

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
**КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА**  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)



Институт математики, физики и информатики  
Кафедра математики и методики обучения математике

Направление: 44.04.01 Педагогическое образование  
Направленность (профиль) образовательной программы: Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ  
Зав. кафедрой математики и  
методики обучения математике

Л. В. Шкерина  
(И.О. Фамилия)  
« 10 » декабря 2018г.

Выпускная квалификационная работа  
(магистерская диссертация)

**СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ПИРАМИД  
ПАРКЕТОГРАНИКИ КАК СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ОСНОВА  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТАРШЕКЛАССНИКОВ**

Выполнил студент  
Окладникова Евгения Сергеевна  
(И.О. Фамилия)

5 декабря 2018 г.  
(подпись, дата)

Форма обучения

заочная

Научный руководитель:  
д-р. физ.-мат.н., доцент  
Алексей Викторович Тимофеев  
(ученая степень, должность, И.О. Фамилия)

5 декабря 2018 г.  
(подпись, дата)

Рецензент:  
канд. физ.-мат.н., доцент  
Владимир Иванович Субботин  
(ученая степень, должность, И.О. Фамилия)

5 декабря 2018 г.  
(подпись, дата)

Дата защиты \_\_\_\_\_

Оценка \_\_\_\_\_

Красноярск 2018



## РЕФЕРАТ

Основным математическим результатом диссертационной работы является её теорема 2 о разбиении усечённого октаэдра  $M_{16}$  с единичными рёбрами, т. е. архимедова тела типа  $[4,6,6]$ , на составленные из не более 16 правильных пирамид с единичными рёбрами паркетогранники с рёбрами длины 1 или 2. Описание таких паркетогранников содержит теорема 1, сформулированная во введении и доказанная с участием автора и её учеников в рамках работы международного вебинара «Группы и паркетогранники» на протяжении последних пяти лет. Опыт автора привлечения учащихся и студентов Красноярска к созданию доказательства теоремы 1 отражает вторая, педагогическая часть диссертации. Необходимые видеоматериалы, компьютерные модели, фотографии содержат раздел приложение и компакт диск.

Объект исследования:

проблема классификации типов паркетогранников и процесс её решения, индуцирующий структурные изменения обучения математике и информатике.

Предмет исследования:

симметрии, инструментом изучения которых служат многогранники и группы совмещающих их движений.

Задачи исследования:

К основной задаче исследования следует отнести создание такого доказательства теоремы 2, чтение которого имело бы несколько уровней строгости, соответствующих математической культуре учащихся

средних, старших классов, студентов-математиков и профессионалов. Главная педагогическая задача заключается в том, чтобы опыт автора и её коллег по вебинару «Группы и паркетогранники» введения в математические исследования всех заинтересованных лиц стал достоянием педагогической общественности. Не менее важной является задача систематизации инструментов исследования для решения первых двух задач. В первую очередь к ним относятся программы для систем компьютерной алгебры и графики.

Научная новизна дипломной работы:

Обе теоремы диссертации являются новыми. Практика приложения новых математических результатов в образовании и совместных с учащимися исследований продолжает отечественную традицию, в основе которой лежит опыт ленинградских математиков 1960 годов, перенесённый на современную технологическую базу в других социальных условиях.

Практическая значимость:

Материалы диссертации уже применяются на занятиях в учебных заведениях Красноярска и являются частью мирового научного поиска новых паркетогранников. Эти тела необходимы в кристаллохимии, квазикристаллографии. Их классификация имеет мировоззренческое значение для нашей цивилизации, подобное влиянию классификации правильных тел на древнегреческую философию.

Диссертация содержит 48 страниц, 36 рисунков, приложение и библиографию из 17 названий. Приложен компакт диск с электронным атласом паркетогранников и фотографиями.

## Оглавление

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1 РАЗБИЕНИЯ УСЕЧЁННОГО ИКОСАЭДРА	11
1.1 Идея доказательства теоремы о разбиениях усечённого октаэдра $M_{16} = [4, 6, 6]$ .....	11
1.2 Необходимость использования систем компьютерной алгебры и графики .....	16
Глава 2 ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРКЕТОГРАННИКОВ	23
2.1 Решённые задачи для мотивации потенциальных участников .....	23
2.2 Открытые задачи .....	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	27
Литература .....	28
Приложение .....	31

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования

Настоящая работа является составной частью программы нахождения всех типов выпуклых многогранников с паркетными гранями. Напомним, что паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из равноугольных многоугольников. Паркетогранником называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и быть может правильными гранями. Будем рассматривать паркетные многоугольники, составленные только из правильных многоугольников. Как известно, [6, 7], существует ровно 23 комбинаторных типа таких многоугольников. Четыре из них могут быть представлены правильными  $n$ -угольниками ( $n = 3, 4, 6, 12$ ), а каждый еще из девяти типов можно представить равносторонним паркетным многоугольником. Изображение представителя каждого типа паркетного многоугольника см. в работе [5]. Пока неизвестно каковы все выпуклые равнорёберные паркетогранники. С другой стороны, построены все выпуклые паркетогранники, у которых каждая грань есть либо правильный многоугольник, либо многоугольник, составленный из правильных так, что каждая вершина такого правильного многоугольника служит и вершиной грани, [4]. Оказалось, что кроме бесконечных серий призм и антипризм существует ровно 108 выпуклых тел с правильными гранями и 78 паркетогранников с фиктивными рёбрами, т. е. рёбрами, соединяющими правильные многоугольники одной грани. Эти многогранники в работе [4] построены по алгоритму, позволяющему находить все выпуклые соединения известных паркетогранников по одинаковым граням. Работа алгоритма начинается с обращения к каждому такому выпуклому телу с правильными или паркетными гранями без фиктивных вершин, что

никакая плоскость не рассекает его на многогранники с такими гранями. Полный список таких тел был составлен к 1973 г., [1–3]. В 2018 году научный руководитель опубликовал гипотезу о том, что кроме указанных выше двух бесконечных серий и 186 тел существует ещё только четыре равнорёберных паркетогранника, [8].

Равнорёберные паркетогранники описываются с точностью до подобия. При переходе к паркетогранникам, хотя бы некоторые грани которых обладают типом, который не может иметь равностороннего представителя, получаем бесконечные серии попарно неподобных однотипных паркетогранников. Однотипны, например, все прямоугольные параллелепипеды. В работе [6] показано, что кроме четырёх бесконечных серий существует лишь конечное число типов паркетогранников. Основная проблема теории паркетогранников заключается в нахождении этого числа и самих типов.

Диссертационное исследование посвящено той части будущей теоремы о классификации типов паркетогранников, в которой новые паркетогранники получаются из известных путём соединения одинаковыми гранями. Алгоритм нахождения всех составленных из правильных пирамид паркетогранников с рёбрами длины один или два, при условии, что рёбра пирамид единичные, уже несколько лет отлаживается на вэбинаре "Группы и паркетогранники" (<https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra>). Результаты работы алгоритма помещены в теорему 1. В алгоритм соединения её тел заложены группы симметрий синтезируемых многогранников. Появившиеся в трудах Г. С. М. Коксетера обозначения этих групп (с квадратными скобками) можно найти в публикации [9]. Более детальное описание конечных групп симметрий с примерами соответствующих многогранников опубликовано на странице вэбинара "Группы и паркетогранники" 9 марта 2018 г.<sup>1</sup>

Теорема 1. Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два

---

<sup>1</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2018>

составлен из не более шестнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел:

$$M_1, [3, 3], M_2, [4], M_3, [5]; \quad (1)$$

$$M_1 + M_1, [2, 3], M_1 + M_2, [], M_2 + M_2, [3, 4], M_3 + M_3, [2, 5]; \quad (2)$$

$${}^\circ S_{2,2} + M_1, [2], S_{2,2} + M_2, [3], {}^\circ S_{2,2} + M_2, [2] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & {}^\circ S_{3,1} + M_2, [2], \quad {}^\circ S_{3,1} + M_2, [], \quad S_{3,2} + M_1, [2^+, 6], \\ & S_{2,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], \quad S_{2,2} + S_{2,2}, [2]^+, \quad {}^\circ S_{2,2} + S_{2,2}, [2]; \end{aligned} \quad (4)$$

$${}^\circ S_{4,1} + M_1, [3], {}^\circ S_{4,4} + M_2, []; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & {}^\circ S_{5,1} + M_1, [3, 3], \quad {}^\circ S_{5,2} + M_1, [ ]^+, \quad {}^\circ S_{5,2} + M_2, [2, 2], \\ & {}^\circ S_{4,4} + S_{2,2}, [], \quad {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, [2]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & {}^\circ S_{6,2} + M_2, [], \quad {}^\circ S_{6,4} + M_2, [], \quad {}^\circ S_{6,5} + M_2, [], \\ & S_{4,6} + S_{3,1}, [3], \quad {}^\circ S_{4,6} + S_{3,3}, []; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & {}^\circ S_{7,1} + M_1, [2^+, 2], \quad {}^\circ S_{7,2} + M_1, [], \quad {}^\circ S_{7,3} + M_1, [], \\ & S_{7,4} + M_2, [], \quad {}^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], \quad {}^\circ S_{6,5} + S_{2,2}, [2^+, 2^+]; \end{aligned} \quad (8)$$

$${}^\circ S_{8,4} + M_1, [], {}^\circ S_{8,4} + M_2, [], {}^\circ S_{6,4} + S_{3,1}, [2^+, 4], {}^\circ S_{6,4} + S_{3,3}, [4]; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & {}^\circ S_{9,1} + M_2, [ ]^+, \quad {}^\circ S_{9,2} + M_2, [2, 3], \quad {}^\circ S_{9,4} + M_2, [4], \\ & {}^\circ S_{8,4} + S_{2,2}, [ ]^+, \quad {}^\circ S_{5,1} + S_{5,1}, [2, 3]^+; \end{aligned} \quad (10)$$

$${}^\circ S_{10,1} + M_2, [], {}^\circ S_{10,4} + M_2, [ ]^+, {}^\circ S_{10,5} + M_1, [3]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \circ S_{11,2} + M_1, []^+, \quad \circ S_{11,3} + M_1, [2, 3], \quad S_{9,2} + S_{3,1}, [2^+, 2], \\ & \circ S_{9,2} + S_{3,1}, [2], \quad \circ S_{9,4} + S_{3,1}, []; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\circ S_{12,3} + M_2, [], \quad \circ S_{12,4} + M_1, [], \quad \circ S_{10,4} + S_{3,1}, [] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \circ S_{13,1} + M_1, [], \quad \circ S_{13,1} + M_2, [2^+, 2], \quad \circ S_{13,3} + M_2, []^+, \\ & \circ S_{12,3} + S_{2,2}, []^+, \quad S_{7,4} + S_{7,4}, [2^+, 6], \quad S_{7,4} + S_{7,4}, [3, 4]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \circ S_{14,1} + M_2, [], \quad S_{14,5} + M_2, [], \quad S_{14,6} + M_2, [4], \\ & S_{12,4} + S_{3,3}, [3, 3], \quad \circ S_{12,4} + S_{3,3}, []; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \circ S_{15,1} + M_1, [2^+, 2], \quad \circ S_{15,2} + M_2, [], \quad S_{15,2} + M_2, [2]^+, \\ & \circ S_{15,3} + M_2, [2], \quad S_{15,3} + M_2, [2, 4], \quad \circ S_{15,4} + M_1, [3], \\ & \circ S_{15,5} + M_1, [], \quad \circ S_{14,4} + S_{2,2}, [2^+, 2^+], \quad \circ S_{13,1} + S_{3,1}, [], \\ & \circ S_{12,5} + S_{4,2}, [2^+, 2]. \end{aligned} \quad (16)$$

Многогранник  $S_{i,j}$  расположен в списке (i) на j-м месте:

$$S_{1,1} = M_1, S_{1,2} = M_2, S_{1,3} = M_3, S_{2,1} = S_{1,1} + M_1, \dots, S_{16,9} = \circ S_{13,1} + S_{3,1},$$

$$S_{16,10} = \circ S_{12,5} + S_{4,2}.$$

Кружком помечены многогранники с фиктивными вершинами.

Описаны также все разбиения такого многогранника на тела с паркетными гранями.

Заметим, что алгоритм, который привел к построению многогранников теоремы 1, не позволит построить архимедово тело  $M_{16}$  с ребрами длины два, хотя этот многогранник с квадратом и двумя шестиугольниками в каждой вершине и составлен из 512 правильных пирамид с единичными ребрами. Следовательно, в алгоритм придётся вносить изменения, приводящие к соединению на каждом шаге не двух, а большего числа многогранников. Какого именно числа пока неизвестно. Например, призма с правильными шестиугольниками в основаниях и боковыми квадратными гранями не пересекается плоскостью на два



равнорёберных многогранника. Однако призму эту можно составить из трёх призм с ромбическими основаниями.

## Цель работы

К решению задачи по усовершенствованию алгоритма построения составленных из правильных пирамид паркетогранников подойдём через поиск разбиений составленного из 64 правильных пирамид тела  $M_{16}$  с единичными рёбрами. В первой главе диссертации найдены все разбиения этого многогранника плоскостями на тела из теоремы 1. Все они найдут своё место в будущей теореме о составленных из правильных пирамид паркетогранниках. Это является математической целью диссертации.

Педагогическая цель диссертационной работы заключается в создании инструментов привлечения к исследованиям паркетогранников и групп симметрий новых соратников, в первую очередь учащихся средних и старших классов. Во второй главе диссертации собраны различного уровня задачи, решения которых станут частью доказательства классификационной теоремы о паркетогранниках. Опыт привлечения всех заинтересованных лиц к синтезу доказательства (будущей) теоремы о классификации типов паркетогранников частично отражён в публикации [10], см. также <http://elib.kspu.ru/document/13817>. За следующие три года этот опыт существенно расширен. С участием автора, например, проводились в течении семестра мастер-классы по изготовлению материализованных моделей паркетогранников теоремы 1 в интерактивном музее науки «Ньютон-парк» (<http://newton-park.net/>). Посетившие в «Ньютон-парке» площадку «Паркетогранники» учащиеся 149-й красноярской школы подключились к исследованиям последних и смогли затем с помощью картонных моделей самостоятельно найти 15-составные тела теоремы 1. Им удалось доказать полноту этого списка когда известными были только паркетограники, составленные из 14

и менее правильных пирамид. Эта работа получила высокую оценку экспертов и опубликована, [11].

Незаменимую роль в доказательстве результатов диссертации сыграло применение систем компьютерной алгебры и графики. Компьютерные модели многогранников расположены в приложении.

Объект исследования:

проблема классификации типов паркетогранников и процесс её решения, индуцирующий структурные изменения обучения математике и информатике.

Предмет исследования:

симметрии, инструментом изучения которых служат многогранники и группы совмещающих их движений.

Апробация

Результаты диссертации регулярно докладывались международному вебинару «Группы и паркетогранники»; международной (47-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, январь 2016 г.); XII международному семинару «Дискретная математика и ее приложения имени академика О.Б.ЛУПАНОВА» (Москва, МГУ, 20-25 июня 2016), [12]; форумам и молодёжным конференциям в КГПУ им. В. П. Астафьева, [13, 14]. За некоторые вошедшие в диссертацию результаты её автор получала стипендию им. Л. В. Киренского. Педагогические наработки, описанные в диссертации, применялись на занятиях со студентами и школьниками в учебных заведениях Красноярска и были результативными: построены

17 моделей многогранников теоремы 1 и создана часть её доказательства в соавторстве с учащимися.

## РАЗБИЕНИЯ УСЕЧЁННОГО ИКОСАЭДРА

Теорема 2. Усечённый октаэдр  $M_{16}$  с единичными рёбрами обладает только следующими разбиениями на выпуклые паркетогранники, каждый из которых составлен не более, чем из 16 правильных пирамид с единичными рёбрами, причём любое более крупное разбиение содержит паркетогранник, составленный более, чем из 16 таких пирамид:

$$M_{16} = ((((((S_{16,4} + S_{3,1}) + M_2) + S_{3,1}) + S_{10,4}) + S_{13,3}) + M_{2a}) + M_{2a},$$

$$M_{16} = ((((((S_{13,3} + S_{4,6}) + S_{3,3}) + S_{3,3}) + S_{3,3}) + (S_{16,9} + S_{3,1})) + (S_{16,9} + S_{3,1}),$$

$$M_{16} = ((((((S_{16,4} + S_{3,1}) + M_2) + S_{3,1}) + S_{10,4}) + M_{2a}) + S_{13,3}) + M_{2a},$$

$$M_{16} = (((((((((S_{16,4} + S_{3,1}) + S_{7,4}) + S_{3,3}) + S_{3,3}) + M_2) + S_{9,1}) + S_{13,3}) + M_{2a}.$$

### 1.1 Идея доказательства теоремы о разбиениях усечённого октаэдра $M_{16} = [4, 6, 6]$

Поскольку в каждой вершине тела  $M_{16}$  сходится по три его ребра, то плоскостью, проходящей по рёбрам, оно не разбивается на многогранники. Собственно поэтому  $M_{16}$  и относится к простым правильным телам Залгаллера. Однако сечениями, содержащими внутренние точки граней, можно получить паркетогранники. При дополнительном условии, что рёбра паркетогранников должны иметь длину, кратную длинам рёбер тела  $M_{16}$ , остаётся рассматривать только сечения, содержащие диагонали шестиугольных граней. С точностью до симметрии рассматриваемых многогранников таких только два: параллельно квадратной и шестиугольной граням усечённого октаэдра. Получив таким образом четыре паркетогранника, продолжаем рассекаать каждый из них на более мелкие части до тех пор, пока не получим составленные не более, чем из 16 правильных пирамид паркетогранники

с рёбрами такими как у тела  $M_{16}$  или вдвое большими. Теорема 1, описывающая такие паркетогранники, доказывается путём рассмотрения всевозможных соединений правильных пирамид. Поэтому разбиения 16-составных паркетогранников известны.

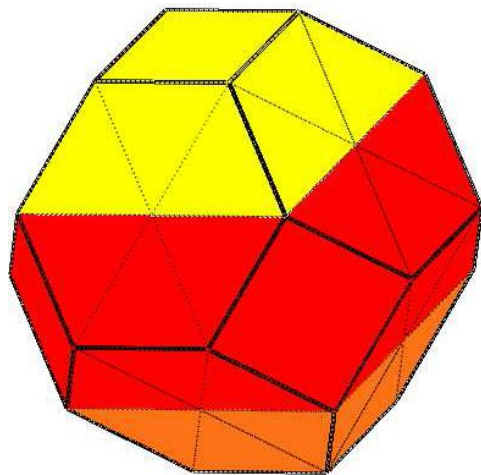


Рис. 1.1: Усеченные октаэдр  $M_{16}$

В первом случае плоскость разбивает  $M_{16}$  на усечённую пирамиду  $M_{2a}$  и 55-составное тело  $M_{16a} = S_{55,?}$ . Его грани на рис.1.1 закрашены красным и оранжевым цветами. Многогранник  $M_{2a}$  встречался в теореме 1 как тело  $S_{9,3}$ . Второе сечение приводит к разбиению  $M_{16} = (M_{19,?} + CA_3) + M_{19,?}$ , где  $CA_3$  есть  $C$ -антипризма, полученная из антипризмы с рёбрами длины три и треугольными основаниями отсечением двух равных  $B$ -антипризм плоскостями, которые каждое боковое ребро антипризмы делят на три равных отрезка. На рис. 1.2 (26-составная)  $C$ -антипризма  $CA_3$  расположена между телами  $M_{19,?}$  с фиолетовой и синей окраской. Вопросительный знак в нижнем индексе сообщает, что пока неизвестен порядковый номер соответствующего тела в будущей теореме о классификации составленных из правильных пирамид паркетогранников.

Рассмотрим первое разбиение из теоремы 2. Поскольку один из отсечённых при первом разбиении тела  $M_{16}$  многогранник  $S_{9,3}$  имеется в теореме 1, то продолжим разбивать только 55-составной многогранник плоскостью, параллельной квадратной грани с рёбрами длины два, рас-

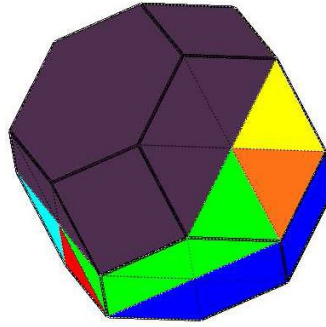


Рис. 1.2:  $M_{16} = S_{45,?} + S_{19,?}$

секаем тело  $S_{55,?}$  по диагоналям его шестиугольных граней. Получаем  $S_{55,?} = S_{46,?} + S_{9,3}$  (Рис.1.3).

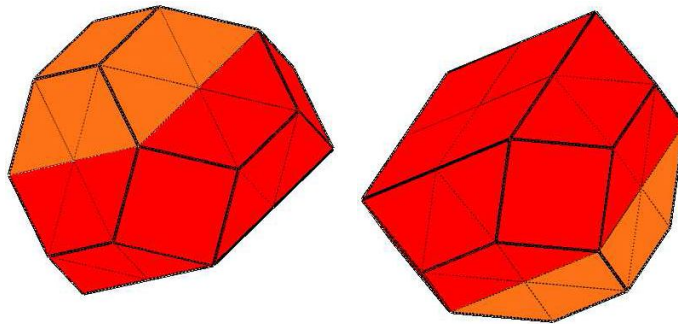


Рис. 1.3:  $M_{55,?} = S_{46,?} + S_{9,3}$

Продолжим разбивать только 46-составной многогранник плоскостью, проходящей по средней линии и стороне параллельных квадратов с удвоенными ребрами. Усечённый дважды многогранник  $M_{16}$  приводит к 46-составному телу  $S_{46,?} = S_{33,?} + S_{13,3}$  (Рис.1.4).

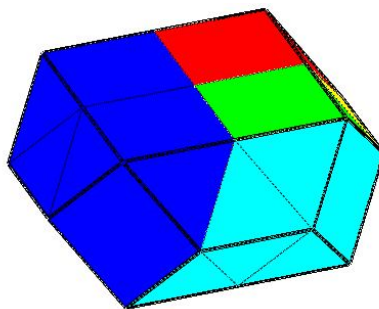


Рис. 1.4:  $S_{46,?} = S_{33,?} + S_{13,3}$

Так как  $S_{13,3}$  уже найден в теореме 1, то разобьём тело  $S_{33,?}$  плоско-

стью, проходящей по средней линии квадрата с удвоенными рёбрами и общему ребру трапеции и квадрата с единичными рёбрами, а также общему ребру прямоугольника и ромба. Она отсекает от тела  $S_{33,?}$  многогранник  $S_{10,4}$ . Получили  $S_{33,?} = S_{23,?} + S_{10,4}$  (Рис.1.5).

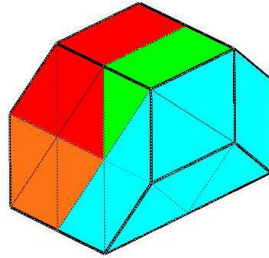


Рис. 1.5:  $M_{33,?} = S_{23,?} + S_{10,4}$

От тела  $S_{23,?}$  в данном случае можно отсечь тело  $S_{3,1}$  плоскостью, проходящей через середины соседних сторон шестиугольника, причём трапециевидальная грань разбивается на треугольник и ромб, а прямоугольник – на два квадрата.  $S_{23,?} = S_{20,?} + S_{3,1}$  (Рис.1.6).

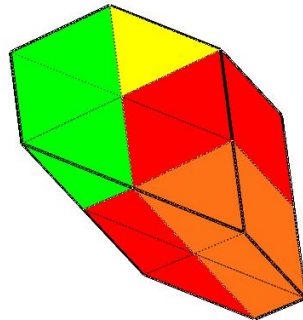


Рис. 1.6:  $S_{23,?} = S_{20,?} + S_{3,1}$

Плоскость, проходящая через меньшие диагонали ромбов, разбивает трапециевидальную грань на треугольник и ромб, а параллелограмм – на трапецию и треугольник. Получаем многогранники  $S_{19,??}$  и  $M_2$ ,  $S_{20,?} = S_{19,??} + M_2$  (Рис.1.7).

Разбиваем плоскостью проходящей по диагонали шестиугольника прямоугольник на два квадрата и две трапеции на ромб и треугольник. Получаем  $S_{19,??} = S_{16,4} + S_{3,1}$  (рис.1.8). Так как оба многогранника есть в теореме 1, то разбиение завершается.

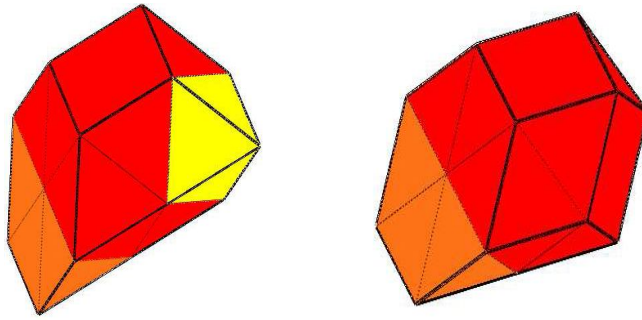


Рис. 1.7:  $M_{20,?} = S_{19,??} + M_2$       Рис. 1.8:  $M_{19,??} = S_{16,4} + S_{3,1}$

Автор надеется, что следующие рисунки и, особенно, их «живые» прообразы в приложенных файлах, помогут читателю и без текста завершить доказательство теоремы 2.

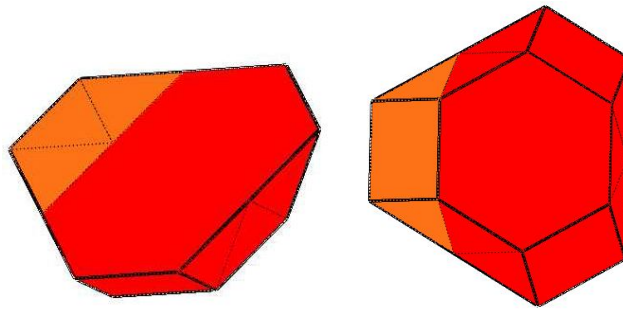


Рис. 1.9:  $S_{19,?} = S_{16,9} + S_{3,1}$

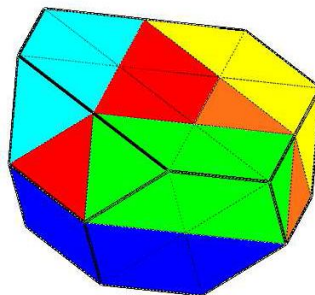


Рис. 1.10:  $S_{45,?} = S_{26,?} + S_{19,?}$



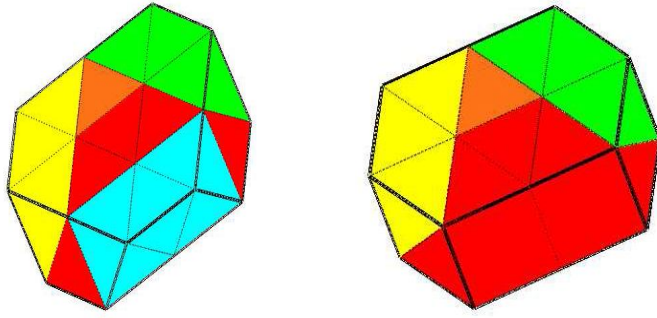


Рис. 1.11:  $S_{26,?} = S_{23,?} + S_{3,3}$       Рис. 1.12:  $S_{23,?} = S_{20,?} + S_{3,3}$

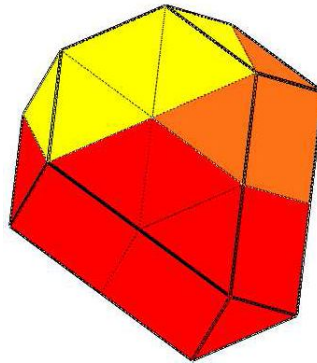


Рис. 1.13:  $S_{20,?} = S_{17,?} + S_{3,3}$

## 1.2 Необходимость использования систем компьютерной алгебры и графики

Уже формулировка теоремы о разбиениях тела  $M_{16}$  содержит большое количество его частей. Трудно представить как можно было бы работать с ними без систем компьютерной графики. Но есть и другие причины применения систем компьютерной графики и алгебры. Отметим некоторые из них.

Первой назовём перспективу полной или частичной автоматизации рассуждений, подобных доказательству теоремы 2. Для этого потребуются как другие алгебраические модели многогранников, так и более продуманное упорядочение вершин и граней модели, необходимое для решения задач изоморфизма моделей и автоматизированного нахождения группы симметрий каждой модели.

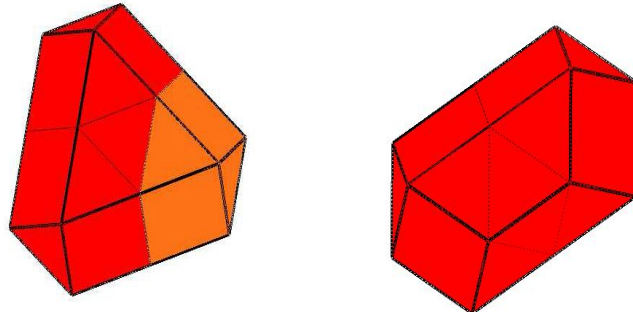


Рис. 1.14:  $S_{17,?} = S_{13,3} + S_{4,6}$       Рис. 1.15:  $S_{13,3} = S_{10,4} + S_{3,1}$

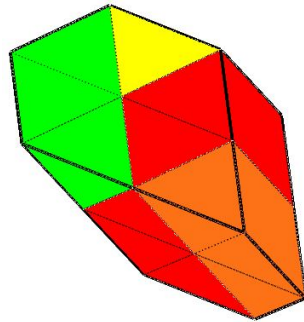


Рис. 1.16:  $S_{23,?} = S_{20,?} + S_{3,1}$

Другая причина заключается в необходимости представить такой, казалось бы чисто геометрический результат как теорема 1 в виде доступном для приложений. Электронные атласы тел, прообразы которых приложены и к настоящей диссертации, как раз и ведут к такой цели.

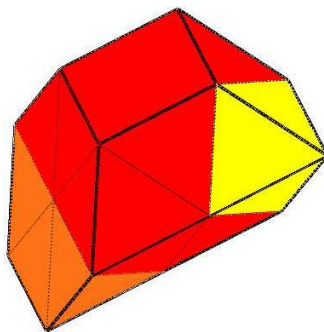


Рис. 1.17:  $M_{20,?} = S_{19,?} + M_2$

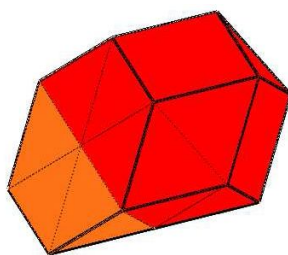


Рис. 1.18:  $M_{19,??} = S_{16,4} + S_{3,1}$

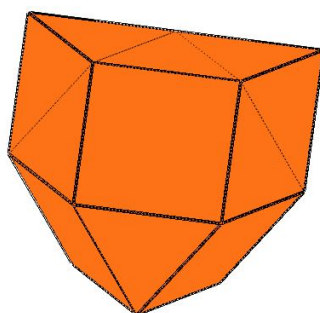


Рис. 1.19:  $S_{16,4}$

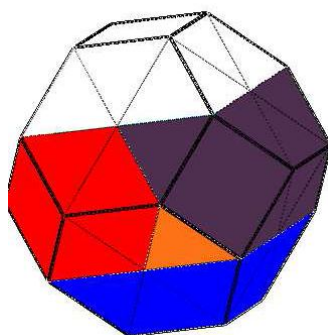


Рис. 1.20: Усеченные октаэдр  $M_{16}$

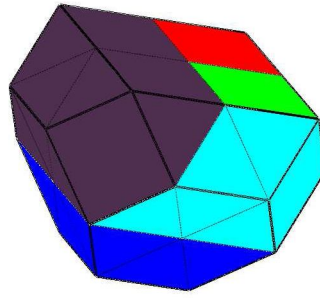


Рис. 1.21:  $S_{55,7} = S_{42,7} + S_{13,3}$

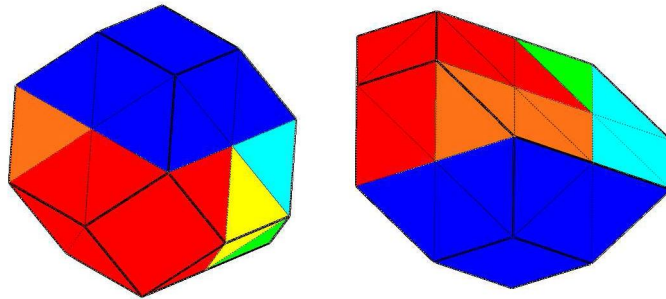


Рис. 1.22:  $S_{42,7} = S_{33,7} + M_{2a}$

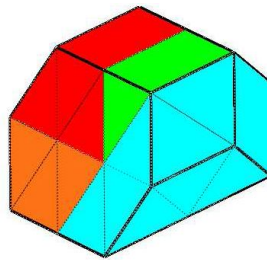


Рис. 1.23:  $S_{33,7} = S_{23,7} + S_{10,4}$

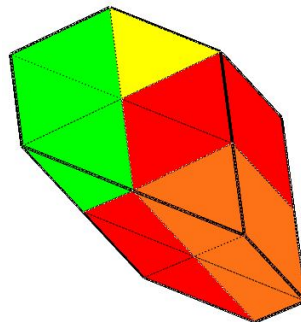


Рис. 1.24:  $S_{23,7} = S_{20,7} + S_{3,1}$

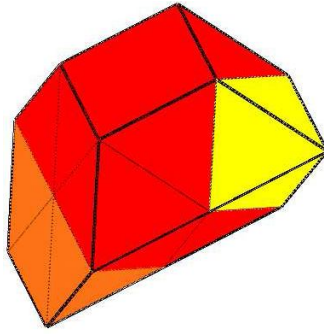


Рис. 1.25:  $M_{20,7} = S_{19,7} + M_2$

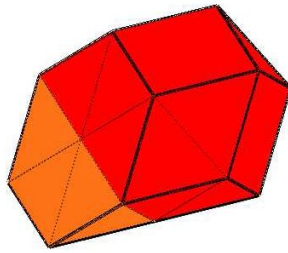


Рис. 1.26:  $M_{19,??} = S_{16,4} + S_{3,1}$

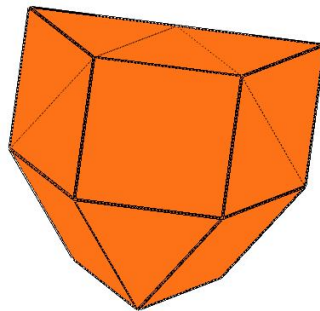


Рис. 1.27:  $S_{16,4}$

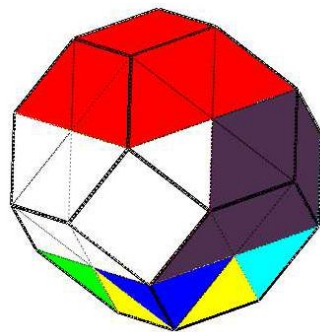


Рис. 1.28: Усеченные октаэдр  $M_{16}$

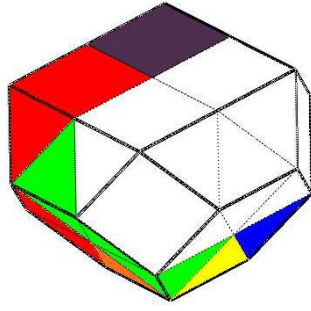


Рис. 1.29:  $S_{55,?} = S_{42,?} + S_{13,3}$

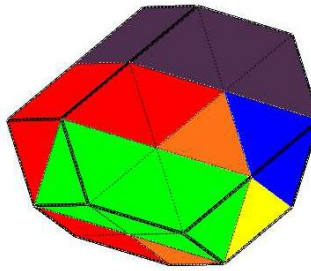


Рис. 1.30:  $S_{42,?} = S_{33,?} + S_{9,1}$

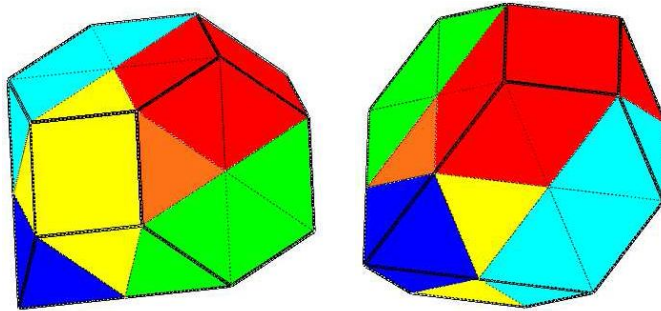


Рис. 1.31:  $S_{33,?} = S_{32,?} + M_2$

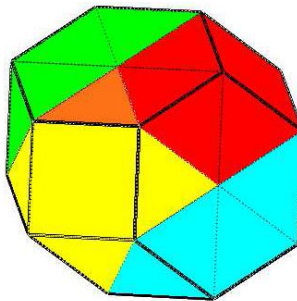


Рис. 1.32:  $S_{32,?} = S_{29,?} + S_{3,3}$

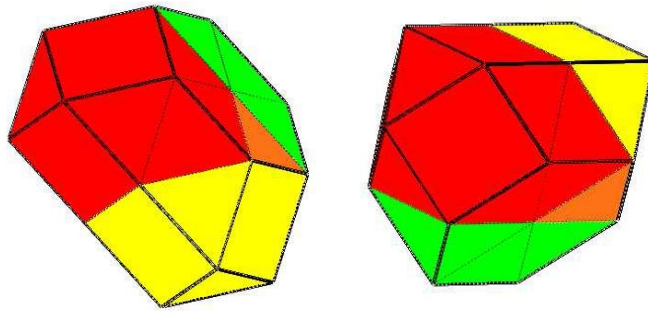


Рис. 1.33:  $S_{29,7} = S_{26,7} + S_{3,3}$

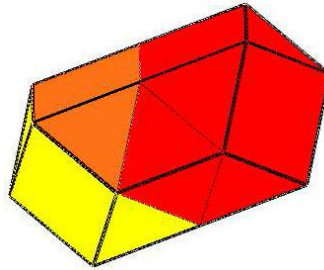


Рис. 1.34:  $S_{26,7} = S_{19,7} + S_{7,4}$

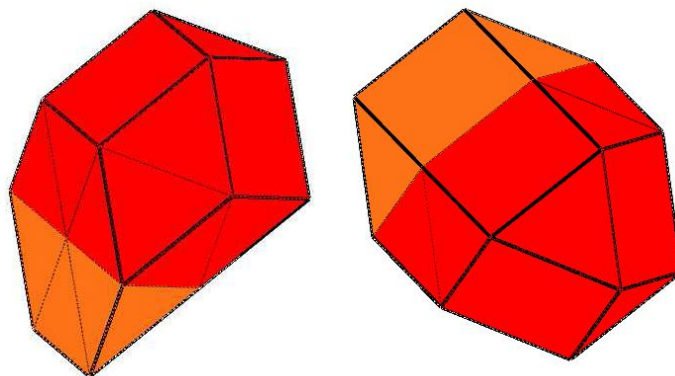


Рис. 1.35:  $S_{19,7} = S_{16,4} + S_{3,1}$

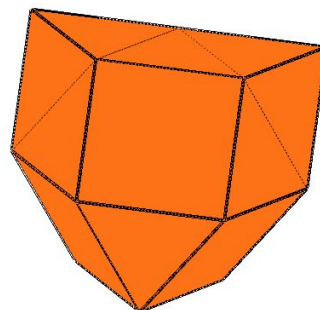


Рис. 1.36:  $S_{16,4}$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УЧАСТНИКОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРКЕТОГРАННИКОВ

### 2.1 Решённые задачи для мотивации потенциальных участников

Современный мир ставит новые требования перед выпускниками школы. Школьник должен не только хорошо выполнять свою работу, но и уметь самостоятельно справляться с быстро меняющейся информацией. В связи с этим построение процесса обучения вообще и математике в частности претерпевает существенные изменения, ориентируясь на развитие личности учащегося, [15].

В этой связи возникает необходимость изучения возможностей организации в учебном процессе деятельности учащихся, способствующей развитию умений самостоятельно приобретать знания и применять их на практике. В качестве такой деятельности может быть рассмотрена исследовательская деятельность учащихся.

В зарубежной педагогике XX-го века Дж. Дьюи, Дж. Брунером, Таба Х. был определён исследовательский подход к обучению с опорой на непосредственный опыт учащихся, его расширение а ходе поисковой, исследовательской деятельности. Общие дидактические разработки различных авторов, алгоритм обучения как учебного исследования можно представить следующим образом:

- знакомство с литературой,
- видение проблемы,
- постановка проблемы,
- прояснение неясных вопросов,
- формулирование гипотезы,
- планирование и разработка учебных действий,
- сбор данных (накопление фактов , наблюдений, доказательств)
- анализ и синтез собранных данных,
- сопоставление данных и умозаключений,



- подготовка и написание реферата,
- выступление с подготовленным сообщением,
- переосмысление результатов в ходе ответов на вопросы,
- проверка гипотез,
- построение обобщений,
- построение выводов и заключений.

Технология учебного исследования предполагает возможность индивидуальных занятий. В учебном исследовании ученики с той или иной долей самостоятельности создают новый продукт — будь то знание (субъективно новое) или личностное новообразование (потребности, запросы, способности). В таких технологиях ученик выступает как полноценный субъект учебно-познавательной деятельности, [16].

Исходя из этого, можно выделить три основных этапа организации исследовательской работы с учащимися:

- формирование понятий;
- обнаружение свойств. Построение выводов и следствий;
- объяснение новых фактов на основе свойств.[17]

На примере „Создание из правильных пирамид паркетогранников“ хочу показать, как можно организовать исследовательскую работу на каждом его этапе.

1 этап. Формирование понятий.

Для того чтобы вовлечь учащихся в исследовательскую работу, предлагаю перечислить объекты (фигуры, их признаки свойства) и объединить в группы. Для этого ставятся соответствующие вопросы. Так, вопрос «Что вы увидели? Заметили?» побуждает учащихся к перечислению данных объектов, вопрос «Какие предметы (фигуры и т.д.) связаны друг с другом?» побуждает детей к объединению данных в группы. Заметим, что единственного правильного ответа нет, они ведут активный интеллектуальный поиск. Формулируются понятия: многоугольник, многогранник, фиктивные ребра, паркетная грань, правильнoгранник, паркетогранник. Так как работа нацелена на „Создание из

правильногранных пирамид паркетогранников“ рассматривается условия Теоремы 1 представленная во введении данной работы.

Стартовой задачей введения в тему исследования может стать предложение изготовить развёртку поверхности параллелепипеда без прямых плоских углов граней и у которого любые два непараллельных ребра различны. Найти такие параллелепипеды, составленные из правильногранных пирамид с дополнительным условием: длины рёбер пирамид единичные, а длины рёбер параллелепипеда принимают значения:  $1, 2, \dots$

2 этап. Обнаружение свойств. Построение выводов и следствий.

После, предлагается самостоятельно соединить пирамиды  $M_1, M_2, M_3$  одинаковыми гранями, из бумажных моделей, и ответить на вопросы «Сколько соединений возможно?», «Какие пирамиды нельзя соединить одинаковыми гранями и почему?», «При выполненных соединениях существуют ли повторяющиеся правильногранники?», что позволяет показать алгоритм нахождения соединений.

Алгоритм доказательства теоремы:

- а) Выделить фундаментальные грани каждого многогранника;
- б) Последовательно соединять одинаковыми гранями соответствующие многогранники;
- в) Конспектировать каждое действие, результат и причину результата;
- г) При получении нужного многогранника, создать его материализованную модель;
- д) Структурировать ход и результаты работы;
- е) Представить результаты.

Когда алгоритм усвоен, ставится задача найти, «открыть» другие соединения правильногранных пирамид. При рассмотрении уже сделанных соединений учитель побуждает учащихся к высказываниям, но ни в коем случае не торопит их — все высказывания детей принимаются в том виде, как они высказаны, и учитель не спешит сразу

же перевести их в ту форму, которая кажется ему более приемлемой. Затем следуют интерпретирующие вопросы: «Что будет, если...», «Что произошло, когда...», «Может ли быть...».

3 этап. Объяснение новых фактов на основе свойств.

Данный этап основан на побуждении учащихся к объяснению новых явлений.

Вводный, побуждающий вопрос учителя может носить отвлеченный абстрактно-теоретический характер: «Что изменится, если...», «Что произошло бы, если...». На заключительной фазе стратегии учащиеся проверяют выдвинутые ими предположения, гипотезы, выводы, либо указывают условия, при которых можно произвести проверку.

В итоге исследовательской работы, учащиеся показывают реализацию алгоритма доказательства теоремы.

## 2.2 Открытые задачи

Изложены в устной форме как приложенная к диссертации видеозапись доклада и его обсуждение на вебинаре «Группы и паркетограники». Предполагается, что эта запись будет демонстрироваться учащимся, вместе с которыми и будет создан текст очерченных там задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные во введении математическая и педагогическая цели достигнуты. Полученные результаты вызвали интерес научного и педагогического сообществ. Диссертационная работа уже находит применение в работе автора с кадетами как учителя математики.

## Литература

- [1] В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями Зап.науч. семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5–218.
- [2] Б. А. Иванов. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников Украинский геометрический сборник. 1971. Т. 10. С. 20–34.
- [3] Ю. А. Пряхин. О выпуклых многогранниках с правильными гранями Украинский геометрический сборник. 1973. Т. 14. С. 83–88.
- [4] А. В. Тимофеенко. К перечню выпуклых правильных многогранников Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова./ Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, 155–170.
- [5] А. В. Тимофеенко. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями Чебышевский сб. 12:2 (2011), 118–126.
- [6] Ю. А. Пряхин. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных. Зап. науч. семинаров ЛОМИ, Т. 45: 111–112, 1974.
- [7] А. В. Тимофеенко, О. А. Табинова. О классификации паркетных многоугольников. Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева, 1(23): 216–219, 2013.
- [8] А. В. Тимофеенко. К теории паркетогранников. Матер. XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: совр. проблемы и приложения», посв. столетию со дня рожд. доктора физ.-мат. наук, профессора Московского гос. университета им. М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. Тула: Изд-во Тул. гос.

пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. Стр. 58–61. URL: <http://poivs.tsput.ru/conf/international/XV/files/conference2018.pdf> (дата обращения: 04.12.2018)

- [9] N. W. Johnson. Convex polyhedra with regular faces Canad. J. Math., 18, 169–200, 1966.
- [10] А. В. Тимофеевко, Е. С. Отмахова. Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и студентов Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева, 33, № 3(2015), 79–82.
- [11] Е. В. Полтанов, Д. Н. Судак, А. В. Тимофеевко, А. В. Якушева. О выпуклых соединениях правильных пирамид Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, 148–158. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf> (дата обращения: 04.12.2018)
- [12] Е. С. Окладникова, А. В. Тимофеевко. К теореме о типах выпуклых многогранников с паркетными гранями. Материалы XII международного семинара «Дискретная математика и ее приложения имени академика О. Б. ЛУПАНОВА» (Москва, МГУ, 20-25 июня 2016) Под редакцией О. М. Касим-Заде – М.: Изд-во мех.-математического факультета , 2016, С. 362–365.
- [13] Е. С. Окладникова, А. В. Тимофеевко. О ТИПАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 16–17 ноября 2016 г. В. Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. – Красноярск, 2016. С. 147–154. URL: <http://elib.kspu.ru/document/23422> (дата обращения: 09.12.2018)

- [14] Е. С. Окладникова, А. В. Тимофеевко. СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ПИРАМИД ПАРКЕТОГРАННИКИ КАК СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ОСНОВА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТАРШЕКЛАССНИКОВ Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. [Электронный ресурс] В. Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева. – Красноярск, 2018. С. 151–160.
- [15] И. В. Клещёва. Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся при изучении математики. URL: <http://www.dissercat.com/content/organizatsiya-uchebno-issledovatel'skoi-deyatelnosti-uchashchikhsya-pri-izuchenii-matematiki> (дата обращения: 04.12.2018)
- [16] Ж. И. Незговорова. Организация поисковой и исследовательской деятельности учащихся и педагогов в начальной прогимназии. URL: <http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/312880/> (дата обращения: 04.12.2018)
- [17] В. И. Ларионова. Организация исследовательской работы учащихся на уроках математики. URL: <http://pedsovet.su/publ/173-1-0-5402> (дата обращения: 04.12.2018)

## Приложение

Ниже расположена программа для системы компьютерной алгебры Maple. В списке  $v$  этой программы расположены координатные тройки (без округлений) тела  $S_{19,??}$ . Каждая грань этой фигуры занесена в список  $f$  в виде упорядоченного набора номеров вершин, встречающихся при обходе грани по её рёбрам против часовой стрелки, начиная с наименьшего номера и находясь вне многогранника. Таким образом, пара  $(v, f)$  есть алгебраическая модель паркетогранника  $S_{19,??}$  с носителем  $v$  и отношениями  $f$ . Автор надеяться что написанные за алгебраической моделью  $(v, f)$  графические команды не требуют комментариев. Одна из проекций созданной ими «живой» модели паркетогранника  $S_{19,??}$  изображена на рис.1.8.

```
restart: v:=[[1, 0, 0], [0, -1/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1, 0, 0], [(-1)/2, -1/2*3^(1/2), 0], [(-1)/2, 1/2*3^(1/2), 0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0],[1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]:v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:
v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:
v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:
v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:
v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:v:=[op(v),2*v[6]-v[19]]:nops(v):
f:=[[5,25,6], [3,25,5], [3,4,25], [2,4,11], [3,11,4],
[3,5,12,13], [3,13,11], [2,11,20], [2,9,24,20],
[13,23,20,11], [20,23,24], [12,23,13], [5,6,10],
```



```

[5,10,12], [10,24,23,12], [9,24,10], [6,9,10],[2,7,4],
[1,7,2,9], [1,9,6], [1,6,25], [1,25,7], [4,7,25],[4,11,20,7],
[3,13,11,4], [11,13,23,20], [3,5,12,13], [13,12,23],
[1,24,10,6], [1,7,20,24], [5,6,10,12], [20,23,24]]:
nops(f);with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],i=1..17)],
thickness=1,linestyle=2, color=red):
S3_1 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]], j=1..nops(f[i]))],
i=18..23)],thickness = 1, linestyle = 2, color = orange1):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=24..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f):nops(v): display({M4, S3_1, pf}, orientation=[7,150]);

```

$S_{20,?}$  изображена на рис.1.7.

```

restart:v:=[[1, 0, 0], [0, -1/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1, 0, 0], [(-1)/2, -1/2*3^(1/2), 0], [(-1)/2, 1/2*3^(1/2), 0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0], [1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]:v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]: v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:
v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]: v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:
v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]: v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]: v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:
v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]: v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:
v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]: v:=[op(v),2*v[6]-v[19]]: nops(v):
f:=[ [5,25,6], [3,25,5], [3,4,25], [2,4,11], [3,11,4],
[3,5,12,13], [3,13,11], [2,11,20], [ 2, 9,24,20],
[13,23,20,11], [20,23,24], [12,23,13], [5,6,10],
[5,10,12], [10,24,23,12], [9,24,10], [6,9,10],
[2,7,4], [1,7,2,9], [1,9,6], [1,6,25], [1,25,7], [4,7,25],

```

```

[10,22,12], [12,22,23], [22,24,23], [10,24,22],
[4,11,20,7], [3,13,11,4], [11,13,23,20], [3,5,12,13],
[12,22,23,13], [1,24,22,6], [1,7,20,24],
[5,6,22,12], [20,23,22,24]]:
nops(f);with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..17)],thickness=1,linestyle=2, color=red):
S3_1 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=18..23)],thickness=1, linestyle=2, color=orange1):
M_2 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=24..27)],thickness=1, linestyle=2, color=yellow):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=28..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):nops(f):
nops(v):display({M4, S3_1,M_2, pf}, orientation=[7,150]);

```

$S_{23,?}$  изображен на рис.1.6.

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2,1/2*3^(1/2),0],[1/2,-1/2*3^(1/2),0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]: v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]: v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]: v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]: v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[19]]: nops(v):
f:=[[5,25,6],[3,25,5],[3,4,25],[2,4,11],[3,11,4],

```

```

[3,5,12,13],[3,13,11],[2,11,20],[2,9,24,20],
[13,23,20,11],[20,23,24],[12,23,13],[9,24,10],
[6,9,10],[2,7,4],[1,7,2,9],[1,9,6],[1,6,25],
[1,25,7],[4,7,25],
[12,22,23],[22,24,23],[10,24,22],
[12,22,16],
[4,11,20,7],[3,13,11,4],[11,13,23,20],[3,17,16,13],
[13,16,22,23],[1,24,22,16,17],[1,7,20,24],[20,23,22,24]]:
nops(f);with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..14)],thickness=1,linestyle=2,color=red):
S3_1 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=15..20)], thickness = 1, linestyle = 2, color = orange1):
M_2 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=21..23)],thickness = 1, linestyle =2,color=yellow):
S3_12:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i = 24 .. 29)], thickness = 1,linestyle=2,color=green):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=30..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f):nops(v):
display({M4, S3_1,M_2,S3_12, pf}, orientation=[7,150]);

```

$S_{33,?} = S_{23,?} + S + 10, 4$  изображен на рис.1.5

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2,1/2*3^(1/2),0],[1/2,-1/2*3^(1/2),0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:

```

```

v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[19]]: nops(v):
f:=[[5,25,6],[3,25,5],[3,4,25],[2,4,11],[3,11,4],
    [3,5,12,13],[3,13,11],[2,11,20],[2,9,24,20],
    [13,23,20,11],[20,23,24],[12,23,13],
    [2,7,4],[1,7,2,9],[1,6,25],[1,25,7],[4,7,25],
    [12,22,23],[22,24,23],
    [6,17,5],[5,17,16,12],[12,22,16],
    [1,9,14,15],[9,24,21,14],[21,24,22],[16,18,21,22],
    [16,17,18],[17,19,18],[6,19,17],[6,15,19],[1,15,6],
    [14,19,15],[14,18,19],[14,21,18],
    [4,11,20,7],[3,13,11,4],[11,13,23,20],[3,17,16,13],
    [13,16,22,23],[7,20,21,15],[20,23,22,21],
    [3,4,7,15,19,17],[16,18,21,22],[15,21,18,19]]:
nops(f):with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=1..12)],thickness=1,linestyle=2,color=red):
S3_1 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=13..17)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
M_2 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=18..19)],thickness = 1, linestyle = 2, color = yellow):
S3_12:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=20..22)],thickness=1,linestyle = 2, color = green):
S10_4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=23..34)],thickness=1,linestyle = 2, color=cyan):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
    i=35..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f):nops(v):

```

```
display({M4, S3_1,M_2,S3_12,S10_4,pf},orientation=[7,150]);
```

$M_{46,7} = S_{33,7} + S_{13,3}$  изображен на рис.1.4

```
restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2,1/2*3^(1/2),0],[1/2,-1/2*3^(1/2),0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[25]-v[8]]:
nops(v):
f:=[[2,4,11],[3,11,4],[3,5,12,13],[3,13,11],
[2,11,20],[2,9,24,20],[13,23,20,11],[20,23,24],
[12,23,13],[2,7,4],[1,7,2,9],
[12,22,23],[22,24,23],
[5,17,16,12],[12,22,16],
[1,9,14,15],[9,24,21,14],[21,24,22],[16,18,21,22],
[16,17,18],[17,19,18],[14,19,15],[14,18,19],[14,21,18],
[3,26,27,5],[5,27,28,17],[17,28,19],[3,4,26],
[26,30,27],[27,30,29],[27,29,28],[15,19,28,29],
[4,7,30,26],[1,30,7],[1,29,30],[1,15,29],
[4,11,20,7],[4,26,13,11],[11,13,23,20],[13,26,28,16],
```

```

[13,16,22,23] , [7,20,21,15],[20,23,22,21],
[16,18,21,22],[15,21,18,19],[16,28,19,18],
[15,19,28,29],[4,7,30,26],[7,15,29,30]]:
nops(f):with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],i=1..9)],
thickness=1,linestyle=2,color=red):
S3_1 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=10..11)], thickness = 1, linestyle=2,color=orange1):
M_2 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=12..13)],thickness = 1, linestyle = 2, color = yellow):
S3_12 := polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=14..15)],thickness=1,linestyle = 2, color = green):
S10_4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=16..24)],thickness=1,linestyle = 2, color=cyan):
S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=25..36)],thickness=1,linestyle = 2, color=blue):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=37..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f): nops(v):
display({M4,S3_1,M_2,S3_12,S10_4,S13_3,pf},orientation=[7,150]);

```

$M_{55,?} = S_{46,?} + S_{9,3}$  изображен на рис.1.3

```

restart:v:=[[1, 0, 0],[0, -1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2, 1/2*3^(1/2), 0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0],[1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2) ]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]: v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]: v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:

```

```

v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]: v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]: v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
nops(v):f:=[[1,7,2,9],[2,7,4],[2,4,11],[3,11,4],[3,5,12,13],
[3,13,11],[1,9,14,15],
[5,17,16,12],[16,17,18],[17,19,18],[14,19,15],[14,19,18],
[20,21],[2,11,20],[14,21,18],[2,9,24,20],[9,24,21,14],
[13,23,20,11],[16,18,21,22],[21,24,22],[22,24,23],[20,23,24],
[12,23,13],[12,22,23],[12,16,22],
[3,25,28,5],[5,28,26,17],[3,4,25],[4,7,30,25],[25,30,28],
[1,30,7],[1,27,30],[1,15,27],[15,19,26,27],[17,26,19],
[26,28,27],[27,28,30],
[31,32,33,34],[17,31,26],[17,32,31],[16,32,17],
[12,32,16],[12,33,32],[12,13,33],[3,33,13],[3,34,33],
[3,25,34],[25,28,34],[28,31,34],[26,31,28],
[7,20,21,15],[4,11,20,7],[4,25,34,33,13,11],[11,13,23,20],
[13,33,32,16,22,23],[16,32,31,26,19,18],[16,18,21,22],
[15,21,18,19],[20,23,22,21],[15,19,26,27],[4,7,30,25],
[7,15,27,30],[25,30,27,26,31,34]]:nops(f);
with(plots):macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..37)],thickness=1,linestyle=2,color=red):
S22_5:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=38..50)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=51..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):

```

nops(f):nops(v):display({M4,S22\_5, pf},orientation=[7,150]);

$M_{16}$  изображен на рис.1.1

```
restart:v:=[[1, 0, 0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2, 1/2*3^(1/2),0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0], [1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2) ]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:v
:= [op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]:v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[24]-v[23]] :v:=[op(v),2*v[24]-v[22]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[30]]:v:=[op(v),2*v[1]-v[27]]:
nops(v):
f:=[[ 2,7,4],[2,4,11],[3,11,4],[3,13,11],[16,17,18],
[17,19,18],[14,19,15],[14,19,18],[20,21],
[2,11,20],[14,21,18],[13,23,20,11],[16,18,21,22],
[21,24,22],[22,24,23],[20,23,24],[12,23,13],
[12,22,23],[12,16,22],[3,4,25],[4,7,30,25],
[25,30,28],[1,30,7],[1,27,30],[1,15,27],
[15,19,26,27],[17,26,19],[26,28,27],[27,28,30],
[31,32,33,34],[17,31,26],[17,32,31],[16,32,17],
```



```

[12,32,16],[12,33,32],[12,13,33],[3,33,13],
[3,34,33],[3,25,34],[25,28,34],[28,31,34],[26,31,28],
[2,38,7],[2,36,38],[2,20,36],[20,24,36],[24,35,36],
[21,35,24],[14,35,21],[14,37,35],[14,15,37],[1,37,15],
[1,38,37],[1,7,38],[35,37,38,36],
[4,11,20,36,38,7],[4,25,34,33,13,11],[11,13,23,20],
[13,33,32,16,22,23],[16,32,31,26,19,18],[16,18,21,22],
[15,37,35,21,18,19],[20,23,22,21,35,36],[15,19,26,27],
[4,7,30,25],[7,38,37,15,27,30],[25,30,27,26,31,34]]:
:nops(f);with(plots):
macro(orange1=COLOR(RGB,.9921,.4470,.0862)):
M4:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i])),
i=1..29]),thickness=1,linestyle=2,color=red):
S22_5:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i])),
i=30..42]),thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
M_2a:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i])),
i=43..55]),thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i])),
i=56..nops(f)]),thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f):nops(v):
display({M4,S22_5,M_2a,pf},orientation=[7,150]);

```

$$M_{16} = S_{45,?} + S_{19,?} \text{ рис.1.2}$$

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2,1/2*3^(1/2),0],[1/2,-1/2*3^(1/2),0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:

```

```

v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]: v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]: v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
  v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[11]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[4]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[18]]:
  nops(v): f:=[[3,4,25],[24,37,36],[17,26,19],
  [14, 18,19],[14,21,18],[21,37,24],[17,19,18],
  [14,21,37],[25,28,34],[28,31,34],[26,31,28],
  [17,31,26],[3,25,34],[20,24,36],[3,11,4],
  [2,4,11],[2,11,20],[2,20,36],
  [2,7,4],[2,35,7],[2,36,35],[35,36,37,38],[14,38,37],
  [14,15,38],[14,19,15],[15,19,26,27],[26,28,27],
  [27,28,30],
  [25,30,28],[4,7,30,25],[7,35,38,15,27,30],
  [3,13,11],[3,33,13],[3,34,33],[31,32,33,34],[17,32,31],
  [16,32,17],[16,17,18],[16,18,21,22],[21,24,22],
  [22,24,23],[20,23,24],[11,13,23,20],[13,33,32,16,22,23],
  [7,35,38,15,27,30],[35,36,37,38],[15,19,26,27],
  [31,32,33,34],[16,18,21,22],[11,13,23,20],
  [4,7,30,25],[20,23,22,21,37,36],[18,16,32,31,26,19],
  [4,25,34,33,13,11],[21,18],[31,34],[20,11]]:
nops(f);with(plots):
  macro(orange1=COLOR(RGB, .9921, .4470, .0862)):
S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
  i=1..2)],thickness=1,linestyle=2, color=red):

```

```

S4_6:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=3..3)],thickness=1,linestyle=2,color=orange):
S3_3_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=4..8)],thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
S3_3_2:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=9..13)],thickness=1,linestyle=2,color=green):
S3_3_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=14..18)],thickness=1,linestyle = 2, color=cyan):
S19_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=19..31)],thickness=1,linestyle = 2, color=blue):
S19_2:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=32..44)],thickness=1,linestyle = 2, color=violet):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=45..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f):nops(v):
display({S13_3,S4_6,S3_3_1,S3_3_2,S3_3_3,S19_1,S19_2, pf},
orientation=[7,150]);

```

$$S_{45,?} = S_{26,?} + S_{19,?} \text{ рис.1.10}$$

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2,1/2*3^(1/2),0],[1/2,-1/2*3^(1/2),0],
[(-1)/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2,1/6*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0,2/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:

```

```

v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[11]] :v:=[op(v),2*v[2]-v[4]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[18]];
nops(v);
f:=[ [3,5,8], [5,10,8], [8,10,24], [3,4,25], [24,37,36],
[5,17,10], [17,26,19], [10,17,18], [10,18,21], [10,21,24],
[14, 18,19], [14,21,18], [21,37,24], [17,19,18], [14,21,37],
[3,34,5], [5,34,31], [5,31,17], [25,28,34], [28,31,34],
[26,31,28], [17,31,26], [3,25,34], [3,8,11], [8,20,11],
[8,24,20], [20,24,36], [3,11,4], [2,4,11], [2,11,20],
[2,20,36], [2,7,4], [2,35,7], [2,36,35], [35,36,37,38],
[14,38,37], [14,15,38], [14,19,15], [15,19,26,27],
[26,28,27], [27,28,30], [25,30,28], [4,7,30,25],
[7,35,38,15,27,30], [7,35,38,15,27,30], [35,36,37,38],
[15,19,26,27], [4,7,30,25], [20,21,37,36], [18,19,26,31],
[4,25,34,11], [21,18], [31,34], [20,11]]:
nops(f);with(plots):
macro(orange1=COLOR(RGB, .9921, .4470, .0862)):
S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..5)],thickness=1,linestyle=2, color=red):
S4_6:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=6..7)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
S3_3_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=8..15)],thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
S3_3_2:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=16..23)],thickness=1,linestyle=2,color=green):
S3_3_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],

```

```

i=24..31)],thickness=1,linestyle = 2, color=cyan):
S19_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=32..44)],thickness=1,linestyle = 2, color=blue):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=45..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f);nops(v);
display({S13_3, S4_6, S3_3_1, S3_3_2, S3_3_3, S19_1, pf},
orientation=[7,150]);

```

$$S_{26,?} = S_{23,?} + S_{3,3} \text{ рис.1.11}$$

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2,1/2*3^(1/2),0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0], [1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2) ]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]: v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[11]] :v:=[op(v),2*v[2]-v[4]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[18]];
nops(v);
f:=[ [3,5,8],[5,10,8],[8,10,24],[4,36,37,14,28,25],

```

```

[3,4,25],[24,37,36], [5,17,10], [17,26,19],[6,26,28],
[6,19,26], [6,14,19], [10,17,18], [10,18,21],[10,21,24],
[14, 18,19],[14,21,18],[21,37,24],[17,19,18],
[14,21,37],[3,34,5],[5,34,31], [5,31,17],[25,28,34],
[28,31,34], [26,31,28],[17,31,26],[3,25,34],[3,8,11],
[8,20,11],[8,24,20],[20,24,36],[3,11,4], [2,4,11],
[2,11,20],[2,20,36], [4,36,37,14,19,26,28,25],
[20,21,37,36],[18,19,26,31],[4,25,34,11],[21,18],
[31,34],[20,11]]:
nops(f);with(plots):
macro(orange1=COLOR(RGB, .9921, .4470, .0862)):
S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..6)],thickness=1,linestyle=2, color=red):
S4_6:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=7..11)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
S3_3_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=12..19)],thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
S3_3_2:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=20..27)],thickness=1,linestyle=2,color=green):
S3_3_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=28..35)],thickness=1,linestyle = 2, color=cyan):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=36..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f);nops(v);
display({S13_3, S4_6, S3_3_1, S3_3_2, S3_3_3, pf},
orientation=[7,150]);

```

$$S_{23,?} = S_{20,?} + S_{3,3} \text{ рис.1.12}$$

```

restart:v:=[[1,0,0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1, 0, 0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2, 1/2*3^(1/2), 0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0],[1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],

```

```

[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)] ]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]: v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]: v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[11]] :v:=[op(v),2*v[2]-v[4]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[18]];
nops(v);
f:=[ [3,5,8], [5,10,8], [8,10,24], [2,4,3,8],
[2,8,24,36], [4,36,37,14,28,25], [3,4,25],
[24,37,36], [5,17,10], [17,26,19], [6,26,28],
[6,19,26], [6,14,19], [10,17,18], [10,18,21],
[10,21,24], [14, 18,19], [14,21,18], [21,37,24],
[17,19,18], [14,21,37], [3,34,5], [5,34,31],
[5,31,17], [25,28,34], [28,31,34], [26,31,28],
[17,31,26], [3,25,34], [4,36,37,14,19,26,28,25],
[3,24,36,4], [21,37,36,24], [18,19,26,31], [3,4,25,34],
[21,18], [31,34]]:nops(f);with(plots):
macro(orange1=COLOR(RGB, .9921, .4470, .0862))
:S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..8)],thickness=1,linestyle=2, color=red):
S4_6:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],

```

```

i=9..13)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
S3_3_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=14..21)],thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
S3_3_2:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=22..29)],thickness=1,linestyle=2,color=green):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=30..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f);nops(v);
display({S13_3, S4_6, S3_3_1, S3_3_2, pf},
orientation=[7,150]);

```

$$S_{20,?} = S_{17,?} + S_{3,3} \text{ рис.1.13}$$

```

restart:v:=[[1, 0, 0],[0,-1/3*3^(1/2),-1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[-1,0,0],[(-1)/2,-1/2*3^(1/2),0],[(-1)/2, 1/2*3^(1/2),0],
[1/2, 1/2*3^(1/2), 0], [1/2, -1/2*3^(1/2), 0],
[(-1)/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[1/2, 1/6*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2)],
[0, 2/3*3^(1/2), -1/3*2^(1/2)*3^(1/2) ]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[10]]:v:=[op(v),2*v[8]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[9]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[2]]:
v:=[op(v),2*v[1]-v[7]]:v:=[op(v),2*v[12]-v[13]]:
v:=[op(v),2*v[5]-v[3]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[8]]:v:=[op(v),2*v[2]-v[7]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[15]]:v:=[op(v),2*v[10]-v[6]]:
v:=[op(v),2*v[10]-2*v[6]]:v:=[op(v),2*v[9]-v[1]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[13]]: v:=[op(v),2*v[17]-v[16]]:
v:=[op(v),2*v[6]-v[10]]: v:=[op(v),2*v[5]-v[12]]:
v:=[op(v),2*v[8]-v[23]]:v:=[op(v),2*v[29]-v[8]]:
v:=[op(v),2*v[17]-v[18]] :v:=[op(v),2*v[17]-v[19]]:
v:=[op(v),2*v[3]-v[4]]:v:=[op(v),2*v[3]-v[11]]:
v:=[op(v),2*v[2]-v[11]] :v:=[op(v),2*v[2]-v[4]]:
v:=[op(v),2*v[14]-v[19]]:v:=[op(v),2*v[14]-v[18]];

```



```

nops(v);
f:= [ [3,5,8], [5,10,8], [8,10,24], [2,4,3,8],
[2,8,24,36], [3,25,28,5], [4,36,37,14,28,25], [3,4,25],
[24,37,36], [5,17,10], [5,28,26,17], [17,26,19],
[6,26,28], [6,19,26], [6,14,19], [10,17,18],
[10,18,21], [10,21,24], [14, 18,19], [14,21,18],
[21,37,24], [17,19,18], [14,21,37],
[4,36,37,14,19,26,28,25], [3,25,26,17], [3,24,36,4],
[21,37,36,24], [17,26,19,18], [21,18]]:
nops(f);with(plots):
macro(orange1=COLOR(RGB, .9921, .4470, .0862)):
S13_3:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..9)],thickness=1,linestyle=2, color=red):
S4_6:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=10..15)],thickness=1,linestyle=2,color=orange1):
S3_3_1:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=16..23)],thickness=1,linestyle=2,color=yellow):
pf:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=24..nops(f))],thickness=4,color=black,style=LINE):
nops(f);nops(v);
display({S13_3,S4_6, S3_3_1, pf}, orientation=[7,150]);

```