

В.В. Абдулкин, С.И. Калачева, М.А. Кейв,
С.В. Ларин, В.Р. Майер

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

**В.В. Абдулкин, С.И. Калачева, М.А. Кейв,
С.В. Ларин, В.Р. Майер**

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Монография

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2019

ББК 74.262.21
А 139

Рецензенты:

В.И. Сенашов,

доктор физико-математических наук, профессор

Н.И. Пак,

доктор педагогических наук, профессор

Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р.

А 139 Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе; монография / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2019. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-296-1

В монографии на основе системного анализа разработана концепция обучения математике студентов бакалавриата, направление подготовки 44.03.01 и 44.03.05 Педагогическое образование, – будущих учителей математики с использованием компьютерной анимации на базе систем динамической математики GeoGebra, Живая математика и компьютерной алгебры Maple. Методика реализации разработанной концепции продемонстрирована в некоторых темах курсов алгебры, геометрии и дискретной математики.

Для преподавателей вузов, готовящих учителей математики, исследователей в области дидактики высшей школы, учителей математики, аспирантов, студентов и школьников.

ББК 74.262.21

Издается при финансовой поддержке Алтайского государственного педагогического университета в соответствии с договором № 12-18 от 18.06.2018 на выполнение НИИР по проекту «Образовательная платформа обучения в педвузе дисциплинам математического цикла на базе систем динамической математики для повышения качества математической и профессиональной подготовки студентов – будущих учителей математики».

ISBN 978-5-00102-296-1

© Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2019

© Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р., 2019

Оглавление

Предисловие	4
Введение	5
Глава 1. Компьютерная анимация как новый элемент дидактики математического образования	7
§ 1.1. Компьютерная анимация в обучении математике	7
§ 1.2. Проблемы обучения математике, решаемые с использованием анимации	26
§ 1.3. Основные положения концепции обучения математике с использованием анимации	37
Глава 2. Методика использования компьютерной анимации в курсах математики педагогического вуза	45
§ 2.1. Компьютерная анимация в курсе алгебры.....	45
§ 2.2. Компьютерная анимация в курсе геометрии.....	64
§ 2.3. Компьютерная анимация в курсе дискретной математики	126
Заключение	156
Библиографический список	157

Предисловие

Книга представляет собой результат работы научной школы «Моделирование систем и процессов в математике и математическом образовании» КГПУ им. В.П. Астафьева в области информатизации математического образования за период с 2014 по 2018 годы. В определенном смысле она обобщает разработанную в 2001 году одним из руководителей научной школы профессором В.Р. Майером методическую систему геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий, адаптируя ее к другим математическим дисциплинам педагогического вуза. Появившиеся на рынке образовательных программных продуктов так называемые системы динамической математики позволили привнести в дидактику математики такое мощное средство обучения, как компьютерная анимация. Один из первых это уникальное средство подробно исследовал профессор С.В. Ларин в учебных пособиях [30, 31] и в статьях [32–36, 64]. Созданию концепции обучения математике с использованием компьютерной анимации, реализации этой концепции в некоторых темах математических курсов в педагогическом вузе посвящена и предлагаемая коллективная монография.

Первая глава монографии была подготовлена профессорами С.В. Лариным, В.Р. Майером и доцентом В.В. Абдулкиным. Первый параграф второй главы написан профессором С.В. Лариным и доцентом С.И. Калачевой, второй параграф – профессором В.Р. Майером и доцентом В.В. Абдулкиным, третий параграф – доцентом М.А. Кейв.

Коллектив авторов выражает благодарность за помощь в работе программисту кафедры математики и методики обучения математике Майеру Ромуальду Робертовичу.

Введение

Методика преподавания математики рассматривается нами как теория и одновременно как практико-ориентированное искусство обучения с опорой на интуитивное, чувственное восприятие математических понятий и утверждений, через формирование ассоциаций между абстрактными понятиями и чувственно воспринимаемыми объектами реального мира. С целью расширения средств обращения к интуиции мы используем анимационные возможности специализированных компьютерных программ Живая математика, GeoGebra и некоторых пакетов Maple. Выбор именно этих программ обусловлен анализом научно-методической литературы [9; 10; 15–19; 24; 28; 29; 46; 51; 53; 55; 58; 59; 63; 65; 66], а также опыта использования целого ряда соответствующих программных обеспечений.

Мы используем три вида анимации:

1) геометрическая анимация – управляемое изменение геометрического чертежа с сохранением алгоритма его построения;

2) алгебраическая анимация – управляемое изменение выражений и формул (с помощью «Ползунков»), обеспечивающее выполнение алгоритма решения некоторой математической задачи;

3) текстовая анимация – управляемое преобразование текста (с помощью «Ползунка» и условий видимости) для реализации некоторого алгоритма решения математической задачи.

Возможны сочетания этих трех видов анимации. При желании алгебраическую анимацию можно рассматривать как часть текстовой анимации, понимая под текстом, в том числе, и формулы. Мы не будем здесь рассматривать эти терминологические тонкости, надеясь на то, что по-

сле ознакомления с приведенными ниже примерами указанных видов анимации читатель будет иметь о них ясное представление.

Мы не ставим цели устранить «ручной труд» – выполнение упражнений в тетради. Мы хотим лишь пополнить арсенал средств для обучения математике, для поиска решения задачи, для выполнения алгоритмов решений с устранением вычислительных трудностей, для построения анимационных моделей изучаемых процессов и явлений. Уверены, что очень скоро придет время, когда компьютерная анимация станет таким же обыденным средством школьного учителя и преподавателя вуза, как еще и поныне триада «классная доска, мел и тряпка». Не разовое мероприятие, вызывающее восторг и удивления, а иногда и непонимание, а само собой разумеющееся действие, облегчающее понимание этой «трудной» математики.

Глава 1.

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ КАК НОВЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

§ 1.1. Компьютерная анимация в обучении математике

1.1.1. История возникновения термина «анимация»

Термин «анимация» используется для обозначения разнообразных явлений в различных областях человеческой деятельности: от художественной, научной и учебной мультипликации (анимационные фильмы), которые используются в сфере развлечений, науке и образовании, до медицины (реанимационные мероприятия). Объяснение тому, что этот термин обладает достаточно широкими лингвистическими границами и используется во многих современных языковых культурах, можно найти в его этимологии. Как отмечается в статье [60] термины «анимация» (рус.), «animation» (англ.), «animateur» (фр.) и т.д. происходят от латинского корня «anima», который имеет несколько самостоятельных значений: жизненное начало, жизнь, душа, разумное начало, дух.

Нас в данной работе будет интересовать компьютерная анимация. В зарубежных источниках, в первую очередь англоязычных, компьютерной анимацией называют вид мультипликации, создаваемый с помощью компьютера. Причем в отличие от более общего понятия «компьютерная графика», где рассматриваются как статические, так и динамические изображения, предметом компьютерной анимации являются лишь движущиеся изображения. Компьютерная

анимация наиболее востребована в индустрии развлечений, а также в науке, образовании и производстве. Под *компьютерной анимацией* мы будем понимать компьютерную имитацию реального или идеального процесса с помощью изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений с фазами движения.

Поскольку компьютерная анимация представляет собой в определенном смысле производную от компьютерной графики, то ее история тесно связана с историей появления и развития специализированных графических программных средств. Эра компьютерной графики достаточно молодая, она ведет свой отсчет с 1961 года, когда коллектив исследователей во главе с известным американским ученым Айвеном Сазерлендом создал первую графическую систему Sketchpad. Эта система позволяла с помощью светового пера изображать на экране монитора статические рисунки, находить их образы под действием несложных преобразований, строить изображения простейших фигур.

Позднее, в 1967 году, в университете штата Юта (США) Сазерленд совместно с Дэвидом Эвансоном, Джимом Кларком, Эдвином Катмеллом и Джоном Уорноком продолжили исследования в области компьютерной графики. Основные усилия были направлены на создание технологий и разработку программных средств, позволяющих строить изображения пространственных фигур. При этом проблема видимости первоначально решалась способом заливки: объекты переднего плана окрашивались однотонным цветом, что позволяло закрыть те объекты или их части, которые размещались на заднем плане. Отметим, что аналогичные работы проводились и в Советском Союзе, где в 1968 году с помощью компьютера по введенным в него дифференциальным уравнениям было имитировано движение живого существа. Следует отметить, что сами кадры анимации были созданы не на экране монитора, а распечатаны на текстовом принтере.

В настоящее время технология создания подвижных изображений пространственных объектов и текста с помощью современных программных средств компьютерной графики достигла значительного прогресса, но нас в данной работе в большей степени будет интересовать не это направление, а все то, что связано с использованием компьютерной анимации в обучении. В работах большинства исследователей убедительно обосновывается, что компьютерная анимация в обучении, или, как ее еще называют, ActionLearning, представляет собой перспективное направление в образовании. Причем не только студентов и школьников, но и персонала во многих организациях и на предприятиях. Использование компьютерной анимации позволяет заинтересовать обучающихся в совершенствовании своих знаний и профессиональных навыков, повышает мотивацию к учебной и производственной деятельности, к достижению новых высот.

Анимация в образовании применяется при создании электронных учебников, подготовке презентаций к лекциям, урокам и семинарским занятиям, при проведении учебных исследований и экспериментов. Использование компьютерной анимации позволяет создавать интерактивные обучающие модели с элементами взаимодействия с пользователем, обеспечивает активное восприятие нового учебного материала, повышает наглядность его представления и способствует более прочному усвоению учащимися основ теории. Анимация создает новую реальность, позволяющую взглянуть на явления, которым присуще движение и которые сложно или невозможно увидеть в природе.

По мнению экспертов и практикующих педагогов, динамическая визуализация учебного материала в сравнении со статической представляет собой более эффективный методический прием обучения, который активизирует мысль обучающегося, поддерживает интерес к изучаемому материалу. Как

считают специалисты в области психологии, в основе этого феномена лежат физиологические особенности человека. У человека, как и у любого хищника, органы зрения имеют одну интересную особенность. Хищник способен заметить или обнаружить объект с гораздо большей долей вероятности, если тот находится в движении. Таким образом, чтобы привлечь внимание обучающегося на тот или иной объект обучения, на то или иное понятие, его нужно привести в движение, или анимировать. Как известно, любая информация воспринимается лучше, если она носит динамический характер. Использование анимации, цвета и звука удерживает внимание обучающихся. На таких занятиях интерес к предмету повышен.

Особенно актуальна анимация вообще и компьютерная анимация в частности при обучении такой абстрактной учебной дисциплине, как математика. Как считает Е. Вишняковская [14], «Математические мультики», которые производят в Лаборатории популяризации и пропаганды математики (ППМ) Математического института им. В.А. Стеклова РАН, удивительны как минимум по двум причинам. Во-первых, они умеют превращать абстракции «царицы наук» в наглядные истории о вещах, окружающих нас в повседневной жизни. Во-вторых, все материалы, которые создает лаборатория, доступны любому желающему бесплатно и неограниченно на сайте «Математические этюды» (www.etudes.ru).

По мнению Николая Андреева, заведующего лабораторией ППМ, в ситуации снижения общего уровня образованности, в которой сейчас находится Россия, доносить информацию становится труднее. «Если ребенок не понимает красоты математики или зачем она нужна, приходится придумывать какие-то развлекательные формы, чтобы показать ему на более простом, чем формула, уровне, зачем все это нужно: зачем он в школе проходит трапецию или геометрические построения... Приходится идти на хитрость: пока-

зывать что-то красивое, где применяется математика, в надежде, что ему станет интересно и он захочет ее изучать» [14]. Математические мультфильмы, подготовленные в лаборатории ППМ, выполнены так, чтобы немотивированные школьники, посмотрев их, начали больше уважать математику, мотивированные – нашли материал для доказательства и исследования, школьные учителя – чем можно заниматься с детьми на уроке. Математические этюды интересны для студентов, преподавателей вузов и даже профессиональных математиков, т.к. некоторые из этюдных сюжетов многим из них неизвестны и они открывают для себя что-то новое.

Особый интерес представляют математические мультфильмы, которые ориентируют школьников на проблемы математики, не решенные до настоящего времени. Много таких задач про развертки многогранников. Например, один из мультфильмов посвящен, решенной сравнительно недавно задаче, о получении из развертки куба, имеющей вид латинского креста, треугольной пирамиды. А вот в более общем случае – задача еще не решена. Сформулируем ее в упрощенной форме. *Известно, что из некоторого фрагмента бумаги можно сложить выпуклые многогранники. Указать количество всех таких многогранников и алгоритм построения каждого из них.*

Все математические мультфильмы лаборатории ППМ, выложенные на сайт «Математические этюды», снабжены краткой научно-популярной статьей со ссылками и со всей литературой. О популярности этих фильмов говорят следующие факты:

- сайт посещает порядка десяти тысяч людей в сутки: это и те, кто смотрит, и те, кто скачивает;

- сайтом пользуется большое количество учителей школ и учеников, электронные письма от них в адрес лаборатории приходят из разных уголков России;

– подготовленный и выложенный на сайт фильм про стопоходящую машину П.Л. Чебышева посмотрело за первый день больше 100 тысяч человек – большая аудитория даже для интернета, а для бумажных изданий вообще недостижимая.

Одна из основных проблем, которая препятствует массовому участию математиков и программистов в подготовке подобных фильмов – большие трудозатраты. Каждый математический этюд – это несколько месяцев работы профессиональной команды математиков и специалистов по трехмерной анимации. Вручение Н. Андрееву премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых ученых можно расценивать как сигнал обществу, что такими вещами следует заниматься, что в других институтах и высших учебных заведениях следует создавать аналоги лаборатории ППМ Математического института им. В.А. Стеклова.

В исследовании предполагается показать, как на занятиях по математическим дисциплинам в педагогическом вузе можно сформировать у студентов умение самостоятельно и без больших трудозатрат создавать с помощью систем динамической математики Живая математика, GeoGebra и пакета символьных преобразований Maple анимационные этюды по различным темам курсов алгебры, геометрии и дискретной математики.

1.1.2. Анимационные возможности систем динамической математики

В профессиональном стандарте педагога (ПСП) перечислены необходимые умения, которыми должен владеть учитель математики, в частности:

– «совместно с обучающимися создавать и использовать наглядные представления математических объектов и процессов с помощью компьютерных инструментов на экране» [54, с. 17];

– «владеть основными математическими компьютерными инструментами: визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; экспериментальных лабораторий» [54, с. 17].

Среди программных средств, позволяющих учителю и учащимся не только создавать компьютерные модели геометрических объектов и абстракций, но и эффективно использовать эти модели для получения новых знаний, наиболее популярны так называемые системы динамической геометрии или интерактивные геометрические среды, которые мы будем называть системами динамической математики (СДМ). Появление этих виртуальных математических лабораторий для проведения в первую очередь учебных экспериментов и исследований было обусловлено целым рядом обстоятельств, в частности, в связи с тревожной тенденцией роста количества обучающихся, которые математику стали относить к непопулярным предметам. К настоящему времени в мире насчитывается около пятидесяти таких программных продуктов.

Системы динамической математики максимально ориентированы на усиление визуальной и экспериментальной составляющих обучения математике. С их помощью учителя и учащиеся имеют возможность не только моделировать математические объекты и процессы, но и использовать построенные модели для изучения их свойств. Главным дидактическим достоинством СДМ, отраженным в их названии, является динамика (движение), которая реализуется, в том числе, средствами компьютерной анимации. Если раньше наглядность в обучении, как правило, ограничивалась лишь изготовлением статичных изображений и штучными фильмами образовательной направленности, то с появлением упомянутых программных продуктов педагогическое сообщество приобрело движение как новое общедоступное дидактическое средство обучения математике.

С возможностями компьютерной анимации тесно связана та часть математических исследований, неотъемлемой составляющей которых являются динамические чертежи с анимацией, участвующие в решении математических задач. Будем называть эту часть математических исследований *динамической математикой*. Компьютерное моделирование является важнейшей частью динамической математики. Решение геометрической задачи в динамической математике проходит три этапа [30]:

- построение компьютерной динамической модели, соответствующей условию задачи;
- нахождение визуальной версии решения задачи с использованием построенной модели и возможностей компьютерной анимации;
- построение математической модели визуальной версии решения задачи.

Математика не единственная дисциплина, при обучении которой используется динамика. Анимация может применяться при изучении практически любого предмета. Некоторые исследователи, например Мусса, относят дидактические приложения искусства компьютерной анимации к одним из самых элегантных способов создания обучающих материалов, оказания помощи учащимся в усвоении соответствующей дисциплины.

Среди систем динамической математики наиболее популярны The Geometer's Sketchpad (N. Jackiw, USA, 1991) (в России известны ее русскоязычные версии 4.2 Живая геометрия, 5.0 Живая математика) [23] и GeoGebra [2; 49]. Далее мы подробно остановимся на анимационных возможностях именно этих программных средств.

Система динамической математики Живая математика. Первая версия этой программы была выпущена в 1995 году. Достаточным основанием для ее активного внедрения

является естественная и мощная техника построения чертежей – аккуратных, грамотно описываемых и легко редактируемых. Возможности работы с программой весьма разнообразны. Однако следует отметить, что сама среда не является обучающей и «самостоятельно ничего не делает», – все чертежи в ней создаются пользователем, а программа лишь представляет для этого необходимые средства, также как и возможности для усовершенствования чертежей и их исследования. Программа очень проста в работе – для ее применения не требуется специальных знаний информатики.

Живая математика позволяет получать на плоскости такие чертежи, в которых сохраняется иерархия зависимости объектов друг от друга, поэтому изменение положения одних объектов приводит к изменению положения зависимых. «Потянув» мышкой за ту из точек, которая появилась на этапе построения чертежа в результате ее свободного выбора (например, как произвольная точка плоскости, прямой, луча, отрезка, окружности и т.д.), можно наблюдать анимационное изменение всех тех элементов чертежа, построение которых зависело от перемещаемой точки. При этой процедуре не изменяются установленные ранее отношения между объектами чертежа (параллельность, перпендикулярность, инцидентность, простое отношение точек и т.д.).

Живая математика предоставляет возможность «прятать» любые фрагменты чертежа, чаще всего вспомогательные, т.е. делать их невидимыми для пользователя (при необходимости их всегда можно вывести на экран). Чтобы привлечь внимание обучаемого на тот или иной фрагмент чертежа, не применяя для этого утомительное перечисление соответствующих букв с индексами и штрихами, можно в течение короткого времени окрасить этот фрагмент любым цветом, не заслоняя при этом построенные ранее линии, точки и их обозначения, выделить любым цветом любую линию.

Кроме этого, имеется возможность измерять длины отрезков, величины углов, площади многоугольников и кругов, длины ломаных, окружностей и дуг; выполнять действия над величинами, создавать собственные инструменты пользователя. Именно эти возможности, заложенные в СДМ Живая математика, позволяют строить на плоскости динамические модели, проводить математические исследования, превращают компьютер с этим программным средством в мини-лабораторию, которая так необходима учителям и учащимся.

В Живой математике имеется несколько способов задания анимации [23], рассмотрим три основных, к которым относятся ручная, кнопочная и ползунковая.

Ручная анимация. Это самый простой способ перемещения геометрического или текстового объекта на рабочем поле среды. Для этого курсором выбирается инструмент Стрелка , который находится в верхней части вертикальной панели инструментов, слева от рабочего поля. После выбора инструмента пользователь может переносить любой объект, наведя на него курсор, нажав и удерживая левую клавишу мыши. Отметим, что если при ручной анимации переносится объект, который зависит от другого объекта, то любое новое положение объекта сохраняет имеющуюся зависимость.

Отметим, что при выборе инструмента Стрелка, независимые объекты в процессе анимации не меняют своей ориентации на плоскости и размеров. Если требуется поворачивать объект вокруг некоторой точки, необходимо выбрать другую разновидность инструмента Стрелка, а именно инструмент Стрелка Поворота . Если же возникает потребность изменить объект с точностью до центрального подобия (гомотетии), необходимо воспользоваться второй разновидностью инструмента Стрелка – Стрелкой Растяжения .

Кнопочная анимация. Для того чтобы для выбранного на экране объекта в среде Живая математика задать анимацию с помощью специальной кнопки, достаточно подсветить этот объект, поместив на нем курсор, и, щелкнув левой клавишей мыши, зайти в меню «Правка», затем выбрать опцию «Кнопки», далее – команду «Анимация» или «Перемещение». На рабочем поле появится соответствующая кнопка, после нажатия на которую выбранный объект, а вслед за ним и все его «потомки», придут в движение и начнут перемещаться с заданной скоростью (выбирается в появляющемся окне) по заданной траектории (к которой был «привязан» выбранный объект). Для управления анимацией объекта: увеличить или уменьшить скорость анимации, остановить анимацию, поменять направление движения т.д., используется панель *Управление движением*, которая появляется при введении анимации.

Ползунковая анимация. Компьютерную анимацию в среде Живая математика можно задать с помощью ползунка, который перемещается по некоторому отрезку или дуге окружности. Для этого пользователю необходимо построить отрезок (или дугу окружности), поместить на него точку и изобразить ползунок (небольшой окрашенный «перевернутый» равнобедренный треугольник, вершина которого совпадает с выбранной точкой). После этого задается необходимая единица измерения (градусы, миллиметры, сантиметры и т.д.) и строится динамическая модель исследуемой фигуры, которая зависит от положения выбранной точки на отрезке или дуге окружности. Перемещая ползунок автоматически или с помощью мыши, мы получим анимацию объекта.

Дидактические возможности среды Живая математика эффективно реализуются при конструировании динамических анимационных моделей, поддерживающих практически все темы и разделы курса геометрии в школе и педвузе.

Система динамической математики GeoGebra. Образу говоря, эта среда представляет собой «мастерскую с инструментами» по изготовлению анимационных чертежей, и надо лишь знать, под какой кнопкой лежит нужный инструмент. Никаких специальных знаний программирования не требуется ([30], [31]).

Откроем файл в GeoGebra и рассмотрим экранное изображение сверху вниз. Список вверху: Файл, Правка, Вид, Настройки, Инструменты, Окно, Справка – составляет «Главное меню». Пробегая его курсором, можно просмотреть появляющиеся списки команд.

Следующая строка квадратиков с картинками – Панель инструментов, где представлены инструменты, которыми можно пользоваться. На каждой из подсказывающих картинок в правом нижнем углу имеется значок в виде маленького треугольника, кликнув на который, можно просмотреть появившийся список инструментов и выбрать нужный из них.

Главную часть экрана составляет так называемое Полотно – поле для построений (по аналогии с художественным полотном). Присутствующие на нем оси системы координат можно спрятать, кликнув на Полотно правой кнопкой мыши и выбирая команду «Оси». Слева от Полотна находится Панель объектов, которая служит для записи построенных объектов (точек, прямых, отрезков, векторов, уравнений линий и т.д.). Положение панели объектов можно изменить. Наконец, в самом низу экрана словом «Ввод» помечено окно, называемое «Строкой ввода». Если, к примеру, в этой строке написать уравнение некоторой линии в виде формулы зависимости y от x , то после ввода на Полотне появится график этой линии.

Часто приходится создавать пояснительный текст. При этом используется кнопка ABC. При создании текста, содер-

жащего формулы, выбираем стиль записи LaTeX-формула. В этом случае, чтобы в надписи сделать пробел между словами, нужно кликнуть на запись «LaTeX-формула» и в появившемся меню выбрать Пробел. Чтобы, например, написать дробь, нужно в том же меню команд выбрать «Корни и дроби», кликнуть на запись, а затем числитель и знаменатель заменить на нужные выражения.

Для анимации точки A на объекте (отрезке, прямой, окружности) нужно кликнуть на нее правой кнопкой мыши и в появившемся списке команд выбрать команду «Анимировать». Точка A будет перемещаться по объекту, на котором она построена. В левом нижнем углу полотна появится кнопка для остановки или возобновления анимации. Если мы хотим изменить параметры анимации точки A , то кликнем на нее правой кнопкой мыши и в «Свойствах» выберем «Алгебра» и зададим «Шаг», «Скорость» и «Повтор».

Чтобы надписать прямую ее уравнением, на ней ставим точку C и создаем надпись $y = kx + b$, указывая буквы k и b из списка «Объекты».

С помощью строки ввода можно строить графики функций. По графику можно находить приближенные значения корней многочлена (нулей функции) с любой (разумной по мнению компьютера) точностью.

Для отслеживания зависимости графика функции от коэффициентов используется инструмент под названием «Ползунок». Он представляет собой отрезок с точкой на нем, которая изображает параметр (например, коэффициент квадратного трехчлена). Для создания ползунка, управляющего выбранным параметром, нужно выбрать инструмент «Ползунок» и щелкнуть курсором на свободное место Полотна. Появится изображение ползунка. Ухватившись за точку на ползунке, можно изменять значение параметра перемещением точки на ползунке.

Например, создадим ползунки для параметров a , b , c и строкой ввода построим график функции $y = ax^2 + bx + c$. Изменением параметров с помощью ползунков можно проследить соответствующие изменения графика функции.

Чтобы рассмотреть последовательность построения чертежа, нужно пройти: «Вид», «Протокол», правой кнопкой мыши кликнуть на Полотно и выбрать «Шаги построения», «Проиграть».

После открытия на Вашем компьютере готового ggb-файла может оказаться, что созданный ранее на другом компьютере рисунок не умещается на экране. В этом случае нужно изменить масштаб изображения с помощью колесика мышки. Чтобы переместить изображение на экране, нужно воспользоваться клавишей «Переместить чертеж» (вверху крайняя справа кнопка). Чтобы переместить надпись, нужно (при включенной клавише со стрелкой) зацепить ее с помощью правой кнопки мышки и переместить в нужное место. Чтобы закрепить надпись на установленном месте, нужно кликнуть на нее правой кнопкой мыши и в появившемся списке команд воспользоваться командами «Закрепить объект», «Абсолютная позиция на экране».

Чтобы изменить цвет объекта (точки, линии или надписи), нужно кликнуть на нее правой кнопкой мыши и в появившемся списке команд выбрать «Свойства», затем «Цвет» и заказать нужный цвет. Для надписи можно выбрать нужный размер шрифта.

Чтобы поместить рисунок или его часть из ggb-файла в текстовый файл формата Word (экспорт рисунка), нужно при нажатой клавише «Перемещать» (крайняя слева) нажать правую клавишу мышки и «вытянуть» прямоугольник так, чтобы он включил в себя нужную часть рисунка. Затем воспользоваться командами «Правка», «Копировать в буфер». После этого выйти из ggb-файла, открыть тексто-

вый файл и командой «Вставить» поместить рисунок в нужное место.

Импортировать в ggb-файл можно файлы с расширениями gif, jpeg, jpg, tif, png, bmp. Приведем пример. Предположим, в некоторой книге мы нашли изображение одной из кривых второго порядка (эллипс, гиперболу или параболу) и сомневаемся в правильности чертежа. Мы сканируем изображение, получаем файл с расширением jpg. Через буфер обмена помещаем изображение на полотно ggb-файла. Затем выбираем инструмент «Коника по пяти точкам» и отмечаем пять точек на проверяемой кривой. Появляется эллипс, гипербола или парабола, с которой мы и сравниваем отсканированное изображение.

Подводя итог, выпишем основные знания и умения в работе с программой GeoGebra. Этот перечень может стать основой программы занятий со школьниками по освоению этой программы.

1. Построение объекта с помощью одного из инструментов: точки, прямой, луча, отрезка, угла, многоугольника, окружности, дуги, комплексного числа.

2. Умение задать след точки. Задать анимацию объекта. Включить/выключить анимацию.

3. Скрыть/показать объект, его обозначение. Скрыть/показать сетку, оси координат, Скрыть/показать Панель объектов. Уметь использовать условия видимости объекта.

4. Построить прямую, параллельную (перпендикулярную) данной, Построить угол, равный данному.

5. Создать надпись, в том числе надпись, содержащую формулу. Уметь при этом использовать «Объекты».

6. Ввести данную функцию, выражение, число.

7. Осуществить одно из преобразований (симметрию относительно точки или прямой, поворот, параллельный перенос, гомотетию).

8. Используя инструмент «Ползунок», задать числовые параметры (коэффициенты в уравнении, параметры в формуле) и регулировать их изменения.

9. Умение редактировать изображение: изменять масштаб, местоположение объектов на Полотне, изменение обозначений, преобразование изображения перемещением его частей и с помощью Ползунков и т.д.

10. Перенос изображения в текстовый файл и его редактирование там.

Список перечисленных тем для первичных занятий можно продолжить. Но лучше быстрее перейти к построениям анимационных изображений, диктуемых математической тематикой, приобретая необходимые умения по мере надобности.

1.1.3. Анимационные возможности системы компьютерной алгебры Maple

Maple – это система компьютерной алгебры, разработанная специалистами канадского университета Ватерлоо (University of Waterloo) в Онтарио и на сегодняшний день совершенствуемая и распространяемая компанией Waterloo Maple Inc. Первая версия этого программного продукта появилась в 1982 году. 21 марта 2018 года вышла версия Maple 2018, которая стала 56 эволюцией первой версии. Maple не является свободно распространяемым программным продуктом. Для его использования необходимо приобретать лицензию.

Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный интерпретируемый язык программирования, синтаксисом частично напоминающий Паскаль.

Одним из преимуществ Maple, на котором делают акцент его разработчики, является интуитивно понятный интерфейс. Поэтому мы не будем отдельно уделять время и место, описывая, как работать в Maple, а непосредственно перейдем к рассмотрению его анимационных возможностей.

В качестве основной команды, позволяющей реализовать анимацию графики в Maple, используется команда *animate*. Эта команда является частью пакета *plots*, который необходимо подключить с помощью команды *with(plots)*.

Команда используется по следующему шаблону:

animate(имя_графической_команды,[параметры графической команды с включенным в данный раздел параметром анимации], параметры анимации)

Например, если мы хотим изобразить график функции $y = \sin(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, то в Maple будет реализовано следующим образом:

plot($\sin(x)$, $x = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}$, *scaling = constrained*)

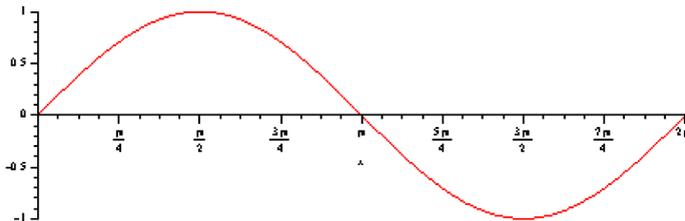


Рис. 1.1.1

В данном случае *plot* – имя графической команды, а все что находится после нее в круглых скобках является ее параметрами (обязательным является только первый параметр – функция, заданная в явном виде, график которой надо построить). Если мы захотим ввести анимацию, например, посмотреть (рис. 1.1.1), как будет меняться график функции, если к ней прибавить некоторое число, т.е. график функции

$y = \sin(x) + b$, то в этом случае мы можем воспользоваться анимацией следующим образом:

```
animate(plot, [sin(x) + b, x = 0 ..2·Pi, scaling =  
= constrained], b = 0 ..5, frames = 50, trace = 5)
```

По умолчанию, Maple разобьет отрезок изменения параметра анимации (в нашем случае, это параметр b , который изменяется на отрезке $[0;5]$) на 25 частей и представит анимацию в виде последовательного показа 25 кадров, первый из которых будет соответствовать левому концу отрезка, на котором изменяется параметр анимации, последний – правому концу. Для нашего примера (рис. 1.1.2) это означает, что на первом кадре мы увидим график функции $y = \sin(x) + 0$, на последнем $y = \sin(x) + 5$. При этом количество кадров анимации можно менять с помощью параметра *frames*, присваивая ему некоторое натуральное значение (в примере выбрано 50 кадров) с соответствующими изменениями в расчетах кадров. Также по умолчанию Maple полностью заменяет новый кадр предыдущим, т.е. анимация не оставляет «следа». Это можно изменить, задав некоторое целочисленное значение параметру *trace* (логично рассматривать значения этого параметра $1 < \text{trace} \leq \text{frames}$). В этом случае будет оставлено ровно столько «следов» анимации, сколько будет указано в значении данного параметра. В примере самая верхняя кривая – это последнее положение анимации, а все нижние – это «следы» анимации. Maple делит количество кадров на количество следов и равномерно распределяет кадры, которые должны остаться по всей анимации. В нашем случае были оставлены кадры № 1, № 10, № 20, № 30 и № 40, которые соответствуют значениям параметра анимации

$$b = 0, b = 1, b = 2, b = 3 \text{ и } b = 4 .$$

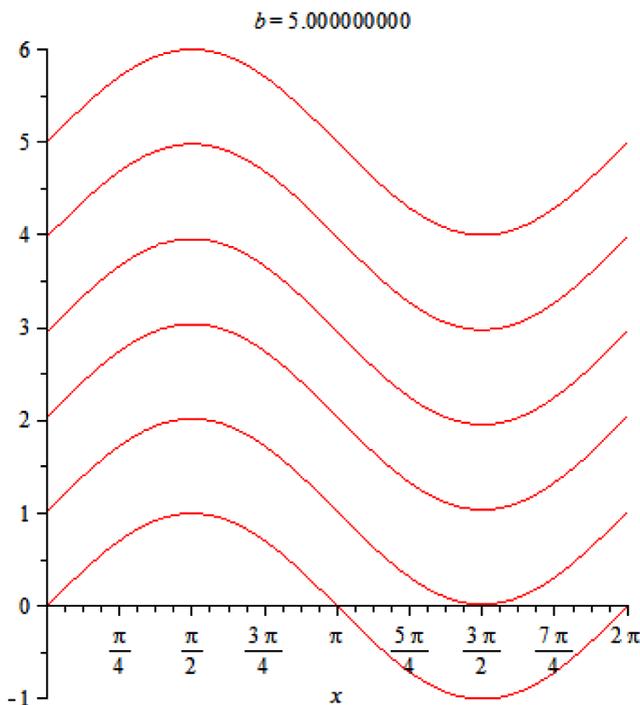


Рис. 1.1.2

Параметр анимации можно вставлять внутри параметров графической команды не только в обязательный параметр (функцию), но и в диапазоны изменения значения независимых переменных или параметров функции. Это позволяет продемонстрировать, например, «построение» функции, показав, как ведет себя функция по мере того, как независимая переменная или параметр изменяются в пределах заданного отрезка. В качестве примера можно рассмотреть «построение» единичной окружности в виде анимации из 360 кадров. На рисунке 1.1.3 показан 120-й и 240-й кадр анимации. К этому времени анимация построила дугу 120° и 240° нашей единичной окружности.

```
animate(plot, [[cos(t), sin(t), t = 0 ..A]],
        A = 0 ..2 π, frames = 360)
```

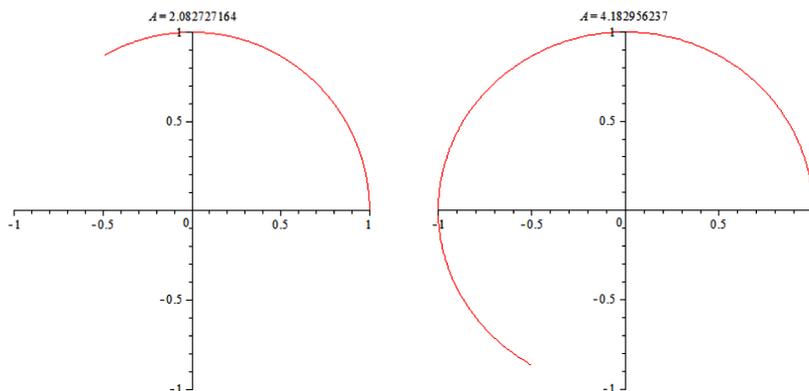


Рис. 1.1.3

Maple может анимировать не только основные команды для двухмерной и трехмерной графики *plot* и *plot3d*, но и другие графические команды, входящие как в пакет *plot*, так и в пакет *plottools*.

§ 1.2. Проблемы обучения математике, решаемые с использованием анимации

Укажем три основных мотива использования компьютерной анимации в педагогическом вузе при обучении математике студентов – будущих учителей математики:

первый связан с тем, что визуальные и анимационные возможности таких мощных математических систем, как Mathematica, Maple и других, наряду с их огромным вычислительным и интеллектуальным потенциалом с успехом применяются в фундаментальной и прикладной математике;

второй – с тем, что применение компьютерной анимации в преподавании математических дисциплин может существенно повысить качество усвоения учебного материала;

третий – с тем, что использование компьютерной анимации в математических дисциплинах при подготовке учителей математики будет содействовать продвижению этих новых технологий в школьное обучение.

Дадим обоснование необходимости создания и формулируем основные положения концепции обучения математике с использованием анимационных возможностей систем динамической математики и символьных вычислений. В связи с этим перечислим некоторые проблемы и трудности в математической подготовке учителя математики, которые можно устранить благодаря использованию компьютерной анимации.

1. Компьютерная анимация используется не только для создания мультипликационных фильмов, презентаций для выступления с докладами, учебных тренажеров при обучения водителей, летчиков и космонавтов, для многих других аналогичных целей и задач, но и для получения новых знаний [7] как в самой математике, так и в ее приложениях; в физике, биологии, химии, гуманитарных науках. Естественно предположить, что *знакомство студентов с этим новым инструментом исследовательской деятельности способно повлиять на повышение уровня сформированности их математической компетентности.*

2. В педагогических вузах большое значение придается формированию умения решать задачи элементарной математики методом геометрических преобразований, отработке соответствующих навыков. Для этого нужна хорошо развитая геометрическая интуиция. Для того чтобы помочь студентам увидеть в задаче, не имеющей на первый взгляд никакой связи с преобразованием, таковую, достаточно создать анимационный этюд, подсказывающий один из способов ее решения. Изучение геометрических преобразований вызывает у обучающихся серьезные трудности. В вузе ситуация усугубляет-

ся еще и тем, что выводимые в основном курсе геометрии многочисленные свойства и формулы, аналитически задающие эти преобразования, остаются практически не востребуемыми. *Применение возможности компьютерной анимации с использованием необходимых свойств и формул позволяют создавать виртуальные модели геометрических преобразований, визуализируя их, что формирует предпосылки для более глубокого усвоения студентами этой темы.*

3. Анимационное изображение модели пространственной конфигурации позволяет обучающимся наблюдать за исследуемым объектом с разных точек зрения, увидеть различные проекции фигуры на плоскость. Ясно, что такая компьютерная помощь необходима лишь на начальной стадии решения стереометрических задач. В дальнейшем у обучающегося должны сформироваться умения и навыки осуществлять требуемые повороты фигуры мысленно, в уме. Неоднократное применение готовой анимационной модели пространственного объекта, а также самостоятельное ее создание направлено на формирование знаний и компетенций, достаточных для решения подобных задач без использования компьютера. *Самостоятельное изготовление обучаемым анимационных изображений под руководством преподавателя помогает развить пространственное воображение и геометрическую интуицию.*

4. В математических курсах высших учебных заведений и общеобразовательных школ большое значение имеют задачи исследовательского типа. Их решение можно предварить компьютерным анимационным экспериментом, помогающим сформулировать правдоподобную гипотезу, наличие которой нацеливает и существенно упрощает доказательный этап решения задачи. Особенно часто встречаются подобного рода задачи в курсе конструктивной геометрии, в частности при решении задач на построение циркулем и линейкой ме-

тодом геометрических мест точек. Многое здесь зависит от умения определять множество точек плоскости, обладающих заданным свойством. При построении анимационной модели для проведения эксперимента строится произвольная точка M , обладающая свойствами, определяемыми построением этой точки в зависимости от некоторой точки N . Задается анимация точки N и исследуется траектория, которую вычерчивает точка M . При наблюдении этого формулируется соответствующая гипотеза о геометрическом месте точек M . Таким образом, *использование анимационных технологий обеспечивает исследовательский тип обучения.*

5. Одной из важнейших составляющих обучения математике являются умения и навыки осуществления самоконтроля при решении задач вообще и задач с параметрами в частности, особенно геометрических. Особенно трудно осуществить самопроверку решения стереометрических задач на вычисление расстояний и величин углов. Для проверки формулы, полученной в результате решения задачи, зависящей от параметра, на полотне сначала задается динамическая модель этого параметра (отрезок, угол и т.д.), затем последовательно строятся заданные условием задачи объекты, и, наконец, та фигура, величина которой является искомой. Изменяя с помощью мышки геометрическую модель параметра, остается сопоставить численные значения найденной формулы и величины соответствующей этому параметру искомой фигуры. Если они совпадают для достаточно большого количества значений параметра, то с большой долей вероятности можно считать, что задача решена верно.

При усвоении некоторого алгоритма решения алгебраической задачи часто возникают нежелательные вычислительные трудности отвлекающего характера, и здесь использование анимационных возможностей компьютерных сред существенно облегчают достижение цели обучения

устранением вычислений, которые берет на себя компьютер. Тем самым устраняется возможность совершить вычислительную ошибку и облегчается самоконтроль. Таким образом, как в геометрии, так и в алгебре *использование анимационных технологий способно взять на себя функции самоконтроля обучаемого при решении задач.*

6. В ряде случаев трудности, возникающие при усвоении теории или решении задач, связаны с недостаточно развитым представлением об объеме того или иного понятия. Характерно в этом отношении мнение многих выпускников школ, что прямая линия, не содержащая стороны четырехугольника, может его пересекать не более чем в двух точках. Отсутствие в их представлениях образа невыпуклого четырехугольника легко устранить, создав на экране компьютера динамическую модель четырехугольника и перемещая мышью его вершины. Труднее это сделать при изучении пространственных фигур или линий. Помочь в этом опять-таки может компьютер, на экране которого легко деформировать образы, вплоть до предельных ситуаций. Сделать это вручную значительно труднее. Таким образом, *анимационные возможности компьютерных сред могут эффективно использоваться при формировании представления об объеме изучаемого математического понятия.*

7. При организации самостоятельной работы студентов, прежде всего при решении задач, большое значение имеет правильная мотивация этой деятельности. Обычно эта мотивация сводится к требованиям: построить геометрическую фигуру, написать и решить уравнение, найти координаты, описать множество точек, определить тип фигуры и т. д. Все это в основном внутриматематические требования. Компьютерная анимация позволяет несколько изменить эту мотивацию, придать ей своеобразную прикладную и эстетическую направленность, что, как показывает опыт, позволя-

ет активизировать самостоятельную работу студентов, сделать ее более продуктивной. Для этого можно использовать задачи, в которых требуется визуализировать на дисплее динамическую конфигурацию, заданную определенными условиями. При решении таких задач студентам потребуется установить конструктивное или аналитическое задание этой конфигурации, найти метрические соотношения или координаты ее элементов, выбрать подходящие определения, вспомнить необходимые признаки и свойства и т.д. Подобного рода требования реализуются с помощью конструктивных, вычислительных и анимационных возможностей систем динамической математики и символьных преобразований. Такое изменение конечной цели задания, ясность перспективы, как известно, повышает интерес к заданию. Таким образом, *новые информационные технологии могут повысить и дополнить основную мотивацию усвоения математических знаний.*

8. Среди задач, которые рассматриваются в курсе математики основной школы, большое внимание уделяется так называемым задачам прикладной направленности или, как их еще называют, задачам реальной математики. Немало таких задач в курсе планиметрии, что является вполне естественным, поскольку геометрия, как известно, возникла в процессе решения практических задач. Решать подобные задачи приходится выпускникам 9 и 11 классов на итоговых государственных экзаменах. Подготовить учеников к успешному решению задач реальной математики можно более эффективно с использованием компьютерной анимации. Поскольку большинство задач реальной математики связано с движением или легко сводится к ним, то применяя системы динамической математики, можно без особых проблем построить анимационную модель, которая может помочь ученику не только максимально погрузиться в условие

задачи, но и найти необходимые соотношения, приводящие к ее решению. Ясно, что *учитель математики должен обладать соответствующими компетенциями в области динамической математики, сформировать которые можно в педагогическом вузе при обучении математическим дисциплинам с использованием анимации.*

9. Одной из основных задач обучения математике является решение проблемы развития логического мышления. Теоретические основы этого вида математической деятельности изучает математическая логика. Вместе с тем логическое мышление можно развивать при изучении любой математической дисциплины. Например, в геометрии задачи на разрезание имеют не только прикладное значение, они способствуют формированию у школьников пространственного воображения и логического мышления. Умение решать задачи на разрезание развивают у обучающихся способность находить для многоугольников, свойства которых неизвестны, равносоставленные с ними многоугольники с известными свойствами. Особенно ценно то, что ученики под руководством учителя могут сами создавать динамические чертежи, поддерживающие не только доказательства теорем, но и решение задач. Примеры развития логического мышления на базе изучения дискретной математики приведены ниже. *Самостоятельное построение анимационных изображений развивает логическое мышление.*

10. Одна из задач курсов алгебры и элементарной математики в педагогическом вузе – сформировать у будущего учителя математики компетенции, знания и умения, достаточные для успешного обучения учеников решению задач элементарной алгебры и начал математического анализа с параметрами. Системы динамической математики предоставляют для этого большие возможности, в основе которых лежит компьютерная анимация. Наиболее эффектив-

но в этом случае задавать параметры с помощью ползунков, а исследуемые в соответствии с условием задачи кривые строить по формулам, содержащим параметры. Изменяя значение параметра ползунком, можно наблюдать, к каким визуальным последствиям приводит это действие, высказать правдоподобную гипотезу, получить ее строгое математическое обоснование или опровергнуть. *Сформировать у учителя математики знания и умения решать с помощью систем динамической математики задачи с параметрами и обучать этому школьников можно в педагогическом вузе в курсах элементарной математики и методики обучения математике.*

11. В элементарной математике существует целый класс задач, условия которых предполагают более одного решения. Это так называемые многовариантные математические задачи. Например, построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности в данной на ней точке. Решением этой задачи являются две окружности, одна из которых касается данной окружности внешним образом (большинство школьников и даже студентов чаще всего указывают в ответе только эту окружность), вторая – внутренним образом. Подготовить учеников к их решению – одна из задач учителя математики. Системы динамической математики предоставляют учителю дополнительные дидактические возможности обучить своих подопечных успешно преодолевать возникающие при решении таких задач трудности. Для этого создается динамическая модель, удовлетворяющая всем условиям задачи и зависящая от некоторого анимационного объекта (точки, ползунок и т.п.). Преобразуя анимационный объект, можно исключить случайную потерю одного из решений. Таким образом, *анимационные рисунки помогают обеспечить полноту решения задачи.*

12. Элементарная и прикладная математика содержат большое число задач на конструирование шарнирных механизмов. Перед созданием подобного реально действующего механизма бывает полезно построить его динамическую модель. Роль звеньев успешно выполняют отрезки прямых, шарниров – точки, функцию одного из подвижных шарниров – анимационная точка, помещенная в соответствии со структурой механизма на подходящую линию (прямую, луч, отрезок, окружность или дугу), изображение которой при необходимости скрывается. Так, например, при построении шарнирного механизма, переводящего движение одного шарнира по окружности в движение другого шарнира по прямой (спрямляющий механизм или прямоило), можно воспользоваться прямоилом Липкина, представляющим собой механизм с одним закрепленным шарниром, соединяющим два длинных звена одинаковой длины, ко вторым концам которых прикреплены противоположные вершины шарнирного ромба (его сторона – короткое звено). При анимационном перемещении одной из свободных вершин ромба по окружности противоположная вершина ромба перемещается по прямой. Отметим, что важнейшим этапом создания шарнирного механизма, обладающего требуемым условием, является строгое математическое обоснование того, что динамическая модель механизма на самом деле удовлетворяет этому условию. Так, в приведенном выше примере можно доказать, что прямоило Липкина реализует инверсию относительно окружности с центром в закрепленном шарнире и радиусом равным корню квадратному из разности квадратов длинного и короткого звеньев.

Немаловажную роль могут сыграть анимационные модели в физике, например, в механике, моделируя физические эксперименты.

Итак, использование анимационных моделей эффективно в прикладной математике.

Таким образом, нами обоснована актуальность разработки теоретической концепции, которая не только оживила бы математические курсы в педагогическом вузе новыми идеями, пропитала их «духом компьютерной анимации», но и содействовала бы более глубокому пониманию традиционных разделов математики, дала возможность с помощью персонального компьютера эффективно усваивать изучаемые математические теории. Эта концепция призвана:

- повысить наглядность в обучении;
- полнее раскрыть связь, существующую между аналитическими конструкциями и их наглядно-образной реализацией;
- существенно расширить возможности формирования представления об объеме изучаемого математического понятия;
- «оживить» геометрический чертеж, показать его в процессе построения;
- вскрыть все нюансы геометрических преобразований, научить с их помощью решать конструктивные задачи на построение;
- устранить вычислительные трудности там, где они не являются предметом обучения и отвлекают от усвоения основного материала.

Назовем эту концепцию – концепция *поддержки математических курсов в вузе, готовящем учителя математики, направление подготовки 44.03.01 и 44.03.05 Педагогическое образование (уровень (степень) «бакалавр»)*, профили «Математика» и «Математика и Информатика», с использованием компьютерной анимации. Ради краткости будем называть ее концепцией *обучения математике с использованием компьютерной анимации* и обозначать при необходимости аббревиатурой *ОМИКА*.

Предлагаемая концепция имеет большое методологическое значение, поскольку позволяет преподавателю последовательно реализовать в учебном процессе, а студенту глубже осознать роль и значение компьютерной анимации в системе образования.

Концепция реализуется в условиях профессионально-педагогической направленности обучения [48]. Она опирается на три фундаментальные концепции: методологическую концепцию единства теории и практики, педагогическую концепцию воспитывающего и развивающего обучения и психолого-педагогическую концепцию обучения деятельности.

Концепция единства теории и практики предполагает, что теория, изучаемая студентами в математических курсах и курсе информатики, соединится в практике использования анимационных возможностей компьютера в качестве инструмента познания математического материала.

Концепция воспитывающего и развивающего обучения предполагает, что использование анимационных возможностей компьютера при обучении математике будет содействовать общекультурному развитию будущих учителей, приобщению их к технологиям и мировоззрению XXI в.

Деятельностный подход к математической подготовке студента педвуза предполагает рассмотрение координирующей деятельности педагога и деятельности студента, который, с одной стороны, должен изучить программный математический материал с использованием информационных технологий вообще и компьютерной анимации в частности, а с другой – овладеть профессиональными компетенциями учителя математики, способного использовать компьютер в школе. Такой подход обеспечивает единство процесса профессионального воспитания будущего учителя, ибо проектируемые свойства личности непосредственно зависят от характера деятельности, в процессе которой она формируется.

§ 1.3. Основные положения концепции обучения математике с использованием анимации

В дидактике обобщены те положения в обучении, которые в определенном смысле имеют универсальный характер. В учебном пособии [27] отмечается, что в результате такого обобщения «выработаны так называемые *дидактические принципы* обучения, представляющие по существу совокупность тех единых требований, которым должно удовлетворять обучение любому предмету, в частности обучению математике».

В [50, стр. 732] перечислены принципы обучения математике в среднем общеобразовательном учреждении: «научность обучения, воспитывающий характер обучения, наглядность обучения, сознательность и активность в обучении, прочность усвоения знаний, систематичность и последовательность в обучении, доступность обучения, индивидуальный подход в условиях коллективной работы с обучающимися». Большая часть этих принципов естественным образом переносится и на обучение математике в высшем учебном заведении, причем практически все «школьные» принципы реализуются в педагогическом вузе при обучении математике студентов – будущих учителей математики.

Полностью оставаясь в рамках действия перечисленных выше общедидактических принципов обучения математике, мы сформулируем дополнительно еще семь дидактических положений предлагаемой нами концепции обучения математике на основе использования анимационных возможностей систем динамической математики и символьных вычислений.

1. *Первое положение* в определенном смысле ориентировано на участие в решении большинства проблем, отмеченных в предыдущем параграфе, проявляя себя в использовании анимационных возможностей компьютера. Совре-

менное образование должно готовить тех, кто осуществит заявленную в России цель создания цифровой экономики. Информационные технологии в последнее время все энергичнее вторгаются в нашу жизнь, предлагая услуги, от которых трудно отказаться. В современных фундаментальных исследованиях все большее значение придают компьютерным экспериментам и обоснованиям. Это касается и образования. Использование информационных технологий в процессе математической подготовки учителя математики должно адекватно отражать те изменения в исследованиях в области фундаментальной и прикладной математики, которые происходят в связи с информатизацией общества. Одним из признаков современного урока является использование на этом уроке компьютерной техники и информационных технологий. В этой связи студенты должны широко использовать анимационные возможности компьютерных сред как одно из современных дидактических средств обучения математике, достижения понимания и успешного усвоения математического материала.

Отсюда первый принцип (*принцип современности*) обучения математике: *математическое образование должно быть современным, выполняя социальный заказ общества.*

Первый принцип, в частности, требует при обучении математике в полной мере использовать информационные технологии.

2. *Второе положение* связано с тем, что с использованием анимации мы вносим движение как одно из современных дидактических средств обучения. Если раньше ученик мог видеть график функции только в статичном изображении, то теперь можно показать непрерывное вычерчивание графика. Можно не только изучать функцию, например, с целью получения ее графика, но и смоделировать движение, задаваемое этой функцией. Можно не только показать изображение пространственной фигуры, но и

«покрутить» его, разглядывая с разных сторон. Можно не только показать схему задачи на движение (встречное или вдогонку), но и смоделировать его, решить задачу на движение экспериментально. Применение компьютерной анимации в обучении математике создает по сравнению с использованием традиционных статических средств наглядности целый ряд преимуществ.

Конечно же, как и во всем, нельзя чрезмерно увлекаться анимацией. В этой связи упомянем одно опасение, высказанное в учебном пособии [27, с. 197]. В нем отмечается, что «излишнее увлечение наглядностью обучения может привести к нежелательным результатам. Так, например, чрезвычайно полезное применение различных моделей фигур на первых уроках стереометрии может привести в дальнейшем к торможению развития пространственного воображения». По мнению авторов пособия, это может произойти, если «при изучении стереометрии конкретная наглядность (рассмотрение пространственных моделей) не будет постепенно уступать место «абстрактной наглядности» (рассмотрению плоских чертежей)». Отчасти соглашаясь с этим, мы считаем, что компьютерная анимация не только создает опору для интуиции, но и является основой для поиска закономерностей, и в этом ее неоценимые достоинства, которыми не следует пренебрегать.

Обратим внимание еще на одну деталь. Анимационный рисунок, как и всякое мультипликационное изображение, состоит из ряда стационарных изображений, сменяющих друг друга. Вместе с тем создается эффект непрерывного изменения. Опираясь на этот эффект, мы изучаем свойства непрерывных преобразований. На это можно указать учащемуся в контексте абстрактного отражения действительности математикой (например, в реальной жизни не существует объекта, удовлетворяющего математическому определению шара).

Отсюда второй принцип (*принцип динамизма*) в обучении математике: *математическое образование должно в полной мере использовать анимационные возможности компьютерных сред как новую дидактическую составляющую современного образования.*

Таким образом, принцип динамизма в некотором смысле представляет собой конкретизацию принципа современности и проявляет себя в использовании анимации в обучении математике.

3. *Третье положение* связано с тем, что анимационное изображение должно соответствовать учебному материалу, целям обучения математической дисциплине и психолого-педагогическим возрастным требованиям, обеспечивая понимание, устраняя прежние трудности и не создавая новых.

Если, например, целью урока является первое знакомство с алгоритмом деления «уголком», то, конечно же, использование при этом соответствующего анимационного рисунка не целесообразно. Лишь когда алгоритм усвоен и нужно его закрепить практикой применения, то целесообразно использовать анимационное изображение, позволяющее легко изменять делимое и делитель, демонстрируя в конце решения ответ в задаче. А когда деление «уголком» используется в алгоритме Евклида для нахождения НОД двух целых чисел, то возникает проблема устранения вычислительных трудностей отвлекающего характера. Само собой напрашивается обращение к компьютеру для устранения этих трудностей (см. приведенные ниже анимационные изображения).

Практика создания и использования компьютерного контента в обучении показывает, что в ряде случаев следует отделять создателей контента от пользователей. Не целесообразно обучать и требовать от всех знания основ и возможностей компьютерных сред, в которых создаются анимационные изображения. На первом месте должен стоять изучаемый математический материал. Создатель компьютерного

сопровождения темы должен предложить такой дидактический продукт, от которого практикующий учитель не смог бы отказаться ввиду его очевидной значимости и результативности использования. Только заинтересовавшись технологией изготовления столь полезных вещей, учитель по собственному убеждению и желанию переходит в разряд создателей компьютерного анимационного сопровождения обучения математике.

Резюмируя сказанное, сформулируем третий принцип (*принцип адекватности и целесообразности*) обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютера: *использование анимации в обучении математике должно соответствовать поставленным целям и задачам обучения.*

4. *Четвертое положение* связано с необходимостью предусмотреть возможность создания анимационного рисунка для решения целого класса (однотипных) задач с помощью процедуры настраивания изображения. Например, создание анимационных изображений тестирующего характера, позволяющих настраивать изображение изменением данных (например, значений параметров). При решении исследовательской задачи следует обеспечить изменение соответствующих параметров для поиска закономерности. Таким образом, создание анимационных геометрических чертежей и математических текстов (анимационный контент) должно быть максимально ориентировано на решение целого класса задач и однотипных исследований.

Отсюда четвертый принцип (*принцип вариативности*) обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютера: *создаваемые анимационные изображения должны быть легко настраиваемы на решение целого ряда однотипных задач и исследований.*

Принцип вариативности характеризует анимационный контент в обучении математике.

5. *Пятое положение* связано с тем, что анимационный рисунок не должен оставлять сомнений в выводах из наблюдений. Вместе с тем эти выводы должны опираться на существование математического доказательства в рамках строгой математической теории.

Часто строгое математическое доказательство утверждения учащемуся «не по зубам» по разным причинам. В этом случае действует дидактический прием умалчивания, когда «строгости» опускаются. Главное в общении с обучаемым быть понятым. Эта ситуация встречается и при использовании анимационных изображений, когда истинность утверждения через примеры настолько убедительна, что у обучаемого не возникает сомнений. В этом случае учитель, зная о существовании строгого доказательства, прибегает к приему умалчивания, убеждения через увиденное.

Отсюда пятый принцип (*принцип убедительности анимационного изображения*) обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютера: *использование анимационного изображения, не заменяя математического доказательства, должно быть убедительным и не оставлять сомнений в иллюстрируемом математическом утверждении, служить наглядным его доказательством, способствующим интуитивному восприятию математики.*

Этот принцип характеризует не только анимационный контент, но и его использование в обучении математике.

Принцип убедительности теснейшим образом связан с развитием критического мышления. Вопрос: «а не обманывают ли меня наблюдения?» должен всегда присутствовать в голове обучаемого и объяснять необходимость строгого математического доказательства.

6. *Шестое положение* связано с тем, что анимационное изображение должно, как правило, предоставлять обучающемуся возможность использовать его, в том числе, и для проведения учебных исследований и экспериментов [61].

При этом эксперименты должны быть не только подсказанными учителем, но и удовлетворять простое любопытство обучаемого. Одной из целей обучения математике является развитие любознательности. Особенно эффективны в этом отношении анимационные возможности компьютерных сред, таких как Живая математика и GeoGebra, или систем компьютерной алгебры, например Maple.

Следует тщательно и всесторонне продумывать роль и значение эксперимента для установления закономерности, особенно это актуально при обучении школьников. Например, эксперимент по выявлению постоянства суммы углов в треугольнике прямыми вычислениями можно заменить, создав проблемную ситуацию следующим образом. Используя одну из анимационных сред, начертим произвольный треугольник и через его вершину проведем прямую, параллельную основанию (можно создать заранее и продемонстрировать математический этюд, связанный с плавным поворотом на 180° вокруг середин боковых сторон треугольника углов при его основании). «Отметьте равные “на глаз” углы на этом чертеже». Ученики отмечают равные накрест лежащие углы. Перемещением вершины треугольника убеждаемся, что равенство отмеченных углов сохраняется. «Какой вывод относительно углов данного треугольника можно сделать?» Или в более подсказывающей форме: «Какой вывод можно сделать относительно суммы углов треугольника?» Ответ: сумма углов треугольника равна развернутому углу. Такое открытие приводит в восторг! Одновременно высвечивается задача строгого доказательства свойства равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых и пересекающей их прямой.

Способ нахождения суммы углов треугольника прямыми вычислениями может натолкнуть ученика на нахождение формулы суммы внутренних углов четырехугольника прямыми вычислениями, что бесперспективно.

Отсюда шестой принцип (*принцип обеспечения исследований*) обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютера: *моделируя объект исследования, анимационное изображение должно обеспечивать экспериментирование с ним.*

Шестой принцип нацелен на использование анимационного контента в исследовательском обучении.

7. *Седьмое положение* заключается в том, что анимационное изображение должно быть понятно пользователю без больших дополнительных разъяснений. Легкость в применении – залог достижения цели обучения. Если это анимационный рисунок для отработки некоторого (вычислительного) алгоритма, то он не должен содержать отвлекающих деталей и обеспечивать цель тренажера. Если это анимационный рисунок для поиска закономерностей, то должны быть обеспечены все условия для экспериментирования, в том числе возможность делать невидимыми посторонние детали. Если это демонстрационный рисунок для усвоения некоторого понятия, то должна быть обеспечена демонстрация вариативности содержания понятия и возможность демонстрации контр-примеров.

Отсюда седьмой принцип (*принцип доступности и автономности*) обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютера: *анимационное изображение должно быть автономным, не требуя дополнительной информации, и простым в использовании.*

Этот принцип является характеристикой анимационного контента, используемого в обучении математике. Совокупность всех сформулированных выше семи принципов составляют теоретическую основу концепции обучения математике с использованием компьютерной анимации (ОМИКА).

Глава 2.

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ В КУРСАХ МАТЕМАТИКИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

§ 2.1. Компьютерная анимация в курсе алгебры

Анимационные возможности среды GeoGebra могут быть эффективно использованы в курсе алгебры педагогического вуза как новое дидактическое средство обучения с целью качественного усвоения алгебраического материала. В рамках этой монографии трудно охватить весь алгебраический материал вузовской программы, поэтому остановимся лишь на отдельных примерах из курса алгебры многочленов (третий семестр дисциплины «Алгебра и теория чисел»). Вместе с тем, уже эти примеры демонстрируют роль и значение компьютерной анимации в обучении [11; 37].

Содержательно-методическая линия теории многочленов.

Основу раздела алгебры многочленов составляют:

- теория делимости многочленов (схема Горнера, теорема Безу, теорема о делении с остатком, алгоритм Евклида нахождения НОД);
- неприводимость многочленов над различными числовыми полями, представление многочленов в виде произведения неприводимых множителей;
- нахождение корней многочленов над различными числовыми полями;
- многочлены от нескольких переменных.

Применение GeoGebra при обучении алгебре студентов педагогического вуза будет способствовать формированию следующих профессиональных компетенций будущих учителей математики: способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2); способность использовать возможности образовательной среды для достижения метапредметных и предметных результатов обучения (ПК-4); готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

Для формирования отмеченных компетенций от обучаемого требуется всестороннее понимание места и значимости изучаемого материала. Профессионально-педагогическая направленность изучения алгебры в вузе побуждает студента, изучая тот или иной раздел курса, четко представлять себе ответ на вопрос «для чего это нужно».

2.1.1. Схема Горнера

Изучение делимости многочленов начинается с рассмотрения этой темы в кольце многочленов над областью целостности, в частности, для многочленов с целыми коэффициентами. Рассматривается деление многочлена на двучлен $x - c$ с помощью схемы Горнера, которая не использует деления, а значит, применима в кольце многочленов над кольцом целых чисел. Студент должен овладеть этим алгоритмом. К слову, этот алгоритм рассматривается в старших классах средней школы по программе профильного обучения.

Эту процедуру нетрудно выполнить с помощью компьютера одной командой. Но в этом случае мы не достигаем поставленной учебной цели: не добьемся усвоения знания алгоритма «схема Горнера» и его уверенного выполнения. Студент должен, что называется, «набить руку» в выполнении алгоритма. В этой связи злободневным является создание «хороших» примеров с заранее расставленными «ловушка-

ми» (например, с нулевыми коэффициентами, что приводит к типичной ошибке игнорирования этих коэффициентов). Анимационный рисунок 2.1.1 решает задачу придумывания нужных примеров. Он позволяет найти многочлен $f(x)$, который при делении на $x - c$ при задуманном c давал бы задуманное неполное частное $q(x)$ и задуманный остаток r .

Изготовление многочлена $f(x)$,
 который при делении на $(x-c)$
 давал бы задуманное неполное частное
 $q(x)$ и задуманный остаток r .

Введите коэффициенты задуманного неполного частного
 $q(x) = q_6x^6 + q_5x^5 + q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$,
 введите коэффициент c и задуманный остаток r .

Искомый многочлен

$$f(x) = 0x^7 + (0)x^6 + (0)x^5 + (2)x^4 + (-7)x^3 + (6)x^2 + (5)x + (-5)$$

Результат деления с остатком:

$$f(x) = (x - (2))(0x^6 + (0)x^5 + (0)x^4 + (2)x^3 + (-3)x^2 + (0)x + (5)) + (5)$$

Рис. 2.1.1

Для отработки правильности заполнения схемы Горнера нами создан тренировочный анимационный рисунок. Ниже он представлен двумя слайдами: рис. 2.1.2 (при значении ползунка $n = 1$) и рис. 2.1.3 (при значении ползунка $n = 2$).

СХЕМА ГОРНЕРА

для деления многочлена

$$f(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

на двучлен $(x-c)$

	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2	q_1	q_0	r

Введите коэффициенты данного многочлена $f(x)$ и число c

Для заполнения схемы Горнера введите формулы нахождения коэффициентов неполного частного $q(x) = q_6x^6 + q_5x^5 + q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$ и остатка r .

Установите $n=2$. $n = 1$

Рис. 2.1.2

СХЕМА ГОРНЕРА

для деления многочлена

$$f(x) = 0x^7 + (0)x^6 + (0)x^5 + (2)x^4 + (-7)x^3 + (6)x^2 + (5)x + (-5)$$

на двучлен $(x - 2)$

	0	0	0	2	-7	6	5	-5
2	0	0	0	2	-3	0	5	5

Результат деления с остатком:

$$f(x) = (x - (2))(0x^6 + (0)x^5 + (0)x^4 + (2)x^3 + (-3)x^2 + (0)x + (5)) + (5)$$

Для решения новой задачи

установите $n=1$

$$\underline{\hspace{1cm}} \quad n = 2$$

Рис. 2.1.3

При $n = 1$ студенту предлагается ввести данный многочлен $f(x)$ (либо из задачника, либо придумать), ввести число c и правильно ввести формулы заполнения схемы Горнера. При установке на ползунке $n = 2$ появляется заполненная схема Горнера.

Ответ можно проверить, введя результат деления – в ответе должен получиться данный многочлен $f(x)$.

Схема Горнера используется для разложения данного многочлена $f(x)$ по степеням двучлена $x - c$, то есть представления многочлена в виде $f(x) = c_n(x - c)^n + \dots + c_1(x - c) + c_0$. Эта задача решается с использованием схемы Горнера.

Вместе с тем можно предложить геометрический метод решения этой задачи (рис. 2.1.4). Он использует преобразования графиков функций.

З а д а ч а. Разложить многочлен $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ по степеням двучлена $x + 3$.

Р е ш е н и е в среде GeoGebra. 1. Строим график данной функции $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$.

2. Строим вектор $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Осуществляем параллельный перенос графика функции $f(x)$ на вектор u и получаем график функции $f_1(x) = 3(x-3)^2 - 2(x-3) - 5$.

4. Обращаемся к CAS (под кнопкой «Вид») и преобразуем $3(x-3)^2 - 2(x-3) - 5$ в многочлен, расположенный по убыванию переменной x . Получаем стандартную форму многочлена $f_1(x)$ в виде $3x^2 - 20x + 28$.

5. Строим график многочлена $g(x) = 3x^2 - 20x + 28$.

6. Строим вектор $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (противоположный вектору u).

7. Выполняем параллельный перенос графика функции $g(x)$ на вектор v . Получаем график данной функции $g_1(x) = f(x)$. Одновременно на Панели объектов получаем искомое разложение многочлена $f(x)$ по степеням $x+3$: $g_1(x) = 3(x+3)^2 - 20(x+3) + 28$.

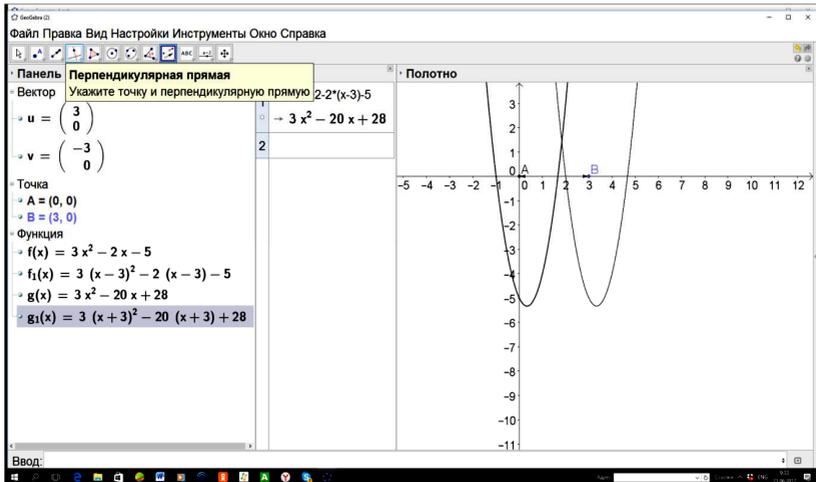


Рис. 2.1.4

Из этого наглядного решения подмечаем следующее короткое алгебраическое решение, которое можно выполнить с использованием кнопки CAS. По данному многочлену $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ записываем многочлен $f_1(x) = 3(x-3)^2 - 2(x-3) - 5$ и, обращаясь к CAS, выполняем преобразование этого многочлена к стандартному виду (команда 4). По стандартному виду $g(x) = 3x^2 - 20x + 28$ пишем ответ: $g_1(x) = 3(x+3)^2 - 20(x+3) + 28$.

Используя анимационную поддержку, с помощью схемы Горнера студенты решают следующие задачи:

1) разделить данный многочлен $f(x)$ с остатком на двучлен $x - c$,

2) разложить данный многочлен $f(x)$ по степеням $x - c$.

3) найти остаток от деления данного многочлена $f(x)$ на $x - c$.

4) выяснить, является ли данное число c корнем многочлена $f(x)$ и если да, то найти кратность этого корня.

5) найти значение многочлена $f(c)$.

6) найти значение многочлена $f(c)$, где значение переменной имеет специальный вид типа $c = 1,9$, либо $c = 2,1$.

7) найти значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при $x = c$.

2.1.2. Деление с остатком

Перейдем к теории делимости многочленов над полем. Здесь «примером для подражания» является деление с остатком для целых чисел. Поэтому начнем с анимационных рисунков для сопровождения темы делимости целых чисел.

Напомним, что разделить с остатком целое число a на целое число $b \neq 0$ это значит, найти неполное частное q и остаток r такие, что $a = b \cdot q + r$ и $0 \leq r < |b|$.

В среде GeoGebra деление с остатком можно выполнить командой «Деление $[a, b]$ ». В результате компьютер выдает список из двух чисел: неполного частного q и остатка r . Чтобы добиться понимания и усвоения сути решения задачи о делении с остатком, целесообразно использовать соответствующие анимационные рисунки. При этом мы рассмотрим два способа решения задачи о делении с остатком для чисел: анимационно-алгебраическим методом и анимационно-геометрическим методом. Первый ближе к практике применения, зато второй можно использовать при доказательстве теоремы о делении с остатком.

1. Деление с остатком анимационно-алгебраическим методом.

Вводим конкретные целые числа a и $b \neq 0$, строим целочисленный ползунок для параметра q , вводим числа $b_1 = \text{abs}(b)$, $c = bq$, $r = a - c$ и делаем надписи: $0 \leq r < b_1$ и $a = b \cdot q + r$. В надписях буквы берем из «Объектов». Задаем условие видимости второй надписи: $0 \leq r < b_1$. Изменяем на ползунке значения q , пока не добьемся верности неравенства $0 \leq r < b_1$. В это время на экране появляется ответ (рис. 2.1.5, изображение взято с компьютерного экрана).

Разделить с остатком a на b -
 значит найти целые q, r такие, что
 $a = bq + r$, где $0 \leq r < |b|$.

$$a = -128 \quad b = 23$$

Подберите $q = \frac{a}{b} = -6$ так, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq r < |b|$:
 $0 \leq 10 < 23$

$$\text{Ответ: } a = b \cdot (-6) + 10$$

Рис. 2.1.5

При вводе новых чисел a и b снова перемещаем точку q на ползунке, добиваясь выполнения неравенства, и получаем новый ответ.

2. Деление с остатком анимационно-геометрическим методом (рис. 2.1.6 *a-d*).

Построение.

1. На оси абсцисс строим точки A и B , изображающие данные числа соответственно a и $b \neq 0$, вводим $a = x(A)$, $b = x(B)$ (абсциссы точек).

2. Строим ползунок для отслеживания неполного частного q .

3. Строим точку $E = (0,1)$ и выполняем геометрическое умножение: соединяем отрезком точки B и E , а затем через точку $Q = (0, q)$ проводим прямую параллельно построенному отрезку. Отмечаем точку C пересечения построенной прямой с осью абсцисс – эта точка изображает произведение bq . Изменяя значение q на ползунке, добиваемся, чтобы точка C , оставаясь левее точки A , как можно ближе подошла к ней. Рисунки 2.1.6 *a-d* демонстрируют деление с остатком чисел $a = \pm 11$ на числа $b = \pm 4$.

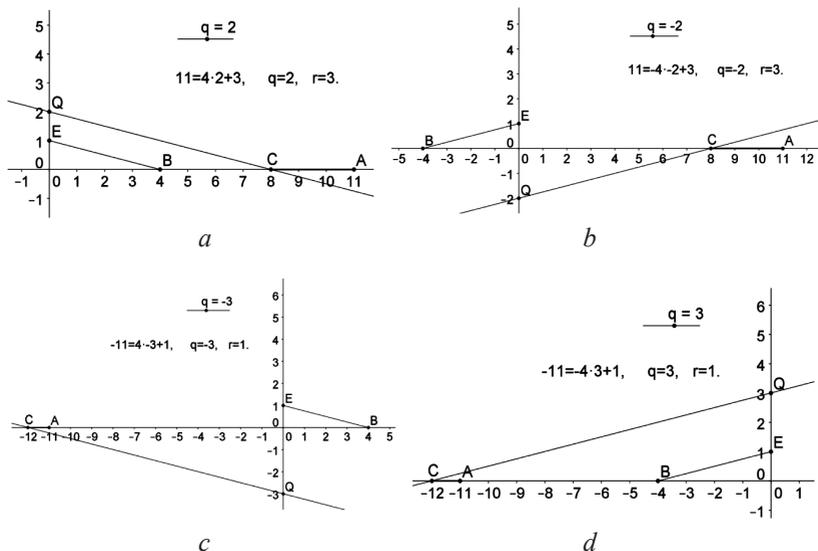


Рис. 2.1.6

клида конечен. Пусть $d = r_n$ – последний отличный от нуля остаток. Рассматривая последовательность равенств алгоритма Евклида снизу вверх, убеждаемся, что $d = r_n$ является общим делителем чисел a и b , а рассматривая равенства сверху вниз, устанавливаем, что d делится на любой общий делитель чисел a и b . Следовательно, $d = \text{НОД}(a, b)$.

Выражая последовательно остатки через a и b , получаем $r_i = a \cdot u_i + b \cdot v_i$, $i = 1, \dots, n$, где рекуррентные последовательности (u_i) и (v_i) задаются следующим образом:

1. Начальные условия: $u_1 = 1$, $u_2 = -q_2$; $v_1 = -q_1$, $v_2 = 1 + q_1 q_2$;

2. Рекуррентные соотношения: $u_{i+2} = u_i + u_{i+1} \cdot q_{i+2}$,
 $v_{i+2} = v_i + v_{i+1} \cdot q_{i+2}$.

На n -ом шаге получаем равенство $d = r_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$, которое называется линейной формой наибольшего общего делителя (НОД). Все сказанное легко переносится на многочлены.

На живом рисунке 2.1.7 реализовано вычисление рекуррентных последовательностей (u_i) , (v_i) , в результате чего находится линейная форма НОД.

Линейная форма НОД

_____ $i = 3$

1) Начало алгоритма.

Введите n .

Установите границы изменения i :

от 0 до 3 и установите $i=0$.

Введите a, b, q_1, \dots, q_5 ;

$u_1=1, u_2=-q_2; v_1=-q_1, v_2=1+q_1q_2$;

установите $i=3+1$

2) Шаг алгоритма.

Введите $u_{3+2}=u_3+u_{3+1} \cdot (-q_{3+2})$

$v_{3+2}=v_3+v_{3+1} \cdot (-q_{3+2})$

☞ Ответ: $d=a \cdot 12 + b \cdot -55 = 243 \cdot 12 + 53 \cdot -55$

Рис. 2.1.7

2.1.4. Деление с остатком для многочленов

Напомним, что разделить с остатком многочлен $a(x)$ на многочлен $b(x)$ означает найти неполное частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ такие, что $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$, где степень остатка $r(x)$ меньше степени делителя $b(x)$.

Программа GeoGebra содержит встроенную команду

$$\text{Div}[\langle \text{делимое} \rangle, \langle \text{делитель} \rangle].$$

С помощью этой команды по данным многочленам $a(x)$ и $b(x)$ можно найти неполное частное $q(x)$ и вычислить остаток $r(x) = a(x) - b(x) \cdot q(x)$. Анимационный рисунок 2.1.8 реализует эту идею. На нем достаточно ввести данные многочлены $a(x)$ и $b(x)$, и компьютер выдает «в подарок» неполное частное $q(x)$ и остаток $r(x)$.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Введите многочлены $a(x)$ и $b(x)$

$$a(x) = 2x^5 - 3x + 5$$

$$b(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4$$

Неполное частное

$$q(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3},$$

остаток

$$r(x) = \frac{-14x^2 - x + 7}{3}.$$

Рис. 2.1.8

На базе анимационного рисунка 2.1.8 создадим анимационный рисунок 2.1.9 для разложения данного многочлена $f(x)$ по степеням многочлена $g(x)$.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Введите многочлены $f(x)$ и $g(x)$

$f(x) = 17x^7 - 16x^6 + 15x^5 - 14x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 11x + 10$	Шаг алгоритма
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$	$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$
$r_0 = 1969x^2 - 435x + 2838$	Введите $a(x)$ и $b(x)$
$r_1(x) = 310x^2 + 138x + 1051$	Неполное частное
$r_2(x) = 17x + 86$	$q(x) = 17x + 86,$ остаток
	$r(x) = 310x^2 + 138x + 1051.$

Запишите остаток под очередным номером.

Если степень неполного частного

не меньше степени $g(x)$,

то запишите его в качестве последнего r_n .

В противном случае ведите $a(x)$ равным $q(x)$

• Ответ:

Введите r_i

$$f(x) = (17x + 86)g(x)^2 + (310x^2 + 138x + 1051)g(x) + (1969x^2 - 435x + 2838)$$

Рис. 2.1.9

2.1.5. Деление многочленов «уголком»

Пусть нужно разделить с остатком данный многочлен $a(x)$ на ненулевой многочлен $b(x)$. Формируем неполное частное $q(x)$. Его первое слагаемое есть одночлен вида $c(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$, где a_n есть старший коэффициент многочлена $a(x)$, а b_m есть старший коэффициент многочлена $b(x)$. Находим произведение $b(x) \cdot c(x)$ (это можно поручить компьютеру) и вычитаем его из делимого $a(x)$. В результате получаем многочлен $r(x) = a(x) - b(x) \cdot q(x)$ (эти вычисления снова поручаем компьютеру), степень которого меньше степени делителя. Теперь полученный остаток берем в качестве $a(x)$ и повторяем описанный шаг. Через конечное число шагов мы получим остаток, степень которого меньше степени делителя $b(x)$, и задача деления с остатком $a(x)$ на $b(x)$ будет решена. Такое пошаговое решение задачи называется делением «уголком». По форме оно совпадает с делением целых чисел «уголком». Анимационный рисунок 2.1.10 реализует этот алгоритм для многочленов.

Выполним деление «уголком» многочлена $f(x) = 2x^5 - 3x + 5$ на многочлен $b(x) = x^2 + x + 1$. В правом нижнем углу рисунка расположен своеобразный «калькулятор», который выполняет шаг алгоритма деления «уголком». При его использовании вводим многочлен $a(x)$ и очередное слагаемое $c(x)$ неполного частного (расположенное под «уголком»). «Калькулятор» выдает произведение $b(x) \cdot c(x)$ и остаток от деления многочлена $a(x)$ на многочлен $b(x)$. Так, на первом шаге деления «уголком» в качестве $a(x)$ вводим данный многочлен $f(x)$.

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ УГОЛКОМ

Введите делимое $f(x)$ и делитель $b(x)$.

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - 3x + 5 \quad \left| \quad x^2 + 3x + 5 \right. \\
 \underline{2x^5 + 6x^4 + 10x^3} \qquad 2x^3 - 6x^2 + 8x + 6 \\
 -6x^4 - 10x^3 - 3x + 5 \\
 \underline{-6x^4 - 18x^3 - 30x^2} \\
 8x^3 + 30x^2 - 3x + 5 \\
 \underline{8x^3 + 24x^2 + 40x} \\
 6x^2 - 43x + 3 \\
 \underline{6x^2 + 18x + 30} \\
 -61x - 27
 \end{array}$$

Калькулятор

Введите делимое $a(x)$, делитель $b(x)$ и очередное слагаемое $c(x)$ формируемого под углом неполного частного.

Запишите $c(x) = 6$,

$b(x) \cdot c(x) = 6x^2 + 18x + 30$

$r(x) = a(x) - b(x) \cdot c(x) = -61x - 27$.

Рис. 2.1.10

Использование анимационного рисунка 2.1.10.

1. Вводим (строкой ввода) многочлены $f(x) = 2x^5 - 3x + 5$ и $b(x) = x^2 + 3x + 5$ и записываем их на Полотне (при формировании надписи берем из Объектов f и b). Располагаем записи одну за другой и строим «уголок» с использованием «ломаной» из списка Инструментов.

2. Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = f(x)$.

3. Записываем (с помощью кнопки АВС) под углом первое слагаемое частного $c(x) = 2x^3$ и вводим его (стро-

кой ввода). В «Калькуляторе» появляются произведение $b(x) \cdot c(x) = 2x^5 + 6x^4 + 10x^3$ и остаток $r(x) = -6x^4 - 10x^3 - 3x + 5$. Записываем их (с помощью кнопки ABC) на нужные места и разделяем отрезком, который строим командой из списка Инструменты.

4. (Повторение пункта 2). Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = -6x^4 - 10x^3 - 3x + 5$.

6. (Повторение пункта 3). Записываем под уголком второе слагаемое частного $c(x) = -6x^2$ и вводим его (Строкой ввода). Снова в «Калькуляторе» появляются готовые произведение $b(x) \cdot c(x) = -6x^4 - 18x^3 - 30x^2$ остаток $r(x) = 8x^3 + 30x^2 - 3x + 5$. Записываем их (с помощью кнопки ABC) на нужные места и делаем подчеркивание.

7. (Повторение пункта 2). Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = 8x^3 + 30x^2 - 3x + 5$.

8. (Повторение пункта 3). Записываем под уголком третье слагаемое частного $c(x) = -6x^2$ и вводим его (Строкой ввода). Снова в «Калькуляторе» появляются готовые произведение $b(x) \cdot c(x) = -6x^4 - 18x^3 - 30x^2$ остаток $r(x) = 8x^3 + 30x^2 - 3x + 5$. Записываем их (с помощью кнопки ABC) на нужные места и делаем подчеркивание.

Записываем готовое произведение $b(x) \cdot c(x) = -2x^4 - 2x^3 - 2x^2$, вычисленное компьютером, и готовый остаток $r(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

9. (Повторение пункта 2). Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

11. (Повторение пункта 3). Вводим (строкой ввода) третье слагаемое частного $c(x) = 2$ и записываем его на Полотне.

12. (Повторение пункта 4). Записываем готовое произведение $b(x) \cdot c(x) = 2x^2 + 2x + 2$ и готовый остаток $r(x) = -5x + 3$.

Деление «уголком» закончено.

Ответ: $f(x) = b(x) \cdot (2x^3 - 2x^2 + 2) + (-5x + 3)$.

Пользуясь анимационным рисунком 2.1.10, уже не надо бояться вычислительных трудностей и можно смело выполнять деление «уголком», «не взирая» на коэффициенты многочленов, ибо вычисления берет на себя компьютер «в лице» «калькулятора».

2.1.6. Алгоритм Евклида для многочленов

Как и для чисел, алгоритм Евклида для многочленов представляет собой последовательность делений с остатком:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= h(x) \times q_1(x) + r_1(x), \text{ степень } r_1(x) < \text{ степени } h(x); \\
 h(x) &= r_1(x) \times q_2(x) + r_2(x), \text{ степень } r_2(x) < \text{ степени } r_1(x); \\
 r_1(x) &= r_2(x) \times q_3(x) + r_3(x), \text{ степень } r_3(x) < \text{ степени } r_2(x); \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_{n-2}(x) &= r_{n-1}(x) \times q_n(x) + r_n(x), \text{ степень } r_n(x) < \text{ степени } r_{n-1}(x); \\
 r_{n-1}(x) &= r_n(x) \times q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x), r_{n+1}(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Анимационный рисунок 2.1.11 реализует эту цепочку делений с остатком. При этом мы применяем деление с остатком для многочленов с использованием команды Div, о которой речь шла в 2.1.4 (см. анимационный рис. 2.1.8).

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

$f(x) = 2x^5 - 3x + 5$	
$h(x) = 3x^4 + 2x + 5$	
$r_1(x) = \frac{-4x^2 - 19x + 15}{3}$	Шаг алгоритма.
$r_2(x) = \frac{-27289x + 19265}{64}$	Делимое $a(x) = \frac{-27289x + 19265}{64}$,
$r_3(x) = \frac{-100982400}{744689521}$	делитель $b(x) = \frac{-100982400}{744689521}$,
$r_4 = 0$	остаток $r(x) = 0$.
	Запишите остаток под очередным номером.

Рис. 2.1.11

Использование анимационного рисунка 2.1.11

1. Вводим данные многочлены $f(x) = 2x^5 - 3x + 5$ и $h(x) = 3x^4 + 2x + 5$.

2. Выполняется первый шаг алгоритма. Вводим $a(x) = f(x)$, $b(x) = h(x)$ и получаем остаток

$$r(x) = \frac{-4x^2 - 19x + 15}{3}, \text{ который записываем под именем } r_1(x).$$

3. Для осуществления второго шага алгоритма Евклида делитель $b(x)$ делим на остаток $r_1(x)$. Для этого вводим

$$a(x) = h(x), \quad b(x) = \frac{-4x^2 - 19x + 15}{3} \text{ и получаем остаток}$$

$$r(x) = \frac{-27289x + 19265}{64}, \text{ который записываем под именем } r_2(x).$$

4. Третий шаг алгоритма. Вводим $a(x) = \frac{-4x^2 - 19x + 15}{3}$,

$$b(x) = \frac{-27289x + 19265}{64} \text{ и получаем } r(x) = \frac{-100982400}{744689521},$$

который записываем, обозначая его $r_3(x)$.

5. На четвертом шаге алгоритма получаем нулевой остаток. Следовательно, $\text{НОД}(f(x), h(x)) = 1$.

Снова компьютер прячет от нас вычисление остатков, что в методическом отношении может оказаться нежелательным. Тогда шаг алгоритма – деление многочленов с остатком, будем выполнять в виде деления «уголком». Тогда технически выполнение алгоритма Евклида несколько усложнится.

2.1.7. Алгоритм нахождения рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами

Эта тема рассматривается в классах с углубленным изучением математики, и анимационный рисунок 2.1.12 может занять достойное место на уроках математики в школе. Рассмотрим использование этого рисунка.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ

$$f(x) = 15x^4 + 29x^3 + 67x^2 - 17x - 30$$

Введите модуль свободного члена m

Введите модуль старшего коэффициента n

Кандидаты в числитель корня
есть числа списка $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
и числа им противоположные.

Кандидаты в знаменатель корня
 $\{1, 3, 5, 15\}$

Введите кандидата a в числитель корня
и кандидата b в знаменатель корня.

Число $\frac{a}{b} = \frac{-3}{5}$ есть корень

Рис. 2.1.12

1. Вводим данный многочлен

$$f(x) = 15x^4 + 29x^3 + 67x^2 - 17x - 30.$$

2. Вводим модуль свободного члена $m = 30$. На Полотне появляется список всех делителей числа m .

3. Вводим модуль старшего коэффициента $n = 15$. На Полотне появляется список всех делителей числа n .

4. Вводим очередного претендента на знаменатель корня (из второго списка), начиная с $b = 1$, и для выбранного знаменателя вводим поочередно кандидатов в числитель корня (число из первого списка и ему противоположное), начиная с $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$, $a = -2$, На Полотне появляется характеристика дроби $\frac{a}{b}$: является она корнем или нет.

2.1.8. Анимационно-графическое нахождение корней многочлена с комплексными коэффициентами

Построение анимационного рисунка 2.1.13 для нахождения корней любого многочлена с комплексными коэффициентами.

1. Строим начало координат $O = (0, 0)$, отмечаем точку R на оси абсцисс и проводим окружность с центром в начале координат, проходящую через точку R . Отмечаем на ней точку (комплексное число) z . Построенную окружность будем называть корневой окружностью.

2. Строим комплексные числа a_0, a_1, a_2, a_3 .

3. Строим (строкой ввода) точку (комплексное число) $w = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ и командой Locus строим геометрическое место таких точек, которое представляет собой образ корневой окружности при преобразовании комплексной плоскости, задаваемом многочленом $w(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$.

Построение закончено.

Пример использования анимационного рисунка: нахождение корней многочлена

$$w(z) = (1.36 - 3.35i)z^3 - (2.76 + 1.4i)z^2 + (-1.2 + 1.32i)z + 3.24 + 1.18i.$$

1. Вводим коэффициенты данного многочлена: $a_3 = 1.36 - 3.35i$, $a_2 = -2.76 - 1.4i$, $a_1 = -1.2 + 1.32i$, $a_0 = 3.24 + 1.18i$. Заметим, что ввести коэффициенты можно также перемещением соответствующих точек.

2. Перемещением точки R по оси абсцисс добиваемся, чтобы кривая, являющаяся образом корневой окружности, проходила через начало координат.

3. Перемещением точки z по корневой окружности добиваемся, чтобы точка w совпала с началом координат. В этом случае положение точки z указывает корень данного многочлена. Его можно прочесть на панели объектов. Именно так найдены корни $z_1 \approx 0.054 + 1.64i$ (рис. 2.1.13a), $z_2 \approx -0.96 - 0.17i$ (рис. 2.1.13b), $z_3 \approx 0.83 - 0.14i$ (рис. 2.1.13c).



Рис. 2.1.13a

$z_2 \approx -0.96 - 0.17i$ (рис. 2.1.13b), $z_3 \approx 0.83 - 0.14i$ (рис. 2.1.13c).



Рис. 2.1.13b



Рис. 2.1.13с

Таким образом, анимационно-графическим способом можно найти приближенные значения корней любого многочлена с заданной точностью.

§ 2.2. Компьютерная анимация в курсе геометрии

В курсе геометрии педагогического вуза можно эффективно использовать любую систему динамической математики, в том числе и среду GeoGebra, о которой идет речь в предыдущем параграфе. Однако мы выбрали среду Живая математика, поскольку ее анимационные возможности при обучении геометрии существенно превосходят аналогичные возможности любой другой системы динамической математики [38; 39].

Геометрический материал программы педагогического вуза содержит семь модулей: аналитическая геометрия, геометрия на плоскости, геометрия в пространстве, геометрические преобразования, проективная геометрия, основы геометрии и дифференциальная геометрия, которые реализуются соответственно в 1, 3, 4, 5, 6, 9 и 10 семестрах.

В данном параграфе мы рассмотрим лишь некоторые темы отдельных модулей курса (учебные пособия [4; 5; 6; 40]), в первую очередь близкие к школьному курсу геометрии.

2.2.1. Линии второго порядка

Тема линии второго порядка изучается в рамках модуля «Аналитическая геометрия курса математики» [4], который читается в первом и втором семестрах. Как известно, одними из основных методов исследования линий второго порядка являются метод координат и векторный метод. Поскольку будущая профессиональная деятельность студентов, обучающихся в педагогическом вузе по профилю математика, связана с работой в общеобразовательных учреждениях по учебным программам, ориентированным преимущественно не на аналитические, а на синтетические методы исследования, мы должны учитывать это обстоятельство. А именно, выводу канонических уравнений линий второго порядка, уравнений касательных к этим линиям и приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду предшествуют определения основных понятий теории кривых второго порядка и изучение некоторых их свойств на языке, близком языку «школьной» геометрии. При построении этих кривых, касательных к ним и изучении их свойств используются богатые конструктивные, анимационные и вычислительные возможности среды Живая математика. Продемонстрируем некоторые аспекты отмеченного выше на примере *эллипса* – одной из основных линий второго порядка.

Эллипс как плоское сечение конуса. Формальному определению эллипса как множества точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных есть величина постоянная, предшествует исследование сечения конуса плоскостью, пересекающей все его образующие. В среде Живая математика создается анимационный чертеж, содержащий коническую поверхность и две сферы Данделена, ка-

сающиеся одновременно конуса (по окружностям k_1 и k_2) и секущей плоскости в точках F_1 и F_2 . Если выбрать произвольную точку M на линии пересечения конуса и плоскости и задать ее анимацию (на рис. 2.2.1 представлены два стоп-кадра этой анимации), то по свойству касательных, проведенных из одной точки к сфере, сумма расстояний от M до точек F_1 и F_2 равна $T_1M + MT_2 = T_1T_2$ – отрезок образующей SM , заключенный между параллельными окружностями k_1 и k_2 , и имеющий по этой причине постоянную длину.

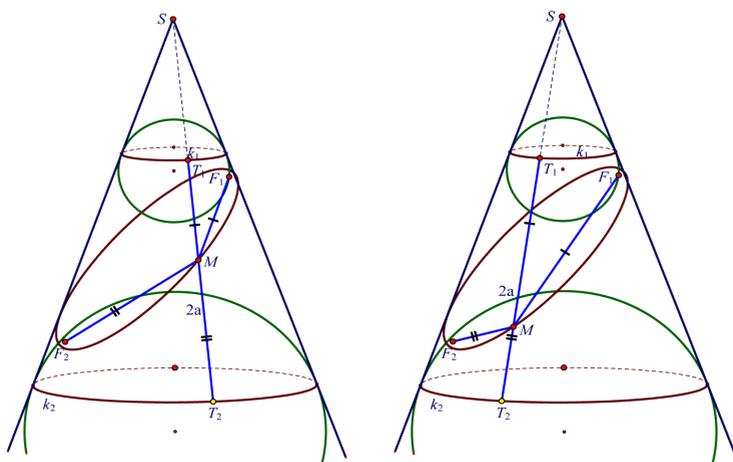


Рис. 2.2.1

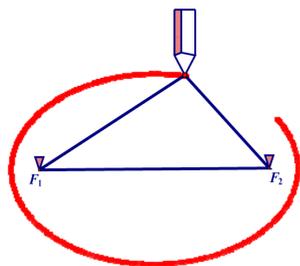


Рис. 2.2.2

Эллипс как след движущейся точки. Для изображения эллипса на рабочем поле Живой математики можно воспользоваться анимационными возможностями этой среды и возможностью точек оставлять след в случае выбора соответствующей опции. На рисунке 2.2.2 представлен стоп-кадр анимационного чер-

тежа, на котором конец карандаша, натягивающего кольцо нити постоянной длины с фокусами-кнопками F_1 и F_2 внутри кольца, вычерчивает эллипс.

Конструктивное построение эллипса, касательная к эллипсу. После виртуального знакомства с этой линией второго порядка предоставляется возможность построить на эллипсе, заданном фокусами и некоторой точкой, любое конечное множество точек. Для этого потребуется ввести понятие касательной к эллипсу, которая определяется как прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Доказывается теорема о том, что если M – произвольная точка эллипса с заданными фокусами, то прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом с вершиной в M и сторонами, проходящими через фокусы, представляет собой касательную к эллипсу. Справедливо и обратное утверждение.

Для иллюстрации доказательства на рабочем поле Живой математики создается динамический чертеж. Построение начинается с изображения произвольных точек-фокусов F_1 и F_2 и точки M , не лежащей на отрезке F_1F_2 (рис. 2.2.3).

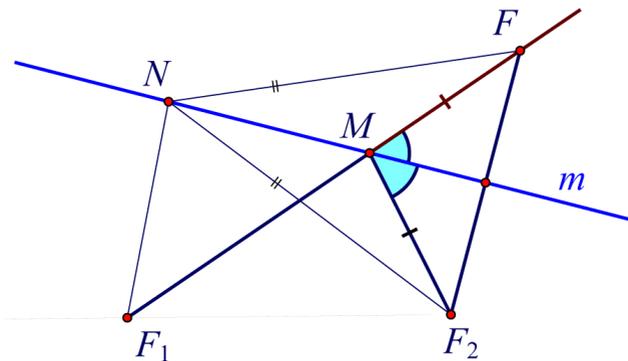


Рис. 2.2.3

Далее строится луч F_1M и прямая m , содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1MF_2 . Доказывается, что эллипс

w , задаваемый фокусами F_1, F_2 и точкой M , имеет с прямой t одну общую точку M . Для этого на прямой t выбирается произвольная точка N , отличная от M , и доказывается, что суммы расстояний от M и N до фокусов не равны. Для этого выполняется дополнительное построение: на луче F_1M от точки M откладывается отрезок MF , равный отрезку MF_2 . Поскольку треугольник F_2MF – равнобедренный, то t – серединный перпендикуляр к отрезку F_2F . Но тогда точки M и N равноудалены от концов этого отрезка. Заменяем сумму расстояний от M до фокусов на длину отрезка F_1F , а отрезок F_2N на равный ему отрезок FN . Из неравенства треугольника F_1NF получаем утверждение о том, что сумма расстояний от N до фокусов больше, чем сумма расстояний от M до фокусов.

Из доказанного утверждения следует, что эллипс w , заданный фокусами F_1, F_2 и точкой M , представляет собой множество точек L пересечения радиуса F_1K (K – произвольная точка окружности c_1 с центром в F_1 и радиуса $F_1F = F_1M + MF_2$) с серединным перпендикуляром n к отрезку F_2K (рис. 2.2.4). Перемещая точку K по окружности c_1 , мы можем, таким образом, построить любое конечное множество точек L на эллипсе w .

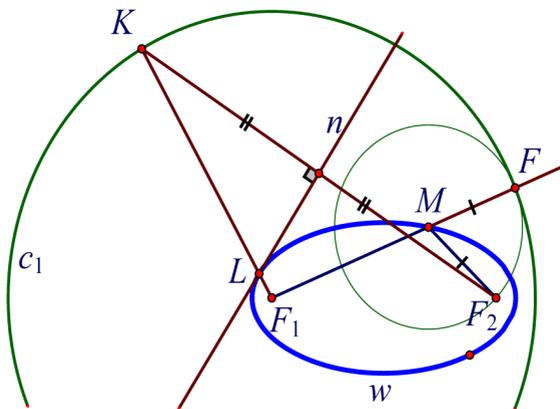


Рис. 2.2.4

Создание инструмента, изображающего эллипс по фокусам и точке. Используя возможность Живой математики строить геометрические места точек и создавать собственные инструменты, мы можем теперь, в соответствии с приведенным выше алгоритмом, не только построить эллипс, но и создать собственный инструмент «эллипс по фокусам и точке». Для этого достаточно выполнить следующие действия.

А) На экране Живой математики последовательно построить: 1) произвольные точки F_1 , F_2 и M ; 2) луч F_1M ; 3) вспомогательную окружность с центром M и радиуса F_2M ; 4) точку F пересечения вспомогательной окружности с лучом F_1M , лежащую вне луча MF_1 ; 5) окружность c_1 с центром F_1 и радиуса F_1F ; 6) произвольную точку K на окружности c_1 ; 7) радиус F_1K ; 8) отрезок F_2K ; 8) серединный перпендикуляр n к отрезку F_2K ; 9) точку L пересечения радиуса F_1K и серединного перпендикуляра n .

Б) Подсветить точку K , затем точку L , в меню команд «Построения» выбрать опцию «Геометрическое место». На рабочем поле появится изображение эллипса w .

В) Спрятать изображения всех построенных фигур, кроме фокусов F_1 и F_2 , точки M и самого эллипса w . Спрятать наименования всех оставшихся фигур: трех точек и эллипса. Зайти в инструментальное меню на вертикальной панели (девятая кнопка сверху) и выбрать опцию «Создать новый инструмент...». В появившемся окне присвоить ему имя. Инструмент готов к эксплуатации.

Фокальное свойство эллипса. Используя созданный инструмент построения эллипса по фокусам и точке, доказанное выше необходимое и достаточное условие принадлежности прямой к семейству касательных эллипса в произвольной его точке, а также анимационные возможности Живой математики, можно без труда не только проиллюстрировать, но и обосновать фокальное свойство эллипса. Для этого по заданным фокусам F_1 и F_2 и некоторой точке A строится

эллипс, на нем выбирается произвольная точка M , строится луч F_1M , затем биссектриса угла, смежного углу F_1MF_2 , и, наконец, касательная как прямая m , содержащая эту биссектрису (рис. 2.2.5). Но тогда углы 1 и 3, очевидно, равны, что позволяет сформулировать фокальное свойство: если источник света поместить в одном из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся во втором его фокусе.

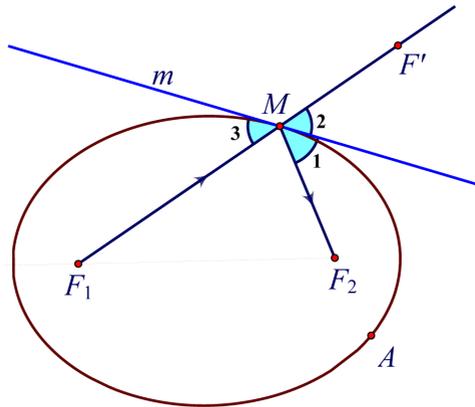


Рис. 2.2.5

Создание инструмента, изображающего касательную к эллипсу. Используя аналогичный прием, можно построить циркулем и линейкой касательную к эллипсу w , заданному фокусами F_1 и F_2 и некоторой точкой M , проходящую через точку T , лежащую вне эллипса, а также создать собственный инструмент «касательные к эллипсу, заданному фокусами и точкой». Для этого достаточно выполнить следующие действия.

А) На экране Живой математики последовательно построить (рис. 2.2.6): 1) произвольные точки F_1 , F_2 и M (при необходимости по этим точкам и собственному инструменту можно построить эллипс w); 2) луч F_1M ; 3) вспомогательную окружность с центром M и радиуса MF_2 ; 4) точку F пересечения вспомогательной окружности с лучом F_1M , лежащую вне

отрезка F_1M ; 5) окружность c_1 с центром F_1 и радиуса F_1F ; 6) окружность c_2 с центром в точке T и радиуса TF_2 ; 7) точки пересечения A и B окружностей c_1 и c_2 ; 8) отрезок F_2A и серединный перпендикуляр m к нему, который и является первой касательной к эллипсу; 9) отрезок F_2B и серединный перпендикуляр n к нему, который является второй касательной к эллипсу; 10) точку C касания прямой m как точку пересечения отрезка F_1A и прямой m ; 11) точку D касания прямой n как точку пересечения отрезка F_1B и прямой n .

Б) Спрятать все построения, кроме точек F_1 , F_2 , M , T , C и D , а также касательных m и n и эллипса w (в том случае, если эллипс был построен), скрыть все имена, подсвечить оставшиеся объекты, зайти в инструментальное меню и создать собственный инструмент «касательные к эллипсу, заданному фокусами и точкой».

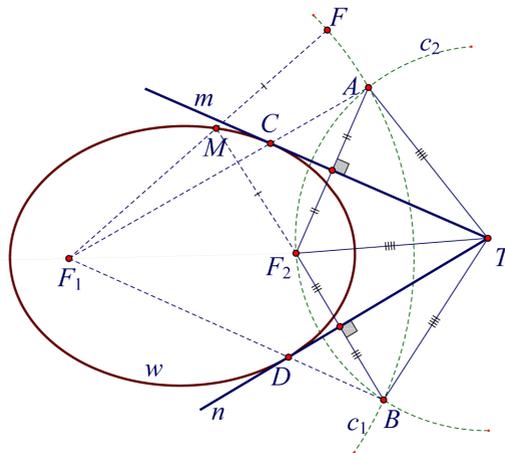


Рис. 2.2.6

Используя ручную анимацию, можно показать, что в случае, если точка T лежит вне эллипса, то касательных будет две, если на эллипсе, то – одна, если T поместить внутрь эллипса, то касательных не будет.

Лабораторная работа. Предложенный в этом пункте материал может выполнять поддержку с помощью среды Живая математика параграфа 22 «Эллипс» главы IV «Кривые и графы» школьного учебника [56] по геометрии для учащихся 7 – 9 классов, который отмечен авторами звездочкой (*), т.е. является дополнительным материалом. Завершается параграф лабораторной работой, которую учитель может сопроводить анимационными математическими этюдами в среде Живая математика. В таблице 1 приведено содержание этой лабораторной работы и соответствующие задания для студентов по разработке этюдов.

Таблица 1

Содержание лабораторной работы по теме «Эллипс» (для школьников)	Задание по разработке математического этюда (для студентов)
1	2
<p><i>Способ № 1 получения эллипса из листа бумаги</i></p> <p>Вырежьте из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставьте точку F. Сложите круг так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a. Разогните круг и снова согните его, совместив точку F с другой точкой на окружности. Сделайте так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Какую форму будет иметь граница участка внутри этих сгибов? Чем будет являться каждый сгиб по отношению к этой границе?</p>	<p><i>Виртуальный аналог способа № 1</i></p> <p>На рабочем поле среды Живая математика постройте изображение окружности c_1 с центром в точке O и некоторого радиуса. Постройте внутри окружности некоторую точку $F \neq O$, поместите на окружность точку F'. Постройте хорду a, которую высекает окружность на серединном перпендикуляре к отрезку FF'. Задайте анимацию F' и заставьте хорду a оставлять след. Какую форму будет иметь граница неокрашенного хордами участка круга? Чем будет являться каждая хорда по отношению к этой границе?</p>

1	2
<p><i>Способ № 2 получения эллипса с помощью сковороды и картонного круга, диаметром вдвое меньше диаметра сковороды.</i></p> <p>Клейкой лентой укрепите на дне сковороды лист бумаги. Положите картонный круг на сковороду, продырявив его в любом месте остро отточенным карандашом.</p> <p>Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острое карандаша к бумаге, то какую линию вычертит карандаш?</p>	<p><i>Виртуальный аналог способа № 2</i></p> <p>На рабочем поле среды Живая математика постройте изображение сковороды в виде окружности некоторого радиуса и ручки. Постройте изображение второй окружности, радиуса в два раза меньшего, радиуса окружности сковороды, касающейся ее с внутренней стороны. Пусть меньшая окружность катится по окружности сковороды. Зафиксируйте внутри подвижного круга несколько точек. Какие траектории они вычертят?</p>

На рисунке 2.2.7 представлен итоговый стоп-кадр математического этюда, имитирующего построение эллипса с помощью перегибания листа бумаги в форме круга.

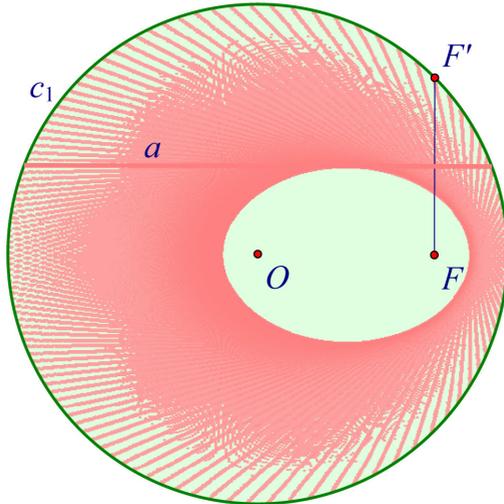


Рис. 2.2.7

На рисунке 2.2.8 представлен итоговый стоп-кадр математического этюда, имитирующего построение эллипса с помощью сковороды и картонного круга, диаметром вдвое меньшем диаметра сковороды.

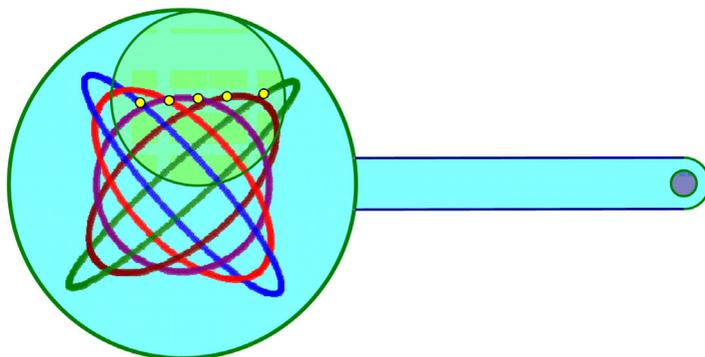


Рис. 2.2.8

2.2.2. Геометрические построения на плоскости

Тема «Геометрические построения на плоскости» изучается в рамках модуля «Геометрия на плоскости» [4] основного курса геометрии. Одним из основных методов решения задач на построение, как в школе, так и в педагогическом вузе, является метод пересечения множеств. Для успешного овладения им необходимо научиться строить множества, о пересечении которых идет речь в этом методе. Имеются в виду множества, каждая точка которых удовлетворяет некоторому условию. Исторически сложилось так, что эти множества называют еще геометрическими местами точек. Несмотря на то, что этот термин с математической точки зрения не совсем удачный, мы его также будем использовать, обозначая иногда аббревиатурой ГМТ. Богатые анимационные и конструктивные возможности Живой математики предоставляют уникальную возможность для установления вида ГМТ, его построения и исследования [42].

Алгебраический метод, в отличие от метода ГМТ, в школьном курсе геометрии в явном виде не представлен. Однако в программе курса геометрии педвуза он присутствует, поскольку будущие учителя математики должны владеть этим универсальным методом решения задач на построение. В сравнении с методом пересечения алгебраический метод имеет в большей степени теоретическую основу. Несмотря на явную практико-ориентированную направленность Живой математики, эта среда может успешно применяться и при обучении алгебраическому методу решения конструктивных задач. Наряду с традиционным моделированием динамических конфигураций, эта среда предоставляет возможность создавать собственные инструменты построения отрезков по заданным формулам любой сложности, что имеет особое значение при решении задач алгебраическим методом.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции ОМИКА, заявленной в главе 1. Причем обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из двух основных форм обучения используется при его изучении.

Лекционная форма обучения. Помимо традиционного материала необходимо на лекциях уделить внимание конструктивным и анимационным возможностям среды Живая математика. Рекомендуется продемонстрировать создание собственных инструментов пользователя, позволяющих оперативно строить искомые фигуры при решении конструктивных задач на построение циркулем и линейкой.

Несмотря на то, что в курсе геометрии основной школы предусматривается решение достаточно большого количества задач на построение, учителя не всегда находят время уделить им внимание. По этой причине многие студен-

ты не могут выполнить даже элементарные построения. В связи с этим на лекции рекомендуется рассмотреть решение некоторых из них, причем с использованием виртуальных инструментов. В среду Живая математика встроены команды, которые позволяют пользователю выполнять некоторые элементарные построения напрямик, минуя необходимые для этого построения циркулем и линейкой. Например, делить отрезок и угол пополам, проводить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную или параллельную данной прямой. Для этого достаточно выделить данные фигуры и обратиться в меню «Построения» к соответствующей команде.

На лекции рекомендуется продемонстрировать алгоритм создания собственных динамических инструментов пользователя, позволяющих в автоматическом режиме выполнять и другие элементарные геометрические построения. Естественно, пользоваться как встроенными в среду командами, так и самостоятельно созданными инструментами рекомендуется лишь после того, как эти построения обучающиеся будут выполнять циркулем и линейкой с пониманием и безошибочно.

На лекции можно рассмотреть примеры создания двух (при дефиците учебного времени можно ограничиться и одним) несложных собственных инструментов пользователя.

Пример 1. Создать собственный инструмент решения элементарной задачи: *на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному отрезку.*

На рабочем поле среды Живая математика строится произвольный отрезок AB и луч CD . Чтобы отложить на луче CD от точки C отрезок, равный AB , достаточно построить окружность s_1 с центром C и радиуса AB и найти общую точку E луча и окружности (рис. 2.2.9). Далее построить отрезок CE .

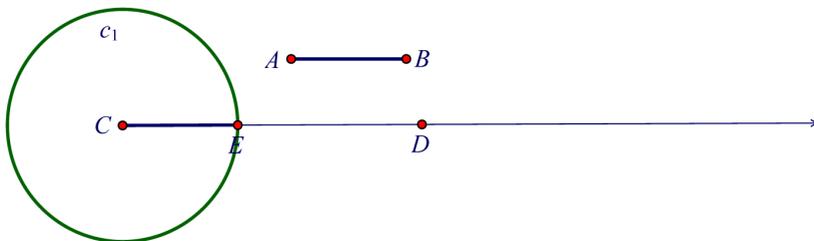


Рис. 2.2.9

После этого необходимо спрятать вспомогательную окружность и данный луч, спрятать имена всех точек, подсветить мышкой внутренность отрезка AB (концы отрезка подсвечивать не надо), точки C , D и E и отрезок CE . Далее, нажать на кнопку создания нового или использования готового инструмента (будем называть эту кнопку *инструментальной*) вертикальной панели инструментов, в появившемся окне выбрать команду «Создать новый инструмент...», в следующем окне дать название инструменту, например, «Отрезок, равный данному».

Необходимо показать студентам, как применяется этот инструмент. Чтобы им воспользоваться, достаточно нажать на инструментальную кнопку, выбрать инструмент с нужным именем, подсветить данный отрезок (точнее, его внутреннюю область), затем подсветить начало луча и любую точку на луче (если луча нет, то достаточно щелкнуть мышкой два раза, изобразив тем самым две точки: начало луча и точку на луче). На рабочем поле появится искомый отрезок.

Пример 2. Создать собственный инструмент решения элементарной задачи: *от данного луча в данную полуплоскость отложить угол, равный данному углу.*

На рабочем поле изображается данный угол ABC и луч DE (рис. 2.2.10). Будем считать, что угол ABC – ориентированный. Выбор ориентации зависит от того, в какую полуплоскость относительно прямой DE следует откладывать

искомый угол EDF , равный углу ABC . Условимся считать, что данный угол ABC и искомый угол EDF должны одинаково ориентировать плоскость.

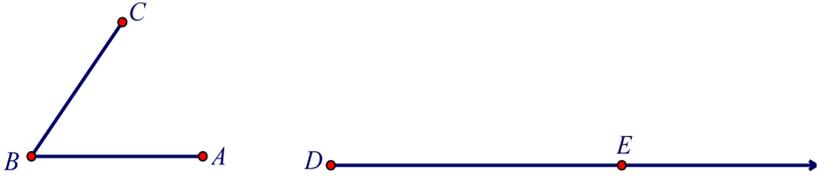


Рис. 2.2.10

При создании инструмента алгоритм построения луча DF (стороны искомого угла EDF) будет отличаться от построения того же луча при непосредственном решении элементарной задачи. Опишем его как следующую последовательность действий. Подсветим точку D и в меню «Преобразования» выберем команду «Отметить центр». Подсветим последовательно точки A , B и C , затем в том же меню выберем команду «Отметить угол». Подсветим теперь луч DE и в меню «Преобразования» выберем команду «Повернуть...». На рабочем поле появится луч, являющийся образом луча DE при повороте вокруг D на ориентированный угол ABC . На этом луче отложим отрезок DF , равный данному отрезку BC (рис. 2.2.11). Если обход по точкам данного угла ABC выполнить в противоположном направлении, то луч DF расположится в другой полуплоскости относительно прямой DE .

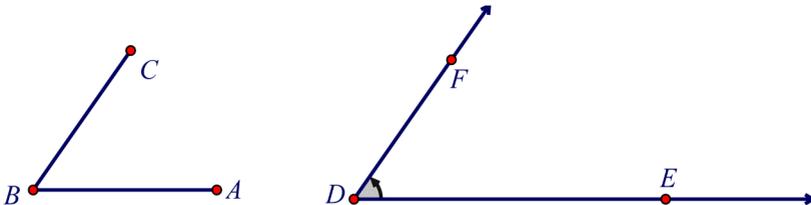


Рис. 2.2.11

Для создания собственного инструмента спрячем луч DE (оставив точки D и E) и дугу угла при вершине D . Спрячем имена всех точек. Последовательно подсветим все точки и луч на рабочем поле, обратимся к команде «Создать новый инструмент», присвоим инструменту имя «Построение угла, равного данному». Собственный инструмент готов.

Применение созданных инструментов при решении геометрических задач на построение циркулем и линейки можно продемонстрировать на следующем примере.

Пример 3. Решить элементарную задачу: *построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам*. При построении искомой фигуры рекомендуется использовать собственные инструменты.

На рабочем поле среды Живая математика строятся данные фигуры: отрезок a , углы DEF и GHI (рис. 2.2.12).

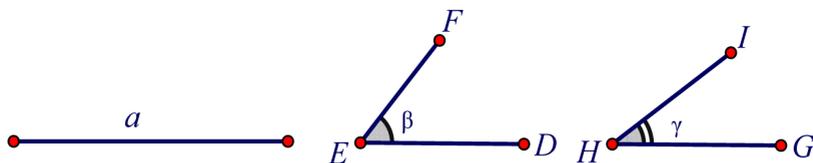


Рис. 2.2.12

Далее выполняются следующие построения с использованием собственных инструментов. Строится отрезок BC , равный данному отрезку a (собственный инструмент «Отрезок равный данному»), затем строится луч BX такой, что угол CBX равен данному углу DEF (инструмент «Построение угла равного данному», вершины угла DEF подсвечиваются в следующей последовательности: сначала D , затем E и, наконец, F).

Далее строится луч CY , такой, что угол BCY равен углу GHI (инструмент «Построение угла равного данному», обход вершин угла GHI осуществляется в направлении: I, H, G).

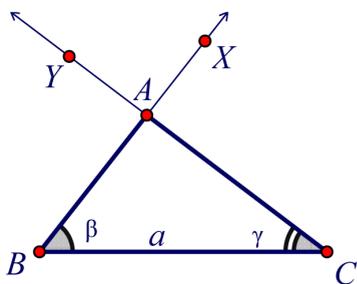


Рис. 2.2.13

Осталось построить точку A пересечения лучей BX и CY . Искомый треугольник ABC построен (рис. 2.2.13).

В рассмотренной задаче ручная анимация успешно используется при проведении исследования найденного решения. Ухватившись мышкой за один из концов данного отрезка

a и изменяя его размеры, можно экспериментально убедиться в том, что это не приводит к исчезновению искомого треугольника. Однако уже при изменении величин данных углов, в случае, если их сумма окажется больше развернутого угла, лучи BX и CY уже не пересекутся. В этом случае задача не будет иметь решения. Студентам следует постоянно напоминать о том, что сформулированную с помощью компьютерной анимации гипотезу необходимо обосновать, используя для этого соответствующие теоремы планиметрии.

На лекции, посвященной решению задач на построение методом пересечения множеств, в том числе с использованием Живой математики, помимо традиционного материала необходимо рассмотреть применение компьютерной анимации для нахождения и построения множества точек, обладающих некоторым свойством (геометрические места точек).

В среде Живая математика имеется готовый инструмент, который позволяет строить одно из важнейших ГМТ, а именно множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки, т.е. окружность. Кроме этого, пользователю предоставлена возможность самостоятельно создавать практически любые собственные инструменты, которые ему необходимы для решения тех или иных задач. На лекции можно рассмотреть следующий простой пример, с

помощью которого можно продемонстрировать не только создание нового инструмента, но и использование компьютерной анимации для формирования гипотезы о виде ГМТ.

Пример 4. Создать собственный инструмент построения множества точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек.

На рабочем поле строится изображение двух данных точек A и B (рис. 2.2.14). Далее следует построить произвольную точку M плоскости, равноудаленную от A и B . Для этого можно изобразить две окружности с центрами в точках A и B и имеющими один и тот же радиус r , длина которого может принимать любое значение $\geq AB/2$. Точки пересечения построенных пар окружностей, очевидно, и будут принадлежать искомому ГМТ. Для создания соответствующего динамического чертежа можно построить сначала середину C отрезка AB , затем луч CB , на луче CB выбрать произвольную точку D и, наконец, построить отрезок AD , который будет играть роль переменного радиуса r . Меняя положение точки D на луче CB , мы тем самым будем изменять величину отрезка r .

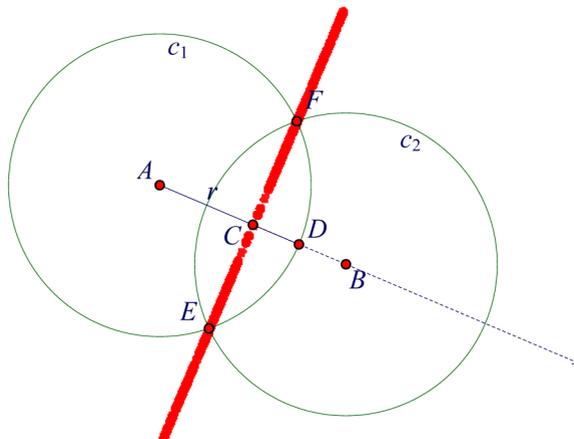


Рис. 2.2.14

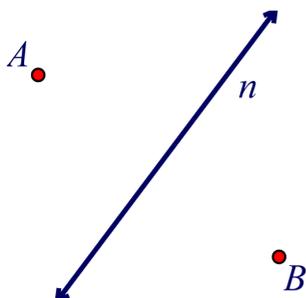


Рис. 2.2.15

Построим окружности c_1 и c_2 радиуса r и с центрами в A и B , найдем точки их пересечения E и F . Заставим точки E и F оставлять след. Перемещая точку D по лучу CB , зависящие от нее точки E и F вычертят кривую, похожую на фрагмент серединного перпендикуляра (рис. 2.2.15).

После того как компьютерный анимационный эксперимент «подсказал» нам вид искомого ГМТ, следует провести аккуратное доказательство того, что серединный перпендикуляр к отрезку AB действительно представляет собой искомое множество точек, равноудаленных от A и B .

Для создания собственного инструмента необходимо последовательно построить: точки A и B , отрезок AB , середину C отрезка AB , перпендикуляр n к отрезку AB , проходящий через C . Далее спрятать все построения, кроме точек A , B и прямой n (рис. 2.2.15). Имена точек и прямой рекомендуется тоже спрятать. Наконец следует подсветить точки и прямую, выбрать команду «Создать новый инструмент...», присвоить инструменту имя. Инструмент создан.

На лекциях, посвященных алгебраическому методу (а также на лабораторно-практических занятиях), рекомендуется продемонстрировать анимационные возможности среды Живая математика, позволяющие повысить эффективность обучения решению задач на построение циркулем и линейкой этим методом. *Во-первых*, это возможность создавать анимационные модели анализируемых в процессе решения задачи геометрических конфигураций. *Во-вторых*, это возможность осуществлять компьютерное сопровождение этапа построения, результатом которого является динамическая модель искомой фигуры. *В-третьих*, это возмож-

ность создавать собственные динамические инструменты пользователя, позволяющие строить отрезки, длины которых выражаются через длины данных отрезков с помощью арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. *В-четвертых*, это возможность осуществлять как самопроверку найденного решения, так и исследование этого решения. И, наконец, *в-пятых*, это возможность создавать математические этюды, демонстрирующие применение экзотических инструментов (линейка со вставкой, два прямых угла, томагавк и другие) при решении задач, неразрешимых циркулем и линейкой.

В частности, на лекции можно рассмотреть несложную задачу, при решении которой естественным образом используется алгебраический метод.

Задача 1. Построить квадрат, площадь которого в три раза больше площади данного квадрата.

При проведении анализа на рабочем поле среды Живая математика строится данный квадрат $ABCD$ (рис. 2.2.16), длина стороны которого зависит от параметра a (можно создать собственный инструмент «Квадрат по стороне-параметру»). Положим, например, $a = 2,98$ см. Используя меню измерения, найдем площадь S_{ABCD} этого квадрата.

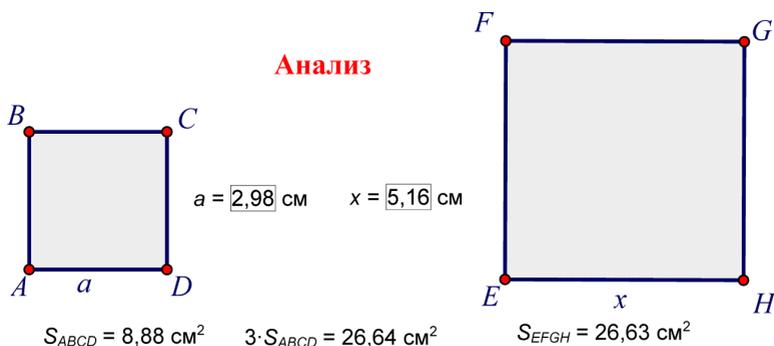


Рис. 2.2.16

С помощью графического калькулятора найдем величину $3S_{ABCD}$. Далее, построим квадрат $EFGH$, длина стороны которого зависит от параметра x . С помощью клавиш управления значением параметра («+», «-») подберем x так, чтобы площадь $EFGH$ мало отличалась от утроенной площади квадрата $ABCD$.

Искомое соотношение между отрезками a и x установить несложно. Согласно условию задачи оно имеет вид $x^2 = 3a^2$, отсюда, $x = a\sqrt{3}$. Студентам можно предложить самостоятельно найти способ построения отрезка x . Один из возможных вариантов – построение прямоугольного треугольника с катетом a и гипотенузой $2a$, например, $\triangle ATE$ (рис. 2.2.17).

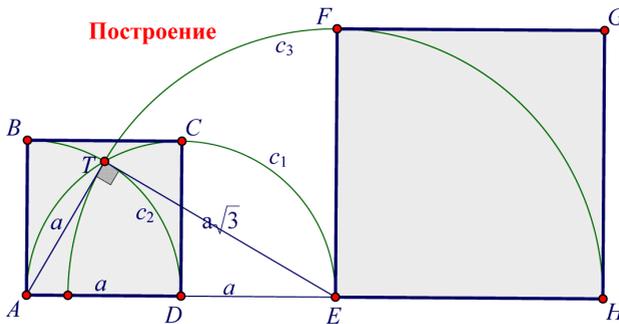


Рис. 2.2.17

На рисунке 2.2.17 по заданному квадрату $ABCD$ представлено построение искомого квадрата $EFGH$ в соответствии с предложенным способом решения задачи. Последовательно строятся: 1) точка E такая, что D – середина отрезка AE ; 2) окружность c_1 с центром D и радиуса AD ; 3) окружность c_2 с центром в A и радиуса AB ; 4) T – общая точка окружностей c_1 и c_2 ; 5) окружность c_3 с центром в E и радиуса ET ; 6) H – общая точка c_3 и луча DE ; 7) F – точка c_3 , для которой EF – перпендикулярна EH , 8) точка G такая, что $EFGH$ – квадрат, искомая фигура.

На лекции, связанной с обсуждением классических задач древности, неразрешимых циркулем и линейкой, можно продемонстрировать студентам созданные в среде Живая математика анимационные этюды, связанные с решением некоторых из этих задач специальными инструментами [44].

На рисунке 2.2.18 представлен итоговый стоп-кадр компьютерной анимации, демонстрирующей алгоритм Архимеда построения угла EAF , величина которого равна одной трети данного угла COD , с помощью линейки со вставкой и циркуля. Перед демонстрацией этюда одному из желающих студентов можно предложить самостоятельно расположить линейку, перемещая ее за точки A и F так, чтобы она образовывала искомый угол с прямой OC .

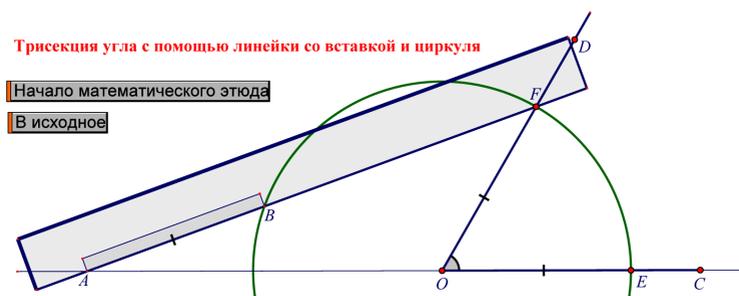


Рис. 2.2.18

Лабораторно-практическая форма обучения. На лабораторно-практических занятиях необходимо скрупулезно проанализировать и с помощью традиционных инструментов решить все элементарные задачи. Перед тем, как перейти к более сложным задачам, следует обсудить общую схему решения таких задач: анализ, построение, доказательство и исследование.

Далее можно рассмотреть несложную задачу с подробным описанием всех четырех этапов. Затем этап решения этой задачи, связанный с процедурой построения искомой

фигуры, рекомендуется провести с использованием среды Живая математика, создать собственный инструмент, позволяющий автоматизировать процесс построения.

Чтобы продемонстрировать студентам способ применения в конкретной ситуации созданного инструмента, можно рассмотреть две задачи: в первой – помимо решения задачи создать собственный инструмент, во второй задаче для ее решения использовать инструмент, созданный в предыдущей задаче. Например, можно рассмотреть следующие 2 задачи.

Задача 1. Через данную точку провести касательную к данной окружности.

Опуская этапы классической схемы решения этой задачи, рассмотрим построение искомой касательной с использованием конструктивных возможностей компьютерной среды Живая математика. На рабочем поле среды последовательно строятся (рис. 2.2.19): 1) произвольная окружность c_1 с центром в точке O и точкой F , лежащей на окружности; 2) произвольная точка A , лежащая вне окружности c_1 ; 3) отрезок OA ; 4) середина B отрезка OA ; 5) окружность c_2 с центром в точке B и радиуса AB ; 6) точки пересечения C и D окружностей c_1 и c_2 ; 7) прямые AC и AD – искомые касательные к окружности c_1 .

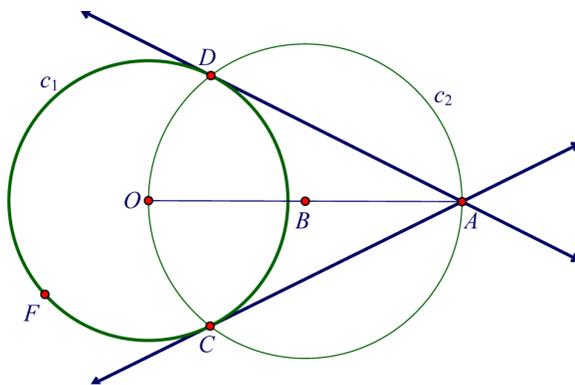


Рис. 2.2.19

Создадим собственный инструмент построения касательных к окружности. Для этого скроем все вспомогательные построения, оставив только окружность c_1 , точки O , F , A и прямые AC и AD . Спрячем затем имена всех присутствующих на рабочем поле фигур, подсветим эти фигуры и воспользуемся командой «Создать новый инструмент...», получим собственный инструмент «Касательные к окружности». Анимационные возможности Живой математики позволяют, перемещая точку A , визуализировать условия существования касательных в зависимости от взаимного расположения окружности и точки (рис. 2.2.20).

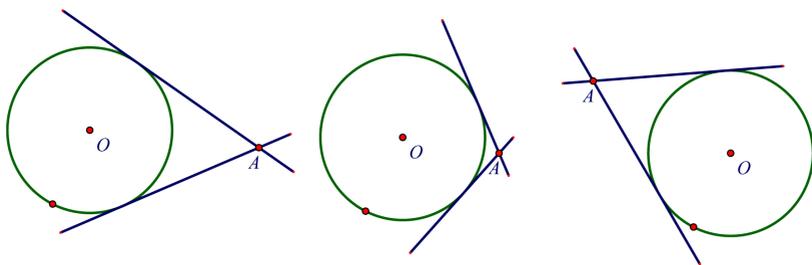


Рис. 2.2.20

В качестве второй – можно рассмотреть следующую задачу, решение которой мы опустим.

Задача 2. Для двух данных окружностей построить общую касательную.

Чтобы успешно решать конструктивные задачи на построение методом пересечения множеств (методом ГМТ), необходимо не только хорошо знать основные множества, удовлетворяющие определенным условиям, но и уметь самостоятельно строить такие множества. Большое значение при нахождении множества точек, удовлетворяющих некоторому условию, имеет этап анализа, благодаря которому обучающийся должен догадаться о том, какое множество

является искомым. Именно на этом этапе существенную помощь может оказать использование компьютерной анимации. В качестве примеров рассмотрим следующие задачи.

Задача 3. *Даны две точки A и B . Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B .*

Для визуального сопровождения анализа задачи на рабочем поле Живой математики построим две точки A и B , через B проведем произвольную прямую BC . Из точки A опустим перпендикуляр AM на прямую BC (рис. 2.2.21).

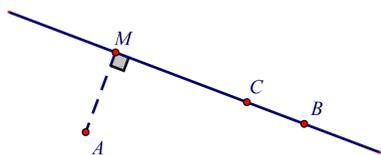


Рис. 2.2.21

Перемещая мышкой точку C , и наблюдая за точкой M , можно предположить, что она перемещается по некоторой

линии, напоминающей дугу окружности. Если «поручить» точке M оставлять след, то перемещение будет «материализовано» в виде конкретной линии, цвет которой будет совпадать с цветом точки M . Неудобство такого способа заключается в том, что построенная траектория точки M не является динамичной: во-первых, ее нельзя перемещать мышкой, во-вторых, при изменении положений точек A и B линия будет оставаться без изменения.

Целесообразно в данном случае использовать кнопочную анимацию. Для этого надо построить некоторую вспомогательную окружность с центром в точке B и поместить точку C на эту окружность. Перемещая C по окружности (сделать это можно с помощью анимационной кнопки), мы тем самым можем быть уверенными, что прямая BC пробежит всевозможные прямые пучка с центром в точке B . Подсветим теперь точку C , затем точку M и воспользуемся командой «Геометрическое место» меню команд «Построения». На рабочем поле появится окружность диаметра AB .

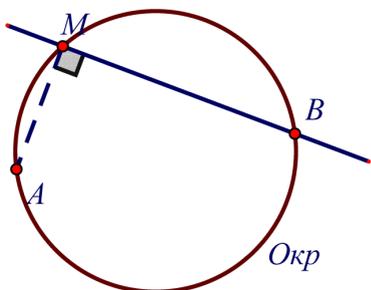


Рис. 2.2.22

Спрячем вспомогательную окружность и точку C , получим следующее изображение (рис. 2.2.22). Чертеж, представленный на этом рисунке, является динамическим, т.е. при изменении положений точек A и B окружность будет изменяться, но неизменным

будет оставаться свойство диаметральной противоположности точек A и B .

З а д а ч а 4. *На плоскости даны окружность и точка. Найти множество середин хорд, высекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку.*

На рабочем поле строим изображение данной окружности $Окр$ с центром в точке O и данную точку A (рис. 2.2.23). Перед тем, как построить произвольную прямую, проходящую через A , изобразим вспомогательную окружность радиуса l с центром в A и поместим на нее точку B . Проведем прямую AB , найдем точки C и D пересечения AB с данной окружностью, построим середину M отрезка CD .

Используя команду «Геометрическое место», построим множество середин M хорд CD , высекаемых прямыми AB на данной окружности. Рассмотрим три возможных случая. Если точка A находится вне данной окружности, то искомое множество будет представлять собой дугу окружности, построенной на OA как на диаметре (рис. 2.2.23а).

Используя ручную анимацию, поместим точку A на данную окружность (рис. 2.2.23б). В этом случае искомое множество будет представлять собой окружность с диаметром OA и выколотой точкой A . Если же точка A находится внутри данной окружности (рис. 2.2.23с), то искомое множество – полная окружность с диаметром OA .

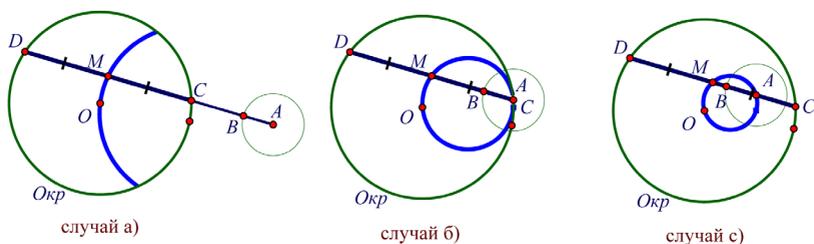


Рис. 2.2.23

Завершить лабораторно-практическое занятие целесообразно построением некоторых собственных инструментов пользователя, реализующих, например, следующие элементарные задачи: построение треугольника по определяющим его элементам (сторонам, углам), деление отрезка в данном отношении (внутренним и внешним способом). Инструменты создаются по аналогии с тем, как создавались собственные инструменты на лекции для элементарных задач 1 и 2.

На одном из лабораторно-практических занятий предполагается, во-первых, обучить студентов умению классифицировать решаемые методом пересечения фигур задачи по трем уровням сложности и, во-вторых, решить как можно больше задач первого и второго уровней сложности. Экономия учебного времени даст наличие собственных инструментов, позволяющих оперативно выполнять не только элементарные построения (задачи), но и быстро строить множества, каждая точка которых удовлетворяет некоторому условию.

Для успешного применения метода пересечения фигур (метода ГМТ) необходимо при проведении анализа научиться выбирать такую точку X , чтобы, во-первых, с ее помощью можно было построить искомую фигуру и, во-вторых, найденная точка удовлетворяла двум условиям, позволяющим с помощью циркуля и линейки построить соответствующие ГМТ. Точку X мы будем называть *ключевой точкой*.

Будем различать следующие три уровня сложности решения задачи на построение методом ГМТ.

Первый уровень сложности. Ключевая точка X присутствует на анализируемом чертеже и удовлетворяет двум свойствам, которые непосредственно следуют из условия задачи и не требуют дополнительных построений.

Второй уровень сложности. Точка X присутствует на анализируемом чертеже, однако, хотя бы одно из двух свойств, которыми она обладает, требует использования соответствующих теорем элементарной геометрии и дополнительных построений.

Третий уровень сложности. Точка X не присутствует на анализируемом чертеже, ее конструирование как геометрического объекта требует дополнительных построений, причем свойства, которыми обладает X , могут следовать не только непосредственно из условия задачи, но и опосредованно, т.е. из условия задачи и из вспомогательных утверждений геометрии.

На лабораторно-практическом занятии необходимо рассмотреть задачи на построение каждого из уровней сложности, продемонстрировать методику применения при их решении анимационных возможностей среды Живая математика.

Обсудим методику использования среды Живая математика при решении следующей задачи [8, задача № 359].

Задача 5. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

Эта задача может быть решена несколькими методами, например, методом подобия, алгебраическим методом и, конечно же, методом ГМТ. В школьном учебнике [8] она отнесена к задачам повышенной трудности, находится в пункте «Задачи на построение» к главам III и IV. Судя по коммента-

риям в ответе к этой задаче, приведенным в учебнике, ее решение рекомендуется выполнить именно методом пересечения множеств.

В данной задаче требуется построить прямую m , проходящую через данную точку A вне данной окружности c_1 с центром O и пересекающую c_1 в точках B и C таких, что $AB = BC$. При проведении *анализа* на рабочем поле Живой математики изображается динамическая модель (рис. 2.2.24), на котором показывается данная окружность c_1 . Поскольку при анализе предполагается, что задача решена, то удобнее сначала построить на окружности произвольные точки B и C , провести через них прямую m , затем построить точку A такую, что B – середина AC . На рисунке 2.2.24 представлена динамическая модель, которая будет использоваться для проведения анализа.

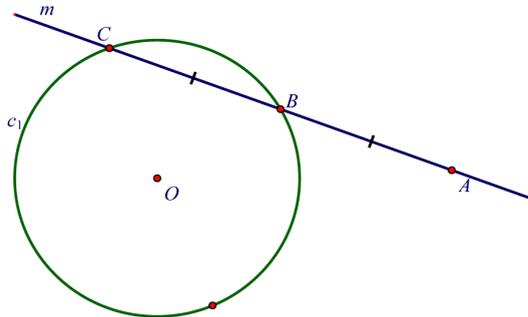


Рис. 2.2.24

Ни одна из фигурирующих на рисунке 2.2.24 точек (A , B , C и O) не может являться ключевой для реализации метода, т.к. ни одна из них не обладает свойствами, достаточными для построения двух ГМТ. Попробуем построить вспомогательную точку D , которая, во-первых, позволит построить искомую прямую m и, во-вторых, обладает требуемыми свойствами.

Построим точку D так, чтобы B оказалась серединой отрезка OD (рис. 2.2.25). Для этого на луче OB достаточно отложить от точки B отрезок, равный радиусу r данной окружности c_1 . Рассмотрим четырехугольник $A OCD$, который является параллелограммом. Поэтому $AD = OC = r$. Но тогда для решения задачи достаточно построить точку D , с ее помощью найти точку B (например, как пересечение окружности c_1 и отрезка OD), тогда прямая AB и будет искомой прямой m .

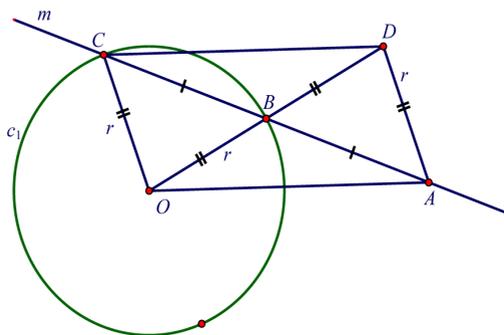


Рис. 2.2.25

Точка D удовлетворяет следующим двум условиям.

Первое условие: точка D находится на расстоянии $2r$ от точки O , т.е. принадлежит окружности с центром O и радиуса $2r$.

Второе условие: точка D находится на расстоянии r от точки A , т.е. принадлежит окружности с центром A и радиуса r .

Для реализации *построения* с использованием среды Живая математика выполняется следующая цепочка действий.

1. На рабочем поле Живой математики изображаются окружность c_1 с центром O и радиуса r (диаметра $2r$) и точка A вне ее (рис. 2.2.26).

2. Строятся две окружности: одна с центром O и радиуса $2r$, вторая с центром в A и радиуса r , находится их общая точка D .

3. Строится отрезок OD , находится общая точка B данной окружности c_1 и отрезка OD .

4. Прямая AB – искомая.

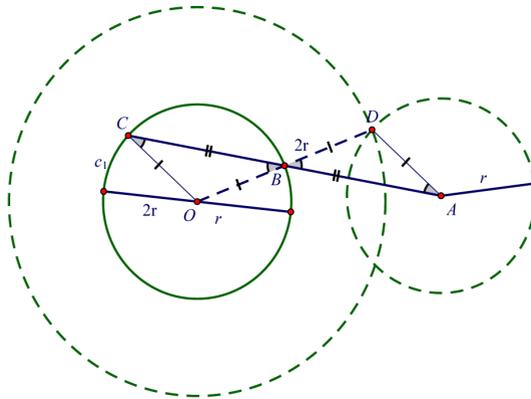


Рис. 2.2.26

Для проведения *доказательства* страница в Живой математике, содержащая динамический чертеж, представленный на рис. 2.2.25, копируется на следующую страницу, и делаются дополнительные построения: построим отрезки AD и OC (рис. 2.2.26). Треугольники ABD и CBO – равнобедренные, с равными боковыми сторонами $AD = BD = OB = OC = r$ и равными углами при основании, т.к. $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBO$ как вертикальные углы. Таким образом, $\triangle ABD = \triangle CBO$ и $AB = BC$.

Для проведения *исследования* страницу в Живой математике, содержащую динамический чертеж, представленный на рис. 2.2.26, скопируем на следующую страницу, спрячем отрезки, изображающие радиусы и диаметры окружностей. Находим вторую точку D_2 пересечения вспомогательных пунктирных окружностей c_2 и c_3 , строим точ-

ку B_2 пересечения отрезка OD_2 и окружности c_1 , строим вторую прямую AD_2 , которая очевидно будет удовлетворять условию задачи (рис. 2.2.27).

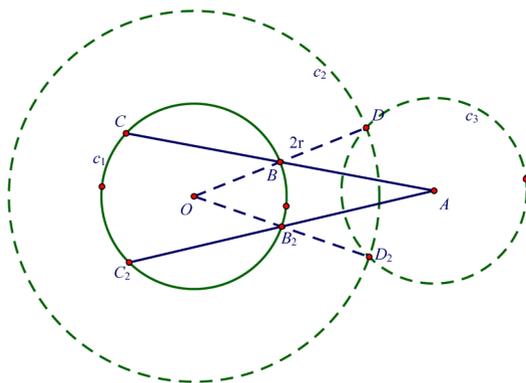


Рис. 2.2.27

Перемещая точку A , убеждаемся, что задача имеет:

- а) два решения, если расстояние OA удовлетворяет неравенству $r < OA < 2r$,
- б) одно решение, если $OA = 2r$;
- в) не имеет решения, если $OA > 2r$.

На завершающих лабораторно-практических занятиях предполагается, во-первых, обучить студентов умению классифицировать задачи, решаемые алгебраическим методом, по трем уровням сложности и, во-вторых, решить как можно больше задач всех уровней сложности. Экономия учебного времени даст наличие собственных инструментов, позволяющих оперативно выполнять построения отрезков по формулам.

Для успешного применения алгебраического метода необходимо при проведении анализа научиться выбирать такой отрезок x , чтобы, во-первых, с его помощью можно было построить искомую фигуру и, во-вторых, длина най-

денного отрезка выражалась через длины данных отрезков формулой, позволяющей построить x с помощью циркуля и линейки. Отрезок x мы будем называть *ключевым отрезком*. При решении задач алгебраическим методом выделяют несколько простейших формул, которые назовем *элементарными формулами*. Нами к элементарным формулам отнесены следующие восемь: 1) сумма длин двух данных отрезков; 2) разность длин двух данных отрезков; 3) произведение рационального числа на длину данного отрезка; 4) частное от деления произведения длин двух данных отрезков на длину третьего данного отрезка (четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам); 5) корень квадратный из произведения длин двух данных отрезков; 6) корень квадратный из суммы квадратов длин двух данных отрезков; 7) корень квадратный из разности квадратов длин двух данных отрезков; 8) произведение длины данного отрезка на корень квадратный из натурального числа.

На лабораторно-практическом занятии необходимо обстоятельно обсудить построение отрезков по формулам не только с помощью реальных циркуля и линейки, но и виртуальных. Во втором случае каждое построение желательно завершить созданием собственного инструмента, что позволит в дальнейшем сократить учебное время на решение более сложных конструктивных задач.

При создании динамических собственных инструментов, позволяющих строить искомые отрезки по некоторым элементарным формулам, необходимо учитывать конструктивные особенности среды Живая математика. В качестве примера рассмотрим создание инструмента построения четвертого пропорционального отрезка x к трем данным отрезкам a , b и c . Имеется ввиду построение отрезка по формуле $x = ab/c$, которую удобно представить в виде $x / b = a / c$. Для создания собственного инструмента следует последова-

тельно выполнить следующие действия: 1) построить данные отрезки a , b и c (рис. 2.2.28); 2) построить произвольный луч $OH = h$; 3) построить образ h' луча h при повороте плоскости вокруг точки O на некоторый конкретный угол, например, 30 градусов; 4) построить окружности c_1 , c_2 и c_3 с центром в O и радиусов a , b и c соответственно; 5) построить общую точку A окружности c_1 и луча h ; 6) построить общую точку B окружности c_2 и луча h' ; 7) построить общую точку C окружности c_3 и луча h' ; 8) построить отрезок AC и точку X , принадлежащую OH , и такую, что BX параллельна AC , отрезок OX искомым. Для создания инструмента нужно оставить данные отрезки, построенный отрезок OX и точку H , скрыть их имена, подсветить объекты и присвоить имя новому инструменту.

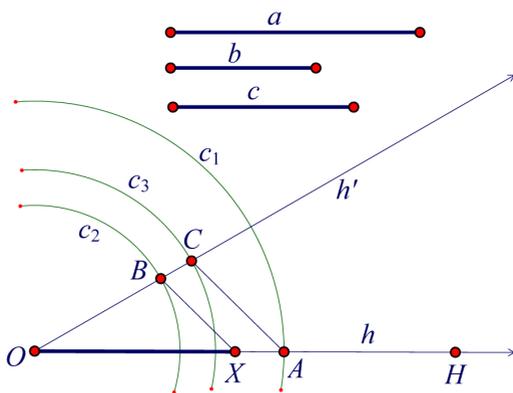


Рис. 2.2.28

Затем следует рассмотреть построение отрезков по формулам более сложным, чем элементарные формулы.

Будем различать следующие три уровня сложности решения задачи на построение алгебраическим методом.

Первый уровень сложности. Ключевой отрезок и отрезки, выбранные в качестве данных, присутствуют на ана-

лизируемом чертеже (не требуют дополнительных построений), причем длина ключевого отрезка выражается через длины данных отрезков по одной из элементарных формул.

Второй уровень сложности. Один из отрезков, ключевой или выбранный в качестве данного, отсутствует на анализируемом чертеже (требует дополнительного построения), либо длина ключевого отрезка выражается через длины данных отрезков по формуле, не являющейся элементарной.

Третий уровень сложности. Один из отрезков, ключевой или выбранный в качестве данного, отсутствует на анализируемом чертеже (требует дополнительного построения), а также длина ключевого отрезка выражается через длины данных отрезков по формуле, не являющейся элементарной.

На лабораторно-практическом занятии целесообразно рассмотреть примеры решения задач каждого из трех уровней сложности, продемонстрировать методику применения при их решении среды Живая математика. В качестве примера решения задачи второго уровня сложности рассмотрим школьную задачу, которая решалась выше методом пересечения множеств.

Задача 5. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

При проведении анализа строим произвольную данную окружность c_1 с центром в точке O , данную точку A и точки B и C окружности c_1 такие, что B – середина отрезка AC , т.е. те же самые построения, которые выполнялись в случае решения этой задачи методом ГМТ. Однако для решения этой задачи потребуются другие дополнительные построения, с помощью которых можно было бы привлечь известную в элементарной геометрии теорему о свойстве секущих

ем аналитических и конструктивных возможностей Живой математики. Можно рассматривать новые преобразования, представляющие собой композиции известных геометрических преобразований.

И, наконец, в-третьих, любые динамические чертежи, визуализирующие те или иные геометрические преобразования, можно эффективно использовать в качестве виртуальных моделей для их изучения, проведения компьютерных экспериментов и исследований, решения творческих задач, что способствует формированию исследовательских компетенций обучающихся [1; 43].

В соответствии с концепцией компьютерной поддержки курса геометрии в педвузе [39] готовить будущего учителя математики к успешному использованию в своей профессиональной деятельности систем динамической математики следует в процессе его обучения в высшем учебном заведении. Причем реализовать эту подготовку можно в рамках вузовского курса геометрии. В курсе геометрии Красноярского педагогического университета модуль «Геометрические преобразования» традиционно изучается в течение четвертого (для бакалавров профиля Математика) или пятого (для бакалавров сдвоенного профиля Математика и информатика) семестра.

Продемонстрируем особенности применения Живой математики на учебных занятиях по геометрии в педвузе в зависимости от формы обучения: лекция или лабораторно-практическое занятие.

Лекционная форма обучения. На каждой лекции в распоряжении преподавателя помимо традиционной маркерной доски должен находиться проекционный экран и персональный компьютер с компьютерной средой Живая математика. Все, что связано с аналитическими выкладками, выводом формул, формулировками теорем и условием задач оформляется на доске. Все чертежи, имеющие в пер-

вую очередь динамический характер, выполняются преимущественно в режиме реального времени в Живой математике, что позволяет продемонстрировать студентам возможности и преимущества этой среды при обучении геометрическим преобразованиям.

Одной из наиболее сложных тем модуля является классификация движений плоскости. К процессу доказательства всех этапов классификационной теоремы, начиная с утверждения о представлении любого движения в виде композиции не более трех осевых симметрий, и, заканчивая рассмотрением симметрий с конкретным взаимным расположением осей, можно с успехом привлекать студенческую аудиторию. Так, при рассмотрении первого этапа преподаватель создает в среде Живая математика собственное преобразование, которое представляет собой движение δ , заданное аналитически: $x' = x \cos \alpha - e \cdot y \sin \alpha + a$; $y' = x \sin \alpha + e \cdot y \cos \alpha + b$. Для рассмотрения различных случаев на рабочее поле выводятся параметры α , a , b и e , с помощью которых можно менять виды (первые три параметра) и род ($e = \pm 1$) движения δ в режиме ручной анимации. Чтобы не терять учебное время, создать движение следует заранее. Так, на рисунке 2.2.31 выбрано движение первого рода ($e = 1$).

На рабочем поле Живой математики выбирается произвольная точка M и строится ее образ $M\phi$ под действием движения δ . Для визуального представления рода движения на экран выводится ориентированный треугольник PQR и его образ $P'Q'R'$ под действием δ . Перед аудиторией ставится задача подобрать наименьшее по возможности число прямых, композиция осевых симметрий относительно которых будет отображать точку M в точку M' . Для этого строятся две произвольные точки A и B и их образы A' и B' соответственно под действием движения δ . Если A и B окажутся неподвижными точками движения, то процесс завершается, в

этом случае движение представляет собой симметрию плоскости с осью AB или тождественное преобразование.

Пусть по крайней мере одна из двух точек A и B не является неподвижной, для определенности будем считать, что точка A отлична от A' . В этом случае обсуждается следующий алгоритм построения искомых осей. Строится серединный перпендикуляр l к отрезку AA' , находится образ AB'' отрезка AB' при осевой симметрии относительно l . В равнобедренном треугольнике BAB'' строится прямая m , содержащая биссектрису угла BAB'' . Далее студентам предлагается высказать гипотезы по поводу предполагаемых осей. По каждой гипотезе строится траектория произвольной точки K под действием композиции соответствующих осевых симметрий, с помощью мышки точка M совмещается с точкой K , визуально проверяется факт совпадения их образов. В случае, представленном на рисунке 2.2.31, наиболее правдоподобно предположение о том, что движение представимо в виде композиции следующих двух осевых симметрий $\delta = S_m \circ S_l$.

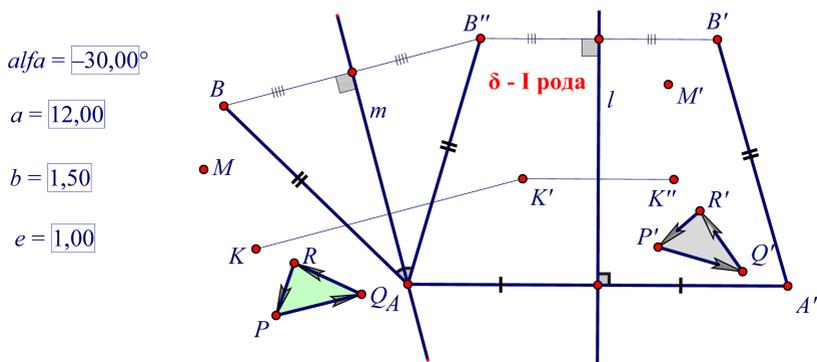


Рис. 2.2.31

Если параметру e присвоить значение -1 , что означает, что δ является уже движением второго рода, то правдоподобная гипотеза будет соответствовать представлению дви-

жения δ в виде композиции следующих трех осевых симметрий: $\delta = S_{AB} \circ S_m \circ S_l$. Траектория точки N под действием осевых симметрий S_{AB} , S_m , S_l представляет собой три точки, которые на рисунке 2.2.32 обозначены буквами N' , N'' , N''' соответственно, причем при анимационном совмещении точек M и N точки M' и N''' тоже совместятся. После того как гипотезы подтверждаются серией экспериментов, на доске формулируется теорема о том, что любое движение представимо в виде композиции не более трех осевых симметрий, приводится ее строгое доказательство.

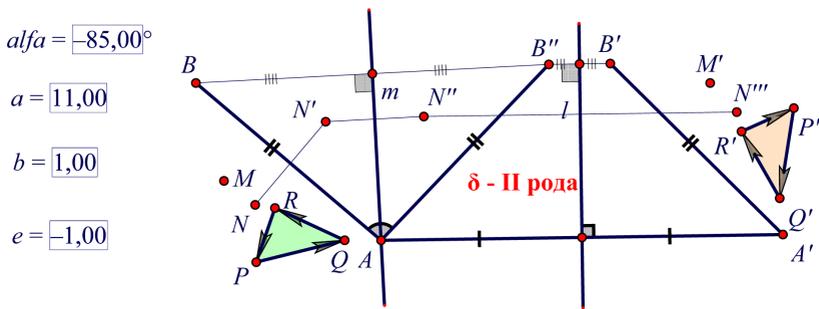


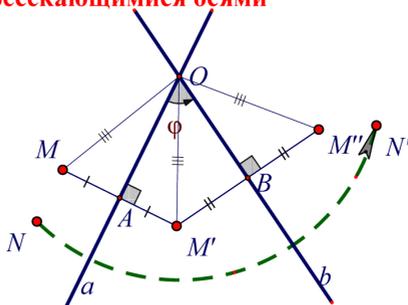
Рис. 2.2.32

Завершается классификационная теорема исследованием композиции двух и трех осевых симметрий, с отдельным рассмотрением случаев принадлежности (или отсутствия таковой) осей симметрии одному пучку параллельных или пересекающихся прямых. В этом случае Живая математика может опять помочь студентам самостоятельно сформулировать верную гипотезу. Проиллюстрируем это на примере движения, которое задается композицией двух симметрий с осями a и b , принадлежащими пучку прямых с центром O .

На рабочем поле Живой математики строятся изображения двух произвольных прямых a и b (рис. 2.2.33), пересекающихся в точке O (можно ограничиться изображением двух

пересекающихся отрезков). Отмечается некоторая точка M и строится образ M' этой точки под действием осевой симметрии с осью a , затем – образ M'' точки M' под действием второй осевой симметрии с осью b . Преподаватель с помощью мыши перемещает точку M и предлагает студентам понаблюдать за поведением точки M'' . Какое из известных движений плоскости действует на точке M аналогично? Следует отметить, что в большинстве случаев студенты далеко не сразу формулируют верную гипотезу. Уж очень отличаются по своим свойствам осевая симметрия и поворот плоскости.

Композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями



$$\angle MOM'' = 120,62^\circ$$

$$\angle AOB = 60,31^\circ$$

Гипотеза: $S_a \circ S_b = R_O^{2\varphi}$

Рис. 2.2.33

По истечении некоторого времени выполняются дополнительные построения: Точки M , M' и M'' последовательно соединяются друг с другом и с точкой O отрезками, с помощью маркера отмечаются равные углы и отрезки. После этого вероятность сформулировать правдоподобную гипотезу повышается, причем для определения угла поворота помогает измерение угла MOM'' и угла между прямыми a и b . После формулировки любой ошибочной гипотезы рекомендуется не отвергать ее сразу, а построить образ N' про-

извольной точки N под действием предлагаемого движения, затем совместить N и M и убедиться в том, что их образы не ведут себя аналогично. Так, на рисунке 3 построен образ N' точки N под действием поворота плоскости вокруг O на направленный угол, равный удвоенному углу между прямыми a и b , в направлении от a к b . После формулировки правдоподобной гипотезы проводится ее строгое математическое обоснование.

Лабораторно-практическая форма обучения.

Лабораторно-практическое занятие проводится в аудитории, где кроме обычной доски и центрального компьютера, оснащенного проектором, имеется класс персональных компьютеров в количестве, достаточном для работы одной подгруппы. По инициативе преподавателя и по согласованию со студентами решение одной и той же задачи на применение геометрических преобразований с демонстрацией этого решения перед всей аудиторией выполняется одновременно двумя студентами. Один из них строит необходимые статические чертежи, делает записи на маркерной доске, второй – работает за компьютером преподавателя, конструируя динамические чертежи, которые необходимы не только для проведения анализа и построения, но и исследования решения задачи. Динамический чертеж удачно дополняет его статический аналог на маркерной доске, позволяя при необходимости быстро и безболезненно изменить положение любой точки, отрезка, прямой или окружности, построить образ той или иной фигуры под действием подходящего преобразования. Учебный дуэт, поддерживаемый Живой математикой, студентами и преподавателем, как правило, успешно и достаточно быстро справляется с задачами любой сложности. Продемонстрируем методику использования Живой математики на примере решения следующей задачи на применение метода подобия.

Задача. Даны точка, окружность и прямая. Построить квадрат $ABCD$, вершина A которого совпадает с данной точкой, вершина B принадлежит данной окружности, а вершина C – данной прямой.

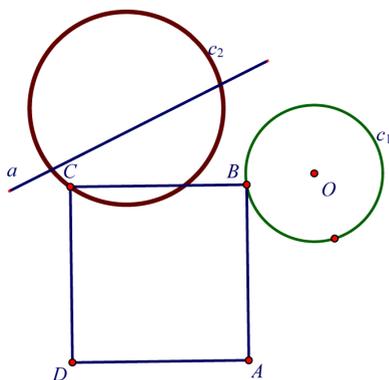


Рис. 2.2.34

При проведении анализа на рабочем поле Живой математики строится изображение данной точки A , данной окружности c_1 и данной прямой a (рис. 2.2.34), на окружности c_1 выберем произвольную точку B . Далее изображается отрезок AB , который достраивается до квадрата $ABCD$. Вершина C квадрата почти наверняка окажется

за пределами прямой a . Перемещая мышкой точку B по окружности c_1 , попытаемся найти такое ее положение, при котором C окажется на прямой a . Преподавателю следует обратить внимание студентов, в первую очередь тех, кто выполняет это анимационное действие, на ту траекторию, которую вычерчивает точка C в результате этого перемещения. Целесообразно сформулировать два наводящих вопроса: 1) *что представляет собой множество всех вершин C квадрата $ABCD$ при фиксированной вершине A , если вершина B пробегает все точки окружности c_1 ?*; и 2) *можно ли по заданным точке A и окружности c_1 построить это множество?* По сути, мы изменяем условие исходной задачи, отбрасывая требование принадлежности вершины C прямой a . Что дают ответы на поставленные вопросы? Прежде всего это способ построения вершины C , которая должна принадлежать пересечению искомого множества и прямой a .

Живая математика может оказать помощь в поиске ответов на оба вопроса. Если мы заставим точку C оставлять след и начнем перемещать вершину B по окружности c_1 , то точка C вычертит линию c_2 , похожую на окружность (рис. 2.2.34). Чтобы доказать, что это окружность и найти способ ее построения, следует разобраться с алгоритмом построения произвольной точки этой линии. Будем считать, что B – одна из произвольных точек окружности c_1 . Найдем преобразование, которое, во-первых, задается с использованием лишь только данных фигур, в первую очередь точки A ,

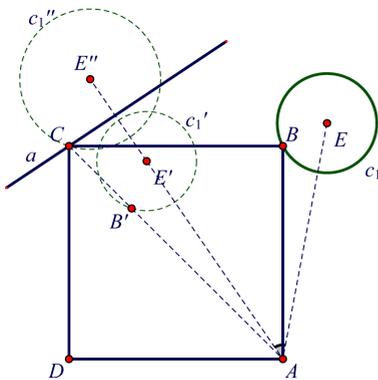


Рис. 2.2.35

и вспомогательных построений, и, во-вторых, отображает точку B на точку C . После перебора всевозможных движений и подобий становится понятно, что сначала надо отобразить точку B на точку B' , лежащую на диагонали AC квадрата $ABCD$ с помощью поворота плоскости вокруг точки A на угол 45° (рис. 2.2.35). Затем точку B' отобра-

зить на точку C с помощью гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $AC/AB' = AC/AB = \sqrt{2}$, равным отношению диагонали к стороне любого квадрата. Поскольку подобие отображает окружность на окружность, то искомое множество представляет собой окружность c_1'' , которую можно построить как образ c_1 под действием композиции поворота вокруг A на угол 45° и гомотетии с центром A и коэффициентом $\sqrt{2}$.

Построив окружность c_1'' , мы можем найти общую точку C этой окружности и прямой a . Ясно, что построить искомый квадрат, зная его диагональ AC , не представляет труда.

Для удобства и оперативности создадим два инструмента: построение квадрата по стороне (первый инструмент) и по диагонали (второй инструмент). С целью реализации найденного плана решения задачи на рабочем поле среды Живая математика построим данную точку A , прямую a и окружность c_1 . Последовательно выполняются следующие построения: 1) произвольный квадрат $PQLM$, в котором диагональ QM обозначим m , сторону $LM - n$; 2) окружность c_1' – образ окружности c_1 при повороте плоскости вокруг A на угол LMQ ; 3) окружность c_1'' – образ окружности c_1' при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом m/n ; 4) точку C , принадлежащую пересечению окружности c_1'' и прямой a ; 5) квадрат $ABCD$ по диагональным точкам A и C – искомый квадрат.

При проведении анализа удобно использовать анимационные возможности среды Живая математика. Создается новая страница в среде Живая математика, представляющая собой копию только что построенной. Скрывается промежуточная окружность c_1' (рис. 2.2.36), окружность c_1'' переименовывается в c_2 , к обозначениям вершин B , C и D добавляются индексы 1 . Обозначим вторую точку пересечения окружности c_2 и прямой a (если она имеется) через C_2 . По заданным диагональным точкам A и C_2 строим второй квадрат $AB_2C_2D_2$.

Исчерпывается ли решение задачи найденными квадратами? Очевидно, нет, поскольку при проведении анализа нами были рассмотрены не все квадраты, для которых AB является одной из сторон. Аналогичный результат мы получим, если рассмотрим квадрат со стороной AB , в котором обход вершин будет выполняться по часовой стрелке. В этом случае для нахождения всех решений мы будем вынуждены совершать поворот c_1 вокруг A не только на 45° , а и на минус 45° , т.е. по часовой стрелке. Таким образом, мы можем к найденным двум квадратам $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$ добавить еще два квадрата $AB_3C_3D_3$ и $AB_4C_4D_4$ (рис. 2.2.36).

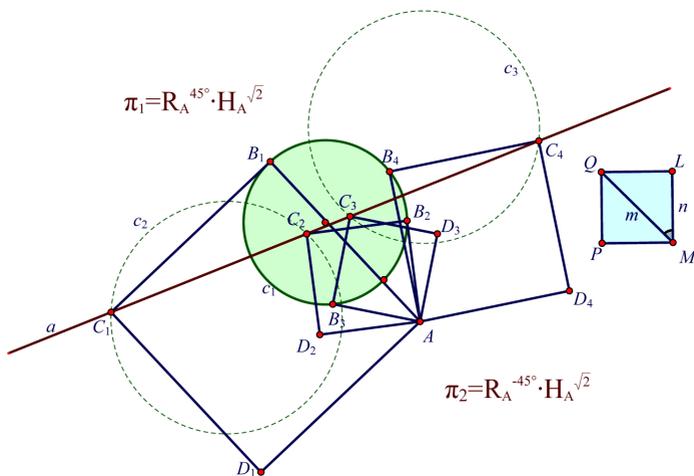


Рис. 2.2.36

Перемещая точку A , мы можем получить пять случаев: задача не будет иметь решения; задача может иметь одно решение; два решения; три решения и, наконец, четыре решения.

2.2.4. Непротиворечивость планиметрии Лобачевского

Модуль основания геометрии играет важную роль в геометрической подготовке студентов – будущих учителей математики. Обучение умению аргументировать факты геометрических теорий, используя для этого аксиомы и ранее доказанные утверждения, цепочки логически корректных положений, является одной из задач курса [6]. Далеко не во всех темах модуля основания геометрии удастся создать дидактически комфортную обстановку для студента, способствующую формированию соответствующего умения. Особенно это актуально при обучении планиметрии Лобачевского. Большинство необычных свойств фигур и понятий этой теории, таких, например, как равенство треугольников по трем углам, отсутствие прямоугольников, непостоянство

суммы углов треугольников и целый ряд других, многими студентами не воспринимаются как реально существующие. И это несмотря на то, что большинство таких утверждений анализируется и скрупулезно доказывается.

Наш опыт использования в курсе геометрии среды Живая математика [41] позволяет утверждать, что применение этого программного средства при обучении такой достаточно абстрактной теме курса, как «Непротиворечивость планиметрии Лобачевского», способствует более качественному ее усвоению. Нами разработана и внедрена в учебный процесс технология самостоятельного создания обучающимися анимационных чертежей-иллюстраций модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Продемонстрируем элементы этой технологии на конкретных примерах.

Как известно, модель любой новой теории строится на базе известной теории, непротиворечивость которой не вызывает сомнения. В качестве такой теории для плоскости Лобачевского мы вслед за А. Кэли и Ф. Клейном выберем евклидову плоскость. На евклидовой плоскости возьмем окружность (абсолют), любая внутренняя точка абсолюта будет представлять собой точку модели Кэли-Клейна, любая открытая хорда абсолюта – прямую модели. Принадлежность точек и прямых понимается в евклидовом смысле.

На рабочем поле среды Живая математика построим произвольную окружность-абсолют (рис. 2.2.37), выберем внутри нее две точки A и B , построим прямую, проходящую через них, найдем общие точки C и D прямой AB с абсолютом, спрячем прямую и построим отрезок CD . Этот открытый отрезок и будет представлять собой прямую AB , которую иногда называют гиперболической прямой. Поскольку точки C и D не принадлежат прямой AB , условимся не окрашивать их (на рисунке они залиты белым цветом). Гиперболическую прямую для удобства будем иногда обозначать точками, которые являются концами соответствующей хорды, т.е. $AB = CD$.

Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского

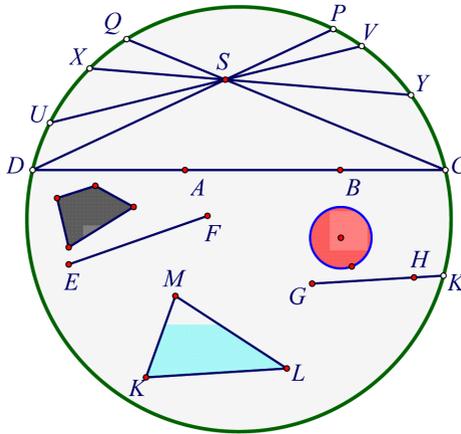


Рис. 2.2.37

Перемещая с помощью мыши точки A и B прямой AB , можно продемонстрировать многообразие прямых модели.

На рисунке 2.2.37 представлены изображения отрезка EF , луча GH , треугольника KLM , четырехугольника и окружности, наглядно продемонстрировано выполнение аксиомы Лобачевского: через точку S , не принадлежащую прямой AB , проходит более одной прямой, не пересекающей прямую AB (например, DP и UV). Рисунок иллюстрирует наличие единственной прямой QC , проходящей через S и параллельной AB в направлении от A к B , а также единственной прямой PD , проходящей через S и параллельной AB в противоположном направлении от B к A . Кроме пар параллельных прямых на рисунке представлены пары пересекающихся прямых и сверхпараллельных прямых (например, UV и DC).

Для определения луча, отрезка и ряда других понятий плоскости Лобачевского использовалось отношение порядка для троек точек в евклидовом смысле. По этой причине проверка аксиом группы порядка, как и аксиомы Лобачевского, не вызывает трудности. Ясно, что определение рас-

стояния между точками в евклидовом смысле нам не подойдет: при откладывании на любом луче (например, GH) отрезка, равного данному (например, EF), мы выйдем за пределы абсолюта. Для определения расстояния между точками A и B рассмотрим сложное отношение четырех точек (AB, CD) , которое равно отношению простых отношений $(AB, C)/ (AB, D)$, где точки C и D принадлежат окружности, причем B лежит между A и C , A – между D и B . Сложное отношение точек – это основное понятие проективной плоскости, свойства которой изучались студентами в предыдущем модуле. Поскольку пара точек A, B не разделяет пару точек C, D , то каждое из простых отношений больше нуля, а следовательно, больше нуля и сложное отношение. Определим теперь расстояние между точками AB как натуральный логарифм сложного отношения точек: $AB = \ln (AB, CD)$. Условимся называть его гиперболическим расстоянием. Создадим собственный инструмент «гиперболическое расстояние», который позволяет для двух произвольных точек оперативно найти расстояние между ними в смысле приведенного выше определения и вывести эту величину на экран.

Проведем разведочные эксперименты на предмет использования гиперболического расстояния в качестве измерения длин отрезков на нашей модели. Прежде всего, проверим независимость гиперболического расстояния от порядка, в котором выбираются точки A и B . Для этого выведем на экран гиперболические расстояния AB и BA и убедимся в том, что $AB = BA$ при любых перемещениях этих точек.

Поместим на отрезок AB произвольную точку W , измерим гиперболические расстояния AW , WB и AB . Используя вычислительные возможности Живой математики, найдем сумму $AW + WB$, составим таблицу (рис. 2.2.38), из которой можно предположить, что введенное измерение отрезков аддитивно. Аналогично иллюстрируется и справедливость неравенства треугольника.

А удастся ли при таком измерении отрезков найти на луче GK точку, находящуюся на расстоянии EF от начала луча G ? Измерим гиперболическую длину отрезка EF и выведем полученное значение на рабочее поле (рис. 2.2.38). Поместим на луч GK точку M , измерим GM и начнем перемещать M по лучу в сторону K , выборочно включая соответствующие расстояния GM в таблицу. Оказалось, что при приближении M к абсолюту гиперболические расстояния GM становятся сколько угодно большими. Удастся подобрать такое положение точки M , что $GM = EF$ (на рис. 2.2.38 это расстояние равно 3,08).

Интересны результаты эксперимента с окружностью, которые на первый взгляд должны поставить под сомнение корректность определения расстояния между точками. Поместим на окружность с центром в точке O произвольную точку K , измерим расстояние OK , соответствующее число выведем на экран. Начнем перемещать точку K по окружности, заносая соответствующие значения OK в таблицу (рис. 2.2.38), состоящую из одного столбца. Большинство этих значения окажутся разными. Это означает, что либо точка, равноудаленная от всех точек окружности, не совпадает с евклидовым центром окружности, либо такой точки не существует вообще.

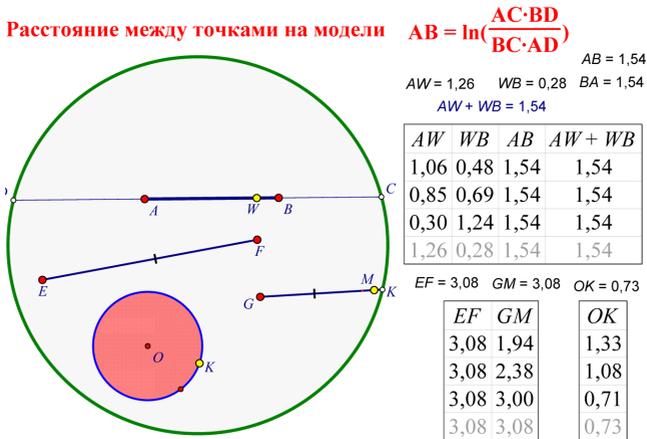


Рис. 2.2.38

Отметим, что после разведочного эксперимента проводится строгое доказательство всех обнаруженных свойств гиперболического расстояния.

Зададим теперь движение модели так, чтобы оно сохраняло гиперболические расстояния между точками. Для этого пополним плоскость, содержащую абсолют, бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой, т.е. превратим нашу плоскость в проективную. Осевую симметрию относительно прямой AB модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского зададим как гомологию проективной плоскости с осью AB , центром гомологии S , являющимся полюсом прямой AB относительно абсолюта, и любой парой соответственных точек U и V , лежащих на абсолюте, и коллинеарных с точкой S .

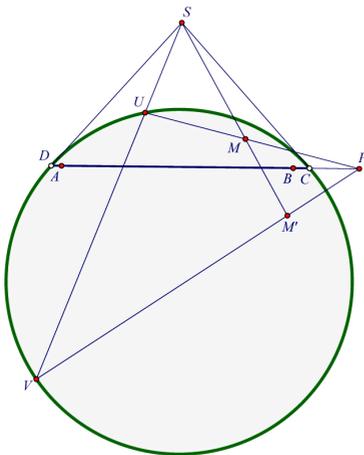


Рис. 2.2.39

Создадим в среде Живая математика соответствующий анимационный чертеж-иллюстрацию, для этого выполним следующие построения: 1) проведем касательные к абсолюту в точках D и C (рис. 2.2.39); 2) найдем общую точку S построенных касательных; 3) выберем точку U на абсолюте и найдем вторую точку V пересечения луча SU с абсолютом; 4) выберем произвольную внутреннюю точку M абсолюта и построим прямую SM ; 5) найдем общую точку P прямых AB (ось гомологии) и UM ; 6) построим общую точку M' прямых VP и SM . Подсветим сначала точку M , затем M' и зададим собственное преобразование «гиперболическая осевая симметрия».

Создадим в среде Живая математика соответствующий анимационный чертеж-иллюстрацию, для этого выполним следующие построения: 1) проведем касательные к абсолюту в точках D и C (рис. 2.2.39); 2) найдем общую точку S построенных касательных; 3) выберем точку U на абсолюте и найдем вторую точку V пересечения луча SU с абсолютом; 4) выберем произвольную внутреннюю точку M абсолюта и построим прямую SM ; 5) найдем общую точку P прямых AB (ось гомологии) и UM ; 6) построим общую точку M' прямых VP и SM . Подсветим сначала точку M , затем M' и зададим собственное преобразование «гиперболическая осевая симметрия».

Спрячем все дополнительные построения, оставив только прямую AB . Изобразим произвольный отрезок EF и построим его образ $E'F'$ с помощью инструмента «гиперболическая осевая симметрия». Измерим гиперболические расстояния между концами отрезков EF и $E'F'$, выведем полученные числовые значения на экран, создадим таблицу из двух столбцов, содержащих гиперболические расстояния EF и $E'F'$ (рис. 2.2.40). Совпадение чисел в каждой строке таблицы позволяет надеяться на успешное доказательство этого свойства в общем виде.

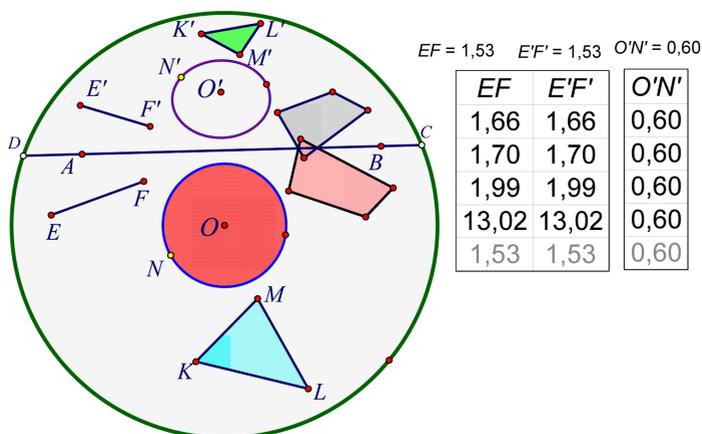


Рис. 2.2.40

Дополнительно к отрезку EF построим во внутренней области абсолюта треугольник, четырехугольник и окружность, центр которой совпадает с центром абсолюта, найдем их образы с помощью гиперболической осевой симметрии относительно AB . Отметим, что образами многоугольников оказались многоугольники с тем же числом вершин, а образом окружности – эллипс, который будет представлять собой также окружность нашей модели с центром O' – образе центра абсолюта.

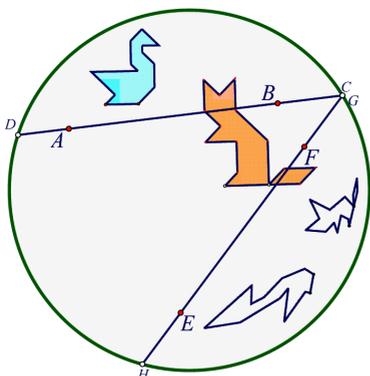


Рис. 2.2.41

Определим гиперболическое движение как композицию гиперболических осевых симметрий. Для иллюстрации действия композиции двух осевых симметрий на той или иной фигуре зададим еще одну осевую симметрию, например, относительно прямой EF (рис. 2.2.41). Рассмотрим произвольную точку M внутри абсолюта и построим сначала ее

образ M' под действием первой симметрии, затем образ M'' точки M' под действием второй симметрии. Подсветим точки M и M'' и зададим собственное преобразование «Композиция двух гиперболических осевых симметрий». На рисунке представлены образы фигурок лебедя и лисы под действием гиперболического движения – композиции гиперболических осевых симметрий относительно параллельных прямых AB и EF .

Для определения гиперболической величины данного угла отобразим подходящей осевой симметрией вершину этого угла на точку, являющуюся центром окружности-абсолюта. Евклидову величину угла, представляющего собой образ данного угла под действие выбранной осевой симметрии, и будем считать гиперболической мерой данного угла. Доказывается корректность этого определения. Затем студенты самостоятельно создают анимационные чертежи-иллюстрации, визуализирующие решения индивидуальных заданий в виде задач планиметрии Лобачевского с использованием модели Кэли-Клейна.

На рисунке 2.2.42 представлен один из таких чертежей, на котором построен общий перпендикуляр KL к расходящим-

ся прямым AB и EF (задача 1), для произвольного угла ELS построена прямая PQ , параллельная его сторонам (задача 2), доказано, что не через каждую точку (например, точку T) внутри угла ELS можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла (задача 3), построен параллелограмм $XYZV$ (задача 4).

Величина угла на модели Кэли-Клейна.
Иллюстрация индивидуальных заданий

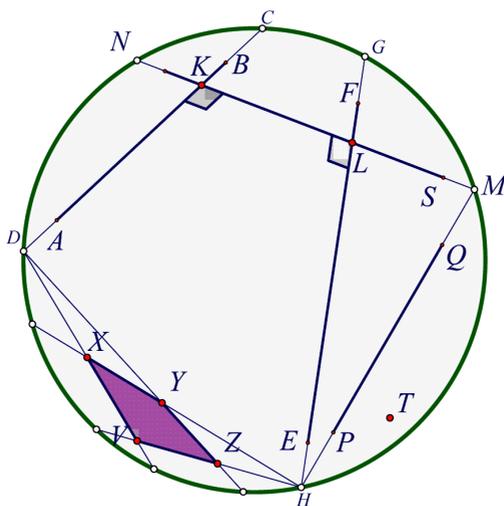


Рис. 2.2.42

Таким образом, анимационные возможности среды Живая математика позволяют динамично визуализировать многие абстрактные понятия модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, изучаемые в педагогическом вузе в рамках модуля основания геометрии.

2.2.5. Трехгранник Френе и кривизна кривой

Тема «Трехгранник Френе и кривизна кривой» изучается в рамках модуля «Дифференциальная геометрия» [19; 40; 52]. Как отмечено выше, этот модуль завершает курс геоме-

трии и реализуется в последнем десятом семестре. Несмотря на то, что дифференциальная геометрия не имеет прямого отношения к школьному курсу математики, будущие учителя математики должны владеть современными методами аналитической геометрии и математического анализа исследования кривых, поверхностей и их семейств в евклидовом пространстве. Отметим, что применение анимационных возможностей систем динамической математики GeoGebra и Живая математика, которые с успехом использовались нами в рассмотренных выше темах курсов алгебры и геометрии, при обучении студентов дифференциальной геометрии, особенно для исследования свойств пространственных кривых и поверхностей, представляется затруднительным. Лишь только анимационные возможности профессиональных математических пакетов, таких например, как система компьютерной алгебры Maple, позволяют эффективно поддержать обучение дифференциальной геометрии с использованием аппарата аналитической геометрии и анализа бесконечно малых, а именно, аналитических выражений, пределов, производных и интегралов.

Продемонстрируем анимационные возможности Maple на примере заявленной выше темы, связанной с изучением кривых. Кривая определяется нами как годограф вектор-функции одного скалярного аргумента [40]. И уже это базовое понятие можно достаточно эффективно визуализировать, «оживив» его с помощью анимационных возможностей Maple.

Анимационное изображение кривой. В качестве примера можно продемонстрировать, как годограф выписывает винтовую линию. На рис. 2.2.43 представлен пример использования анимационных возможностей Maple и два промежуточных кадра анимации. Для иллюстрации понятия годографа вектор-функции использовано две анимации. Пер-

вая анимация постепенно вычерчивает кривую, а вторая показывает, как движется конец вектор-функции, если его конец закреплен в начале координат. Команда *display* позволяет объединить две анимации на одном графике.

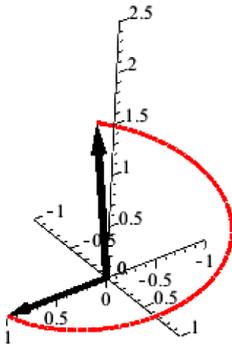
with(plots) :

```
vl := animate(spacecurve, [[cos(t), sin(t), 0.2*t], t = 0 ..k, color = red,
    scaling = constrained, thickness = 3], k = 0 ..4*Pi) :
```

```
vf := animate(arrow, [(cos(s), sin(s), 0.2*s), color = black], s = 0 ..4
    *Pi, trace = 3) :
```

```
display(vl, vf, axes = normal)
```

s = 4.1888



s = 8.3776

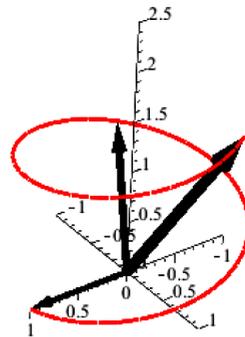


Рис. 2.2.43

Касательная к кривой. Следующее важное понятие, которое вводится в теории кривых – это понятие касательной к гладкой кривой. Напомним определение касательной.

О п р е д е л е н и е. *Касательной прямой* к линии Γ в точке P , принадлежащей линии, называется предельное положение секущей PQ при Q стремящейся к P по линии Γ .

Вопрос о существовании касательной прямой решается следующей теоремой:

Теорема. В каждой точке гладкой кривой Γ существует касательная прямая к Γ . Если $\vec{r}(t)$ – некоторая гладкая параметризация кривой Γ , то касательная к Γ в точке, соответствующей параметру $t = t_0$, параллельна вектору $\vec{r}'(t_0)$.

Данное определение и теорему можно сопроводить динамическим чертежом-иллюстрацией с помощью анимационных возможностей Maple. Причем для демонстрации стремления секущей к своему предельному положению для плоских кривых в Maple разработана стандартная команда, которая реализуется в пакете *Student* в двух вариантах. Интерактивный вариант (команда *FunctionSlopeTutor*) выводит анимацию в отдельное окно и позволяет менять настройки прямо в окне, сразу показывая, как изменится картинка (рис. 2.2.44).

`with(Student[Precalculus]) :`
`FunctionSlopeTutor()`

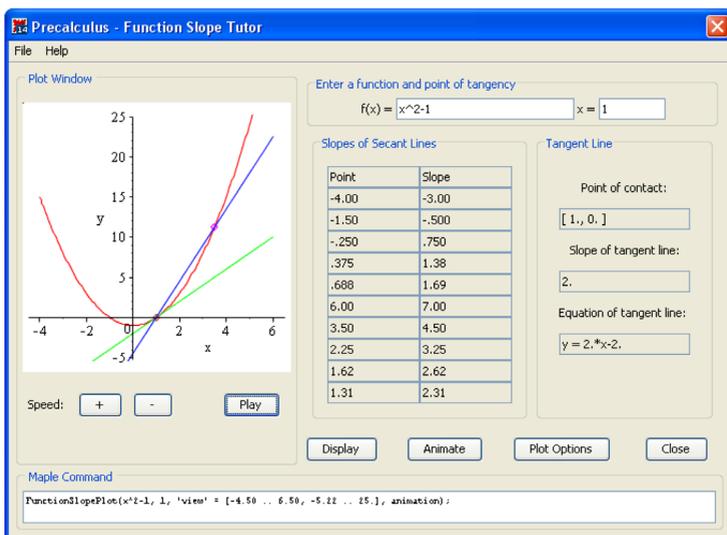
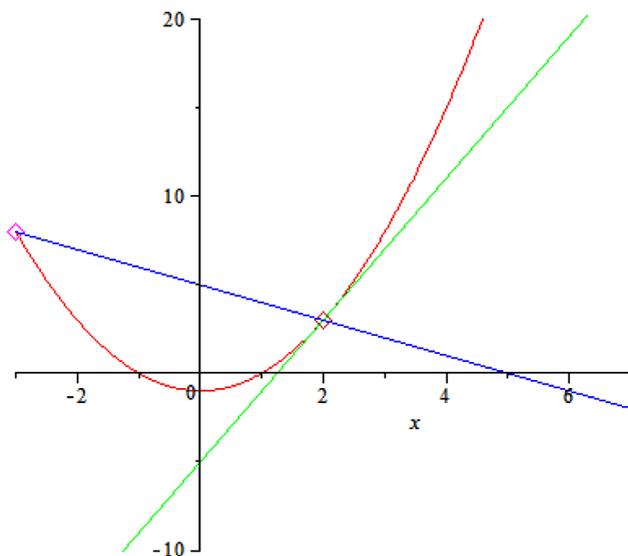


Рис. 2.2.44

По умолчанию берется функция $y = x^2 - 1$ и рассматривается касательная в точке $x_0 = 1$. Второй вариант (команда *FunctionSlopePlot*) предлагает предварительно настраивать модель и потом сразу демонстрирует результат (рис. 2.2.45).

with(Student[Precalculus]) :

FunctionSlopePlot($x^2 - 1, x = 2, view = [-3 .. 7, -10 .. 20], 'animation'$)



At $x = 2$ on the graph of $f(x) = x^2 - 1$, a tangent line is shown along with secant lines through $(2, f(2))$. The slope of the tangent line is the slope of $f(x)$ at $x = 2$.

Рис. 2.2.45

Трехгранник Френе. В дальнейшем вводится понятие соприкасающейся плоскости (плоскость Π , проходящая через точку P параллельно векторам первой и второй производной, называется *соприкасающейся плоскостью*) и доказывается что, как и касательная прямая к кривой, данное понятие никак не зависит от выбора параметризации и зависит только от выбора кривой и точки, в которой соприкасающаяся пло-

скость рассматривается. Опираясь на эти два понятия (касательная прямая и соприкасающаяся плоскость), достраивается трехгранник Френе. Вводятся понятия главной нормали и бинормали, образующих вместе с касательной ребра трехгранника и понятия нормальной и спрямляющей плоскости, которые вместе с соприкасающейся плоскостью образуют грани. Данный трехгранник можно построить в любой точке регулярной класса C^2 кривой, где векторы первой и второй производной не коллинеарны, и поэтому его также называют естественным или сопровождающим трехгранником.

Для иллюстрации движения естественного трехгранника вдоль кривой в Maple можно использовать команду *TNBFrame* (рис. 2.2.46). Данная команда строит кривую и единичные векторы касательной (на рисунке изображен черным цветом), главной нормали (зеленый) и бинормали (желтый). Для анимации, по умолчанию, рассчитывается 5 кадров, где точка построения базисных векторов естественного трехгранника равномерно распределяется по интервалу изменения параметра. В примере (рис. 2.2.46) приводится формат использования команды и три стоп-кадра анимации.

with(Student[VectorCalculus]) :

*TNBFrame(⟨cos(t), sin(t), 0.2·t⟩, range = 0 ..4·Pi, output = animation,
axes = normal, scaling = constrained)*

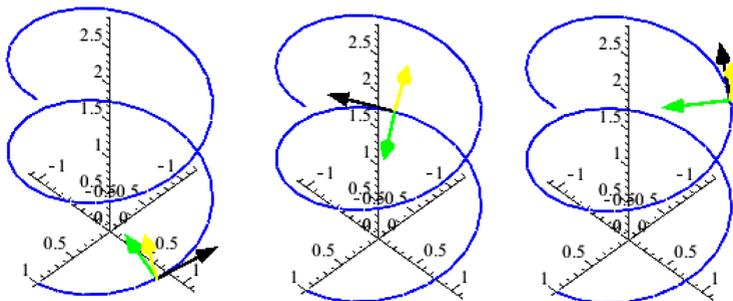


Рис. 2.2.46

Помимо команды, иллюстрирующей все базисные векторы естественного трехгранника в Maple, есть аналогичные команды, отвечающие за каждое из ребер в отдельности. Эти команды отличаются от приведенной лишь тем, что демонстрируют движение только одного базисного вектора, а не всех трех одновременно. Это команды *TangentVector* (единичный вектор касательной), *Binormal* (единичный вектор бинормали) и *PrincipalNormal* (единичный вектор главной нормали). Для примера покажем все кадры анимации для трех команд при условии, что просчитывается 11 векторов (рис. 2.2.47).

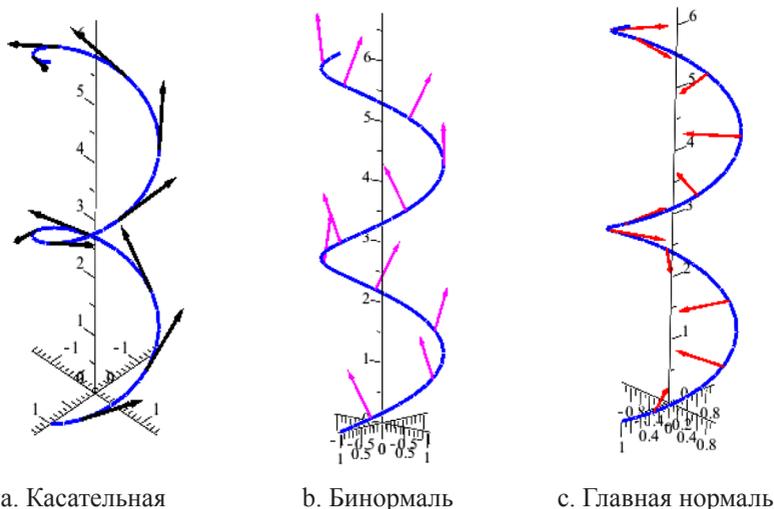


Рис. 2.2.47

Соприкасающаяся окружность. Также в Maple есть команда, иллюстрирующая такое понятие дифференциальной геометрии, как *радиус кривизны*. Напомним, что это величина, обратная кривизне кривой в некоторой точке кривой. Данная команда называется *RadiusOfCurvature* и также имеет опцию анимации. Для иллюстрации используется соприкасающаяся окружность.

О п р е д е л е н и е [52]. Рассмотрим всевозможные окружности, касающиеся кривой Γ в точке M_0 . Та из окружностей, порядок соприкосновения которой с кривой Γ не ниже двух, называется *соприкасающейся окружностью*.

Можно показать, что такая окружность существует, лежит в соприкасающейся плоскости к кривой, ее центр расположен на главной нормали и радиус является величиной, обратной кривизне кривой в данной точке.

Пример использования команды *RadiusOfCurvature* приводится ниже на рис.2.2.48 с двумя кадрами анимации.

RadiusOfCurvature($\langle \cos(t), 0.5 \cdot \sin(t), 0.2 \cdot t \rangle$, *output = animation*,
circles = 20, scaling = constrained, range = 0 ..10, curveoptions
= [color = black], circleoptions = [color = red], axes = normal)

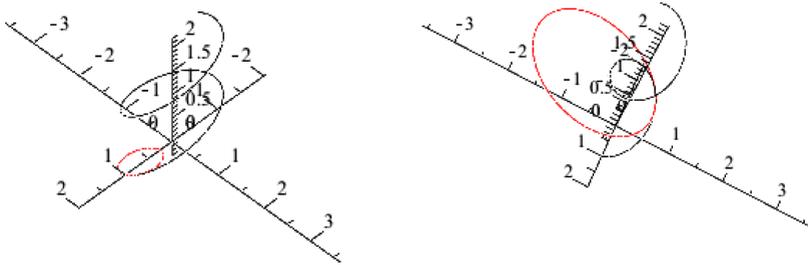


Рис. 2.2.48

В целом разработчики Maple создали достаточно большое количество готовых команд, помогающих в освоении курса теории кривых. В Maple даже есть интерактивный тренажер по изучению линий в пространстве (рис. 2.2.49). Команда *SpaceCurveTutor* дает возможность в интерактивном режиме задавать кривую в пространстве с помощью некоторой ее параметризации в декартовой, цилиндрической или сферической системе координат. В анимационном режиме данный тренажер позволяет продемонстрировать один из элементов: естественный трехгранник, направляющий век-

тор касательной, направляющий вектор главной нормали, направляющий вектор бинормали, единичный направляющий вектор касательной, единичный направляющий вектор главной нормали, единичный направляющий вектор бинормали, соприкасающиеся окружности.

*with(Student[VectorCalculus]) :
SpaceCurveTutor()*

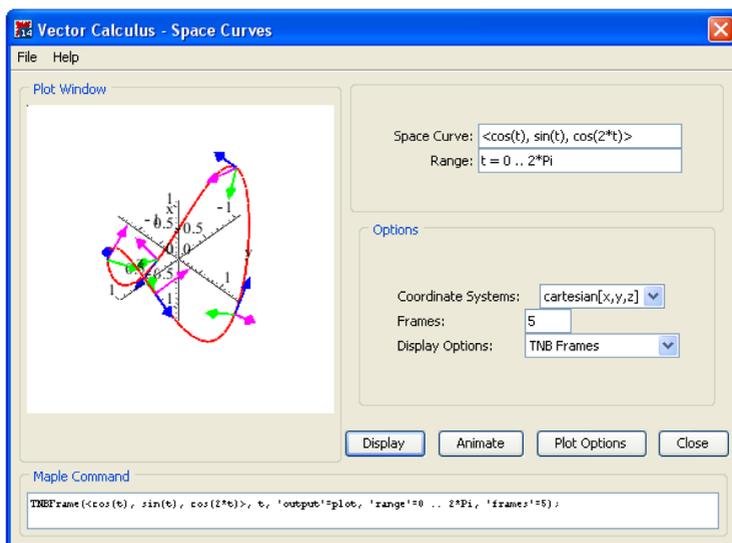


Рис. 2.2.49

§ 2.3. Компьютерная анимация в курсе дискретной математики

Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучением свойств различных математических структур, имеющих дискретный (конечный, финитный) характер [3; 20; 21; 22; 26; 47; 62].

Характер объектов, исследуемых дискретной математикой, настолько своеобразен, что методов классической

математики не всегда достаточно для их изучения. Поэтому те специфические методы, которые применяются для очень широкого класса конечных (финитных) дискретных объектов, и были объединены в общее направление – дискретную математику.

Несмотря на то, что отдельные направления дискретной математики зародились в глубокой древности (поиски вычислительных алгоритмов и др.) и совершенствовались параллельно с классической математикой, наиболее интенсивно дискретная математика стала развиваться в XX столетии. Стимулом для развития многих направлений дискретной математики явились запросы теоретической кибернетики, непосредственно связанной с развитием ЭВМ (поскольку работа и функционирование компьютера – это дискретный процесс).

Использование непрерывной математики или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает: дискретную или непрерывную.

В данном параграфе остановимся на рассмотрении анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra при моделировании основных дискретных объектов, изучаемых в педагогическом вузе в рамках дисциплины «Дискретная математика», таких как: числовые последовательности и рекуррентные соотношения (комбинаторные задачи, приводимые к рекуррентным соотношениям); конечные графы.

Одними из основных объектов школьного и вузовского курса математики являются числовые последовательности. Напомним, что последовательностью называется функция натурального аргумента $y_n = f(n)$. Значения функции $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, $y_3 = f(3)$, ... называются членами последовательности, а сама последовательность часто обозначается (y_n) . Например, последовательность $(y_n) = (n^2)$. Члены этой последовательности: $y_1 = 1^2$, $y_2 = 2^2$, $y_3 = 3^2$, ..., $y_n = n^2$,

Способы задания числовых последовательностей

– *Словесный* – заключается в словесном описании членов последовательности. Например, словесно зададим последовательность следующим образом: «Последовательность квадратов натуральных чисел».

– *Аналитический* – состоит в задании членов последовательности с помощью явной формулы от натурального аргумента. Например, последовательность задана формулой $y_n = n^2$, где $n \in \mathbb{N}$, согласно которой можно определить члены последовательности для любого натурального n : $y_1 = 1^2$, $y_2 = 2^2$, $y_3 = 3^2, \dots$.

– *Графический* – с помощью графика функции натурального аргумента. Например, несколько первых членов последовательности квадратов натуральных чисел заданы на рис. 2.3.1 точками графика функции $y_n = n^2$, где $n \in \mathbb{N}$.

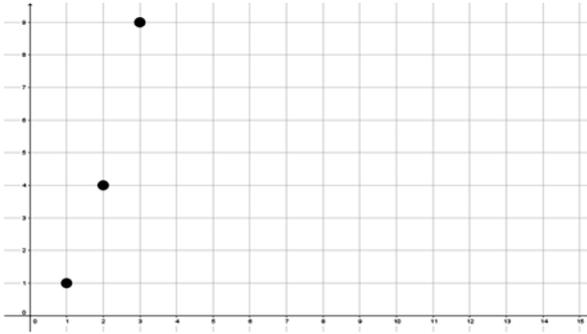


Рис. 2.3.1

– *Рекуррентный* (от латинского слова *recurrere* – возвращаться) – путем задания *рекуррентного соотношения* – условия, позволяющего начиная с некоторого члена последовательности однозначно выражать его через предыдущие члены. Последовательность квадратов натуральных чисел задает следующее рекуррентное соотношение: $y_n = 3y_{n-1} - 3y_{n-2}$.

${}^2+y_{n-3}$, $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=9$, $n \geq 4$. Известные из школьного курса математики арифметическую и геометрическую прогрессии задают соответственно рекуррентные соотношения: $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ и $a_{n+1}=qa_n$.

Рекуррентные соотношения играют важную роль при составлении компьютерных программ. Многие программы основаны на так называемых рекурсивных процедурах. Процедура называется *рекурсивной*, если она обращается сама к себе, но с измененными входными данными. В каждой из них одна и та же операция последовательно применяется к возникающим с помощью этой же операции объектам. Зачастую такая операция задается рекуррентным соотношением (1) $a_n=f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$, где $n=0, 1, 2, \dots$, – условием, позволяющим однозначно находить любой член последовательности, начиная с некоторого, по k непосредственно предшествующих ему членов. Такое соотношение называют рекуррентным соотношением k -го порядка.

Рекуррентная (возвратная) последовательность k -го порядка характеризуется тем, что каждый ее член (начиная с $(k+1)$ -го) выражается через одно и то же количество k непосредственно предшествующих ему членов по формуле (1). Иными словами, для того, чтобы найти $(k+1)$ член возвратной последовательности, нужно как бы вернуться к ее k предыдущим членам.

В качестве первого примера в среде GeoGebra изготовим общий анимационный чертеж для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением (формулой).

З а д а ч а 1. Построить анимационный чертеж для демонстрации различных последовательностей, задаваемых аналитическим выражением.

П о с т р о е н и е (рис. 2.3.2).

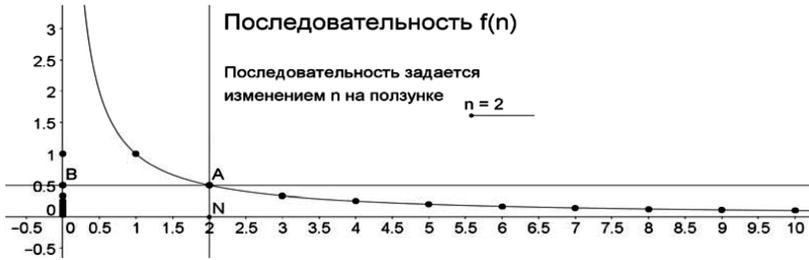


Рис. 2.3.2

1. Строим ползунок для натуральной переменной n .
2. Строкой ввода строим график функции $y = f(n)$.

Например, $y = \frac{1}{n}$.

3. Строим точку $N = (n, 0)$, проводим через нее вертикаль, отмечаем точку A пересечения вертикали с графиком данной функции, проводим горизонталь через точку A и отмечаем точку B пересечения горизонтали с осью ординат. Заставляем точки A и B оставлять следы и изменяем на ползунке переменную n . В результате на оси ординат появляются члены последовательности один за другим, и одновременно точки графика данной последовательности. Теперь строкой ввода можно заменить функцию $y = f(n)$ на новую и перемещением точки на ползунке построить новую последовательность и ее график.

Перейдем к последовательностям, заданным рекуррентным соотношением.

Само понятие рекуррентного соотношения впервые было введено итальянским математиком Леонардо из Пизы (около 1180–1240), более известным как Фибоначчи. В книге «*Libro Abaci*», появившейся в 1202 году, он рассмотрел задачу о кроликах (см. задача 2).

Задача 2. Пара «взрослых» кроликов раз в месяц приносит потомство из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рожде-

ния уже сами приносят такой же приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна новорожденная пара кроликов, и в течение этого года кролики не умирают, а их воспроизводство не прекращается?

Р е ш е н и е. Будем считать количество пар кроликов (самца и самки) по прошествии года. Годовой промежуток времени разобьем на месячные промежутки $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(6,7)$, $(7,8)$, $(8,9)$, $(9,10)$, $(10,11)$, $(11,12)$, $(12,13)$. Нас интересует количество кроликов в последнем временном промежутке, по прошествии года. Будем считать, что изменение количества пар кроликов в результате родов происходит на рубежах этих промежутков.

Представим себе три клетки: клетку A для новорожденных (до одного месяца), клетку B для месячных (до двух месяцев) и клетку C для «взрослых» кроликов (старше двух месяцев). Для промежутка времени $(i, i+1)$ количество пар кроликов в клетках A , B и C обозначим соответственно через a_i , b_i и c_i . Общее количество пар кроликов в этом временном промежутке обозначим $s_i = a_i + b_i + c_i$. Расположение пар кроликов по клеткам можно характеризовать набором (a_i, b_i, c_i) . Тогда в следующий временной промежуток $(i+1, i+2)$ пары из клетки B становятся «взрослыми» и переводятся в клетку C , в которой теперь будет $b_i + c_i$ пар. Пары из A становятся однемесячными и мы их переводим в клетку B , так что в этой клетке будет a_i пар. Все пары из C приносят приплод в количестве $b_i + c_i$ пар, который помещаем в клетку новорожденных A . Расположение пар по клеткам теперь характеризуется набором $(b_i + c_i, a_i, b_i + c_i)$. Общее количество пар становится равным $s_{i+1} = (b_i + c_i) + a_i + (b_i + c_i) = a_i + 2b_i + 2c_i$. На следующем промежутке времени $(i+2, i+3)$ будем иметь распределение по клеткам, характеризуемое набором $(a_i + b_i + c_i, b_i + c_i, a_i + b_i + c_i)$, и общее количество пар будет равно $s_{i+2} = (a_i + b_i + c_i) + (b_i + c_i) + (a_i + b_i + c_i) = 2a_i + 3b_i + 3c_i$. Видим, что $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$.

Получили рекуррентное соотношение, которое позволяет вычислить s_{i+2} , если известны s_i и s_{i+1} , для $i = 0, 1, 2, \dots$. Числа, удовлетворяющие такому условию, принято называть *числами Фибоначчи*.

По условию задачи в новогоднюю ночь, ровно в полночь мы отмечаем день рождения пары кроликов, которую помещаем в клетку A , и с нее начинаем счет. В начальный временной промежуток $(0, 1)$ расположение кроликов в клетках A, B, C можно характеризовать набором $(1, 0, 0)$. Всего пар $s_0 = 1$. Ровно через месяц наша пара подрастет и мы одномесячных переведем в клетку B . Остальные клетки не заняты, и распределение по клеткам можно характеризовать набором $(0, 1, 0)$. Общее количество пар $s_1 = 1$. Используя рекуррентное соотношение, находим последовательно: $s_2 = s_0 + s_1 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = s_1 + s_2 = 1 + 2 = 3$, ..., $s_{12} = 233$. Ответ: после новогодней ночи следующего года будет 233 пары кроликов.

Можно усложнить задачу и спросить, сколько будет через год новорожденных пар, одномесячных и «взрослых» кроликов? Для ответа на этот вопрос вычисляем последовательно числовые наборы (a_i, b_i, c_i) на каждом временном промежутке. Приведем эти вычисления в виде таблицы.

Таблица 2

Т	A	B	C	s
(0,1)	1	0	0	1
(1,2)	0	1	0	1
(2,3)	1	0	1	2
(3,4)	1	1	1	3
(4,5)	2	1	2	5
(5,6)	3	2	3	8
(6,7)	5	3	5	13
(7,8)	8	5	8	21
(8,9)	13	8	13	34
(9,10)	21	13	21	55
(10,11)	34	21	34	89
(11,12)	55	34	55	144
(12,13)	89	55	89	233

Здесь T обозначает столбец временных промежутков, A , B и C – столбцы соответствующих клеток, s – столбец общего количества пар кроликов. При заполнении каждой следующей строки содержимое клетки B равно содержимому клетки A предыдущей строки. Содержимое клеток A и C одинаково и равно сумме содержимого клеток B и C предыдущей строки.

Ответ: после новогодней ночи следующего года будет 89 новорожденных кроликов, столько же «взрослых» и 55 одномесечных.

Рассмотрим метод анимационно-геометрического моделирования последовательности чисел Фибоначчи в среде GeoGebra.

Для разнообразия будем считать, что накануне Нового года нам подарили одну пару кроликов в возрасте больше одного месяца и в новогоднюю ночь самец и самка впервые увидели друг друга. Тогда распределение по клеткам в начальный временной период $(0,1)$ опишется либо набором $(0,1,0)$, либо набором $(0,0,1)$. В любом случае общее количество пар равно $s_0 = 1$. Во второй временной период $(1,2)$ будем иметь набор $(1,0,1)$ и $s_1 = 2$. Используя рекуррентное соотношение $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$, в этом случае получаем: $s_2 = s_0 + s_1 = 1 + 2 = 3$, и так далее, после новогодней ночи следующего года будем иметь $s_{12} = 377$ пар кроликов.

Изобразим геометрически числа Фибоначчи точками $A_i(0, s_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 3-4). Алгоритм анимационно-геометрического моделирования последовательности чисел Фибоначчи в среде GeoGebra состоит из двух частей: начала алгоритма (построение точек A_0 и A_1 , рис. 2 при $t = 0$) и шага алгоритма (осуществление рекурсии, рис. 2.3.3 при $t = 1$, шаг $n = 4$).

получаем как точки последовательности (следы точки A), так и точки графика последовательности (следы точки B).



Рис. 2.3.4

Поиск других возможностей реализации рекурсивных процедур в среде GeoGebra при задании последовательностей можно предложить обучающимся в качестве учебно-исследовательского проекта.

Рассмотрим еще один пример использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при решении некоторых комбинаторных задач, в ходе решения которых приходим к рекуррентному соотношению.

Главным признаком задач комбинаторного типа является вопрос задачи, который звучит как «Сколько вариантов?» или «Сколькими способами?». Решение комбинаторных задач напрямую зависит от того, понял ли решающий их смысл, сумел ли он правильно представить действие или процесс, которые были описаны в задаче.

Компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

В качестве примера рассмотрим алгоритм построения компьютерной модели для решения одной из известных комбинаторных задач – задачи о ханойской башне (см. задача 3).

Задача 3. Имеется три стержня и n колец разного размера. Вначале все кольца находятся на одном из трех стержней в порядке убывающего размера, как показано на рис. 2.3.5. Нужно переместить имеющиеся кольца на другой стержень так, чтобы они остались в том же порядке. Этого нужно добиться, соблюдая следующие правила:

- на каждом шаге ровно одно кольцо перемещается с одного стержня на другой;*
- кольцо большего размера нельзя помещать на меньшее;*
- один из стержней можно использовать в качестве промежуточного.*

Покажите, что это всегда можно сделать, и найдите, за какое наименьшее число перекладываний можно переместить k колец: а) $k=2$; б) $k=3$; в) $k=4$.

Рассмотрим алгоритм построения анимационной модели для решения данной задачи при $k=3$ в компьютерной среде GeoGebra:

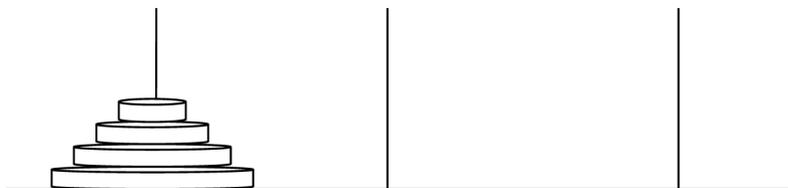


Рис. 2.3.5

1 шаг. С помощью инструментов «Прямая» изображаем три стержня, а с помощью инструмента «Многоугольник» изображаем 3 кольца на одном из стержней. Создаем ползунок с именем n для подсчета числа перекладываний ($n \geq 0$,

$n \in \mathbb{Z}$) (рис. 2.3.6). Правой кнопкой мыши поочередно «кликаем» на каждое кольцо пирамиды и в меню «Свойства» выбираем вкладку «Дополнительно», с помощью которой задаем условия отображения для самого верхнего кольца $n=0$, для среднего кольца – $n=0$ или $n=1$, для самого большого кольца – $n=0$ или $n=1$ или $n=2$ или $n=3$.

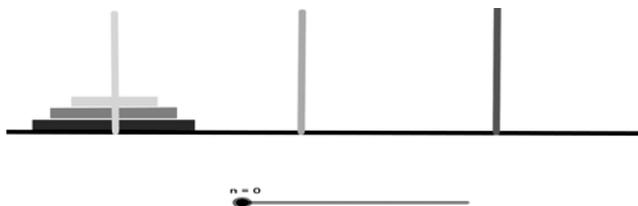


Рис. 2.3.6

2 шаг. Создаем копию верхнего кольца наименьшего размера и помещаем его на один из свободных стержней и устанавливаем для него условие отображения: $n=1$ или $n=2$.

3 шаг. Создаем копию среднего кольца и помещаем его на свободный стержень и устанавливаем для него условие отображения: $n=2$ или $n=3$ или $n=4$ или $n=5$ (рис. 2.3.7).

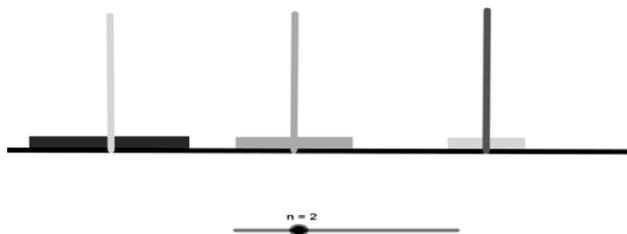


Рис. 2.3.7

4 шаг. Создаем еще одну копию верхнего кольца наименьшего размера и помещаем его на кольцо среднего размера и устанавливаем для него условие отображения: $n=3$ или $n=4$.

5 шаг. Создаем копию самого большого кольца и помещаем его на освободившийся стержень и устанавливаем для него условие отображения: $n=4$ или $n=5$ или $n=6$ или $n=7$ (рис. 2.3.8).

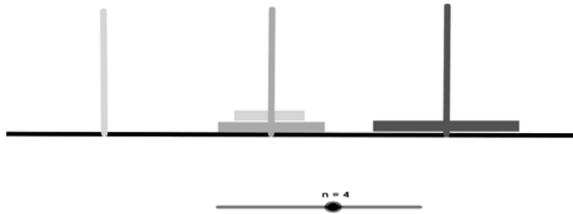


Рис. 2.3.8

6 шаг. Повторяем шаги 2, 3 и 4 – перекладываем кольца среднего и наименьшего размера на стержень с наибольшим кольцом, изменяя соответствующие условия отображения для этих объектов (рис. 2.3.9). Для ползунка n можно задать анимацию, в результате чего получится анимационный чертеж, иллюстрирующий процесс решения задачи для $k=3$.



Рис. 2.3.9

С дидактической точки зрения довольно поучительным будет задание для учащихся, заключающееся в самостоятельном построении анимационных моделей для решения данной задачи при $k=4$. В процессе построения такой модели для k колец учащиеся могут заметить, что как только удалось переложить кольцо наибольшего размера с одного

стержня на другой, задача сводится к уже знакомой – задаче о перекладывании $(k-1)$ верхних колец. В результате учащиеся приходят к гипотезе о том, что если наименьшее число перекладываний, за которое можно переложить k колец, обозначить P_k , то оно будет равно сумме следующих чисел: P_{k-1} – наименьшее число перекладываний верхних $(k-1)$ колец с одного стержня на другой; 1 – одно перекладывание самого нижнего большого кольца и P_{k-1} – наименьшее число перекладываний, за которое можно снова переложить $(k-1)$ верхние кольца на кольцо наибольшего размера. Приходим к рекуррентному соотношению: $P_k = 2P_{k-1} + 1$.

Таким образом, компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

Анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra можно использовать и в обучении элементам теории графов [12], [13].

Специфика теории графов позволяет вводить ее основные понятия в предметную область не только вузовского математического образования, но и в образование школьников, методологически связывая их с практикой, показывая пути возникновения этих понятий при помощи формализации и обобщения различных сторон действительности.

Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ставить вопрос о введении ее элементов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрически – в виде простого, удобного в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Теория графов предлагает модели для всякой системы с бинарными отношениями. Если в изучаемом явлении выделить непустое множество каких-то элементов и множество бинарных отношений, заданных на первом множестве, то, как только удастся разумно соотнести вершинам графа интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между ними, полученный граф становится математической моделью изучаемого явления, а свойства графа отражают структурные свойства этого явления [26].

Система динамической геометрии GeoGebra позволяет с помощью создания интерактивных диаграмм графов, орграфов, мультиграфов, мультиорграфов, псевдографов и псевдоорграфов, которые возможно динамически изменять, осваивать базовые понятия и алгоритмы теории графов. Например, для лучшего восприятия и различия видов графов в системе GeoGebra можно создать видеоролик превращения графа в мультиграф, а затем в псевдограф или орграфа в мультиорграф, а затем в псевдоорграф [12].

При рассмотрении понятия «изоморфные графы» студентам можно предложить так называемое задание «Калейдоскоп», в ходе выполнения которого необходимо создать диаграммы графов в системе GeoGebra, изображая вершины графа симметрично относительно пересекающихся прямых, с помощью инструмента «Отражение относительно прямой». Изменяя положение начальной вершины, симметрично меняют свое положение и другие вершины графа, в результате получаем новые изображения диаграмм исходного графа, сохраняющие симметричность вершин и напоминающие калейдоскоп [12].

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные и разнообразные задачи практического контекста и довольно нетривиальные задачи дискретной математики.

Одной из судьбоносных для развития теории графов является следующая задача о трех домах и трех колодцах (см. задача 4).

Задача 4. Имеются три дома и три колодца (рис. 2.3.10). Каждый хозяин пользуется любым из трех колодцев, но не любит встречаться с другими хозяевами. Можно ли проложить непересекающиеся дорожки, соединяющие каждый из домов с каждым колодцем?

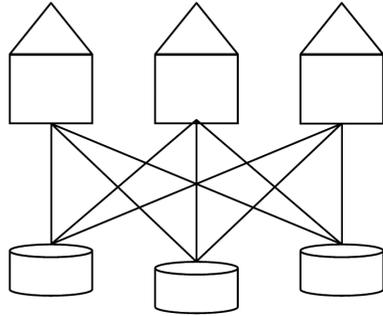


Рис. 2.3.10

Если к решению данной задачи применить язык теории графов, а именно: соотнести домам и колодцам вершины графа, дорожкам – ребра графа, то решение задачи сводится к вопросу о существовании плоской укладки двудольного графа $K_{3,3}$.

Во многих случаях не имеет значения, как изобразить граф, поскольку изоморфные графы несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, можно ли нарисовать граф на плоскости или на любой другой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались, то есть, чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электросхемы наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

На языке теории графов речь идет в подобных случаях об укладке графа. Граф G укладывается в заданное пространство E , если существует изоморфизм j графа G на граф G' , на-

ходящийся в пространстве E , причем все простые кривые, соответствующие ребрам графа G (образы ребер графа G), пересекаются только в инцидентных этим ребрам вершинах.

С методической точки зрения при знакомстве студентов с данным разделом теории графов целесообразно их вовлечь в эксперимент по поиску решения задачи о трех домах и трех колодцах с помощью компьютерной среды GeoGebra.

На первом этапе решения задачи, студентам предлагается изобразить диаграмму графа $K_{3,3}$ (рис. 11) в GeoGebra с помощью инструмента «Отражение относительно прямой», построив вершины, симметричные вершинам «Дом1», «Дом2», «Дом3». Изменяя положения этих вершин, получаем новые изображения графа $K_{3,3}$ – изоморфные графы.

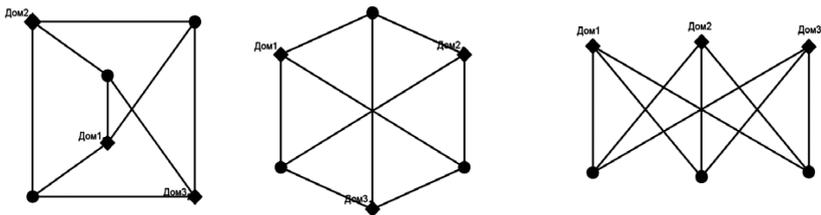


Рис. 2.3.11

Обучающиеся в ходе компьютерного эксперимента убеждаются, что все попытки осуществить плоскую укладку графа $K_{3,3}$ неизбежно заканчиваются неудачей. Как правило, легко нарисовать 8 непересекающихся дорожек, но девятая обязательно пересечет хотя бы одну из этих восьми. Конечно, эти неудачи не случайны. Задача не имеет решения на плоскости.

На втором этапе решения задачи студентам предлагается попробовать уложить граф $K_{3,3}$ на поверхности сферы. И опять все попытки заканчиваются неудачей. В ходе эксперимента студенты убеждаются, что и на поверхности сферы задача не имеет решения (рис. 2.3.12).

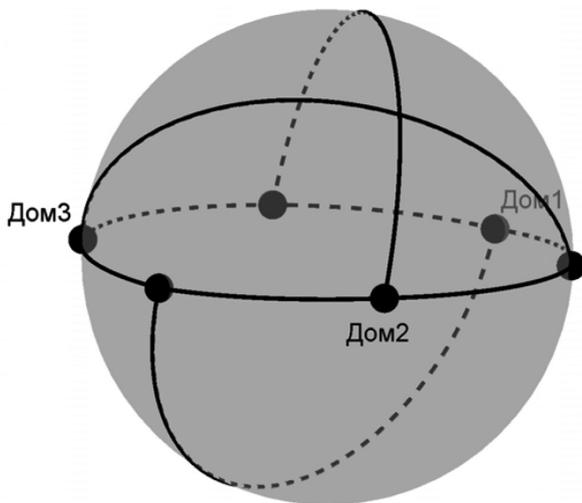


Рис. 2.3.12

Это тоже не случайно, поскольку граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен. Доказательство этого факта можно проиллюстрировать с помощью построения в среде GeoGebra стереографической проекции графа, уложенного на сфере. Пусть граф G уложен на сфере s , тогда на сфере можно выбрать точку N (северный полюс), не лежащую на ребрах графа и не совпадающую ни с одной из вершин. После этого следует провести плоскость Π , касающуюся сферы в точке S (южный полюс), диаметрально противоположной N . Затем можно применить к графу G проекцию с центром в точке N (стереографическую проекцию). Так как между точками сферы s , отличными от N , и их стереографическими проекциями на плоскость Π существует биективное соответствие, то граф G' – образ графа G – будет плоским и изоморфным G . Поэтому G – планарный граф. Обратное утверждение доказывается аналогично, исходя из того же чертежа.

В результате построения на этом этапе в GeoGebra стереографической проекции для графа $K_{3,3}$ обучающиеся убеждаются в непланарности этого графа (рис. 2.3.13).

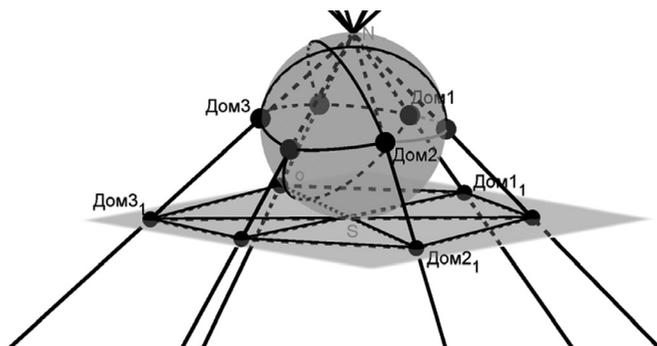


Рис. 2.3.13

Проведение эксперимента в среде GeoGebra на первом и втором этапе решения задачи приводит студентов к выводу о необходимости конструирования моста или туннеля, соответствующих девятой дорожке.

На третьем этапе решения задачи предлагаем студентам изобразить в среде GeoGebra укладку графа $K_{3,3}$ в трехмерном пространстве (рис. 2.3.14).

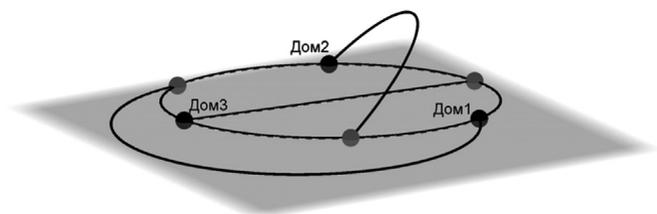


Рис. 2.3.14

После проведения описанного выше эксперимента рассматриваем и доказываем утверждение о том, что любой граф укладывается в трехмерное евклидово пространство.

С помощью встроенных команд «МинимальноеОстовноеДерево», «КратчайшееРасстояние» и «Коммивояжер», которые находятся в списке команд раздела «Дискретная математика» компьютерной среды GeoGebra, можно решать ряд задач практического содержания, создавая интерактивные графовые модели [13].

Рассмотрим примеры решения практико-ориентированных задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra (см. задачи 5–6).

Задача 5. Перед вами представлен фрагмент карты государственного природного заповедника «Столбы» в компьютерной среде GeoGebra с выбранной условно системой координат (рис. 2.3.15). Свое название «Столбы» получили не случайно. Основной достопримечательностью территории Саянских отрогов стали сиенитовые скалы, по велению природы принявшие облик исполинских великанов с угадываемыми очертаниями людей, животных и мифологических существ, с уникальной структурой ходов и лазов.

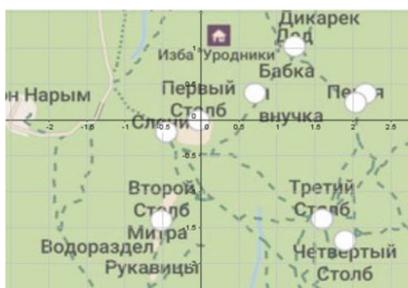


Рис. 2.3.15

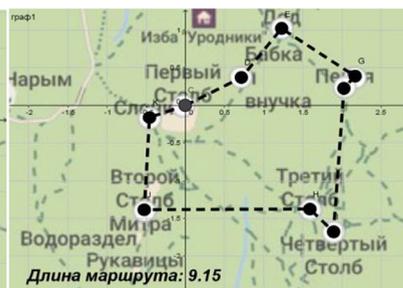


Рис. 2.3.16

Почти все скалы заповедника имеют имена. Всего скал в заповеднике «Столбы» более 100 высотой до 90 метров. Самым популярным для туристов является круговой маршрут, начинающийся от Первого Столба, проходящий через скалы Внучка, Бабка, Дед, Перья, Львиные ворота, Четвер-

тый, Третий и Второй столбы и возвращающийся назад к Первому Столбу и Слонику [Заповедник Столбы zarovednik-stolby.ru]. Составьте оптимальный замкнутый маршрут (маршрут наименьшей длины, проходящий через выделенные белыми точками на карте, Столбы только один раз) экскурсионного тура. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до сотых) наименьшую длину экскурсионного маршрута.

На языке теории графов задача сводится к отысканию гамильтонова цикла наименьшей длины в графе с вершинами, соответствующими заданным Столбам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов.

1. С помощью инструмента «Точка» возле каждого Столба на карте расставляем условно точки – вершины графа: А, В, С, D, E, F, G, H, I, J, K, L.

2. Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «Коммивояжер» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа: «Коммивояжер[А, В, С, D, E, F, G, H, I, J, K, L]». В результате получаем гамильтонов цикл наименьшей длины (рис. 2.3.16).

3. Соединяем отрезками полученный маршрут и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт «Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.

Задача 6. Перед вами карта городов России с выбранной условно системой координат (рис. 2.3.17). Составьте оптимальную систему авиарейсов (т.е. из любого города в любой другой можно перелететь единственным авиарейсом наименьшей длины), соединяющих данные города. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до десятых) наименьшую длину, установленной системы авиарейсов.



Рис. 2.3.17

На языке теории графов задача сводится к отысканию минимального остовного дерева в графе с вершинами, соответствующими заданным городам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов.

1. С помощью инструмента «Точка», возле каждого города на карте расставляем условно точки – вершины графа: A, B, C, D, E, F, G.

2. Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «МинимальноеОстовноеДерево» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа: «МинимальноеОстовноеДерево[A,B,C,D,E,F,G]». В результате получаем минимальное остовное дерево для данного графа (рис. 2.3.18).

3. Соединяем отрезками полученный маршрут авиарейсов и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт «Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.



Рис. 2.3.18

Таким образом, использование компьютерной системы GeoGebra позволяет продемонстрировать решение многих практико-ориентированных задач на языке теории графов.

В частности, анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra можно использовать при разработке и создании тестов по дисциплине «Дискретная математика».

В современном образовании применение тестов является необходимым компонентом обучения. Слово «тест» английского происхождения и на языке оригинала означает «испытание», «проверка». Педагогический тест – это инструмент оценивания обученности учащихся, состоящий из системы тестовых заданий, стандартизированной процедуры проведения, обработки и анализа результатов. В узком смысле тестирование в педагогике означает использование стандартизированных педагогических тестов для измерения и оценки результатов обучения. В широком же смысле тестирование – это любое испытание с целью измерения достижений обучаемого [45].

Компьютерные дидактические тесты на сегодняшний день приобретают все большее распространение, что обу-

словлено стремлением повысить оперативность и объективность оценки качества обучения.

Тесты могут быть как контролирующими, так и обучающе-тренировочными. Первые предназначены для оценивания учебных достижений учащихся, вторые – помогают учащимся выявить и устранить существующие пробелы в их подготовке. В обучающе-тренировочных тестах предусмотрен анализ выполнения учащимся каждого тестового задания, результат которого сопровождается комментариями, разъяснениями, демонстрацией последствий, возникающих в ситуации выбранных решений, что имитирует присутствие преподавателя в процессе самостоятельного изучения материала. Применение компьютерных технологий позволяет не только оперативно моделировать наступающие последствия, но и наглядно представлять их с использованием изображения, анимации.

Технология создания тестов в компьютерной среде GeoGebra подразумевает выполнение ряда следующих действий:

1) создание ползунка, с именем n , на количество вопросов: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вопросов; шаг ползунка – 1;

2) оформить первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать первый вопрос;

3) создать ползунок для выбора ответа на первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вариантов ответа; шаг ползунка – 1; установить флажок «закрепленный» и флажок «вертикальный» (для каждого вопроса нужен свой ползунок для формирования ответа);

4) оформить меню выбора ответа: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать варианты возможных ответов «в столбик» рядом с вертикальным ползунком;

5) подготовить поле для следующего вопроса, скрыв все что относится к первому вопросу: правой кнопкой мыши кликнуть на каждый объект первого вопроса и выбрать в меню вкладку «свойства»; для всех объектов во вкладке «дополнительно» отметить условие отражения объектов $n=1$;

6) повторяя шаги 2) – 5), создать остальные вопросы так, чтобы для получения ответа необходимо было воспользоваться возможностями программы GeoGebra;

7) создать таблицу для подсчета результатов: в строке ввода задать переменные $B_i = \text{Если}[\langle \text{имя ползунка ответа} \rangle == \langle \text{номер правильного ответа} \rangle, 1, 0]$, где i – номер вопроса; для подсчета правильных ответов в строке ввода задать переменную $S = \sum_{i=1}^n B_i$, с помощью команды – Сумма[$\{B_i\}$], где i – номер вопроса; для отображения на экране результатов тестирования в строке ввода задать таблицу, используя команду – Таблица[$\{i, B_i, S\}$], где i – номер вопроса);

8) если необходимо ограничить время выполнения теста, тогда для ползунка n , отвечающего за смену вопросов на экране, нужно задать анимацию и время просмотра каждого вопроса: правой кнопкой мыши кликнуть на ползунк n и выбрать в меню вкладку «анимировать»; во вкладке «свойства» для ползунка n задать скорость анимации.

В качестве примера представим фрагмент теста, разработанного в соответствии с описанной выше технологией в компьютерной среде GeoGebra.

На рисунке 2.3.19 проиллюстрировано, как выглядят вопросы теста в компьютерной среде GeoGebra. В ходе выполнения тест, тестируемый, управляя вертикальным ползунком, выбирает вариант ответа и переходит к следующему вопросу. Если в дополнительных свойствах для объекта «Таблица результатов» не указывать условия отображения данного объекта, то тогда обучающийся может наблюдать результаты и оценку выполнения теста.

Вопрос 1.
 Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красном, синем и зелёном костюмах. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и костюм Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а костюм нет.

Постройте граф соответствия между множеством клоунов и множеством цветов для туфель и костюмов (соедините пунктирным ребром отсутствие соответствия, а сплошным ребром - возможное соответствие между объектами указанных множеств) и определите цвет костюмов и туфель у Бомы и Бима.

Варианты ответа

1. Костюм Бомы синий, а туфли зелёные
Туфли и костюм Бима красные
2. Костюм Бомы красный, а туфли зелёные
Туфли и костюм Бима синие
3. Костюм Бомы зелёный, а туфли синие
Туфли и костюм Бима красные
4. Костюм и туфли Бомы зелёные
Туфли и костюм Бима красные

n = 1

Рис. 2.3.19

На рисунке 2.3.20 представлен результат выполнения теста: в таблице указаны баллы за ответ на каждый вопрос теста, общая сумма баллов и оценка выполнения теста.

Компьютерный лабораторный практикум по дисциплине «Дискретная математика» как разновидность практических занятий предполагает активное использование систем компьютерной математики в учебно-познавательном процессе. В ходе выполнения лабораторных работ будущий учитель приобретает опыт применения систем компьютерной математики в будущей профессиональной деятельности.

В качестве основных этапов лабораторной работы мы выделяем следующие: ориентировочный, конструкторский, заключительный.

В рамках ориентировочного этапа целесообразно уточнить основную цель и предполагаемые результаты работы и

Результаты тестирования и оценка

- {1} {1}
- {2} {1}
- {3} {1}
- {3} {x $\frac{7}{2}$ "отлично"}



Рис. 2.3.20

провести актуализацию знаний, которые могут быть востребованы в ходе выполнения лабораторной работы.

В ходе конструкторского этапа осуществляется компьютерное конструирование анимационных чертежей и динамических моделей для решения задач и представления основных объектов дискретной математики.

На заключительном этапе – подведение итогов выполненной работы, обсуждение и представление полученных результатов.

В таблице 3 представим примерное учебно-тематическое планирование лабораторного практикума по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra.

Таблица 3

**Учебно-тематическое планирование
лабораторного практикума по дисциплине
«Дискретная математика» с использованием анимационных
возможностей компьютерной системы GeoGebra**

№ п/п	Наименование темы лабораторной работы	Кол-во ауд. часов	Основная дидактическая цель	Использование анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra
1	2	3	4	5
	Числовые последовательности и способы их задания	2	Формирование навыков компьютерного моделирования числовых последовательностей заданных аналитически и рекуррентно с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Конструирование в компьютерной среде GeoGebra инструмента анимационного представления графиков числовых последовательностей заданных аналитически и рекуррентно

1	2	3	4	5
	Рекуррентные соотношения в комбинаторных задачах	2	Формирование навыков компьютерного моделирования решений некоторых комбинаторных задач с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Построение в компьютерной среде GeoGebra анимационных компьютерных моделей для решения комбинаторных задач, сводимых к рекуррентным соотношениям
	Линейные рекуррентные соотношения	2	Формирование опыта решения линейных рекуррентных соотношений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение линейных рекуррентных соотношений с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra
	Основные понятия теории графов: виды графов, изоморфизм графов	2	Формирование навыков компьютерного представления основных понятий теории графов (виды графов, изоморфизм графов) с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra	Создание в компьютерной среде GeoGebra анимационной презентации различных видов графов. Конструирование анимационных чертежей для демонстрации изоморфных графов (проект «Калейдоскоп»)
	Связность и маршруты в графе	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска маршрутов в графе (алгоритм поиска «вширину») с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск кратчайшего расстояния между вершинами в графе с использованием команды «Кратчайшее Расстояние» компьютерной среды GeoGebra

1	2	3	4	5
	Минимальное остовное дерево	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска минимального остовного дерева в нагруженном графе (алгоритм Краскала, алгоритм Прима) с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск минимального остовного дерева в нагруженном графе с использованием команды «Минимальное ОстовноеДерево» компьютерной среды GeoGebra
	Эйлеровы и гамильтоновы графы. Задача коммивояжера	2	Формирование опыта в реализации алгоритмов поиска эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе (задача о коммивояжере) с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на поиск гамильтонова цикла в нагруженном графе с использованием команды «Коммивояжер» компьютерной среды GeoGebra
	Укладка графа	2	Формирование представлений об укладке графа на некоторой поверхности и в трехмерном пространстве с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение задач об укладке графа на некоторой поверхности и в трехмерном пространстве с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra
	Правильная раскраска вершин графа	2	Формирование опыта в реализации алгоритма правильной раскраски вершин графа с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra	Решение практико-ориентированных задач на раскраску вершин графа с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5
	Технология создания тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra	2	Освоение технологии создания тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra	Создание тестов по дисциплине «Дискретная математика» в компьютерной среде GeoGebra
	Итого	20		

Таким образом, анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra позволяют наглядно представить многие дискретные объекты, изучаемые в педагогическом вузе в рамках дисциплины «Дискретная математика» и, ввести компьютерную анимацию в процесс обучения дискретной математике.

Заключение

В условиях всеобщей информатизации общества казалось бы отшлифованная десятилетиями классическая система математической подготовки школьников и студентов столкнулась с целым рядом проблем. Авторы монографии поставили перед собой задачу – обратить внимание педагогической общественности на все возрастающую роль компьютерной анимации в современной системе обучения математике. Многолетний опыт использования авторами монографии анимационных возможностей систем динамической математики GeoGebra, Живая математика и системы компьютерной алгебры Maple при обучении студентов – будущих учителей математики математическим дисциплинам в педагогическом вузе позволяет с уверенностью констатировать их положительный дидактический эффект.

В монографии приведено теоретическое обоснование методики использования компьютерной анимации при обучении математике, разработана концепция поддержки математических курсов в вузе, готовящем учителя математики, направление подготовки 44.03.01 и 44.03.05 Педагогическое образование, (уровень (степень) «бакалавр»), профили «Математика» и «Математика и Информатика» [57], с использованием компьютерной анимации. В основу этой концепции положены следующие семь принципов: принцип современности, принцип динамизма, принцип адекватности и целесообразности, принцип вариативности, принцип убедительности, принцип обеспечения исследований и, наконец, принцип доступности и автономности. Выделение этих принципов нацеливает на дальнейшую их детализацию и практику применения в реализации исследовательского обучения математике. Приведенные примеры новой методики демонстрируют эффективность использования анимации в практике преподавания курсов алгебры, геометрии и дискретной математики в педагогическом вузе.

Библиографический список

1. Абдулкин В.В., Дерова О.В. Использование компьютерной анимации при обучении решению задач на построение методом геометрических преобразований // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. С. 139–144.
2. Алферов М.Ю. Дидактические возможности и особенности свободной программы динамической геометрии GeoGebra / Научно-методическое издание: Материалы XXIV Международной конференции «Применение инновационных технологий в образовании», 26–27 июня 2013 г., г. Москва, г. Троицк, 2013 г. С. 448–451.
3. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М.: Вильямс, 2004.
4. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч. 1. Геометрия на плоскости: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Изд. 2, дораб. и доп.; Красноярск, 2004. 144 с.
5. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч. 2. Преобразования: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Изд. 3, перераб. и доп.; 2005. 114 с.
6. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч.3. Основания геометрии: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Изд. 2, дораб. и доп.; Красноярск, 2009. 121 с.
7. Арнольд В.И. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2012. 108 с.
8. Атанасян Л.С. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян и др. М.: Просвещение, 2012. 384 с.
9. Башкатова Ю.В. Применение новых информационных технологий в изучении теории функций комплексной переменной. М., 2000. 147 с.

10. Белаичук О.А., Лебедева Н.А. Математический конструктор – интерактивная творческая среда для создания учебных моделей по математике // Научно-практический электронный альманах «Вопросы информатизации образования». URL: http://www.npstoik.ru/vio/inside.php?ind=articles&article_key=212 (25.05.2013).
11. Безумова О.Л., Котова С.Н., Шабанова Н.В. Компьютерная поддержка решения школьных алгебраических задач средствами Geogebra // Современные проблемы науки и образования (электронный журнал). URL: <http://www.science-education.ru/107-8399> (25.05.2013).
12. Большакова Н.С. Применение систем динамической геометрии GeoGebra и компьютерной алгебры Maxima в обучении теории графов / Научно-методическое издание: Материалы XXIV Международной конференции «Применение инновационных технологий в образовании», 26–27 июня 2013 г., г. Москва, г. Троицк, 2013. С. 452–455.
13. Большакова Н.С. Обучение теории графов с помощью системы динамической геометрии GeoGebra // Материалы XXV Международной конференции «Применение информационных технологий в образовании», 25–26 июня 2014 г., г. Москва, г. Троицк, 2014. С. 120–122.
14. Вишняковская Е. Один раз увидеть // Наука и жизнь. 2011. № 12. С. 11–16.
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 2006. 703 с.
16. Гуреев Е.М. Динамическое моделирование в процессе обучения математике (новые принципы обучения, средняя школа) / Библиотека Мошкова. URL: http://lit.lib.ru/g/gurew_e_m/text_0050.shtml (25.05.2013).
17. Джонассен Д.Х. Компьютеры как инструменты познания // Информатика и образование. 1996. № 4. С. 116–131.
18. Дубровский В.Н. Типология динамических чертежей / Материалы XV Международной конференции-выставки «Информационные технологии в образовании» («ИТО-2005»), М., 2005.

19. Дьяченко С.А. Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: дис. ... канд. пед. наук. Орел, 2000. 164 с.
20. Елисеев Е.М., М.Е. Елисеев Основы дискретной математики: учебное пособие. Арзамас, АГПИ им. А.П. Гайдара, 2005.
21. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
22. Жданов С.А., Матросов В.Л., Стеценко В.А. Сборник задач по дискретной математике: учебное пособие. М.: МПГУ, 2005.
23. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов / сост.: Г.А. Аджемян, В.Н. Дубровский и др.). М.: ИНТ, 2013. 205 с.
24. Зайцева В.В. Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий. Елабуга, 2005. 140 с.
25. Калачева С.И. Роль компьютерной анимации в обучении школьников алгебре // Материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VI Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 15–16 ноября 2017 г. С. 116–123.
26. Кейв М.А. Дискретная математика: учебное пособие / КГПУ им. В.П. Астафьева. Красноярск: , 2016.
27. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе /Ю.М. Колягин и др. М.: Просвещение, 1975.
28. Кузнецов О.М. Метод построения динамических моделей плоских мозаик в программе GeoGebra. М.: МЦНМО, 2013. 168 с.
29. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967. 152 с.
30. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).
31. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra. 2-е изд., исправ. и доп.: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2018. 233 с.

32. Ларин С.В. Использование компьютерной анимации при решении исследовательских задач / Материалы II Международной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения». Красноярск, СФУ, 25–28 сентября 2018, ч. 2. С. 139–143.
33. Ларин С.В., Чилбак-оол С.В. Использование компьютерной анимации в школьной алгебре чисел и многочленов / Материалы II Международной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения». Красноярск, СФУ, 25–28 сентября 2018, ч. 2. С. 144–148.
34. Ларин С.В. Компьютерная анимация в обучении математике. «Тулегеновские чтения 2018». Материалы международной научно-практической конференции «Цифровое образование передовые знания и компетентность» в рамках духовного возрождения. 12 апреля, 2018. С. 9–14.
35. Ларин С.В. Компьютерная анимация в исследовательской деятельности. IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе». МПГУ, 4–5 декабря, 2018. С. 121–123.
36. Ларин С.В. Организация учебно-исследовательской деятельности школьников с использованием компьютерной анимации // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. С. 30–35.
37. Ларин С.В. Алгебра: Многочлены 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2018. 136 с. (Серия: Бакалавр. Академический курс).
38. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: Монография. Красноярск: РИО КГПУ, 2001. 368 с.
39. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. 516 с.

40. Майер В.Р., Абдулкин В.В., Апакина Т.В. Двенадцать лекций по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2016. 112 с.
41. Майер В.Р., Апакина Т.В., Манченкова Е.О. Применение компьютерных чертежей-иллюстраций модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского в курсе основания геометрии / Сб. трудов V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» Красноярск, 16–17 ноября 2016. С. 137–141.
42. Майер В.Р., Кузьмина О.А., Анкова В.В. Обучение геометрическим построениям на плоскости с использованием возможностей среды Живая математика // Материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VI Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 15–16 ноября 2017 г. С. 82–94.
43. Майер В.Р., Ворошилова А.А. Применение среды Живая математика при обучении геометрическим преобразованиям студентов будущих учителей математики // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. С. 36–43.
44. Майер В.Р., Бушаева Т.А. Математические этюды о делении угла на три равные части специальными инструментами // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития». Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. С. 50–55.

45. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования (как выбирать, создавать и использовать тесты для целей в образовании). М.: Интеллект центр, 2001.
46. Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» / В.Р. Майер (отв. редактор); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. 165 с.
47. Мельников О.И. Обучение дискретной математике: монография. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
48. Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в пединституте: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. М., 1986.
49. Официальный сайт программы GeoGebra. URL: <http://www.geogebra.org/cms> (дата обращения: 02.11.15).
50. Педагогическая энциклопедия. Т. 1 (гл. ред. А.И. Каиров, Ф.Н. Петров), М.: Советская энциклопедия, 1964.
51. Плясунова У.В. Использование компьютерных математических систем в обучении математике студентов специальности «Информатика» педагогических вузов: автореферат дисс. канд. пед. наук, Ярославль, 2004.
52. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
53. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
54. [ПСП] Приказ Министерства труда и социальной защиты РФ №544н «Об утверждении профессионального стандарта педагога» от 18 октября 2013 года. URL: ug.ru/new_standards/6
55. Пышкало А.М., Моро М.И. Методика обучения математике в 1–3 классах. М., 1978.
56. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. 4-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. 376 с.
57. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования. Уровень высшего образования «бакалавриат». Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, 2013.

58. Филиппова Н. В. Применение систем компьютерной математики и компьютерных технологий при изучении дисциплин высшей математики как один из видов педагогических технологий // Молодой ученый. 2009. № 7. С. 254–259.
59. Храповецкий И.В. Конфигурационный подход / Авторский блог, URL: <http://janka-x.livejournal.com/34117.html> (25.05.2013).
60. Шульга И.И. Генезис понятия «Педагогическая анимация» // Педагогическое образование и наука. 2008. № 1. С. 35–40.
61. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: издательский дом Академии Естествознания, 2016.
62. Энциклопедия: Дискретная математика / Гл. ред. В.Я. Козлов. М.: БРЭ, 2004.
63. Derry S.J. Flexible cognitive tools for problem solving instruction. Paper presented at the annual meeting of The American Educational Research Association, Boston, MA, 1990, April, p. 16–20.
64. Larin S., Mayer V. The Role of Computer animation in Mathematics Teaching / S.V. Larin, V.R. Mayer / Mathematics and Informatics. 2018. №6 (61). P. 542–552.
65. Raul M. Falcon, Ricardo Rios. The use of GeoGebra in Discrete Mathematics. / URL: <https://www.researchgate.net/publication/271765799> (February, 2015), p. 39–50.
66. Semina E.A., Abdulkin V.V. Dynamic Geometry Systems as a Means of Improving the Quality of Geometric Training Bachelor of Pedagogical Education // International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM2014, www.sgemsocial.org, SGEM2014 Conference Proceedings, ISBN 978-619-7105-22-3 / ISSN 2367-5659, September 1-9, 2014, Book 1, Vol. 1, 693–700 pp. DOI: 10.5593/SGEMSOCIAL2014/B11/S3.089

Научное издание

Вячеслав Валерьевич Абдулкин
Светлана Ивановна Калачева
Мария Анатольевна Кейв
Сергей Васильевич Ларин
Валерий Робертович Майер

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ
В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ
В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Монография

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 31.01.19.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 10,25