МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт /факультет/ филиал Институт математики, физики и информатики

(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая кафедра Алгебры, геометрии и методики их преподавания

(полное наименование кафедры)

Казанцев Виктор Александрович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема **КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРКЕТНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Направление подготовки/специальность 44.03.01 Педагогическое образование

(код и наименование направления)

Направленность (профиль) образовательной программы Математика

(наименование профиля бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой: д-р. п.н, к-т.ф-м.н, профессор В.Р. Майер

(учетная степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

____

(дата, подпись)

Руководитель: д-р ф-м.н.,доцент,А.В. Тимофеенко

(учетная степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

____

(дата, подпись)

Дата защиты ________________

Обучающийся В.А. Казанцев

(фамилия, инициалы)

____

(дата, подпись)

Оценка __________________

(прописью)

Красноярск 2018

Содержание

Введение

Все выпуклые правильногранные многогранники состоят из тел Платона, Архимеда, призм, антипризм и еще 92 фигур, которые называют телами Джонсона. Доказательство полноты списка выпуклых правильногранных многогранников завершено только в 2009 г. [2, 3, 10]. Теорема о классификации выпуклых правильногранных многогранников является частью результата, перечисляющего выпуклые правильногранники.

Правильногранником называется многогранник, каждая грань которого составлена из правильных многоугольников так, что каждая вершина многоугольника является и вершиной многогранника. Многогранник может представлять из себя призму, антипризму, либо одно из 186 тел.

До сих пор не были построены все выпуклые многогранники, грани которых составлены из правильных многоугольников, однако, еще в 1974 г. Ю.А. Пряхин рассмотрел типы граней, которыми могут обладать такие многогранники и сформулировал без доказательства лемму, в которой перечислил эти типы [7].

Паркетным называется выпуклый многоугольник, который составлен более чем из одного равноугольного выпуклого многоугольника. Паркетогранником называется многогранник с паркетными и правильными гранями. Проблема нахождения всех выпуклых равнореберных паркетогранников остается пока открытой. Исследование отвечает на вопросы, которые нельзя обойти на пути решения этой задачи и более общей проблемы классификации типов выпуклых паркетогранников.

Классификация типов выпуклых многогранников с паркетными гранями далека от завершения. Типы паркетных многоугольников найдены в виде решений системы уравнений. Выяснено, для каких типов паркетных многоугольников не существует прямой, делящей паркетный многоугольник на два паркетных. Приведены компьютерные программы, по которым вычислены эти решения.

Несколько лет назад были найдены и классифицированы все выпуклые правильногранники. Остается открытой проблема описания выпуклых многогранников с паркетными гранями.

Таким образом, цель нашего исследования заключается в том, чтобы подтвердить гипотезу о том, что каждый равнореберный паркетогранник с фиктивными вершинами подобен одной из четырех призм, известные как призмы с основанием 7c, 8c, 9b, 10b.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

- проанализировать литературу по теме исследования;
- отыскать группы поворотов и симметрий призм с паркетными гранями;
- построить с помощью систем компьютерной алгебры GAP и Maple равнореберные паркетогранники с основанями 7c, 8c, 9b, 10b;
- разработать программу элективного курса «Построение известных типов паркетных многоугольников» для учащихся 5 класса Еловской общеобразовательной школы.

Объект исследования – теория паркетогранников и социум, интересующейся ею.

Предметом исследования является алгебраические и компьютерные модели многогранников.

Гипотеза исследования – каждый равнореберный паркетогранник с фиктивными вершинами подобен одной из четырех призм, известные как призмы с основанием 7c, 8c, 9b, 10b.

База исследования: Еловская СОШ Балахтинского района Красноярского края.

Методы исследования:

1. теоретические – анализ исследований авторских работ по теме исследовательской работы.
2. эмпирические – системы компьютерной алгебры GAP и Maple

Глава I. Основы изучения паркетных многоугольников

1.1. Классификация паркетных многоугольников

Доказательство теоремы о классификации паркетных k-угольников сводит ее к изображенным на рис. 2 сорока девяти решениям следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} 10x_3 + 15x_4 + 18x_5 + 20x_6 + 25x_{12} + 28x_{30} = 30(k - 2), \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_{12} + x_{30} = k, \end{cases}$$

для k = 3, 4, . . . , 30.

```
pr:=[[ 3^3 ], [ 4^4 ], [ 3^2 6^2 ], [ 3^2 4^1 12^1 ], [ 5^5 ], [ 4^2 6^3 ],
[ 4^3 6^1 12^1 ], [ 3^1 6^4 ], [ 3^1 4^2 12^2 ], [ 3^2 6^1 12^2 ],
[ 6^6 ], [ 5^4 6^1 30^1 ], [ 4^1 6^4 12^1 ], [ 4^2 6^2 12^2 ],
[ 4^3 12^3 ], [ 3^1 6^3 12^2 ], [ 3^1 5^3 30^2 ], [ 3^2 12^4 ],
[ 6^5 12^2 ], [ 5^3 6^2 30^2 ], [ 4^1 6^3 12^3 ], [ 4^2 6^1 12^4 ],
[ 3^1 6^2 12^4 ], [ 3^1 5^2 6^1 30^3 ], [ 3^1 4^1 12^5 ], [ 3^2 5^1 30^4],
[ 6^4 12^4 ], [ 5^2 6^3 30^3 ], [ 4^1 6^2 12^5 ], [ 4^2 12^6 ],
[ 3^1 6^1 12^6 ], [ 3^1 5^1 6^2 30^4 ], [ 6^3 12^6 ], [ 5^1 6^4 30^4 ],
[ 4^1 6^1 12^7 ], [ 3^1 12^8 ], [ 6^2 12^8 ], [ 4^1 12^9 ], [ 6^1 12^10 ],
[ 5^3 6^1 30^7 ], [ 3^1 5^2 30^8 ], [ 12^12 ], [ 5^2 6^2 30^8 ],
[ 3^1 5^1 6^1 30^9 ], [ 5^1 6^3 30^9 ], [ 5^2 6^1 30^13 ],
[ 3^1 5^1 30^14 ], [ 5^1 6^2 30^14 ], [ 5^1 6^1 30^19 ];
```

Рис. 1: Скан решений систем (1) на стр. 219 [8].

Двадцати одному из этих решений соответствует 23 типа указанных выше паркетных многоугольников. Тип паркетного k-угольника характеризуется упорядоченным набором чисел (n_1, n_2, . . . , n_k). Каждое число приписано вершине и означает, что угол многоугольника с вершиной n_i равен углу правильного n_i-угольника. Например, квадрат имеет тип (4, 4, 4, 4) = (4^4), тип составленной из трёх правильных треугольников трапеции равен (3^2 , 6^2), а типом (3, 6, 3, 6) обладает ромб. В одной из публикаций показано, что решению [3, 4, 3, 12] не соответствует ни один тип паркетного многоугольника. Анонсируется доказательство этого факта для оставшихся 26 решений.

Каждый паркетный многоугольник обладает одним из следующих типов:

$3a = (3^3)$;

$4a = (3^2, 6^2)$, $4b = (3, 6, 3, 6)$, $4c = (4^4)$;

$5a = (3, 6^4)$, $5b = (3, 12, 4^2, 12)$;

$6a = (3, 12^2, 3, 12^2)$, $6b = (3, 30, 5^3, 30)$, $6c = (4^2, 12, 6^2, 12)$, $6d = (6^6)$;

$7a = (3, 12^2, 6^2, 12^2)$, $7b = (3, 30, 5, 30, 3, 30^2)$, $7c = (4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$,

$7d = (5^3, 30, 6^2, 30)$;

$8a = (3, 30, 5, 6^2, 30^2)$, $8b = (4, 12^2, 4, 12^4)$, $8c = (6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$;

$9a = (5, 30, 6^2, 30^2, 6^2, 30)$, $9b = (6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$;

$10a = (6, 12^2, 6, 12^6)$, $10b = (6, 12^4, 6, 12^4)$;

$11a = (6, 12^{10})$;

$12a = (12^{12})$.

1.2. Равносторонние паркетные многоугольники

Теорема Алексеева М.Н. Если стороны паркетного многоугольника равны, то он обладает одним из следующих типов [1]:

$3a(3^3)$; $4b(3, 6, 3, 6)$; $4c(4^4)$; $5b(3, 12, 4^2, 12)$; $6a(3, 12^2, 3, 12^2)$; $6b(3, 30, 5^3, 30)$; $6d(6^6)$; $7b(3, 30, 5, 30, 3, 30^2)$; $7c(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$; $8c(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$; $9b(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$; $10b(6, 12^4, 6, 12^4)$; $12a(12^{12})$.

Доказательство. Напомним, что существует ровно 23 типа паркетных многоугольников. Изображенные на рис.2. и рис.13. представители 9 типов r-паркетных многоугольников есть равноугольные многоугольники. Еще четырем типам соответствуют равноугольные 3-, 4-, 6- и 12-угольники. Следовательно, эти представители могут быть и правильными многоугольниками. Рассмотрим каждый из оставшихся десяти типов.

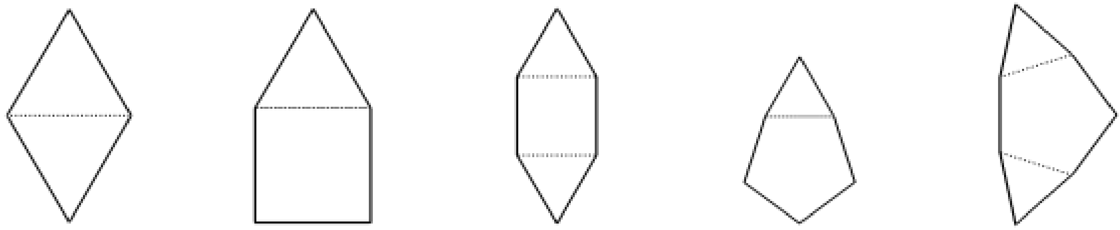

Рис.2. Равносторонние паркетные многоугольники без фиктивных вершин

1.3. О типах, каждое представление которых не может быть равносторонним многоугольником.

Ниже представлено доказательство о том, что данные типы не могут быть равносторонним многоугольником [1].

1.3.1 Тип 4a = (3, 3, 6, 6)

В многоугольнике типа 4а, (рис.3.) прямые, соединяющие равные углы параллельны, так как сумма внутренних односторонних углов равна $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. Значит, данный многоугольник является трапецией, отличной от параллелограмма. Следовательно, представители типа 4а не могут быть равносторонними.

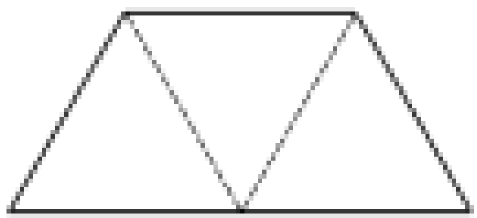

Рис.3. Представитель типа 4а

1.3.2 Тип 5a = $(3, 6^4)$

Очевидно, многоугольник типа 5a, (рис.4.) можно разбить на правильный треугольник и многоугольник типа 4a. Так как тип 4a не может быть равносторонним, то и сам тип 5a, содержащий его, не может быть равносторонним.

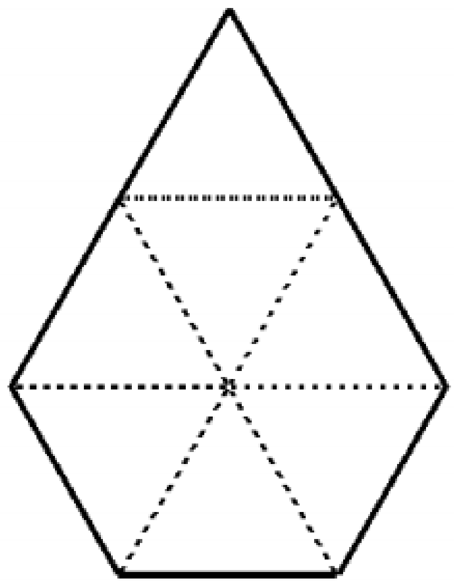

Рис.4. Представитель типа 5a

1.3.3 Тип 6c = $(4^2, 12, 6^2, 12)$

Очевидно, многоугольник типа 6c, (рис.5.) можно разбить на квадрат и многоугольник типа 4a. Так как тип 4a не может быть равносторонним, то и сам тип 6c, содержащий его, не может быть равносторонним.

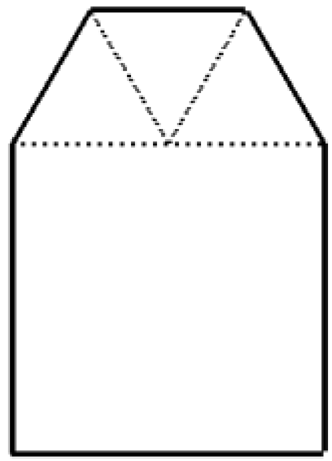

Рис.5. Представитель типа 6c

1.3.4 Тип 7a = $(3, 12^2, 6^2, 12^2)$

Очевидно, многоугольник типа 7a, (рис.6.) можно разбить на два многоугольника типа 5b и 4a. Так как тип 4a не может быть равносторонним, то и сам тип 7a, содержащий его, не может быть равносторонним.

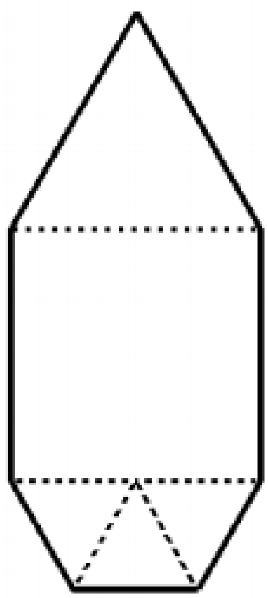

Рис.6. Представитель типа 7a

1.3.5 Тип 7d = $(5^3, 30, 6^2, 30)$

Очевидно, многоугольник типа 7d, (рис.7.) можно разбить на правильный пятиугольник и многоугольник типа 4a. Так как тип 4a не может быть равносторонним, то и сам тип 7d, содержащий его, не может быть равносторонним.

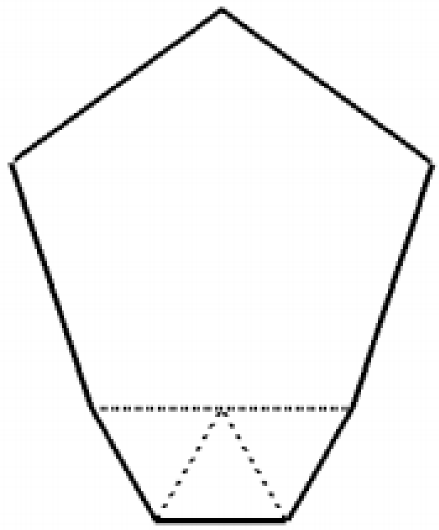

Рис.7. Представитель типа 7d

1.3.6 Тип 8a = $(3, 30^2, 6^2, 30, 5, 30)$

Очевидно, многоугольник типа 8a, (рис.8.) можно разбить на два многоугольника типа 6b и 4a. Так как тип 4a не может быть равносторонним, то и сам тип 8a не может быть равносторонним.

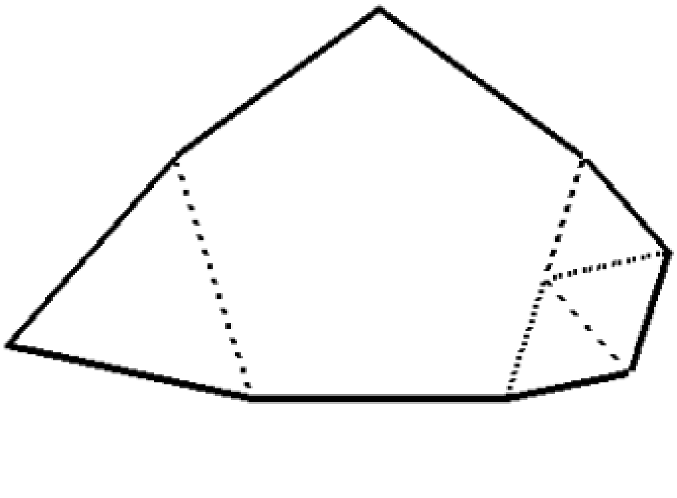

Рис.8. Представитель типа 8a

1.3.7 Тип 8b = (4, 12^2 , 4, 12^4)

Представим тип 8b, (рис.9.) в виде множества правильных треугольников, квадратов и четырехугольников, получим три квадрата, два треугольника и трапецию, большее основание которой является стороной многоугольника, а меньшее основание равно равным сторонам квадратов и треугольников, из-за чего можно сделать вывод, что тип 8b является неравносторонним.

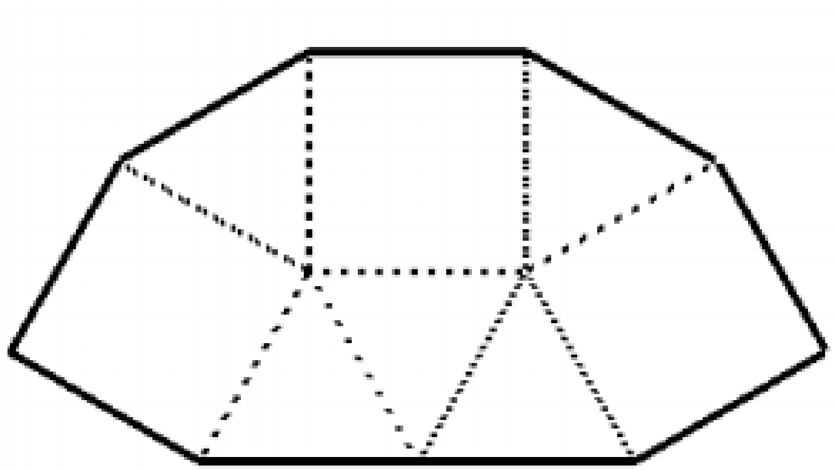

Рис.9. Представитель типа 8b

1.3.8 Тип 9a = (5, 30, 6^2 , 30^2 , 6^2 , 30)

Очевидно, многоугольник типа 9a, (рис.10.) можно разбить на два многоугольника типа 7d и 4a. Так как данные типы не могут быть равносторонними, то и сам тип 9a не может быть равносторонним.

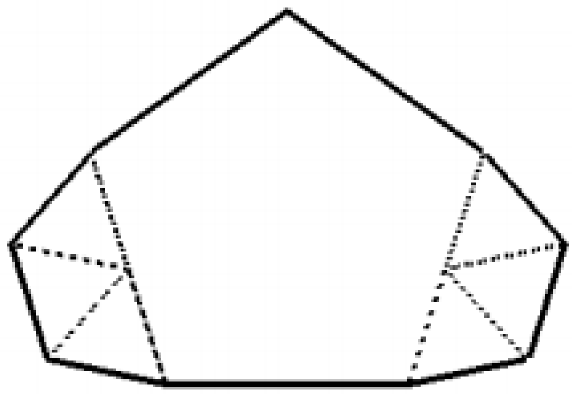

Рис.10. Представитель типа 9а

1.3.9 Тип 10а = $(6, 12^2, 6, 12^6)$

Представим многоугольник типа 10а, (рис.11.) в виде соединения правильных треугольников, квадратов и четырехугольников. Получим 6 треугольников, 3 квадрата и одну трапецию типа 4а и прямоугольник, сторона которого равна большему ребру трапеции, т.е. одна из сторон десятиугольника равна большему ребру трапеции. Однако, меньшее ребро трапеции равно сторонам треугольников, и, как следствие, всем остальным сторонам 10-угольника. Поэтому тип 10а нельзя представить равносторонним.

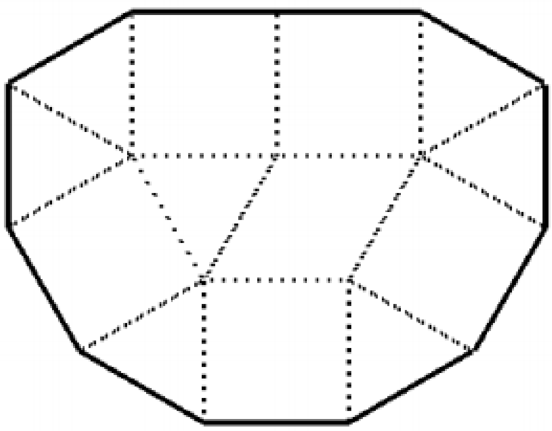

Рис.11. Представитель типа 10а

1.3.10 Тип 11а = $(6, 12^{10})$

Прежде всего, необходимо доказать, что любой представитель типа 11а не может быть составлен из равностороннего 12-угольника и равносторонних многоугольников. Предположим противное. Пусть М – представитель типа 11а, составленный из равностороннего 12-угольника и равносторонних многоугольников, (рис.12.). Нетрудно показать, что тогда десять идущих подряд вершин 11-угольника М служат вершинами равностороннего 12-угольника. Поскольку первой и последней из этих десяти вершин соответствуют углы по 150° , то содержащие одиннадцатую и двенадцатую вершину продолжения сторон этих углов пересекаются под углом в 120°. Обозначим точку пересечения этих сторон буквой А, а одиннадцатую и двенадцатую вершину – буквами В и С. Треугольник АВС не является правильным и не может быть составлен из равноугольных многоугольников. Противоречие с предположением, что фигура М составлена из равностороннего 12-угольника ВС . . . и равносторонних многоугольников.

Предположим, что существует равносторонний представитель типа 11а и обозначим его буквой Е. Десять его вершин лежат на вершинах пяти квадратов, пристроенных сторонами к правильному шестиугольнику. Соединив эти вершины девятью (одинаковыми) ребрами, заметим, что два оставшихся ребра одиннадцатиугольника Е должны содержать вершины правильного 12-угольника, достроенного из девяти рассмотренных ребер. Очевидно, длина каждого из них больше длины любого из девяти первых построенных. Следовательно, 11-угольник Е оказался неравносторонним. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

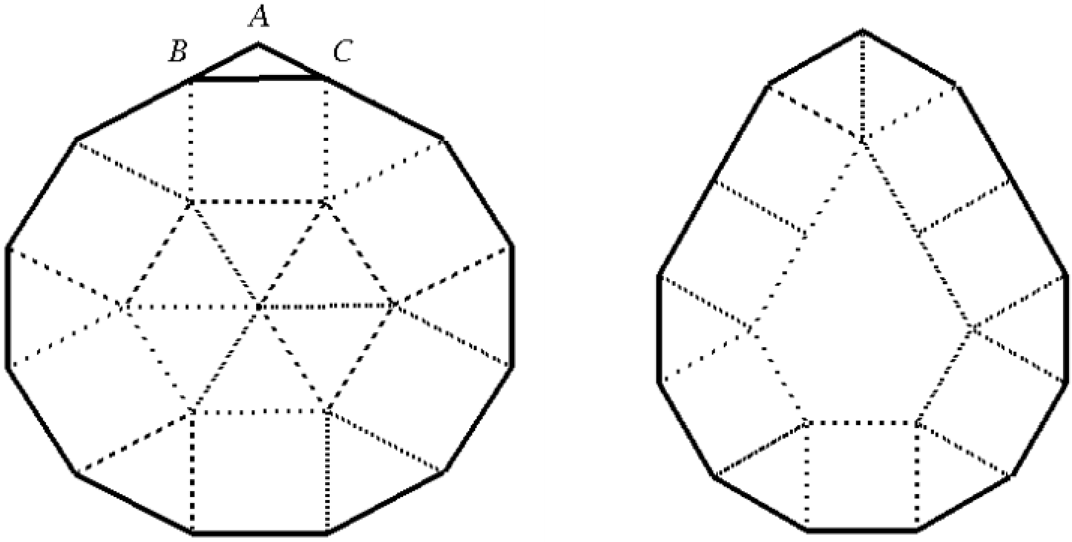

Рис.12. Одиннадцатиугольник М и представитель типа 11а

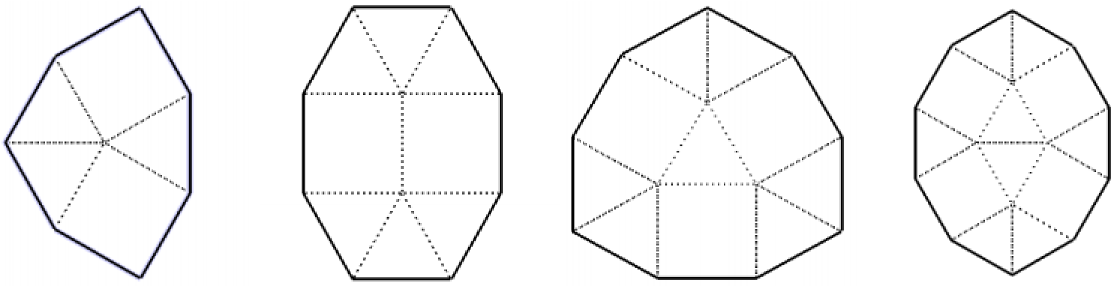

Рис. 13. Равносторонние паркетные многоугольники с фиктивными вершинами

Глава II. Эмпирическое исследование возможностей построения паркетных многогранников

2.1. Алгебраические и компьютерные модели призм с паркетными основаниями

В публикации Ю. Пряхина предложена схема нахождения всех типов паркетогранников и утверждается, что она приведёт к четырём бесконечным сериям и ещё конечному числу типов паркетогранников. За 44 года после выхода в свет работы Ю. Пряхина не удалось найти ни это число, ни, тем более, сами типы. После доказательства теоремы настоящей работы стало ясно, что если паркетогранник равносторонний, то, кроме правильных, он может обладать еще только девятью гранями, изображёнными на рис. 2. и рис.13. Заметим, что на этих рисунках фиктивными вершинами обладают лишь четыре грани второго из них. Вершина паркетного многоугольника называется фиктивной, когда она лежит внутри его ребра или грани и служит вершиной равноугольного многоугольника – одного из тех, которым замощен паркетный.

Для построения паркетогранников из данных паркетных многоугольников (Рис.13.), необходим алгоритм, который содержит линейное представление групп симметрий, состоящих из его правильногранников и указание координатных троек фундаментальных вершин этих правильногранников в виде элементов алгебраического расширения поля рациональных чисел. Для вычисления группы симметрий многогранника, мы будем рассматривать "скелет" данной фигуры в виде алгебраической модели, носитель которой состоит из множества вершин, а множество отношений составлено из ребер, т.е. из неупорядоченных пар вершин [7, 10].

Действие группы, порожденной поворотом

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и отражением $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, на точки $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ приводит к множеству вершин призмы Π_{7c}.

Действие группы, порожденной поворотом

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и отражением $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, на точки $\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$,

приводит к множеству вершин призмы Π_{8c}.

Действие группы, порожденной поворотом

$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и отражением $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, на точки $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,

приводит к множеству вершин призмы Π_{9b}.

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и отражением $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, на точки $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, приводит к множеству вершин призмы Π_{10b}.

2.1. Паркетогранники с фиктивными вершинами

С помощью систем компьютерной алгебры GAP и Maple можно построить равнореберный паркетогранник с основанием 7c, 8c, 9b, 10b

GAP — кроссплатформенная система компьютерной алгебры для вычислительной дискретной алгебры с особым вниманием к вычислительной теории групп.

Maple — программный пакет, система компьютерной алгебры, ориентированный на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование.

Ниже приведены способы построения паркетогранников из равносторонних паркетных многоугольников с фиктивными вершинами (Рис.13.), [12]. Фиктивная вершина – лежащая внутри ребра или грани общая вершина равноугольных многоугольников, из которых составлена паркетная грань.

2.1.1 Тип 7c = $(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$

Из многоугольника типа 7c, (рис.14.) можно получить равносторонний паркетогранник (рис.15.) с помощью системы компьютерной алгебры GAP и Maple, применив действие группы, порожденной поворотом и отражением на точки.

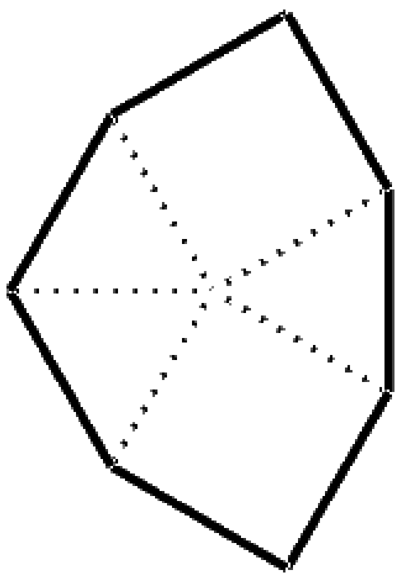

Рис.14. Представитель типа 7c

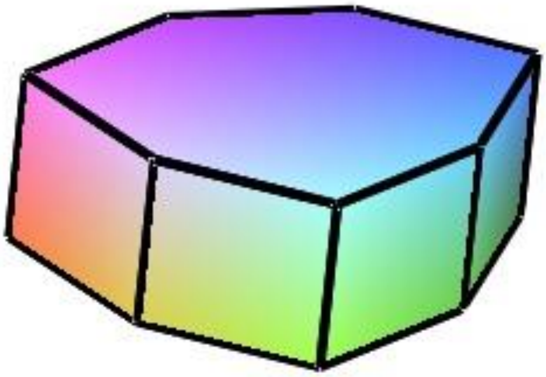

Рис.15. Паркетогранник, полученный из многоугольника типа 7c

2.1.2 Тип 8c = $(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$

Из многоугольника типа 8c, (рис.16.) можно получить равносторонний паркетогранник (рис.17.) с помощью системы компьютерной алгебры GAP и Maple, применив действие группы, порожденной поворотом и отражением на точки.

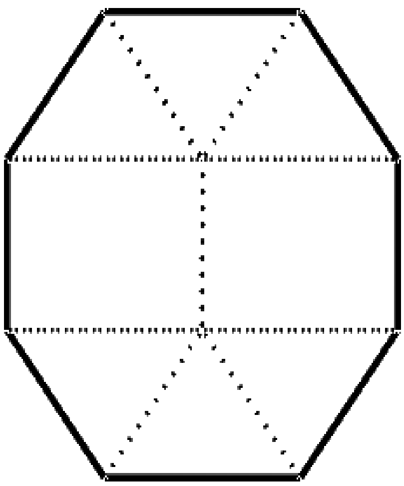

Рис.16. Представитель типа 8c

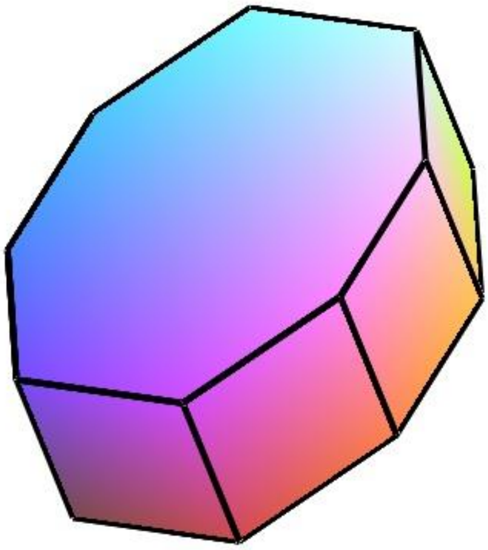

Рис.17. Паркетогранник, полученный из многоугольника типа 8c

2.1.3 Тип 9b = $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$

Из многоугольника типа 9b, (рис.18.) можно получить равносторонний паркетогранник (рис.19.) с помощью системы компьютерной алгебры GAP и Maple, применив действие группы, порожденной поворотом и отражением на точки.

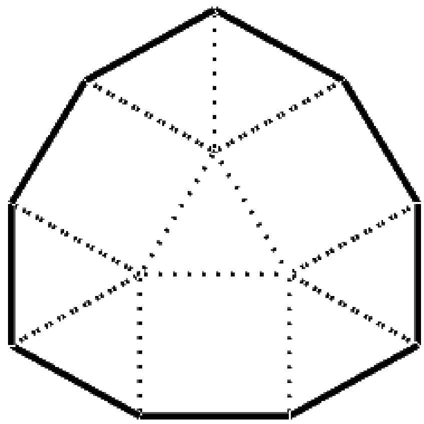

Рис.18. Представитель типа 9b

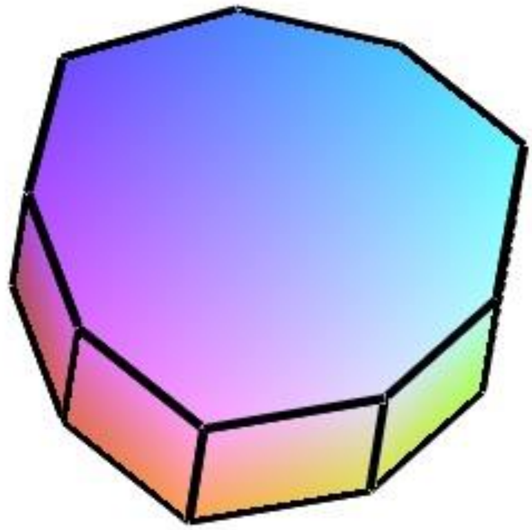

Рис.19. Паркетогранник, полученный из многоугольника типа 9b

2.1.3 Тип 10b = $(6, 12^4, 6, 12^4)$

Из многоугольника типа 10b, (рис.20.) можно получить равносторонний паркетогранник (рис.21.) с помощью системы компьютерной алгебры GAP и Maple, применив действие группы, порожденной поворотом и отражением на точки.

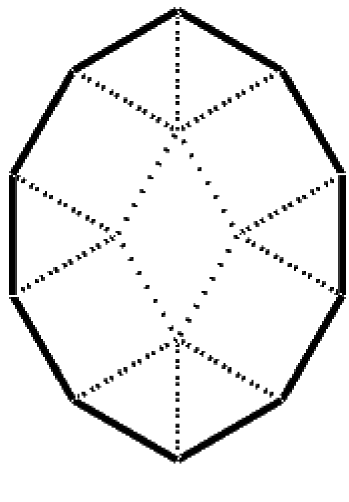

Рис.20. Представитель типа 10b

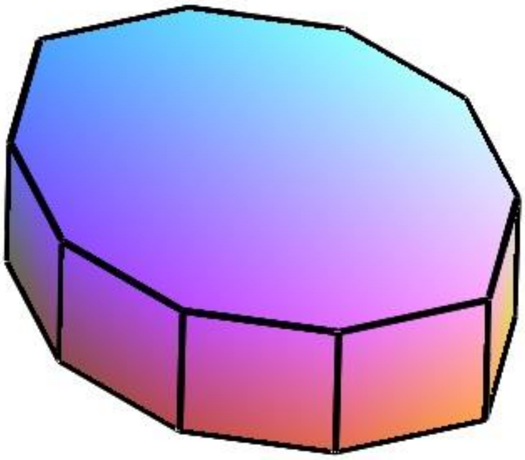

Рис.21. Паркетогранник, полученный из многоугольника типа 10b

Проблема нахождения всех выпуклых равнореберных паркетогранников остается открытой. Исследование отвечает на вопросы, которые нельзя обойти на пути решения этой задачи и более общей проблемы классификации типов выпуклых паркетогранников. Типы граней паркетных многоугольников известны с 1974 г. и доказательство полноты списка типов появилось в 2013 г. Оно сведено к выяснению того, будут ли найденным тогда 27 решениям системы двух уравнений соответствовать типы паркетных многоугольников. Четыре типа равнореберных паркетогранника с основанием 7c, 8c, 9b, 10b нам удалось построить с помощью систем компьютерной алгебры GAP и Maple.

Глава III. Применение результатов исследования паркетогранников и их граней на уроках математики в общеобразовательной школе

Несколько десятилетий проблемой исследования всех типов паркетогранников занимаются учащиеся общеобразовательных школ, а так же лица, не имеющие узконаправленную специализацию. Самыми молодыми участниками исследования являются учащиеся красноярских школ, таких, как МБОУ СШ №72 им. М.Н. Толстихина, МАОУ СШ № 149, МБОУ СОШ №10 им. академика Ю. А. Овчинникова. Учащиеся создают материализированные модели тел, а так же осваивают алгоритм для построения всех граней или многогранников. Результаты, полученные школьниками, были признаны экспертными сообществами и награждены призами конференций различного уровня.

Идея работы со школьниками состоит в том, что перед ними встает реальная проблема, где школьники могут проявить свои способности в исследовании мира геометрии многоугольников. Мы проанализировали деятельность учащихся вышеперечисленных школ и убедились, что привлекая их к решению научных задач, повышается интерес к предмету математике [6, 9].

Изучив деятельность школьников по проблеме нахождения типов паркетных многоугольников, мы решили не останавливаться на достигнутых результатах и разработали программу элективного курса «Построение известных типов паркетных многоугольников» предназначена для учащихся 5 класса Еловской общеобразовательной школы. Программа направлена на знакомство с миром геометрии многоугольников, а так же на формирование интереса к исследовательской деятельности в науке математике.

Содержание материала, представленного в программе, построено таким образом, что школьники на элективном курсе первоначально получают знания о свойствах, классификациях и видах паркетных многоугольников, после чего, научатся самостоятельно строить их с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников.

Актуальность данной программы заключается в следующем:

1. Моделирование многоугольников из правильных треугольников и квадратов способствуют повышению интереса к предмету математика.
2. Формирование навыков в области исследовательской деятельности.
3. Развитие пространственного мышления и геометрического воображения.

Основная цель программы – сформировать интерес к исследовательской деятельности в науке математике, расширить знания о мире многоугольников, научить строить паркетные многоугольники своими руками с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

Программа элективного курса рассчитана на 10 часов. Данную программу мы разделили на 3 раздела:

1 раздел: теоретические и интерактивные занятия по теме «Мир геометрии многоугольников», рассчитанный на 2 урока (1 урок – 45 мин.).

2 раздел: построение паркетных с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников – 5 уроков.

3 раздел: исследовательская деятельность по нахождению типов паркетных многоугольников – 3 урока.

Форма занятия: уроки-лекции, уроки-практикумы, урок-обобщения, учебно-исследовательская работа.

Ожидаемые результаты:

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- правильно употреблять новые термины, связанные с основными понятиями (многоугольник, паркет, паркетный многоугольник);
- знать правила изображения пространственных фигур;

- знать основные способы построения паркетных многогранников и уметь строить их;
- уметь представлять свои работы, доказывать и аргументировать правильность построения получившейся фигуры;
- уметь защищать свои работы на научно-практических конференциях.

Содержание элективного курса

Раздел 1. Мир геометрии многоугольников

1.1. Введение понятия «многоугольник», виды, свойства, классификация.

Продолжительность урока: 45 мин.

Основная цель - познакомить учащихся с понятием многоугольник, рассмотреть различные виды многоугольников (по количеству углов, выпуклый, правильный).

На этом уроке дети познакомятся с понятием многоугольник, рассмотрят различные виды и свойства многоугольников. Рассмотрят правильные многоугольники в природе.

1.2. Введение понятия «паркетный многоугольник», типы, классификация.

Продолжительность урока: 45 мин.

Основная цель - познакомить учащихся с понятием «паркет», «паркетный многоугольник», рассмотреть его типы, ознакомиться с классификацией.

На этом уроке учащиеся впервые встретятся с понятием «паркеты», Определят, какие основные геометрические фигуры используются при составлении паркета, разработают собственный паркетный узор. Рассмотрят типы паркетных многоугольников.

Раздел 2. Построение паркетных многоугольников с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников.

2.1. Построение многоугольников с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников.

Продолжительность урока: 2 занятия (1 занятие – 45 мин.)

Основная цель – построить с учащимися многоугольник с помощью правильных треугольников, квадратов и правильных пятиугольников.

На уроке учащиеся займутся практической частью, где с помощью неограниченного количества плоских фигур (правильный треугольник, квадрат, правильный пятиугольник) построят многоугольники, присвоят им названия по количеству использованных фигур и опишут полученную фигуру.

2.2. Нахождение паркетных многоугольников из полученных многоугольников.

Основная цель – научить учащихся выделять из различных видов многоугольников паркетные многоугольники.

Продолжительность занятия: 2 урока

На уроке учащиеся научатся распознавать паркетные многоугольники из построенных ими многоугольников на предыдущем уроке. Учащиеся попробуют построить паркетные многоугольники с помощью неограниченного количества плоских фигур (правильный треугольник, квадрат, правильный пятиугольник), заведут свой собственный словарь, в который будут заносить найденные ими паркетные многоугольники, присвоят название и дадут краткое описание каждого из них.

2.3. Обобщение и закрепление пройденного материала

Основная цель – обобщить и закрепить тему «многоугольники», «паркетные многоугольники».

Продолжительность урока: 45 мин.

В содержание данного урока входят:

- мини-тест на закрепление материала;
- подсчет количества построенных паркетных многоугольников;

Раздел 3. Исследовательская деятельность по нахождению типов паркетных многоугольников.

Основная цель – подготовить исследовательские работы по темам «Многоугольник», «Паркетный многоугольник» для школьной научно-практической конференции.

Продолжительность занятия: 3 урока.

На занятиях учитель математики с ребятами примет участие в школьной научно-практической конференции и представят свои работы.

Конспект урока

Раздел 1. Мир геометрии многоугольников

1.1. Введение понятия «многоугольник», виды, свойства, классификация.

Образовательные ресурсы: А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир Учебник «Математика-5», рабочая тетрадь №1, персональный компьютер, проектор, экран, раздаточный материал, листы самооценки

Цели:

Предметные: сформировать у учащихся представление о многоугольниках, познакомить учащихся с элементами многоугольника, научить распознавать на чертежах многоугольники, равные фигуры, находить в окружающем мире объекты, для которых многоугольники являются моделями.

Личностные: вызвать интерес к изучению темы и желание применить приобретенные знания и умения.

Метапредметные: формировать умения видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации, в окружающей жизни.

Планируемые результаты: учащийся научится распознавать многоугольники, их элементы, равные фигуры, находить в окружающей жизни объекты, для которых многоугольники являются моделями.

Структура урока

1. **Организационный этап.**

Раздаются листы самооценки, в которых учащиеся будут себя оценивать на каждом этапе урока.

2. **Проверка домашнего задания** (смена тетрадей)

3. **Актуализация знаний**

- Назовите углы, изображенные на чертеже(рис.22.) тремя способами.

-Назовите стороны углов.

-Определите виды углов.

-Объясните, как каждый из данных углов дополнить до развернутого.

- Объясните, как каждый из данных углов дополнить до прямого.

-<BAC=30°, <MPN =110°. Как вычислить, чему равен угол, дополняющий данные углы до развёрнутого угла?

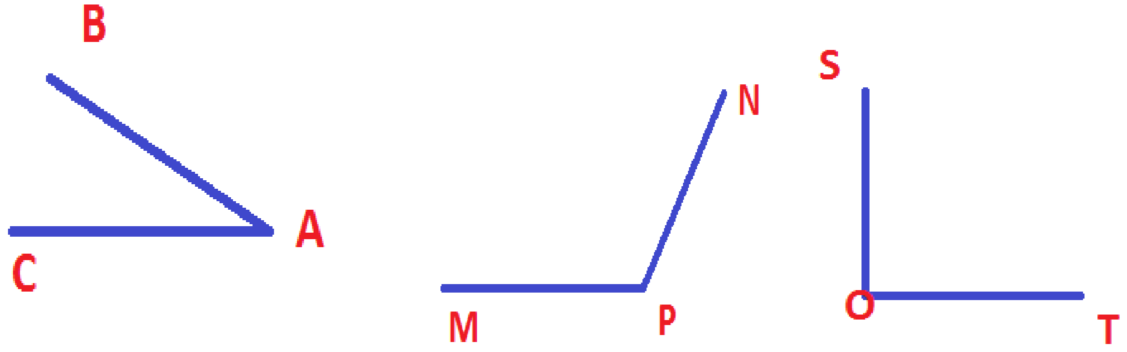

Рис.22.

4. **Постановка целей и задач урока. Мотивация учебной деятельности**

-Что изображено на чертеже(рис.23)?

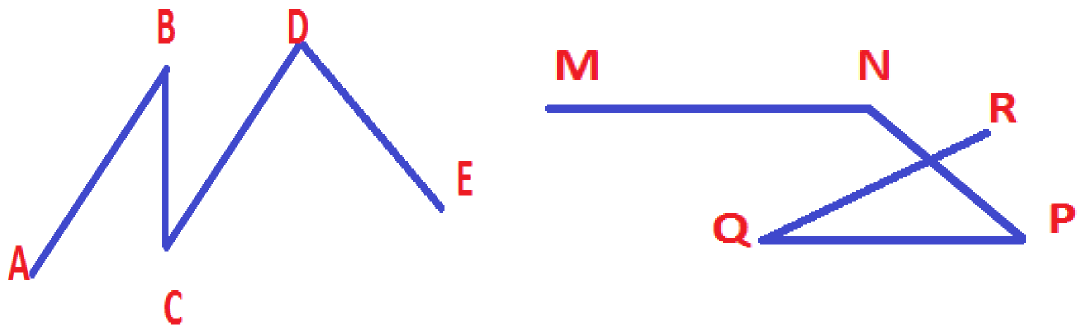

Рис.23.

-Что общего у этих ломаных?

-Чем отличается ломаная ABCDE от MNPQR?

-Начертите замкнутую ломаную.

-Вырежьте фигуру, которая ограничена ломаной.

-Как называется получившаяся фигура?

-Сформулируйте тему урока**.**

- Назовите цели и задачи урока, исходя из названия темы.

5. **Изучение нового материала**

Обратить внимание учащихся на то, что на рисунке изображены три фигуры, каждая из которых ограничена замкнутой ломаной.

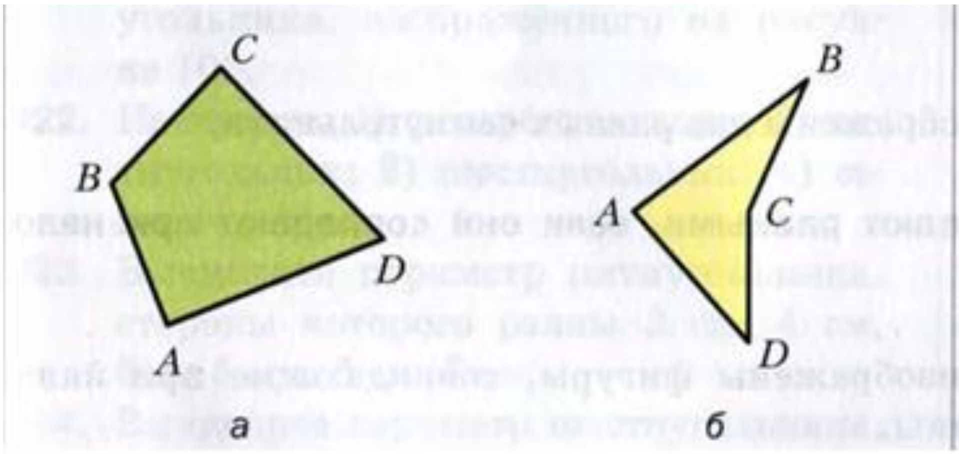

Рис.24.

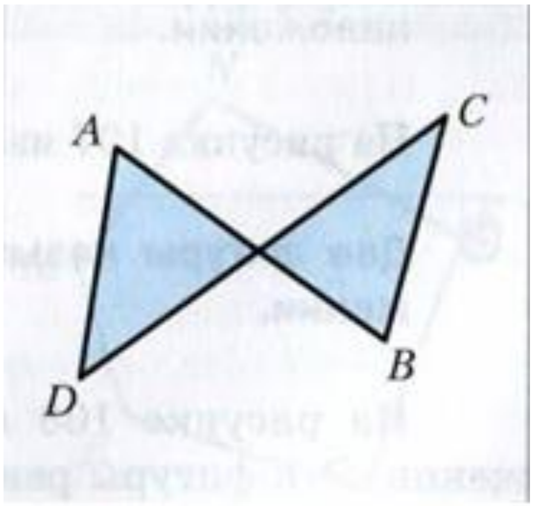

Рис.25.

-Что общего у этих фигур?

- Чем отличаются границы фигур рисунка 24 от рисунка 25?

-Как вы думаете, можно назвать фигуры на рисунке 24?

- Можно ли так назвать фигуру на рисунке 25?

- Какие фигуры вы видите на рисунке?

Сообщить учащимся, что все эти фигуры являются многоугольниками.

-Будет ли фигура на рисунке 25 многоугольником?

- Как вы думаете, почему?

Сообщить учащимся, что каждый многоугольник имеет вершины и стороны.

Обратить внимание учащихся на то, что многоугольник называют и обозначают по его вершинам: ABCD или BCDA, или CDAB, или DABC. Количество вершин определяет вид многоугольника.

Обратить внимание учащихся на то, что у многоугольника можно вычислить периметр.

-Что такое периметр четырехугольника?

- Что такое периметр многоугольника?

-Найдите периметр данного пятиугольника.

-Какие отрезки называются равными? Какие углы мы называем равными?

- Как вы думаете, какие многоугольники мы будем называть равными?

-Попробуйте по аналогии дать определнение равным фигурам.

6. Физкультминутка

Обведите глазами по контуру данные многоугольники по часовой стрелке или против часовой - по 3 раза.

7**. Сведения из истории**

Обратить внимание учащихся, что в древних египетских и вавилонских рукописях понятие четырехугольника встречается около 5 тысяч лет назад.

Трапеция в переводе с греческого означает столик.

Знак < (угол) ввел в XVII веке французский математик Эригон.

8. **Первичное закрепление нового материала**

№321 (устно)-фронтальная работа, № 141(рабочая тетрадь)

№322 (1), 4) – I вариант, 2)3) – II вариант) индивидуальная работа

№323 (ученик на обратной стороне доски, остальные самостоятельно в тетрадях)

№325(а,б) – самостоятельно в тетрадях

9**. Подведение итогов урока**

- Какую цель мы ставили перед собой в начале урока? Достигли ли мы ее?

Оцените свою деятельность на уроке в листах самооценки.

10. **Домашнее задание.**

п.13, вопросы 1-7, №324, №326, №335

11. **Рефлексия**

-Сегодня я узнал(а)…

- Я понял(а), что…

- Я научился(лась)…

- Было трудно…

Было интересно узнать, что…

Заключение

Цель нашего исследования заключается в том, чтобы подтвердить гипотезу о том, что каждый равнореберный паркетогранник с фиктивными вершинами подобен одной из четырех призм, известные как призмы с основанием 7c, 8c, 9b, 10b.

Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач:

- проанализировать литературу по теме исследования;
- отыскать группы поворотов и симметрий призм с паркетными гранями;
- построить с помощью систем компьютерной алгебры GAP и Maple равнореберные паркетогранники с основаниями 7c, 8c, 9b, 10b;
- разработать программу элективного курса «Построение известных типов паркетных многоугольников» для учащихся 5 класса Еловской общеобразовательной школы.

С помощью систем компьютерной алгебры GAP и Maple нам удалось построить 4 равнореберных паркетогранника с основанием 7c, 8c, 9b, 10b.

Мы проанализировали деятельность учащихся вышеперечисленных школ и убедились, что привлекая их к решению научных задач, повышается интерес к предмету математике.

Изучив деятельность школьников по проблеме нахождения типов паркетных многоугольников, мы решили не останавливаться на достигнутых результатах и разработали программу элективного курса «Построение известных типов паркетных многоугольников» предназначена для учащихся 5 класса Еловской общеобразовательной школы. Программа направлена на знакомство с миром геометрии многоугольников, а так же на формирование интереса к исследовательской деятельности в науке математике.

В результате учащиеся 5-го класса Еловской СОШ представили свои работы в школьной научно-практической конференции.

Таким образом, задачи исследовательской работы решены, поставленная цель достигнута.

Список использованных источников

1. Алексеев М. Н., Казанцев В. А., Тимофеенко А. В. К теореме о классификации паркетных многоугольников // Красноярский алгебраический семинар, вэб-трансляция MIND. – 2018.

2. Гурин А. М., Залгаллер В. А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями составленными из правильных, Труды Математического Общества Санкт-Петербурга, 14 (2008), С. 215–294.9.

3. Гурин А. М., К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сиб. электрон, матем. изв. 2010. № 7. A.5-A.23.

4. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2. М.; Л.: Наука, 1967.

5. Окладникова Е. С., Тимофеенко А. В. О типах выпуклых многогранников с паркетными гранями // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 16–17 ноября 2016 г. / В.Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016. С. 147-154. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27560035/ (дата обращения: 05.05.2018)

6. Отмахова Е. С., Тимофеенко А. В. Этапы и способы организации коллективной работы над научной проблемой: видеолекция. Красноярск 2015 г. Регистрац.свидетельство №41337. Номер гос.регистрации 0321502701 . URL: http://elib.kspu.ru/document/13817 / (дата обращения 20.05.2018 г.)

7. Пряхин Ю. А., Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45 (1974), Наука Ленингр.отд., 111–112.

8. Табинова О. А., Тимофеенко А. В. О классификации паркетных многоугольников // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П.Астафьева, 2013, №1(23) 216—219. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_18916660_89654672.pdf/ (дата обращения: 16.05.2018)

9. Тимофеенко А. В. Отмахова Е. С. Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и студентов // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015. №3(33), С.79-82.

10. Тимофеенко А. В. О выпуклых правильногранных телах, некоторые грани которых лежат в одной плоскости: Тр. Участников междунар. школы-семинара по геометрии и анализу пам. Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, база отдыха Рост. Госуниверс. «Лиманчик», 5–11 сент. 2006 г.– Ростов-на-Дону: Изд. «ЦВВР», 2006. С. 92–93.

11. Тимофеенко А.В. О соединении несоставных многогранников // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 3. С. 165-209.

12. Тимофеенко А. В. К перечню выпуклых правильногранников// Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011,155—170.

13. Тимофеенко А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями, Чебышевский сб., 12:2(2011), 118–126. URL:http://www.mathnet.ru/links/726a8c2f4cbea68fc3c59a31b85a8824/cheb84.pdf (дата обращения:27.05.2018)

14. E.W.Weisstein. Johnson Solid. URL:http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html/ (дата обращения: 16.05.2018)

15. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. URL: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/ (дата обращения: 16.05.2018)