МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) Кафедра математики и методики обучения математике
(полное наименование кафедры)

Бушаева Татьяна Алесандровна

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема Компьютерная анимация как средство обучения геометрии учащихся основной школы

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления)

Магистерская программа Информационные и суперкомпьютерные технологии в математическом образовании
(наименование программы)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
д.п.н., к.ф-м.н., профессор Шкерина Л. В.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

10.12.2018
(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы
д.п.н., к.ф-м.н. профессор Майер В. Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

04.12.18
(дата, подпись)

Научный руководитель
д.п.н., к.ф-м.н. профессор Майер В. Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

04.12.18
(дата, подпись)

Обучающийся Бушаева Т.А.
(фамилия, инициалы)

4.12.18
(дата, подпись)

Красноярск 2018

РЕФЕРАТ

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

COMPUTER ANIMATION AS A MEANS OF GEOMETRY TEACHING SECONDARY SCHOOL LEARNERS

Данная магистерская диссертация состоит из 95 страниц из них:

- приложений – 22;
- реферат – 3 листа;
- оглавление - 1 лист;
- введение - 2 листа;
- первая глава - 24 листа;
- вторая глава - 40 листов;
- заключение - 2 листа;
- библиографический список – 2 листа.

Количество иллюстраций магистерской диссертации составляет 54 рисунка.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс обучения школьников геометрии на базе компьютерной среды Живая математика.

Object of research: the educational process of teaching geometry on the basis of the computer environment of Living mathematics.

Цель исследования: теоретически обосновать и разработать методические приёмы обучения учащихся основной школы геометрии средствами компьютерной анимации в среде Живая математика.

Purpose of research: theoretically, to justify and develop methodical methods of teaching learners of the basic school of geometry by means of computer animation in the environment of Live mathematics.

Диссертация посвящена использованию информационных технологий в образовательном процессе, с целью повышения уровня математического мышления, развития исследовательской деятельности.

Dissertation is devoted to use of information technologies in educational process, for the purpose of increase of level of mathematical thinking, the development of research activities.

Для того чтобы решить какую – либо геометрическую задачу, необходимо сделать чертеж. Построение чертежа на бумаге требует определенных затрат времени. В итоге получается статический чертеж, который невозможно двигать и рассматривать со всех сторон. Если же чертеж будет построен в анимационной компьютерной среде, то главная его особенность – динамичность, то есть мы можем перемещать элементы чертежа. При этом конфигурация, заданная построением, будет сохраняться. Использование компьютерной анимации на уроках геометрии позволяет сделать учебные занятия более интересными и наглядными, что повышает интерес учащихся к предмету.

В ходе работы над диссертацией были разработаны методические приемы обучения школьников геометрии средствами анимации в среде «Живая математика», также была проведена апробация приёмов обучения школьников геометрии средствами анимации, были изучены анимационные (мультипликационные) возможности этой среды, позволяющие создавать анимационные и мультипликационные GSP-файлы учебной направленности по различным темам школьного курса геометрии, выполнен анализ тем школьного курса геометрии.

Практическая значимость данной работы заключается в возможности использования предлагаемой методики при обучении геометрии в школе с целью повышения качества обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие все большее значение приобретает компьютер. Овладение им, по меньшей мере, на уровне пользователя, становится одним из условий эффективного участия в социальной жизни. Для решения этой и ряда других задач, компьютер крайне необходим в образовании, где он должен занять достойное место. Использование компьютера на уроке - это возможность повышения качества обучения. Он дает возможность развивать самостоятельную деятельность учащихся, как индивидуальную, так и групповую. Сегодня перед педагогами появляются новые задачи, решить которые невозможно без помощи информационных технологий.

Проблема, с которой сталкиваются многие учителя математики – как сделать обучение доступным и полезным для школьников, как наполнить уроки новым содержанием, используя такие методы и формы работы, чтобы организация учебного процесса не только стимулировала психическое развитие детей, но и, развивая интерес к предмету, повышала качество обучения. Появившиеся в последние годы на IT-рынке педагогических программных продуктов системы динамической математике с их возможностями анимации и мультипликации, предоставляют учителю дополнительный ресурс обучения школьников геометрии. В связи с этим актуально исследование, связанное с обучением школьников геометрии средствами анимации и учебной мультипликации в среде Живая математика.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс обучения школьников геометрии на базе компьютерной среды Живая математика.

Предмет исследования: компьютерная геометрическая анимация в среде Живая математика, как средство обучения геометрии учащихся основной школы.

Цель исследования: теоретически обосновать и разработать методические приёмы обучения учащихся основной школы геометрии средствами компьютерной анимации в среде Живая математика.

Задачи исследования:

а) проанализировать темы школьного курса геометрии для школьников, с точки зрения целесообразности использования при их обучении возможностей компьютерной анимации среды Живая математика;

б) изучить анимационные (мультипликационные) возможности среды Живая математика, позволяющие создавать анимационные и мультипликационные GSP-файлы учебной направленности по различным темам школьного курса геометрии;

в) разработать методические приёмы обучения школьников геометрии средствами анимации в среде Живая математика;

г) провести апробацию приёмов обучения школьников геометрии средствами анимации в среде Живая математика.

Гипотеза исследования: если в основной школе при обучении геометрии использовать возможности компьютерной анимации системы динамической геометрии Живая математика, то это будет мотивировать школьников на изучение геометрии, способствовать формированию пространственного воображения, развитию математического мышления.

ГЛАВА 1. КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.

1.1. Компьютерная анимация в обучении математике: история понятия.

Термин «анимация» используется для обозначения разнообразных явлений в различных областях человеческой деятельности: от художественной, научной и учебной мультипликации (анимационные фильмы), которые используются в сфере развлечений, науке и образовании, до медицины (реанимационные мероприятия). Объяснение тому, что этот термин обладает достаточно широкими лингвистическими границами и используется во многих современных языковых культурах, можно найти в его этимологии. Как отмечается в статье [И.И. Шульга, Генезис понятия «педагогическая анимация»] термины «анимация» (рус.), «animation» (англ.), «animator» (фр.) и т.д. происходят от латинского корня «anima», который имеет несколько самостоятельных значений: жизненное начало, жизнь, душа, разумное начало, дух.

Нас в данной работе будет интересовать компьютерная анимация. В зарубежных источниках, в первую очередь англоязычных, компьютерной анимацией называют вид мультипликации, создаваемый с помощью компьютера. Причём в отличие от более общего понятия «компьютерная графика», где рассматриваются как статические, так и динамические изображения, предметом компьютерной анимации являются лишь движущиеся изображения. Компьютерная анимация наиболее востребована в индустрии развлечений, а также в науке, образовании и производстве. Под *компьютерной анимацией* мы будем понимать компьютерную имитацию реального или идеального процесса с помощью изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений с фазами движения.

Поскольку компьютерная анимация представляет собой в определенном смысле производную от компьютерной графики, то её история тесно связана с историей появления и развития специализированных графических программных средств. Эра компьютерной графики достаточно молода, она ведёт свой отсчёт с 1961 года, когда коллектив исследователей во главе с известным американским учёным Айвеном Сазерлендом создал первую графическую систему Sketchpad. Эта система позволяла с помощью светового пера изображать на экране монитора статические рисунки, находить их образы под действием несложных преобразований, строить изображения простейших фигур.

Позднее, в 1967 году, в университете штата Юта (США) Сазерленд совместно с Дэвидом Эвансоном, Джимом Кларком, Эдвином Катмеллом и Джоном Уорноком продолжили исследования в области компьютерной графики. Основные усилия были направлены на создание технологий и разработку программных средств, позволяющих строить изображения пространственных фигур. При этом проблема видимости первоначально решалась способом заливки: объекты переднего плана окрашивались однотонным цветом, что позволяло закрыть те объекты или их части, которые размещались на заднем плане. Отметим, что аналогичные работы проводились и в Советском Союзе, где в 1968 году с помощью компьютера по введённым в него дифференциальным уравнениям было имитировано движение живого существа. Следует отметить, что сами кадры анимации были созданы не на экране монитора, а распечатаны на текстовом принтере.

В настоящее время технология создания подвижных изображений пространственных объектов и текста с помощью современных программных средств компьютерной графики достигла значительного прогресса, но нас в данной работе в большей степени будет интересовать не это направление, а всё то, что связано с использованием компьютерной анимации в обучении. В работах большинства исследователей убедительно обосновывается, что компьютерная анимация в обучении, или, как её ещё называют, Action Learning, представляет собой перспективное направление в образовании. Причём не только студентов и школьников, но и персонала во многих организациях и на предприятиях. Использование компьютерной анимации позволяет заинтересовать обучающихся в совершенствовании своих знаний и профессиональных навыков, повышает мотивацию к учёбной и производственной деятельности, к достижению новых высот.

Анимация в образовании применяется при создании электронных учебников, подготовке презентаций к лекциям, урокам и семинарским занятиям, при проведении учебных исследований и экспериментов. Использование компьютерной анимации позволяет создавать интерактивные обучающие модели с элементами взаимодействия с пользователем, обеспечивает активное восприятие нового учебного материала, повышает наглядность его представления и способствует более прочному усвоению учащимися основ теории. Анимация создаёт новую реальность, позволяющую взглянуть на явления, которым присуще движение и которые сложно или невозможно увидеть в природе.

По мнению экспертов и практикующих педагогов, динамическая визуализация учебного материала в сравнении со статической представляет собой более эффективный методический приём обучения, который активизирует мысль обучающегося, поддерживает интерес к изучаемому материалу? Как считают специалисты в области психологии в основе этого феномена лежат физиологические особенности человека. У человека, как и у любого хищника, органы зрения имеют одну интересную особенность. Хищник способен заметить или обнаружить объект с гораздо большей долей вероятности, если тот находится в движении. Таким образом, чтобы обратить внимание обучающегося на тот или иной объект обучения, на то или иное понятие, его нужно привести в движение, или анимировать. Как известно, любая информация воспринимается лучше, если она носит динамический характер.

Использование анимации, цвета и звука удерживает внимание обучающихся. На таких занятиях интерес к предмету повышен.

Особенно актуальна анимация вообще и компьютерная анимация в частности при обучении такой абстрактной учебной дисциплине как математика. Как считает Е. Вишняковская [«Один раз увидеть», ж. Наука и жизнь, №12, 2011, с. 11-16] «Математические мультики», которые производят в Лаборатории популяризации и пропаганды математики (ППМ) Математического института им. В.А. Стеклова РАН, удивительны как минимум по двум причинам. Во-первых, они умеют превращать абстракции «царицы наук» в наглядные истории о вещах, окружающих нас в повседневной жизни. Во-вторых, все материалы, которые создаёт лаборатория, доступны любому желающему бесплатно и неограниченно на сайте «Математические этюды» (www.etudes.ru).

По мнению Николая Андреева, заведующего лабораторией ППМ, в ситуации снижения общего уровня образованности, в которой сейчас находится Россия, доносить информацию становится труднее. «Если ребёнок не понимает красоты математики или зачем она нужна, приходится придумывать какие-то развлекательные формы, чтобы показать ему на более простом, чем формула, уровне, зачем всё это нужно: зачем он в школе проходит трапецию или геометрические построения… Приходится идти на хитрость: показывать что-то красивое, где применяется математика, в надежде, что ему станет интересно и он захочет её изучать» [Е. Вишняковская, 2011]. Математические мультфильмы, подготовленные в лаборатории ППМ, выполнены так, чтобы немотивированные школьники, посмотрев их, начали больше уважать математику, мотивированные – нашли материал для доказательства и исследования, школьные учителя – чем можно заниматься с детьми на уроке. Математические этюды интересны для студентов, преподавателей вузов и даже профессиональных математиков, т.к. некоторые из этюдных сюжетов многим из них неизвестны, и они открывают для себя что-то новое.

Особый интерес представляют математические мультфильмы, которые ориентируют школьников на проблемы математики, не решённые до настоящего времени. Много таких задач про развёртки многогранников. Например, один из мультфильмов посвящён, решённой сравнительно недавно задаче, о получении из развертки куба, имеющей вид латинского креста, треугольной пирамиды. А вот в более общем случае – задача ещё не решена. Сформулируем ее в упрощённой форме. *Известно, что из некоторого фрагмента бумаги можно сложить выпуклые многогранники. Указать количество всех таких многогранников и алгоритм построения каждого из них.*

Все математические мультфильмы лаборатории ППМ, выложенные на сайт «Математические этюды», снабжены краткой научно-популярной статьёй со ссылками и со всей литературой. О популярности этих фильмов говорят следующие факты:

- сайт посещает порядка десяти тысяч людей в сутки: это и те, кто смотрит, и те, кто скачивает;

- сайтом пользуется большое количество учителей школ и учеников, электронные письма от них в адрес лаборатории приходят из разных уголков России;

- подготовленный и выложенный на сайт фильм про стопоходящую машину П.Л.Чебышева посмотрело за первый день больше 100 тысяч человек – большая аудитория даже для интернета, а для бумажных изданий вообще недостижимая.

Одна из основных проблем, которая препятствует массовому участию математиков и программистов в подготовке подобных фильмов – большие трудозатраты. Каждый математический этюд – это несколько месяцев работы профессиональной команды математиков и специалистов по трёхмерной анимации. Вручение Н. Андрееву премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных можно расценивать как сигнал обществу, что такими вещами следует заниматься, что в других институтах и высших учебных заведениях следует создавать аналоги лаборатории ППМ Математического института им. В.А. Стеклова.

1.2. Анимационные возможности системы динамической математики Живая математика

В профессиональном стандарте педагога (ПСП) перечислены необходимые умения, которыми должен владеть учитель математики, в частности:

- «совместно с обучающимися создавать и использовать наглядные представления математических объектов и процессов с помощью компьютерных инструментов на экране» [ПСП, 2013, стр.17];

- «владеть основными математическими компьютерными инструментами: визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; экспериментальных лабораторий» [ПСП, 2013, стр.17]Среди программных средств, позволяющих учителю и учащимся не только создавать компьютерные модели геометрических объектов и абстракций, но и эффективно использовать эти модели для получения новых знаний, наиболее популярны так называемые системы динамической геометрии или интерактивные геометрические среды, которые мы будем называть системами динамической математики (СДМ). Появление этих виртуальных математических лабораторий для проведения в первую очередь учебных экспериментов и исследований было обусловлено целым рядом обстоятельств, в частности, в связи с тревожной тенденцией роста количества обучающихся, которые математику стали относить к непопулярным предметам. К настоящему времени в мире насчитывается около пятидесяти таких программных продуктов.

Системы динамической математики максимально ориентированы на усиление визуальной и экспериментальной составляющих обучения математике. С их помощью учителя и учащиеся имеют возможность не только моделировать математические объекты и процессы, но и использовать построенные модели для изучения их свойств. Главным дидактическим достоинством СДМ, отраженным в их названии, является динамика (движение), которая реализуется, в том числе, средствами компьютерной анимации. Если раньше наглядность в обучении, как правило, ограничивалась лишь изготовлением статичных изображений и штучными фильмами образовательной направленности, то с появлением упомянутых программных продуктов педагогическое сообщество приобрело движение как новое общедоступное дидактическое средство обучения математике.

С возможностями компьютерной анимации тесно связана та часть математических исследований, неотъемлемой составляющей которых являются динамические чертежи с анимацией, участвующие в решении математических задач. Будем называть эту часть математических исследований *динамической математикой*. Компьютерное моделирование является важнейшей частью динамической математики. Решение геометрической задачи в динамической математике проходит три этапа [Ларин, 2015] (в твоём списке книга должна быт):

- построение компьютерной динамической модели, соответствующей условию задачи;

- нахождение визуальной версии решения задачи с использованием построенной модели и возможностей компьютерной анимации;

- построение математической модели визуальной версии решения задачи.

Математика не единственная дисциплина, при обучении которой используется динамика. Анимация может применяться при изучении практически любого предмета. Некоторые исследователи, например авторы статьи [Мусса, 2015], относят дидактические приложения искусства компьютерной анимации к одним из самых элегантных способов создания обучающих материалов, оказания помощи учащимся в усвоении соответствующей дисциплины.

Среди систем динамической математики наиболее популярны The Geometer's Sketchpad [N. Jackiw, USA, 1991] (в России известны ее русскоязычные версии 4.2 Живая геометрия, 5.0 Живая математика) и GeoGebra [M. Hohenwarter, Austria, 2003]. Далее, мы подробно остановимся на анимационных возможностях только Живой математики.

1.2.1. Живая математика (до 2006 года – Живая геометрия). Первая версия этой программы была выпущена в 1995 году. Достаточным основанием для её активного внедрения является естественная и мощная техника построения чертежей – аккуратных, грамотно описываемых и легко редактируемых. Возможности работы с программой весьма разнообразны. Однако следует отметить, что сама среда не является обучающей и «самостоятельно ничего не делает», - все чертежи в ней создаются пользователем, а программа лишь представляет для этого необходимые средства, также как и возможности для усвершенствования чертежей и их исследования. Программа очень проста в работе – для её применения не требуется специальных знаний информатики.

Живая математика позволяет получать на плоскости такие чертежи, в которых сохраняется иерархия зависимости объектов друг от друга, поэтому изменение положения одних объектов приводит к изменению положения зависимых. «Потянув» мышкой за ту из точек, которая появилась на этапе построения чертежа в результате ее свободного выбора (например, как произвольная точка плоскости, прямой, луча, отрезка, окружности и т.д.), можно наблюдать анимационное изменение всех тех элементов чертежа, построение которых зависело от перемещаемой точки. При этой процедуре не изменяются установленные ранее отношения между объектами чертежа (параллельность, перпендикулярность, инцидентность, простое отношение точек и т.д.).

Живая математика предоставляет возможность «прятать» любые фрагменты чертежа, чаще всего вспомогательные, т.е. делать их невидимыми для пользователя (при необходимости их всегда можно вывести на экран). Чтобы обратить внимание обучаемого на тот или иной фрагмент чертежа, не применяя для этого утомительное перечисление соответствующих букв с индексами и штрихами, можно в течение короткого времени окрасить этот фрагмент любым цветом, не заслоняя при этом построенные ранее линии, точки и их обозначения, выделить любым цветом любую линию.

Кроме этого, имеется возможность измерять длины отрезков, величины углов, площади многоугольников и кругов, длины ломаных, окружностей и дуг; выполнять действия над величинами, создавать собственные инструменты пользователя. Именно эти возможности, заложенные в СДМ Живая математика, позволяют строить на плоскости динамические модели, проводить математические исследования, превращают компьютер с этим программным средством в мини лабораторию, которая так необходима учителям и учащимся.

В Живой математике имеется несколько способов задания анимации, рассмотрим три основных, к которым относятся ручная, кнопочная и ползунковая.

Ручная анимация. Это самый простой способ перемещения геометрического или текстового объекта на рабочем поле среды. Для этого курсором выбирается инструмент Стрелка , который находится в верхней части вертикальной панели инструментов, слева от рабочего поля. После выбора инструмента пользователь может переносить любой объект, наведя на него курсор, нажав и удерживая левую клавишу мыши. Отметим, что если при ручной анимации переносится объект, который зависит от другого объекта, то любое новое положение объекта сохраняет имеющуюся зависимость.

Отметим, что при выборе инструмента Стрелка, независимые объекты в процессе анимации не меняют своей ориентации на плоскости и размеров. Если требуется поворачивать объект вокруг некоторой точки, необходимо выбрать другую разновидность инструмента Стрелка, а именно инструмент Стрелка Поворота . Если же возникает потребность изменить объект с точностью до центрального подобия (гомотетии), необходимо воспользоваться второй разновидностью инструмента Стрелка – Стрелкой Растяжения .

Кнопочная анимация. Для того, чтобы для выбранного на экране объекта в среде Живая математика задать анимацию с помощью специальной кнопки, достаточно подсветить этот объект, поместив на нём курсор, и, щёлкнув левой клавишей мыши, зайти в меню «Правка», затем выбрать опцию «Кнопки», далее – команду «Анимация» или «Перемещение». На рабочем поле появится соответствующая кнопка, после нажатия на которую выбранный объект, а вслед за ним и все его «потомки», придут в движение и начнут перемещаться с заданной скоростью (выбирается в появляющемся окне) по заданной траектории (к которой был «привязан» выбранный объект). Для управления анимацией объекта: увеличить или уменьшить скорость анимации, остановить анимацию, поменять направление движения т.д., используется панель *Управление движением*, которая появляется при введении анимации.

Ползунковая анимация. Компьютерную анимацию в среде Живая математика можно задать с помощью ползунка, который перемещается по некоторому отрезку или дуге окружности. Для этого пользователю необходимо построить отрезок (или дугу окружности), поместить на него точку и изобразить ползунок (небольшой окрашенный «перевёрнутый» равнобедренный треугольник, вершина которого совпадает с выбранной точкой). После этого задается необходимая единица измерения (градусы, миллиметры, сантиметры и т.д.) и строится динамическая модель исследуемой фигуры, которая зависит от положения выбранной точки на отрезке или дуге окружности. Перемещая ползунок автоматически или с помощью мыши, мы получим анимацию объекта.

Дидактические возможности среды Живая математика эффективно реализуются при конструировании динамических анимационных моделей, поддерживающих практически все темы и разделы курса геометрии в школе и педвузе. Среди тем школьного курса отметим следующие: геометрические построения циркулем и линейкой, построения иными средствами; вычислительные задачи на плоскости, решение задач метрического характера; решение геометрических задач с параметрами; изображения пространственных фигур, решение позиционных задач; решение задач «реальной» геометрии; задачи на разрезание, задачи геометрической комбинаторики; задачи занимательной геометрии, задачи на смекалку; геометрические преобразования, решение задач на применение преобразований плоскости; геометрические задачи прикладной направленности.

В качестве примера рассмотрим создание в среде Живая математика динамической модели плоского шарнирного механизма, трисектора угла, позволяющего разделить произвольный угол на три равные части. Известны разные виды таких механизмов, мы воспользуемся тем, который представлен на сайте http://www.etudes.ru/ru/etudes/angle-trisection лаборатории ППМ. Основная геометрическая фигура, используемая при построении этого механизма, антипараллелограмм, который представляет собой плоскую замкнутую ломаную ABCD, в которой AB = CD, BC = AD и ни одна пара противоположных сторон не параллельна.

Перед тем как приступить к созданию динамического GSP-файла этого трисектора, необходимо не только разобраться с его математическим обоснованием, но и подробно продумать все этапы построения в среде Живая математика. В нашем случае следует, прежде всего, построить динамическую модель шарнирного антипараллелограмма. При построении шарнирных механизмов удобно зафиксировать отдельно отрезки, которые будут служить моделями линейных элементов механизма (его звеньями), соединяемых друг с другом шарнирами-точками. Для антипараллелограмма достаточно зафиксировать две его смежные стороны, т.е. отрезки a и b. Изобразим их в верхней части рабочего поля (полотна) Живой математики (рис. 1.2.1). Приступим к построению антипараллелограмма *ABCD*. Изобразим произвольную точку B, построим две окружности c_1 и c_2 с центром в точке B и радиусов a и b соответственно, стиль линий «Тонкий». Построим на окружности c_1 точку A, на окружно-

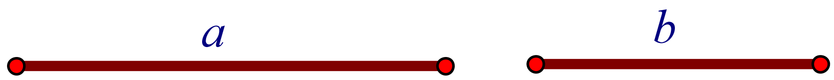


Рис. 1.2.1.

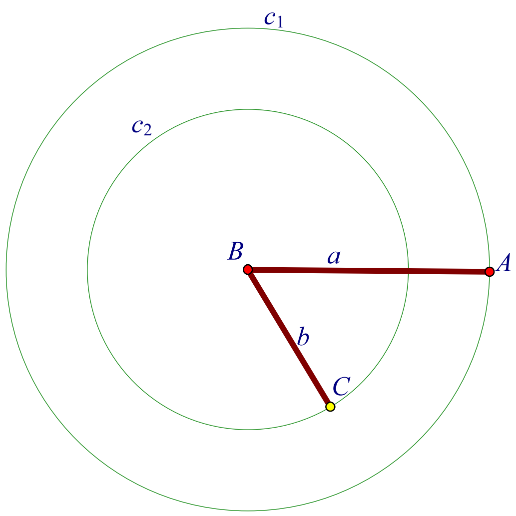


Рис. 1.2.2

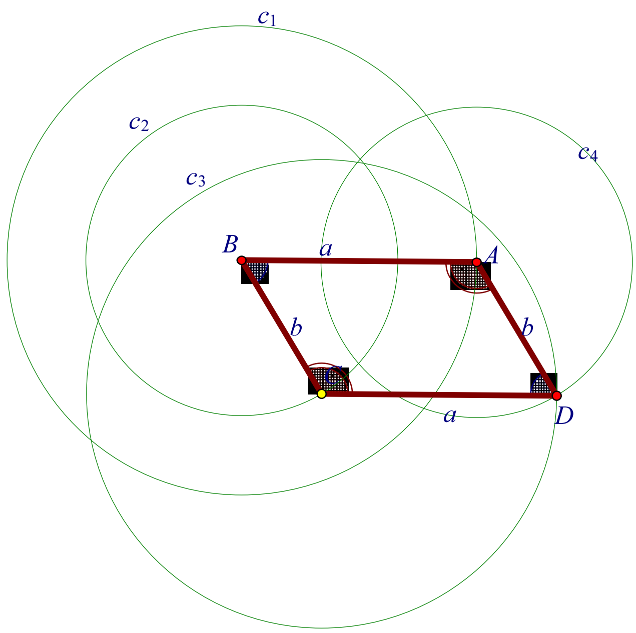


Рис. 1.2.3

сти c_2 – точку C, соединим точки A и B отрезком AB, - точки B и C отрезком BC, в обоих случаях стиль линии выберем «Жирный» (рис. 1.2.2). Итак, первые две стороны антипараллелограмм готовы. Будем считать, что красные шарниры A и B – зафиксированы, а жёлтый шарнир C – подвижный (анимационная точка). Если теперь через A и C провести прямые, параллельные BC и AB соответственно, то мы получим параллелограмм, который будет оставаться таковым при любом положении точки C на окружности c_2 (естественно, кроме случая, когда A, B и C лежат на одной прямой).

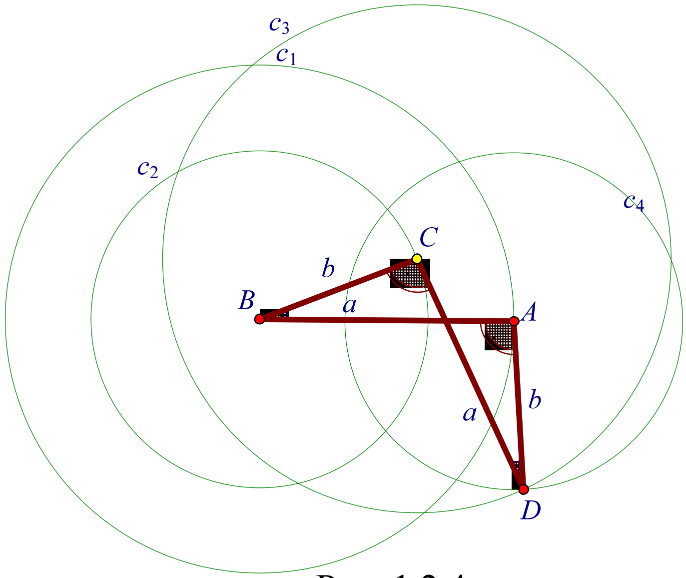


Рис. 1.2.4

Чтобы этого не произошло построим точку D как одну из точек пересечения окружности c_3 с центром в точке C и радиуса a и окружности c_4 с центром в точке A и радиуса b. На рисунке 1.2.3 выбрана та из двух общих точек окружностей c_3 и c_4, для которой $ABCD$ – параллелограмм.

Построим две оставшиеся стороны AD и CD параллелограмма, отметим маркером равные пары углов при вершинах A, C и B, D. Ухватимся мышкой за точку C и начнём её перемещать по окружности c_2 против движения часовой стрелки.

Особенности построения точек пересечения двух окружностей в среде Живая математика таковы, что если из двух общих точек выбрана та, которая расположена ниже по отношению ко второй, то при любом изменении расположения и размеров окружностей среда сохраняет этот выбор. Т.е., если расположить C выше прямой AB, то $ABCD$ – превратится в антипараллелограмм.

Отметим равенство углов *BAD* и *BCD* (т.к. Δ*ABD* равен Δ*CBD* по трём сторонам) и углов *ABC* и *ADC* (Δ*ABC* тоже равен Δ*ADC* по трём сторонам). Теперь нам осталось спрятать все вспомогательные окружности и продолжить строить модель искомого шарнирного механизма.

Добавим к антипараллелограмму *ABCD* ещё один антипараллелограмм *CBKG* (рис. 1.2.5), подобный построенному, и расположим его так, чтобы G принадлежала отрезку *CD*, *KG* = *BC* = *b*. Длину сторон *BK* и *CG* добавленного антипараллелограмма обозначим *c*. Из подобия антипараллелограммов следует, что *CG* : *AD* = *CB* : *AB* или *c*/*b* = *b*/*a*, отсюда $c = b^2/a$. Отрезок *c* – представляет собой четвёртый пропорциональный к данным отрезкам *b*, *b* и *a*, его построение циркулем и линейкой хорошо известно. После построения отрезка *c* последовательно строятся сначала точка *G*, затем точка *K*, как пересечение двух окружностей, первая – с центром *B* и радиуса *c* и вторая – с центром *G* и радиуса *b* (*K* и *G* по разные стороны относительно *BC*). Итак, *CBKG* – второй антипараллелограмм. При этом *KBC* = *KGC* (по свойству антипараллелограмма *CBKG*), *KGC* = *CDA* (следует из подобия антипараллелограммов ABCD и CBKG), *CDA* = *CBA* (по свойству антипараллелограмма *ABCD*). Таким образом, *BC* – биссектриса угла *ABK*.

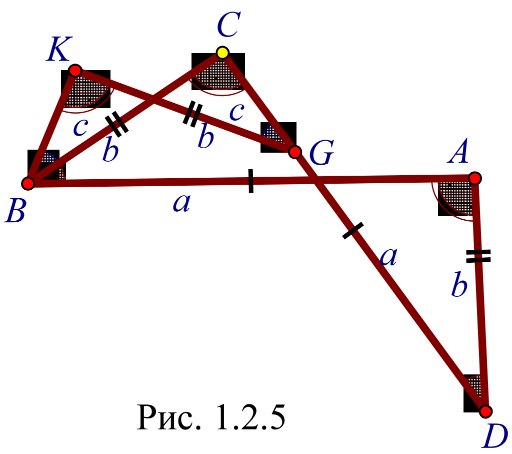
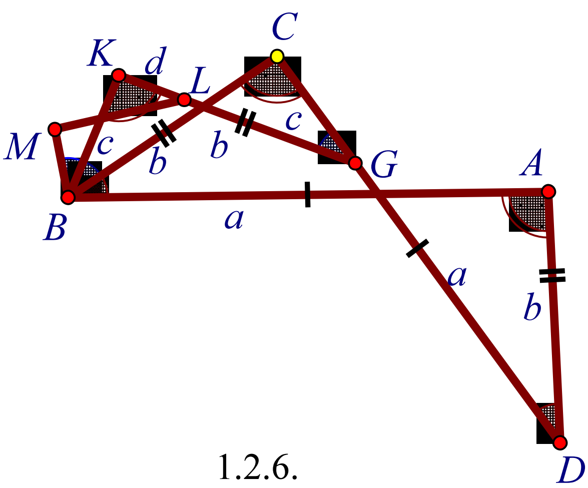


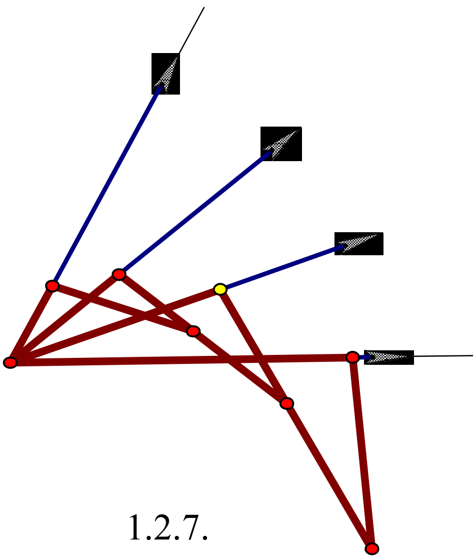
Рис. 1.2.5

Добавим ещё один антипараллелограмм *KBML* (рис. 1.2.6), подобный



1.2.6.

двум предыдущим так, чтобы L принадлежала отрезку KG, $ML = BK = c$. Длину сторон BM и KL добавленного антипараллелограмма обозначим d, выразим d через b и c. Из подобия антипараллелограммов следует, что KL : CG = KB : BC или d/c = c/b, отсюда $d = c^2/b$. Отрезок d – строится как четвёртый пропорциональный к данным отрезкам c, c и b. Как и в предыдущем случае строится антипараллелограмм KBML. При этом луч BK является биссектрисой угла CBM. Но тогда лучи BC и BK делят угол ABM на три равные части.


1.2.7.

Удаляя обозначения шарниров и звеньев механизма, отметки маркером, и продляя направленные отрезки BA, BC, BK и BM до векторов одной длины, например a+1, получаем искомый трисектор (рис. 1.2.7) с анимационной точкой, т.е. модель шарнирного трисектора угла. Отметим, что построение трисектора средствами среды Живая математика не требует больших трудозатрат и вполне по силам учащимся девятого класса общеобразовательной школы.

1.3. Компьютерная анимация и ее роль в обучении геометрии.

Основные дидактические положения использования компьютерной анимации в математике.

Как уже отмечалось выше, в связи с информатизацией общества у учителя математики появилось новое мощное средство обучения, компьютерная анимация, которое постепенно и в тоже время достаточно уверенно заявляет о себе в школьном математическом образовании. Далеко не всё, что делается в этом направлении, заслуживает внимания, однако в целом положительные элементы преобладают. Наша задача не противодействовать этому объективному процессу, а придать ему научно обоснованные формы и обучать школьников в соответствии с новой реальностью.

Существует три основных мотива использования компьютерной анимации при обучении математике в школе:

Первый связан с тем, что визуальные и анимационные возможности компьютерных программ с успехом применяются в вузовских курсах математики и математике как науке;

второй – с тем, что применение компьютерной анимации при обучении математики в школе может существенно повысить качество усвоения учебного материала;

третий – с тем, что использование компьютерной анимации в школьных математических дисциплинах будет содействовать использованию компьютерной анимации и в других естественно научных дисциплинах школы.

Попытаемся обосновать необходимость использования компьютерной анимации при обучении математики. Для этого перечислим некоторые проблемы и трудности в математической подготовке школьника, которые можно устранить за счёт использования компьютерной анимации.

1. Далеко не все школьники знают, что компьютерная анимация используется не только для создания мультипликационных фильмов, презентаций для выступления с докладами, учебных тренажёров для обучения водителей, лётчиков и космонавтов, для многих других аналогичных целей и задач, но и для получения новых результатов как в самой математике, так и в приложениях математики в физике, биологии, химии, гуманитарных науках. Если школьники будут не только понимать, что в математике как науке широко используется компьютерная анимация, но и иметь представление о том, каким образом она применяется, то это усилит мотивацию изучения математики как учебного предмета и, следовательно, повысит уровень математической подготовки школьника.

2. Изучение геометрических преобразований в основной школе вызывает у обучающихся серьёзные трудности. Применение возможностей компьютерной анимации позволяют создавать виртуальные модели геометрических преобразований, визуализируя их, что формирует предпосылки для понимания школьниками этой темы.

В школах большое значение придаётся формированию умения решать задачи элементарной математики методом геометрических преобразований, отработке соответствующих навыков. Для этого нужна хорошо развитая геометрическая интуиция, которая есть далеко не у всех обучающихся. Для того, чтобы помочь школьникам увидеть необходимое для решения задачи преобразование учителю достаточно создать анимационную подсказку. С разработкой подобных этюдов вполне могут справиться школьники, имеющие хорошую геометрическую интуицию.

3. В математических курсах общеобразовательных школ большое значение имеют задачи исследовательского типа. Их решение можно предварить компьютерным анимационным экспериментом, помогающим сформулировать правдоподобную гипотезу, наличие которой существенно упрощает доказательный этап решения задачи. Особенно часто встречаются подобного рода задачи в конструктивной геометрии, в частности при решении задач на построение циркулем и линейкой методом пересечения фигур (или методом геометрических мест точек). Многое здесь зависит от умения определять множество точек плоскости, обладающих заданным свойством. При построении анимационной модели для проведения эксперимента строится произвольная точка M, обладающая заданным свойством и зависящая от некоторой точки N. Задаётся кнопочная, ползунковая или ручная анимация точки N и исследуется траектория, которая вычерчивается точкой M, формулируется соответствующая гипотеза.

4. Препятствием успешной пропедевтики начал стереометрии является недостаточно развитое пространственное представление у большинства школьников. Создание динамической модели пространственной конфигурации позволяет обучающимся наблюдать за исследуемым объектом с разных точек зрения, увидеть различные проекции фигуры на плоскость. Для этого достаточно ухватиться мышкой за подвижную точку (ползунок) и повернуть объект вокруг одной из прямых, проходящих через начало координат. Ясно, что такая компьютерная помощь необходима лишь на начальной стадии решения стереометрических задач. В дальнейшем у обучающегося должны сформироваться умения и навыки осуществлять требуемые повороты фигуры мысленно, в уме.

5. Большинство обучающихся не владеют умениями и навыками осуществлять самоконтроль за решением геометрических задач вообще и с параметрами в частности. Для проверки, полученной в результате решения задачи формулы, зависящей от параметра, на полотне сначала задаётся динамическая модель этого параметра (отрезок, угол и т.д.), затем последовательно строятся заданные условием задачи объекты, и, наконец, та фигура, величина которой является искомой. Изменяя с помощью мышки геометрическую модель параметра, остаётся сопоставить численные значения найденной формулы и величины соответствующей этому параметру искомой фигуры. Если они совпадают для достаточно большого количества значений параметра, то с большой долей вероятности можно считать, что задача решена верно.

6. В ряде случаев трудности, возникающие при усвоении теории или решении задач, связаны с недостаточно развитым представлением об объеме того или иного понятия. Характерно в этом отношении мнение многих выпускников школ, что прямая линия, не содержащая стороны четырехугольника, может его пересекать не более чем в двух точках. Отсутствие в их представлениях образа невыпуклого четырехугольника легко устранить, создав на эк-

ране компьютера динамическую модель четырёхугольника и перемещая мышью его вершины. Труднее это сделать при изучении пространственных фигур или линий. Помочь в этом опять-таки может компьютер, на экране которого легко деформировать образы, вплоть до предельных ситуаций. Сделать это вручную значительно труднее.

7. При организации самостоятельной работы школьников, прежде всего при решении задач, большое значение имеет правильная мотивация этой деятельности. Обычно, в курсе геометрии эта мотивация сводится к требованиям: построить фигуру, написать уравнение, найти координаты, описать множество точек, определить тип фигуры и т. д. Всё это в основном внутриматематические требования. Компьютерная анимация позволяют несколько изменить эту мотивацию, придать ей своеобразную прикладную и эстетическую направленность, что, как показывает опыт, позволяет активизировать самостоятельную работу школьников, сделать её более продуктивной. Для этого можно использовать задачи, в которых требуется визуализировать на дисплее динамическую конфигурацию: объект или абстракцию. При решении таких задач школьникам потребуется установить конструктивное или аналитическое задание этой конфигурации, найти метрические соотношения или координаты ее элементов, выбрать подходящие определения, вспоминать необходимые признаки и свойства и т.д. Подобного рода требования реализуются с помощью конструктивных, вычислительных и анимационных возможностей систем динамической математики и символьных преобразований. Такое изменение конечной цели задания, ясность перспективы, как известно, повышает интерес к заданию.

8. Среди задач, которые рассматриваются в курсе математики основной школы, большое внимание уделяется так называемым задачам прикладной направленности или, как их ещё называют, задачам реальной математики. Немало таких задач в курсе планиметрии, что является вполне естественным,

поскольку геометрия, как известно, возникла в процессе решения практических задач. Решать подобные задачи приходится выпускникам 9 и 11 классов на итоговых государственных экзаменах. Подготовить учеников к успешному решению задач реальной математики можно с использованием компьютерной анимации. Поскольку большинство задач реальной математики связано с движением или легко сводится к ним, то применяя системы динамической математики, можно без особых проблем построить анимационную модель, которая может помочь ученику не только максимально погрузиться в условие задачи, но и найти необходимые соотношения, приводящие к ее решению. Ясно, что учитель математики должен обладать соответствующими компетенциями, сформировать которые можно в педагогическом вузе при обучении математическим дисциплинам.

9. Задачи на измерение площадей и тесно связанные с ними, так называемые задачи на разрезание, имеют не только прикладное значение, они способствуют формированию у школьников пространственного воображения и логического мышления. Умение решать задачи на разрезание развивают у обучающихся способность находить для многоугольников, свойства которых неизвестны, равносоставленные с ними многоугольники с известными свойствами. Системы динамической математики предоставляет учителю возможность сопроводить как теорию измерения площадей, так и решение задач по этому разделу курса геометрии, динамическими чертежами с анимацией. Особенно ценно то, что ученики под руководством учителя могут сами создавать динамические чертежи, поддерживающие не только доказательства теорем, но и решение большинства задач по теме «Площадь».

10. В элементарной математике существует целый класс задач, условия которых предполагают более одного решения. Это, так называемые, многовариантные математические задач. Например, построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности в данной на ней точке. Решением

этой задачи являются две окружности, одна из которых касается данной окружности внешним образом (большинство школьников и даже студентов чаще всего указывают в ответе только эту окружность), вторая – внутренним образом. Подготовить учеников к их решению – одна из задач учителя математики. Системы динамической математики предоставляют учителю дополнительные дидактические возможности обучить своих подопечных успешно преодолевать возникающие при решении таких задач трудности. Для этого создаётся динамическая модель, удовлетворяющая всем условиям задачи и зависящая от некоторого анимационного объекта (точки, ползунка и т.п.). Перемещая с помощью мышки анимационный объект, можно исключить случайную потерю одного из решений. Так, например, в приведённом выше примере, в соответствии со свойством касающихся окружностей, центр X искомой окружности помещается на прямой, проходящей через центр данной окружности и данную точку A на ней. Далее строится окружность с центром X, содержащая точку A. Перемещая мышкой точку X, обучающийся получает возможность увидеть, что искомых окружностей – две.

11. Элементарная и прикладная математика содержат большое число задач на конструирование шарнирных механизмов. Перед созданием подобного реально действующего механизма бывает полезно построить его динамическую модель. Роль звеньев успешно выполняют отрезки прямых, шарниров – точки, функцию одного из подвижных шарниров – анимационная точка, помещённая в соответствии со структурой механизма на подходящую линию (прямую, луч, отрезок, окружность или дугу), изображение которой при необходимости скрывается. Так, например, при построении шарнирного механизма, переводящего движение одного шарнира по окружности в движение другого шарнира по прямой (спрямляющий механизм или прямило), можно воспользоваться прямилом Липкина, представляющим собой механизм с одним закреплённым шарниром, соединяющим два длинных звена

одинаковой длинны, ко вторым концам которых прикреплены противоположные вершины шарнирного ромба (его сторона – короткое звено). При анимационном перемещении одной из свободных вершин ромба по окружности противоположная вершина ромба перемещается по прямой. Отметим, что важнейшим этапом создания шарнирного механизма, обладающего требуемым условием, является строгое математическое обоснование того, что динамическая модель механизма на самом деле удовлетворяет этому условию. Так, в приведённом выше примере можно доказать, что прямило Липкина реализует инверсию относительно окружности с центром в закреплённом шарнире и радиусом равным корню квадратному из разности квадратов длинного и короткого звеньев.

Таким образом, нами обоснована потребность в разработке основных дидактических положений теории обучения школьной математике с использованием компьютерной анимации, которая позволила бы:

– повысить наглядность в обучении;

– существенно расширить представления об объёме изучаемого математического понятия;

– «оживить» геометрический чертеж, показать его в процессе построения;

– вскрыть все нюансы геометрических преобразований, научить с их помощью решать конструктивные задачи на построение.

Сформулируем эти положения:

1. *Первое положение* заключается в том, что использование информационных технологий в процессе математической подготовки школьника должно адекватно отражать те изменения в исследованиях в области фундаментальной и прикладной математики, которые происходят в связи с информатизацией общества. Школьники должны не только понимать, что в современных исследованиях как в фундаментальной математике, так и в приложе-

ниях математики в других науках, широко используется компьютерная анимация, но и иметь представление о том, каким образом она применяется.

Отсюда первый принцип (*принцип соответствия*)*: использование компьютерной анимации в процессе обучения геометрии в школе должно в определенном смысле соответствовать использованию компьютерной анимации в вузовской геометрии и в геометрии как науке.*

2.*Второе положение* связано с тем, что применение компьютерной анимации в обучении геометрии создает по сравнению с использованием традиционных статических средств наглядности целый ряд преимуществ, которые отмечены в п. 1.3.

Отметим, что динамическое изображение геометрической фигуры, текстового или алгебраического объекта должно включать в себя анимацию в различных ее проявлениях: «ручное» перемещение объектов на экране (с помощью мыши); изменение положения объектов (геометрических и текстовых) с помощью «кнопки»; изменение данных с помощью встроенного (или созданного) инструмента под названием «Ползунок», использование условий видимости объектов и другие.

Отсюда второй принцип (*принцип анимационности изображения): использование в процессе обучения школьников геометрии возможностей систем динамической математики, связанных с визуализацией объектов и процессов, должно быть максимально ориентировано на создание эффекта анимации.*

3. *Принцип адекватности и целесообразности.* Анимационное изображение должно соответствовать учебному материалу и целям обучения курсу школьной геометрии, обеспечивая понимание, устраняя прежние трудности и не создавая новых.

4. *Принцип вариативности.* Необходимо предусмотреть возможность создания анимационного рисунка для решения целого класса (однотипных)

задач с помощью процедуры настраивания изображения.

5. *Принцип убедительности.* Анимационный рисунок не должен оставлять сомнений в выводах из наблюдений. Вместе с тем, эти выводы должны опираться на существование математического доказательства в рамках строгой математической теории.

6. *Принцип экспериментирования и исследования.* Анимационное изображение должно, как правило, предоставлять обучающемуся возможность использовать его, в том числе, и для проведения учебных исследований и экспериментов.

7. *Принцип доступности и самостоятельности.* Алгоритмы создания компьютерных анимационных изображений должны быть доступны для школьников, предоставляя им возможность самостоятельно реализовывать их в одной из систем динамической математики или символьных вычислений.

8. *Принцип проверки* при самостоятельном решении геометрических задач.

Несмотря на то, что среда Живая математика предоставляет виртуальные чертёжные инструменты с целым рядом дополнительных возможностей, существуют такие задачи, для которых, в принципе, практически невозможно построить динамический чертёж, в котором выражены ее условия. Так как существуют определенные ограничения при построения циркулем и линейкой. В этом случае возможно использование следующей методики: в соответствии с ответом, строится вспомогательный элемент (точка, отрезок и т.д.), который позволяет расположить искомую фигуру так, чтобы она полностью соответствовала найденному ответу (создаётся соответствующая кнопка «Перемещение» из меню «Правка»). После этого выполняется проверка, для определения точности условий задачи, которая задается в меню «Измерения» среды Живая математика.

ГЛАВА 2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИЕМОВ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ НЕКОТОРЫМ ТЕМАМ ГЕОМЕТРИИ СРЕДСТВАМИ АНИМАЦИИ В СРЕДЕ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА.

Продемонстрируем в данной главе на конкретных примерах проектирование методических приемов обучения учащихся основной школы некоторым темам геометрии средствами анимации в среде «Живая математика». При изложении материала будем считать, что учащиеся основной школы уже знакомы с возможностями среды «Живая геометрия» и могут выполнять определенные построения.

2.1. Геометрия в 7 классе: анимационные GSP-файлы и методика их использования.

В седьмом классе начинается курс школьной геометрии. На изучение предмета отводится 70 часов. На начальном этапе школьной программой предусмотрено усвоение учащимися седьмого класса начальных геометрических сведений и терминологии. Изучаются основные понятия: точка, прямая, луч, взаимное расположение фигур в пространстве. Учащиеся изучат основные признаки равенства треугольников, научатся решать задачи на доказательство равенства треугольников, рассмотрят теоремы, устанавливающие соотношения между углами и сторонами треугольника.

Продемонстрируем анимационно-геометрическую методику обучения учащихся седьмого класса по некоторым темам.

Треугольник. Первый признак равенства треугольников

Цель урока: дать определение треугольника, его вершин, сторон, углов и периметра. Определить равенство двух треугольников. Определение понятий сопровождать анимационными моделями. Сформулировать и доказать теорему о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними.

При доказательстве использовать анимационные возможности среды Живая математика. Рассмотреть задачи по рассматриваемой теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. На уроке даётся определение треугольника. Учитель в ре-

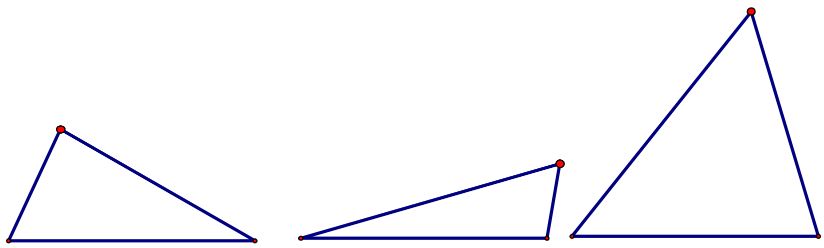


Рис. 2.1

жиме реального времени строит на рабочем поле среды Живая математика треугольник. Используя ручную анимацию, перемещает одну из его вершин, демонстрируя тем самым тот факт, что есть различные виды треугольников (на рисунке 1 продемонстрированы три стоп-кадра, которые получаются в

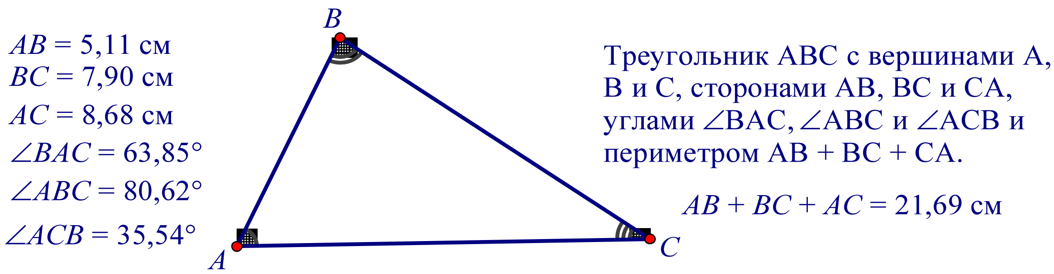


Рис. 2.2

результате перемещения одной его вершины).

Далее, учитель вводит определения и обозначения вершин треугольника (рис. 2.2), сторон, углов и периметра, показывает, как их можно измерить.

Перемещая одну из вершин, учитель демонстрирует изменения величин сторон, углов и периметра треугольника.

Далее учитель определяет (точнее, напоминает ученикам) равенство двух фигур, в частности, двух треугольников, с помощью наложения одного из них на другой. Для этого он переходит к подготовленной заранее второй странице презентации, на которой изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Одному из учеников предлагается сесть за компьютер учителя и совместить их. Сначала, ухватившись за вершину A, ученик совмещает ее с вершиной A_1, затем, поворачивая B, совмещает её с B_1. Если произошло совмещение каких-то элементов треугольника (сторон или углов), то этот факт отмечается выставлением соответствующих «отрезочных» или «угловых» меток.

У учителя есть возможность повторить попытку, вызвав к доске второго ученика и заменив треугольники на новые (для этого достаточно нажать кнопку «показать отрезки» и изменить их длину).

Далее учитель обобщает проведённые испытания в виде следующих двух очевидных правил:

1) *если два треугольника равны (т.е. совмещаются), то все шесть элементов (три стороны и три угла) одного треугольника соответственно равны шести элементам второго*.

2) *в равных треугольниках против соответственно равных сторон* (т.е. совмещающихся при наложении) *лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов* (т.е. совмещающихся при наложении) *лежат равные стороны*.

Перед тем, как перейти к рассмотрению первого признака равенства треугольников, учитель должен мотивировать учеников, т.е. объяснить им, для чего эти признаки необходимы. А они нужны для того, чтобы при доказательстве равенства треугольников не проверять совпадение все шести их элементов (или обойтись без наложения треугольника на треугольник), а ограничиться лишь некоторыми тремя парами элементов.

В первом признаке обосновывается, что для равенства треугольников достаточно проверить равенство двух сторон и угла между этими сторонами.

Т е о р е м а. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Учитель демонстрирует третью страницу, подготовленного заранее

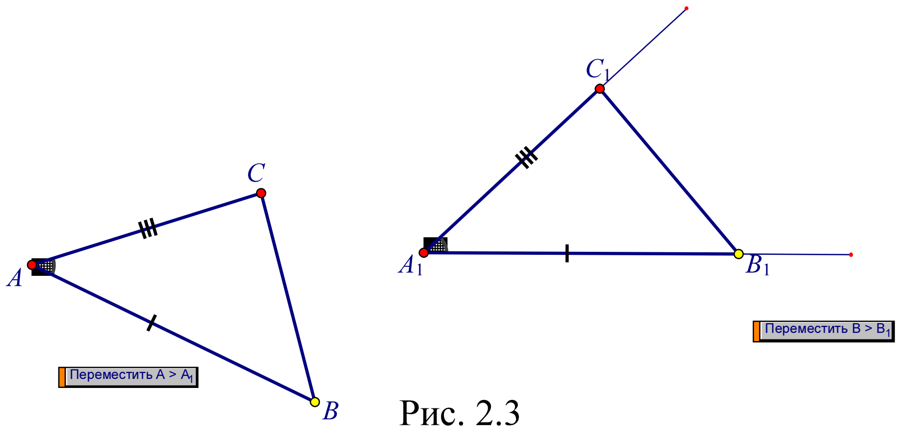


Рис. 2.3

GSP-файла. На рабочем поле изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, отмечены равные стороны и пара равных углов между этими сторонами (сделаны соответствующие пометки маркерами), стороны A_1B_1 и A_1C_1 помещены на одноименные лучи (рис. 2.3).

Для динамической визуализации доказательства и более точного расположения подвижного треугольника удобно использовать кнопочную анимацию. Для этого учитель заранее готовит кнопку для перемещения треугольника ABC, приводящая к совпадению вершин A и A_1 (рис. 4), а также вторую кнопку, которая приводит к совпадению вершин B и B_1 (рис. 5).

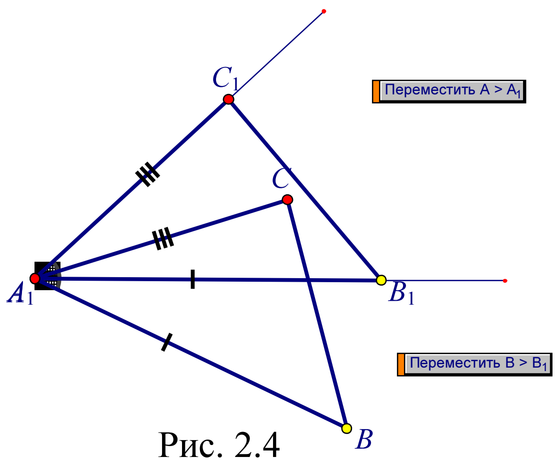


Рис. 2.4

В отличии от анимации на странице 2 учитель обязательно должен прокомментировать, во-первых, почему вершина B совпадает с вершиной B_1 (т.к. отрезок AB помещён на луч A_1B_1, а расстояние AB = A_1B_1), во-вторых, почему точка C попадёт на луч A_1C_1 (так как угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$), и в-третьих, почему точка C совпадёт с точкой C_1 (т.к. отрезок AC равен отрезку A_1C_1). Очевидно, что совпадение пар точек B и B_1, а также C и C_1, влечёт за собой совпадение отрезков BC и B_1C_1, а также пар углов при вершинах B и B_1, C и C_1.

Эти факты визуально подтверждаются на чертежах, что помогает усвоить доказательство даже тем ученикам, которые имеют недостаточно развитое пространственное представление. Рассматривая доказательство теоремы в среде «Живая математика», у детей лучше развивается зрительная память, воображение, мышление, внимание, наблюдательность.

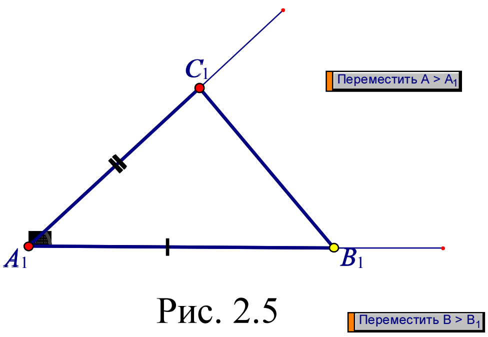


Рис. 2.5

Лабораторно-практическое задание на измерение элементов треугольника

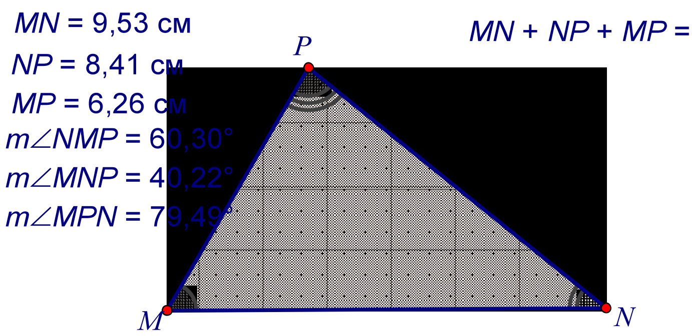
З а д а н и е № 87 (на стр. 30 из [1]). *Изобразите на рабочем поле Живой математики треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P.*

а) *Назовите все углы и стороны треугольника, выведите на рабочее поле соответствующую текстовую информацию*;

б) *с помощью меню "Измерения" измерьте углы и стороны, найдите периметр треугольника. Измените с помощью мышки положение вершин треугольника и вновь найдите его периметр. Составьте таблицу значений длин сторон и периметра.*

Представленное выше задание отличается от соответствующего задания из учебника [1] тем, что все необходимые измерения, вычисления и составления таблицы предлагается выполнить с помощью команд и опций среды Живая математика.

Перед выполнением задания необходимо напомнить ученикам, каким образом в среде Живая математика измеряются длины отрезков и величины углов (подсвечиваются концы отрезков или точки, определяющие измеряемый угол, и выбирается команда «расстояние» или «угол» в папке Измерения). Для нахождения периметра предпочтительно, если ученики найдут его с помощью графического калькулятора. Для фиксации результатов учебного эксперимента ученикам необходимо напомнить, как на рабочее поле выводится таблица (подсвечиваются текстовые значения расстояний между вершинами и периметра треугольника и в меню «Вычисления» выбирается оп-



MN + NP + MP = 24,20 см

MN	NP	MP	MN + NP + MP
10,27 см	8,91 см	7,13 см	26,31 см
10,27 см	6,14 см	8,93 см	25,34 см
10,27 см	7,96 см	17,77 см	36,00 см
10,65 см	7,61 см	5,83 см	24,09 см
10,61 см	10,94 см	8,24 см	29,79 см
9,53 см	8,41 см	6,26 см	24,20 см

Рис. 2.6

ция «заполнить таблицу») (рис. 6).

Для сравнения, желающим ученикам можно предложить выполнить необходимые измерения, используя для этого линейку, транспортир и обычный калькулятор. Можно сопоставить найденные значения.

Задача на применение первого признака равенства треугольников

З а д а ч а 95 (на стр. 31 из [1]). *На рабочем поле среды Живая математика самостоятельно постройте изображения треугольников ABC и ADC, так, чтобы BC = AD, а угол ACB равен углу CAD. Используя возможности среды проводить измерения, проверьте, что построенные треугольники обладают указанным требованиям.*

а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны;

б) найдите AB и BC, если AD = 17 см, DC = 14 см.

При создании динамического чертежа, строятся два отрезка AD и AC с общей точкой A, затем строится прямая, проходящая через C и образующая с AC угол, равный углу DAC, на ней откладывается отрезок BC, параллельный AD. При рассмотрении случая а) ученики используют доказанный первый признак равенства треугольников ACB и CAD (сторона AC – общая, BC = AD и ∠BCA = ∠DAC по построению).

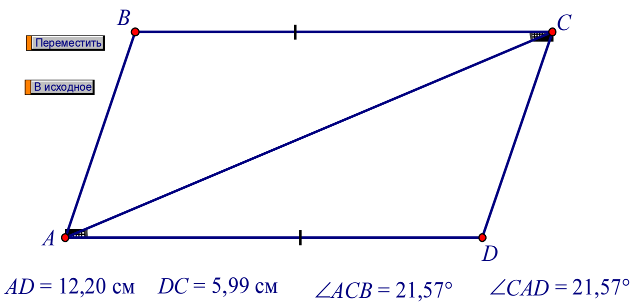


Рис. 2.7

При решении этой задачи удобно для случаев «а» и «б» создать анимационные кнопки, переводящие фигуру, используемую для визуализации случая «а», в фигуру, которая необходима для визуализации и проверки решения в случае «б», и наоборот. На рабочем поле целесообразно вывести значения сторон AD и DC, углов ACB и CAD.

Второй и третий признаки равенства треугольников

Цель урока. Дать определение равнобедренного треугольника, его вершин, сторон и углов. Определение понятий сопровождать анимационными моделями. Сформулировать и доказать теорему о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам, а также сформулировать и доказать теорему о равенстве треугольников по трем сторонам. При доказательстве использовать анимационные возможности среды Живая математика. Рассмотреть задачи по данной теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. Во втором признаке для равенства треугольников достаточно проверить равенство стороны треугольника и двух прилежащих к ней углов.

Т е о р е м а. *Если сторона и два прилежащие к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Учитель демонстрирует первую страницу GSP-файла. На рабочем поле изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 2.8), отмечены равные стороны $AB=A_1B_1$ и углы, прилежащие к этим сторонам, $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$, $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$ (сделаны соответствующие пометки маркерами).

Для доказательства этой теоремы, как и предыдущей, можно использовать как ручную анимацию, так и кнопочную. Будем, например, использовать

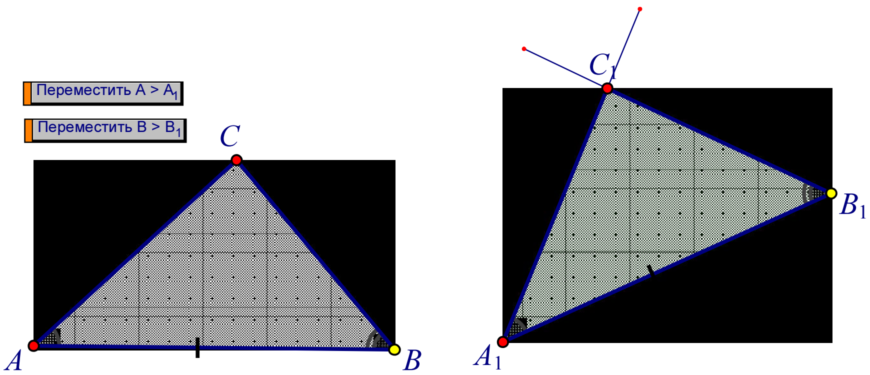


Рис. 2.8

кнопочную анимацию. Для перемещения треугольника ABC, учитель готовит кнопку, приводящую к совпадению вершин A и A_1. А также кнопку, приводящую к совпадению вершин B и B_1.

Демонстрируя анимацию, учитель комментирует, почему совпадут треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Так как отрезок AB помещён на луч A_1B_1, а расстояние $AB = A_1B_1$ – совпадут вершины A и A_1, B и B_1. Поскольку $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ и $\angle CBA=\angle C_1B_1A_1$, то луч AC совместится с лучом A_1C_1, а луч BC – с лучом B_1C_1. Тогда точка C – общая точка лучей AC и BC – совместится с точкой C_1 – общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1.

Прежде, чем перейти к третьему признаку равенства треугольников, учащимся необходимо познакомиться с одним из важнейших типов треугольников – равнобедренным треугольником, вывести его основные свойства, закрепить их. Учитель даёт определение равнобедренного треугольника, строит его на рабочем поле среды Живая математика, комментируя каждый шаг построения (на рабочем поле строится произвольная окружность, проводится два радиуса, соединяются их различные концы так, чтобы получился треугольник, скрывается окружность, делаются соответствующие отметки маркером на равных сторонах треугольника).

Учитель выполняет построение равнобедренного треугольника в среде "Живая математика" другим способом: проводит горизонтальную прямую; на прямой отмечает точку D; строит окружность; отмечает точки пересечения прямой с окружностью; подсвечивает точку D и прямую; строит перпендикуляр; на перпендикуляре ставит точку, затем прячет прямую, перпендикуляр и окружность, оставляет только четыре точки A, B, C, D; соединяет точки A с B, B с C и C с A.

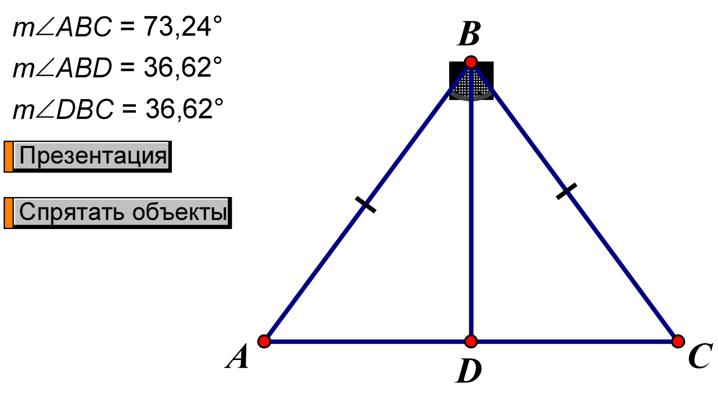


Рис. 2.9

Т е о р е м а. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соединим точки B и D (проведем биссектрису угла ABC), то AB будет общей стороной треугольников ABD и CBD. Так как в равнобедренном треугольнике AB=BC, а биссектриса делит угол ABC на два равных угла, то треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Значит ABD=DBC.

После доказательства того, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, рекомендуется маркером отметить (визуализировать) этот факт.

Учитель дает возможность ученику сесть за компьютер и выполнить самостоятельно построение равнобедренного треугольника, и подвигать вершины треугольника. Перемещая вершины треугольника, учащиеся видят, что треугольник сохраняет свои свойства:

– две стороны треугольника равны;

– углы при основании равны;

– биссектриса треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Переходим к третьему признаку равенства треугольников.

Т е о р е м а. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

На рабочем поле среды «Живая математика» изображены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, отмечены равные стороны (сделаны соответствующие пометки маркерами).

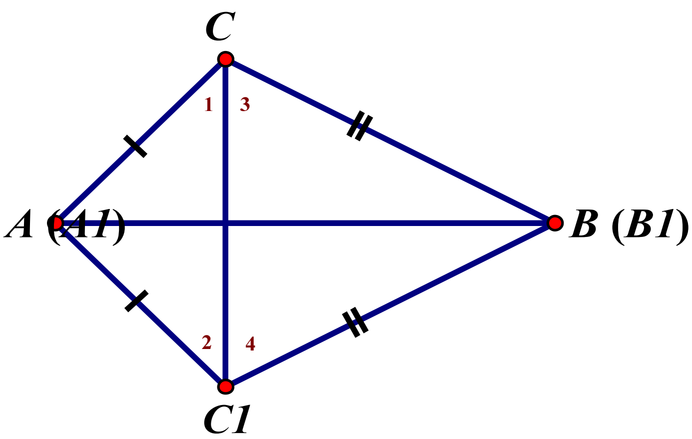


Рис. 2.10

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что сторона A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на стороне AB треугольника ABC, вершина A совпадает с вершиной A_1, а вершина B совпадает с вершиной B_1, вершины C и C_1 расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Проведем отрезок CC_1 (перпендикуляр к прямой AB), образовалось два равнобедренных треугольника CAC_1 и CBC_1. Следовательно, $\angle 1=\angle 2$, а $\angle 3=\angle 4$ по свойству равнобедренного треугольника. Значит, $\angle C=\angle 1+\angle 3=\angle C_1=\angle 2+\angle 4$, тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку треугольников.

Задачи на применение второго и третьего признаков равенства треугольников

З а д а ч а 125 (стр. 40). На рабочем поле изображен рисунок, где $\angle DAC=\angle DBC$, AO=BO. Докажите, что $\angle C=\angle D$ и AC=BD.

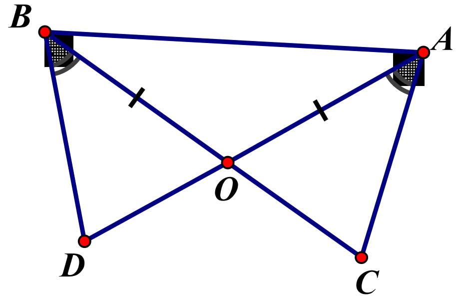


Рис. 2.11

Р е ш е н и е. По рисунку видно, что треугольники BOD и AOC равны по второму признаку, так как $\angle AOC=\angle DOD$ – как вертикальные, $\angle DAC=\angle DBC$, и стороны AO=BO (по условию). Следовательно, AC=BD, $\angle D=\angle C$.

Практическое задание. На рабочем поле Живой математики постройте ΔABC по его сторонам: AB=3,5 см, AC=4 см, BC=3 см.

1. Постройте отрезок AB.
2. Постройте окружность с центром в точке A и радиусом 4 см.
3. Постройте окружность с центром в точке B и радиусом 3 см.
4. Одну из точек пересечения обозначьте C и соедините ее с точками A и B.
5. Сколько таких треугольников можно построить? Что о них можно сказать?

В результате выполнения практического задания было построено два равных треугольника ABC и ABC1 (рис. 2.12).

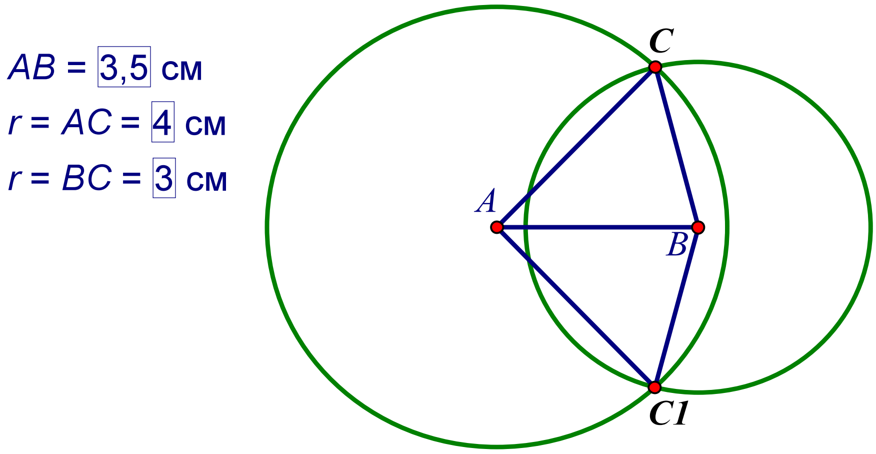


Рис. 2.12

Прямые. Признаки параллельности двух прямых

Цель урока. Повторить определение прямой. Сформулировать определение параллельных прямых. Доказать признаки параллельности прямых. При доказательстве использовать анимационные возможности среды Живая математика. Рассмотреть задачи по данной теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. Учитель дает определение параллельных прямых, демонстрируя их построение в среде Живая математика.

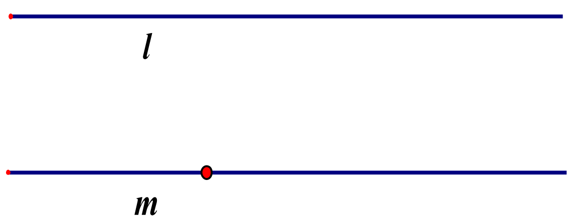


Рис. 2.13

О п р е д е л е н и е. *Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Т е о р е м а. *Если две прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.*

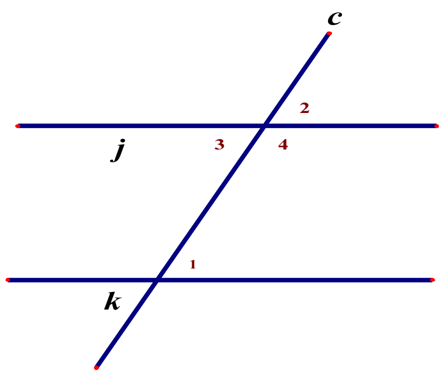


Рис. 2.14

Параллельные прямые i и k пересечены секущей c. Докажем что $\angle 1=\angle 2$. Так как i // k, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1=\angle 2$.

Учитель дает детям практическое задание.

З а д а ч а 210 (стр. 66) [1]**.** Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B. Третье тело P_3 подвешено на той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

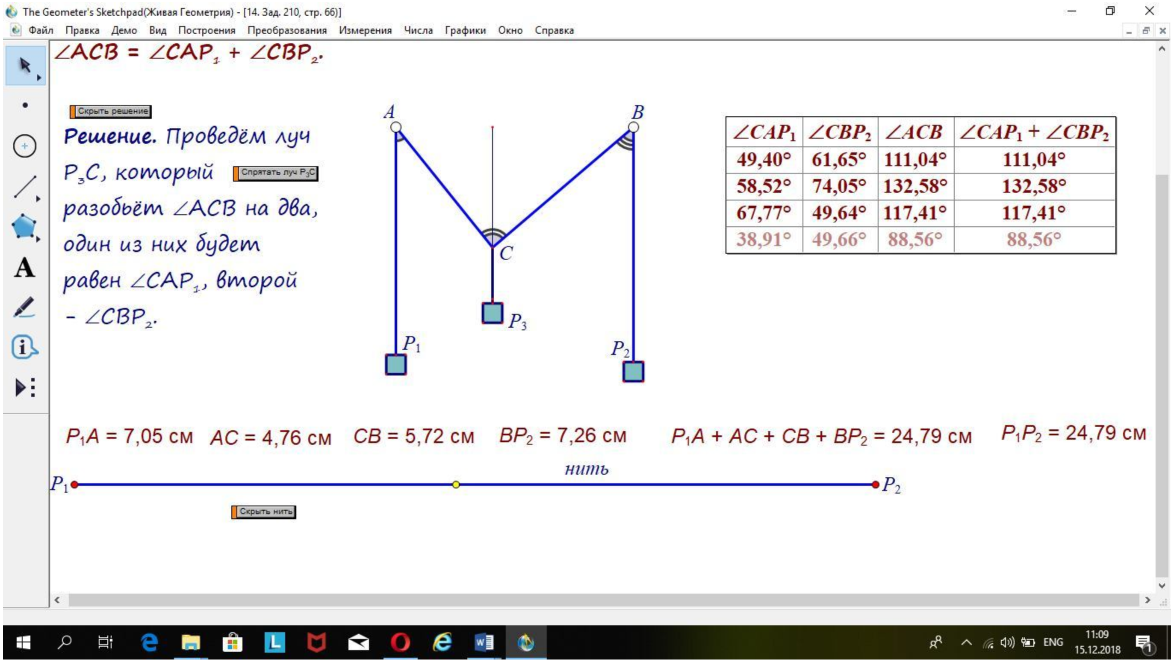


Рис. 2.15

Р е ш е н и е. Проведём луч P_3C, который разобьёт ∠ACB на углы АСК и КСВ, ∠АСК=∠САР$_1$ и ∠СВР$_2$=∠КСВ - как накрест лежащие углы. Следовательно, ∠АСВ = ∠САР$_1$ + ∠СВР$_2$.

Сумма углов треугольника

Цель урока. Доказать важнейшую теорему геометрии о сумме углов треугольника. Опираясь на эту теорему определить остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники, закрепить эти понятия решением задач.

Перед доказательством теоремы о сумме углов треугольника следует актуализировать необходимые для этого знания. В первую очередь равенство внутренних накрест лежащих углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, т.е. третьей прямой, не параллельной им. Крайне важно напомнить ученикам, что доказательство равенства этих углов не только существенно опирается на аксиому параллельности, но и невозможно без неё. Этот факт подтверждается существованием неевклидовой геометрии, впервые построенной Н.И. Лобачевским, в которой сумма внутренних углов любого треугольника меньше 180 градусов.

Перед доказательством теоремы полезно провести учебный эксперимент с использованием созданной учителем анимационной модели треугольника, имитирующей в динамике объединение всех углов треугольника в один развёрнутый угол. Имеется ввиду угол с общей вершиной, в котором первый и второй, а также второй и третий углы имеют по одной общей стороне, а две стороны первого и третьего угла дополняют друг друга до общей прямой. Проведение такого эксперимента позволит ученикам самостоятельно сформулировать предположение (гипотезу) о том, что сумма углов треугольника равна развёрнутому углу. Причём сделать это до того, как формулировка соответствующей теоремы будет озвучена.

Ясно, что учитель потеряет на этом драгоценное учебное время. Что он получит взамен? Прежде всего – это мотивацию учеников на корректное доказательство своей гипотезы с целью придать ей статус теоремы.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленная заранее анимационная модель треугольника, позволяющая продемонстрировать ученикам математический этюд.

Ход урока. Учащиеся вспоминают формулировку аксиомы параллельности, свойства секущих, пересекающих параллельные прямые, в частности равенство накрест лежащих при этой секущей углов. Учитель визуализирует эти факты в среде Живая математика, строя анимационные чертежи.

Далее учитель демонстрирует на рабочем поле среды Живая математика динамическую модель треугольника ABC, в которой с помощью ползунковой анимации происходит поворот угла $\angle B$ треугольника ABC вокруг середины стороны AB на 180º по часовой стрелке, и одновременно поворот угла $\angle C$ вокруг середины стороны AC на этот же угол, но уже против часовой стрелки.

Прокомментируем основные этапы создания такой модели в среде Живая математика.

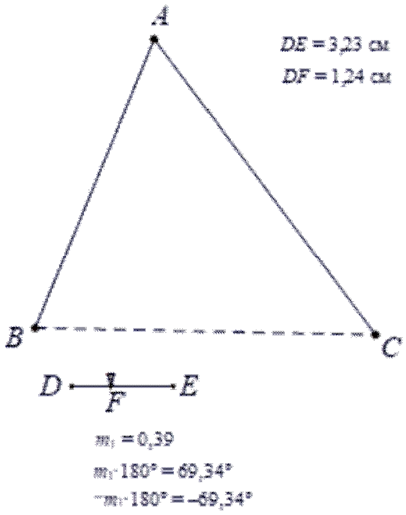


Рис. 2.16

1. Построим треугольник ABC (сторона BC изображается тонким пунктиром), затем построим произвольный отрезок DE, поместим на отрезок DE точку F (рис. 9). Измерим длину DE и DF. Разделим DF на DE (меню команд Вычисления, команда Вычислить...), результат обозначим m_1 (навести на дробь DF/DE курсор, нажать правую клавишу, выбрать Имя, переименовать). Умножим m_1 на 180° (меню команд Вычисления, команда Вычислить..., ввести m_1*180°, после ввода 180 надо не забыть зайти в опцию Единицы и выбрать "град"). Аналогично умножить m_1 на -180°.

2. Построить середины сторон треугольника ABC, пусть G - середина AB, H - середина AC, I - середина BC. Стороны AB и AC прячутся. Изображаются отрезки AG, AH, BI и CI (полужирные, сплошные) и отрезки CH и BG (тонкие, пунктирные).

3. Точка G выбирается в качестве центра поворота (щёлкнуть на ней два раза левой клавишей мышки или подсветив её, зайти в меню Преобразования и выбрать Отметить центр). Отметить угол поворота. Поскольку мы будем точку B поворачивать вокруг G по часовой стрелке (отрицательное направ-

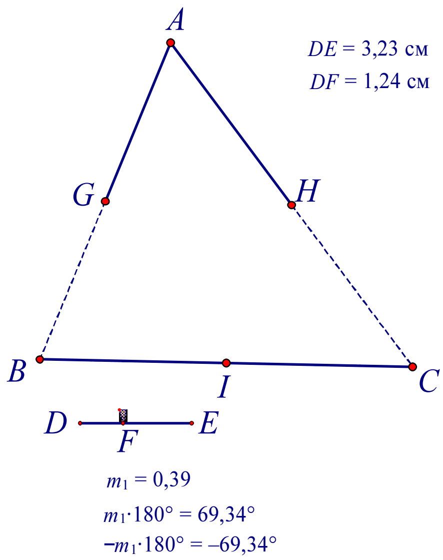


Рис. 2.17

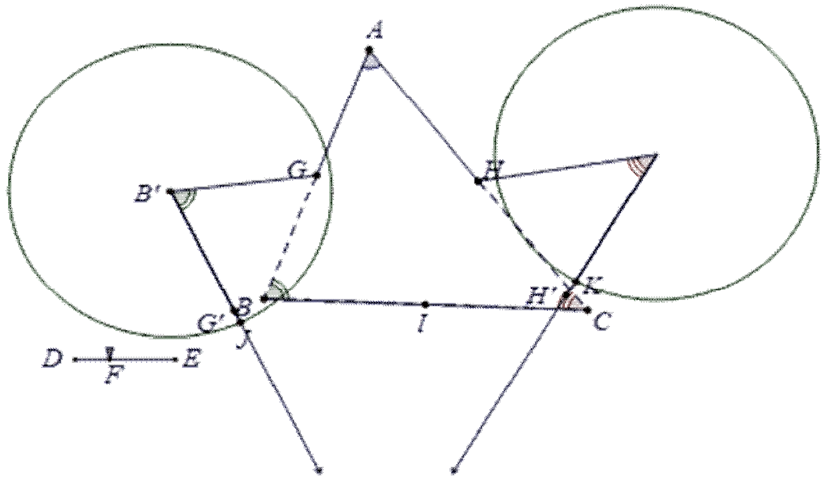


Рис.2.18

ление), то в качестве угла надо выбрать отрицательный угол - $m_1 \cdot 180°$ (подсветим мышкой на экране значение - $m_1 \cdot 180°$, зайдём в «Преобразование», выберем «Отметить угол»). Теперь осталось повернуть вершину B: подсветим эту точку, зайдём в Преобразования, выберем команду Повернуть... На экране появится точка B'. Соединим G и B' отрезком (тип линии: средняя, сплошная).

4. Повернём теперь точку G вокруг точки B' на ориентированный угол

АВС. Зададим центр поворота B' (щёлкнули на ней 2 раза), зададим угол поворота АВС (отметили сначала А, затем В, затем С, зайдём в «Преобразования», отметим «Угол поворота», он автоматически будет выполняться по часовой стрелке). Совершим поворот (подсветим G, зайдём в «Преобразования», выберем команду Повернуть...) получим точку G', построим луч B'G'. Построим окружность с центром в точке B' и радиуса BI (подсветили точку B', отрезок BI, зашли в «Построения», выбрали команду «Окружность по центру и радиусу»). Построили точку J пересечения окружности и луча. Спрятали окружность, луч и точку G'. Построили отрезок B'J.

5. Аналогичные построения выполняются со стороны АС, только все повороты выполняются в другую сторону. После этого прячутся отрезки BI и CI, с помощью маркера изображаются дужки (при вершине А - одна фиолетовая дужка, при В и В' - две зелёные дужки, при вершинах С и С' - три красные). Затем середины сторон и точки В', С' прячутся, скрываются имена точек D, E, F.

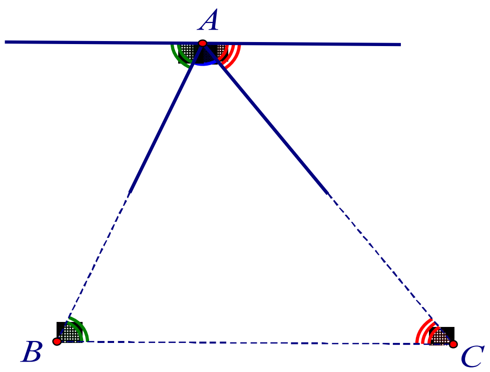


Иллюстрация ученикам представленного выше математического этюда позволяет им с большой долей вероятности сформулировать гипотезу о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°. У некоторых учеников может возникнуть вопрос: «А зачем проводить доказательство? Ведь мы на динамическом чертеже видим, что сумма углов при вершине А равна 180°». На что учитель должен ответить: «А где гарантия того, что отрезки, являющиеся образами стороны ВС, лежат на одной прямой?» Чтобы быть уверенным в том, что угол, который они образуют при вершине А, равен развёрнутому, а не 179,9999° нужно провести строгое доказательство, обязательно опирающееся на аксиому параллельности. Это, собственно, и делается в учебнике [1, стр. 70]: через вершину A проводится прямая, параллельная стороне BC; отсюда делается вывод о том, пары накрест лежащих углов при боковых сторонах треугольника и этой прямой и основании, равны между собой (именно это утверждение использует теорему на стр. 63 [1]: «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны», которую нельзя доказать без аксиомы параллельности), что и приводит к требуемому результату.

Экспериментальные задания для учащихся седьмого класса в среде Живая математика

З а д а н и е 1. Возьмите лист бумаги с неровными краями. Проведите на нем произвольную прямую l, отметьте две точки O и A. Пусть O - центр воображаемой окружности, точка A - точка, лежащая на этой окружности. Опишите, как перегибанием листа бумаги указать, пересекает ли прямая воображаемую окружность. Пользуясь этим методом найдите точки пересечения построенной прямой и воображаемой окружности с центром O и радиусом OA, или покажите, что их нет.

Р е ш е н и е.

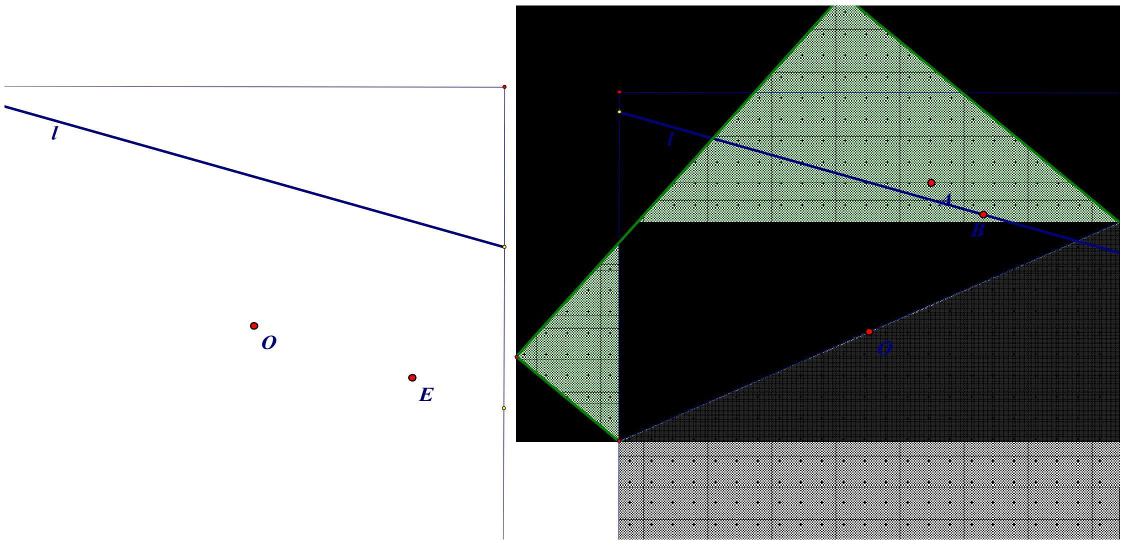


Рис. 2.20

Сложить лист бумаги, проведя одну линию сгиба по прямой l, а другую через точки O и A. Удерживая точку O, постараться согнуть лист так, чтобы точка А попала на прямую l. Отметить на l все возможные места расположения точки А.

Если уложить не удалось, то точек пересечения окружности и прямой нет.

Если удалось отметить только одно место расположения точки А, то прямая l касается окружности с радиусом ОА.

Если удалось отметить два места, то прямая и окружность пересекаются в этих точках.

З а д а н и е 2. Даны две точки А и В. Экспериментально установите вид фигуры, образованной основаниями перпендикуляров, которые опущены из точки А на всевозможные прямые, проходящие через точку В. Обоснуйте правильность выводов, сделанных на основе эксперимента.

Р е ш е н и е. Эксперимент: Пусть СВ - одна из прямых, проходящих через точку В. Опустим на нее перпендикуляр АН из точки А с основанием Н. Зададим для Н опцию "оставлять след" и будем перемещать точку С.

Г и п о т е з а: *Основания перпендикуляров описывают окружность с диаметром АВ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о:

1. Пусть Н лежит на окружности с диаметром АВ, тогда треугольники АОН и ВОН - равнобедренные. Следовательно, в этих треугольниках углы при основаниях равны. Пусть угол при вершине А равен α, а при вершине В - β. Тогда угол при вершине Н равен α + β. Применим к треугольнику АНВ теорему о сумме углов треугольника, получим α + (α + β) + β = 180°. Отсюда Н - основание перпендикуляра, опущенного из А на некоторую прямую, проходящую через В.

2. Пусть Н - основание перпендикуляра, опущенного из точки А на прямую ВС. Докажем методом от противного, что Н лежит на окружности с диаметром АВ. Если прямая ВС пересекает окружность в некоторой точке H_1,

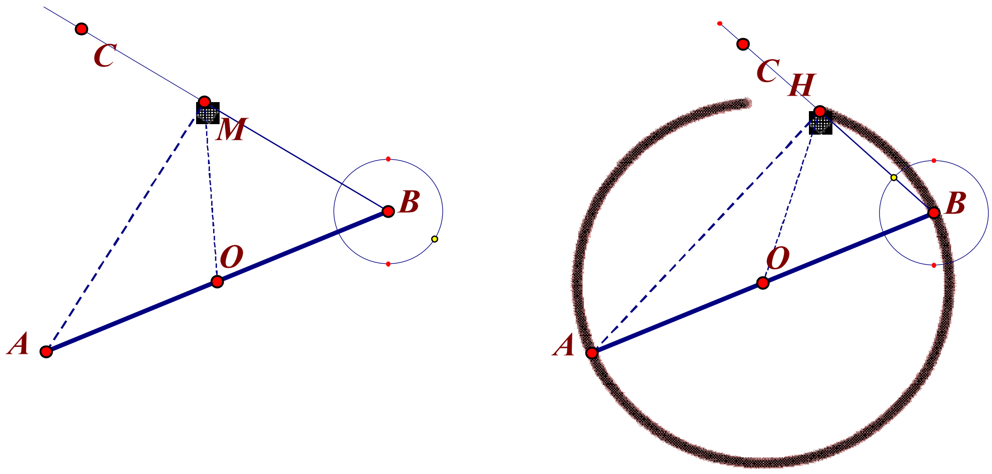


Рис. 2.21

H то согласно п.1, AH_1 перпендикулярна BC. Если точки H и H_1 различны, то из одной точки проведено два различных перпендикуляра к одной прямой, что невозможно. Следовательно, H и H_1 совпадают, т.е. H лежит на окружности с диаметром AB. Если BC не имеет других общих точек с окружностью диаметра AB, то B - основание перпендикуляра к BC из A. H и B в этом случае совпадают. Итак, H всегда лежит на окружности с диаметром AB.

2.2. Геометрия в 8 классе: анимационные GSP-файлы и методика их использования.

В восьмом классе продолжается изучение треугольников. В ходе освоения содержания курса учащиеся получают возможность развить пространственные представления и изобразительные умения, освоить основные факты и методы планиметрии, познакомиться с простейшими фигурами и их свойствами. На изучение предмета отводится 70 часов.

Продемонстрируем анимационно-геометрическую методику обучения учащихся восьмого класса по некоторым темам.

Осевая и центральная симметрия.

Цель урока. Дать определение симметрии. Рассмотреть виды симметрии. Установить экспериментальным путем, при помощи программы «Живая математика», гипотезу о свойствах центральной и осевой симметрии. Решить задачи по рассматриваемой теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. На этом уроке ребята узнают, что такое осевая симметрия, научатся строить фигуры симметричные относительно оси.

Термин «симметрия» (от греч. Symmetria) – соразмерность пропорциональность, одинаковость в расположении частей. Этот термин придумал скульптор Пифагор Регийский. Существует такие виды симметрии как, осевая и центральная. Осевая симметрия – это симметрия относительно прямой, а центральная симметрия – это симметрия относительно точки.

Осевая симметрия.

Определение. Две точки А и $А_1$ называются симметричными относительно прямой *а*, если эта прямая проходит через середину отрезка $АА_1$ и перпендикулярна к нему (рис. 2.22). Каждая точка прямой *а* считается симметричной самой себе (уч. Атанасяна, с.110).

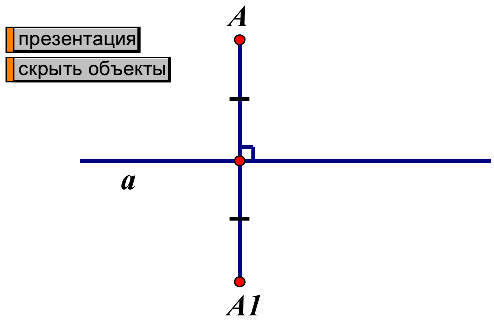


Рис. 2.22

На рисунке 2.22 изображен итоговый стоп кадр построения симметричной точки относительно прямой *а* на рабочем поле «Живая математика».

Учитель демонстрирует построение точки $А_1$ симметричной точки А относительно прямой *а*:

– на рабочем поле учитель строит прямую *а*, отмечает точку А, не лежащую на данной прямой;

– выполняет построение перпендикуляра через точку А к прямой *а,* отмечает пересечение двух прямых точкой О;

– строит окружность с центром в точке O и радиусом OA (рис. 2.23), отмечает точку A_1 (пересечение окружности и перпендикуляра);

– скрывает окружность и перпендикуляр, строит отрезок AA_1;

– отмечает равные отрезки маркером $AO=OA_1$.

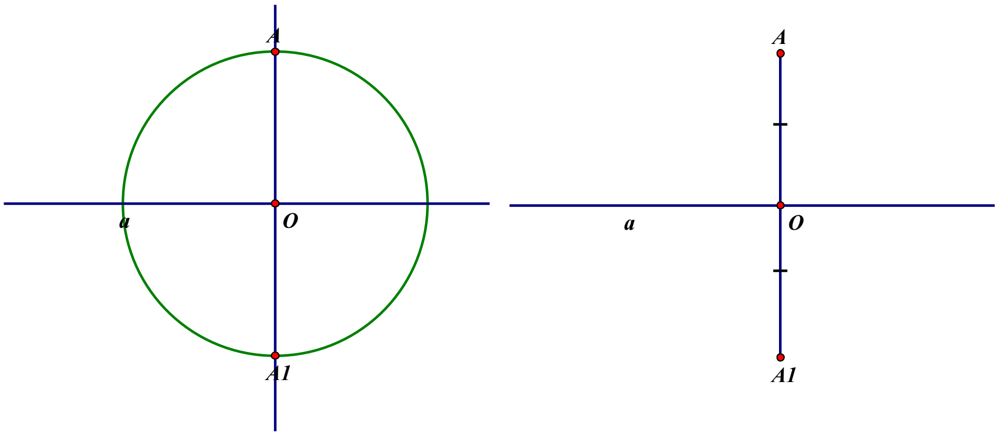


Рис. 2.23

Для создания анимационного этюда, на отрезке AA_1 выбирается произвольная точка, с помощью которой «оживляется» процесс отражения относительно оси.

Фигура называется симметричной относительно прямой *a*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой *a* также принадлежит этой фигуре. Прямая *a* называется осью симметрии.

Например, такие фигуры как угол, равнобедренный треугольник и равнобедренная трапеция имеют одну ось симметрии (рис. 2.24).

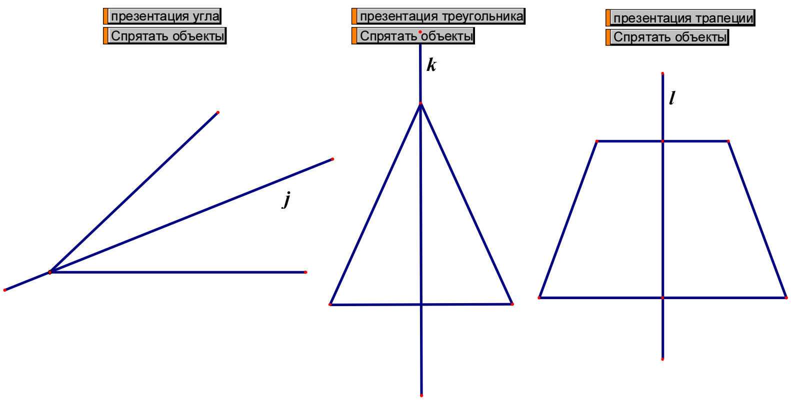


Рис. 2.24

Прямоугольник и ромб имеют две оси симметрии (рис. 2.25).

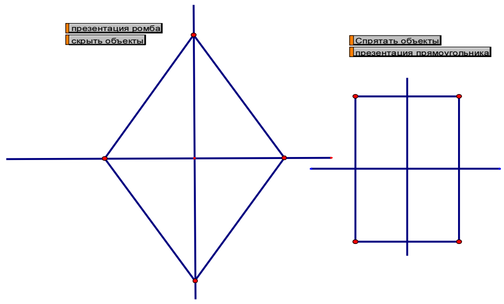
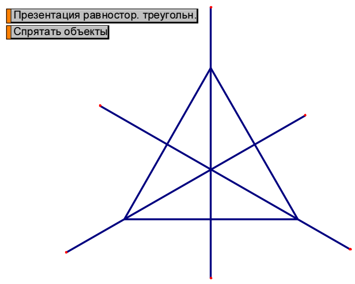
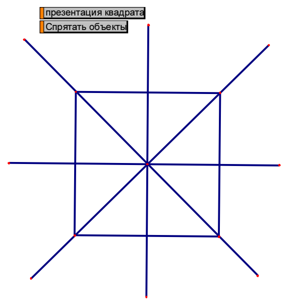


Рис. 2.25

Учитель предлагает ребятам рассмотреть фигуры, которые имеют более двух осей симметрии. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 2.26(а)). Квадрат – четыре оси симметрии (рис. 2.26(б)). Окружность имеет бесконечное множество осей симметрии, т.е. любая прямая, проходящая через ее центр будет являться осью симметрии (рис. 2.26(в)).





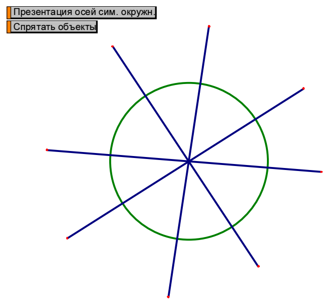


Рис. 2.26(а) Рис. 2.26(б) Рис. 2.26(в)

Так же существуют фигуры, которые не имеют осей симметрии – это произвольный треугольник и параллелограмм отличный от ромба и прямоугольника. Учитель показывает примеры в среде «Живая математика»:

Рассмотрим параллелограмм (рис. 2.27). На первый взгляд может показаться, что ось есть. Например, если провести прямую через середины сторон BC и AD. Построим симметричную точку для точки C. Из точки C опустим перпендикуляр на прямую (рис. 2.28), и

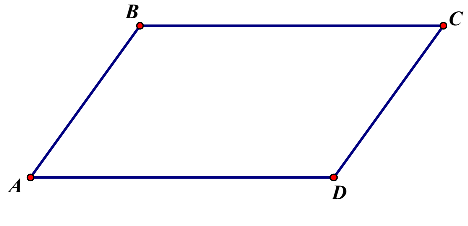


Рис. 2.27

отложим такое же расстояние в другую сторону от прямой. Получим $GC=GC_1$ и отрезок CC_1 перпендикулярен прямой. Точка C_1 - симметричная точка для точки C. Но точка C1 не лежит на параллелограмме. Следовательно, параллелограмм не имеет осей симметрии.

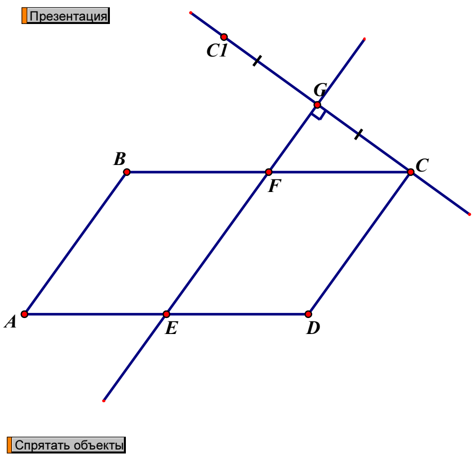


Рис. 2.28

Рассмотрим пример разностороннего треугольника (рис. 2.29), у которого, как и у параллелограмма тоже не существует осей симметрии. Проведем через вершину B и середину стороны AC прямую. Точка B будет лежать на этой прямой и будет симметрична сама себе. Из вершины A опустим перпендикуляр к этой прямой и отложим такое же расстояние в другую сторону от прямой. Получим AD=DA1, а отрезок AA1 будет перпендикулярен прямой. Точка A1 будет симметричной для точки A. Но точка A1 не принадлежит треугольнику. Так же можно опустить перпендикуляр из вершины C треугольника ABC. В этом случае мы увидим, что и точка C1 тоже не принадлежит треугольнику ABC. Следовательно, разносторонний треугольник не имеет осей симметрии.

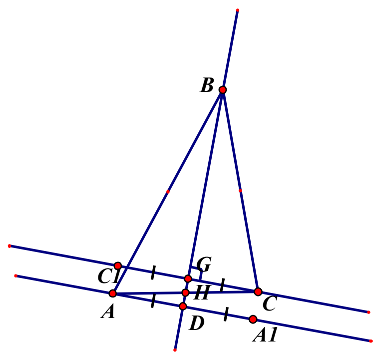


Рис. 2.29

Центральная симметрия.

Определение. Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется *центром симметрии.* Учитель приводит примеры фигур, обладающих центральной симметрией – это окружность (рис. 2.30(а)), параллелограмм (рис.(б)), прямая, отрезок, правильный многоугольник, ромб, прямоугольник.

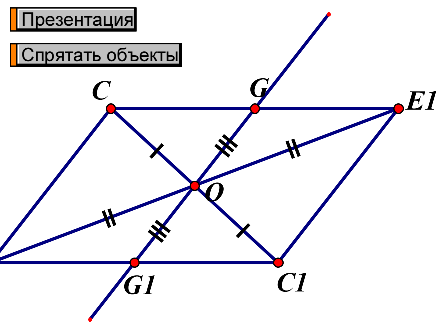


Рис. 2.30(а) Рис. 2.30(б)

Прямая в отличии от окружности, параллелограмма и т.д., которые имеют только одну ось симметрии, имеет бесконечное множество центров симметрии. Любая точка прямой является ее центром симметрии (рис. 2.31).

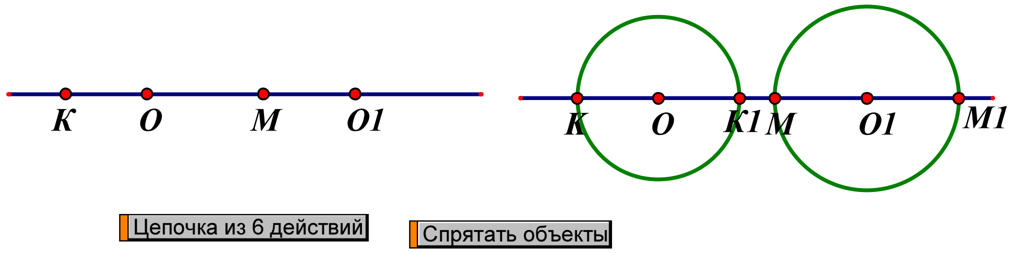


Рис. 2.31

Задание 416 (с113). Даны две точки А и В, симметричные относительно некоторой прямой, и точка М. Постройте точку, симметричную точке М относительно той же прямой.

Учитель выбирает желающего выполнить это задание на рабочем поле «Живая математика» ученика. Ученик садится за компьютер и приступает к выполнению задания:

– строит прямую а;

– по одну сторону от прямой ставит точку А;

– строит точку В, симметричную точке А относительно прямой а (через точку А проводит перпендикуляр к прямой а, ставит точку пересечения прямой а и перпендикуляра, подсвечивает точку, отмечает точку пересечения как центр, заходит в меню "преобразование", выбирает команду "поворот". В появившемся окне отмечает "заданный угол, 180 градусов");

– ставит точку M и выполняет аналогичное построение для точки M'.

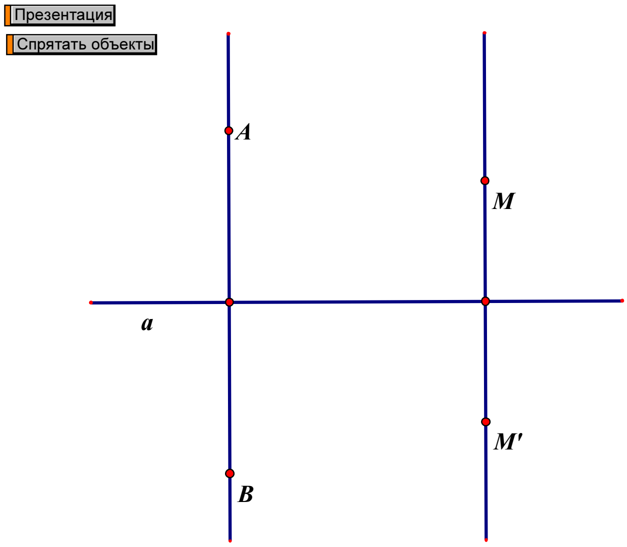


Рис. 2.32

На рисунке 2.32 изображен конечный результат построения точки симметричной точки M относительно прямой a на рабочем поле «Живая математика».

Теорема Пифагора

Цель урока. Дать определение прямоугольного треугольника, его элементов (катеты и гипотенуза), углов и площади. Установить экспериментальным путем при помощи программы «Живая математика» гипотезу о сумме квадратов катетов и квадрата гипотенузы прямоугольного треугольника. Сформулировать и доказать теорему Пифагора. При доказательстве использовать анимационные возможности среды «Живая математика». Решить задачи по рассматриваемой теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. На уроке учащиеся дают определение прямоугольного треугольника, называют его катеты, гипотенузу и углы и дают определение площади. Перед тем, как сформулировать теорему, целесообразно провести учебный эксперимент, позволяющий ученикам самим сформулировать гипотезу. Для этого можно использовать интуитивно понятный тезис о том, что, если два многоугольника разрезаны на одно и тоже число попарно равных частей, то площади многоугольников равны.

Прежде чем перейти к теореме и ее доказательству учитель демонстрирует страницу, заранее подготовленного GSP-файла и дает ученикам задание, чтобы учащиеся, выполнив задание на рабочем поле «Живая математика», попробовали самостоятельно сформулировать гипотезу о «пифагоровом» соотношении между сторонами прямоугольного треугольника.

З а д а н и е. Перемещая мышкой цветные многоугольники на рабочем поле и поворачивая их вокруг большой вершины, ухватившись мышкой за маленькую вершину, заполните многоугольниками сначала квадраты, построенные на катетах, затем этими же многоугольниками - квадрат на гипотенузе.

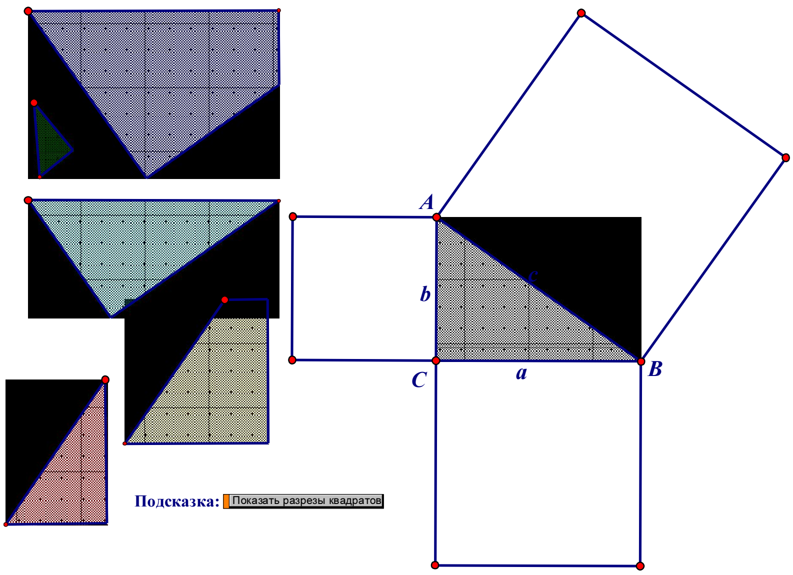


Рис. 2.33

После выполнения задания ученики формулируют гипотезу, после чего учитель озвучивает формулировку теоремы Пифагора, доказывает ее:

Т е о р е м а. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. а). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной a+ b так, как показано на рисунке б. Площадь S этого квадрата равна $(a+b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной с, поэтому $S=4*\frac{1}{2}ab+c^2=2ab+c^2$. Таким образом, $(a+b)^2=2ab+c^2$, откуда $c^2=a^2+b^2$ (стр. 128 [1]).

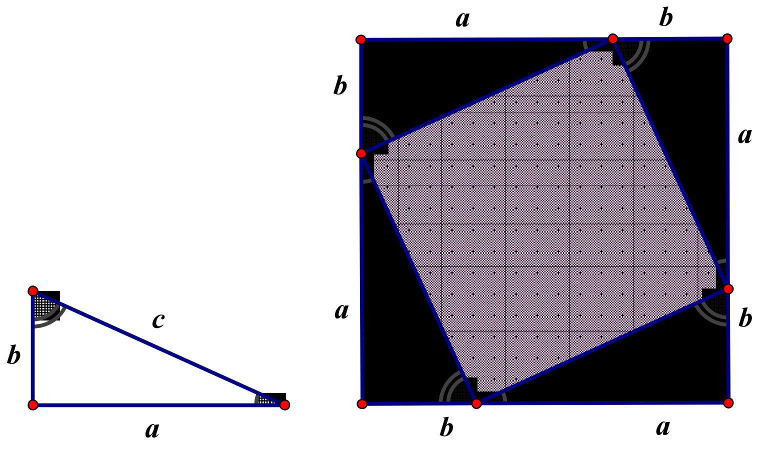


Рис. 2.34

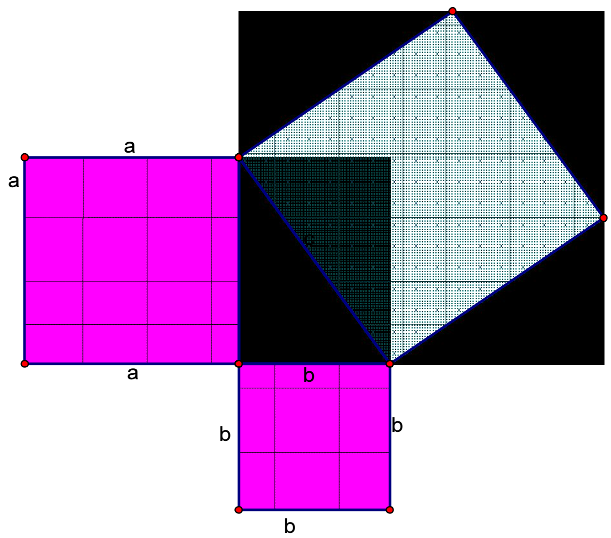


Рис.2.35

Продемонстрируем идею доказательства теоремы в среде Живая математика, которую предложил индиец Бхаскара.

Строим на гипотенузе желтого треугольника с катетами a и b синий квадрат со стороной c равной гипотенузе, а на его катетах a и b зеленые квадраты, стороны которых равны катетам треугольника.

В синем квадрате строим четыре треугольника равных   желтому так, чтобы часть синего квадрата, не была занята треугольниками, составила квадрат со стороной равной разности a – b катетов a и b прямоугольного треугольника.

3. Зеленый квадрат со стороной равной катету b присоединяем к квадрату со стороной равной катету a и строим на зеленом фоне четыре треуголь-

ника равных желтому, так чтобы часть зеленого квадрата была не занята треугольниками, составила квадрат со стороной равной разности a-b.

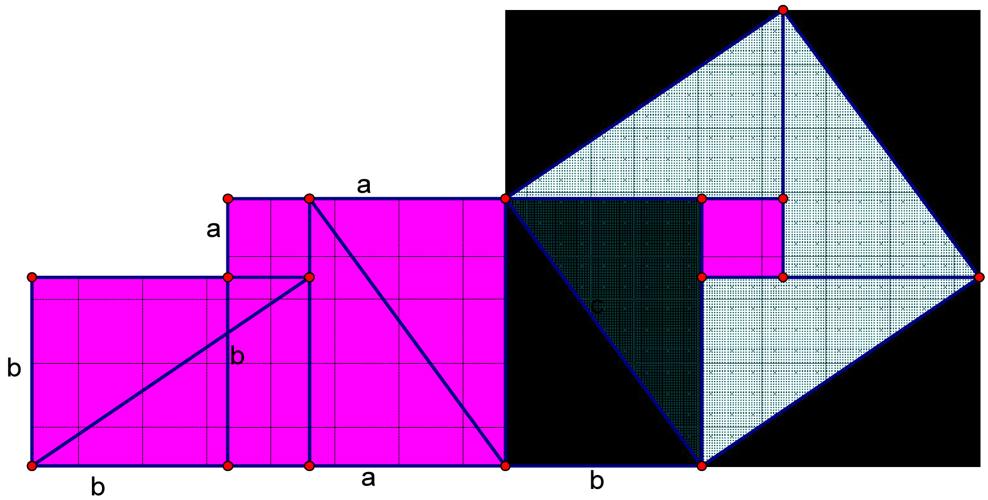
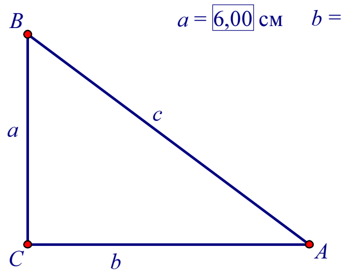


Рис. 2.36

З а д а н и е. *Изобразите на рабочем поле Живой математики прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам:*

а) a=6, b=8; *в) a=8, b=10;*

б) a=5, b=6; *г) a=12, b=13;*



$a = \boxed{6{,}00}$ см $b = \boxed{8{,}00}$ см $c = 10{,}00$ см $\sqrt{a^2+b^2} = 10{,}00$ см

a	b	c	$\sqrt{a^2+b^2}$
6,00 см	8,00 см	10,00 см	10,00 см
5,00 см	6,00 см	7,81 см	7,81 см
8,00 см	10,00 см	12,81 см	12,81 см
12,00 см	13,00 см	17,69 см	17,69 см
6,00 см	8,00 см	10,00 см	10,00 см

Рис. 2.37

К компьютеру выходит ученик по желанию, который под руководством учителя строит на рабочем поле Живой математики прямоугольный треугольник, обозначает катеты буквами a и b, гипотенузу буквой c и приступает к выполнению задания. Учитель напоминает ученикам, каким образом в среде Живая математика измеряются длины отрезков (подсвечивается отрезок выбирается в меню «Измерения» выбирается опция «Длина»). Для нахождения гипотенузы ученики будут использовать графический калькулятор. Для фиксации результатов учебного эксперимента ученик выводит на рабочее поле таблицу (подсвечивая значения катетов и гипотенузы, заходит в меню «Вычисления» выбирает опцию «заполнить таблицу») (рис. 2.37). По необходимости ученик добавляет последнюю строку меняя в ней данные на новые. А если подвигать вершины треугольника, лежащие при гипотенузе, можно увидеть, что данные в последней строке таблицы будут меняться, в зависимости от того, какая вершина будет менять свое положение.

2.3. Геометрия в 9 классе: анимационные GSP-файлы и методика их использования.

Рассмотрим несколько тем по геометрии из программы 9 класса с использованием программы «Живая математика».

Понятие движения

Рассмотрим параграф 1 из главы XIII «Понятия движения» учебника геометрия 7-9, автора Л.С.Атанасян.

Цель урока. Дать определение движения, вспомнить свойство осевой симметрии и рассмотреть доказательство теоремы о движении. Решить задачу по рассматриваемой теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. Отображение плоскости на себя, при котором сохраняется расстояние, называют – движением. Отображение плоскости на себя мы уже рассматривали в восьмом классе в теме «Осевая симметрия». Т.е. осевая симметрия обладает следующим важным свойством – это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками [1].

Учитель демонстрирует пример на рабочем поле «Живая математика»:

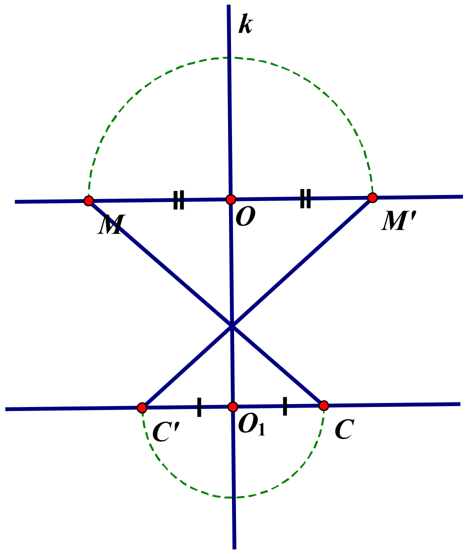


Рис. 2.38

– строит прямую k;

– отмечает произвольные точки M и C;

– строит перпендикуляр к прямой k через точку M;

– отмечает точку пересечения перпендикуляра и прямой точкой O;

– строит точку M′ симметричную точке M относительно прямой k (подсвечивает точку M, выбирает центром поворота точку O, заходит в меню «преобразование», выбирает команду «поворот», отмечает угол 180^0), аналогично выполняет построение точки C′;

– соединяет отрезками точки M и C, и точки M′ и C′ соответственно.

Прямая k является серединным перпендикуляром отрезков MM′ и CC′, значит MO=OM′ и $CO_1=O_1C'$. Точка K является вершиной треугольников KMM′ и KCC′ которая лежит на прямой k. Эти треугольники будут являться равнобедренными у которых MK= KM′ и KC=KC′. Значит KC′+ KM′=KC+KM, следовательно MC= C′M′.

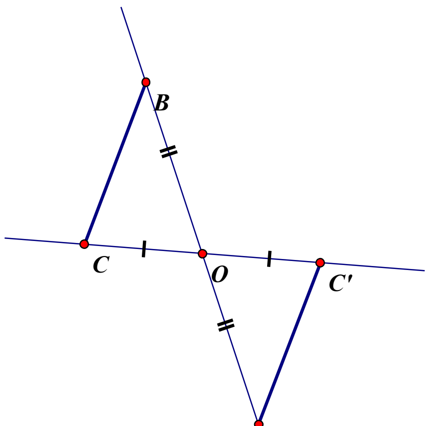


Рис. 2.39

Центральная симметрия плоскости также является движением. Рассмотрим рисунок 2.39 созданный в среде «Живая математика». На рабочем поле отметим точку O – центр симметрии.

Построим точки C′ и B′ симметричные точкам C и B относительно точки O соответственно. Так как точки C и C′ симметричны относительно точки O, значит CO=OC′, а BO=OB′, ∠BOC=∠C′OB′ как накрест лежащие. Следовательно треугольники BOC и B′OC′ равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, BC= B′C′.

Задание 1159 (уч.) Даны прямая *a* и четы-

угольник ABCD. Постройте фигуру F, на которую отображается данный четырехугольник при осевой симметрии с осью *a.* Что представляет собой фигура F?

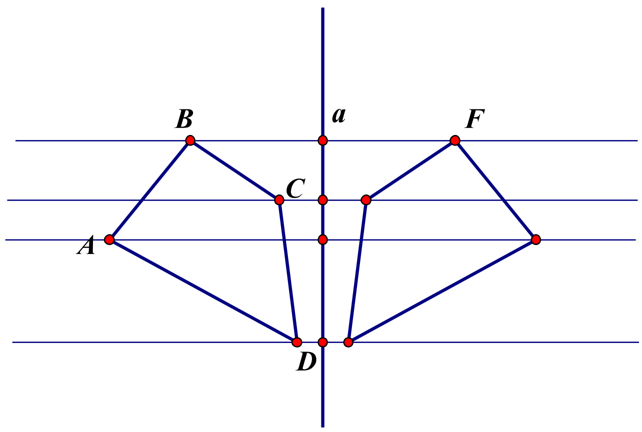


Рис. 2.40

Данное задание предлагается выполнить ученикам. Ребята садятся за компьютер, открывают программу «Живая математика» и приступают к решению упражнения.

Решение. На рабочем поле строят прямую *a* и четырехуголь ник ABCD. Из каждой вершины проводят перпендикуляр к прямой а. Ставят точки на пересечении перпендикуляров с прямой а. Затем выполняют построение фигуры F несколькими способами: а) с помощью откладывания в другой полуплоскости на продолжении перпендикуляра отрезка, равного прообразу; б) с помощью поворота каждой вершины четырехугольника на угол равный 180 градусов; в) с помощью встроенной в Живую математику опцию «отразить…».

Рассмотрим параграф 2, пункт 120, 121 главы XIII [1].

Параллельный перенос и поворот.

Цель урока. Дать определение параллельного переноса и поворота. Рассмотреть решение задачи по данной теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. Параллельным переносом на вектор «а» является движение, при котором все точки фигуры или пространства перемещаются в одном направлении на равное расстояние. Учитель демонстрирует параллельный перенос отрезка CD на вектор «а» в среде «Живая математика».

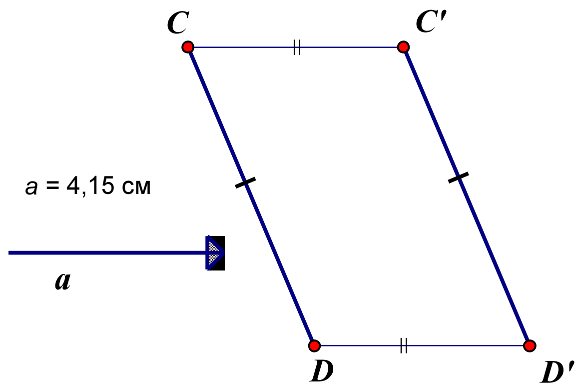


Рис. 2.41

Выполняет построение отрезка CD, вектора «а», на который необходимо перенести отрезок (рис. 2.41). Перед тем как перенести отрезок CD на вектор *a*, нужно измерить длину вектора *a* (подсветить вектор *a*, зайти в меню "измерения" выбрать "длину"). Когда на рабочем поле появится измерение - а = 4,15 см, подсвечиваем это измерение, заходим в меню преобразование, выбираем "отметить расстояние", подсвечиваем отрезок CD, заходим в меню "преобразование", выбираем перенос. В появившемся окне отмечаем: вектор переноса - декартовый, по горизонтали - отмеченное расстояние, по вертикали - заданное расстояние (0 см.) затем перенос. Точки движутся по параллельным прямым на одинаковые расстояния в одном направлении. Следовательно, точка С перейдет в точку С', точка D перейдет в точку D'. Появился отрезок C'D'. Если соединить точки С и С', D и D', то получится параллелограмм CC'D'D, т.к. отрезки CC' и DD' будут параллельны и равны, как и отрезки CD и C'D', значит, параллельный перенос будет являться и движением.

Далее учитель демонстрирует поворот точек вокруг центра поворота на определенный угол.

На рабочем поле среды «Живая математика» учитель изображает три точки D, E и F и угол BAC на который необходимо совершить поворот. Прежде

чем совершить поворот точек E и F вокруг центра D на данный угол, необходимо знать измерение угла (подсвечивает угол, заходит в меню "Измерения", выбирает "Угол"). На рабочем поле появляется градусная мера угла. Учитель комментирует: чтобы узнать, как будет двигаться точка E при повороте, соединим отрезками точки E и F с точкой D и построим окружности с центром D, радиусами DF и DE. Для выполнения поворота необходимо подсветить градусную меру угла, выбирать центр поворота (кликнув два раза левой кнопкой мыши на точку D) и подсветить точку E, зайти в меню "Преобразования" выбрать "Поворот". В образовавшемся окне отметить "Повернуть на отмеченный угол". Появилась точка E'. Построение точки F' педагог выполняет аналогичным образом. По изображению ребята видят, что точки E' и F' появились на окружностях, значит точки E и F совершая поворот двигаются по окружностям на заданный угол. Учитель соединяет точки F с E, F' с E' и предлагает ребятам рассмотреть треугольники DFE и DF'E'. Ученики выдвигают гипотезу о том, что треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Сторона DE треугольника DFE равна стороне DE' треугольника DF'E', как радиус большой окружности, а DF=DF' как радиус малой окружности. Угол E'DF' будет равняться углу EDF. Из равенства треугольников следует, что EF=F'E'.

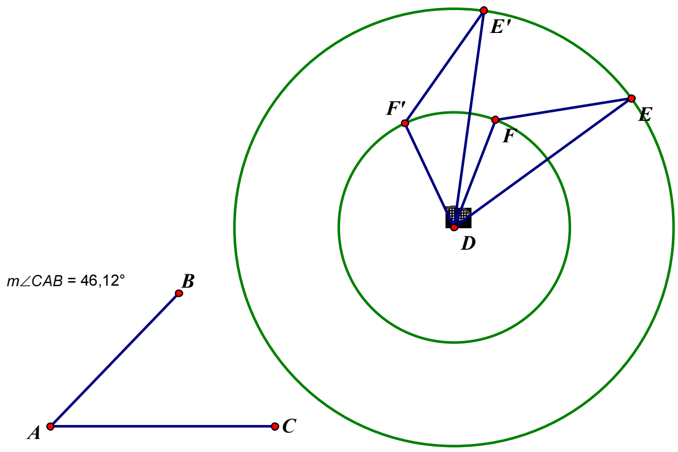


Рис. 2.42

Учитель оглашает то, что поворот сохраняет расстояние между точками FE и F'E', следовательно, поворот является движением.

На рисунке 2.42 изображен результат поворота точек F и E на заданный угол.

Задачу 1167 учебника [1] учитель предлагает выполнить ученикам самостоятельно.

З а д а ч а. Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол 150^0 против часовой стрелки.

Ученики садятся за компьютеры, открывают программу «Живая математика» и приступают выполнению задания.

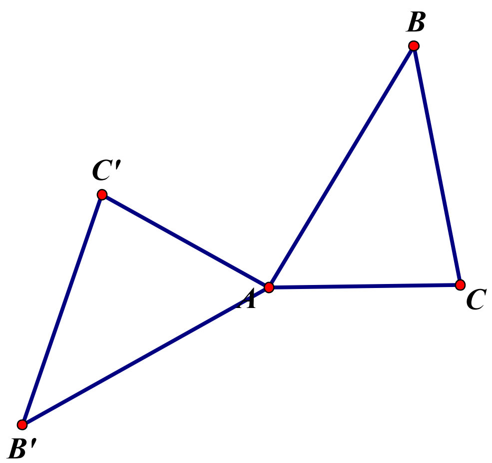


Рис. 2.43

Ученики строят произвольный треугольник ABC. Подсвечивают точку A, в меню "Преобразование" отмечают центр. Подсвечивают стороны треугольника ABC, в меню преобразования выбирают "Поворот". В появившемся окне отмечают угол 150 градусов. В результате построения появился треугольник AB'C' (рис. 2.43).

Параллелепипед.

Рассмотрим пункт 135 «Параллелепипед» параграфа 1 «Многогранники» из главы XIV «Начальные сведения из стереометрии» [1].

Цель урока. Вспомнить определение параллелепипеда, его свойства. Решить задачу по данной теме.

Необходимое программное обеспечение. На уроке учителю потребуется персональный компьютер, проектор, экран, программа Живая математика, подготовленные заранее собственные инструменты.

Ход урока. Учитель показывает заранее подготовленный GSP-файл, и демонстрируя данный параллелепипед со всех сторон предлагает ребятам самостоятельно вспомнить определение параллелепипеда. Ребята дают определение: *параллелепипед* – это четырехугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы. Если параллелепипед прямоугольный, то у него боковые ребра перпендикулярны к плоскостям оснований, а боковые ребра прямоугольники.

Учитель выдвигает гипотезу о том, что параллелепипед имеет следующее свойство: четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Измерив диагонали параллелепипеда, ребята убедились том, что диагонали точкой пересечения R, разбились на равные отрезки (рис. 2.44). Учитель иллюстрирует следующий GSP-файл (рис. 2.45), и доказывает этот факт. Проведем сечения BA_1D_1C, ADC_1B_1, ABC_1D_1 и DCB_1A_1. Каждое сечение представляет собой параллелограмм или прямоугольник если параллелепипед прямоугольный. Сечение ABC_1D_1 пересекается с сечением DCB_1A_1 по прямой k, а сечение BA_1D_1C и сечение ADC_1B_1 пересекаются по прямой j. Эти прямые пересекаются в точке P. Так как сечения представляют собой параллелограмм, то по свойству параллелограмма мы знаем, что диагонали точкой пересечения делятся пополам.

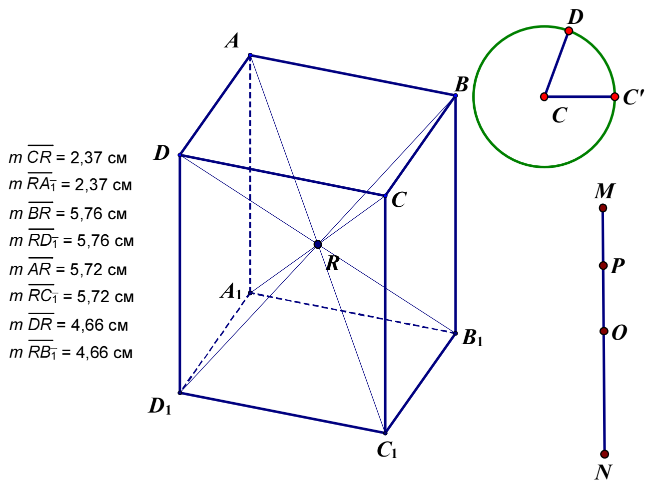


Рис. 2.44

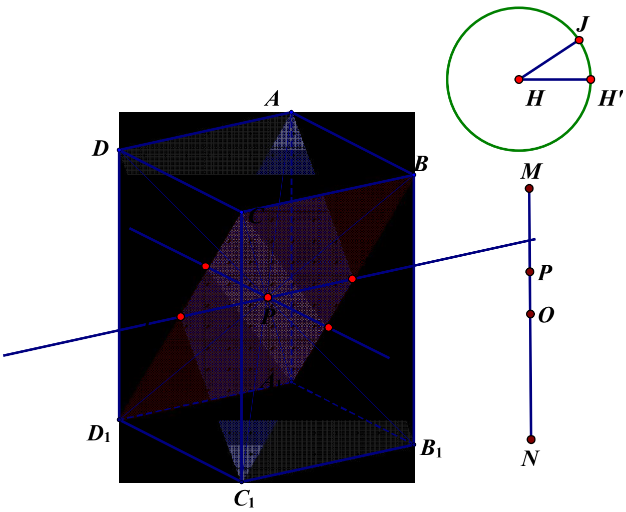


Рис. 2.45

Диагонали BD_1 и CA_1 принадлежат сечению BA_1D_1C, диагонали AC_1 и DB_1 принадлежат сечению ADC_1B_1, диагонали BD_1 и AC_1 принадлежат сечению ABC_1D_1 и диагонали CA_1 и DB_1 принадлежат сечению DCB_1A_1. Следовательно $BP=PD_1$, $AP=PC_1$, $DP=PB_1$, $CP=PA_1$.

Если параллелепипед является прямоугольным, то у него есть свои определенные свойства:

1. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.
2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.
4. Учитель дает ученикам задание из учебника.

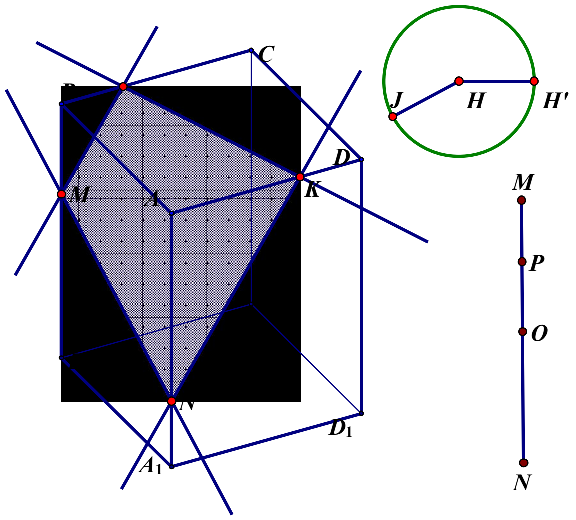


Рис. 2.46

З а д а ч а 1192 [1]. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

Учитель открывает ребятам подготовленный GSP-файл с изображением уже готового параллелепипеда.

Учащиеся садятся за компьютер и начинают выполнять задание в среде «Живая математика.

Рассмотрим алгоритм выполнения случая (а). В задании дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и три точки M, N и K. Ребята проводят через точки N и K прямую, т.к. эти точки принадлежат грани ADD_1A_1. Но по условию задачи точки N и K принадлежат еще и секущей плоскости, значит NK – это линия пересечения двух плоскостей: плоскости грани ADD_1A_1 и секущей плоскости. Затем проводят прямую через точки N и M. Что бы найти вторую точку секущей плоскости, лежащую на грани CBB_1C_1, нужно подсветить точку M и прямую NK зайти в меню «построение» выбрать «параллельную прямую», т.к. грани ADD_1A_1 и CBB_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны. Затем ученики отмечают точку пересечения прямой и ребра BC и соединяют эту точку с точкой K. В результате выполнения случая (а) получилось сечение, изображенное на (рис. 2.46).

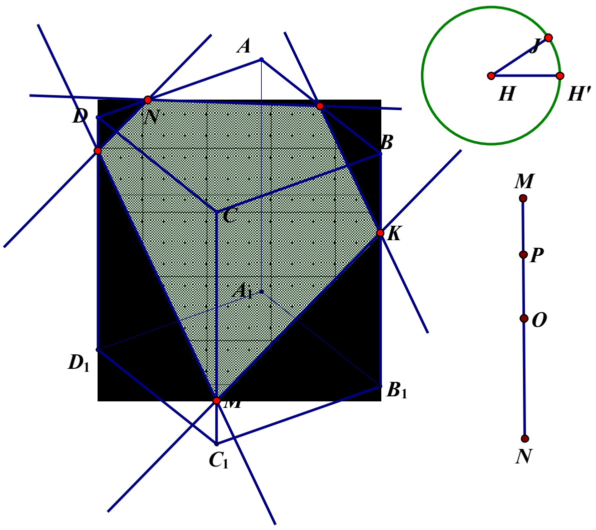


Рис. 2.47

Рассмотрим алгоритм выполнения случая (б). Здесь, так же как и предыдущем случае дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M, N и K. Ребята проводят прямую через точки M и K, которые принадлежат одной грани BCC_1B_1 и секущей плоскости. Затем подсвечивают эту прямую, точку N, лежащую на противоположной грани, в меню построение выбирают команду «параллельная прямая». Обозначают точкой, пересечение образовавшейся прямой с гранью DD_1C_1C. Подсветив новую точку и точку M проводят прямую. Далее строят параллельную прямую лежащую на противоположной грани BB_1A_1A параллелепипеда принадлежащую одной секущей плоскости: подсвечивают прямую проходящую по грани DD_1C_1C и точку K, в меню построение выбирают команду параллельная прямая. Обозначают точкой, пересечение прямой и ребра AB, затем через эту точку и точку N проводят прямую. В результате выполнения случая (б) получилось сечение, изображенное на (рис. 2.47).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты применения методических приёмов проведения в основной школе уроков геометрии с использованием компьютерной анимации при решении задач и доказательстве теорем обозначили необходимость разработки полноценной методики, позволяющей учителю не только мотивировать учащихся на изучение геометрии, но и способствующей развитию у них пространственного воображения и исследовательских навыков, формированию математического мышления.

Применение на уроках геометрии полностью (или частично) подготовленных GSP-файлов, созданных в среде «Живая математика», позволяют ученикам самостоятельно формулировать гипотезы, принимать заинтересованное участие в формулировке соответствующих теорем и их доказательстве, поиске новых способов доказательства, решении задач по мотивам доказанных теорем.

Информатизации образования предоставляет возможность применения различных программных средств в процессе обучения школьной геометрии, в том числе системы динамической геометрии. СДГ Живая математика, конструктивные и вычислительные возможности данной среды позволили нам разработать восемь дидактических принципов, составляющих основу методики применения компьютерной анимационной обучения школьников при решении геометрических задач.

В диссертационном исследовании представлена разработка методических приемов обучения учащихся седьмого, восьмого и девятого классов на уроках геометрии с использованием анимационных возможностей среды Живая математика, проведена частичная их апробация.

В процессе работы на уроках учащиеся проводили исследования созданных динамических объектов, решали геометрические задачи по теме. Наблюдение за учебной деятельностью учащихся на уроках показало, что применение компьютера вызывает интерес у современных школьников, повышает мотивацию к обучению, в том числе к самоконтролю с помощью программных средств. Применение компьютерной анимации при проведении уроков подтвердило эффективность предлагаемой методики.

Таким образом, можно отметить, что поставленные задачи диссертационного исследования были решены, цель достигнута, выдвинутая нами гипотеза исследования подтверждена.

Разработанная методика может быть реализована в любой школе. Представленные нами материалы применимы на уроках геометрии в 7-9 классах. А применение компьютерной анимации, как средства обучения математики, возможно так же в младших и средних классах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архив вебинаров издательства Легион [Электронный ресурс]. – http://legionr.ru/projects/webinars/?SECTION_ID=95.

2. Астанина, И. В. Роль задач в обучении математике / И. В. Астанина // Молодой ученый. – 2015. – №8. – С. 879–882.

3. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян [и др.]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.

4. Гальперин, П. Я. Экспериментальное формирование внимания / П. Я Гальперин, С. Л. Кабыльницкая. – М: Издательство московского университета, 1974. – 352 с.

5. Дубровский, Н. В. Динамическая геометрия в школе: Занятие 1 / Н. В. Дубровский // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – №1. – С. 21–31.

6. Дубровский, В. Н. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов / В. Н. Дубровский [и др.]. – М.: ИНТ, 2013. – 205 с.

7. Дубровский, В. Н. Стереометрия с компьютером [Текст] / В. Н. Дубровский // Компьютерные инструменты в образовании. – 2003. – № 6.

8. Дубровский, В. Н. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии / В. Н. Дубровский, Н. А. Лебедева, О. А. Белайчук // Компьютерные инструменты в образовании. – 2007. – №3. – С. 47–56.

9. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Текст] / URL: http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf.

10. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учебное пособие для вузов. 2-е изд., исправ. и доп. М.: Юрайт, 2018. 233 с.

11. Мухина, В. С. Возрастная психология / В. С. Мухина. – М.: ACADEMIA, 2000. – 456 с.

12. Никифоров, Г. С. Самоконтроль человека / Г. С. Никифоров. – М.: МГУ, 2008. – 234 с.

13. Репкина, Г. В. Оценка уровня сформированности учебной деятельности / Г. В. Репкина, Е. В. Заикина. – Томск: Пеленг, 2002. –204 с.

14. http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-metodicheskaya-sistema-geometricheskoy-podgotovki-uchitelya-matematiki-na-osnove-novyh-informatsionnyh-tehnologiy

15. https://infourok.ru/ispolzovanie-kompyuternogo-eksperimenta-na-urokah-geometrii-2615119.html

16. http://www.kspu.ru/upload/documents/old/I2I2010Iverstka_1320049494.pdf

17. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-наДону: Легион, 2015. 192 с.

18. Вишняковская Е. Один раз увидеть. М.: Наука и жизнь. 2011. № 12. С. 11–16.

19. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов (составители: Г.А. Аджемян, В.Н. Дубровский и др.). М.: ИНТ, 2013. 205 с.

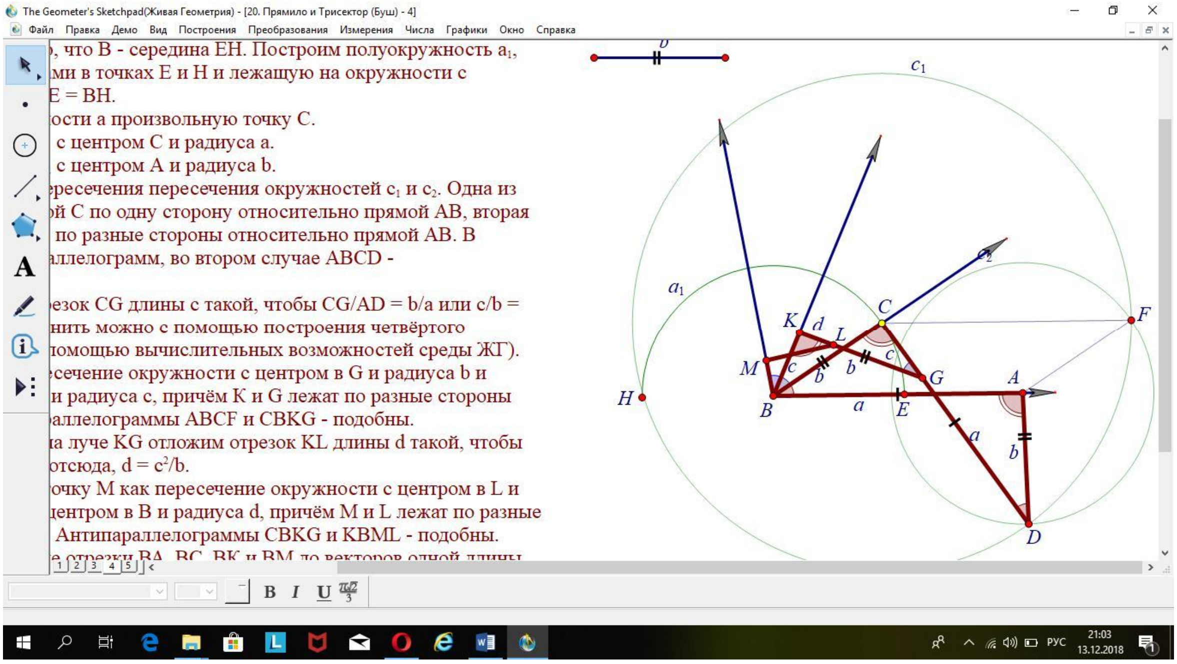
20. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 14–15 ноября 2018 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ

(Скриншоты разработанных GSP-файлов)

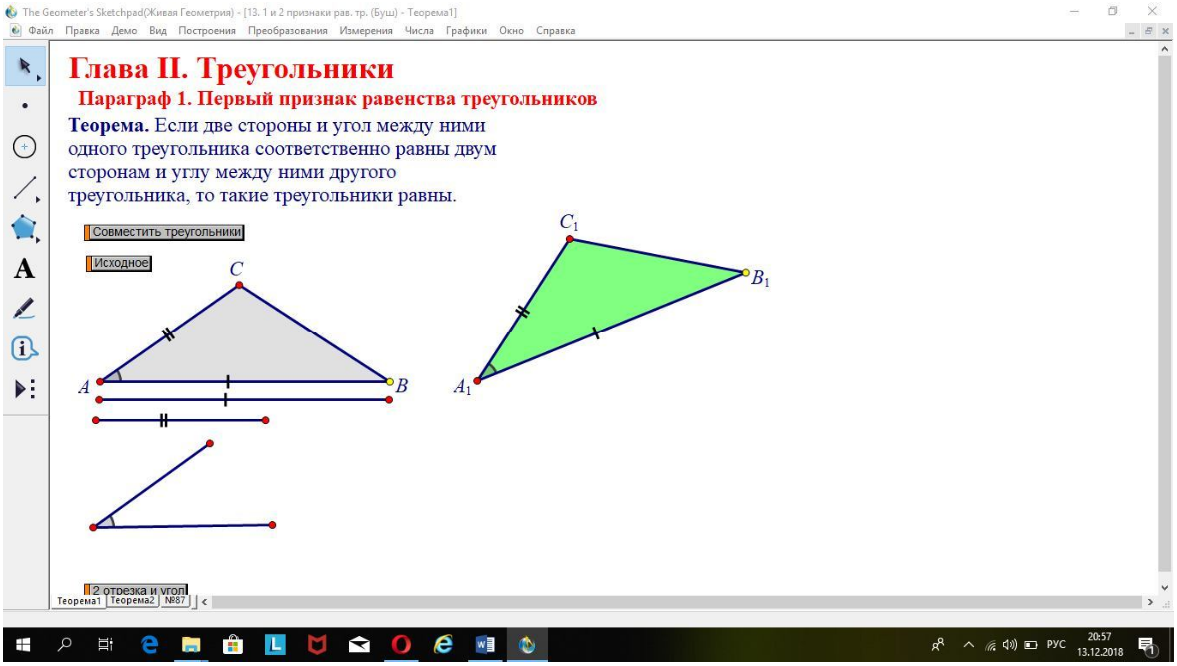
Приложение 1

Модель шарнирного трисектора угла



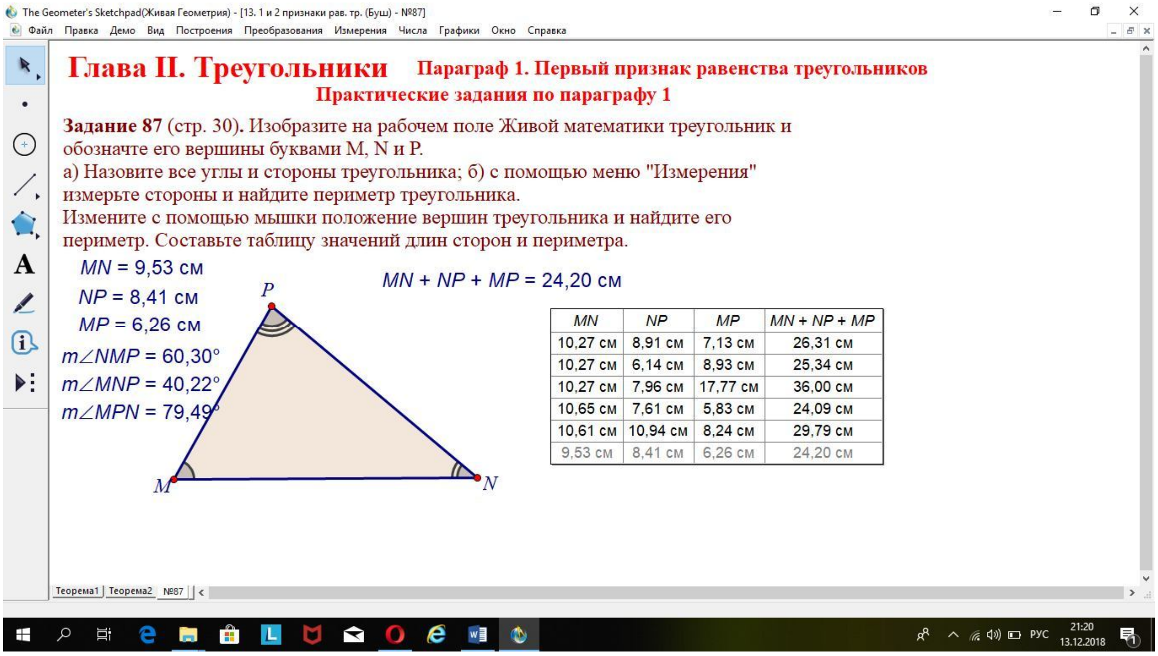
Приложение 2

Первый признак равенства треугольников



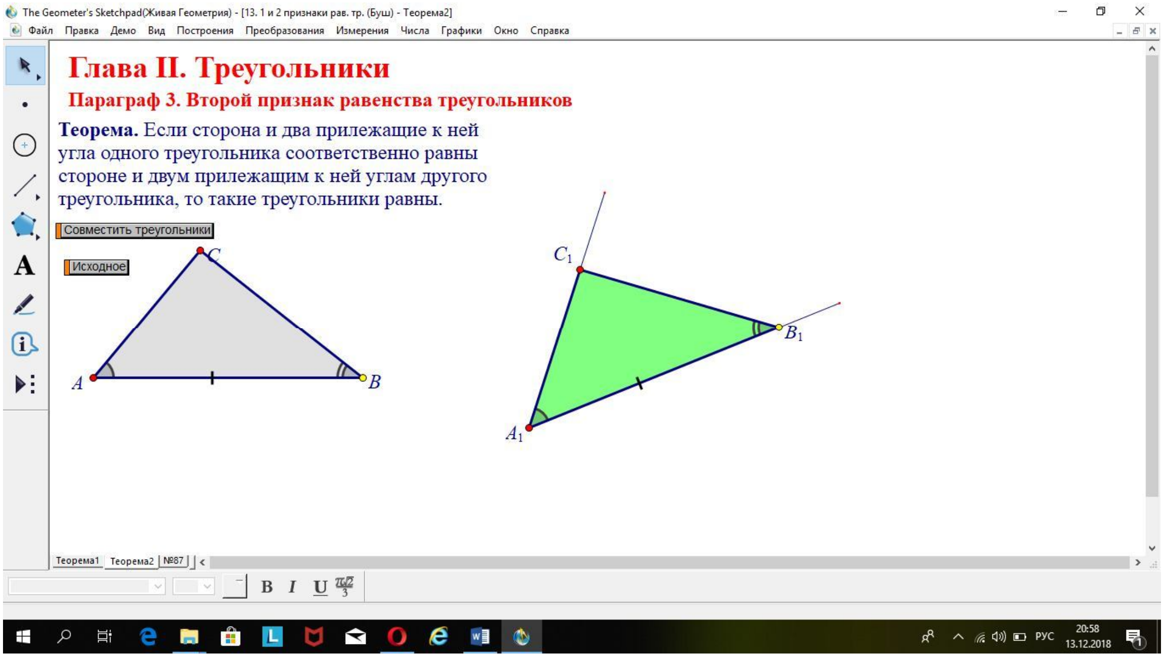
Приложение 3

Задание по первому признаку равенства треугольников



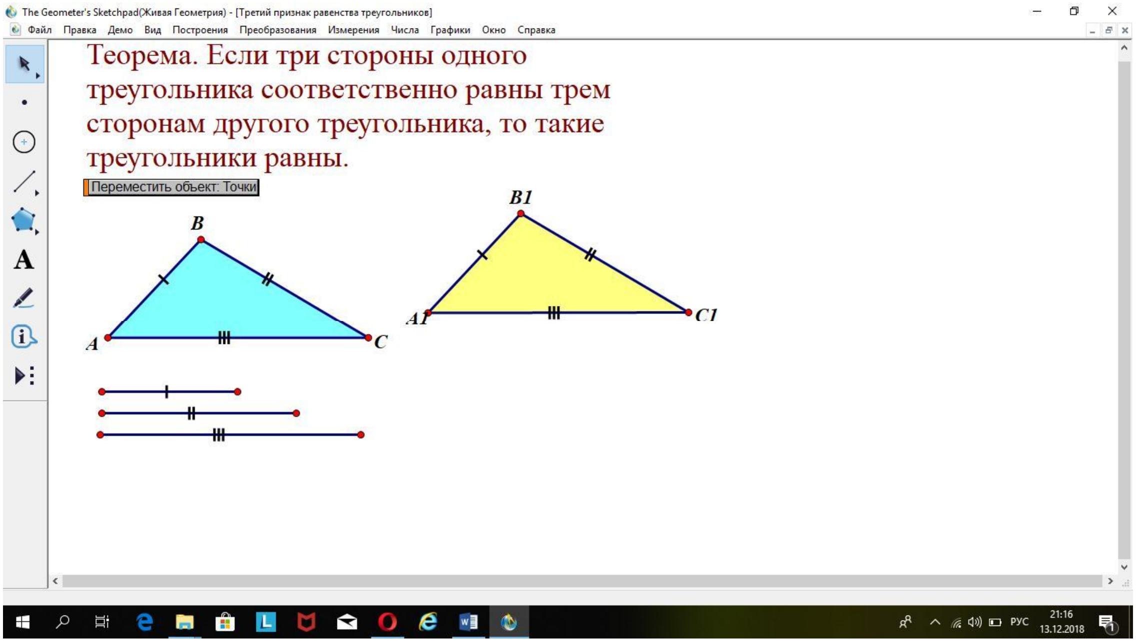
Приложение 4

Второй признак равенства треугольников



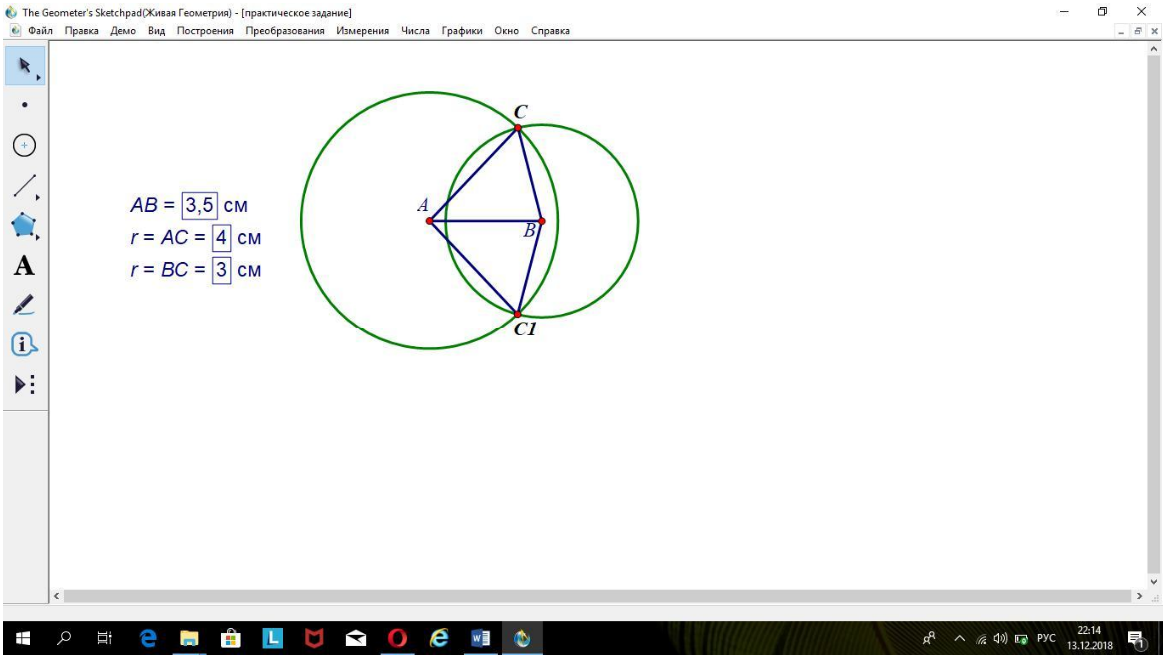
Приложение 5

Третий признак равенства треугольников

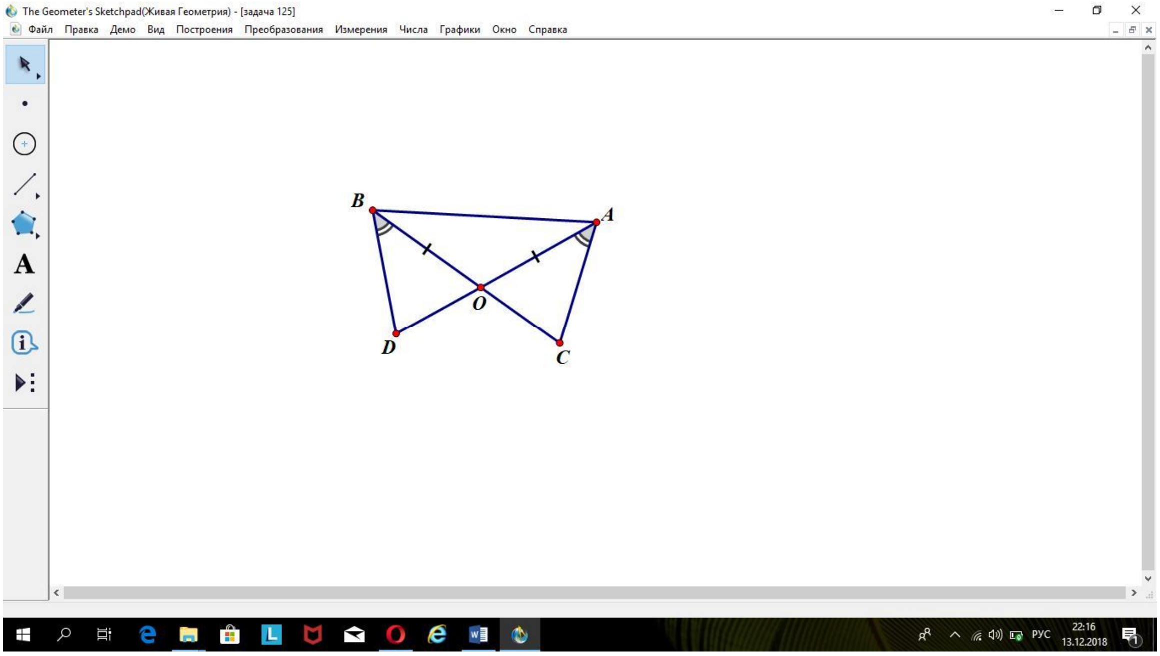


Приложение 6

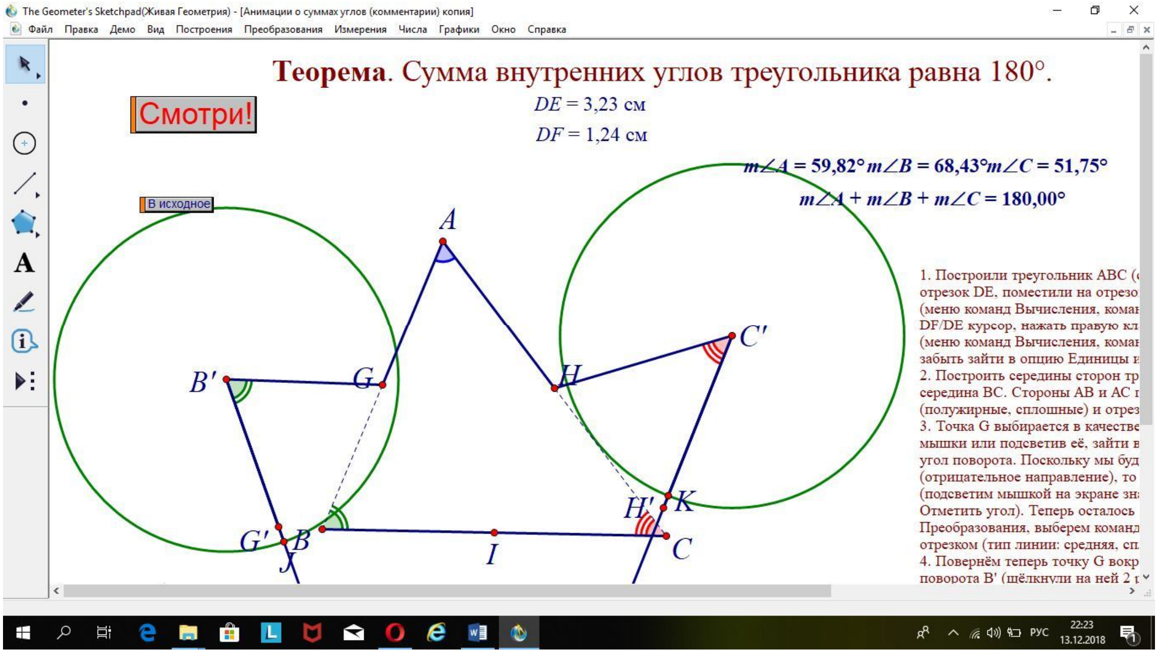
Практическое задание в теме «Второй и третий признак равенства треугольников»



Задача 125 (стр. 40) [1]

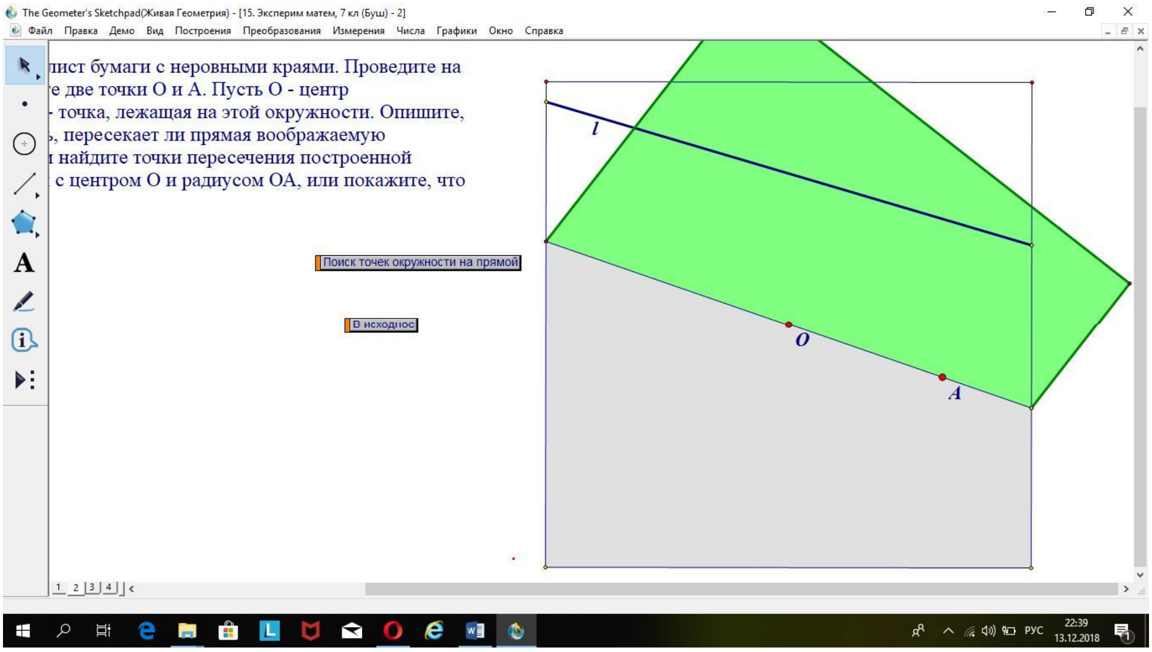


Сумма углов треугольника



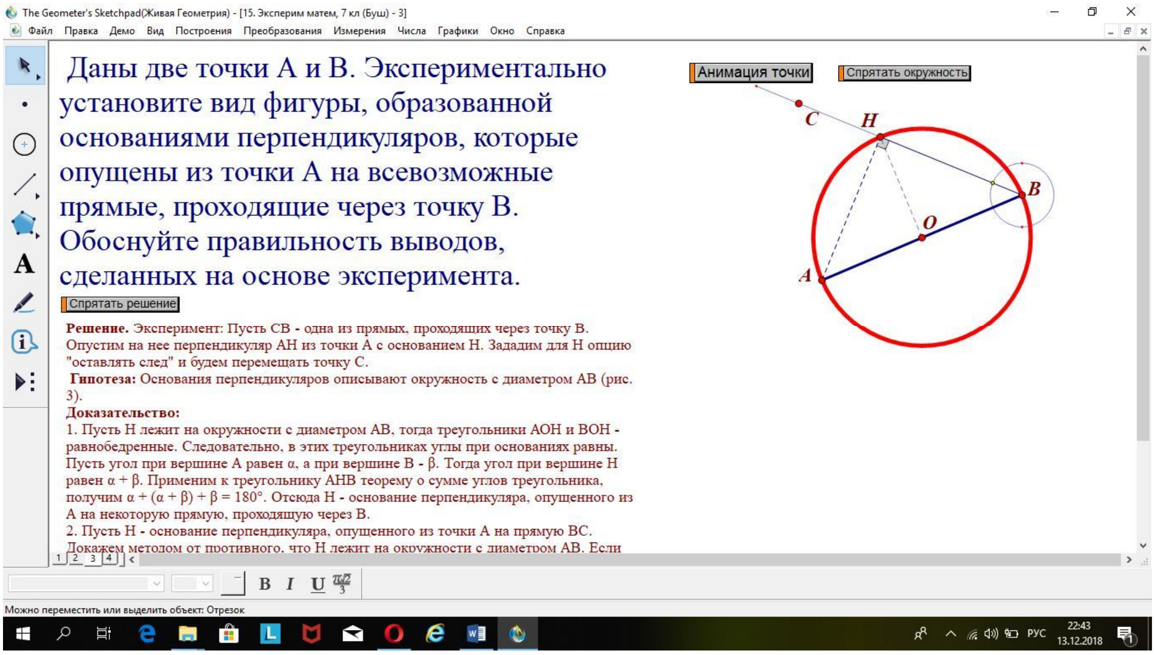
Приложение 9

Экспериментальные задания для учащихся седьмого класса в среде «Живая математика»



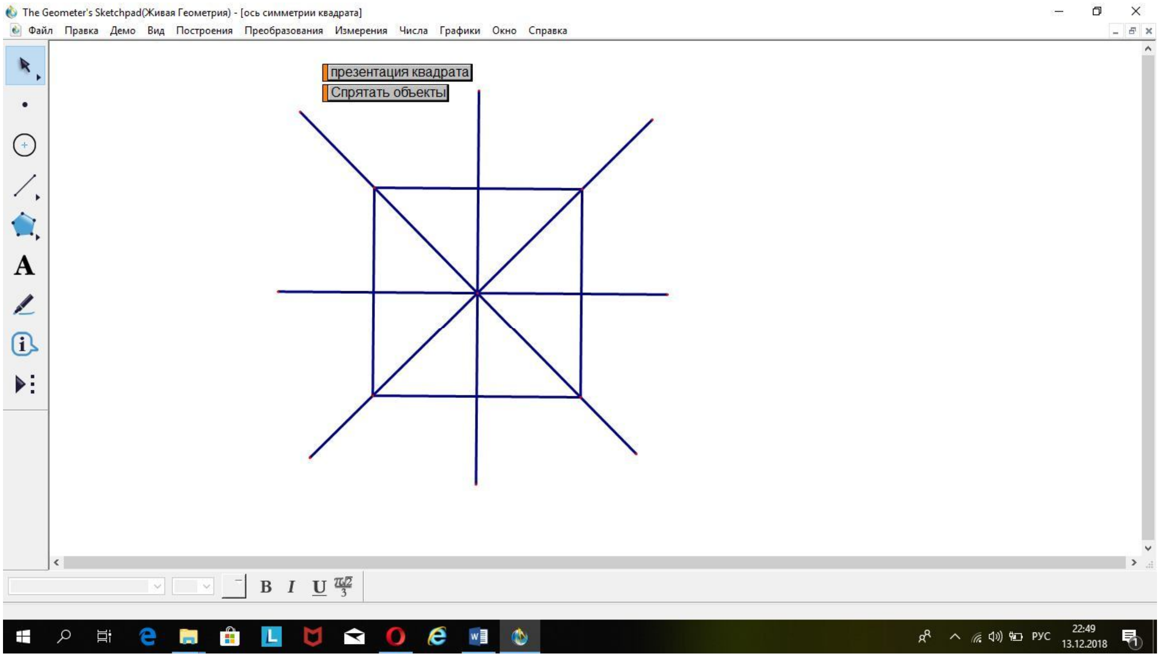
Приложение 10

Экспериментальные задания для учащихся седьмого класса в среде «Живая математика»



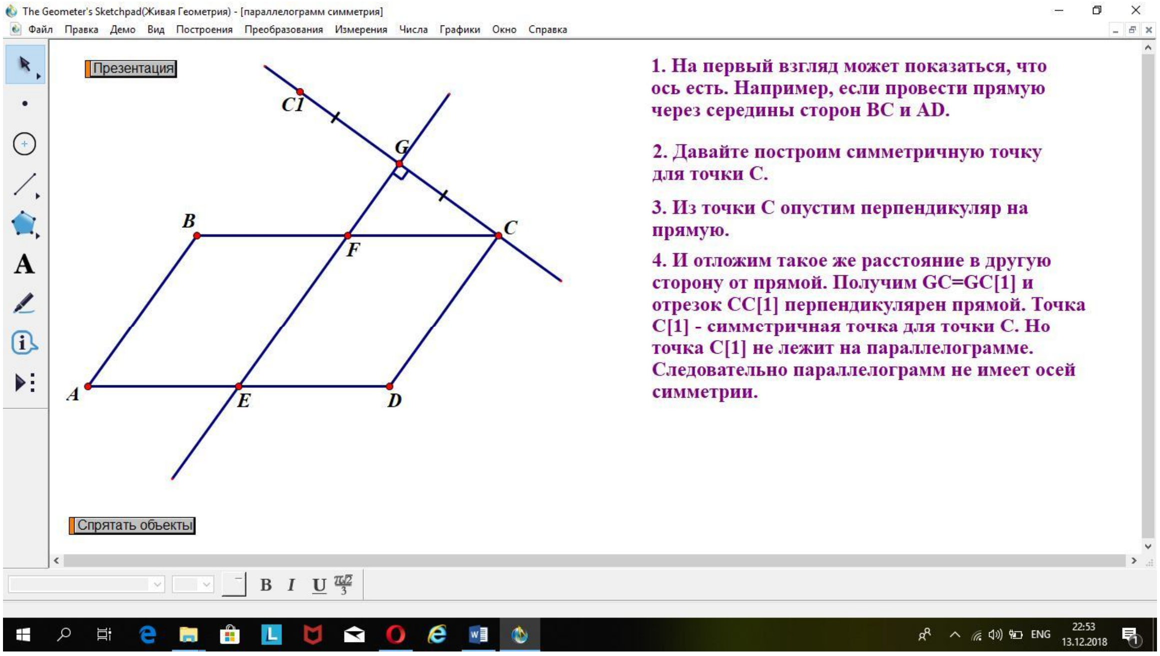
Приложение 11

Осевая симметрия



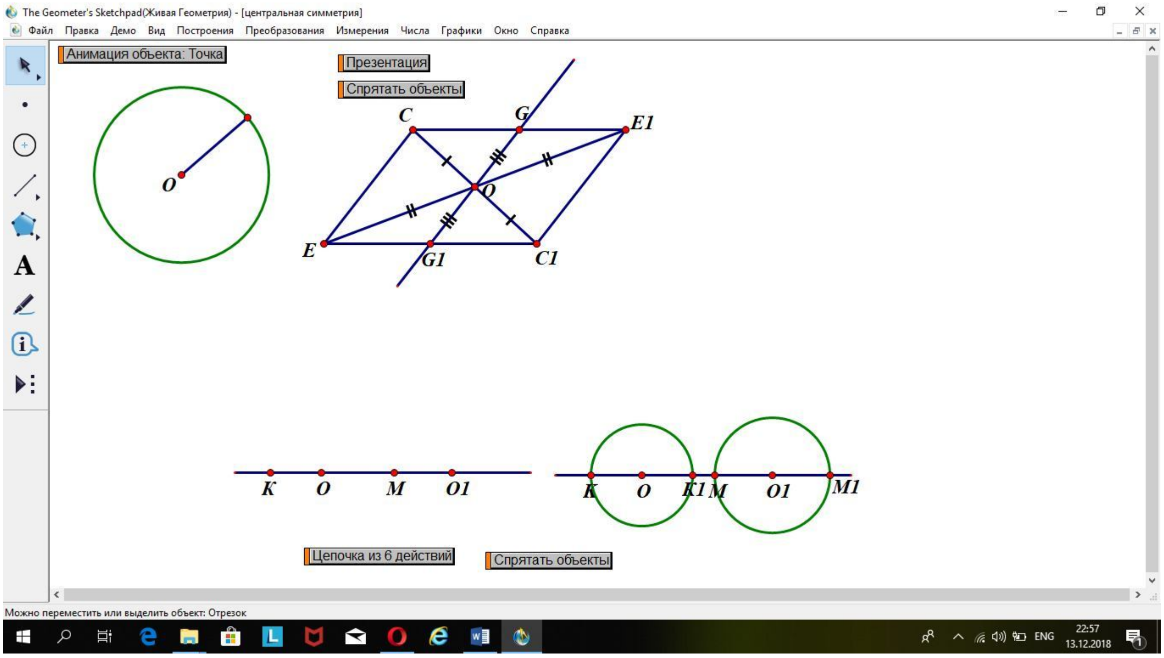
Приложение 12

Осевая симметрия



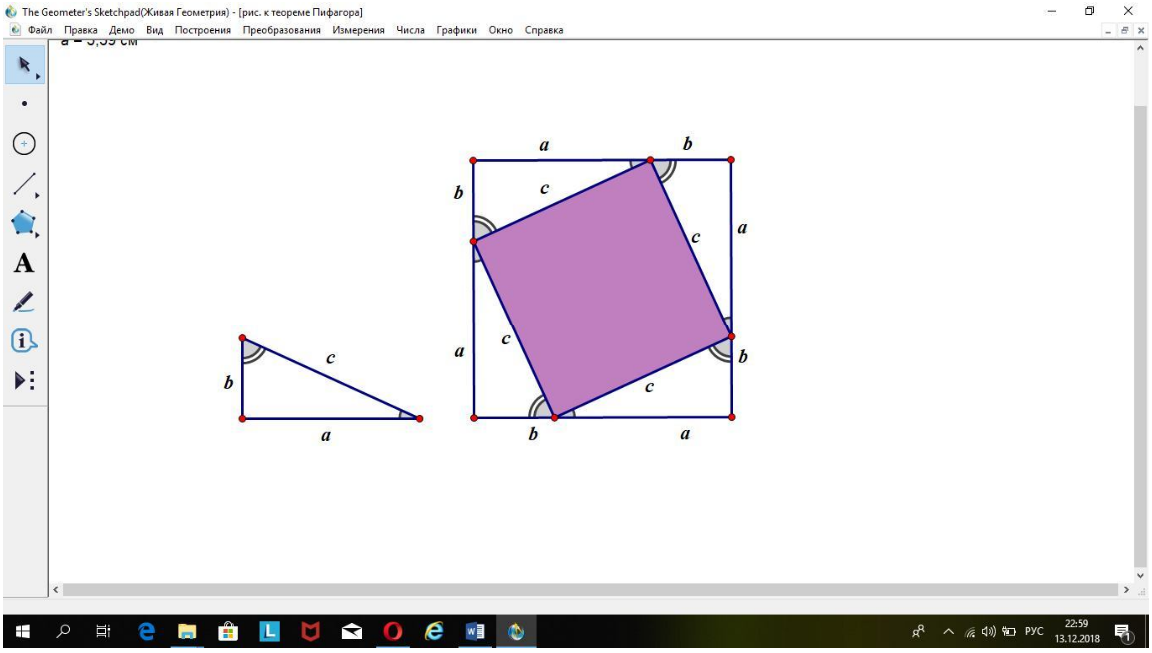
Приложение 13

Центральная симметрия



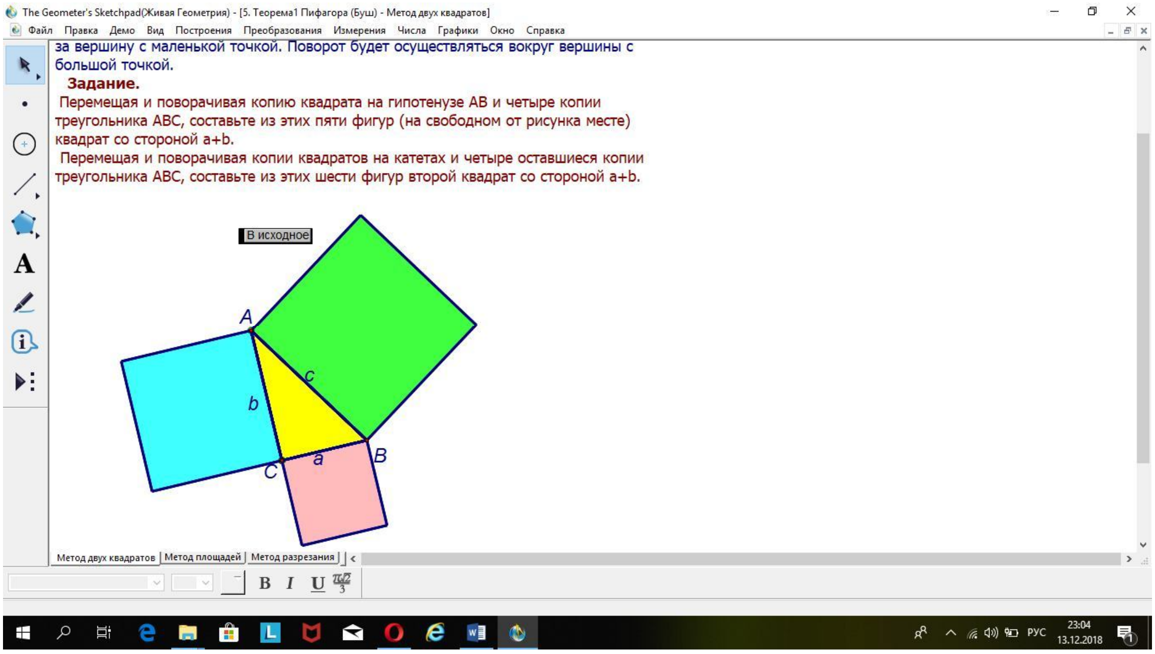
Приложение 14

Теорема Пифагора



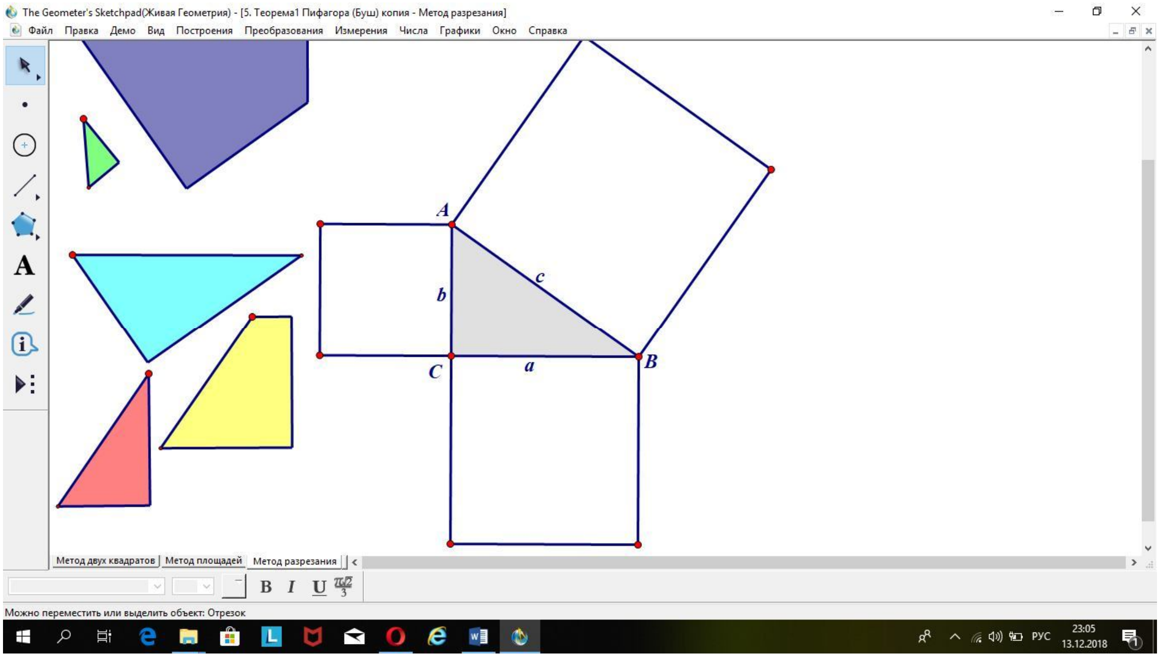
Приложение 15

Теорема Пифагора



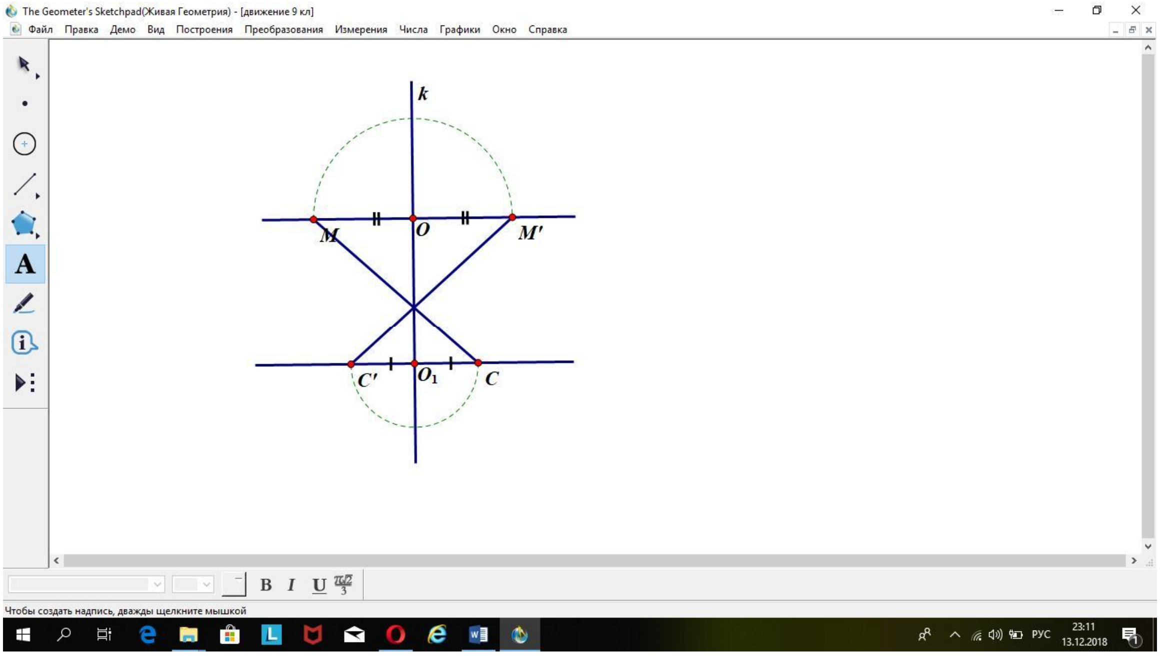
Приложение 16

Теорема Пифагора

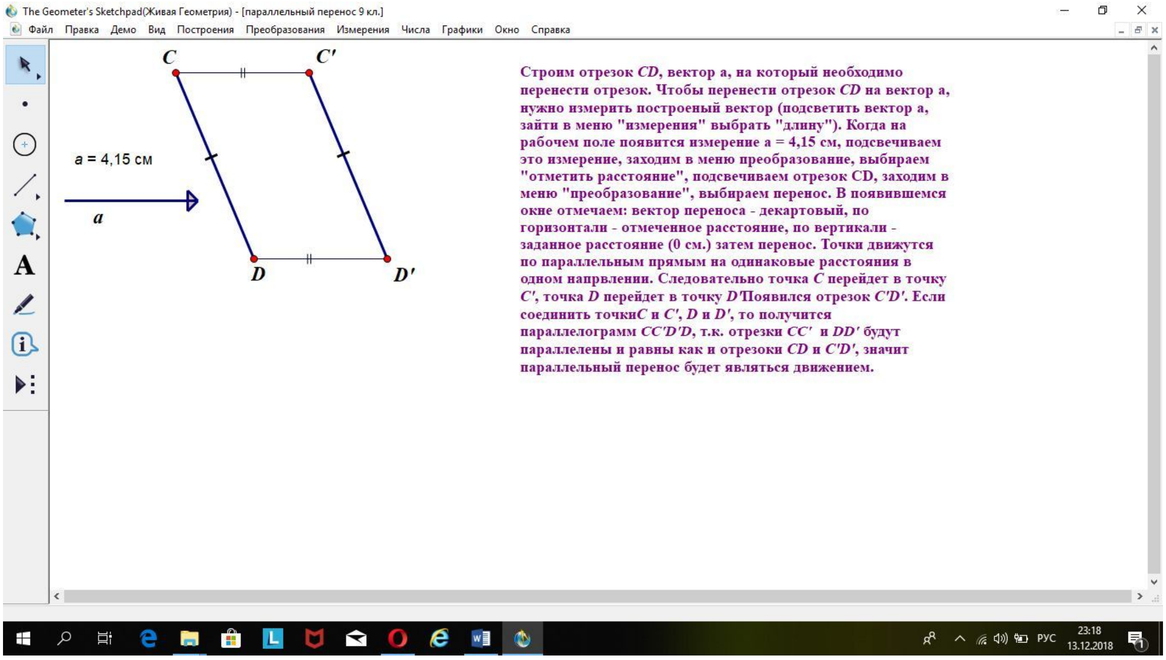


Приложение 17

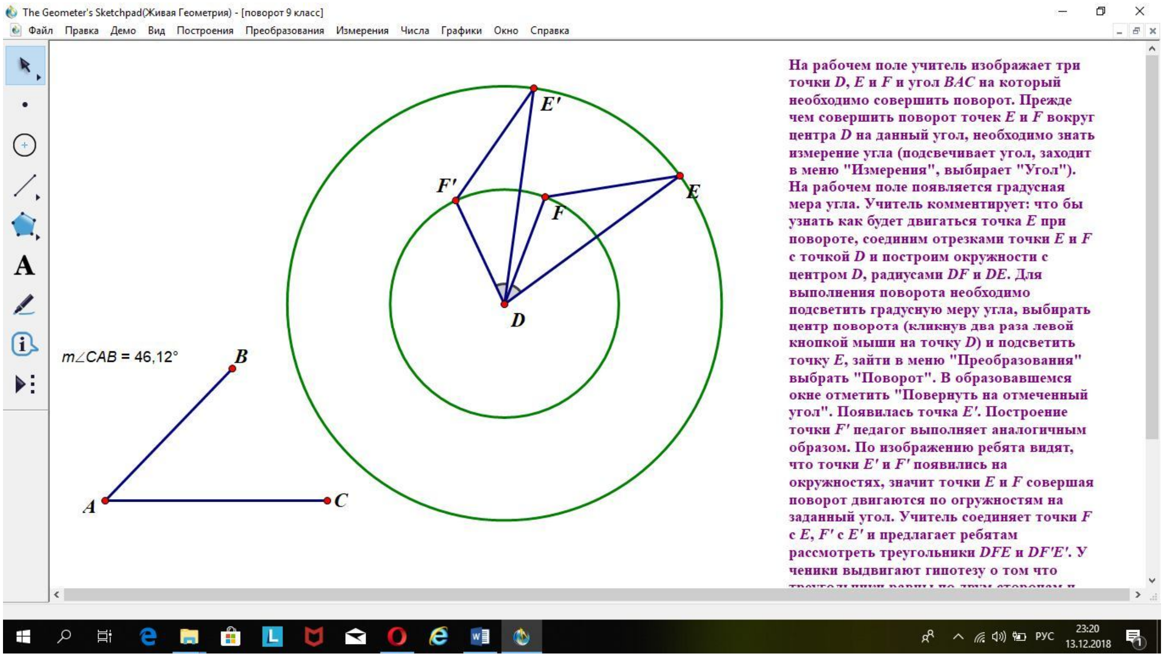
Осевая симметрия.



Параллельный перенос

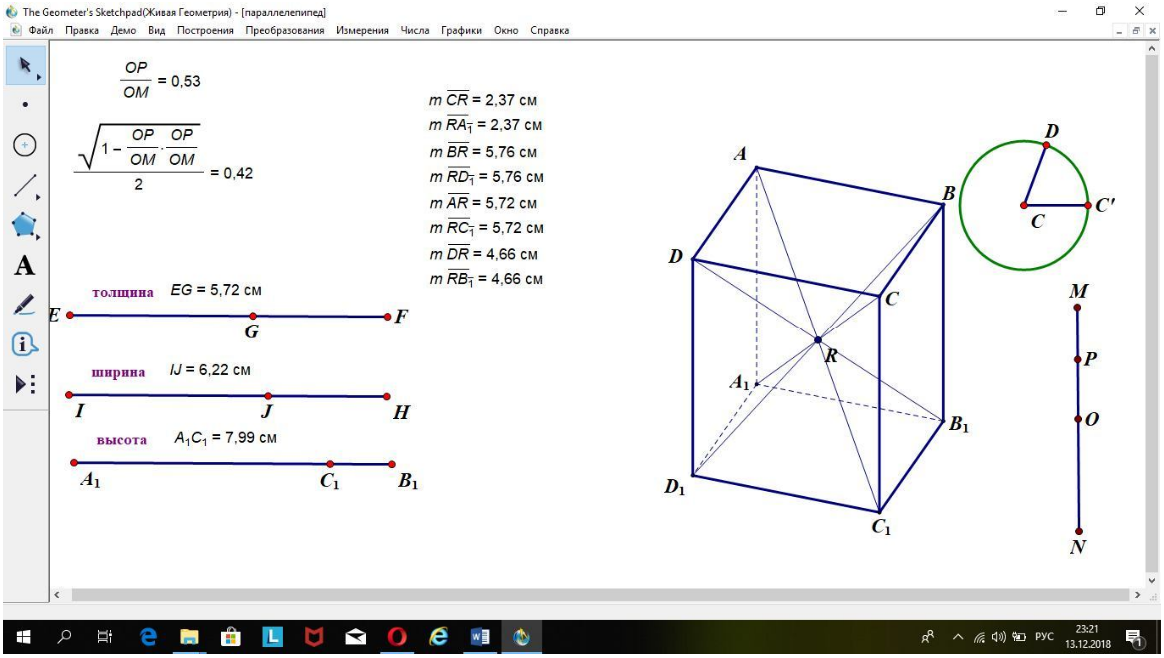


Поворот

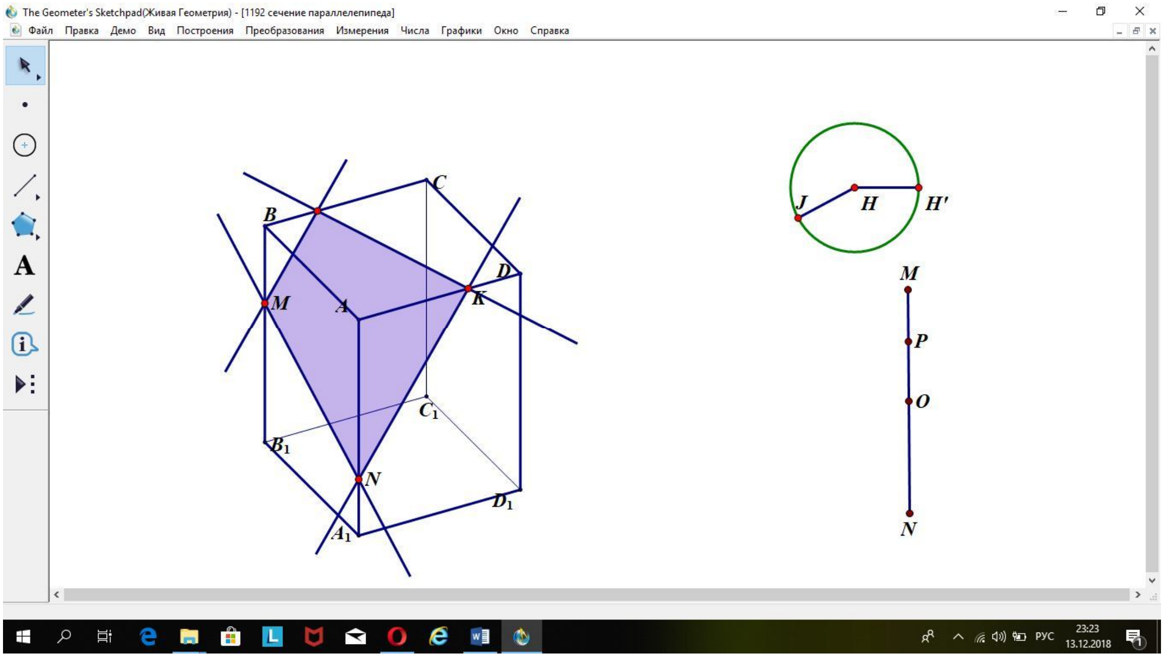

The Geometer's Sketchpad(Живая Геометрия) - [поворот 9 класс]
Файл Правка Демо Вид Построения Преобразования Измерения Числа Графики Окно Справка
m∠CAB = 46,12°
A
B
C
D
E
F
E'
F'
На рабочем поле учитель изображает три
точки D, E и F и угол BAC на который
необходимо совершить поворот. Прежде
чем совершить поворот точек E и F вокруг
центра D на данный угол, необходимо знать
измерение угла (подсвечивает угол, заходит
в меню "Измерения", выбирает "Угол").
На рабочем поле появляется градусная
мера угла. Учитель комментирует: что бы
узнать как будет двигаться точка E при
повороте, соединим отрезками точки E и F
с точкой D и построим окружности с
центром D, радиусами DF и DE. Для
выполнения поворота необходимо
подсветить градусную меру угла, выбирать
центр поворота (кликнув два раза левой
кнопкой мыши на точку D) и подсветить
точку E, зайти в меню "Преобразования"
выбрать "Поворот". В образовавшемся
окне отметить "Повернуть на отмеченный
угол". Появилась точка E'. Построение
точки F' педагог выполняет аналогичным
образом. По изображению ребята видят,
что точки E' и F' появились на
окружностях, значит точки E и F совершая
поворот двигаются по огружностям на
заданный угол. Учитель соединяет точки F
с E, F' с E' и предлагает ребятам
рассмотреть треугольники DFE и DF'E'. У
ченики выдвигают гипотезу о том что
РУС
23:20
13.12.2018

Приложение 20

Параллелепипед



Задача 1192 (а). Сечение параллелепипеда.



Приложение 22

Задача 1192 (а). Сечение параллелепипеда.