длина, определенная таким образом, приведенная в сочетании с измеренным с хорошей точностью периодом колебаний относительно обеих осей и позволяет рассчитать ускорение свободного падения. Также с помощью маятников и их математических моделей демонстрируются феномены, присущие нелинейным колебательным системам, которые отличаются особой сложностью.

Любопытными свойствами обладают два интересных маятника: маятник Фуко и фрикционный маятник Фроуда [12]. В основе маятника Фуко лежит свойство сохранять плоскость колебаний независимо от вращения опоры, к которой маятник подвешен. Наблюдатель, вращающийся вместе с Землей, видит постепенное изменения направления качаний маятника

относительно окружающих предметов. Второй же расположен на вращающемся валу. Если маятник движется в направлении вращения и его скорость меньше скорости вала, то со стороны вала на него действует достаточно большой момент силы трения, подталкивающий маятник. При движении в противоположном направлении, скорость маятника относительно вала велика, поэтому момент силы трения мал. Так автоколебательная система сама регулирует поступление энергии к осциллятору.

На основе исследования зависимости периода колебания бутылки от времени наблюдения и изменении массы вещества в ней можно смело утверждать, что при амплитудах колебания не превышающих 1 см момент инерции физического маятника не влияет на период его колебания.

Резюмируя все вышесказанное можно подвести окончательный итог, на основании изложенного можно утверждать, что свойства физического маятника и колебательной системы, в целом, используются в различных сферах разнообразной природы, и заметьте, как самостоятельно, так и как часть единого целого, так и как метод либо способ исследования или проведения ряда опытов.

### **1.3. Изучение движения нелинейного физического маятника**

Как движется физический маятник в линейном приближении мы знаем (это математический маятник), но как меняется движение при возникновении нелинейности, связанной с учетом неточности колеблющегося тела (физического маятника)? Для нахождения отличий в движении линейного физического маятника и нелинейного проведем следующий эксперимент.

Для изучения движения нелинейного физического маятника была собрана экспериментальная установка на основе стальной трубы длиной 0,295 м, толщиной 1 мм, диаметром 25 мм. [27].

На конце трубы были сделаны специальные петли из медной проволоки, в которых был жестко зафиксирован 2 мм металлический

стержень, служивший осью вращения. Этот стержень вращался в отверстиях лабораторного стола, расположенных на одной линии на расстоянии 10 см друг от друга. Так же на установке присутствовал транспортир, позволяющий измерять угол отклонения. Угол отклонения изменялся от 0 до 90°.

Результаты экспериментов

Таблица 1.

угол	время 10 колебаний	Период	Амплитуда отклонения
1	8,93	0,893	
2	8,99	0,899	0,0104
3	8,24	0,824	0,015596
4	8,53	0,853	0,020787
5	8,55	0,855	0,025972
6	8,8	0,88	0,031149
7	8,87	0,887	0,036317
8	8,87	0,887	0,041474
9	8,87	0,887	0,046617
10	8,95	0,895	0,051747
11	8,83	0,883	0,056861
12	9,06	0,906	0,061958
13	8,81	0,881	0,067035
14	9,11	0,911	0,072093
15	9,1	0,91	0,077128
20	9,13	0,913	0,101922
25	8,84	0,884	0,12594
30	8,75	0,875	0,149
35	9,39	0,939	0,170926
40	9,19	0,919	0,191551

45	9,3	0,93	0,210718
50	9,42	0,942	0,228281
55	9,31	0,931	0,244107
60	9,76	0,976	0,258076
65	9,48	0,948	0,27008
70	9,5	0,95	0,280028
75	9,52	0,952	0,287846
80	9,82	0,982	0,293473
85	9,57	0,957	0,296866
90	9,56	0,956	0,298
95	9,82	0,982	0,296866
100	9,99	0,999	0,293473
105	10,22	1,022	0,287846
110	10,34	1,034	0,280028
115	10,56	1,056	0,27008
120	10,67	1,067	0,258076
125	10,85	1,085	0,244107
130	10,9	1,09	0,228281
135	10,95	1,095	0,210718

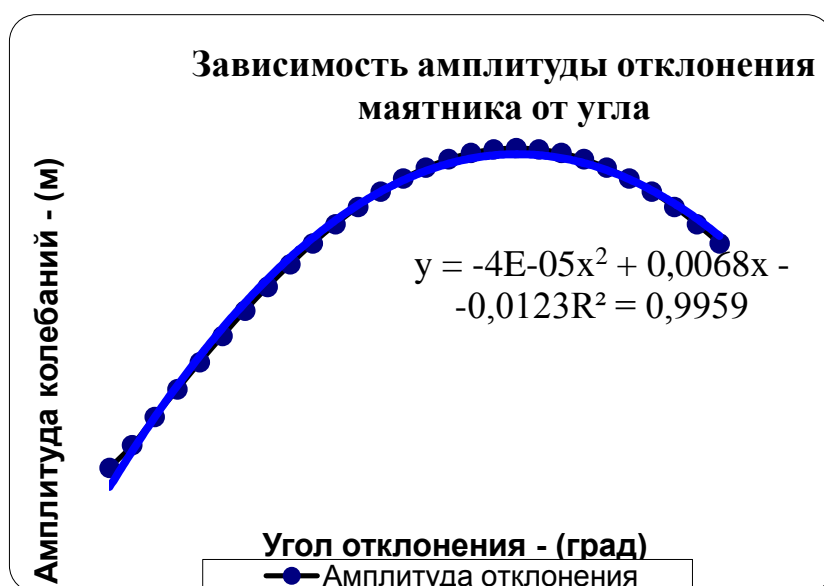


Рис. 1. Экспериментальная кривая отклонения физического маятника

Для проверки качества проведенного эксперимента были произведены расчеты коэффициентов корреляции между значениями экспериментального ряда и рассчитанными значениями периода. Рассчитанный коэффициент корреляции получился на уровне 0.952. График теоретических и экспериментальных кривых представлен на рисунке 2.

Проведенные экспериментальные исследования по изучению движения нелинейного маятника показали следующее:

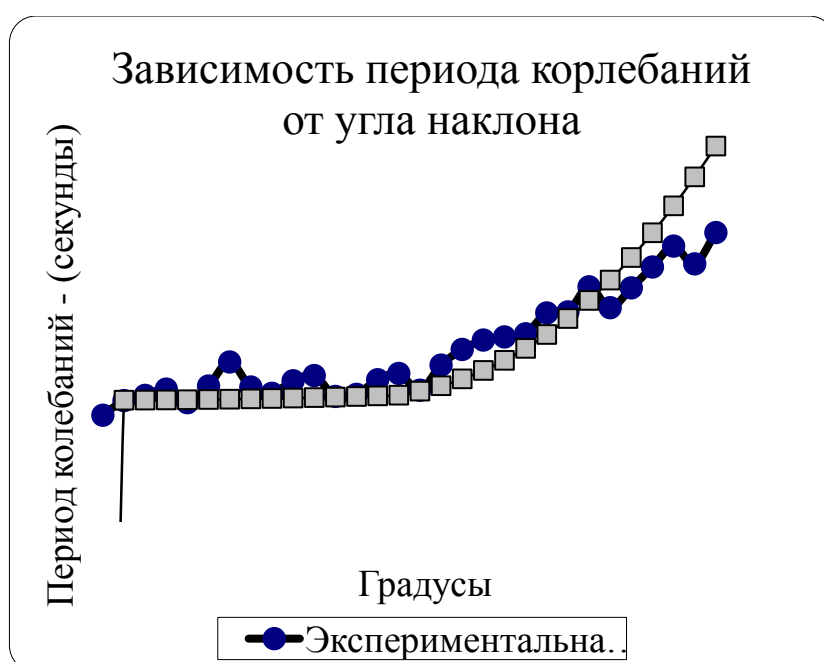


Рис. 2. Зависимость периода колебаний от угла наклона

Для создания модели движения физического маятника большая сложность состояла в разработке конструкции маятника. Чтобы рассчитать момента инерции мы использовали формулу тонкостенного цилиндра. Но при расчетах была обнаружена повторяющаяся погрешность при сравнении экспериментальных и теоретических периодов. Это может быть связано с недоучетом оси подвеса маятника. Для сходимости результатов в результирующую экспериментальную кривую мы внесли корректировку, равную по величине систематической погрешности. И в результате сходимость результатов составила 95%.

#### 1.4. Получение уравнения колебаний физического маятника

Положение физического маятника полностью определяется углом его отклонения от положения равновесия, и следовательно, для определения закона движения маятника нам достаточно найти зависимость этого угла от времени [24].

Уравнение вида:

$$\varphi = \varphi(t)$$

называется уравнением (законом) движения маятника. Данное уравнение зависит от начальных условий, т.е. от угла  $\varphi_{t=0} = \varphi_0$  и угловой скорости  $\omega_{t=0} = \omega_0 = \dot{\varphi}_0$ . Таким образом получается,  $\varphi = \varphi(t, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ .

*Уравнение движения физического маятника.*

Выберем систему осей координат так, чтобы плоскость ху проходила через центр тяжести тела С и совпадала с плоскостью качания физического маятника. Ось z направим перпендикулярно к плоскости. Тогда уравнение движение физического маятника запишем в виде:

$$I_\varepsilon = M_z,$$

где через I мы обозначим момент инерции маятника относительно его оси вращения и отсюда следует, что  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ .

Поэтому можно записать:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z.$$

Активной силой, действующей на физический маятник, является его вес Q, момент которого относительно оси привеса будет  $M_z = -Qa \sin \varphi$ , где a = ОС – расстояние от оси вращения маятника до его центра масс С.

Таким образом, мы приходим к следующему уравнению движения физического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Qa}{I} \sin \varphi = 0.$$

Так как математический маятник является частным случаем физического маятника, то записанное выше дифференциальное уравнение справедливо и для него в линейном приближении [3]. Если длина математического маятника равна  $l$ , а вес тела  $Q$ , то момент инерции его относительно оси вращения равен  $I = \frac{Q}{g} l^2$ .

Из-за того, что расстояние центра тяжести математического маятника от оси равно  $a=l$ , то окончательно дифференциальное уравнение движения математического маятника можно записать в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

*Первый интеграл уравнения движения маятника.*

При одинаковых начальных условиях уравнения движения физического и математического маятника имеют один и тот же вид, соответственно, уравнения их движения будет:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi = 0,$$

где:

$$k^2 = \frac{Qa}{I} = \frac{g}{l}.$$

Так как единственная сила, которая учитывается в данном уравнении, является сила тяжести, которая принадлежит потенциальному силовому полю, то имеет место закон сохранения механической энергии, который

можно получить простым приемом, а именно умножив уравнение движения физического маятника на  $\frac{d\varphi}{dt}$ , тогда  $\frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0$

Или же:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - k^2 \frac{d}{dt} \cos \varphi = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - k^2 \cos \varphi = C_1.$$

Определяя постоянную интегрирования  $C_1$ , из начальных условий найдем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \varphi_0 = k^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Решая последнее уравнение относительно  $\frac{d\varphi}{dt}$ , получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\varphi_0^2 + 2k^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Данное уравнение представляет собой первый интеграл дифференциального уравнения.

*Качественное исследования характера движения физического маятника.*

Первый интеграл уравнения движения физического маятника позволяет провести качественное исследования характера его движения. Запишем интеграл в виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{2k^2} \sqrt{\cos \varphi + \frac{\varphi_0^2}{2k^2} - \cos \varphi_0}.$$

В процессе движения физического маятника подкоренное выражение должно быть либо положительным, либо обращаться в некоторых точках в ноль.

Допустим, что начальные условия ( $\omega_0$  и  $\varphi_0$ ) таковы, что



$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2k^2} - \cos \varphi_0 > 0.$$

В данном случае подкоренное выражение никогда не обращается в ноль. Отсюда следует, что при движении физический маятник будет пробегать все значения угла  $\varphi$  и угловая скорость  $\omega$  физического маятника будет одинаковый знак, который определяется направлением начальной угловой скорости, или угол  $\varphi$  будет либо все время возрастать, либо все время убывать, т.е. маятник будет вращаться в одну сторону.

Направление движения физического маятника будет соответствовать тому или иному знаку в выражении  $\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\varphi_0^2 + 2k^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$ .

Обязательным условием реализации данного движения будет наличие начальной угловой скорости, так как из неравенства  $\frac{\dot{\varphi}^2}{2k^2} - \cos \varphi_0 > 0$  видно, что если  $\varphi_0 = 0$ , то ни при каком начальном угле отклонения получить такое движение физического маятника невозможно.

Пусть начальные условия будут такими, что

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{2k^2} - \cos \varphi_0 \leq 1.$$

В таком случае найдется пара таких значений угла  $\varphi$ , при которых подкоренное выражение обратится в ноль. Пусть она соответствует углам, определяемым равенством  $\varphi = \pm \varphi_m$ .

Причем  $\varphi_m$  будет где-то в диапазоне изменения  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ . Далее следует, что при:

$$|\varphi| \leq \varphi_m.$$

подкоренное выражение  $\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\varphi_0^2 + 2k^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$  будет положительным и при  $\varphi$  сколь угодно превышающим  $\varphi_m$ , оно будет отрицательным.

Таким образом, при движении физического маятника его угол  $\varphi$  будет изменяться в диапазоне:

$$-\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_m.$$

При  $\varphi = \varphi_m$  угловая скорость физического маятника обращается в ноль и угол  $\varphi$  начинается уменьшаться до  $-\varphi_m$ . Также изменится знак угловой скорости или знак перед радикалом в выражении  $\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\varphi_0^2 + 2k^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$ . Когда  $\varphi$  достигает значения  $-\varphi_m$ , угловая скорость вновь обращается в ноль и угол  $\varphi$  опять начинает увеличиваться до значения  $\varphi_m$  и т.д. Таким образом маятник будет совершать колебательные движения.

*Конечная форма уравнение движения физического маятника.*

Начальная скорость физического маятника равна нулю,  $\varphi_0 = 0$ , тогда первый интеграл уравнения движения имеет вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm k \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$t = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}} + C.$$

Будем вести отсчет времени от положения физического маятника, соответствующего  $\varphi = \varphi_m$ , тогда:

$$t = \pm k \int_{\varphi_m}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью формулы:

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда получим:

$$t = \pm \frac{1}{2k} \int_{\varphi_m}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Полученный нами интеграл называется эллиптическим интегралом первого рода. [28]. Он не может быть выражен с помощью конечного числа элементов функции.

Обращение эллиптического интеграла относительно его верхнего предела представляет собой закон движения физического маятника:

$$\varphi = \varphi(t_1, \varphi_m).$$

## **Глава 2. Методики перехода от нелинейных колебаний к линейным**

### **2.1. Колебания в нелинейных системах**

Линейными колебательными системами называются такие системы, свойства которых не меняются при изменении их состояния. [16]. Параметры линейных колебательных систем (масса, жесткость пружины, сопротивление среды) не зависят от параметров состояния системы (смещений и скоростей).

Линейные колебательные системы обладают свойствами, значительно упрощающими анализ проходящих процессов, которые происходят в них, и поэтому они часто используются для приближенного описания процессов, которые происходят в реальных системах. Необходимо обратить внимание, что разные по природе физической процессы в линейных системах описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями.

В некоторых случаях, когда в пределах возможных изменений состояния реальной системы начинают проявляться изменения некоторых параметров, приходится учитывать нелинейность колебательной системы. [18]. Колебания данных систем описываются нелинейными уравнениями, и сами системы называются нелинейными.

Нелинейные колебательные системы значительно отличаются от линейных. Самая характерная особенность нелинейных систем — это нарушение принципа суперпозиции: результат каждого воздействия в присутствии другого оказывается не таким, каким бы он был, если бы другое воздействие отсутствовало. Абсолютно точных методов решения

нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эти колебательные системы просто не существует, поэтому приходится использовать приближенные. Рассмотрим с качественной стороны колебания некоторых нелинейных систем.

Явным примером нелинейных колебаний являются автоколебания. Автоколебания – это незатухающие колебания, существующие в какой-нибудь системе в которой отсутствует внешние переменные воздействия. Амплитуда и период колебаний определяются свойствами самой системы. Данные автоколебания отличаются от вынужденных колебаний, параметры которых определяются характером внешнего воздействия. Колебания маятника часов, струны в смычковых или столба воздуха в духовых музыкальных инструментах могут быть примером механических автоколебаний. Системы, в которых возникают автоколебания, называются автоколебательными. В каждой автоколебательной системе имеется источник энергии, из-за которого поддерживаются колебания. Чтобы колебания являлись незатухающими, энергия, которая поступает из источника в систему, должна компенсировать потери энергии в самой системе.

## **2.2. Переход от уравнения физического маятника к уравнению гармонических колебаний методом последовательных приближений.**

Рассмотрим идеальный маятник в качестве одной из простейших механических нелинейных консервативных систем [3].

Для идеального маятника запишем основной закон динамики вращательного движения  $I \ddot{\varphi} = M$

в виде:

$$I \ddot{\varphi} = -mgL \sin \varphi.$$

$I$  – момент инерции маятника относительно точки подвеса  $O$ . Добавим в приближении малых амплитуд период колебаний маятника и частоту:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgL}{I}}.$$

Тогда уравнение  $I\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi$  после замены  $x = \varphi$  будет выглядеть как:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0.$$

Запишем данное дифференциальное уравнение в переменных  $x, \dot{x}$ :

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\omega_0^2 \sin x}{\dot{x}}.$$

Здесь произведение  $\omega_0^2 \sin x$  можно рассматривать как возвращающую силу  $f(x)$ . Тогда с точностью до постоянной находим  $u(x) = -\int f(x) dx = -\omega_0^2 \cos x$  и можно записать как:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = w + \omega_0^2 \cos x.$$

Используя данное выражение, легко построить фазовые траектории движения и нарисовать на фазовой плоскости общий фазовый портрет системы.

Замкнутые траектории, окружающие особые точки с координатами  $\dot{x} = 0, x = 2n\pi$  ( $n$  – любое целое число), соответствует колебательным движениям физического маятника около положения устойчивого равновесия, отвечающего минимуму потенциальной энергии. Точки  $\dot{x} = 0, x = (2n-1)\pi$  представляют особые точки типа седло и соответствуют неустойчивому верхнему положению равновесия маятника – максимуму потенциальной энергии. Убегающие траектории, которые получаются при  $w > \omega_0^2$ , соответствуют вращательным движениям маятника. Такие движения возникают при сообщении маятнику начального импульса, который обеспечивает движение маятника через верхнее положение с отличной от нуля скоростью. На фазовой плоскости это будет соответствовать выходу описывающей точки за пределы области, ограниченной кривыми 1С и 2С. Данные кривые, проходящие через седла и являющиеся в окрестности

данных точек асимптотами гиперболических фазовых траекторий, являются сепаратрисами. Они разделяют топологически разные области на фазовой плоскости: область траекторий, приходящих из бесконечности и уходящих в бесконечность, и область замкнутых траекторий. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только колебательных движений, которые соответствуют замкнутым фазовым траекториям.

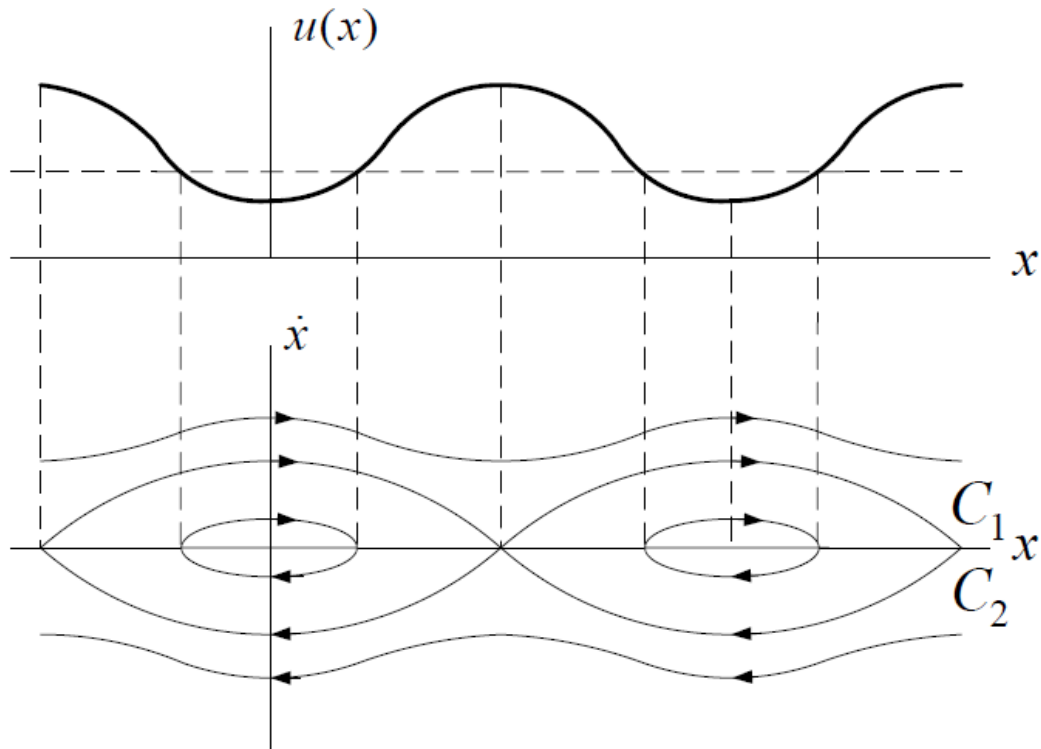


Рисунок 3. Фазовая плоскость

Прежде чем приступить к отысканию закона колебаний физического маятника, т.е. решению уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$ , найдем выражение для периода колебаний  $T$  (заметим, что  $T \neq 2\pi / \omega_0$ ). Для этого применим энергетический подход [4]. В качестве начала отсчета потенциальной энергии выберем самое нижнее положение маятника (положение устойчивого равновесия). Тогда из закона сохранения энергии следует, что:

$$\frac{1}{2} I \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = mgL (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

где  $\alpha$  – максимальное значение угла отклонения (амплитуда колебаний). Найдем из этого уравнения скорость колебаний

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\pi}{T_0} \sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

где  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$  - период колебаний маятника в приближении малых амплитуд.

Для определения истинного периода колебаний  $T$  разрешим уравнение  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\pi}{T_0} \sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$  относительно  $dt$ , проинтегрируем его по углу от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = a$  и умножим результат на четыре. В итоге получаем:

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^a \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Путем последовательной замены переменных  $x = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(a/2)}$  и  $x = \sin u$

полученное выражение для периода колебаний можно привести к полному эллиптическому интегралу первого рода:

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2-\sin^2 u}}, \text{ где обозначено } k = \sin(a/2). \text{ Данный интеграл}$$

не выражается через элементарные функции. Тогда воспользуемся тем, что  $|k \sin x| \leq 1$  и разложим подынтегральное выражение в биномиальный ряд с отрицательным показателем

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 = \dots$$

После почленного интегрирования мы получаем выражение для периода в виде бесконечного сходящегося ряда:

$$(1-x)^{-1/2} = \left[ \bar{\varphi} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right]$$

С точностью достаточной для практики можно учесть только первые два члена этого ряда:

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2} \right]$$

На рис. 3 приведена зависимость относительного отклонения периода колебаний  $T$  от периода колебаний в приближении малых амплитуд в виде функции угловой амплитуды колебаний маятника [4].

На данном этапе мы встречаемся с зависимостью периода колебаний от их амплитуды, т.е. колебания в рассматриваемой системе являются *неизохронными*.

Если бы рассматриваемая система была линейной, то описывающее ее уравнение имело бы вид  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ . Это уравнение отличается от уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$  тем, что вместо  $\sin x$  стоит просто  $x$ . Формально это означает, что в разложении синуса мы использовали только первое слагаемое. Тогда,

воспользовавшись этим приближением, вместо  $T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^a \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$  получаем,

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}, \text{ что после интегрирования дает } T = T_0 \text{ независимо от}$$

амплитуды колебаний, т.е. колебания в линейной системе являются *изохронными*.

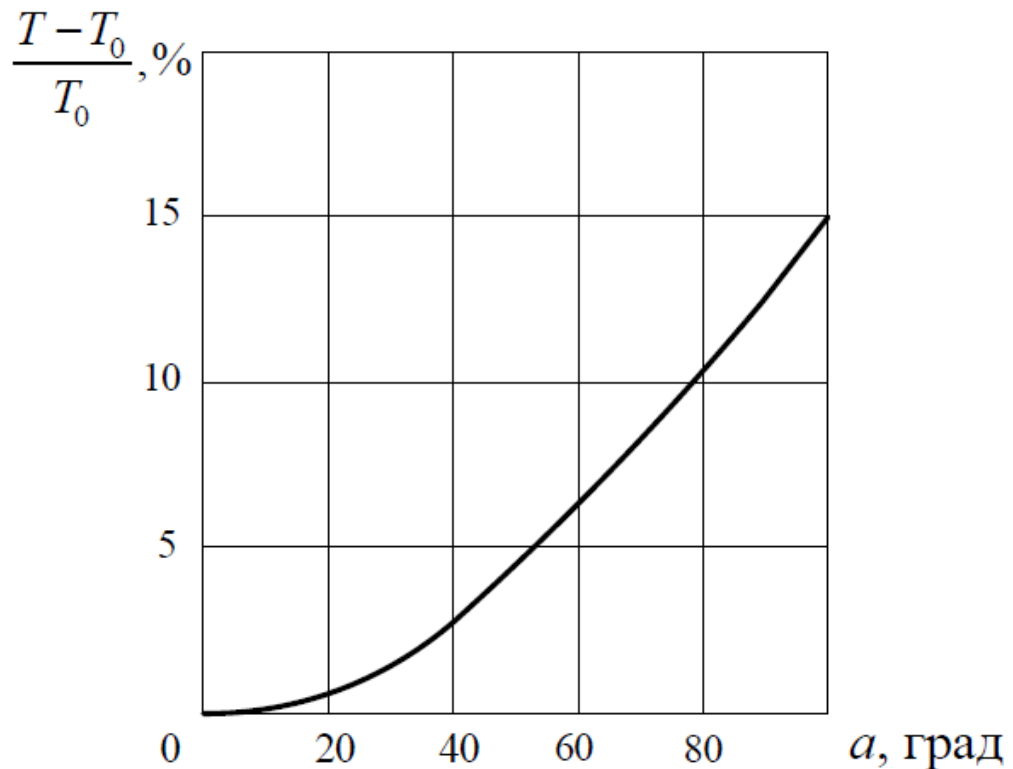


Рисунок 4.



Отметим, что из предположения малости колебаний не обязательно следует линейное описание системы. Для этого обратимся к нестандартному пружинному маятнику (рис. 5). Груз массой  $m$ , который может перемещаться без трения по горизонтальной плоскости, закреплен упруго с помощью вертикальной пружины с коэффициентом жесткости  $k$ . В положении равновесия пружина не растянута и ее длина равна  $l_0$ .

Найдем выражение для потенциальной энергии для описания динамики колебаний:

$$U(x) = \frac{1}{2} k \Delta l^2,$$

где  $\Delta l$  - удлинение пружины,  $x$  - смещение грузика от положения равновесия.

Исходя из рис. 4 находим  $\Delta l = \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0$ . Тогда:

$$U(x) = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{k}{2} \left( \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2.$$

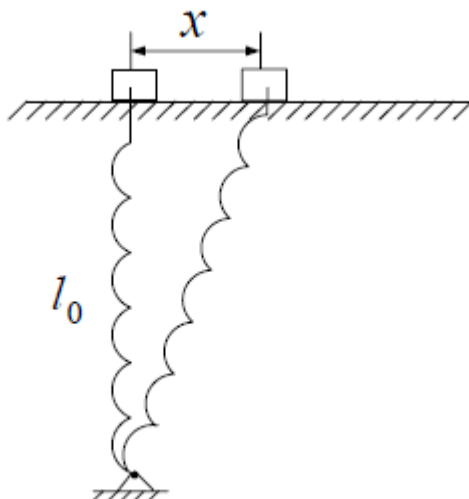
Предполагая колебания малыми ( $x \ll l_0$ ), последнее выражение можно записать в виде:

$$U(x) = \frac{kx^4}{8l_0^2} = \alpha x^4,$$

где  $\alpha = \frac{k}{8l_0^2}$ .

Отсюда сила, действующая на груз, примет вид:  $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{kx^3}{2l_0^2}$ , и

уравнение колебаний запишется как:  $m\ddot{x} + \frac{k}{2l_0^2}x^3 = 0$



Это явно нелинейное уравнение при любых  $x$ . Кроме того, и колебания в такой системе неизохронны при любых амплитудах. Для доказательства

обратимся к закону сохранения энергии:

Рис. 5. Нестандартный  
пружинный маятник

$U_{(x)} + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = U(a)$  , где  $a$  – амплитуда колебаний. Найдем отсюда скорость колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[U(a) - U(x)]}.$$

Разрешая это уравнение относительно  $dt$ :

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[U(a) - U(x)]}},$$

и проинтегрировав обе части полученного равенства, в итоге получим выражение для периода колебаний:

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[U(a) - U(x)]}}.$$

Подставив сюда найденное нами выражение для  $U(x)$  , то  $T = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}[a^4 - x^4]}}$ .

Введем замену переменных  $u = x / a$ . Тогда выражение для периода можно записать в виде:

$$T = \frac{4\sqrt{m}}{a\sqrt{2\alpha}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Этот интеграл выражается через гамма-функцию  $\Gamma(z)$ [28]:

$$\int_0^1 \frac{du}{1-u^4} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 1,311.$$

Тогда для периода колебаний получаем окончательное выражение:

$$T = 3,71 \sqrt{\frac{m}{k} \frac{l_0}{a}}.$$

Приступим к решению уравнения движения  $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$  (напомним, что под величиной  $x$  понимается угол отклонения маятника от положения устойчивого равновесия). Данное уравнение относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений и поэтому не существует универсальных методов их точного решения [8]. Поэтому познакомимся с весьма распространенным методом приближенного расчета необходимой нам системы – методом последовательных приближений.

Для этого выразим  $\sin x$  в виде ряда:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ограничимся рассмотрением значений  $x \ll 1$ , остановимся на члене с  $x^3$ . Тогда уравнение  $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$  переписывается как :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0.$$

Представив это уравнение в форме:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0$$

( $\alpha = -1/6$ ), будем искать решение  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0$  в виде ряда по степеням  $\alpha$  :

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots$$

Здесь  $x_0$  представляет решение уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0$  в так называемом «нулевом» приближении (при  $\alpha = 0$ ),  $x_1$  - это первое приближение и т.д.

Тогда для  $x_0$  имеем уравнение:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0.$$

Но здесь кроется ошибка. Это уравнение для определения  $x_0$  предполагает, что колебания маятника при любой амплитуде являются

изохронными, т.е. независимыми от амплитуды. В действительности же, как мы установили ранее, период движения маятника с конечной амплитудой принципиально отличается от периода колебаний с бесконечно малой амплитудой [13]. Так как величина отклонения периода  $T$  от  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  должна существенно зависеть от степени нелинейности системы, вполне естественно ввести в рассмотрение новую частоту  $\omega$  - частоту колебаний с заданной амплитудой в виде:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \beta + \alpha^2 \cdot \beta_1 + \dots,$$

где  $\beta, \beta_1$  - некоторые пока еще неизвестные величины. Если при расчете ограничиться первым приближением по  $\alpha$ , то можно положить:  $\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \beta$ .

Подставляя найденную отсюда величину  $\omega^2$  в  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0$ , получаем с точностью до первой степени по  $\alpha$  уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha \beta x + \omega^2 \alpha x^3 = 0.$$

Отсюда уравнение нулевого приближения (для  $x_0$ ) имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x_0 = 0.$$

При выбранных нами начальных условиях ( $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ ) его решение будет:

$$x_0 = a \cos \omega t.$$

Тогда, учитывая только слагаемые первой степени по  $\alpha$  и соотношение  $\ddot{x} + \omega^2 x_0 = 0$  получаем:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta x_0 - \omega^2 x_0^3 \text{ или } \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta a \cos \omega t - \omega^2 a^3 \cos^3 \omega t.$$

Воспользовавшись тригонометрическим преобразованием, можем записать:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta a \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega^2 a^3 \omega t - \frac{3}{4} \omega^2 a^3 \cos \omega t.$$

Из теории известно, что решение этого неоднородного дифференциального уравнения содержит так называемый секулярный член  $\sim t \cdot \sin \omega t$ , вызванный наличием в правой части уравнения члена с резонансной

частотой. Ясно, что подобное решение не соответствует никакому реальному движению. Для избавления от секулярного члена выберем величину  $\beta$  так, чтобы:

$$a\beta - \frac{3}{4}a^3\omega^2 = 0$$

Тем самым мы сразу уберем двух зайцев: устраним, во-первых, «нехорошее» решение и, во-вторых, из  $\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \beta$  можем найти значение частоты  $\omega$ :

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\alpha a^2} = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8}a^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при достаточно малых амплитудах это выражение приводит к полученной нами формуле  $T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2} \right]$  связывающей период колебаний  $T$  с периодом  $T_0$  в линейной системе. Теперь уравнение первого приближения для  $x_1$  запишется как:

$$\ddot{x} + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4}\omega^2 a^3 \cos 3\omega t.$$

Его решение, как легко проверить, имеет вид:

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a^2}{32} \cos 3\omega t,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Первые два слагаемых являются общим решением однородного уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4}\omega^2 a^3 \cos 3\omega t$ , а третье – частное решение неоднородного уравнения.

Полное же решение уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0$  с учетом нулевого приближения  $x = x_0 + \alpha x_1$  запишется следующим образом:

$$x = a \cos \omega t + \alpha \left( C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a^2}{32} \cos 3\omega t \right).$$

Значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  можно найти, требуя от этого решения, чтобы оно удовлетворяло тем же начальным условиям  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Проделав соответствующие выкладки, в итоге получим с точностью до первой степени окончательно приближенное решение  $\alpha$  ( $\alpha = -1/6$ ):

$$x = a \left( 1 + \frac{a^2}{192} \right) \cos \omega t - \frac{a^3}{192} \cos 3\omega t; \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8}a^2}.$$

В найденном нами решении, которое подходит для не слишком больших отклонений маятника (когда с достаточной для нас точностью можно считать  $\sin x = x - x^3/6$ ), следует отметить две особенности:

- 1) колебания неизохронны (частота колебаний является функцией амплитуды);
- 2) колебания не являются чисто синусоидальными – в них присутствуют гармоники (в нашем случае третья гармоника).

### 2.3. Разложение по степеням параметра нелинейности. Осциллятор Дуффинга

Данный простой подход, как прямое разложение по степеням малого параметра, не всегда приводит к успеху. Чтобы это показать, мы рассмотрим осциллятор Дуффинга (осциллятор с кубической нелинейностью) [4]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

Используем замену переменных ( $t' = \omega_0 t$ ,  $x' = x/A$ ). Тогда данное уравнение примет вид:

$$\ddot{x}' + x' + \varepsilon x'^3 = 0,$$

где теперь  $\varepsilon = \beta A^2 / \omega_0^2$ . Будем рассматривать случай слабой нелинейности, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Отыскивая решение в виде  $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$  будем иметь:

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0,$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0.$$

В нулевом порядке по  $\varepsilon$ , соответственно, мы по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид  $x_1 = a \cos(t + \varphi)$ . Попробуем найти  $x_2$ . После подстановки выражения для  $x_1$  ( $x_1 = a \cos(t + \varphi)$ ) уравнение  $\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0$  приводится к виду:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)].$$

Нужно найти такое решение этого уравнения, которое будет соответствовать вынужденным колебаниям в членах высшего порядка. Так как нелинейность кубичная, в данном случае в спектре внешнего воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение мы будем искать в виде суперпозиции откликов на эти воздействия:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)},$$

где  $x_2^{(1)}$  и  $x_2^{(3)}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi),$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi).$$

Решение уравнения  $\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi)$  находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы:

$$x_2^{(3)} = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi).$$

Что же касается уравнения  $\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi)$ , то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Из теории линейных колебаний нам известно, что в этом случае возникает *резонанс*, который выражается в неограниченном нарастании

амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид:

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi).$$

Это так называемый *секулярный* или вековой член. (Термин берет свое начало из небесной механики.) Окончательный вид решения с точностью до членов

второго

порядка

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[ -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots$$

малости таков:

Обратим внимание на то, что, как бы ни был мал параметр  $\varepsilon$ , с течением времени второй член в данном решении неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения  $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$  на больших временах нарушается, или, как говорят математики, *разложение не является равномерно пригодным по  $t$* . Это явно нефизический результат. Решения уравнения Дуффинга имеют вид периодических нелинейных колебаний, и здесь никакого нарастания амплитуды со временем нет.

В чем же причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются неизохронными, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение  $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$  принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники.

## 2.4. Метод Линштедта — Пуанкаре



Метод Линшtedта – Пуанкаре тоже является асимптотическим методом теории нелинейных колебаний. [4]. И сейчас подробно разберем данный метод.

Нам необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Наиболее простой способ был предложен А. Линшtedтом (1883) и А. Пуанкаре (1892). Введем в уравнении  $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$  новую временную переменную  $\tau = \omega t$ . Поскольку  $d/dt = \omega d/d\tau$ , получим:

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0.$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $\tau$ . Будем искать решение уравнения  $\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$  в виде разложений в степенной ряд как для переменной  $x$ , так и для частоты  $\omega$ :

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots,$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Первый член в разложении для  $\omega$  должен представлять собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. Последующие поправки  $\omega_1, \omega_2, \dots$  будут описывать эффекты неизохронности.

Подставим данное разложения в уравнение  $\omega^2 x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$ . Получим:

$$[1 + 2\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 (\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots][x_1'' + \varepsilon x_2'' + \dots] + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0$$

Преобразуем данное уравнение приведем его к виду:

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0$$

Приравняем к нулю члены нулевого и первого порядков малости, и будем иметь:

$$x_1'' + x_1 = 0,$$

$$x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3.$$

Решение уравнения  $x_1'' + x_1 = 0$  запишем в виде:

$$x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

Подставив это соотношение в правую часть  $x_2'' + x_2 = -2\omega_1 x_1'' - x_1^3$ , найдем, что:

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]$$

Теперь необходимо выбрать  $\omega_1$  таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные  $\cos(\tau + \varphi)$ , которые приводят к секулярному росту решения для  $x_2$ . Для этого, очевидно, следует положить:

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8}.$$

Теперь уравнение  $x_2'' + x_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]$  принимает вид:

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi).$$

Его решение:

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi),$$

не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех  $t$ .

Окончательный вид найденного нами решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  таков:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi),$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^3}{8}.$$

Если параметр  $\varepsilon$  считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при  $\varepsilon < 0$  частота, наоборот, уменьшается.

Возьмем во внимание, что в отличие от осциллятора с квадратичной нелинейностью в спектре колебаний в первую очередь появляется не вторая, а третья гармоника. Если продолжать разложения далее, то можно убедиться, что спектр будет содержать *только нечетные гармоники*. Это является следствием симметрии уравнения Дуффинга относительно замены  $x \rightarrow -x$ .

## 2.5. Моделирование физического маятника в среде Maple

Среда Maple – это программный пакет, система символьной математики. Является продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, которые ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. [30]. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов, что нам и требуется. Также обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный язык программирования, напоминающий Паскаль [29].

### Построение модели физического маятника в системе Maple

```
> restart:with(DEtools):
```

```
> x1:=1/2*sin(q1(t)):
```

```
> y1:=-1/2*cos(q1(t)):
```

```
> T:=1/2*I1*(diff(q1(t),t)^2);
```

$$T := \frac{1}{2} I1 \left( \frac{d}{dt} q1(t) \right)^2$$

```
> I1:=1/3*m1*I1^2:
```

```
> T:=simplify(T);
```

$$T := \frac{1}{6} m1 I1^2 \left( \frac{d}{dt} q1(t) \right)^2$$

```
> U:=m1*g*(y1+1);
```

$$U := m1 g \left( -\frac{1}{2} I1 \cos(q1(t)) + I1 \right)$$

```
> U:=simplify(U);
```

$$U := -\frac{1}{2} m l g l l (\cos(q1(t)) - 2)$$

> L1:=T-U:

> L3:=eval (L1, diff (q1 (t), t)=w1 (t)):

> L2:=eval (eval(L1, diff (q1 (t), t)=w1), q1 (t)=q1):

> L:=unapply (L2, q1, w1):

> Lw1:=diff (L(q1, w1), w1):

Lq11:=diff (L(q1, w1), q1):

> Lq1:=eval (eval(Lq11, w1=w1 (t)), q1=q1 (t)):

> Lw1:=eval (eval(Lw1, w1=w1 (t)), q1=q1 (t)):

> Lw1t1:=diff (Lw1, t):

> Lw1t:=eval (Lw1t1, diff (q1 (t), t)=w1 (t)):

> F1:=-k1\*l1\*w1 (t):

> m1:=0.175; l1:=0.295; g:=9.8; k1:=0.005;

$m1 := 0.175$

$l1 := 0.295$

$g := 9.8$

$k1 := 0.005$

> sys:= simplify (Lw1t-Lq1=F1), w1 (t)=diff (q1 (t), t):

> funcs:={q1 (t), w1 (t)}:

> nys:=q1 (0)=0.99\*Pi, w1 (0)=0;

$nys := q1(0) = 0.99 \pi, w1(0) = 0$

> r1:=subs (sol, q1 (t)):

> plot (r1 (t), t=0..10);

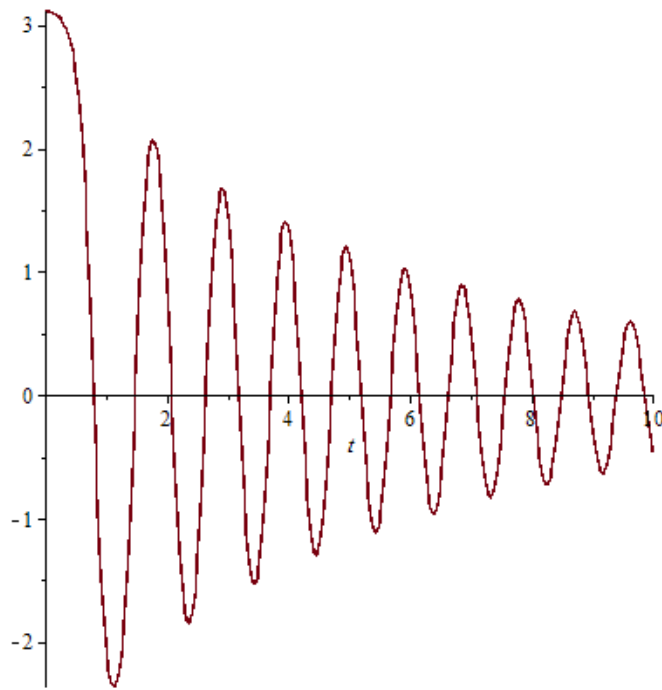


Рисунок 6. График движения физического маятника

```

> x[1] (t):=11*sin (r1 (t)):
> y[1] (t):=-11*cos (r1 (t)):
> with(plots): with(plottools):
> anim:= proc (x_1, y_1) local line1;
line1:=curve([[0, 0], [x_1, y_1]], color = «DarkBlue», thickness = 50);
display(line1);
end proc:
> animate (anim, [x[1] (t), y[1] (t)], t=0..30, scaling=constrained,
frames=500).

```

## **Глава 3. Связь со школьной физикой и школьным изложением колебаний.**

### **3.1. Методика изучения механических колебаний и волн в школьном курсе физики.**

Колебательные и волновые движения – это одни из самых распространённых движений в природе. Изучение колебаний – это мощный инструмент познания и универсальный ключ ко многим тайнам природы.

Недаром академик Л. И. Мандельштам говорил примерно так: ...если посмотреть на всю историю физики, то можно увидеть, что главные открытия, по существу, были связаны с колебательными процессами.

Изучение раздела «Механические колебания и волны» начинается в 9 классе после раздела «Законы взаимодействия и движения тел», и отводится на ее изучение 10 часов.

Основные виды деятельности ученика:

- Объяснять процесс колебаний маятника.
- Исследовать зависимость периода колебаний маятника от его длины и амплитуды колебаний.
- Исследовать закономерности колебаний груза на пружине.
- Вычислять длину волны и скорости распространения звуковых волн.
- Экспериментально определять границы частоты слышимых звуковых колебаний.

Основные определения и понятия изучаемые в данном разделе, выдержка из рабочей программы по физике 9 класс составленной в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом : «Физика» 7-9 классы (базовый уровень) и примерных программ по учебным предметам. Физика. 7 – 9 классы: проект. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с. – (Стандарты второго поколения), на основе рабочих программ по физике. 7 – 11 классы / Под ред. М.Л. Корневич. – М.: ИЛЕКСА, 2012., на основе авторских программ ( авторов А.В.Перышкина, Е.М. Гутник, Г.Я. Мякишева, Б.Б. Буховцева, Н.Н. Сотского) с учетом требований Государственного образовательного стандарта второго поколения. [25].

Изучение колебаний в школе начинают с введения понятия о колебательном движении, которое является одним из основных в этой теме. Школьники уже знакомы с периодическими, или же. повторяющимися через равные промежутки времени, движениями (например, с равномерным движением по окружности). Разновидность периодического движения –

колебательное, т. е. такое движение, при котором тело перемещается от своего положения равновесия то в одну сторону, то в другую. Приводятся примеры колебательных движений и демонстрируются системы тел, в которых при определенных условиях могут существовать колебания (вертикальный и горизонтальный пружинные маятники, груз на нити, ножовочное полотно, зажатое в тисках, и др.). На примере этих колебательных систем следует выделить то общее, что свойственно для любых из них: наличие устойчивого положения равновесия, фактор инертности, обеспечивающий прохождение телом положения равновесия и, таким образом, установление колебательного движения вместо простого возвращения тела в положение равновесия, и, наконец, достаточно малое трение в системе.

Вводят понятие о свободных колебаниях. Колебания, которые возникают в системе выведенной из положения равновесия и представленной самой себе, называют свободными. Когда в системе отсутствует трение, то свободные колебания называют собственными; эти колебания происходят с собственной частотой, которая определяется только параметрами системы. Колебательная система, лишенная трения, – это идеализация, но при малом коэффициенте затухания различие между свободными и собственными колебаниями слишком незначительно, чтобы его учитывать (при добротности системы в несколько единиц оно не превышает нескольких процентов). Поэтому в школьном преподавании физики понятия свободных и собственных колебаний не разграничивают и учащиеся знакомятся только с понятием свободных колебаний.

### **3.2. Демонстрация нелинейности колебаний на школьном уроке физики.**



В школьной программе изучается только математический маятник, а это идеализированная линейная система колебаний. Поэтому для демонстрации нелинейности колебаний проведем опыт на пружинном маятнике.

Нелинейность колебаний на уроке физики можно продемонстрировать во время выполнения лабораторной работы или же на демонстрации опыта по пружинному маятнику.

Пружинный маятник – это колебательная система состоящая из груза и пружины.

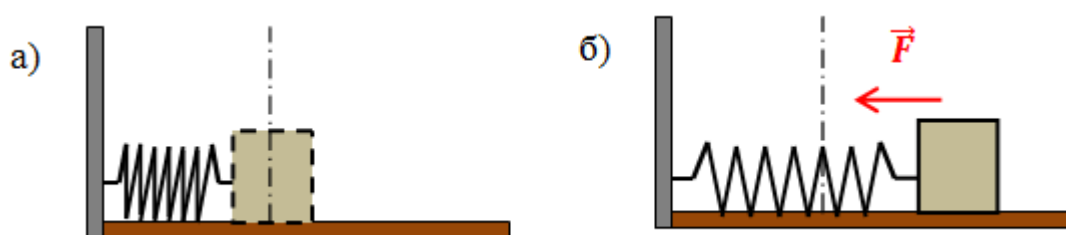


Рисунок 7. Движение пружинного маятника

Когда пружина не деформирована, тело находится в положении равновесия (рис.7,а). Если растянув или сжав пружину, вывести груз из положения равновесия, на него будет действовать сила упругости  $\vec{F}$  со стороны деформированной пружины. Эта сила направлена к положению равновесия и в данном случае является возвращающей силой. [2].

Со временем мы сможем наблюдать, что груз не возвращается в начальное положение равновесия, так как пружина деформируется и тем самым уравнение колебаний пружинного маятника становятся нелинейными.

Уравнение движения нелинейного пружинного маятника:

$$\ddot{x} + \frac{k(x)}{m}x = 0,$$

где коэффициент жесткости  $k(x)$  - функция  $x$  (смещение), т.е. пружина не идеально упругая, а может при нагрузке деформироваться.

Пусть  $k(x) \approx k_0 + \alpha x$ , где  $k_0 = const$ ;  $\alpha = const$ , т.е. учитываем первое приближение при разложении  $k(x)$  в ряд при малых  $x$ . Это означает малую деформацию пружины. Закон Гука естественно не выполняется.

Уравнение движения переписывается в этом приближении как:

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{m} x = -\frac{\alpha}{m} x^3;$$

где  $\frac{k_0}{m} = \omega_0^2$  -- это собственная частота колебаний пружинки при выполнении закона Гука.

Видно, что это уравнение также как и уравнение, полученное из уравнения движения физического маятника при разложении  $\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{3} \theta^3$ .

Другими словами, поведение нелинейного пружинного маятника аналогично поведению движения физического маятника при учете слабой нелинейности.

Резюмируя все вышесказанное хочется отметить, что изучение нелинейных колебаний в школьном курсе физики было бы очень полезно для обучающихся, но нехватка математических знаний формул у школьников и времени на включение данного материала в школьную программу, делает это невыполнимым.

## **Заключение**

В ходе работы нами были получены следующие теоретические результаты:

1. Проанализированы теоретические основы движения физического маятника и выделены его основные свойства движения.
2. Проанализировано движение нелинейного физического маятника и описано уравнение его колебаний.

3. Рассмотрена методика перехода от нелинейных колебаний к линейным методом последовательных приближений;

4. Была проведена связь со школьной физикой и школьным изложением колебаний на примере пружинного маятника.

Таким образом, все поставленные задачи были выполнены, цель достигнута.

### **Список литературы**

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1991. — 568 с.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. – 59 с.
3. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – Москва : Регулярная и хаотическая динамика, 2009. – 416 с.

4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1994. — 408 с.
5. Вавилов К., Щербина С. Web-интеграция // Открытые системы. №1. 2001.
6. Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1989. — 124 с.
7. Джанколи Д. Д40 Физика: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ.-М.: Мир, 1989.-656 с, ил.
8. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. - М.: Наука, 1988. 368 стр.
9. Канторович, Л. В, Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В. И. Крылов. М.: ГИТТЛ, 1952.
10. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц.М.:Физматгиз,1968.
11. Матросов, А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. Матросов. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
12. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1989. — 390 с.
13. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М. : Наука, 1981.– 400 с.
14. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах В 2 т. М.: ИИЛ, 1960. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. — 932 с. Пер. с англ. Под ред. С.П. Аллилуева и др.
15. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. — 312 с.
16. Панов, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Паев. – Москва : Наука, 1971. – 240 с.
17. Паршаков А.В. Физика колебаний: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 302 с.
18. Понятие о нелинейных колебаниях. [Электронный ресурс]. URL: [http://books.alnam.ru/book\\_gphis.php?id=26](http://books.alnam.ru/book_gphis.php?id=26) (Дата обращения 25.05.2018).

19. Прохоров, А. М. Физика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. – 4-е изд. – Москва: Большая Российская энциклопедия, 1999. – С. 293–295.
20. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
21. Рожанский, Д. А. Курс физики. Колебания и волны. Звук. Свет / Д. А. Рожанский – Москва : Либроком, 2013. – 250 с.
22. Сивухин Д.В. - Общий курс физики. Том 1. Механика – 1979. – с. 520 с ил.
23. Сикорский, Ю. С. Элементы теории эллиптических функций / Ю.С. Сикорский. М.; Л.: ОНТИ, М.: "КомКнига", 1936, 2006. - 366 с.: ил.
24. Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 2002. — с. 597. С ил.
25. Федеральные государственные образовательные стандарты: Министерство образования и науки российской федерации. [Электронный ресурс]. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/336> , (Дата обращения: 20.05.2018).
26. Черемисина Е.Н., Прогулова Т.Б. Информатика: Учебное пособие. – Дубна: Междунар. ун-т природы о-ва и человека «Дубна», 2006. – 175 с.
27. Шишин, В. А. Физика. Механические колебания и волны: лабораторные работы / В. Б. Вязовов, С. П. Кудрявцев, В. П. Плотников, А. М. Подкауру, В. А. Шишин. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 32 с.
28. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Классический справочник по специальным функциям: Гамма-функция. Дзета-функция Римана. Эллиптические интегралы. Эллиптические функции. Функции Бесселя. Ортогональные полиномы. М.: Наука, 1968. М.: Наука, 1964. - 344 с.

29. Нелинейный маятник. Лекции для студентов. [Электронный ресурс]. [https://mipt.ru/education/chair/physics/S\\_I/lab/rabota-1-4-3-nelineynyy-mayatnik/nonlin.pdf](https://mipt.ru/education/chair/physics/S_I/lab/rabota-1-4-3-nelineynyy-mayatnik/nonlin.pdf) (Дата обращения 03.06.2018).

30. Maple. Материал из Википедии — свободной энциклопедии. [Электронный ресурс]. [URL:http://ru.wikipedia.org/wiki/](http://ru.wikipedia.org/wiki/) (Дата обращения 01.06.2018).

31. Математический маятник. Материал из Википедии — свободной энциклопедии. [Электронный ресурс]. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> (Дата обращения 29.05.2018).

32. Физический маятник. Материал из Википедии — свободной энциклопедии. [Электронный ресурс]. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> (Дата обращения 29.05.2018).