МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет — Институт математики, физики и информатики____________________________

(полное наименование института/факультета)

Кафедра — Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания____________________________

(полное наименование кафедры)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания_____

(полное наименование кафедры)

______________ ___В. Р. Майер___

(подпись) (И. О. Фамилия)

«____________» _________________________2018 г.

Направление подготовки ________44.03.01 Педагогическое образование____________________

(код направления подготовки)

Профиль ________________________Математика__________________________

(наименование профиля для бакалавриата)

Выпускная квалификационная работа

Использование компьютерной анимации при обучении тригонометрии в 10 классе

Выполнили студенты группы _______ _41_________

______Т. С. Малышенко_______ _____________________

Форма обучения _______Очная_______

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., профессор
С.В. Ларин__________ _____________________

(подпись, дата)

Дата защиты _____________________

Оценка _____________________

Красноярск 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В настоящее время тригонометрия одна из самых важных и сложных тем в школьном курсе математики.

Перед учителем стоит задача – привить ребенку понимание материала, а не просто заучивание. В школьном курсе математики в разные годы использовались разные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной окружности.

Большие трудности при изучении темы в школьном курсе возникают из-за несоответствия между достаточно большим объемом содержания и относительно небольшим количеством часов, выделенным на изучение данной темы. Помимо этого ученикам сложно перейти от пониманиятригонометрических функций через отношения сторон прямоугольного треугольника к определению с помощью числовой окружности.

Цель исследования состоит в разработке методических рекомендаций по применению компьютерной анимации в среде GeoGebraкак средства совершенствования процесса обучения тригонометрии учащихся 10-11 класса.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование в обучении тригонометрии компьютерной анимации.

Предмет исследования: компьютерное сопровождение обучения тригонометрии с использованием динамической среды GeoGebra.

Гипотеза исследования:

Опора на анимационные возможности среды «GeoGebra» при обучении тригонометрии в школьном курсе математики повышает интерес учащихся к изучаемому предмету,уровень понимания и усвоения материала.

Для достижения цели исследования были поставлены следующие **задачи**:

1) проанализировать содержание школьного учебного материала по тригонометрии, а также других учебно-методических пособий, с точки зрения эффективности подготовки обучающихся на уроках и во внеурочное время решению всех типов тригонометрических заданий;

2) изучить динамические и вычислительные возможности системы «GeoGebra» с точки зрения использования их при изучении тригонометрии;

3) разработать методические рекомендации по изучению темы с использованием анимационной средыGeoGebra;

4) подготовить компьютерное сопровождение для школьного курса тригонометрии.

В ходе работы применялись различные **методы исследования**, среди которых анализ научной и учебно-методической литературы по проблеме исследования; анализ учебников и учебно-методических пособий по математике; создание дидактического материала.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка.

Глава 1. Психолого-педагогические основы использования анимационных возможностей среды GeoGebra в обучении математике

Глава 2. Анализ школьных учебников по тригонометрии с целью дополнения учебного материала анимационными рисунками

Глава 3. Методическая разработка по тригонометрии с использованием анимационных рисунков в качестве дидактического материала

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, сформулирована гипотеза.

В первой главе мы рассматриваем психологические предпосылки формирования профессиональных знаний, навыков, умений,условия овладения новыми умственными действиями и установление связей между различными элементами знания.

Во второй главе мы определили место тригонометрии в ШКМ, провели анализ наиболее популярных учебников.

В третьей главе, мы на доступном школьнику языке, последовательно рассматриваем понятия «числовая прямая» и «числовая окружность» (как окружность единичного радиуса с намотанной на нее числовой прямой),синус и косинусданного числа,тангенс и котангенс.. Функции y=sinx, y=cosx, их свойства и графики. Функции y=tgx, y=ctgx, их свойства и графики.

В заключении подведены итоги работы, охарактеризованы основные результаты, сделаны выводы, обозначены перспективы дальнейшего исследования рассматриваемой проблемы.

Практическая значимость работы заключается в том, что она может быть использована студентами как методическая разработка по этой теме, а материалы могут быть использованы учителями в практической работе.

Глава 1. Психолого-педагогические основы использования анимационных возможностей среды GeoGebra в обучении математике.

В XXI веке процесс информатизации стремительно движется вперед. Развитие информационных технологий открывает новые возможности в сфере образования: позволяет внедрять новые программы обучения, организовать учебный процесс в соответствии с современными условиями и особенностями общегоразвития детей и их психики. Почти не осталось образовательных учреждений, которые не использовали бы компьютерные технологиив той или иной форме.

Одним из наиболее распространенных примеров таких технологий является анимация. На уроках математики учителя отдают предпочтение программам, которые соединяют в себе многообразие инструментов для построения и наиболее живого представления анимации. Среди таких программ Живая математика, GeoGebra, Maple.

Использование программы GeoGebra на уроках математики позволяет улучшить качество усвоения материал, повысить увлеченность и интерес обучающихся. Возможности динамической среды GeoGebra позволяют использовать качественный анимационный и иллюстративный материал, вовлекающий весь массив чувственного восприятия учеников, начиная от зрительных образов заканчивая образами мышления и воображения. За счет многочисленных программных инструментов для работы с материалом в среде GeoGebra, ученик может самостоятельно изучать материал и совершенствовать свои навыки, что способствует формированию качественного нового уровня усвоения и запоминания пройденного.

Психолого-педагогические аспекты использования динамической среды GeoGebra при обучении математике состоят в следующем:

- реализуется наглядный принцип обучения;

- повышается уровень познавательной деятельности;

- возрастает мотивация;

- создается творческая атмосфера;
- способствуетразвитию образного и логического мышления;
- развиваются навыки работы с информацией.

Использование анимационныхвозможностей среды GeoGebra на уроках математики повышает продуктивность учебно-воспитательного процесса в том случае, если учитель представляет и понимает психологические основы их применения.

Золотое правило дидактики Я.А. Коменского – наглядность, требует максимального воздействия на зрение, слух, внимание и воображение, и другие аспекты чувственного восприятия. GeoGebra предоставляет широкие возможности для воплощения этого правила на уроках математики.

Процесс обучения на уроках математики начинается с восприятия. Выделяют следующие виды восприятия информации:

- визуальная система;
- аудиальная система;
- кинестетическая система, основанная на ощущениях и чувствах.

Из психологии известно, что лучше в памяти сохраняется информация, полученная с помощью визуальной системы, чем информация полученная с помощью аудиальной системы. По данным исследования, которое показывает зависимость между способом восприятия информации и способностью восстановить полученные знания через какое-либо время, наибольшая степеньусвоения материала достигалось при совместном звуковом и зрительном воздействиях.

На данный момент в школах главным источником информации остается речь учителя. Поэтому следует внедрять в образовательный процесс больше зрительных средств подачи информации. Тем самым учитель сможет повысить качество восприятия и усвоения материала.

Анимацияв средеGeoGebra способствует лучшему запоминанию приобретенных знаний, помогает выстроить алгоритм построения, систематизировать изученный материал. Динамическая среда GeoGebra обладает обширным набором технических возможностей для выразительного представления информации при сопровождении учебного материала на уроке. Новизна, динамичность объекта, необычайность среды GeoGebra способствуют привлечению и сохранению внимания обучающихся, развивают воображение и память.

Динамическая среда GeoGebra должна не только изредка дополнять процесс обучения математике, а стать полноценной составляющей образовательного процесса, значительно повышающей его эффективность.

Глава 2. Анализ школьных учебников по тригонометрии с целью дополнения учебного материала анимационными рисунками.

2.1. Роль и место тригонометрических уравнений и неравенств в ШКМ

Тригонометрия – одна из главных и самых важных дисциплин, входящих в школьную программу по математике. В современном школьном курсе алгебры и начал анализа на изучение тригонометрических функций и уравнений выделяется большое количество внимания и времени.

Изучение тригонометрических функций в школе можно разделить на два главных этапа:

- Первое ознакомление с тригонометрическими функциями числового аргумента в курсе геометрии в 8-9 классах.

- Расширение и упорядочивание знаний о тригонометрических функциях в курсе алгебры и начал анализа в 10-11 классах.

Первое знакомство с тригонометрией происходит во время изучения планиметрии перед теоремой Пифагора или после нее. Учеников обучают решать треугольники с помощью тригонометрических выражений, в ходе этого обучения вырабатываются основные навыки по работе с таблицами тригонометрических функций. Учеников знакомят с определениями синуса, косинуса и тангенса острого углапрямоугольного треугольника. На начальных этапах ученики изучают тригонометрические выражения лишь как зависимости, без доказательства и определения этих зависимостей как функций.

Зависимость синуса и косинуса от изменения угла выводится на основе свойств наклонной. Из-за абстрактности данных понятий в контексте курса геометрии, ученики усваивают их недостаточно хорошо. Более серьезные сложности возникают при переходе к аргументу, большему 90^o. А возникают они, потому что мы определяли тригонометрические функции с помощью отношения сторон прямоугольного треугольника, ав прямоугольном треугольнике невозможно наличие угла с градусной мерой большей 90.

Чтобы разъяснить эту ситуацию, уже в этой части необходимо рассмотреть окружность, и это явится профилактической работой для определения в последующем тригонометрических функций числового аргумента с помощью окружности в курсе алгебры и начал математического анализа. Соответственно тригонометрические функции вводятся через производящую окружность. Происходит плавный переход к рассмотрению тригонометрических функций любого аргумента, который выражен в радианах, и соотношений между ними. Ученики учатся построению графиков тригонометрических функций, и изучают их различные свойства.

Знакомясь с тригонометрическими функциями, ученики узнают все больше и разбираются все лучше в сути понятия самой функции. Приходит осознание того, что функция – это зависимость между любыми множествами объектов, независимо от природы этих объектов, главное чтобы каждому значению аргумента соответствовало единственное значение функции.

Стоит отметить ключевые цели изучения тригонометрических функций числового аргумента:

1. Знакомство учеников с новым видом функций
2. Улучшение вычислительных навыков
3. Яркая демонстрация свойств функции (например, периодичность)
4. Формирование практических связей с другими предметами (например, изучать колебания маятника без тригонометрических функций невозможно).

5. Тренировка логического и исследовательского мышления (многочисленные необходимые неалгебраические преобразования).

У изучения тригонометрических функций в школе есть свои особенности. До изучения самих тригонометрических функций, ученики работали с функциями $у = f(x)$, где x и y – действительные числа. А теперь угол соответствует числу, и это довольно непривычно для учеников. К тому же до этого функции задавались формулами, где было ясно какие действия нужно проводить со значением аргумента, чтобы получить значение функции. Теперь же ученики встречаются с функциями, заданными графически или таблично.

2.2. Содержание и анализ материала по тригонометрии в действующих школьных учебниках

Проанализируем те учебники, которые наиболее распространены в общеобразовательных школах, а именно учебники:

1. Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова, М.И.ШабунинГ. Алгебра и начала математического анализа 10

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
Глава 8. Тригонометрические формулы			
1	Радианная мера угла	1	1
2	Поворот точки вокруг начала координат	2	2
3	Определение синуса косинуса и тангенса угла	2	2
4	Знаки синуса, косинуса и тангенса	1	1
5	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	2
6	Тригонометрические тождества	2	3
7	Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$	1	1
8	Формулы сложения	2	3
9	Синус, косинус и тангенс двойного угла	1	1
10	Синус, косинус половинного угла	1	1
11	Формулы приведения	2	2
12	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов.	1	2
13	Произведение синусов и косинусов	-	1
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	1
	Контрольная работа	1	1
Глава 9. Тригонометрические уравнения			
1	Уравнение $\cos x = a$	3	3
2	Уравнение $\sin x = a$	3	3
3	Уравнение $\tan x = a$	2	2
4	Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные и линейные уравнения	3	4
5	Методы замены неизвестного и разложения	2	3

	на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения		
6	Системы тригонометрических уравнений	-	2
7	Тригонометрические неравенства	-	2
	Урок обобщения и систематизации знаний	1	1
	Контрольная работа	1	1
Общее количество часов		**35**	**40**

В 8 главе основной задачей на базовом уровне является формирование понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса числа; применениеформул тригонометрии для вычисления значений тригонометрических функций и выполнения преобразований тригонометрических выражений; решение простейших тригонометрическихуравнения $sinx = a$, $cosx = a$ при a=1, -1, 0.

Рассматривая определения синуса и косинуса действительного числа a, естественно решить самые простые уравнения, в которых требуется найти число a, если синус или косинус его известен, например уравнения $sina = 0$, $cos\,a = 1$ и т. п. Поскольку для обозначения неизвестного по традиции используется буква x, то эти уравнения записывают как обычно: $sinx = 0$, $cosx = 1$ и т. п. Решения этих уравнений находятся с помощью единичной окружности.

В 9 главе стоит следующая задача — сформировать умение решать простейшие тригонометрические уравнения; ознакомить с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений. Сформировать понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа; научить решать тригонометрические уравнения и системы тригонометрических уравнений, используя различные приемы решения; ознакомить с приемами решения тригонометрических неравенств. Как и при решении алгебраических, показательных и логарифмических уравнений, решение тригонометрических уравнений путем различных преобразований сводится к решению простейших: $cosx = a, sinx = a, tgx = a.$

На профильном уровне дополнительно изучаются однородные (первой и второй степеней) уравнения относительно $sinx$ и $cosx$, а также сводящиеся к однородным уравнениям. При этом используется метод введения вспомогательного угла.

При углубленном изучении рассматривается метод предварительной оценки левой и правой частей уравнения, который в ряде случаев позволяет легко найти его корни или установить, что их нет.

На профильном уровне рассматриваются тригонометрические уравнения, для решения которых необходимо применение нескольких методов. Показывается анализ уравнения не по неизвестному, а по значениям синуса и косинуса неизвестного, что часто сужает поиск корней уравнения. Также показывается метод объединения серий корней тригонометрических уравнений. Разбираются подходы к решению несложных систем тригонометрических уравнений. Рассматриваются простейшие тригонометрические неравенства, которые решаются с помощью единичной окружности.

<u>2. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11</u>

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов		
Глава V. Тригонометрические формулы				
21	Радианная мера угла	1	1	1
22	Поворот точки вокруг начала координат	2	2	2
23	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2	2	2
24	Знаки синуса, косинуса и тангенса	1	1	1
25	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2	2	2
26	Тригонометрические тождества	3	2	3
27	синус, косинус и тангенс углов αи $-\alpha$	1	1	1
28	Формулы сложения	3	2	3
29	Синус, косинус и тангенс двойного угла	2	2	2
30	Синус, косинус и тангенс половинного угла	-	-	1
31	Формулы приведения	2	2	2

32	Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	-	2	2
	Уроки обобщения и систематизации знаний	1	1	2
	Контрольная работа	1	-	-
	Контрольная работа	-	1	1
Глава VI. Тригонометрические уравнения				
33	Уравнение cos x = a	3	2	3
34	Уравнение sin x = a	3	3	3
35	Уравнение tg x = a	2	2	3
36	Решение тригонометрических уравнений	4	3	5
37	Примеры решения простейших тригонометрических неравенств	-	1	2
	Уроки обобщения и систематизации знаний	2	1	2
	Контрольная работа	1	-	-
	Контрольная работа	-	1	1
Общее количество часов		**36**	**34**	**46**

Основная цель 5 главы — сформировать понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса числа; научить применять формулы тригонометрии для вычисления значенийтригонометрических функций и выполнения преобразований тригонометрических выражений; научить решать простейшие тригонометрические уравнения $sinx = a$, $cosx =$ апри а = 1, -1, 0.

Основная цель 6 главы— сформировать умение решать простейшие тригонометрические уравнения; ознакомить с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений. Как и при решении алгебраических, показательных и логарифмических уравнений, решение тригонометрических уравнений путем различных преобразований сводится к решению простейших: $cosx = a$, $sinx = a$, $tgx = a$.Рассмотрение простейших уравнений начинается с уравнения $cosx = a$, так как формула его корней проще, чем формула корней уравнения $sin\,x = a$ (в их записи часто используется необычный для учащихся указатель знака (—1)). Решение более сложных тригонометрических уравнений, когда выполняются алгебраические и тригонометрические преобразования, сводится к решению простейших.

Рассматриваются следующие типы тригонометрических уравнений: линейные относительно $sinx$, $cosx$ или tgx; сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного; сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители.

3. А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлиев, С. И. ШварцбурдАлгебра и начала математического анализа 10-11.

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов		
§1. Тригонометрические функции числового аргумента				
1	Синус, косинус, тангенс и котангенс(повторение)	2	2	3
2	Тригонометрические функции и их графики	2	3	4
	Контрольная работа	1	1	-
	Контрольная работа	-	-	1
§3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств				
8	Арксинус, арккосинус, арктангенс	2	2	3
9	Решение простейших тригонометрических уравнений	2	3	2
10	Решение простейших тригонометрических неравенств	2	2	2
11	Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений	4	5	5
	Контрольная работа	1	1	-
	Контрольная работа	-	-	1
Общее количество часов		**16**	**19**	**21**

Задачи первого параграфа: расширить и закрепить знания и умения, связанные с тождественными преобразованиями тригонометрических выражений; изучить свойства тригонометрических функций и познакомить учащихся с их графиками.

Изучение темы начинается с вводного повторения, в ходе которого напоминаются основные формулы тригонометрии, известные из курса алгебры, и выводятся некоторые новые формулы

Особое внимание следует уделить работе с единичной окружностью. Она становится основой для определения синуса и косинуса числового аргумента и используется далее для вывода свойств тригонометрических функций и решения тригонометрических уравнений.

Систематизируются сведения о функциях и графиках, вводятся новые понятия, связанные с исследованием функций (экстремумы, периодичность), и общая схема исследования функций. В соответствии с этой общей схемой проводится исследование функций синус, косинус, тангенс и строятся их графики.

В следующем параграфе происходит формирование умения решать простейшие тригонометрические уравнения и ознакомление с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений.

Решение простейших тригонометрических уравнений основывается на изученных свойствах тригонометрических функций. При этом целесообразно широко использовать графические иллюстрации с помощью единичной окружности. Отдельного внимания заслуживают уравнения вида $sin\,x = 1$, $cos\,x = 0$ и т. п. Их решение нецелесообразно сводить к применению общих формул.

Отработка каких-либо специальных приемов решения более сложных тригонометрических уравнений не предусматривается. Достаточно рассмотреть отдельные примеры решения таких уравнений, подчеркивая общую идею решения: приведение уравнения к виду, содержащему лишь одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента, с последующей заменой.

Материал, касающийся тригонометрических неравенств и систем уравнений, не является обязательным. Как и в предыдущей теме, предполагается возможность использования справочных материалов.

4. С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников,А. В. Шевкин.

Алгебра и начала математического анализа 10-11

Номер пункта	Содержание материала	Количество часов			
§7. Синус и косинус угла					
1	Понятие угла	1	1	1	1
2	Радианная мера угла	1	1	1	1
3	Определение синуса и косинуса угла	1	1	1	1
4	Основные формулы для синуса и косинуса	2	2	2	2
5	Арксинус	1	1	1	2
6	Арккосинус	1	1	1	2
7	Примеры использования арксинуса и арккосинуса	-	-	-	1
8	Формулы для арксинуса и арккосинуса	-	-	-	1
§8. Тангенс и котангенс					
1	Определение тангенса и котангенса угла	1	1	1	1
2	Основные формулы для тангенса и котангенса	1	1	2	2
3	Арктангенс	1	1	1	2
4	Арккотангенс	-	-	1	2
5	Примеры использования арктангенса и арккотангенса	-	-	-	1
6	Формулы для арктангенса и арккотангенса	-	-	-	1
	Контрольная работа	1	1	1	1
§9. Формулы сложения					
1	Косинус разности и суммы двух углов	1	2	2	2
2	Формулы для дополнительных углов	1	1	1	1
3	Синус суммы и синус разности двух углов	1	2	2	2
4	Сумма и разность синусов и косинусов	1	2	2	2
5	Формулы для двойных и половинных углов	1	1	2	2
6	Произведение синусов и косинусов	1	1	1	2
7	Формулы для тангенсов	1	1	1	2
§10. Тригонометрические функции числового аргумента					
1	Функции $y = \sin x$	1	2	2	2
2	Функции $y = \cos x$	1	2	2	2
3	Функция $y = \tan x$	1	2	2	2
4	Функция $y = \cot x$	1	1	2	2
	Контрольная работа	1	1	1	1

§11. Тригонометрические уравнения и неравенства					
1	Простейшие тригонометрические уравнения	2	2	2	2
2	Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестной	1	2	2	3
3	Применение основных тригонометрических формул для решения уравнений	1	2	2	2
4	Однородные уравнения	1	1	1	1
5	Простейшие неравенства для синуса и косинуса	-	-	1	1
6	Простейшие неравенства для тангенса и котангенса	-	-	1	1
7	Неравенства, сводящиеся к простейшимзаменой неизвестных	-	-	1	2
8	Введенке вспомогательного угла	-	-	1	2
9	Заменанеизвестного$t = \sin x + \cos x$	-	-	-	1
	Контрольная работа	-	1	1	1
Общее количество часов		**28**	**33**	**45**	**57**

Основная цель 7 главы — освоить понятия синуса и косинуса произвольного угла, изучить свойства функций угла $sin\alpha$: $sin\alpha$ и $cos\alpha$.

Используя язык механики, вводится понятие угла как результата поворота вектора. Затем вводятся его градусная и радианная меры. С использованием единичной окружности вводятся понятия синуса и косинуса угла. Изучаются свойства функций $sin\alpha$ и $cos\alpha$ как функций угла α, доказываются основные формулы для них. Вводятся понятия арксинуса и арккосинуса числа и с их помощью решаются задачи на нахождение всех углов, для каждого из которых $sin\alpha$ (или $cos\alpha$) равен (больше или меньше) некоторому числу. Выводятся формулы для арксинуса и арккосинуса.

Основная цель 8 главы — освоить понятия тангенса и котангенса произвольного угла, изучить свойства функций угла: $tg\alpha$ и $ctg\alpha$. Тангенс и котангенс угла α определяются как с помощью отношений $sin\alpha$и $cos\alpha$, так и с помощью осей тангенса и котангенса. Изучаются свойства функций $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ как функций угла α, доказываются основные формулы для них.

Вводятся понятия арктангенса и арккотангенса числа с их помощью решаются задачи на нахождение всех углов, для каждого из которых $tg\alpha$ (или $ctg\alpha$) равен (больше или меньше) некоторого числа. Выводятся формулы для арктангенса и арккотангенса.

Основная цель 9 главы— освоить формулы косинуса и синуса суммы и разности двух углов, выработать умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с использованием выведенных формул.

Сначала с помощью скалярного произведения векторов доказывается формула косинуса разности двух углов. Затем с помощью свойств синуса и косинуса угла и доказанной формулы выводятся все перечисленные формулы.

Используя доказанные формулы, выводятся формулы для синусов и косинусов двойных и половинных углов, а также для произведения синусов и косинусов углов. Наконец, выводятся формулы для тангенса суммы (разности) двух углов тангенса двойного и половинного углов, для выражения синуса, косинуса и тангенса угла через тангенс половинного угла.

Основная цель 10 главы — изучить свойства основных тригонометрических функций и их графиков.

Сначала говорится о том, что хотя функция может выражать зависимость между разными физическими величинами, но в математике принято рассматривать функции$y = f(x)$как функции числа. Поэтому здесь и рассматриваются тригонометрические функции числового аргумента, их основные свойства. С использованием свойств тригонометрических функций строятся их графики.

При изучении этой темы вводится понятие периодической функции и ее главного периода, доказывается, что главный период функций $y = sinx$ и $y = cosx$ есть число 2π, а главный период функций $y = tgx$ и $y = ctgx$ есть число π.

Основная цель 11 главы — сформировать умение решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Сначала с опорой на умение решать задачи на нахождение всех углов x таких, что $f(x) = a$, где $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций $(sinx, cosx, tgx, ctgx)$, рассматривается решение простейших тригонометрических уравнений. Затем рассматриваются уравнения, которые (после введения нового неизвестного t и решения получившегося рационального уравнения относительно t) сводятся к решению простейшего тригонометрического уравнения.

Рассматриваются способы решения тригонометрических уравнений с помощью основных тригонометрических формул и, наконец, рассматриваются однородные тригонометрические уравнения.

С опорой на умение решать задачи на нахождение всех углов x таких, что $f(x) > a$, или $f(x) < a$, где $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, рассматривается решение простейших тригонометрических неравенств.

Затем рассматриваются неравенства, которые (после введения нового неизвестного t и решения получившегося рационального неравенства относительно t) сводятся к решению простейших тригонометрических неравенств.

Рассматриваются специальные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств введением вспомогательного угла и заменой неизвестного $t = sinx + cosx$.

Глава 3. Методическая разработка по тригонометрии с использованием анимационных рисунков в качестве дидактического материала

Применение компьютерных технологийдает учителю преимущества в обучении школьников. Анимационно-геометрический метод, описанный Лариным С.В.,демонстрирует возможности дополнения курса тригонометрии рисунками GeoGebra, которые благодаря анимациистановятся «живыми». Можно с помощью этого метода оживить процесс изучения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, числовой окружности, периода функции и др. Такой нестандартный подход способствует лучшему усвоению материала.

В школьном курсе математики изучение тригонометрии в 10 классе преследует цель освоения понятия синуса и косинуса произвольного угла, свойств основных тригонометрических функций и их графиков.

В 10 классе учащиеся должны хорошо освоить такие понятия, как единичный круг, синус, косинус, тангенс, котангенс,радианная мера угла, формулы приведения, формулы удвоения и деления аргумента, формулы преобразования тригонометрических функций в сумму, формулы сложения, период функции.

Отработка умений и закрепление понятий может происходить с помощью среды GeoGebra. Задача учителя на уроках заключается в создании анимационного рисунка, с помощью которого ученики смогут увидеть и понять изучаемый материал. Опираясь на анимационный чертеж под руководством учителя, обучающиеся смогут сформулировать соответствующие свойства и правила.

Основным понятием тригонометрии является понятие числовой окружности. Нами созданы живые рисунки, демонстрирующие процесс прохождения заданного расстояния по окружности – процесс наматывания данного отрезка на окружность. Более того, этот процесс положен в основу непрерывного вычерчивания графиков тригонометрических функций.

В предложенном дидактическом материале мы последовательно рассматриваем понятия «числовая прямая» и «числовая окружность» (как окружность единичного радиуса с намотанной на нее числовой прямой), определение и построение синуса и косинуса данного числа, строим живые рисунки, на которых вычерчиваются графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Глядя на графики, подмечаются, а затем доказываются свойства функций. Рассматриваются примеры сравнений синусов и косинусов конкретных чисел. На базе геометрического моделирования операций над числами, исходя из графика функции $y = \sin x$, строятся графики функций $y = k \cdot \sin x$, $y = \sin kx$, $y = \sin x + b$, $y = \sin(x + b)$, а затем, как следствие, график гармонического колебания и моделируется само гармоническое колебание. Рассматриваются функции $y = tgx$, $y = ctgx$ и строятся живые рисунки по вычерчиванию графиков этих функций.

Изложение материала сопровождается рисунками, выполненными в среде GeoGebra, с описанием построений. Каждый рисунок в тексте имеет свой живой аналог.

Наибольший обучающий эффект достигается, когда ученик самостоятельно изготавливает живой чертеж, демонстрирующий рассматриваемое математическое свойство.

3.1. Числовая прямая и числовая окружность

Напомним определение основного опорного понятия.

Числовой прямой называется прямая с выделенной на ней точкой O, обозначающей начало отсчета, с выбранным положительным направлением (положительным лучом с началом в начале отсчета) и единичным отрезком OE на положительном луче.

Будем считать, что точка O начисловой прямой изображает число 0, а точка E – число 1. Появляется возможность всякой точке M числовой прямой однозначно сопоставить некоторое действительное число – длину отрезка OM, если M и E располагаются по одну сторону от точки O, и число, противоположное длине отрезка OM – в противном случае. С другой стороны, для любого действительного числа x от начальной точки O можно отложить отрезок длины $|x|$ в направлении, указанном знаком числа x, и однозначно получить точку M. Если точка M на числовой прямой соответствует числу x, то это число называют *координатой* точки M и пишут: $M(x)$, читается: «точка M с координатой x». Это взаимно однозначное соответствие между точками числовой прямой и действительными числами приводит к тому, что мы точку называем числом, а число – точкой, и говорим, например, что точка 2 принадлежит отрезку $[1,3]$.

Возьмем теперь окружность единичного радиуса и намотаем на нее числовую прямую следующим образом. Выберем на окружности точку E. Присоединим к ней числовую прямую в качестве касательной в точке E так, чтобы начало отсчета O на прямой совпало с точкой E. Теперь положительный луч намотаем на окружность противчасовой стрелки, а отрицательный луч – по часовой стрелке. Живой рисунок 1 демонстрирует процесс наматывания.

Окружность единичного радиуса с намотанной на нее числовой прямой называетсячисловой окружностью.

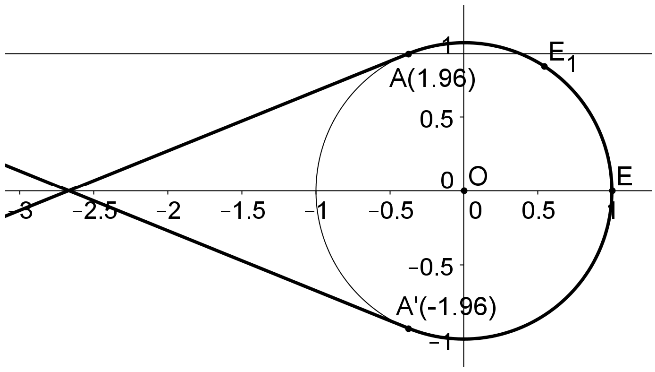

Рис. 1

Построение (рис. 1).

1) Строим точки $O=(0,0)$, $E=(1,0)$ и единичную окружность.

2) На единичной окружности отмечаем точку A и строим дугу EA. Выделяем ее толщиной и цветом (например, синим). На панели объектов появляется надпись, показывающая длину d построенной дуги. Передвигаем точку A так, чтобы длина дуги оказалась равной 1. Конец дуги (положение точки A) отмечаем точкой E_1. Таким образом, EE_1 – единичная дуга на единичной окружности. Тем самым единичная окружность превращается в числовую окружность.

3) Для наглядного представления о наматывании построим касательную к окружности с точкой касания A. Затем построим луч с началом в точке A, идущий по касательной и продолжающий дугу EA. Выделяем его толщиной и окрашиваем тем же цветом (синим), что и дугу. Прячем касательную. Наконец, отражаем от оси абсцисс построенную линию. Отраженную линию окрашиваем в красный цвет. Красная линия демонстрирует наматывание отрицательного луча на единичную окружность.

Если включить анимацию точки A, то можно наблюдать наматывание отрезка $[-2\pi,2\pi]$ на единичную окружность.

В результате наматывания числовой прямой на окружность каждая точка A окружности получит в соответствие некоторое действительное число t, которое называется *координатой* точки A на числовой окружности. При этом пишут: $A(t)$, читается: «точка A с координатой t».

Обратим внимание на особенность координат точек на окружности.Проделав от точки $A(t)$ в положительном или отрицательном направлении еще несколько полных кругов, мы опять попадем в ту же точку A. Поэтому всякое число $t+2\pi k$ при любом целом k также называется координатой точки A. При этом также пишут: $A(t+2\pi k)$, читается: точка A с координатой $t+2\pi k$. Таким образом, $A(t)=B(s)$ тогда и только тогда, когда $t-s=2\pi k$ при некотором целом k. Если же $0 \le t < 2\pi$, то координату t точки A называют *главной*.

Числовой окружности можно дать самостоятельное определение по аналогии с определением числовой прямой: *числовой окружностью называется окружность единичного радиуса, на которой выделена точка* E *– начало отсчета, задано положительное направление – против часовой стрелки и единичная дуга* EE_1 *, отложенная в положительном направлении, длина которой равна радиусу окружности, то есть единице*.

3.2. Синус и косинус данного числа

Рассмотрим некоторую точку M числовой окружности. Совокупность чисел, которые попадут в эту точку при наматывании оси абсцисс на единичную окружность, можно записать в виде $t_0 + 2\pi k$, где $t_0 \in [0,2\pi)$, $k \in Z$. Относительно прямоугольной системы координат положение точки M однозначно определяется прямоугольными координатами: $M = (a,b)$. Число a характеризует отклонение точки M от оси ординат, а число b характеризует отклонение точки M от оси абсцисс. Для любого числа $t = t_0 + 2\pi k$ число a называется *косинусом числа* t, а число b называется *синусом числа* t. Обозначается: $a = \cos t$, $b = \sin t$. Из этого определения следует, что $\cos t = \cos(t + 2\pi k)$, $\sin t = \sin(t + 2\pi k)$ для любого действительного числа t и любого целого k. Очевидно также, что точки $M(t)$ и $M(-t)$ имеют одинаковые абсциссы. Следовательно, $\cos t = \cos(-t)$. Ординаты точек $M(t)$ и $M(-t)$ противоположны: $\sin(-t) = -\sin t$.

Сопоставление каждому числу t числа $\sin t$ является функцией. По обыкновению независимая переменная обозначается буквой x, а зависимая – буквой y, поэтому функция обозначается $y = \sin x$. Аналогично появляется функция $y = \cos x$. Подмеченные выше свойства координат точек $M(t)$ и $M(-t)$ превращаются в свойства функций. Свойство $\cos x = \cos(-x)$ называется *четностью* функции $y = \cos x$, а свойство $\sin(-x) = -\sin x$ называется *нечетностью* функции $y = \sin x$.

Для сравнения синусов двух различных чисел можно использовать живой рисунок 65. Например, выясним, что больше, $\sin 72$ или $\sin 75$?

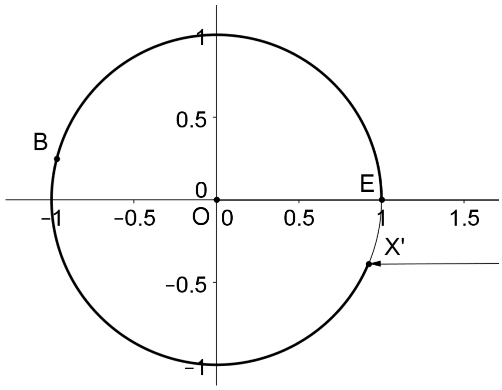

Рис. 2

Устанавливаем точку X в начало координат, в строку ввода записываем $A=(72{,}0)$ и задаем анимацию точки X. Наблюдаем наматывание отрезка OA, длина которого равна 72, на единичную окружность. В конце наматывания точка X' укажет положение числа 72 на единичной окружности. Чтобы пометить эту точку, на свободном месте ставим точку, а затем перемещаем ее в точку X'.

Чтобы точка X оказалась доступной, изменяем масштаб (вращением колесика мышки). Перемещаем точку X в начало координат, вводим точку $A=(75{,}0)$ и включаем анимацию точки X. В результате наматывания отрезка OA на единичную окружность получим новое положение точки X', указывающее теперь положение числа 75 на единичной окружности. В итоге видим, что $\sin 75 < \sin 72$ (рис. 2).

Заметим, что можно просто на отдельном чертеже построить точки $A=(72, \sin 72)$, $B=(75, \sin 75)$ и сравнить их отклонения от оси абсцисс. Еще проще с помощью компьютера найти числа $\sin 72 \approx 0.25$, $\sin 75 \approx -0.39$ и сравнить их. Но такое решение ничему новому не научит.

3.3. Синусоида

Пусть дано начало координат $O(0,0)$ и точка $X(x,0)$ оси абсцисс. Чтобы найти $\sin x$, нужно намотать отрезок OX на единичную окружность и найти ординату полученной на числовой окружности точки. На основе этого определения синуса числа x построим график функции $y = \sin x$. Этот график называется *синусоидой*.

Построение на базе рисунка 2 (рис. 3).

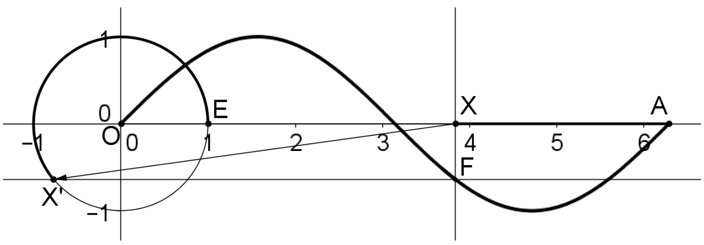

Рис. 70

1) Сначала строим живой рисунок 2. Затем строим точку $A = (2\pi,0)$.

2) Через точку X проводим вертикальную прямую, а через точку X' – горизонтальную прямую. Отмечаем точку F пересечения построенных прямых и заставляем ее оставлять след.

3) Задаем анимацию точки X и наблюдаем вычерчивание графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[0,2\pi)$.

Поскольку $\sin t = \sin(t + 2\pi k)$ для любого действительного числа t и любого целого k, то для продолжения графика функции вправо следует уже построенный участок сместить вправо на 2π. Выполним это построение (рис 71).

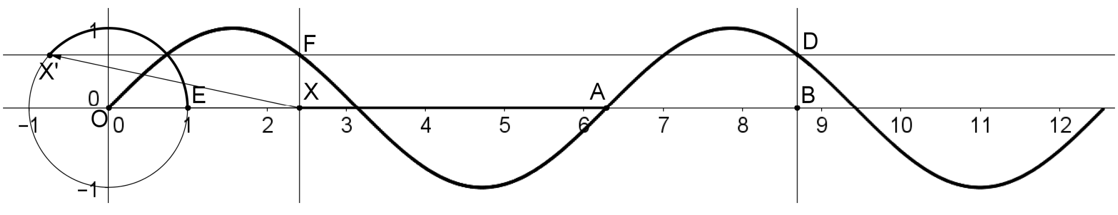

Рис. 4

4) Строим точку $B = (x(X) + 2\pi, 0)$.

5) Через точку B проводим вертикальную прямую и отмечаем точку D пересечения этой прямой сгоризонтальной прямой, проходящей через точку X' и заставляем ее оставлять след.

При включении анимации точки X точка D вычертит следующий участок синусоиды.

Аналогично строится продолжение графика функции влево.

Отмеченное выше свойство нечетности функции: $\sin(-x) = -\sin x$ геометрически превращается в свойство центральной симметричности синусоиды.

Приведем наиболее простое построение анимационного чертежа по вычерчиванию синусоиды.

Построение (рис. 5).

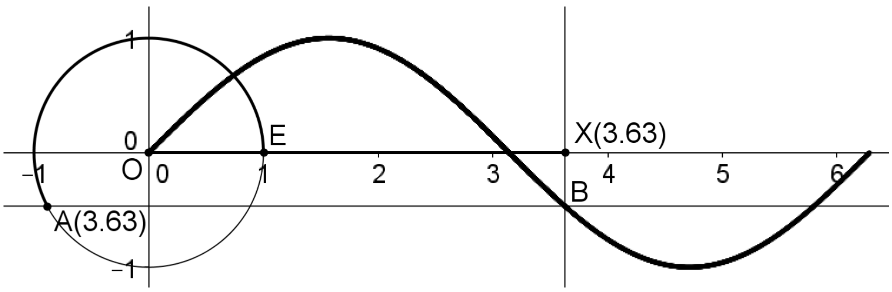

Рис. 5

1) Строим точки $O = (0,0)$, $E = (1,0)$ и единичную окружность.

2) На единичной окружности отмечаем точку A и строим дугу EA. Выделяем ее толщиной и (синим) цветом. На панели объектов появляется надпись, показывающая длину d построенной дуги.

3) Строим точку $X = (d, 0)$ и отрезок OX, который выделяем толщиной и тем же (синим) цветом.

4) Через точку X проводим вертикаль, а через точку A проводим горизонталь. Отмечаем точку B пересечения горизонтали и вертикали.

5) Заставляем точку B оставлять след (например, красного цвета) и включаем анимацию точки A. Наблюдаем наматывание отрезка OX на единичную окружность, результатом наматывания является дуга EA, и одновременно вычерчивание синусоиды на промежутке $[0,2\pi)$.

3.4. Свойства функции $y = \sin x$

Глядя на построенный график функции (рис. 71), сформулируем и математически докажем наблюдаемые на экране свойства функции $y = \sin x$.

1. *Область определения*. Поскольку любое действительное число можно увидеть в виде точки на единичной окружности и охарактеризовать декартовыми координатами, то для всякого действительного числа x существует $\sin x$. Следовательно, областью определения функции является множество R.

2. *Множество значений*. Вычерченный график подсказывает, что множеством значений функции является отрезок $[-1,1]$. Действительно, точки единичной окружности отстоят от оси абсцисс не более, чем на 1.

3. *Точки пересечения с осями координат*. На рисунке видим, что точки пересечения графика функции с осью абсцисс соответствуют числам вида $2\pi k$, где k – целое число. Это вытекает из того, что на числовой окружности точка будет лежать на оси абсцисс (будет иметь нулевое отклонение от оси абсцисс) тогда и только тогда, когда она будет соответствовать числу $2\pi k$.

Точка пересечения графика функции с осью ординат единственная – начало координат. Действительно, ось ординат имеет уравнение $x = 0$ и совместное рассмотрение этого уравнения с уравнением $y = \sin x$ дает единственное решение $x = 0$, $y = 0$, что соответствует началу координат.

4. *Точки минимума и максимума*. По графику видим, что наибольшим значением функции $y = \sin x$ является 1, а наименьшим -1. Это вытекает из того, что для точек единичной окружности наибольшее отклонение от оси абсцисс имеет точка с декартовыми координатами $(0,1)$, которая на числовой окружности изображает число вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, точки $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1)$ являются точками максимума функции $y = \sin x$. Точки единичной окружности, имеющие наибольшее отклонение от оси абсцисс в

отрицательном направлении, имеют декартовы координаты $(0,-1)$. На единичной окружности им соответствуют числа вида $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$. Таким образом, точки $(\frac{3\pi}{2}+2\pi k,-1)$ являются точками минимума функции $y=\sin x$.

5.*Промежутки возрастания и убывания*. На рисунке видим, что функция $y=\sin x$ на промежутке $[0,\frac{\pi}{2})$ возрастает, на промежутках $[\frac{\pi}{2},\pi)$, $[\pi,\frac{3}{2}\pi)$ убывает и на промежутке $[\frac{3}{2}\pi,2\pi)$ снова возрастает. Для доказательства этого свойства рассмотрим точку $A(x)$ начисловой окружности. По определению, $\sin x$ есть ордината этой точки. Видим, что для точек x дуги первой четверти $\sin x$ возрастает от 0 до 1, для точек x дуги второй четверти $\sin x$ убывает от 1 до 0, для точек x дуги третьей четверти $\sin x$ убывает от 0 до -1, для точек x дуги четвертой четверти $\sin x$ возрастает от -1 до 0. Это и доказывает свойство.

6. *Периодичность функции*. Непосредственно из определения синуса числа вытекает периодичность функции $y=\sin x$ с периодом 2π .

7. *Центральная симметричность графика функции*. Ее мы наблюдаем при непрерывном вычерчивании графика. Будучи записанной математически, это свойство представляет собой равенство $\sin x=-\sin(-x)$, или $\sin(-x)=-\sin x$. Это запись нечетности функции.

3.5. График гармонического колебания

Получим график гармонического колебания $y = c\sin(ax+b)$ с помощью преобразований графика синусоиды.

Построение (рис. 6).

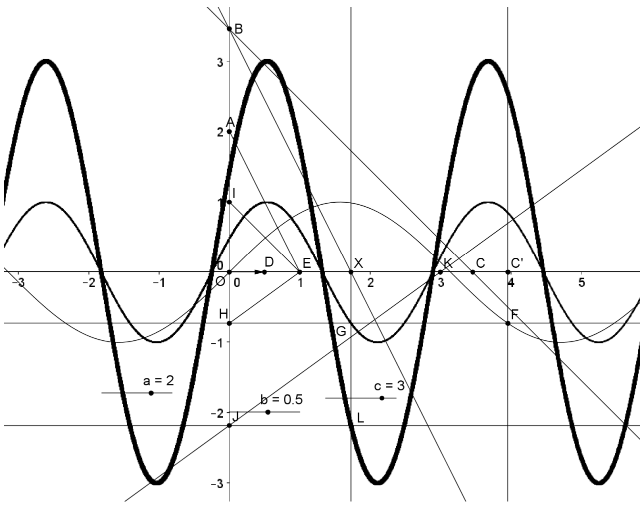

Рис. 6

1) Строим синусоиду $y = \sin(x)$ (тонкая линия).

2) Для параметров a, b, c строим ползунки и соответственно точки $A = (0, a)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$.

3) Строим текущую точку $X = (x, 0)$ и произведение ax, получаем точку $D = (ax, 0)$. Строим вертикаль через точку D и отмечаем точку F пересечения вертикали с синусоидой. Строим горизонталь через точку F и находим точку $G = (x, \sin(ax))$ пересечения горизонтали с вертикалью, проходящей через точку X. При анимации точки X точка G, оставляя след, будет вычерчивать график функции $y = \sin(ax)$ (линия средней толщины).

4)Строим график функции $y = \sin(ax+b)$. Для этого сначала строим сумму $ax+b$ (строим вектор $\overrightarrow{OB}$ и точку $D(ax, 0)$ переносим на вектор $\overrightarrow{OB}$, получаем точку D'). Затем через точку D' проводим вертикаль и находим точку H пересечения вертикали с синусоидой. Через H проводим горизонталь и отмечаем точки пересечения $I = (x, \sin(ax+b))$ и $J = (0, \sin(ax+b))$. При анимации точки X точка I, оставляя след, вычертит график функции $y = \sin(ax + b)$ (толстая линия).

5) Строим график функции $y = c\sin(ax + b)$. Для этого умножаем c (точка C) на $\sin(ax + b)$ (точка J). В результате умножения получаем точку K. Проводим через нее горизонталь и отмечаем точку L пересечения горизонтали с вертикалью, проходящей через точку X. При анимации точки X точка L, оставляя след, вычертит искомый график функции $y = c \cdot \sin(ax + b)$ (толстая линия).

3.6. Анимационное построение графика функции $y = \cos x$

Построение(рис. 7).

1) Строим единичную окружность и точку B на ней. Строим луч OB для обозначения угла $\alpha = \angle EOB$.

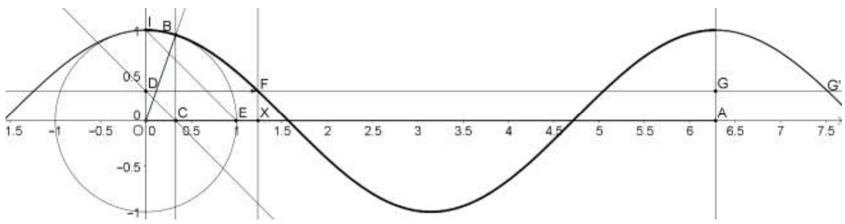

Рис. 7

2) Из точки B опускаем перпендикуляр на ось ординат и отмечаем основание C этого перпендикуляра. OC изображает $\cos\alpha$.

3) Переносим расстояние OC на ось ординат. Для этого соединяем отрезком единичные точки E и I, а затем через точку C проводим прямую, параллельную отрезку EI. Отмечаем точку D пересечения построенной прямой с осью ординат. Через точку D проводим горизонтальную прямую.

4) На оси абсцисс строим точку $A = (2\pi, 0)$, отрезок OA и на нем отмечаем точку X. Проводим через нее вертикальную прямую и отмечаем точку F пересечения построенной вертикали с горизонталью, проведенной через точку D. Заставляем точку F оставлять след.

5) Теперь точку X переносим в начало координат, точку B переносим в точку E и задаем анимацию точек X и B с одинаковыми параметрами анимации. Наблюдаем как точка F, оставляя след, вычерчивает график функции $y = \cos x$ на отрезке OA.

6) Для продолжения вычерченного графика через точку A проводим вертикаль к оси абсцисс и отмечаем на ней точку G пересечения построенной вертикали с горизонталью, проведенной через точку D.

7) Отмечаем вектор DF и переносим точку G на этот вектор. Получаем точку G', которую заставляем оставлять след. При включении анимации она будет вычерчивать продолжение графика.

Постройте анимационный чертеж для вычерчивания графика функции $y = \cos x$ на базе живого рисунка 2.

Глядя на рисунок 7, сформулируйте основные свойства функции $y = \cos x$.

3.7. Функции $y = tgx$ и $y = ctgx$

Для любого действительного числа x определим $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, молчаливо предполагая, что знаменатели отличны от нуля, то есть в первом случае $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, а во втором $x \neq \pi k$ для любого целого k.

Рассмотрим рисунок 8. Из подобия треугольников ΔOAB и ΔOCE выводим: $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{y(C)}{1} = y(C)$, где $y(C)$ обозначает ординату точки C. Равенство $tgx = y(C)$ сохраняется при положении точки $A(x)$. В силу этого обстоятельства прямая CE называется *линией тангенсов*. Аналогично строится *линия котангенсов*. Она проходит горизонтально через точку $(0,1)$.

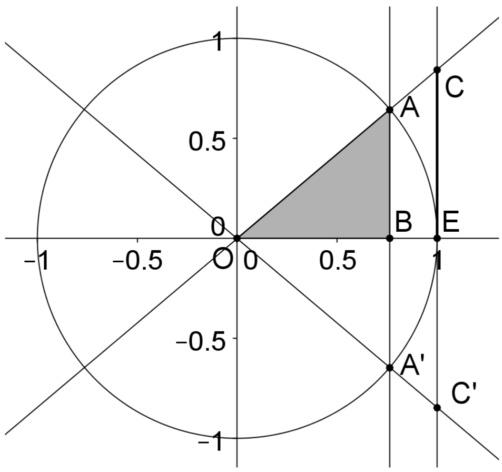

Рис. 8

На рисунке 80 видим, что $tg(x+\pi) = tgx$. Это означает, что график функции $y = tg(x+\pi)$ можно получить, если график функции $y = tgx$ передвинуть вдоль оси абсцисс влево на расстояние π. Одновременно это означает, что достаточно построить график функции $y = tgx$ когда $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, эта часть графика называется *тангенсоидой*, а затем тангенсоиду сдвигать вдоль оси абсцисс влево и вправо на величины, кратные π. Таким образом, график функции $y = tgx$ представляетсобой тангенсоиду и совокупность ее сдвигов. Кроме того, на рисунке 74 видим, что $tg(-x) = -tgx$. Это означает, что нижняя часть тангенсоиды симметрична ее верхней части относительно начала координат.Используя эти выводы, построим график функции $y = tgx$.

Построение(рис . 9).

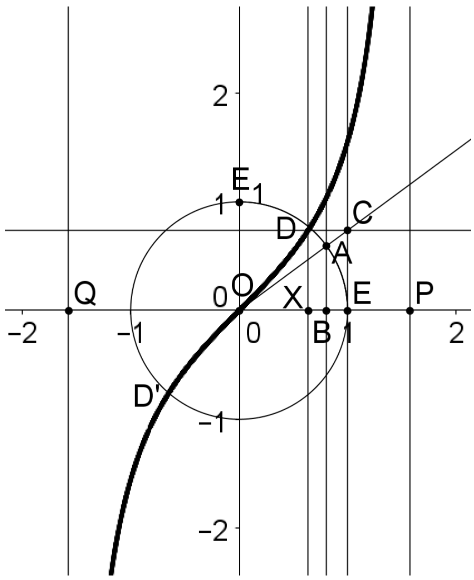

Рис. 9

1) Строим вспомогательные точки $O = (0,0)$, $E = (1,0)$, $E_1 = (0,1)$ и через точку E_1 проводим вертикаль (будущую линию тангенсов).

2) Проводим единичную окружность, отмечаем дугу EE_1 и на ней точку A, считая, что она изображает число x на числовой окружности. При анимации точки A она будет пробегать дугу EE_1. Проводим луч OA и отмечаем точку C пересечения луча с вертикалью, проведенной через точку E. Имеем: $tgx = y(C)$ (ордината точки C).

3) Отмечаем дугу EA, на панели объектов появляется длина d этой дуги.

4) Строим точку $X=(d,0)$, проводим через нее вертикаль и проектируем на нее точку C: через точку C проводим горизонталь и отмечаем точку D пересечения горизонтали с вертикалью, проведенной через точку X. Заставляем точку D оставлять след. При анимации точки A она будет вычерчивать верхнюю часть тангенсоиды.

5) Строим точку D' симметричную точке D относительно начала координат и заставляем ее оставлять след. При анимации точки A она будет вычерчивать нижнюю часть тангенсоиды.

Замечаем, что ветви тангенсоиды устремляются вверх и вниз «в бесконечность». Вместе с тем, точки тангенсоиды не покидают полосу, ограниченную вертикалями, проходящими через точки $P=(\frac{\pi}{2},0)$ и $Q=(-\frac{\pi}{2},0)$.

Сдвигая точки D и D' влево и вправо на расстояния, кратные π, будем получать новые точки, вычерчивающие новые тангенсоиды, составляющие график функции $y=tgx$.

Аналогично вычерчивается график функции $y=ctgx$ (рис. 10).

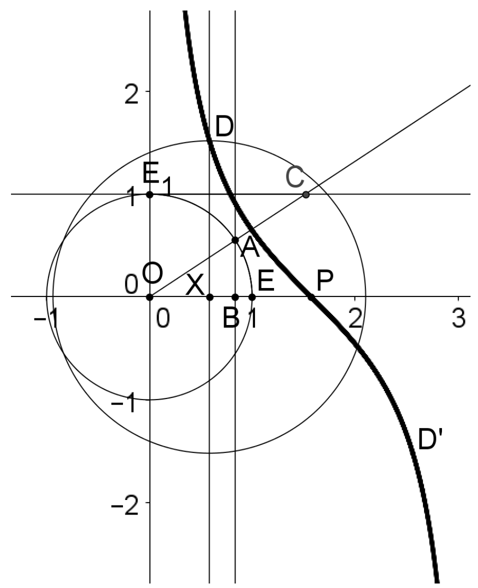

Рис. 10

Задания. 1. Глядя на соответствующий рисунок, сформулируйте основные свойства функций $y = tgx$ и $y = ctgx$.

2. Постройте график функции $y = tgx$ как результат деления двух функций.

3. Постройте график функции $y = ctgx$, используя соотношение $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$.

4. Постройте график функции $y = tgx$ на базе живого рисунка 65.

5. Постройте график функции $y = ctgx$ на основании формулы $ctgx = -tg(x - \dfrac{\pi}{2})$ (постройте тангенсоиду $y = tgx$, сдвиньте ее вдоль оси абсцисс вправо на $\dfrac{\pi}{2}$ и отразите от оси абсцисс).

Заключение

В рамках исследования была выдвинута гипотеза:*Опора на анимационные возможности среды «GeoGebra» при обучении тригонометрии в школьном курсе математики повышает интерес учащихся к изучаемому предмету,уровень понимания и усвоения материала.*

Данная гипотеза была основана на выявлении проблемы в организациипроцесса обучения тригонометрии с использованием системдинамической геометрии, при котором, учащиеся смогут активно развиватьсвоё мышление и совершенствовать свои знания, умения инавыки.

Целью данной выпускной работы является разработка компьютерногосопровождения школьного курса тригонометрии в среде GeoGebra на примере. Произведяизучение всей необходимой информации, мы определили содержание ведущих учебников алгебры и начала анализа 10-11 классов по тригонометрии. В третьей главе мы разработали дидактический материал курокам, для сопровождения их в GeoGebra.

Полученные знания станут существенной помощью при составлениииконспекта уроков по тригонометрии с сопровождениемGeoGebra.

Для достижения поставленной цели исследования, нами были решеныследующие задачи:

1) проанализировать содержание школьного учебного материала по тригонометрии, а также других учебно-методических пособий, с точки зрения эффективности подготовки обучающихся на уроках и во внеурочное время решению всех типов тригонометрических заданий;

2) изучить динамические и вычислительные возможности системы «GeoGebra» с точки зрения использования их при изучении тригонометрии;

3) разработать методические рекомендации по изучению темы с использованием анимационной средыGeoGebra;

4) подготовить компьютерное сопровождение для школьного курса тригонометрии.

Наши исследования и методические рекомендации относятся к изучению в школе наиболее трудного материала,относящегося к началам математического анализа. Мы обосновалицелесообразность использования компьютерной программы GeoGebra с целью увеличения наглядности. Продемонстрировали большие возможности использования среды GeoGebraдля учителей, студентов и учеников для самостоятельных исследований.

По теме ВКР опубликована статья [17]. Практика применения анимационного дидактического материала подтверждает выдвинутую гипотезу.

Библиографический список

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11[Текст] / Ш.А. Алимов // Учебник - Москва: Просвещение, 2001.

2. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /А.Н. Колмогоров// Учебник - Москва: Просвещение, 1999.

3. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /А.Г. Мордкович// Учебник- Москва: Мнемозина, 2003.

4. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Сост. Бурмистрова Т.А.

5. http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

6. С. В. Ларин. «Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики», Легион, г. Ростов-на-Дону, 2015

7. Джонассен Д.Х. Компьютеры как инструменты познания // Информатика и образование.

8. Официальный сайт программы GeoGebra. URL: http://www.geogebra.org/cms

9. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования

10. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко — Санкт-Петербург, Высшая школа, 2001 г

11. Введение в анализ и сферическая тригонометрия: А.А. Марков — Санкт-Петербург, Книга по Требованию, 2012 г.

12. Бескин, Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания [Текст] / Бескин Н.М. - Москва: Учпедгиз, 1950

13. Дорофеев, Г. Периодичность и не периодичность функций [Текст] / Дорофеев Г., Розов Н. //Квант. 1977- №1\

14. Земляков, А. Периодические функции [Текст] / Земляков А., Ивлев Б. // Квант. 1976-№12

15. Калинин, С.И. Задачи и упражнения по началам математического анализа [Текст] / Калинин С.И., Канин Е.С., Маянская Г.М., Ончукова Л.В., Подгорная И.И., Фалелеева С.А. - Киров: ВГПУ, 1997.

16. Крамор, В.С. Тригонометрические функции [Текст] / Крамор В.С., Михайлов П.А. - Москва: Просвещение, 1979.

17. Малышенко Т.С. Использование среды GeoGebra для открытия новых и доказательства известных тождеств в школьной математике. «Информационные технологии в математике и математическом образовании»Материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 15–16 ноября 2017 г.

18. Никольский, С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / С.М. Никольский. - М.: Просвещение, 2010.

19. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс / Ю.М. Колягин и др. - М.: Просвещение, 2014.