Оглавление

Введение

Актуальность. Элементы комбинаторики и теории вероятности в обязательном порядке входят как в содержание математической подготовки школьников, так и в содержание итоговой государственной аттестации выпускников общеобразовательных школ. Считается необходимым формирование у выпускника одной из важнейших способностей ума – способности представлять явления в разных комбинациях.

Без минимальной вероятностно-статистической грамотности трудно адекватно воспринимать социальную, политическую, экономическую информацию и принимать на ее основе обоснованные решения. Практически вся математика основана на комбинаторно-логических задачах. Кроме того, в современном образовании физика, химия, биология, весь комплекс социально-экономических наук реализуются на вероятностно-статистической базе. При изучении комбинаторики обогащаются представления учащихся о современной картине мира и методах его исследования.

О необходимости изучения в школе элементов комбинаторики говорили многие педагоги еще очень давно. Приведем цитату более чем столетней давности: «Приходилось слышать, что теория сочетаний и бином Ньютона предлагаются иногда как отделы, которые можно было бы сократить. Соглашаясь на другие сокращения, выскажусь решительно против сокращения теории сочетаний. Теория эта по особенному значению своему принадлежит к таким отделам, преподавание которых в гимназии следует непременно сохранить и поставить в лучшие условия. Теория сочетаний представляет средство для одной из важнейших способностей ума – способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому…» – писал П.А. Некрасов профессор Московского учебного округа в 1899 г. [Щербатых, 2008].

С 2003-2004 учебного года началось повсеместное преподавание в основной школе элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Изучение данного курса осуществляется в соответствии с письмом Министерства образования российской Федерации от 23.09.2003 г. «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы».

Основная цель изучения комбинаторики в школьном курсе математики заключается в формировании, так называемого, комбинаторного мышления у обучающегося. Развитое комбинаторное мышление позволяет обучающемуся: разумно организовывать перебор ограниченного числа данных; подсчитывать все возможные комбинации элементов, составленных по определенному правилу и др.

Однако анализ результатов итоговой государственной аттестации обучающихся по математике и наблюдения за реальной практикой их обучения математике показывают, что некоторые обучающиеся не обладают прочными знаниями в области комбинаторики и испытывают затруднения при решении комбинаторных задач.

Проблема исследования. Поскольку элементы комбинаторики не так давно стали обязательной составляющей школьного курса математики, то поиск наиболее результативных методик формирования у обучающихся предметных результатов в области комбинаторики остается одной из актуальных проблем школьного математического образования. Одной из таких методик обучения комбинаторике обучающихся 9 класса посвящена тема выпускной квалификационной работы.

Гипотеза исследования: если в систему математической подготовки включить специальный курс по выбору «Комбинаторика – это просто!», то это будет способствовать формированию у обучающихся предметных результатов в области комбинаторики.

Объект исследования: математическая подготовка обучающихся 9 кл.

Предмет исследования: дидактические условия обучения элементам комбинаторике учащихся 9 кл. в рамках курса по выбору «Комбинаторика – это просто!».

Цель исследования: методическая разработка курса по выбору «Комбинаторика – это просто!» для обучающихся 9 класса.

Задачи исследования:

1. Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.
2. Описать роль, место и значение элементов комбинаторики в математическом образовании школьников.
3. Охарактеризовать основные требования к проектированию и реализации программы курса по выбору в системе математической подготовки школьников.
4. Разработать методическое обеспечение для курса по выбору «Комбинаторика – это просто!».
5. Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

Для решения поставленных задач использовались следующие *методы исследования:* анализ специальной литературы, учебных программ, нормативных документов, учебников и учебных пособий; изучение и обобщение опыта учителей; наблюдение, экспериментальное обучение.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

Глава 1. Теоретические основы методики обучения курсу по выбору «Комбинаторика – это просто!»

1.1. Элементы комбинаторики в математическом образовании школьников

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (стохастика) присутствовали в образовательных программах школ России XIX – начала XX вв.

Одним из мотивирующих факторов введения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в среднюю школу является их связь с реальной жизнью. Именно поэтому практическая направленность обучения должна служить ориентиром при построении стохастической линии в общеобразовательной школе.

История обучения школьников элементам стохастики показывает, что первоначально практическая направленность в обучении стохастики стояла во главе угла, затем стали выделяться чисто теоретические аспекты этой дисциплины (учебник В.Я. Буняковского и др.). В утверждѐнных программах по математике 1914 г. указаны лишь чисто математические понятия стохастической составляющей в старшей школе.

Исторический опыт указал на существенную трудность, возникшую в результате введения стохастической составляющей в школьное обучение, – несбалансированное отражение еѐ профессионально-прикладного потенциала. Содержание материала раздела стохастики было оторвано от реальной жизни, поэтому многие учителя были за его изъятие из школьной программы. Элементы комбинаторики исчезли из школьных образовательных программ в 1960 г. Впоследствии, реформой 80-х годов, элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики вошли в программы профильных классов, в частности физико-математического и естественнонаучного, а также в факультативный курс изучения математики.

В 2004 г. утверждается федеральный компонент базисного учебного плана и примерные учебные планы для средней школы. Впоследствии утверждаются новые федеральные государственные образовательные стандарты начального общего, среднего общего и среднего (полного) общего образования. Отличительной особенностью этих стандартов является включение в школьные программы содержательной линии – «Анализ данных», предполагающей изучение элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

Согласно новым стандартам, новая линия пронизывает содержание математического материала на уровнях основной и средней (полной) школ. Изучение комбинаторики, теории вероятностей и статистики начинается с 5 класса и заканчивается в 11 классе.

Согласно ФГОС основного общего образования, утвержденному в 2010 году, обязательный минимум содержания образовательной программы по математике в рамках раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» в 9 классе включает следующие темы [36]:

- понятие о случайном опыте и случайном событии;
- частота случайного события;
- статистический подход к понятию вероятности;
- вероятности противоположных событий;
- достоверные и невозможные события;
- равновозможность событий;
- классическое определение вероятности;
- решение комбинаторных задач перебором вариантов;
- комбинаторное правило умножения;
- перестановки и факториал.

В результате изучения данного раздела математики в основной школе ученик 9 класса должен уметь решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций путем систематического перебора возможных вариантов и использованием правил сложения и умножения [36].

В последние годы появились новые школьные учебники, учебные пособия, как для основной, так и для старшей школы, в которых присутствует раздел «Элементы комбинаторики и теории вероятности». В частности, среди учебников и учебных пособий для средней школы (8-9 классы), содержащих комбинаторно-вероятностно-статистический материал, можно отметить следующие:

- Дорофеев Г.В. «Алгебра, 8»;
- Никольский С.М. и др. «Алгебра, 8»;
- Муравин Г.К., Муравин К.С., Муравина О.В. «Алгебра, 8»;
- Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Алгебра, 9» (повышенный уровень);
- Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Алгебра, 9» (базовый уровень);
- Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра, 9»;
- Дорофеев Г.В. «Алгебра, 9»;
- Виленкин Н.Я. «Алгебра, 9».

По результатам сравнительного анализа этих учебников, можно сделать следующие выводы:

1. В 8 классе изучают: что такое множество (элемент множества, подмножество, диаграммы Эйлера); операции над множествами. Знакомятся с комбинаторикой в следующем объеме: перебор вариантов, правило суммы, правило умножения. Решают комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а так же с использованием правил суммы и умножения.

2. В 9 классе рассматриваются такие понятия как: перестановки, размещения, сочетания, вероятность случайных событий.

К реализации содержания стохастической линии в действующих учебниках авторы подошли по–разному. В одних учебниках элементы стохастики включены отдельными параграфами. В других – в форме вкладышей, дополнительных глав к учебнику (таблица 1).

Таблица 1

Анализ содержания стохастической линии в школьных учебниках

№ п/п	Класс	Автор учебника	Наименование разделов и тем	Краткое содержание	Количество часов
1.	5 класс	Г.В.Дорофеев, И.Ф.Шарыгин, С.Б.Суворова, Е.А.Бунимович и др.	Случайные события	События: случайные; достоверные; невозможные; равновероятные. Задачи на определение вероятности наступления события	2
2.	5 класс	Виленкин Н.Я., Жохов В.И.,	Решение комбинаторных задач	Решение задач методом перебора возможных вариантов	5
3.	5класс	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович	Введение в вероятность. Достоверные, невозможные и случайные события. Комбинаторные задачи	Задачи на определение характера события (достоверное, невозможное, случайное) Решение методом перебора вариантов.	3
4.	5 класс	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.	Комбинаторные задачи	Комбинаторные задачи, дерево возможных вариантов	5
5.	6 класс	Г.В.Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова,	«Комбинаторика. Случайные события».	Рассматриваются задачи, которые решаются способом перебора. Новый способ	8

		Е.А. Бунимович и др.	Логика перебора. Правило умножения Сравнение шансов. Эксперименты со случайными исходами.	решения комбинаторных задач с помощью правила сложения и умножения.	
6.	6 класс	И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович	Правило умножения. Определение вероятности	Комбинаторные задачи, решаемые методом перебора возможных вариантов. Определение степени вероятности того или иного события,	3
7.	7	Г.В.Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др	Правило умножения. Перестановки. Вероятность случайного события. «Относительная частота случайного события». Вероятностная шкала. Решение комбинаторных задач.	Определение эксперимента со случайным исходом. Формула относительной частоты случайного события, вероятность случайного исхода, границы вероятности случайного события. Решение комбинаторных задач путем систематического перебора возможных вариантов и с использованием правил сложения и умножения.	5
8.	8 класс	Авторы: Г.В.Дорофеев,	Вероятность и статистика.	Решение комбинаторных задач путем систематического	5

		И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др	Статистические характеристики. Вероятность равновозможных событий. Сложные эксперименты. Геометрические вероятности.	перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения; вычислять средние значения результатов измерений; находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные; находить вероятности случайных событий.	
9.	9 класс	Г.В.Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др	Комбинаторика. Статистические исследования	Комбинаторные задачи. Перестановки, размещения, сочетания. Примеры комплексных статистических исследований. Генеральная совокупность и выборка. Ранжирование данных. Полигон частот. Интервальный ряд. Гистограмма. Выборочная дисперсия, среднее квадратичное отклонение.	6
10.	9 класс	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., М.С.Якир	Глава3. Основные правила комбинаторики. Элементы прикладной математики. Математическое моделирование.	Математическое моделирование, процентные расчеты, абсолютная и относительная погрешности, основные правила комбинаторики, частота и вероятность случайного события, классическое	15

			Частота и вероятность случайного события. Классическое определение вероятности. Начальные сведения о статистике.	определение вероятности, начальные сведения о статистике.	

Анализ школьных учебников позволил выделить основное содержание школьного курса математики 5-9 кл. по теме «Комбинаторика»: перебор вариантов на примерах простейших прикладных задач; комбинаторные правила суммы и произведения; факториал и формулы основных комбинаторных конфигураций (перестановки, сочетания, размещения); комбинаторные задачи.

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей входят в содержание итоговой государственной аттестации по математике.

В рамках данного исследования остановимся на рассмотрении содержания основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике для 9 класса.

В ОГЭ проверяются следующие знания по теме комбинаторика:

- поочередный и одновременный выбор;
- систематического перебора вариантов;
- формулы числа сочетаний, размещений и перестановок;

Контрольно-измерительные материалы и банк открытых заданий ОГЭ по математике содержат задачи, на оценку и измерение уровня сформированности предметных знаний у обучающихся по теме «Комбинаторика», следующего вида [19]:

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 при условии, что цифры в записи числа не повторяются.

2. Из пункта А в пункт В ведут три дороги, а из пункта В в пункт С- две дороги. Сколько существует способов выбрать путь из А в С?

Из выше сказанного следует, что элементы комбинаторики и теории вероятности в обязательном порядке входят как в содержание математической подготовки школьников, так и в содержание итоговой государственной аттестации выпускников общеобразовательных школ. Считается необходимым формирование у выпускника одной из важнейших способностей ума – способности представлять явления в разных комбинациях.

1.2. Курсы по выбору в системе математической подготовки школьников

Согласно ФГОС ООО изучение дополнительных учебных предметов, курсов по выбору обучающихся должно обеспечить:

- удовлетворение индивидуальных запросов обучающихся;
- общеобразовательную, общекультурную составляющую при получении общего образования;
- развитие личности обучающихся, их познавательных интересов, интеллектуальной и ценностно–смысловой сферы;
- развитие навыков самообразования и самопроектирования;
- углубление, расширение и систематизация знаний в выбранной области научного знания или вида деятельности;
- совершенствование имеющегося и приобретение нового опыта познавательной деятельности, профессионального самоопределения обучающихся [36].

Курсы по выбору (факультативы) – форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний учащихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности [Жуковская Е.П.].

Типологию курсов по выбору определяет специфика образовательных задач на которые они направлены (Таблица 2)

Таблица 2

Классификация курсов по выбору

Тип курса	*Образовательные задачи*	*Вид деятельности обучающегося*
Предметно-ориентированные	Формирование у учащихся предметных компетенций по средством систематизации, обобщения, углубления и расширения «предметного поля»	Фундаментальное изучение дополнительных разделов, освоение специальных способов и методов учебного предмета.
Межпредметные	Формирование у учащихся основ метапредметных компетенций	Комплексное применение различных способов, методов и синтеза знаний по ряду предметов в ходе решения разнообразных задач метапредметного характера
Внепредметные	Становление и развитие специальных личностных качеств, восполнение «общекультурного вакуума »,удовлетворение естественного любопытства к какой –то области знаний , которая отсутствует традиционном учебном плане	Знакомство с различными областями деятельности человека. Освоение внепредметных знаний, учений и навыков. Участие в мастер-классах, тренингах, личностного роста и др.

Как правило, курсы по выбору (факультативы) – это авторские курсы, предлагаемые самой школой, отдельными педагогами.

Программа курса по выбору должна:

- соответствовать концептуальным положением профильного обучения и требованиям ФГОС общего образования;

- иметь практическую направленность
- обладать логикой построения и подачи учебного материал;
- быть хорошо структурированной и связной по содержанию;
- быть реалистичной по времени и затраченным ресурсам;
- предполагать использование активных методов обучения, позволяющих учащимся осознанно и объективно сделать выбор для продолжения образования;
- иметь определенную степень новизны [16].

Остановимся на рассмотрении технологии проектирования программы курса по выбору.

Примерная структура программы включает в себя несколько компонентов:

1. титульный лист;
2. пояснительная записка (аннотация);
3. учебно-тематический план;
4. содержание курса по темам;
5. учебно-методическое обеспечение.

В проектировании программы курса по выбору каждый из данных компонентов играет важную роль.

Особенно креативно автору – разработчику нужно подойти к выбору *названия курса*. Название курса должно быть привлекательным. Оно должно, с одной стороны не быть похожим на школьное, а с другой стороны показывать то, чем ученики, посещающие его, будут заниматься [16].

Пояснительная записка включает в себя: сведения об актуальности курса – роль, место и значение курса в системе профильного обучения; указание типа курса по выбору; продолжительность по времени и количество часов в неделю; формулировка целей и задач курса с учетом типа курса и его функций; сведения о методах и формах организации занятий курса по выбору (виды деятельности, предлагаемые учащимся); критерии, позволяющие оценить успехи учащихся в изучении данного курса; возможные социальные пробы и ожидаемый результат.

Учебно-тематическое планирование, как правило, оформляется в виде таблицы (таблица 2), с указанием наименований основных модулей, тем и разделов, теоретических и практических часов, ожидаемых образовательных результатов, предполагаемой деятельностью учащихся и возможными формами контроля.

Таблица 3

Учебно-тематическое планирование курса по выбору

№ п.п	Наименование модулей, тем, разделов	Количество часов	Образовательные цели	Вид деятельности учащихся	Форма контроля

В содержании курса по выбору необходимо указать основные дидактические единицы учебной информации, способы и методы, а также типы задач, которые будут предложены, участникам курса. При проектировании программы курса необходимо учесть, что содержание курса должно:

- знакомить учащихся со способами деятельности;
- включать оригинальный материал, не дублировать содержание предметов обязательных для изучения;
- помогать учащимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы;
- ранее недоступный для изучения материал должен стать открытым для обсуждения;
- модульное построение содержания, поскольку возможны переходы учащихся с курса на курс.

Учебно-методическое обеспечение курса представляет собой некий кластер учебно-методических ресурсов, который может быть полезен как учащимся, изучающим курс, так и педагогу, реализующему его.

В приложениях к программе может содержаться материал дополняющий учебно-методическое обеспечение: тексты информационных материалов для лекций, семинаров, самостоятельной работы учеников; каталог заданий для самостоятельной работы и методические рекомендации по их выполнению; индивидуальные и дифференцированные задания, в том числе задания в тестовой форме; программы учебных практик и методические рекомендации по их проведению; тематика исследовательских работ и проектов; программы выполнения проектной и исследовательской деятельности, методические рекомендации по ее организации; образцы проектных и исследовательских работ и др.[16].

Таким образом, курсы по выбору (факультативы) это одна из форм организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний обучающихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями. Набор курсов по выбору должен быть разнообразным, чтобы удовлетворить различные интересы обучающихся, и, способствовать повышению качества образования.

Глава 2. Методическое обеспечение курса по выбору «Комбинаторика – это просто!»

2.1. Программа курса по выбору «Комбинаторика это просто »

Пояснительная записка

Курс по выбору «Комбинаторика это просто!» посвящен рассмотрению основных понятий и правил комбинаторики и приложений теоретической математики.

Обучающиеся познакомятся с историей возникновения и развития комбинаторики; на примерах различных задач узнают об очевидной универсальности законов комбинаторики, которые широко применяются в современной химии, физике, биологии, социально-экономических науках, военном деле и т. д.

Курс ориентирован на развитие у школьников 9 класса умений решать различные комбинаторные задачи из жизни: выбор наилучшего из возможных вариантов; оценка степени риска, шансов на успех и др.

Курс рассчитан на развитие самостоятельности, умения работать в команде, толерантности и предназначен для широкого круга обучающихся 9 класса.

Цели и задачи курса:

- формирование прочных и системных предметных знаний в области комбинаторики;
- формирование специального типа мышления — комбинаторного;
- формирование у учащихся видов деятельности, связанных с перебором и подсчетом числа конфигураций элементов, удовлетворяющих определенным условиям;
- формирование опыта решения комбинаторных задач и приложения знаний на практике;
- привитие познавательного интереса к занятиям комбинаторикой;

- подготовка к итоговой государственной аттестации по математике.

Общий объем курса составляет 18 часов, занятия проводятся 1 раз в неделю.

Формы организации занятий: лекция с элементами беседы; семинар-практикум по решению задач.

Формы контроля: самостоятельная работа по решению задач; теоретический опрос; тестирование.

Разнообразный дидактический материал предоставляет возможность эффективного дифференцированного подхода к ученикам различного уровня подготовки: степень трудности заданий колеблется от простых до более сложных. А применение мультимедийных презентаций с историческим и теоретическим материалом дает возможность сделать каждое занятие предельно заполненным, увлекательным и нужным для учеников разной категории подготовленности. Учебно-тематическое планирование представлено в таблице 4.

Таблица 4.

Учебно-тематическое планирование

№ п/п	Наименование модулей, тем, разделов	Кол-во часов	Образовательные цели	Вид деятельности обучающихся	Формы контроля
1	Множества и картежи	2	Введение понятий множества и картежа, расширение знаний о числовых множествах, формирование знаний об основных операциях над множествами,	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Выполнение заданий.	

			рассмотрение примеров множеств и развитие умений приводить примеры множеств.		
2	Элементы комбинаторики	2	Введение определения комбинаторики, формирование знаний об областях применения комбинаторики в жизни, решение элементарных комбинаторных задач, формирование умений у учащихся решать задачи прикладного характера методом перебора всевозможных вариантов и с помощью построения дерева возможных вариантов.	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме – участие в дискуссии. Решение задач.	
3	Правило суммы и произведения	2	Введение правила суммы и произведения для решения прикладных задач, формирование практических	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Выполнение самостоятельной	

4			навыков решения комбинаторных задач с помощью правил суммы и произведения.	работы.	
4	Понятие факториала	2	Расширений знаний о комбинаторике, введение понятия факториала, умение применять понятие факториал при решении заданий.	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Выполнение самостоятельной работы.	Теоретический опрос. Проверка домашнего задания.
5	Перестановки без повторений	2	Рирений знаний о комбинаторике, введение понятия перестановки, введения формулы для нахождения количества перестановок, умение применять формулу нахождения количества перестановок объектов при решении задач.	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Решение задач.	Теоретический опрос. Проверка домашнего задания.
6	Размещение без повторений	2	Введение понятия размещения без повторений. Формула для нахождения числа размещений без	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Решение задач.	Теоретический опрос. Проверка домашнего задания.

			повторений. Решение задач на нахождение числа размещений без повторений.	Выполнение самостоятельной работы.	
7	Сочетания без повторений	2	Введение понятия сочетания без повторений. Формула для нахождения числа сочетаний без повторений. Решение задач на нахождение числа сочетаний без повторений.	Фронтальная работа. Обсуждение вопросов по теме. Решение задач. Выполнение самостоятельной работы.	Теоретический опрос. Проверка домашнего задания.
8	Решение комбинаторных задач	2	Систематизация и закрепление знаний и практических умений у учащихся по темам курса	Работа в группах – составление опорного конспекта по темам курса. Решение задач. Выполнение самостоятельной работы – тест №1.	Теоретический опрос. Проверка домашнего задания. Тестирование (тест №1)
9	Итоговое занятие	2	Контроль знаний по темам курса	Участие в дидактической игре – индивидуальное и командное решение комбинаторных задач.	Итоговое тестирование (тест №2)
Всего		18			

Краткое содержание курса по выбору

Тема 1. Множества и картежи *(2 ч.)*. Множества. Картеж. Основные свойства множеств. Примеры множеств.

Тема 2. Элементы комбинаторики *(2 ч.)*. Характеристика понятия «Комбинаторика». Сведения о приложениях комбинаторики. Решение элементарных комбинаторных задач методом перебора вариантов. Решение элементарных комбинаторных задач с помощью составления дерева вариантов. Самостоятельная работа по теме «Элементы комбинаторики».

Тема 3. Правило суммы и правило произведения *(2 ч.)*. Формулировка и иллюстрация на примерах комбинаторных правил суммы и произведения. Решение комбинаторных задач, используя правило суммы и правило произведения. Самостоятельная работа по теме «Правило суммы и правило произведения».

Тема 4. Понятие факториала*(2 ч)*. Введение понятия факториал. Решение заданий с использованием факториала. Самостоятельная работа по теме «Понятие факториала».

Тема 5. Перестановка без повторений *(2 ч)*. Введение понятия перестановки элементов. Формулы для нахождения количества перестановок. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества перестановок элементов. Самостоятельная работа по теме «Перестановка без повторений».

Тема 6. Размещения без повторений *(2 ч)*. Введение понятия размещения объектов. Формулы для нахождения количества размещений. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества размещений объектов. Самостоятельная работа по теме «Размещения без повторений».

Тема 7. Сочетания без повторений *(2 ч)*. Введение понятия сочетания элементов. Формулы для нахождения количества сочетаний. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества сочетаний элементов. Самостоятельная работа по теме «Сочетания без повторений».

*Тема 8.*Решение задач, применение знаний на практике *(2 ч).* Обобщение, систематизация и актуализация основных понятий комбинаторики, а именно: правило суммы, правило произведения; перестановки, размещения, сочетания.

Тема 9. Итоговое занятие по теме «Элементы комбинаторики (*2 ч).* Применение полученные теоретические знания на практике.

Учебно-методические ресурсы

Список рекомендуемой литературы для обучающихся

1) Виленкин. Н.Я. Комбинаторика. Москва, Наука, 1969
2) Виленкин. Н.Я. Популярная комбинаторика. Москва, Наука, 1975
3) Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях. Москва, Просвещение, 1979г.
4) В.С. Лютикас Школьнику о теории вероятности. Москва, Просвещение, 1976
5) Математический энциклопедический словарь.
6) Энциклопедия для детей. Москва, Аванта+, 1998.
7) Гитман М.Б., Цылова Е.Г. Введение в комбинаторику и теорию вероятностей. Учеб. пособие. Пермь, 1999
8) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970
9) Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
10) Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
11) Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М. Мир, 1998.

Темы рефератов (проектов)

1. Б.Паскаль – основоположник комбинаторики.
2. Вклад Лейбница в комбинаторику как науку.
3. Я. Бернулли и комбинаторика.
4. Комбинаторика в экономике.
5. Использование комбинаторики при решении задач по планиметрии.

6. Использование комбинаторных методов для решения транспортных задач.
7. Применение комбинаторики для составления и декодирования шифров.
8. Комбинаторика на шахматной доске.
9. Комбинаторика в играх и развлечениях.

Тест №1. «Элементы комбинаторики»

1. Комбинаторика отвечает на вопрос

а) какова частота массовых случайных явлений;

б) с какой вероятностью произойдет некоторое случайное событие;

в) сколько различных комбинаций можно составить из элементов данного множества.

2. Выберите из предложенных множеств множество натуральных чисел:

а) N;

б) Q;

в) R.

3. Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B называют

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B;

в) разностью множеств A и B.

4. Разность множеств A и B обозначают:

а) A ÑB ;

б) A ∩ B;

в) A » B;

г) A ¿ B.

5. Пусть A – множество четных чисел из интервала (3;10), B – множество делителей числа 24. Найдите разность множеств B и A.

7. Количество сочетаний из n элементов по k вычисляют по формуле:

а) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

б) $n!$;

в) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

8. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

а) 100;

б) 30;

в) 5;

г) 120.

9. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

а) 3;

б) 6;

в) 2;

г) 1.

10. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

а) 10000;

б) 60480;

а) $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$; б) $\{4; 6; 8\}$; в) 1 ; г) $\{1; 2; 3; 12; 24\}$. 6. Любое множество, состоящее из k элементов, взятых из данных n элементов, называется…… а) размещением; б) перестановкой; в) сочетанием.	в) 56; г) 39450. 11. Вычислить: $\frac{P_4}{P} \cdot A$. а) 1; б) 13; в) 12; г) 32. 12. Если объект А можно выбрать x способами, а объект В – y способами, то каким количеством способов можно выбрать объект «А и В» а) x; б) xy; в) x + y.

Обобщение темы комбинаторика представлено в виде схем.

Обобщающие схемы (опорные конспекты) по темам курса

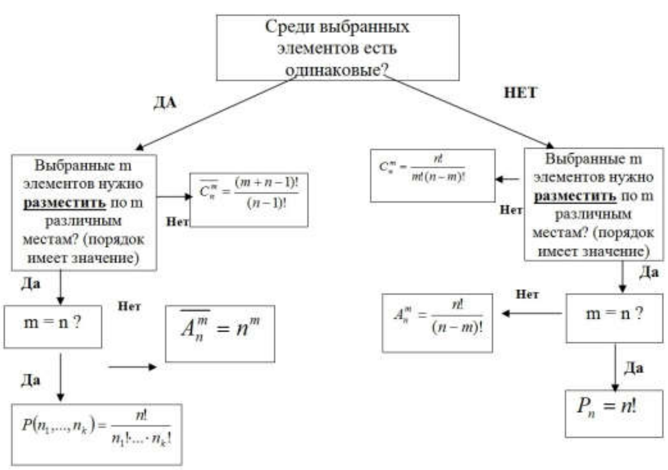


Схема 1.Комбинаторика.

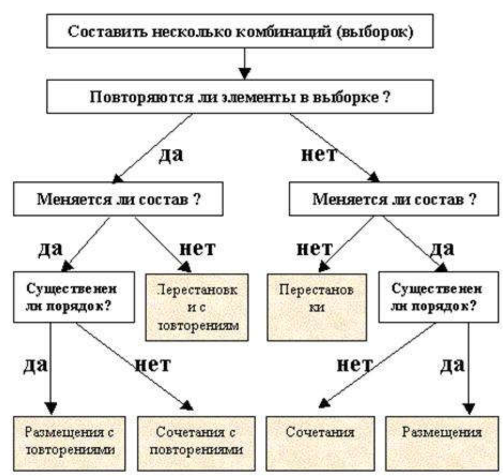


Схема 2. Комбинаторика.

Конспекты занятий курса по выбору «Комбинаторика – это просто!»

Занятие 1. Множества и картежи

Цели: Введение понятий множества и картежа; расширение знаний о числовых множествах и об основных операциях над множествами; рассмотрение примеров множеств и развитие умений приводить примеры множеств.

Структура занятия:

1. Постановка темы и целей занятия.
2. Актуализация знаний
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Подведение итогов знания

Ход занятия. (слайд1)

Вначале урока учитель сообщает темы и цели урока. Далее производит небольшой фронтальный опрос. В процессе опроса учитель спрашивает:

Что такое множество?

Как могут отличаться множества по числу элементов?

Далее вводится определение множества.

(слайд2*)Определение: Множеством* называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества принято обозначать прописными буквами, а элементы множеств строчными буквами. Элементы множеств при записи заключаются в фигурные скобки.

Например, если элемент x принадлежит множеству X, то записывают x ∈ X (∈ - принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают A ⊂ B (⊂ — содержится). (слайд 3)Таблица 5.

Таблица 5

Основные числовые множества

N	{1,2,3,...,n} Множество всех натуральных чисел
Z	{0, ±1, ±2, ±3,...} Множество целых чисел. Множество целых чисел включает в себя множество натуральных
Q	Множество рациональных чисел
Дроби	Кроме целых чисел имеются ещё и дроби. Дробь — это выражение вида $\frac{p}{q}$, где p — целое число, q — натуральное. Десятичные дроби также можно записать в виде . Например: 0,25 = 25/100 = 1/4. Целые числа также можно записать в виде . Например, в виде дроби со знаменателем "один": 2 = 2/1. Таким образом любое рациональное число можно записать десятичной дробью — конечно или бесконечной периодической.
R	Множество всех вещественных чисел. Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби. К ним относятся: число π — отношение длины окружности к её диаметру; число π — названное в честь Эйлера и др.; Вместе два множества (рациональных и иррациональных чисел) — образуют множество действительных (или вещественных) чисел.

Рисунок № 1 наглядно демонстрирует основных числовых множеств. (слайд 4)

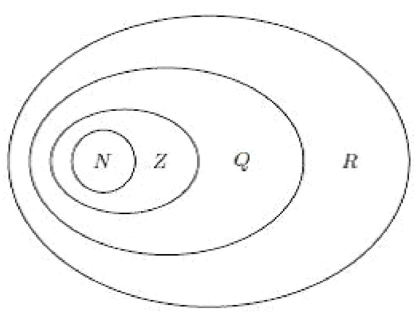


Рисунок 1. Основные числовые множества.

(слайд5)Способы задания множеств.

В том случае, если множество не содержит ни одного элемента, то такое множество принято называть пустым и записывают его - Ø.

Далее учитель просит привести примеры множеств, которые встречаются в реальной жизни.

Примеры ответов учащихся:

1. Множество людей. Группа детей одного класса – элементами служат учащиеся именно данного класса.

2. Совокупность всех классов некоторой школы – элементами являются именно группы детей, образующих каждый их этих классов.

3. Множество натуральных чисел. Натуральные числа – числа от 1 до бесконечности.

4. Знаки препинания, буквы алфавита, цифры для записи чисел

5. М={Иванов, Петров, Сидоров…} – множество спортсменов

6. Множество письменных принадлежностей.

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства. (слайд 6)

(слайд7) Далее учитель знакомит учащихся с основными операциями над множествами.

Операции над множествами

(слайд8*)Два множества А и В равны* (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример: Если А={1,2,3,4}, В={3,1,4,2} то А=В.

(слайд9,10)*Объединением (суммой) множеств* А и В называется множество А ∪ В, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Пример: Если А={1,2,4}, В={3,4,5,6}, то А ∪ В = {1,2,3,4,5,6}

(слайд 11,12)*Пересечением (произведением) множеств* А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

Пример: Если А={1,2,4}, В={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}

(слайд 13)*Разностью двух множеств* A и B называют такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B.

Пример: Если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то A ∩ B = {1,2} (слайд 14,15,16)

На следующем этапе урока, учащиеся закрепляют полученные новые знания, выполняя задания. Первое задание учащиеся выполняют все вместе, дальше работают в парах и производят самопроверку с доской.

(слайд 17)**Задание 1**. Какое множество является пересечением множеств A={2, 5, 3, 14} и B={0,6,6,2,14}

Решение. Множество C={2,14}

(слайд 18)**Задание 2.** Какое множество является объединением множеств A={4,45,87} и B={3,5,0}

Решение: C={4,45,87,3,5,0} - объединение множеств A={4,45,87} и B={3,5,0}

(слайд 19)**Задание 3.** Множество A={3,57,24,9,0}, множество B={57,0,7}. Чему равна разность множеств A и B?

Решение: C={3,24,9}

Далее учителем вводятся основные свойства операций над множествами.

(слайд 20)*Свойства операций над множествами*

Свойства перестановочности

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Сочетательное свойство

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Рисунок № 2 наглядно иллюстрирует операции над множествами.

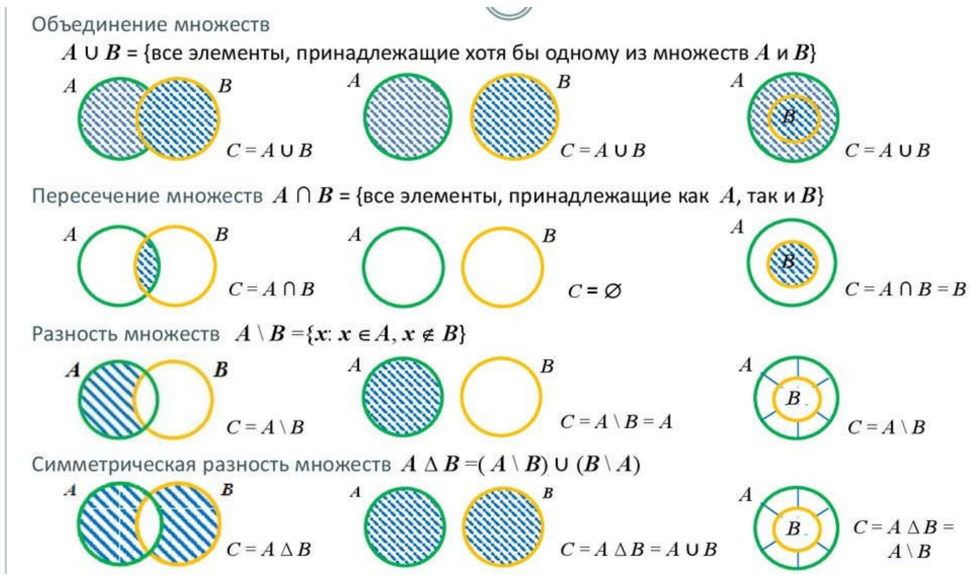


Рисунок № 2. Операции над множествами

(слайд 21)При записи (задании) множеств, часто интересуют не только из каких элементов состоит множество, но и последовательность их появления (записи). В этом случае идет речь об *упорядоченных множествах*. Так, например, при определении положения точки на плоскости или пространстве указывается упорядоченная пара чисел на плоскости и упорядоченная тройка чисел в пространстве. Перестановка координат влечет за собой задание других точек.

(слайд 22)*Кортеж* – это упорядоченное множество элементов.

Длина кортежа – есть количество элементов в нем.

Картежи *равны*, если на одинаковых местах (номерах) у них находятся одинаковые элементы. Элементы кортежа записываются в угловых или в круглых скобках.

Соединение нескольких кортежей - это тоже кортеж, который состоит из элементов, записанных строго в той последовательности, в которой объединяются кортежи. Длина такого кортежа равна сумме длин всех соединяемых кортежей. Если число элементов кортежа можно предоставить в виде суммы n - слагаемых, то такой кортеж можно разбить на n кортежей. Длина каждого n–го кортежа равна величине соответствующего слагаемого.

Задание. Приведите примеры кортежей. Учащиеся все вместе отвечают на вопрос учителя. Примеры ответов учащихся: Примером кортежей может служить любой алфавит. Это алфавит любого разговорного языка. Множество цифр, используемых при записи чисел – так же алфавит и др.

Занятие 2. Элементы комбинаторики

Цель: Введение определения комбинаторики, формирование знаний об областях применения комбинаторики в жизни, решение элементарных комбинаторных задач прикладного характера методом перебора всевозможных вариантов и с помощью построения дерева возможных вариантов.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Подведение итогов урока

Ход занятия:

Вначале урока учитель задает учащимся простую жизненную ситуацию:

(слайд 2)- Представьте, что после посещения футбольного матча вам удается узнать номер телефона вашего кумира, придя домой решаете ему набрать и поговорить. Но вдруг набирая, номер не можете вспомнить последнюю цифру телефона. Что вы будете делать?

Примерный ответ учащихся: перебирать все возможные цифры от 0 до 9.

- Как еще можно назвать этот перебор цифр?

Примерный ответ учащихся: - перебор всех возможных комбинаций.

- Необходимо выбрать 5 учащихся для эксперемента. Показа реальной ситуации.

Ребята, давайте обыграем следующую ситуацию: 5 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

- Сегодня на уроке мы будем решать задачи, где используются всевозможные комбинации. (слайд 3)

Далее в виде лекции учитель проводит не большой экскурс в историю комбинаторики.

Историческая справка:

(слайд 4)В старинных русских сказаниях повествуется, как богатырь, доехав до распутья, читает на камне: «Вперёд поедешь – голову сложишь, направо поедешь – меча лишишься». А дальше уже говорится, как он выходит из этого положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Эти пути и варианты складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, именуемый комбинаторикой, занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из этих комбинаций выбрать наилучшую.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Вопросы комбинаторики ставились и решались с незапамятных времён и во многих странах, таких как Греция, Египет, Индия, Китай и т. д. Но серьёзный толчок в развитии комбинаторики как науки связан с играми, точнее с развлекательными играми.

В XVII веке гражданин Франции Шевалье де Марэ любил изобретать различные игры, играя в которые, получал очень интересные результаты. Например, однажды он придумал такую игру. Бросает 4 кости: выигрывает, если на одной есть шестёрка. Но с ним очень быстро перестали играть, так как он слишком часто выигрывал.

(слайд 5)В другой раз он придумал такую игру. Бросает две кости несколько раз: выигрывает, если хотя бы раз выпало две шестёрки. Учитывая результаты первой игры, он решил, что следует бросать 24 раза. Однако вскоре он сам бросил играть, так как стал часто проигрывать. Такой исход дела его очень удивил, и Шевалье де Марэ решил написать двум крупнейшим математикам Франции того времени Блезу Паскалю и Пьеру Ферма письмо с вопросом, как можно объяснить эти удачи и неудачи в игре, а также как правильно делать ставки в таких или аналогичных играх.

Решая эту задачу, Б. Паскаль и П. Ферма разработали начало двух ветвей математики: *комбинаторики и теории вероятностей*.

Впоследствии этими науками занимались многие великие математики тех времён. В 1666 году Готфрид Вильгельм Лейбниц в возрасте 20 лет опубликовал работу «Диссертация о комбинаторном искусстве», где впервые вставил слово «комбинаторный» .В 1713 году Якоб Бернулли публикует «Искусство предположения», где вводит понятия числа сочетаний, находит формулы для суммы 1-х степеней натуральных чисел.

(слайд 6)Использование комбинаторики в настоящее время очень разнообразно. Одно из них - шифровка и дешифровка текстов. Шифр появился ещё в средние века. Английский математик Уоллис расшифровывал послания французов. Расшифровкой древнеегипетских иероглифов занимался Шампольон [37].

В биологии комбинаторика служит для подсчёта количества клеточных структур ДНК и РНК, в физике - для описания свойств кристаллов. Комбинаторика используется в генной инженерии, физике, химии. Отдельную ветвь комбинаторики можно отнести к использованию её в создании искусственного интеллекта.

К следующему занятию приготовить слайд-пример, иллюстрирующий приложение комбинаторики в биологии, химии и др.

На следующем этапе занятия учитель и учащийся знакомятся со слайдами приготовленными учениками в качестве домашнего задания.

Далее учитель предлагает рассмотреть следующие задачи:

(слайд 7)**Задача 1:** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение: Число с цифры ноль начинаться не может, значит первым числом будет либо 2, либо 4. Составим схему рассуждений. На рисунке 3 показана схема (дерево) возможных вариантов.

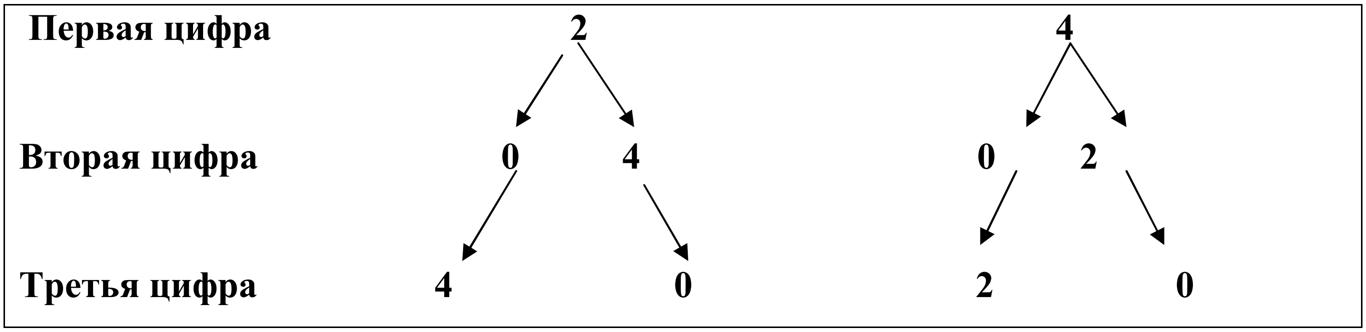


Рисунок №3.Дерево возможных вариантов.

Ответ: 204, 240, 402,420 – 4 числа.

Способы решения таких задач перебором возможных вариантов используются при наличии нескольких решений. При записи возможных вариантов, их схемы изображаются, как дерево с разветвленными ветвями, которое так и называется «дерево возможных вариантов». Рассматривают другие задачи.

(слайд 9)**Задача 2.** На завтрак в школьной столовой любой ученик может выбрать булочку, ватрушку, пирожок, а запить их он может соком, чаем или компотом. Сколько вариантов завтрака предлагается в школьной столовой?

(слайд 10)**Решение.** Собираем все варианты в таблицу 6.

Таблица 6.

Решение задачи 2.

Напиток	Булочка	Ватрушка	Пирожок
Сок	СБ	СВ	СП
Чай	ЧБ	ЧВ	ЧП
Компот	КБ	КВ	КП

В таблице 6 строки и 3 столбца, которые образуют 9 клеток. Так как выбор еды и напитка происходит независимо, то в каждой клетке стоит один из возможных вариантов завтрака. Значит, всего вариантов столько, сколько клеток в таблице, то есть 9.

(слайд 11)**Задача 3.** У Тани есть розовая, желтая, красная кофта и черная, зеленая, синяя юбки. Сколько различных нарядов можно составить из них?

(слайд 12)**Решение**: Составим дерево возможных вариантов (Рисунок 4).

При этом возможные варианты, объекты в нем записываются

кодом. При записи объектов кодом используются буквы или

цифры.

Кофты – Р(розовая),Ж(желтая), К(красная).

Юбки- Ч(черная), З(зеленая),С(синяя).

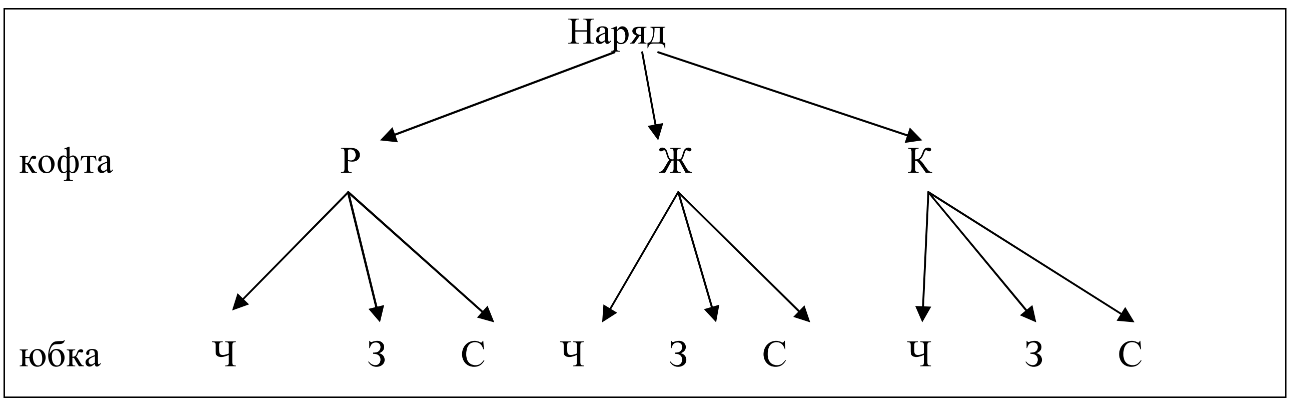


Рисунок 4. Дерево возможны вариантов

Сколько ветвей у дерева в схеме, столько решений у задачи.

РЧ, РЗ, РС; ЖЧ, ЖЗ, ЖС; КЧ, КЗ, КС.

(слайд 13)**Задача 4.** У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста. Как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?

Решение:

1. 50 рублей, 100 рублей, 50 рублей, 100 рублей;

2. 50 рублей, 50 рублей, 100 рублей, 100 рублей.

Задача для самостоятельной работы:

(слайд 15)**Пример 1.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Решение: Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа. Пусть на первом месте стоит цифра 1. На втором месте может быть записана любая из цифр 3, 5, 7. Запишем, например, на втором месте цифру 3. Тогда в качестве третьей цифры можно взять 5 или 7. Получим два числа 135 или 137. Если на втором месте записать цифру 5, то в качестве третьей цифры можно взять цифру 3 или 7. В этом случае получим числа 153 и 157. Если же, наконец, на втором месте записать цифру 7, то получим числа 173 и 175. Дерево возможных вариантов показано на рисунке 5.

Первая цифра	1	3	5	7
Вторая цифра	3 5 7	1 5 7	1 3 7	1 3 5
Третья цифра	5 7 3 7 3 5	5 7 1 7 15	3 7 1 7 1 3	3 5 1 5 1 3

Рисунок 5.Перебор возможных вариантов

Итак, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Таких чисел шесть:

135, 137, 153, 157, 173, 175.

315, 317, 351, 357, 371, 375.

513, 517, 531, 537, 571, 573,

713, 715, 731, 735, 751, 753.

Таким образом, из цифр 1, 3, 5, 7 можно составить 24 трехзначных числа, в записи которых цифры не повторяются

(слайд 16)Итог занятия.

Как в понятии, что такое комбинаторика? Приходилось ли вам в жизни сталкиваться с перебором различных вариантов.

Занятие 3. Правило суммы

Цель: расширение знаний о комбинаторике; введение правил суммы и произведения для решения прикладных задач; формирование практических навыков решения комбинаторных задач с помощью правил суммы и произведения.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Подведение итогов урока

Ход занятия:

(слайд 2)**Пример:** Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой – 40 различных книг (и не таких, как на первой полке), то сколькими способами можно выбрать одну книгу из стоящих на этих полках?

Решение: Из стоящих на этих полках книг, выбрать одну книгу можно 30+40=70 способами.

Обобщением этого примера является следующее утверждение, которое называется *правилом суммы*.

Далее учитель формулирует правило суммы.

(слайд 3)Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a или b» можно сделать (m+n) способами.

(слайд 4)***Теорема.*** Если пересечение конечных множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)$. (1)

(слайд 5)*Следствие*. Если конечные множества A1, A2, … , Ak попарно не пересекаются, то имеет место равенство

n(A1UA2U … UAk) = n(A1) + n(A2) + … + n(Ak) (2)

Правило произведения.

Если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y-m способами то пару (X,Y) можно выбрать k*m способами.

После введения нового материала, учитель предлагает применить новые знания при решении заданий.

(слайд 7)**Пример 1:** При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 – на пост бортинженера и 25 – на пост космонавта – исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур или командира, или бортинженера, или космонавта – исследователя?

(слайд 7)**Решение**: Обозначим множество кандидатов на пост командира корабля через A, множество кандидатов на пост бортинженера через B и множество кандидатов на пост инженера-исследователя через C. Тогда по условию

n(A)=10, n(B)=20, n(C)=25.

Кроме того, A∩B = Ш, A∩C = Ш, B∩C=Ш.

По формуле (2) имеем:

n(AUBUC) = n(A)+n(B)+n(C)=55 способов.

Ответ:55 способов.

(слайд 8)**Пример 2:** Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

(слайд 9)**Решение:** Обозначим множество тем по алгебре через А, множество тем по геометрии через В. Тогда по условию n(A)=17, n(B)=13. Так как по условию необходимо выбрать только одну тему для практической работы, то воспользуемся правилом суммы : 17+13 = 30 способов. Ответ: 30 способов.

(слайд 10)**Пример 3:** Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет из спортлото или автомотолотереи?

(слайд 11)**Решение:** Обозначим множество билетов денежно вещевой лотереи через А, множество билетов спортлото через В и множество билетов автомотолотереи через С. Тогда по условию n(A)=5, n(B)=6, n(C)=10. Так как по условию необходимо выбрать один билет из спортлото или автомотолотереи, то воспользуемся правилом суммы: 6+10=16 способ выбора одного билета. Ответ: 16 способов.

(слайд 12)**Задания для самостоятельной работы:**

Задание 1. В вазе 6 яблок, 5 груш и 4 сливы. Сколько вариантов выбора одного плода?

Решение: 6 + 5 + 4 = 15

Ответ: 15 вариантов.

Задание 2. Сколько существует вариантов покупки одной розы, если продают 3 алые, 2 алые и 4 жёлтые розы?

Решение: 3 + 2 + 4 = 9

Ответ: ***9*** вариантов

Составить и решить задачи по теме. Обменяться задачами в классе, решить задания своих товарищей.

(слайд 1)**Занятие 4. Понятие факториала**

Цель: расширение знаний о комбинаторике; введение понятия факториала; формирование умений применять понятие факториала при решении задач.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Подведение итогов урока

Ход занятия:

Вначале урока учитель спрашивает, сталкивался ли кто-нибудь из учащихся когда-либо с таким понятием, как факториал? Что такое факториал?

После этого учитель объявляет тему и цель урока. Далее вводит новый материал.

(слайд 2)*Определение:* Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначают n! (читают «эн факториал»):

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Например, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, …

1! Считается равным 1: 1!=1.

(слайд 3)*Задание:* Составить и заполнить таблицу значений факториалов для чисел от 1 до 10.

Попеременно вызвать учащихся к доске для заполнения таблицы 4.

Таблица 7.

Значения факториала от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

(слайд 4)**Пример 1:** Вычислите:

А) 6!

Решение: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6= 720$

Б) 6!-5!

Решение: 720-120=600

В) $\frac{10!}{5!}$

Решение: $\frac{10!}{5!}= \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{5*4*3*2*1} = \frac{10*9*8*7*6}{1} = 30\ 240$

Г) $\frac{11!}{5!6!}$

Решение : $\frac{11!}{5!6!} = \frac{11*10*9*8*7}{5*4*3*2*1} = \frac{11*3*2*7}{1} = 462$

(слайд 5)**Пример 2.**

Сколько существует выражений, тождественно равных произведению abc, которое получается из него перестановкой множителей?

Решение:

Две буквы a и b можно переставить двумя способами:

ab, ba.

Для трех букв a, b, c можно записать шесть перестановок:

abc, acb, bca, bac, cab, cba.

На первом месте мы поставили букву a и к ней приписали две перестановки из остальных букв b и c. Потом на первом месте мы поставили букву b и к ней приписали две перестановки из букв a и c. Наконец, на первом месте мы поставили букву c и к ней приписали две перестановки из букв a и b. Всего получилось $3\cdot2 = 3\cdot2\cdot1 = 3!$

(слайд 7,8)**Задача для самостоятельной работы:**

В волейбольной команде 6 человек, а на площадке 6 позиций (номеров) для их расстановки. Сколькими способами команда может расположиться на площадке?

Решение: у первого игрока команды есть 6 мест для выбора, у второго-5, у третьего – 4, у четвертого – 3, у пятого - 2, у шестого – 1. Следовательно, на площадке можно расположиться 1·2·3·4·5·6=6!=720 вариантами.

Составить задание на тему факториал. Выполнить работу в парах. Обсудить спорные ситуации.

Занятие 5. Перестановки без повторений

Цель: расширение знаний о комбинаторике; введение понятия перестановки и формулы для нахождения количества перестановок; формирование умений применять формулу нахождения количества перестановок объектов при решении задач.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Подведение итогов урока

Ход занятия:

На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминают, что называется факториалом и приводят примеры, в которых необходимо вычислить факториал. После этого учитель объявляет тему и цели урока.

- Найдите значение выражения:

А) 8! ; б) 7!-5! ; в) $\frac{10!}{5!}$; г) 10! : 7!

Взаимопроверка. Робота в парах.

- Составьте выражение, содержащее факториал, обменяйтесь тетрадями, выполните задание одноклассника (цы). Сравните решения, разберите ошибки. Некоторых учащихся вызвать к доске.

Новая тема. Перестановки без повторений.

(слайд 2)*Определение:* **Перестановкой** из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Количество перестановок из n элементов принято обозначать P_n(перестановка по-французски permutation).

Количество перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$

Чаще всего эту запись формулируют следующим образом: «*Число всех перестановок множества из n элементов равно n!*».

(слайд 3)***Теорема***. n различных элементов можно расставить по-одному на n различных мест ровно n! способами.

Для n = 1, 2, 3 она уже проверена нами. Чтобы получить ее для n = 4, рассуждаем так. Составим четыре ряда перестановок для цифр 1, 2, 3, 4. В первый ряд поставим все перестановки, начинающиеся с 1:

1243, 1324, 1342, 1423, 1432.

Таких перестановок 6 = 3!, т.е. столько, сколько раз можно переставить цифры 2, 3, 4, стоящие после цифры 1.

Но на первое место можно поставить любую из четырех цифр, и в каждом таком случае получится 6 перестановок, т.е. всего перестановок

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$

Можно доказать, что P_n=n! для любого натурального n.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же различных объектов и отличающиеся только порядком их расположения.

После введения нового материала учащиеся приступают к выполнению заданий.

(слайд 4)**Пример 1**. Сколько перестановок можно получить из букв, составляющих слово «апельсин»?

Решение: Речь идет о вычислении P_8. По формуле имеем:

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\ 320$.

Ответ: 40 320.

Из этих комбинаций только одна является осмысленным словом русского языка, все остальные – бессмысленный набор букв!

(слайд 5)**Пример 2**. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\,320$.

Значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.

Ответ: 40 320.

(слайд 6)**Пример 3**. Имеется десять различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение. Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо рассматривать не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6\cdot P_4$.

Получаем $P_6\cdot P_4 = 6!\cdot 4! = 720\cdot 24 = 17\,280$.

Ответ: 17 280.

(слайд 7) Составить задачу по теме. Работа в парах. Обменятся тетрадями, решить, разобрать решение с автором задачи.

(слайд 1) **Занятие 6. Размещения без повторений**

Цели занятия: ввести и сформулировать определение размещения без повторений; рассмотреть вывод формулы для числа размещений без повторений; отработать навыки решения задач на нахождение числа размещений без повторений.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей занятия
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы
5. Решение задач.
6. Подведение итогов урока

Ход занятия

1 этап. Актуализация (слайд2)

- Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?
- Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
- Из села Дятлова в село Матвеевское ведут три дороги , а из села Матвеевское в село Першино – четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из Дятлово в Першино через Матвеевское.

2 этап. Постановка целей и темы занятия

Из различных элементов множества, содержащего n элементов можно образовывать группы или выборки элементов. Если в каждую выборку элементов входит одно и то же число элементов, например k, то говорят, что они образуют *соединения* из n элементов по k в каждом. В зависимости от того, входят ли в соединения все элементы данного множества или только часть их, играет ли роль порядок элементов или не играет, различают 3 вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания.*

3 этап. Введение нового материала

(слайд 3) **Определение**. Размещением из n элементов по к (к<n) называется любое множество, состоящее из любых к элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

Перестановки являются частным случаем размещений, действительно, если в размещениях рассмотреть случай, когда $k = n$, то мы получим, что размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов, т.е. являются перестановками. Отсюда можно получить формулу для вычисления перестановок. (слайд4)

$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$ Следовательно, $P_n = n!$.

(слайд 5) ***Размещениями*** называют различные комбинации из k объектов, которые выбраны из множества n различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком.

Количество размещений рассчитывается по формуле

Число размещений из n элементов по к обозначают A_n^k

Читают «А из n по к».

Размещением называется расположение предметов на некоторых местах при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

В отличие от сочетаний размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы < 2,1,3 > и < 3,2,1 > являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1,2,3} (то есть, совпадают как сочетания) .

Сколько можно составить размещений из n элементов по k, где k<n. Первый элемент можно выбрать n способами. Так как после этого остается (n-1) элемент, то для каждого выбора первого элемента имеется (n-1) способ выбрать второй элемент. Далее для каждого выбора первых двух элементов можно (n-2) способами выбрать третий элемент из (n-2) оставшихся и т.д. Наконец, для каждого выбора первых (k-1) элементов можно (n-(k-1)) способами выбрать k-й элемент из (n-(k-1)) оставшихся.

Значит, A_n^k = n(n-1)(n-2)* ….* (n-(k-1)).

Или A_n^k = n(n-1)* …..(n-k+1).

Эту формулу можно записать иначе, умножив числитель и знаменатель на (n-1)*…*1

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ - формула для вычисления числа размещений из n элементов по k

Упражнение.

Вычислите : $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3*4*5 = 60$

Из определения размещений без повторений следует , что n>k ? поэтому вычислить A_3^5 нельзя.

Далее учащиеся работаю в парах. Решение задач с взаимопроверкой.

(слайд 6) **Задание 1**.Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

Решение: $A_4^3 = \frac{4!}{1!}$ = 4*3*2*1= 24.

Ответ: 24 способа.

(слайд 7) Задание 2.На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Решение: $A_{7!}^{4!} = \frac{7!}{3!}$ = 7*6*5*4= 840.

Ответ: 840 способов**.**

Задание 3.Сколькими способами тренер может определить, кто из 12 спортсменок, готовых к участию в эстафете 4×100 м, побежит на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение: $A_{12!}^{4!} = \frac{12!}{8!}$ = 12*11*10*9* = 11880.

Ответ: 11880 способов

Задание 4.Учащиеся 9-го класса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

Решение: $A_{10!}^{6!} = \frac{10!}{4!}$ = 10*9*8*7*6*5= 151200

Ответ:151200 способов.

За данный урок учащиеся получат 2 отметки, одну за работу в парах, вторую за самостоятельную работу.

(слайд 8) Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Из 30 обучающихся класса надо выбрать хозяйку класса, старосту и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $A_{30!}^{3!} = \frac{30!}{27!} = 30 * 29 * 28$ = 24360.

Ответ: 24360 способами.

Задание 2. В конкурсе песен «Галерея звезд» участвуют 15 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места?

Решение: $A_{15!}^{3!} = \frac{15!}{12!}$ = 15*14*!3 = 2370

Ответ: 2370 способа.

Задание 3. Пять разных предметов раздают 8 людям, причем может случиться так, что некоторые получат по несколько предметов. Сколькими способами может быть произведен раздел?

Решение : $A_{8!}^{5!} = \frac{8!}{5!}$ = 8*7*6= 6720.

Ответ: 6720 способов.

Занятие 7 . Сочетание без повторений

Цель занятия: ввести и сформулировать определение размещения без повторений; рассмотреть вывод формулы для числа размещений без повторений; отработать навыки решения задач на нахождение числа размещений без повторений.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Введение нового материала
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы

5. Подведение итогов урока

1. Актуализация

(слайд 2) Решите задачи.

1. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его учащихся будет выступать первым, вторым и третьим?

Решение : всего 15 человек. Первому выступать есть выбор у 15 участников, вторым выступать –у 14 участников, третьим выступать – у 13 участков.

15*14*13= 2730

Ответ: 2730 способов.

2.Сколькими способам 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов.

Решение: Первому вошедшему в аудиторию предоставляется 20 мест, второму -19 мест, третьему -18.. и т.д

20*19*18*17*16*15=27907200

Ответ: 27907200

3. На соревнованиях по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить , кто из них побежит в эстафете 4 по 100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение: первым побежать есть возможность у 12 спортсменок, второй побежать –у 11 спортсменок, третьей побежать -10, четвертой –9 .

12*11*10*9=11880

Ответ: 11880 способов.

2. Постановка темы и целей урока

Цель занятия:

- Ввести понятие «сочетание без повторений»;
- провести сравнительный анализ перестановок, размещений, сочетаний.

Познакомить учащихся с формулой.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

- и рассмотреть задачи, при решении которых она используется.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов во множестве. Важно лишь то, какие именно элементы составляют множество.

К примеру, представим себе школьный класс, который пришел в спортзал. Ребята могут выстроиться в шеренгу, а могут бегать, прыгать или лазать по канату – все равно они останутся тем же множеством учеников класса. А теперь представим, что часть из них перевели а соседнее помещение, где им также разрешается заниматься спортом. Такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен, называется сочетанием.

3. Введение нового материала

(слайд 3) **Определение**. Число k подмножеств в n множестве X называют сочетанием из n по k. Число таких сочетаний обозначаются C_n^k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Сочетаниями называют различные комбинации из k объектов, которые выбраны из множества X различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из n элементов, в которой не важен их порядок (расположение)

Размещением называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны. Сочетанием из n по m называется набор m элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом) , считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений. В отличие от сочетаний размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы <2,1,3> и <3,2,1> являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1,2,3} (то есть, совпадают как сочетания).

(слайд 4) В сочетаниях меняется только состав, входящих в комбинацию элементов , порядок их расположения не важен.

Замечание: То есть порядок расположения элементов не важен; значение имеет только состав выборки.

Число сочетаний из *n* элементов по *k*, где k < n , обозначают C_n^k и вычисляют

по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (слайд 5)

4.Решение задач по теме.

(слайд 7) **Задача 1**.Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Решение: Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, безразличен, то число различных случаев составить команду равно:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{2*1*5*4*3*2*1} = 42:2 = 21$$

Ответ: 21 способ.

Задача 2. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Решение: прежде всего, детали считаются различными – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы. В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей. Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15*14*13*12}{4*3*2*1} = 1365$$

Ответ 1365 способов.

Задача 3. У лесника 3 собаки: Астра (А), Вега (В) и Гриф (Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

Решение: Это задача о выборе двух элементов из трех без учета порядка. Перечислим варианты выбора из А, Б, В по два: А, Б; А, В; Б, В. Если учащиеся знают формулу для числа сочетаний, то количество вариантов равно: $C_3^2 = C_3^{3-2} = C_3^1$=3.

Ответ: 3 варианта.

Задача 4. Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых желающих дежурить по столовой?

Решение. Количество сочетаний из 4 по 3 (порядок выбора не имеет значения) равно: $C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4$= 4. Иначе можно рассуждать так. Вместо выбора троих дежурных выберем одного, который не будет дежурить, а трех оставшихся отправим на дежурство. Количество способов выбрать одного из четверых ребят равно 4.

Ответ: 4 способа.

Задача 5.Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две группы: а) по 4 и 8 человек; б) по 5 и 7 человек?

Решение. Количество способов разбиения множества на две части равно количеству способов формирования одной из частей (любой). Поскольку порядок расположения элементов не учитывается, имеем:

а) $C_{12}^4 = C_{12}^8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ способов разбиения на 4 и 8 элементов.

б) $C_{12}^5 = C_{12}^7 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$ способов разбиения на 5 и 7 элементов.

Ответ: а) 495 способов; б) 792 способа.

5.Осудить с ребятами, наиболее понравившиеся задания. Ответить на вопросы учащихся. (слайд 13)

Занятие №8.Обобщение и систематизация знаний по темам курса. Решение комбинаторных задач

Цель занятия: обобщение и систематизация знаний по темам курса; формирование опыта решения комбинаторных задач.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы
4. Подведение итогов урока

1. Повторите формулы и определения по темам перестановки, размещения , сочетания.

«Вспомнить все» под таким лозунгом предлагаю начать сегодняшнее занятие. Ребята, сегодня нам необходимо обобщить и систематизировать знания по пройденному курсу.

2. «Скажи мне — и я забуду, покажимне — и я запомню, дай мне сделать — и я пойму». (Конфуций). Ребята, чтобы вы поняли, запомнили и научились необходима практика. Сегодня мы будем решать задачи по пройденным темам.

3. **Задание 1.** Заполнение таблицы 8 совместно с учащимися.

Таблица 8

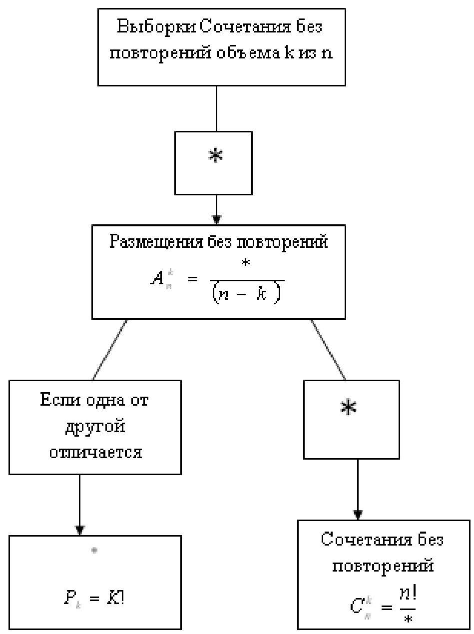
Опорный конспект по темам курса

Перестановки	**Размещения**	**Сочетания**
n элементов n клеток	n элементов k клеток (k<n)	n элементов k клеток (k<n)
Порядок имеет	Порядок имеет	Порядок не имеет

значение	значение	значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Задание 2. Заполнить пропуски в обобщающей схеме (схема 3).

Схема 3.



Задание 3. Вычислите : 1) C_5^3 ; 2) C_3^5 ,

1) $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5*4*3*2*1}{3*2*1*2*1} = 10$;

2) по определения сочетание без повторений следует, что $k<n$. Поэтому вычислить C_3^5 нельзя.

После того, как учащиеся ознакомились с новой темой, учитель предлагает ряд заданий на первичное закрепление изученного материала.

(Слайд 2)**Задача 1**.В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение. Выбираем 2 учащихся из 7, порядок выбора не имеет значения (оба выбранных пойдут на олимпиаду как полностью равноправные); количество способов выбора равно числу сочетаний из 7 по 2: $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ способ.

Ответ: 21 способ.

(Слайд 3)**Задача** 2. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

Решение. Выбор из 8 по 3 без учета порядка: $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ = 56 способов.

Ответ: 56 способов.

(Слайд 4)**Задача** 3. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Решение. Выбор 6 из 10 без учета порядка: $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ способов.

Ответ: 210 способов.

(Слайд 5)**Задача** 4. В 9 «А» классе учатся 25 учащихся, в 9 «Б» -20 учащихся, а в 9 «В» - 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 9 «А», двух - из 9 «Б» и одного - из 9 «В». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

Решение. Выбор из трех совокупностей без учета порядка; каждый вариант выбора из первой совокупности (C_{25}^3) может сочетаться с каждым вариантом выбора из второй (C_{20}^2) и с каждым вариантом выбора из третьей (C_{18}^1); по правилу произведения получаем:

$C_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{18}^1 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot \frac{18}{1} = 7866000$ способов выбора учащихся

Ответ: 7 866 000 способов. Учащиеся должны определить вид задачи (перестановки, сочетание, размещение), опираясь на изученный ранее материал. (Слайд 6)**Задания для самостоятельной работы**.

(Слайд 7)**Задание 1.(Правило умножения)** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) числа не повторяются;

б) числа могут повторяться.

Решение.

а) Первую цифру выбираем 5 способами, вторую цифру – 4 способами, третью – 3 способами. Всего 5•4•3 =60 трехзначных чисел.

б) Всего 5•5•5 =125 трехзначных чисел.

Ответ: а) 60; б) 125.

(Слайд 8)**Задание 2 (Правило сложения**) На блюдце лежит 8 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно взять плод с блюдца?

Решение. Всего способов 6 +8 =14.

Ответ: 14.

(Слайд 9)**Задание 3 (Перестановки)** Сколькими способами можно обозначить вершины куба буквами A, B, C, D, E, F, G, K?

Решение. Число способов обозначить восемь вершин куба данными различными буквами (которых также восемь) равно P_8 = 8!= 40320

Ответ: 40320.

(Слайд 10)**Задание 4. (Размещения без повторения)**

Сколькими способами может разместиться семья из четырех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

P_4 = 4! =4*3*2*1 =24 способа.

Ответ : 24 способа.

В местком избрано девять человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя и культуролога. Сколькими способами это можно сделать.

Решение: $A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9*8*7}{1!} = 504.$

Или нужно найти число картежей длины 3. (на три должности выбирают). На первую должность выбирают из девяти человек, на вторую - из восьми, на третью - из семи. По правилу произведения получаем : 9*8*7 = 504.

(Слайд 11)**Задание 5. (Сочетания без повторения)**

В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 16 команд, при этом любые две команды играют между собой только один матч. Сколько всего календарных игр?

Решение. $C_{16}^2 = \frac{16!}{2!\,14!} = \frac{16*15}{2} = 120$

Число календарных игр равно =120.

Ответ: 120.

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Сколькими способами можно выбрать из вазы букет , состоящий из двух красных и одной белой розы?

Решение: (по правилу произведения)

$$C_{10}^1 \cdot C_5^2 = \frac{10!}{1 \cdot 9!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 100.$$

Ответ : 100способов.

(Слайд 12)**Задание 6**. Из вазы с фруктами , в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение : выбрать 3 яблока из 9 можно способами, выбрать 2 груши из 6 можно выбрать способами. Так как при каждом выборе яблок груши можно выбрать способами, то сделать выбор фруктов в задаче можно $C_9^3 * C_6^2$ способами.

Имеем $C_9^3 * C_6^2 = \frac{9!6!}{3!6!2!\,4!} = \frac{9*8*7*6*5}{3*2*2} =$ 1260

Ответ:1260 способов

Проблемный вопрос:

Может ли нам комбинаторика помочь в реальной жизни?

Решение комбинаторных задач развивает творческие способности, помогает при решении олимпиадных задач, задач из ГИА, ЕГЭ.

(Слайд 13)*Области применения комбинаторики:*

-учебные заведения (составление расписаний)

-сфера общественного питания (составление меню)

-лингвистика (рассмотрение вариантов комбинаций букв)

-спортивные соревнования (расчёт количества игр между участниками)

-агротехника (размещение посевов на нескольких полях)

-география (раскраска карт)

-биология (расшифровка кода ДНК)

-химия (анализ возможных связей между химическими элементами)

-экономика (анализ вариантов купли-продажи акций)

-дизайнерское дело (рассмотрение вариантов интерьера)

-криптография (разработка методов шифрования)

-доставка почты (рассмотрение вариантов пересылки)

-военное дело (расположение подразделений)

Необыкновенно популярной головоломкой стал кубик Рубика, изобретенный в 1975 году преподавателем архитектуры из Будапешта Эрне Рубиком для развития пространственного воображения у студентов.

Лучшее время, показанное на чемпионате мира 1982 г. по скоростной сборке кубика Рубика, составило всего 22,95 секунды.

Кубик Рубика служит не только развлечением, но и прекрасным наглядным пособием по комбинаторике.

Вывод:

Комбинаторика повсюду.

Комбинаторика везде.

Комбинаторика вокруг нас.

4. Какие задачи Вам показались трудные, вызвали вопросы? Ответить на вопросы учащихся.

Занятие №9. Итоговое занятие: Игра « Покори вершину» (Слайд 1)

Цель занятия: итоговое повторение и контроль знаний по темам курса.

Структура занятия:

1. Актуализация
2. Постановка темы и целей урока
3. Вводный инструктаж.
4. Выполнение заданий
5. Подведение итогов урока

Ход занятия:

1. На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминают все основные определения и формулы: решение комбинаторных заданий перебором вариантов, правило суммы и произведения, понятие размещения и формулы для вычисления числа размещений, понятие перестановки и формулу для вычисления количества перестановок, понятие сочетания и формулу для нахождения числа сочетаний объектов.

2. Цель занятия – применение ранее полученных знаний при решении задач по комбинаторике, повторение и систематизация знаний по темам курса.

3. Необходимо пройти два этапа. Первый этап - индивидуальный подъем до вершины. Учащиеся получают задания на руки, либо на слайдах, выполняют задания самостоятельно. Решив задание, проверяют ответы у учителя. Другой

этап – командный. Учеников класса необходимо разделить на две равносильных команды. Командой дойти до вершины. Учитель рассказывает правила прохождения до вершины.

Задания с задачами находятся в конвертах. На конвертах подписаны уровни. Выбрав уровень ученик берет задачу.

(Слайд 2)**Правила для индивидуальной игры учащихся.**

На вершину ведут три дорожки, начало которых для любого пути совпадают с цифрой 1. Дорожки имеют места «отдыха», пронумерованные числами. За каждым числом закреплено свое задание, которое необходимо выполнить. Разные пути имеют разное количество задач. Количество задач зависит от их сложности. Первый путь – три сложные задачи; второй путь- содержит задачи средней сложности; третий путь – шесть простых задач. Ученик сразу определяет по какому пути он будет двигаться к вершине. В зависимости от выбора ученики получают свой набор задач, который они должны решить. В качестве домашнего задания – дойти другим путем до вершины.

В качестве домашнего задания – дойти другим путем до вершины.

(Слайд 3)Пример пути (маршрута) следования до вершины показан на рисунке 6.

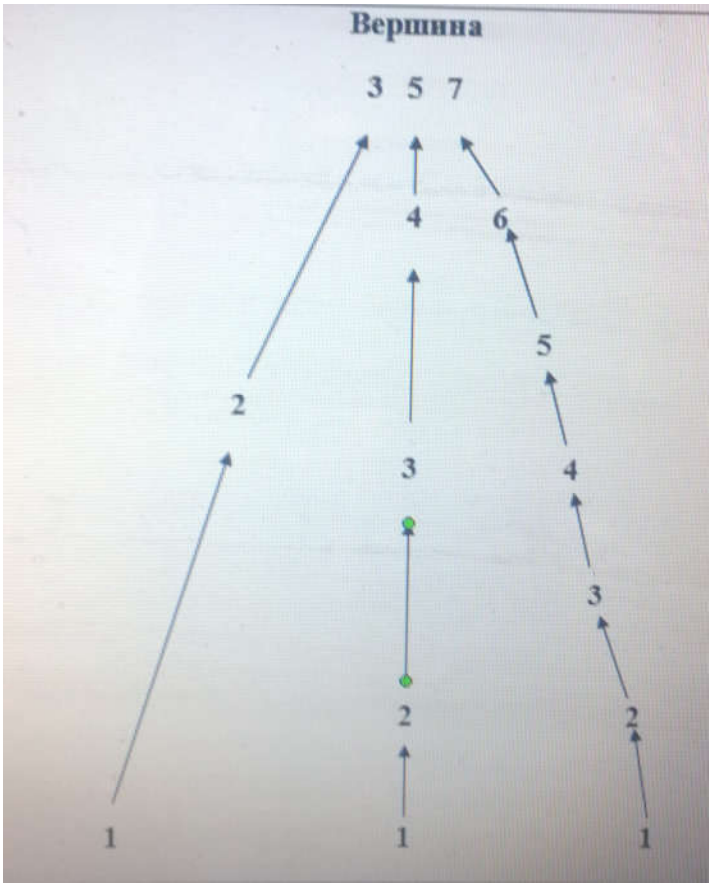


Рисунок 6. Пример маршрута.

Задания для учащихся.

Короткий путь (первый.3 шага)

1.Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих.

2. У Нины есть 7 различных книг по математике, а у Славы – 9 различных книг по истории. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом по 5 книг?

3.Сколькими способами из 20 человек выбрать 2 судей и 5 участников одной команды баскетбольного матча?

Средний путь. (5 шагов).

1. Вычислить : а) $\frac{8!}{10!}$ б) $\frac{16!}{14!*3!}$ в) $\frac{42!}{40!}$

2.В столовой предлагают 3 различных первых блюда A_1,A_2 и A_3, 2 различных вторых блюда B_1 и B_2 и 2 десерта C_1 и C_2. Сколько различных обедов из 3^x блюд может предложить столовая?

3.Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?

4. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

Длинный путь (6 заданий)

1.Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов?

2.В классе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя, физорга и редактора газеты. Сколькими способами можно это сделать, если один учащийся может занимать только один пост?

3.Из всех одиннадцатиклассников школы, которых 31 человек, выбирают шесть делегатов на молодежный городской слет. Сколькими способами может быть выбрана эта шестерка?

4.Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

5.На полке 5 книг. Надо выбрать 2 книги из имеющихся. Сколькими способами читатель может их выбрать?

6.Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 5;4;3;2, если одна и также цифра не может повторяться ?

Короткий путь (первый.3 шага)

(Слайд 4)**Правило для командной игры.**

Необходимо добраться до вершины.

Подниматься снизу вверх, проходя этапы. Маршрут учащиеся определяют самостоятельно, договариваются по какому выбранному пути пойдет команда. За весь путь необходимо преодолеть 4 этапа (решить 4 задачи). Победителем является команда, которая все свои задачи решить и объяснит учителю их решение быстрее всех. Как выбрать маршрут показано на рисунке 7. (Слайд 5)

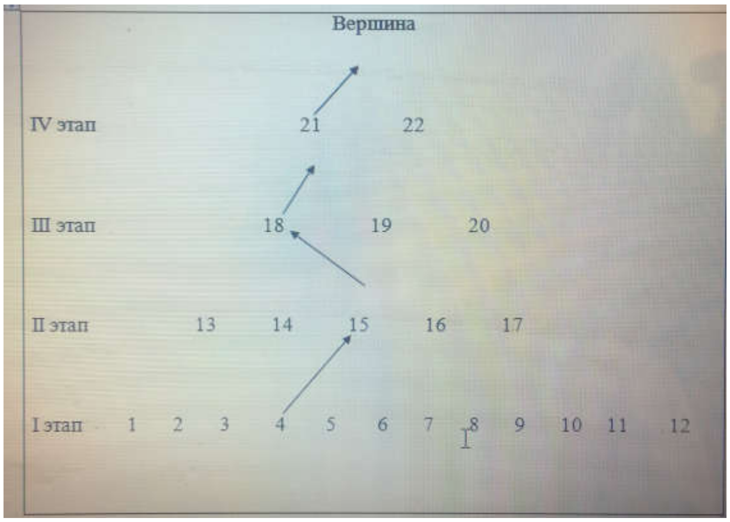


Рисунок 7.Пример выбора маршрута.

Задание для учащихся.

1 уровень

Вычислите: 1) $\frac{15!}{14!}$; 2) $7!$; 3) $\frac{7!-5!}{4!}$; 4) $\frac{100!}{99!}-\frac{99!}{98!}$; 5) $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}$.

6) $\frac{8!}{10!}$ 7) $\frac{16!}{14!*3!}$ 8) $\frac{42!}{40!}$

Решение:

1) $\frac{15!}{14!}=\frac{15}{1}=15$ 2) $7!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot7=5040$; 3) $\frac{7!-5!}{4!}=\frac{5!(7\cdot6-1)}{4!}=5\cdot41=205$;

4) $\frac{100!}{99!}-\frac{99!}{98!}=100-99=1$; 5) $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}=50\cdot49-30\cdot29=10\cdot(5\cdot49-3\cdot29)=1580$.

6) $\frac{8!}{10!}=\frac{1}{10*9}=\frac{1}{90}$ 7. $\frac{16!}{14!*3!}=\frac{16*15}{3*2}=\frac{8*5}{1}=40$ 8. $\frac{42!}{40!}=\frac{42*41}{1}=1722$

9. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

P_4= 4! = 4*3*2*1= 24 способа.

Ответ: 24 способа.

10. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

P_7 = 7*6*5*4*3*2*1= 5040

Ответ: 5040 маршрутов.

11.Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в театральную кассу?

Решение: P_9= 9*8*7*6*5*4*3*2*1=362880

Ответ : 362880 способов.

12.Во сколько раз $6! \cdot 5$ больше $5! \cdot 6$?

Решение:

6!*5= 6*5*4*3*2*5=3600

5!*6= 5*4*3*2*6 = 720

3600:720 = 5

Ответ: в 5 раз.

2уровень!

13. В одной пачке лежит 10 тетрадей в клеточку, в другой – 15 тетрадей в линию. Сколькими способами можно выбрать 1 тетрадь в клетку или 1 тетрадь в линию?

Решение. Из первой пачки тетрадь в клетку можно взять 10 способами, а из второй – 15 способами. Значит, всего существует 10+15=25 способов.

Ответ : 25 способов.

14. Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – 3 дороги, из города С до пристани - две дороги (см. рис.1).Туристы хотят проехать из города А через город В и С к пристани. Сколькими способами, они могут выбрать маршрут?

Решение графически представлено на рисунке 8.

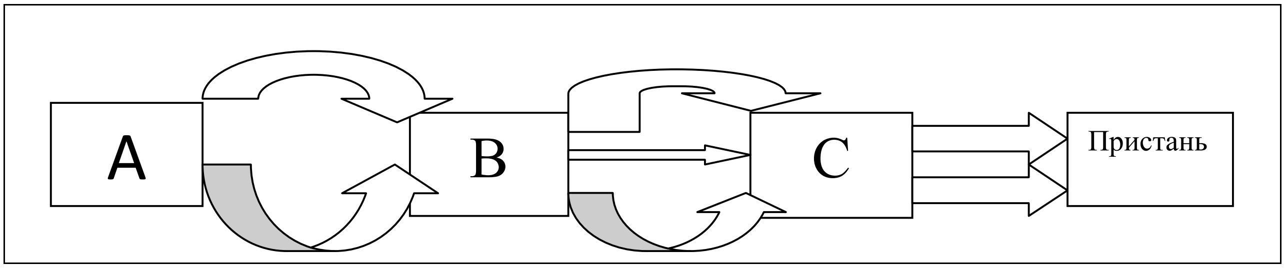


Рисунок 8. Решение задания №14.

2* 3*2 = 12

Ответ: 12 способов.

16.В столовой предлагают 2 различных первых блюда рассольник и щи, 3 различных вторых блюда: плов, спагетти, пюре, и два вида десерта фруктовый салат и пирожное. Сколько различных обедов из 3^{x} блюд может предложить столовая?

Решение. Для удобство введем обозначения:

Рассольник-Р, Щи-щ, плов-П, спагетти-С, пюре-П, фруктовый салат-ФС, пирожное-П. Дерево возможных вариантов показано на рисунке 9.

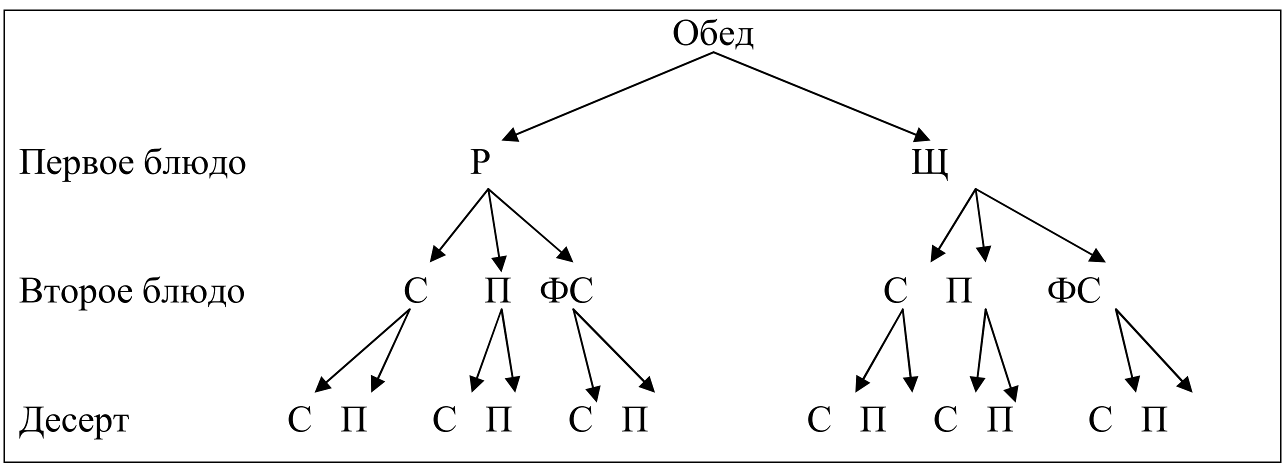


Рисунок 9.Дерево возможных вариантов.

Ответ : 12 вариантов.

15. В столовой предлагают 3 различных первых блюда A_1,A_2 и A_3, 2 различных вторых блюда B_1 и B_2 и 2 десерта C_1 и C_2. Сколько различных обедов из 3^{x} блюд может предложить столовая?

Решение: Составим дерево возможных вариантов. На рисунке 10 показано дерево возможных вариантов.

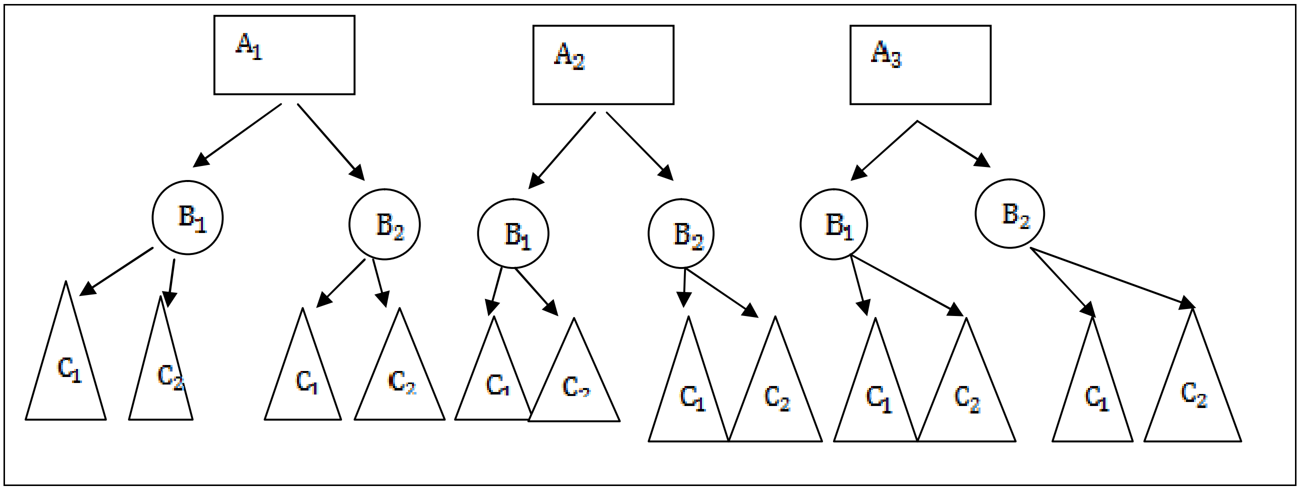


Рисунок 10. Дерево возможных вариантов.

4*3=12

Ответ: 12 вариантов.

17. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов? *Решение*: Петр может выбрать брюки пятью способами, камзолы – шестью способами, шляпы – тремя способами и сапоги – двумя. Итак, Петр может составить из этих предметов по комбинаторному правилу умножения 5×6×3×2 =180 различных карнавальных костюмов. Ответ: 180 карнавальных костюмов.

3 уровень!

18.Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

Решение. Сержанта можно выбрать 3 способами, солдат -

$$\overline{C_{30}^{3}} = \frac{30!}{3!\cdot(30-3)!} = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{6} = 4060$$

Значит, число способов образовавших патруль равно 3*4060= 12180

Ответ: 12180 способов.

19 . На полке 5 книг. Надо выбрать 2 книги из имеющихся. Сколькими способами читатель может их выбрать?

Решение. Искомое число способов равно числу сочетание из 5 книг по 2, то есть

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(3-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Ответ: 10 способов.

20. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 5;4;3;2, если одна и таже цифра не может повторяться?

Искомое число способов равно числу сочетание из 4 цифр по 3, то есть

$A_4^3 = \frac{4!}{1!(4-3)!} = \frac{4!}{1!}$= *4*3*2*1=24*

Ответ*: 24 числа.*

4 уровень!

21 . Сколькими различными способами собрание, состоящее из 50 человек, может выбрать из своей среды председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Решение : 50*49*48= 117600

Ответ : 117600 способов.

22. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправит 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку; б) заведующий лабораторией должен остаться?

Решение: а) Если заведующий обязательно должен поехать в командировку, то нужно выбрать ещё 4 человека из 10 сотрудников.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$$

Ответ: 210 способов

б) Если заведующий должен остаться, то надо выбирать 5 из 10.

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!\cdot 5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2\cdot 9\cdot 1\cdot 7=252$$

Ответ: 252 способа.

«Путь к вершине» можно использовать как индивидуальную, так командную игру. Эта игра отличается от обычных форм самостоятельной работы: во-первых, тем, что здесь имеется дополнительный игровой мотив, который для некоторых учащихся является ведущим (достичь вершины – их основная цель); во-вторых, он проводится в спокойной форме, так как учащиеся могут в любое время, в случае затруднения, обратиться к товарищам по команде за помощью и советом; в-третьих, в нем можно (незаметно для других) учесть индивидуальные особенности учащихся. Например, для слабых команд можно составить более простые варианты задач с тем, чтобы они могли при достаточных усилиях наравне с другими учащимися взойти на вершину. И наоборот, одаренные ученики могут рассчитывать при восхождении на вершину на такие "головоломки", которые заставят работать мысль в полную силу.

2.3. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе Муниципального казенного общеобразовательного учреждения «Проточинской средней школы» Красноярского края, Бирилюсского района, поселка Проточного.

В педагогическом эксперименте принимали участие обучающихся 9-го класса.

На констатирующем этапе эксперимента осуществлялась оценка уровня сформированности предметных знаний обучающихся по теме «Комбинаторика». Для диагностики уровня сформированности предметных знаний обучающихся по теме «Комбинаторика» был разработан специальный набор заданий базового уровня сложности.

Обучающимся на констатирующем этапе эксперимента был предложен контрольный срез № 1, состоящий из вопросов и простейших комбинаторных задач (Таблица 9).

Таблица 9.

Контрольный срез № 1

Ф.И.О.____
1. Что изучает комбинаторика? ______________________________________
____
____
Решите задачи:
2. Три друга, Антон, Борис и Виктор, приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов похода на футбол?
3. В магазине продаются семь видов футболок и четыре вида шорт. Сколькими разными способами можно выбрать покупку одной футболки и одних шорт?
4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?
5. Как вы думаете, для чего нужна комбинаторика? ________________________
____
____

Первый и последний вопросы контрольного среза № 1 позволяют оценить, знают ли учащиеся что такое комбинаторика, что она изучает и для чего она нужна. Помимо этих вопросов учащимся предложены были 3 задачи: первая задача на правило перебора различных комбинаций, вторая задача – на применение правила произведения, а третья на составление нескольких комбинаций.

На первый вопрос контрольного среза дали верный ответ лишь 1% и столько же учащихся правильно ответили на последний вопрос, со второй задачей справилось 39% от общего количество учащихся 9 кл., с задачей номер 3 – 20% учащихся, с задачей номер 4 – 20% учащихся. Все пять заданий выполнили правильно всего лишь 29% и 1% учащихся, которые вообще не справились ни с одним заданием (Рисунок 10).

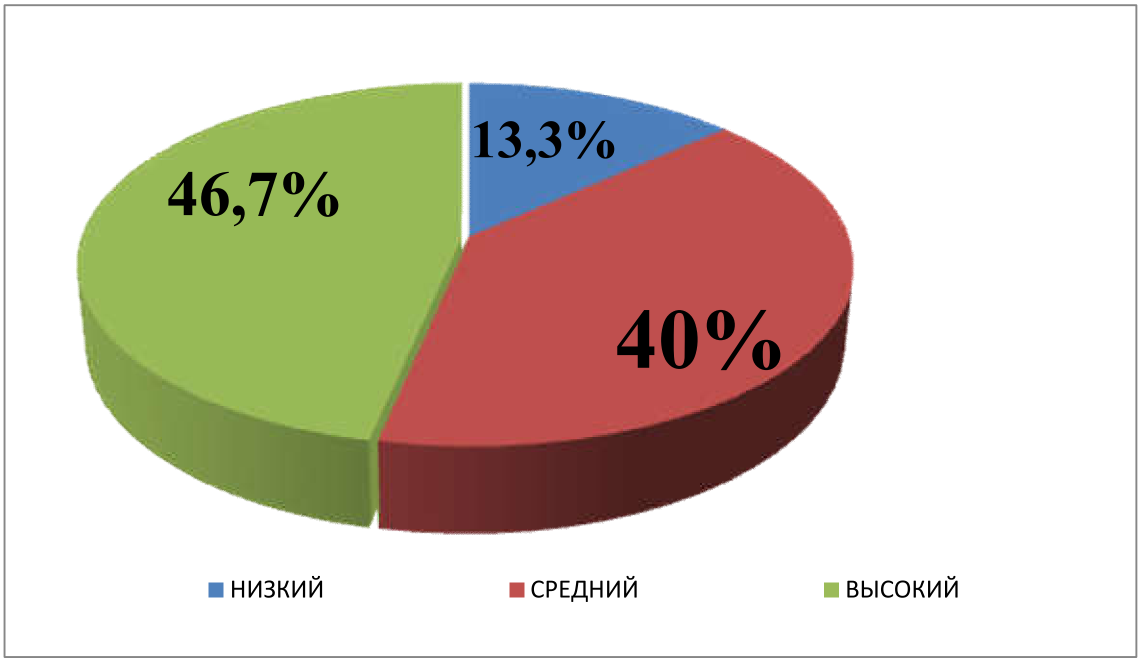


Рис. 10. Результаты контрольного среза № 1
(констатирующий этап эксперимента)

Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что есть школьники, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением, не способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и не готовы применять эти знания и опыт на практике. Это свидетельствует о необходимости дополнительной подготовки обучающихся по данному разделу школьного курса математики. С этой целью, на формирующем этапе эксперимента, осуществлялось обучение курсу по выбору «Комбинаторика – это просто!» обучающихся 9 класса на основе разработанных и представленных в параграфе 2.2. конспектов занятий.

В ходе обучения курсу по выбору «Комбинаторика – это просто!», нами было отмечено, что большинство обучающихся проявляли интерес, инициативу и самостоятельность при решении комбинаторных задач.

По итогам формирующего этапа эксперимента, нами повторно была проведена оценка и измерение уровня сформированности предметных знаний по теме «Комбинаторика». Для диагностики был использован тот же набор заданий, что и для констатирующего этапа эксперимента.

С первым вопросом контрольного среза № 1справились все учащиеся; на последний вопрос верно ответили 70% учащихся; со второй задачей справилось 74% от общего количества обучающихся, участвовавших в эксперименте; с задачей номер 3 – 96% учащихся; с задачей номер 4 – 89% учащихся. Все пять заданий выполнили правильно 48% учащихся, и нет ни одного учащегося, который вообще не справились ни с одним заданием.

Результаты повторного контрольного среза представлены на рис. 11.

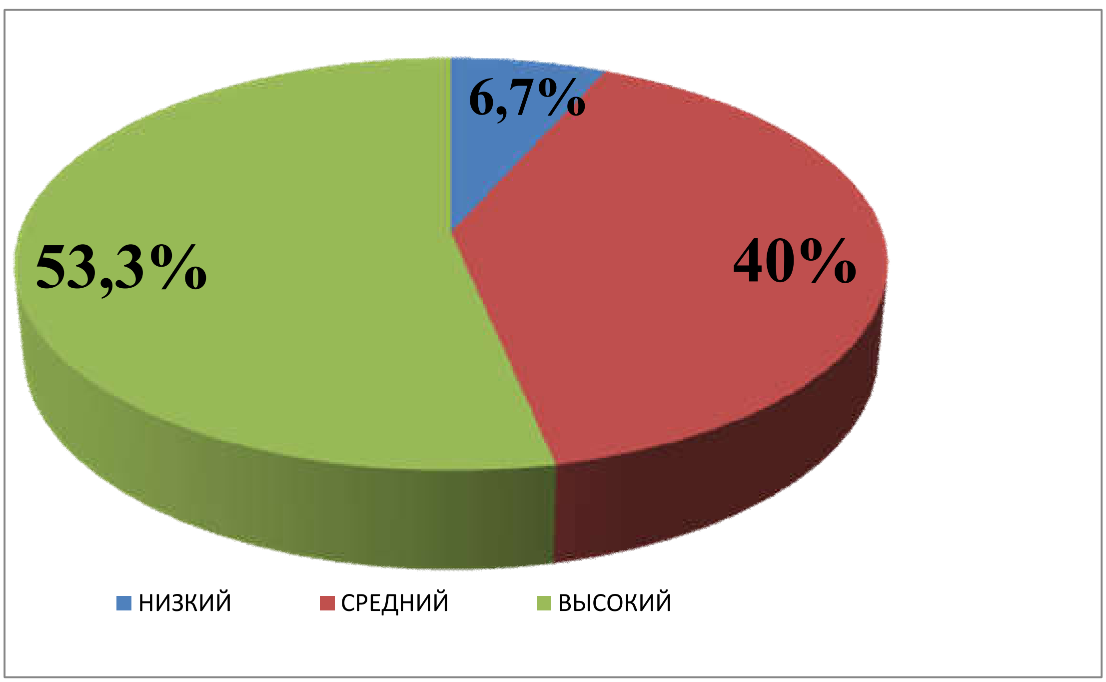


Рис. 11. Результаты контрольного среза № 1 (контрольный этап эксперимента)

Полученные результаты контрольного этапа эксперимента показали, что у многих обучающихся уровень предметных знаний по теме «Комбинаторика» повысился – стали более уверенно решать комбинаторные задачи и готовы применять эти знания и опыт на практике. Что подтверждает гипотезу нашего исследования*:* если в систему математической подготовки включить специальный курс по выбору «Комбинаторика – это просто!», то это будет способствовать формированию у обучающихся предметных результатов в области комбинаторики.

Заключение

Элементы комбинаторики и теории вероятности в обязательном порядке входят как в содержание математической подготовки школьников, так и в содержание итоговой государственной аттестации выпускников общеобразовательных школ. Считается необходимым формирование у выпускника одной из важнейших способностей ума – способности представлять явления в разных комбинациях.

В данной работе представлена идея дополнительного обучения по теме «Комбинаторика» в рамках курса по выбору обучающихся 9 класса.

Проанализирована специальная литература и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.

Проведен сравнительный анализ содержания школьных учебников и программ по математике 5-9 классов по теме «Комбинаторика», и, установлено, что в рамках школьной программы обучающимся предоставлен недостаточный объем часов и информации для её изучения, а у некоторых авторов данная тема вообще отсутствует.

Спроектирована содержательная основа и программа курса по выбору «Комбинаторика – это просто!» для обучающихся 9 класса.

Разработана методика обучения (9 конспектов занятий) курса по выбору «Комбинаторика – это просто!».

Организован и проведен на базе Муниципального казенного общеобразовательного учреждения «Проточинской средней школы» Красноярского края, Бирилюсского района, поселка Проточного педагогический эксперимент по формированию у обучающихся предметных результатов по теме «Комбинаторика» в рамках курса по выбору.

Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что есть школьники, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением, не способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и не готовы применять эти знания и опыт на практике. Что свидетельствует о необходимости дополнительной подготовки обучающихся по данному разделу школьного курса математики. С этой целью, на формирующем этапе эксперимента, осуществлялось обучение курсу по выбору «Комбинаторика – это просто!» обучающихся 9 класса на основе разработанных и представленных в работе циклов конспектов занятий.

Результаты обучения показали, что у многих обучающихся уровень предметных знаний по теме «Комбинаторика» повысился – стали более уверенно решать комбинаторные задачи и готовы применять эти знания и опыт на практике. Что подтверждает гипотезу нашего исследования*:* если в систему математической подготовки включить специальный курс по выбору «Комбинаторика – это просто!», то это будет способствовать формированию у обучающихся предметных результатов в области комбинаторики.

Все задачи решены, цель исследования достигнута.

Библиографический список

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра. 7 класс. - 2011
2. Баландина И. Издательский дом «Первое сентября». Учебно-методический журнал.
3. Беспалько В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения. - М.: Издательство ИРПО МО РФ, 1995. – 336 с.
4. Булычев В.А., Бунимович Е.А. «Вероятность и статистика 5-9 классы».
5. Варга Т. Математика 2. Плоскость и пространство. Деревья и графы. Комбинаторика и вероятность: М: Педагогика,1978.-112с.с ил.
6. Виландеберк А.А., Шубина Н.Л. Новые технологии оценки результатов обучения: Методическое пособие для преподавателей. СПб.: Изд-во HUGE, 2008. 168 с.
7. Виленкин Н. Я. Комбинаторика.- М.: ФИМА, МЦНМО,2006.
8. Виленкин Н.Я. и др. Алгебра для 5 класса. - 1996
9. Виленкин Н.Я. Индукция . Комбинаторика. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1976
10. Гнеденко Б.В. математической образование в вузах / Б.В. Гнеденко. - М., 1981. - С. 6.
11. Демонстрационная версия ОГЭ 2018 года.
12. Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Брянск, 2001.
13. Зеер Э., Сыманюк Э. Компетентностный подход к модернизации профессионального образования // Высшее образование в России. 2005. №
14. Зимняя И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. №5. С. 34-42.
15. Зубарева И.И., Мордкович А.Г.. Математика 9 класс – 2008

16. Кейв М.А. , Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании. 2015

17. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть II., 1977

18. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года // Бюллетень Минобразования. 2002. № 2

19. Кодификатор требований к уровню подготовки обучающихся для проведения основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

20. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Наука, 1977. - 65 с.

21. Левин А. Квант ,1999 №5,6

22. Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г, Нешков К.И, Суворова С.Б_2009 - 271с

23. Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г. Пособие « Алгебра: элементы статистики и теория вероятностей » под редакцией С.А. Теляковского ,63с

24. Мерзляк А.Г. , В.Б.Полонский, М.С.Якир. Примерная программа по математике 5-9 классы. М: Вента Граф, 2013

25. Мордкович А.Г., Семенов П.В. «События, вероятности, статистические обработки данных».

26. Муравин Г.К., Муравин К.С., Муравина О.В. Алгебра. 8 класс.

27. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра. 8 класс. – 2006.

28. Педагогика: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В.А. Сластенин и др. – М., 2010.

29. Петерсон Л.Г. и др. Математика. Учебник для 7 кл. в 3-х частях. – 2011-216 с.

30. Предпрофильная подготовка школьников С.В. КРИВЫХ, д.п.н., Петербургская Академия педагогического образования

Примерная образовательная программа по математике, 2015.

31. Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. Издательство «Мир». Москва 1966

32. Рязановский А.Р., Д.Г.Мухин. ОГЭ 2018.Тематический тренажер. Математика. Теория вероятностей и элементы статистики.

33. Семеновых А. Математика №15 2004

34. Теория комбинаторики [Электронный ресурс]. URL: http://www.studfiles.ru/preview/1043389 (Дата обращения 12.01.2018)

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2010.

Приложение 1. Карточки с заданиями для учащихся.

Индивидуальные задания

Короткий путь (первый.3 шага)

1.Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих

2. У Нины есть 7 различных книг по математике, а у Славы – 9 различных книг по истории. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом по 5 книг?

3.Сколькими способами из 20 человек выбрать 2 судей и 5 участников одной команды баскетбольного матча?

Средний путь. (5 шагов).

1. Вычислить : а) $\frac{8!}{10!}$ б) $\frac{16!}{14!*3!}$ в) $\frac{42!}{40!}$

2.В столовой предлагают 3 различных первых блюда A_1,A_2 и A_3, 2 различных вторых блюда B_1 и B_2 и 2 десерта C_1 и C_2. Сколько различных обедов из 3^x блюд может предложить столовая?

3.Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?

4. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?

Длинный путь (6 заданий)

1.Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов?

2.В классе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя, физорга и редактора газеты. Сколькими способами можно это сделать, если один учащийся может занимать только один пост?

3.Из всех одиннадцатиклассников школы, которых 31 человек, выбирают шесть делегатов на молодежный городской слет. Сколькими способами может быть выбрана эта шестерка?

4.Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

5.На полке 5 книг. Надо выбрать 2 книги из имеющихся. Сколькими способами читатель может их выбрать?

6.Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 5;4;3;2, если одна и также цифра не может повторяться ?

Задания для командной игры.

1 уровень	1) $\frac{15!}{14!}$;
1 уровень	2) 7!;
1 уровень	3) $\frac{7!-5!}{4!}$;
1 уровень	4) $\frac{100!}{99!}-\frac{99!}{98!}$;
1 уровень	5) $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}$.
1 уровень	6) $\frac{8!}{10!}$

1 уровень	7) $\frac{16!}{14!*3!}$
1 уровень	8) $\frac{42!}{40!}$
1 уровень	9. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?
1 уровень	10. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?
1 уровень	11. Сколькими способами 9 человек могут встать в очередь в театральную кассу?
1 уровень	12.Во сколько раз $6! \cdot 5$ больше $5! \cdot 6$?
2 уровень	**13.** В одной пачке лежит 10 тетрадей в клеточку, в другой – 15 тетрадей в линию. Сколькими способами можно выбрать 1 тетрадь в клетку или 1 тетрадь в линию?
2 уровень	14. Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – 3 дороги, из города С до пристани - две дороги (см. рис.1). Туристы хотят проехать из города А через город В и С к пристани. Сколькими способами, они могут выбрать маршрут?
2 уровень	15. В столовой предлагают 3 различных первых блюда A_1,A_2 и A_3, 2 различных вторых блюда B_1 и B_2 и 2 десерта C_1 и C_2. Сколько различных обедов из 3^x блюд может предложить столовая?
2 уровень	16. В столовой предлагают 2 различных первых блюда рассольник и щи, 3 различных вторых блюда: плов, спагетти, пюре, и два вида десерта фруктовый салат и пирожное.. Сколько различных обедов из 3^x блюд может предложить столовая?
2 уровень	17. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме

	мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?
3 уровень	18.Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
3уровень	19.На полке 5 книг. Надо выбрать 2 книги из имеющихся. Сколькими способами читатель может их выбрать?
3уровень	20. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 5;4;3;2, если одна и также цифра не может повторяться?
4уровень	*21.* Сколькими различными способами собрание, состоящее из 50 человек, может выбрать из своей среды председателя собрания, его заместителя и секретаря?
4уровень	22. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправит 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку; б) заведующий лабораторией должен остаться?