МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет/филиал Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) Кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе
(полное наименование кафедры)

Сивухина Елена Александровна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема **ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 7–9 КЛАССОВ**

Направление подготовки/специальность 44.03.01
(код направления подготовки/код специальности)

Профиль Математика
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой: д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

08.06.18г.
(дата, подпись)

Руководитель: канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

08.06.18г.
(дата, подпись)

Дата защиты 21.06.2018

Обучающийся Е.А. Сивухина
(фамилия, инициалы)

8.06.18
(дата, подпись)

Оценка
(прописью)

Красноярск 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Чтобы человек был успешным в современном мире, необходимо быть не только профессионально «подкованным», но и обладать определенными личностными качествами такими, как целеустремленность, усидчивость, внимательность, мобильность, многофункциональность. Также необходимо иметь развитое абстрактное мышление, уметь строить планы и следовать им. Все эти и многие другие качества развивает математика. Именно поэтому развитие математического образования в настоящее время является одним из важнейших направлений работы Российской Федерации. Подтверждением этому является утвержденная 27 декабря 2013 г. Концепция развития математического образования в РФ. Данный документ рассматривает проблемы, цели и задачи развития математического образования.

Современное образование развивается и прогрессирует на всех уровнях обучения. Так начальное образование в настоящее время преимущественно является развивающим. Существует огромное множество различных программ начального образования. К ним относятся система развивающего обучения Л.В. Занкова, а также Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, учебно-методические комплекты: «Школы-2100», «Начальная школа XXI века», «Школа России», «Перспективная начальная школа», «Планета знаний», «Перспектива», «Гармония». Каждая из этих программ имеет четкую направленность на развитие тех или иных качеств, обладает рядом основополагающих принципов, концепцией. Однако нельзя сказать того же о средней и старшей ступенях школьного образования. Не существует каких-то конкретных, определенных программ образования для среднего и старшего звена. В этом заключается одна из проблем современного образования: в начальной школе обучающиеся занимаются по развивающим программам, их учат самостоятельно добывать знания, узнавать новые способы действий. А затем, при переходе в среднюю школу, их возвращают в основном к традиционной системе обучения, где знания чаще всего предлагаются в готовом виде учителем. Обучающимся очень сложно перестроиться. И в итоге зачастую старания и усилия, приложенные как самими обучающимися, так и педагогами, оказываются напрасными. Многие формируемые умения и навыки забываются, и результаты образования не достигаются. Разумеется, современное среднее образование регламентируется одним из нормативных документов – Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (ФГОС ООО), в котором обозначены требования, предъявляемые к образовательным результатам обучающихся, называемые универсальными учебными действиями. Согласно ФГОС процесс образования должен быть развивающим и в средней школе. Но реализация уроков в соответствии со стандартом в школах мало где встречается. На наш взгляд, это связано отчасти с тем, что по статистике около 40 % педагогов старше 50 лет. А значит, стремительное изменение образования и требований к образованию может быть воспринято ими не в полной мере, в связи с тем, что опыт их работы по традиционной системе больше, чем опыт работы в рамках ФГОС. К тому же не все педагоги отличаются мобильностью.

Эти проблемы связаны непосредственно с организацией образовательного процесса, но также существует ряд проблем, связанных с содержанием обучения. В каждой дисциплине есть свои «подводные камни» в содержании, которые нужно учитывать при реализации процесса обучения. Мы будем говорить об одной из основных дисциплин – математике.

Существует несколько содержательно-методических линий школьного курса математики. Изучение всех этих линий, разумеется, пролонгировано сквозь все годы обучения в школе. Какие-то линии изучаются сразу с первых лет обучения, какие-то линии начинаются с пропедевтики в начальной школе и некоторых классах средней. В рамках введения ФГОС к каждой линии существуют свои требования, изучение каждой линии направлено на развитие тех или иных качеств личности обучающегося. В связи с этим педагогу необходимо тщательно отбирать методы и формы, которые будут применяться на уроке, а также подходить серьезно к отбору содержания урока.

Линия уравнений и неравенств является одной и важнейших линий в школьном курсе математики. Как и функционально-графическая линия. Обе эти линии как нельзя лучше демонстрируют развитие всех тех качеств, что были перечислены выше. Также эти две линии очень тесно переплетены при изучении курса алгебры.

В настоящее время у обучающихся должны быть сформированы не только предметные образовательные результаты, но также метапредметные и личностные. Перечень этих качеств представлен во ФГОС. Таким образом, математическое образование, как и все образование в целом, направлено на развитие всесторонне развитой личности, умеющей работать с информацией, видеть различные пути решения, а также наиболее рациональные методы и приемы решения тех или иных проблем (необязательно математических). Но проблема в том, что в настоящее время никак не проверяется формирование метапредметных и личностных образовательных результатов на выходе из школы. Проверяются только предметные результаты путем проведения итоговой государственной аттестации (ИГА). При прохождении ИГА обучающемуся необходимо воспользоваться некоторыми знаниями и умения по предмету. Почти все задания ИГА решаются по определенному алгоритму. Некоторые же имеют различные вариации решений, а также способов. И обучающийся, которому известны различные, а также самые рациональные, пути решения, имеет больше шансов на успешную сдачу ИГА.

Вопросами введения и реализации ИГА в форме ЕГЭ занимается не один десяток специалистов различных сфер: от экономистов и политиков, до журналистов всех видов изданий. Проблема введения ЕГЭ не нова, но до сих пор нет конкретного мнения о пользе или вреде данной формы ИГА. Эту проблему различные специалисты рассматривали с разных аспектов. Так, еще в 2003 г. В.Ж. Куклин рассматривал положительные и отрицательные стороны ЕГЭ на всех уровнях обучения, а также рассматривал с различных позиций: как влияет введение ЕГЭ на работу учителей, директоров, вузы, а также что можно увидеть по результатам ЕГЭ и так ли оно на самом деле.

В.Д. Полежаев, Р.Ч. Барциц говорят о невозможности с помощью одного и того же инструмента качественно проводить итоговую аттестацию выпускников и конкурсный отбор абитуриентов, контролировать качество работы отдельного учителя и осуществлять мониторинг состояния системы образования в целом.

Не менее актуальна проблема формирования универсальных учебных действий. Формированию универсальных учебных действий (регулятивных, познавательных, коммуникативных) обучающихся посвящены работы А.Г. Асмолова, Л.И. Боженковой, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, О.А. Карабановой, и др. В работах И.Е. Аникина, Л.М. Перминовой формирование универсальных учебных действий (УУД) рассматривается как условие повышения качества общего образования. И.Г. Салова описывает формирование УУД как условие достижения метапредметных образовательных результатов. О.В. Тумашева и Е.Г. Рукосуева выделяют типы и виды задач, которые стоит решать на уроках математики в рамках требований ФГОС.

Стоит отметить, что в данных работах недостаточно внимания уделено проблеме формирования некоторых познавательных УУД на уроках математики. Много работ раскрывают проблему формирования познавательных УУД на уроках математики у младших школьников. Не так много исследований, касающихся формирования познавательных УУД у средних и старших школьников. Среди них – развитие познавательных УУД в процессе изучения геометрии Л.И. Боженковой.

Практически не существует исследований, в которых раскрывался бы потенциал функционально-графического метода решения уравнений и неравенств для формирования тех или иных УУД, в том числе и познавательных. Практически все работы посвящены либо описанию целиком метода или отдельных его частей (функционального или графического), либо приведены задания, решаемые этим методом. Примером такой работы могут служить работы Н.Д. Джиоева, Т.Н. Епифановой.

Таким образом, можно говорить о том, что существует ***проблема*** – как организовать процесс обучения в рамках различных содержательно-методических линий школьного курса алгебры так, чтобы формировать познавательные универсальные учебные действия обучающихся?

Указанные обстоятельства обусловили ***актуальность*** данной работы.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре обучающихся 7–9 классов.

Предмет исследования: обучение использованию функционально-графического метода при решении уравнений и неравенств обучающихся 7–9 классов.

Гипотеза: если при изучении алгебры в основной школе использовать комплекс специально подобранных заданий, предполагающих решение функционально-графическим методом, а также методические рекомендации по работе с ними, то у обучающихся повысится уровень математической подготовки и это будет способствовать формированию познавательных и коммуникативных универсальных учебных действий.

Целью выпускной квалификационной работы является формирование комплекса задач на использование функционально-графического метода и разработка методических рекомендаций для организации изучения функционально-графического метода решений уравнений и неравенств на уроках алгебры для обучающихся 7–9 классов.

Задачи исследования:

1) На основе анализа школьных учебно-методических комплектов и материалов итоговой государственной аттестации описать содержание функционально-графической содержательно-методической линии курса алгебры основной школы.
2) Охарактеризовать содержание и особенности функционально-графического метода решения уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы.

3) Разработать комплекс заданий, направленных на применение функционально-графического метода при решении уравнений и неравенств.
4) Разработать и апробировать серию уроков для 7–9 классов с применением разработанного комплекса заданий и методические рекомендации к ним.
5) Проанализировать изменение качества математической подготовки обучающихся.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

Во введении определена актуальность, поставлены цель и задачи, выделены объект, предмет и гипотеза, показана структура работы.

В первой главе рассмотрено математическое образование на современном этапе, основные тенденции развития, проанализировано содержание функционально-графической линии в различных учебниках 7 – 9 класса, а также представлены особенности функционально-графического метода решения уравнений и неравенств: основные теоремы и положения.

Вторая глава содержит комплекс упражнений, направленных на использование функционально-графического метода решения уравнений и неравенств, представлены фрагменты уроков с использованием этого комплекса упражнений, а также варианты контрольной работы, теста и анкеты, позволяющих сделать вывод об истинности гипотезы.

В заключении сделаны выводы обобщающего характера и подведены итоги работы.

Библиографический список определяет основные источники, используемые в работе.

Глава 1. Теоретические основы функционально-графического метода решения уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

1.1. Математическое образование на современном этапе

Основными тенденциями развития образования в современном мире являются переход к информационному типу общества и процессы глобализации. Это внешние факторы влияния на развитие образования. К внешним факторам относятся: специфика культурных тенденций, материально-финансовое обеспечение социальной инфраструктуры, менталитет. На данный момент в нашем обществе определяющими задачами являются становление гражданского общества и инновационное развитие [40]. Реализация этих задач невозможна без эффективной политики в области образования. Но также в противовес этому встают «социальный заказ» и ограниченность бюджетного финансирования, возникает противоречие стратегических и тактических установок.

Под системой образования принято понимать «совокупность преемственных образовательных программ и государственных образовательных стандартов различного уровня и направленности; сети реализующих их образовательных учреждений различных организационно-правовых форм, типов и видов; системы органов управления образованием и подведомственных им учреждений и предприятий [39].

Система образования, сложившаяся на сегодня, формировалась и развивалась как открытая, сложная, целостная и динамическая. Открытая система призвана обеспечить возможность непрерывного его получения:

1) право личности на свободный вход и выход на любом этапе и степени образования;
2) готовность личности к постоянному самосовершенствованию;
3) на освоение новых сфер образовательной и профессиональной деятельности [49].

На современном этапе развития общества, на рынке труда востребованы не сами по себе знания, а умения их добывать. Современный выпускник, обладающий умением применять полученные знания только в привычной ситуации, не может рассчитывать на успех.

Изменение приоритетов в образовании привело к изменению понимания функционального назначения различных общеобразовательных областей, в том числе и математики. Главная функция учебного предмета «Математика» в современном социуме заключается в общекультурном развитии личности, а именно в формировании качеств мышления и способов деятельности, необходимых для полноценного функционирования в обществе [49].

Важнейшей задачей математического образования является вооружение учащихся общими приемами мышления, умениями логично рассуждать, отчетливо выражать свои мысли [47]. Основную цель математического образования можно сформулировать следующим образом: развитие у обучающихся умения осознанно и логически исследовать явления реального мира математическими методами.

К основным нормативным документам об образовании можно отнести следующие:

1) Конституция Российской Федерации;
2) Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
3) Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС);
4) Концепция развития математического образования в РФ.

Концепция развития математического образования в РФ представляет собой систему взглядов на принципы, цели, задачи и основные направления развития математического образования в Российской Федерации [22]. Согласно Концепции, развитие и повышение качества математического образования позволит не только разрешать техногенные катастрофы, не только сделает прорыв в энергетике, экономике, биомедицине, но и повысит престиж

России в мире. Система математического образования, сложившаяся в России, представляет собой наследие советской системы. Но помимо достоинств, имеет и ряд недостатков, которые необходимо устранить. В данной концепции выдвигается ряд проблем развития математического образования. А именно следующие проблемы: мотивационного, содержательного и кадрового характера [22].

Разумеется, данная концепция не противоречит, а скорее наоборот, подкрепляет основной документ, регламентирующий направление образования – ФГОС.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования представляет собой совокупность требований, обязательных при реализации основной образовательной программы среднего общего образования (далее – основной образовательной программы). ФГОС включает в себя требования:

1) к результатам освоения основной образовательной программы;
2) к структуре основной образовательной программы, в том числе требования к соотношению частей основной образовательной программы и их объему, а также к соотношению обязательной части основной образовательной программы и части, формируемой участниками образовательных отношений;
3) к условиям реализации основной образовательной программы, в том числе кадровым, финансовым, материально-техническим и иным условиям [6].

Методологической основой ФГОС является системно-деятельностный подход, который обеспечивает:

1) формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию;
2) проектирование и конструирование развивающей образовательной среды организации, осуществляющей образовательную деятельность;

3) активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;
4) построение образовательной деятельности с учетом индивидуальных, возрастных, психологических, физиологических особенностей и здоровья обучающихся [6].

Государственный образовательный стандарт включает в себя требования не только к основной образовательной программе, но и к развитию и, как результату, становлению личностных качеств выпускника.

Требования, представленные во ФГОС, делятся на три вида: предметные; метапредметные; личностные [6].

Также во ФГОС представлен перечень универсальных учебных действий (УУД). По мнению А.В. Федотовой, это «обобщенные действия, открывающие возможность широкой ориентации учащихся, – как в различных предметных областях, так и в строении самой учебной деятельности, включая осознание учащимися её целевой направленности, ценностно-смысловых и операциональных характеристик» [51]. Выделяют четыре вида УУД.

Личностные. Под ними понимается личностное самоопределение, нравственное оценивание, ориентация в социальных ролях.

Познавательные. Они подразделяются на: общие учебные действия (умение поставить учебную задачу, выбрать способы действия, найти информацию, умение работать с информацией), логические учебные действия (умения анализировать и синтезировать информацию) и постановка и решение проблемы (умение формулировать проблему и искать ее решение).

Коммуникативные. Умение вступать в диалог и вести его.

Регулятивные. Целеполагание, планирование [3].

Среди требований к предметным результатам освоения основного курса математики «Математика. Алгебра. Геометрия», касающихся функционально-графической линии, выделены следующие: «овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей» [6].

Среди требований к предметным результатам освоения базового курса математики «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (базовый уровень) в части функционально-графической линии выдвинуты следующие: «владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств» [44].

Требования к предметным результатам освоения углубленного курса «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень) содержат дополнение к базовым: «сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей» [44]. Видим, что требования для основной школы являются базисом для старшей школы.

Также современные стандарты предъявляют требование к методам, средствам и формам обучения. Не остаются без внимания и педагогические технологии. При реализации современного урока математики необходимо использование педагогических образовательных технологий. Это необходимо для создания условий для смены деятельности, для устранения однообразия образовательного процесса. Существует огромное количество современных образовательных технологий. Но в рамках реализации требований ФГОС наиболее актуальными являются:

1) проектная технология;
2) игровые технологии;

3) групповые технологии;
4) технология развивающего обучения;
5) технология проблемного обучения;
6) кейс-технология;
7) технология интегрированного обучения;
8) технология развития критического мышления;
9) здоровьесберегающие технологии;
10) технологии уровневой дифференциации [45, 46].

Применение этих и других технологий обусловлено еще и тем, что сейчас в школы ходят не такие дети, как еще 15–20 лет назад. Современное поколение называется поколением Z. Но в образовании принято называть «цифровое поколение» обучающихся. Впервые этот термин ввел американский писатель Марк Пренски. Условно принято относить людей к данному поколению, рожденных после 1996 г. [4]. То есть дети этого поколения уже достаточно давно учатся в школах. И этот термин возник не просто так. Как оказалось, наличие цифровых технологий с самого рождения оказывает влияние на ребенка. Меняется восприятие ребенка, его реакции, мышление. Так, например, раньше гиперактивность считалась неким отклонением, сейчас же – это норма. На данный момент выделен ряд признаков «цифрового поколения»:

1) дети с самых ранних лет общаются с миром преимущественно с помощью гаджетов;
2) детям трудно заводить новые знакомства и друзей в реальном мире;
3) виртуальное общение преобладает над личным;
4) такие дети за день успевают просмотреть множество экраном, в связи с этим у них растет скорость восприятия информации, но они с трудом удерживают внимание на одном предмете;
5) образ их мыслей отличается фрагментарностью, а суждения – поверхностностью;

6) предпочитают читать короткие новости, нежели статьи;
7) отсутствует реальный жизненный опыт, дети вырастают чувствительными и пессимистическими;
8) авторитет родителей уменьшается, а Интернета – увеличивается;
9) у детей размыты социальные и гендерные ориентации, меняются моральные ценности;
10) дети нетерпеливы и сосредоточены на краткосрочных целях [4].

Также отмечают «клиповое мышление» у детей «цифрового поколения». Человек, обладающий таким мышление, воспринимает мир не целостно, а фрагментарно, как череду событий и фактов. Такое мышление затрудняет, а иногда и вовсе не позволяет анализировать ситуацию, так как образы сменяются быстро и не задерживаются в мыслях надолго. А.А. Вербицкий и многие другие педагоги считают, что ЕГЭ не улучшает положение дел. Так как ЕГЭ также проверяет конкретные знания, дети заранее знают, что именно их спросят на экзамене [4].

На современном этапе школа уже более 10 лет в обязательном порядке проводит итоговую аттестацию учащихся в формате ОГЭ (9 класс) и ЕГЭ (11 класс). Соответственно и обучение в школе ориентировано на эти два основных этапа итоговой государственной аттестации. Это очень изменило приоритеты системы образования и подход к организации образовательного процесса [14, 55]. Все больше учителя прибегают к такой форме контроля как тестирование, с целью развития навыков работы с тестовыми заданиями и бланками у обучающихся, чтобы при прохождении ИГА была минимизирована вероятность снижения баллов из-за невнимательности и неверности заполнения бланка. В связи с этим у современных школьников ухудшается возможность оперирования полученными знаниями устно, выражение своих мыслей при устном ответе или решении задач [54, 56].

После внедрения ИГА педагогическая общественность разделилась на сторонников и противников такой формы. Противники считают, что данная форма аттестации учащихся не позволяет оценить сформированность всех компетенций обучающегося, а также приучает их к шаблонности заданий и их решений. Из-за компьютеризированной проверки заданий типа А и В возможно неверное распознавание ответов обучающихся, которые засчитываются как ошибки [29].

Сторонники же считают, что ИГА более объективно оценивает способности обучающихся, нежели традиционные виды экзамена. Также нельзя не обратить внимания на тот факт, что ИГА позволяет облегчить поступление в дальнейшие учебные учреждения, притом в несколько сразу. Также проверка ИГА частично компьютеризирована, а значит, позволяет сэкономить время и деньги. Шкала баллов оценивания ИГА значительно шире стандартного экзамена, а значит, оценивание производится более расширенно и индивидуально [36].

Таким образом, можно увидеть, что математическое образование развивается в условиях современного мира. Его содержание удовлетворяет запросам государства и общества, применяются все более новые методики и технологии, учитываются индивидуальные возможности детей, как личности, так и в целом, поколения, которое кардинально отличается от того, что было еще несколько десятков лет назад. Изменяются и усовершенствуются принципы обучения, предъявляются все более жесткие требования к содержанию и знаниям, которыми ученик должен владеть по окончанию школы. Помимо познавательного блока также большое внимание уделяется развитию личности учащихся, что сказывается на структуре ведения урока математики. Также не остается в стороне метапредметное направление развития умений у учащихся. В связи с этим в содержание дисциплины все больше включается практико-ориентированных и прикладных заданий, устанавливается связь с другими дисциплинами, путем включения их в задания и проведения интегрированных уроков. Но немало остается и противоречий в реформах и тенденциях современного образования. Одним из самых глобальных противоречий является ИГА. Форма итоговой аттестации, установленная в настоящее время, вызывается споры и имеет немало противников.

1.2. Функционально-графическая линия школьного курса математики 7–9 классов

Функционально-графическая линия – одна из основных содержательно-методических линий школьного курса математики. Она изучает функции, их графики и свойства, решение графическим методом уравнений и неравенств. К ее преподаванию нужно подходить скрупулезно, педантично. Так автор школьных учебников А.Г. Мордкович в книге «Беседы с учителями математики» выделяет блок бесед конкретно под функции и уравнения. В первой беседе о функциях автор обнажает ошибки множества учебников в изложении материала по данной тематике. А также уделяет особое внимание значению, роли функций. Он говорит о том, что любую функцию нужно изучать по одному и тому же алгоритму. В его учебниках так и происходит изложение материала. Этот алгоритм он называет инвариантным ядром. И вот первым компонентом является графическое решение уравнений, а если быть точнее, то функционально-графическое. То есть при изучении любой функции автор предлагает в первую очередь установить связь между функцией и уравнением. Обусловлено это тем, что этот метод приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради построения, а ради решения уравнения [30]. То есть в данном случае график функции есть средство, а не цель изучения.

Функциональная зависимость играет огромную роль в жизни человека. В первую очередь, изучая функциональную зависимость, учащиеся должны понимать, что это лишь модель. Модель, которую можно наложить практически на любое событие в жизни и получить верное равенство. Именно поэтому изучение этой линии так важно. Ученик должен понимать, что зависимости присутствуют везде. А задача учителя – научить различать их, показать, как работать с различными зависимостями. И чтобы понять, насколько хорошо ученик усвоил данную линию, в ИГА включен ряд заданий. В ИГА 9 класса три задания, проверяющие умения работы с функциями, это 10, 14 и 23 [8]. А в ИГА 11 класса заданий на проверку знаний по функционально-графической линии уже больше. К ним относятся задание базового уровня 14, и задания профильного уровня: в первую очередь, задание 18, а также 2, 7, 12 [7].

Чтобы иметь представление о том, как именно эта линия преподносится в школьных учебниках, был проведен дидактический анализ нескольких учебных комплектов. Дидактический анализ учебных комплектов проводился по следующим критериям:

1. Содержание и структура материала;
2. Наглядность изложения материала;
3. Задачи, рассмотренные в данном учебнике:

    3.1Уровень сложности задач;

    3.2Разнообразие видов и содержания представленных задач.

В пункте 3.2 имеется в виду, что разнообразие содержания задач будет рассмотрено только по функционально-графической линии.

Для проведения анализа были выбраны учебно-методические комплекты (УМК) по алгебре 7–9 классов под редакцией Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Ю.М. Колягина, С.М. Никольского.

Учебники отбирались по двум критериям:

1. Рекомендован ли учебник к использованию в школах;
2. Массовость использования данного учебника в школах.

Перейдем непосредственно к дидактическому анализу учебников.

1) Содержание и структура материала

Рассмотрим последовательность изучения функций с 7 по 9 класс по учебнику Г.В. Дорофеева. Изучение функционально-графической линии в 7 классе начинается с изучения зависимостей. Вводится понятие «прямой пропорциональности» на основе примеров из жизни. Затем вводится понятие «обратной пропорциональности» и строится график двух этих зависимостей на одной координатной плоскости. Так вводится понятие «график». Далее идет глава, посвященная графикам. В ней рассматриваются точки на прямой, а также различные преобразования графика функции $y = x$. После начинается пункт под названием «Ещё несколько важных графиков» и в нем изучается график такой функции, как парабола. Но термин «функция» не употребляется, он еще не определен. Её изучение проходит через составление таблицы координат точек, построения графика. Свойства графика зависимости не выделены отдельно, про них упоминается вскользь. Аналогично производится построение кубической параболы. Используя ранее изученную зависимость прямой пропорциональности, производится построение графика $y = |x|$ [10].

Далее в восьмом классе первой зависимостью становится $y = \sqrt{x}$. Через координатную таблицу строят график этой зависимости. Отмечается симметричность данного графика относительно прямой $y = x$ с графиком $y = x^2$, это утверждение доказывается в обе стороны. Затем выделяются некоторые свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$. В главе «Системы уравнений» рассматривается график уравнения вида $y = kx + m$. При изучении этого графика рассматриваются различные свойства и расположения двух прямых относительно друг друга. Также есть пункт «Для тех, кому интересно». В нем рассказывается геометрическая интерпретация системы неравенств с двумя переменными. Лишь к концу восьмого класса вводится понятие «функции». Выделена отдельная глава «Функции», в которой сначала изучается чтение графиков, график функции, свойства функции и наконец вводится линейная функция. Изучение линейной функции начинается с жизненных примеров, иллюстрирующих данную функцию. Через эти примеры вводится определение линейной функции. Строится график линейной функции, при этом отмечается зависимость знака коэффициента и монотонности графика. Аналогичным образом проходит введение функции обратной пропорциональности. С помощью таблицы значений аргумента строится график функции с различным знаком коэффициента. Вводится понятие «гипербола» [11].

В девятом классе продолжается изучение функционально-графической линии. И начинается оно с квадратичной функции, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$. Вспоминают простейшую квадратичную функцию $y = x^2$, строят графики различных квадратичных функций, ищут ось симметрии, координаты вершины параболы. Затем подробно рассматривают график и свойства функции $y = ax^2$, делают вывод об изменении направления ветвей и ширине графика в зависимости от коэффициента. После этого изучают сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат. Исходя из построенных графиков, формулируют правило о сдвиге графика. И наконец, делается вывод о том, что можно получить график функции $y = ax^2 + bx + c$ с помощью переносов вдоль осей графика функции $y = ax^2$. Отдельно выделяется параграф, в котором описывается метод графического решения уравнений.

В дополнительном параграфе изучается график дробно-линейной функции аналогично изучению графика квадратичной функции, а именно: используют график гиперболы и его преобразовывают [12].

Но учебник под редакцией Г.В. Дорофеева не вошел в федеральный перечень учебников, и, соответственно, пока используется в школах последний год. Поэтому рассмотрим последовательность изучения функций в учебнике под редакцией Ю.Н. Макарычева. Изучение функций начинается в 7 классе. Сначала вводится определение функции, значения функции и как строить графики функций. Затем вводится понятие прямой пропорциональности и ее графика, а затем изучается линейная функция и ее график [26]. В 8 классе представлены функции $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$. На примерах вводится понятие функций. Изложено кратко, типовые задачи не рассмотрены. Свойства функций не рассмотрены [27]. В 9 классе первой темой является «Функции и их свойства». В данной теме рассматриваются в общем виде свойства функций, а также область определения и область значений функции. Затем изучается квадратичная функция и ее график. Рассматриваются ее свойства и графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$. После этого вводится степенная функция и дробно-линейная. Изучаются графики этих функций. Затем рассматривается решение уравнений и неравенств графическим и функциональным методами [28].

В учебнике Ю.М. Колягина за 7 класс впервые функции появляются в 6 главе, которая называется «Линейная функция и ее график». В самом начале параграфа приводится историческая справка термина «функция», а также приводится ряд примеров функциональной зависимости. Перед изучением непосредственно понятия функции, вводится прямоугольная система координат на плоскости. В начале каждого параграфа имеется небольшая аннотация, в которой указано какие именно знания получат дети в ходе изучения этой темы. Определение функциональной зависимости дается после рассмотрения задачи на движение. Затем рассматриваются различные способы задания функции. Вводится определение графика функции. Линейная функция вводится с помощью задачи на нахождение площади прямоугольника. Рассматриваются понятия прямой и обратной пропорциональности. В следующем параграфе дается строгое определение линейной функции и ее графика. В конце этого параграфа есть небольшое дополнение, в котором описывается, как построить графики функций со знаком модуля. В следующей главе под названием «Системы двух уравнений с двумя неизвестными» рассматриваются различные способы решений систем уравнений, среди которых, разумеется, присутствует графический способ. В данном параграфе рассматривается пример решения аналитически и графически системы двух уравнений. Затем рассматривается 3 случая взаимного расположения двух прямых на плоскости и к ним приводятся примеры [19]. В 8 классе в главе 5, которая носит название «Квадратичная функция», рассматривается определение квадратичной функции, а затем поочередно функции $y = x^2,\ y = ax^2,\ y = ax^2 + bx + c$. После чего производится построение графика квадратичной функции. Определение квадратичной функции введено через два примера. Также введено понятие «нули квадратичной функции». При изучении параграфа про функцию $y = x^2$ рассматриваются свойства этой функции, а конкретно 3 свойства: точки касания осей, симметричность, монотонность. Далее изучается растяжение и сжатие графика функции $y = x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy. Затем при изучении функции $y = ax^2 + bx + c$ производятся различные сдвиги графика вдоль осей, выводятся координаты вершины параболы. Также изучается тема «Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции» [20]. В 9 классе во второй главе «Степенная функция» учащиеся узнают, что такое область определения функции, возрастание и убывание функции, четность и нечетность функции, а также изучат функцию $y = \frac{k}{x}$. В первом параграфе этой главы вновь дается определение функции, но уже другое. В 7 классе давалось описательное определение, в девятом же классе дается более строгое, научное определение. В следующем параграфе дано строгое определение возрастающей и убывающей функции (в 8 классе при изучении квадратичной функции не давалось определения, говорилось только о монотонности конкретно квадратичной функции). Изучение функции $y = \frac{k}{x}$ начинается с примера, в котором необходимо построить график обратной пропорциональности. В этом же примере рассматриваются свойства функции. Также в этой главе рассматриваются неравенства и уравнения, содержащие степень, которые решаются функционально-графическим методом [21].

Рассматривая учебники С.М. Никольского, мы выяснили, что функции впервые появляются лишь в 8 классе, в 7 классе нет упоминаний об этой линии [32]. Первая же глава называется «Простейшие функции. Квадратные корни». В первом параграфе изучается декартова система координат на плоскости, вводятся понятия функции и графика функции. Понятие функции вводится на основе двух примеров. Также в учебнике этого автора определение понятия функции представлено не описательно, как у предыдущих авторов.

Здесь определение функции дается на множестве. Сразу после примеров функциональной зависимости вводится понятие области значений функции, и рассматриваются различные способы задания функции. Отдельно выделен пункт для рассмотрения понятия графика функции. График функции рассматривается на примере работы прибора термографа. К тому же в учебнике С.М. Никольского разъясняется, что такое приращение аргумента и приращение функции, а также непрерывность функции. Следует отметить, что в учебнике используется очень строгий язык изложения, научный. После этого рассматриваются графики следующих функций $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}$. На каждую функцию выделен отдельный пункт, в котором подробно рассматриваются и устанавливаются особенности графиков данных функций, в частности, устанавливается область определения функции. Для функции $y = x^2$ формулируются и обосновываются некоторые свойства функции, например такие, как монотонность функции, четность, непрерывность и другие. Затем изучается график параболы, который строится с помощью таблицы значений. Упоминается ось симметрии и вершина параболы. Аналогично рассматривается функция $y = \frac{1}{x}$.

Глава 3 полностью посвящена линейной функции. Сначала изучается прямая пропорциональность и график линейной функции. При изучении графика линейной функции вводится понятие углового коэффициента прямой. Далее рассматриваются различные случаи положения прямой. После этого изучение функционально-графической линии продолжает функция $y = |x|$ и ее график. Также как и в предыдущих пунктах рассматриваются ее свойства, а затем график. Еще одна отличительная тема, затронутая в учебнике этого автора, это «Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$». Данные функции изучаются не так подробно, как другие. После изучается квадратичная функция, притом рассмотрено два случая: $a > 0, a \neq 0$. Затем изучается движение графика вдоль осей, но тема называется несколько иначе: «График функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$». И вот после этих тем изучается квадратичная функция и ее график. Следующей изучается дробно-линейная функция. При изучении данной темы вводится понятие обратной пропорциональности, рассматривается функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0, k \neq 0)$. Для каждого случая рассматриваются свойства функции и график. А затем уже в общем виде рассматривается дробно-линейная функция и ее график. Для этого сначала приведено 4 примера построения графика функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$. На этом в 8 классе функциональная линия заканчивается, но есть отдельный параграф про графический способ решения систем уравнений. В нем рассмотрены графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, графический способ исследования тех же систем, решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом, а также примеры решения уравнений графическим способом [33].

В 9 классе лишь три темы затрагиваются из функционально-графической линии. Это «Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным», «Функция $y = x^n$» и «Функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$. При изучении второй темы рассматриваются свойства и графики функций $y = x^n$, $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$. Третья тема рассматривается аналогично предыдущим: обосновываются свойства функции и изучается ее график [34].

2) Наглядность изложения материала

В учебнике Г.В. Дорофеева очень мало рисунков и иллюстраций к определениям. Рассматривая конкретно функционально-графическую линию в данном учебнике, можно сделать вывод о том, что недостаточно наглядно представлен материал [10–12].

В учебнике Ю.М. Колягина определения вводятся без иллюстраций к ним, но помимо определений всегда рассматривается несколько примеров. И как раз эти примеры проиллюстрированы на достаточном количестве рисунков. Также в этих примерах, а, следовательно, и на этих рисунках, рассматриваются различные вариации положения графика той или иной функции, что как нельзя лучше помогает при изучении материала [19–21].

В учебном пособии Ю.Н. Макарычева примеры сопровождаются рисунками. Берется серия рисунков с графиком функции, на которых показано как строится функция и её различные преобразования [26–28].

В учебнике С.М. Никольского также вполне достаточно иллюстраций и рисунков к определениям и примерам. Но в отличие от учебника Ю.М. Колягина иллюстрации не к примерам, а к тексту, в котором происходит объяснение материала при помощи рассмотрения частных случаев [32–34].

3) *Задачи, рассмотренные в учебнике*

Рассмотрим типы заданий в учебниках разных авторов. Чтобы не повторяться, выделим типы заданий, представленные в большинстве учебников, а также представленные лишь у отдельных авторов. Типы заданий в учебниках 7–9 классов по учебнику Г.В. Дорофеева:

- Текстовые задачи, отражающие определенную функциональную зависимость;
- Работа с аналитической записью функциональной зависимости, нахождение различных элементов зависимости;
- Составить таблицу значений функции по аналитическому заданию;
- Определение вида функциональной зависимости по словесному описанию и решение задач;
- Определение вида функциональной зависимости по аналитической записи;
- Построение графика функции по таблице;
- Задание функции аналитически по словесному описанию и построение ее графика;
- Построение графика функции на интервале;
- Построение кусочно-непрервной функции;

– Нахождение точек пересечения различных функциональных зависимостей друг с другом и с координатными прямыми;
– Нахождение углового коэффициента по аналитической записи;
– Определить взаимоположение прямых;
– Работа с графиком, ответы на вопросы по заданному графику;
– Найти значение функции в точке;
– Задания на доказательство расположения графика функции в определенном промежутке/ четверти/ относительно координатных прямых;
– Построение графика функции и чтение свойств функции по графику;
– Чтение свойств по заданному графику функции / аналитической записи;
– Указать асимптоты графика функции и построить его;
– Преобразования графиков функций [10–12].

В учебнике Ю.Н. Макарычева также присутствуют задачи на исследование. То есть до введения каких-либо свойств функции, необходимо определить характер поведения функции, расположение на координатной прямой. Также в учебнике для 8 класса данного автора встречаются задания типа:

– Постройте график функции и решите, используя его, уравнение;
– Решите уравнение графически;
– Используя графические представления, выяснить, сколько решений имеет уравнение;
– Решение и нахождение с помощью графика функции примерные корни уравнения;
– Решение неравенств с помощью графика функции;
– Решение неравенств методом интервалов;
– Составить уравнение с двумя переменными по графикам функций;

- Решение неравенств / системы неравенств с двумя переменными [26–28].

В учебнике Ю.М. Колягина присутствуют все типы заданий, как в учебнике Г.В. Дорофеева, но есть еще один тип:

- Задания на доказательство свойств четности и монотонности [19–21].

Стоит отметить, что учебники всех авторов содержат достаточное количество задач практического характера. В учебнике Ю.М. Колягина подобные задачи как встречаются в обязательных упражнениях, так и выделен отдельный блок таких заданий. Примерно половина заданий от общего количества заключено в фабулу, мотивирующую на выполнение, а также связанную с жизнью. Как видно из пункта 3 проведенного анализа в рассмотренных учебниках представлены примерно одинаковые типы заданий, но стоит отметить, что в учебнике Ю.Н. Макарычева также есть такой важный блок заданий, как задания на исследование функции. Можно заметить, что только в учебнике Г.В. Дорофеева недостаточное количество иллюстраций к определениям и примерам, в остальных же учебниках достаточно высокая наглядность материала. Стоит отметить, что схема изложения материала в первых трех учебниках, а именно Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева и Ю.М. Колягина, примерно одинакова, рассматриваются одинаковые функции. Разумеется, некоторые темы в разных учебниках имеют несколько иное положение во всем курсе, но отличается это положение не разительно. А вот в учебнике С.М. Никольского абсолютно другая система изложения, схема и положение тем. Изучаются даже другие понятия, такие как приращение аргумента и функции, непрерывность функции, а также функции $y = [x]$, $y = \{x\}$, при изучении степенной функции рассматриваются случаи четного и нечетного показателя степени [32–34].

1.3. Содержание и особенности функционально-графического метода решения уравнений и неравенств

В методической литературе принято все методы, на которых основана школьная линия уравнений и неравенств с 7 по 11 классы, делить на три группы:

– метод разложения на множители;

– метод введения новых переменных;

– функционально-графический метод [5].

Функционально-графический метод предполагает использование графиков и различных свойств функций. Рассмотрим графический и функциональный методы решения уравнений и неравенств.

Графический метод. Для построения графика некоторых функций составляют таблицу значений для некоторых значений аргумента, затем наносят на координатную плоскость соответствующие точки и последовательно соединяют их линией. Чаще всего, предполагается, чтобы решить уравнение, нужно построить правую и левую часть уравнения в одной системе координат и записать абсциссы точек пересечения. Они и будут являться решением. К тому же данный метод может использоваться и при решении систем уравнений. Только в случае с системами необходимо находить также еще и ординаты точек пересечения. А вот при решении неравенств ответом будет совокупность абсцисс точек, при которых график функции правой части находится выше или ниже (в зависимости от условия) графика функции левой части [13, 15, 18].

Функциональный метод. Не всегда уравнение можно привести к тому или иному стандартному виду, для которого существуют методы решения. В таких случаях следует использовать свойства функций, входящих в уравнение. Рассмотрим каждое свойство подробнее.

1. *Область определения.* Решением уравнения будет множество, состоящее из таких значений x, который принадлежат областям определения

обеих функций. Если область допустимых значений решения уравнения будет пустое множество, то уравнение не имеет решения. В случае с неравенством необходимо доказать, что для всех xиз области определения функции $f(x) > (<)0$, тогда область определения функции будет являться решением неравенства.

2. *Область значений.* Если уравнение имеет решение, то области значений функций имеют общие элементы. Если же общих элементов нет, значит, уравнение решений не имеет [52].

3. *Монотонность.* Рассмотрим несколько свойств монотонных функций:

Теорема 1. Монотонная на промежутке Xфункция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента из этого промежутка.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X и функция $g(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $h(x) = f(x) + g(x) + C$ также возрастает (убывает) на промежутке X (C – произвольная постоянная).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, функция $g(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, $\mathrm{C} > 0$, то функция $h(\mathrm{x}) = \mathrm{C} \cdot f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на промежутке X.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке Xи сохраняет на этом множестве знак, то функция $\frac{1}{f(x)}$ на промежутке X имеет противоположный характер монотонности.

Теорема 6. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$возрастающие или обе убывающие, то функция $h(x) = f(g(x))$ – возрастающая функция. Если одна из функций возрастающая, а другая убывающая, то $h(x) = f(g(x))$ – убывающая функция [23].

Теоремы об уравнения и неравенствах:

Теорема 7. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x) = C$ имеет на промежутке Xне более одного корня.

Теорема 8. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение$f(g(x)) = f(h(x))$равносильно на промежуткеX уравнению $g(x) = h(x)$.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, а $g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $g(x) = f(x)$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 10. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно на промежутке X уравнению $f(x) = x$.

Теорема 11. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то неравенство $f(g(x)) < f(h(x))$ равносильно на промежутке X неравенству $g(x) < h(x)$ ($g(x) > h(x)$). Аналогичное свойство и для нестрогих неравенств [25].

4. Свойства четности или нечетности функций.

Для любых двух симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная – равные по абсолютной величине, но противоположного знака.

Теорема 12. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Теорема 13. Произведение и частное двух нечетных функций есть четные функции.

Чтобы решить уравнение $f(x) = 0$, где$f(x)$ – четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записываются отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет $x = 0$, если это значение входит в область определения $f(x)$. Для четной функции значение $x = 0$ проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

Чтобы решить неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ – четная функция, достаточно найти его решения для $x \geq 0$ (или $x \leq 0$). Действительно, если решением данного неравенства является промежуток $(x_1; x_2)$, где x_1, x_2 – числа одного знака или одно из них равно нулю, то его решением будет и промежуток $(-x_2; -x_1)$.

Чтобы решить неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ – нечетная функция, достаточно найти решения для $x > 0$ (или $x < 0$). Если нам известны промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ для $x > 0$ (или $x < 0$), то легко записать промежутки знакопостоянства и для $x < 0$ (или $x > 0$) [52].

5. *Периодичность.*

При решении уравнений и неравенств используют наименьший положительный период функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное количество периодов.

Если функция $f(x)$ – периодическая, то решение уравнения $f(x) = 0$ или неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции, после чего записывается общее решение. Если периодическая функция еще и четная или нечетная, то решение достаточно найти на промежутке, равном по длине половине периода.

6. *Метод функциональной подстановки.*

Является частным случаем функционального метода. Суть метода: введение новой переменной $y = f(x)$, вследствие чего происходит переход к более простому выражению [5].

Заметим, что не вся изложенная теория содержится в школьных учебниках и далеко не все обучающиеся знакомятся с перечисленными фактами. В то время как для лучшего усвоения понятий и методов функционально-графической линии это необходимо. Поэтому, на наш взгляд, стоит включать теоретический материал в содержание уроков итогового повторения 7–9 классов и обязательно систематизировать в полном объеме в процессе подготовки к ОГЭ и ЕГЭ.

В экзаменационных работах часто встречаются уравнения и неравенства как раз такого вида, что рациональнее решить их будет функционально-графическим методом. Рассмотрим умения, проверяемые ОГЭ по функционально-графической линии, а также задания, в которых можно встретить уравнения и неравенства разрешимые данным методом.

В спецификаторе ОГЭ предъявляются требования к умению применять графические представления при решении уравнений, систем, неравенств. Эти умения проверяет задание 14 модуля «Алгебра» [8].

14 Укажите решение системы неравенств

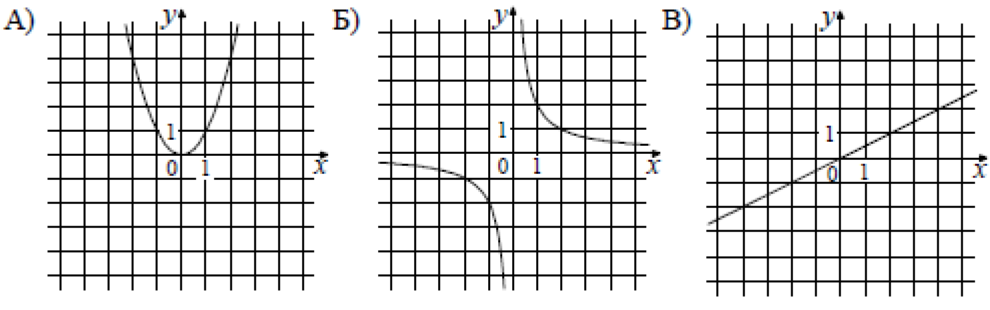
$$\begin{cases} x+2,6\le 0, \\ x+5\ge 1. \end{cases}$$

Ответ: ☐

Также, задание 10 ОГЭ в модуле Алгебра проверяет знания и умения, касающиеся функционально-графической линии.

10 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y=x^2$ 2) $y=\frac{x}{2}$ 3) $y=\frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

Умение строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели необходимо для решения задания 23 части 2 модуля «Алгебра» [8].

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

На ЕГЭ тоже есть задания, связанные с функциями и графиками. В КИМ базового уровня таких заданий два – 11 и 14, профильного уровня – 2, 7. Причем, функционально-графический метод, основы которого закладываются в курсе алгебры 7–9 классов, нередко используется при решении задания высокого уровня сложности ЕГЭ профильного уровня – задания 18 [7].

Таким образом, в КИМ ОГЭ и ЕГЭ присутствуют задания, проверяющие знания, умения, навыки и способы деятельности, связанные с функционально-графической линией и функционально-графическим методом решения уравнений и неравенств. Для успешного их выполнения обучающимся необходимо продемонстрировать знания свойств функций, теорем и графического способа решения уравнений и неравенств. Соответственно, у обучающихся должны быть сформированы основные знания, умения и способы деятельности, связанные с этим материалом.

Выводы по первой главе

Таким образом, в условиях современного общества необходимо пересмотреть методы и формы обучения как в образовании в общем, так и конкретно в математическом образовании. Это связано даже не столько с ИГА и его сдачей, сколько с особенностями современного поколения обучающихся. Именно поэтому педагогам следует более тщательно подходить к выбору заданий, понимать какие именно умения они развивают и формируют, а также следить за тем, чтобы уровень сформированности всех умений и компетенций учащегося был не скачкообразным, а планомерным. Разумеется, на данном этапе развития образования ИГА сложно назвать совершенным способом оценивания знаний обучающихся. Эта проблема еще более очевидно встает, если сравнивать требования, предъявляемые к выпускнику, и тот спектр умений и навыков, что проверяет ИГА. В этом свете заметна несогласованность этих двух важных составляющих образования. Возможно, поэтому так мало заданий в ИГА, разрешимых функционально-графическим методом. Ведь задания, разрешимые эти методом, формируют у обучающихся огромное количество УУД различных типов. Сложно сказать, какой тип больше формируется при работе над такими заданиями.

Стоит отметить, что в учебниках содержится недостаточное количество заданий, предполагающих решение функционально-графическим методом. Если в учебнике они и есть, то либо в отдельном параграфе за все 3 года обучения, либо рассредоточены по учебнику. Сама функционально-графическая линия представлена достаточно подробно, ведь это одна из основных линий школьного курса математики.

Глава 2. Методическое обеспечение изучения функционально-графического метода в курсе алгебры основной школы

2.1 Комплекс задач на функционально-графический метод решения

Ниже представлен комплекс задач, разрешимых с помощью функционально-графического метода. Для удобства задачи структурированы по типам. Среди них представлены такие типы уравнений, как:

- Уравнения со знаком модуля;
- Уравнения n-ой степени;
- Дробно-рациональные уравнения;
- Иррациональные уравнения;
- Показательные уравнения;
- Логарифмические уравнения;
- Тригонометрические уравнения;
- Уравнения с параметром.

Аналогичные типы представлены в заданиях с неравенствами. Следует отметить, что данное разбиение задач на типы условно, так как уравнения и неравенства содержат различные функции. В разных типах заданий рассмотрены различные, неповторяющиеся задания.

Задания имеют различный уровень сложности. В некоторых типах рассмотрен только повышенный уровень сложности, в некоторых еще и базовый.

Все рисунки к решению заданий выполнены в динамической математической программе GeoGebra Classic 5.

<u>Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля</u>

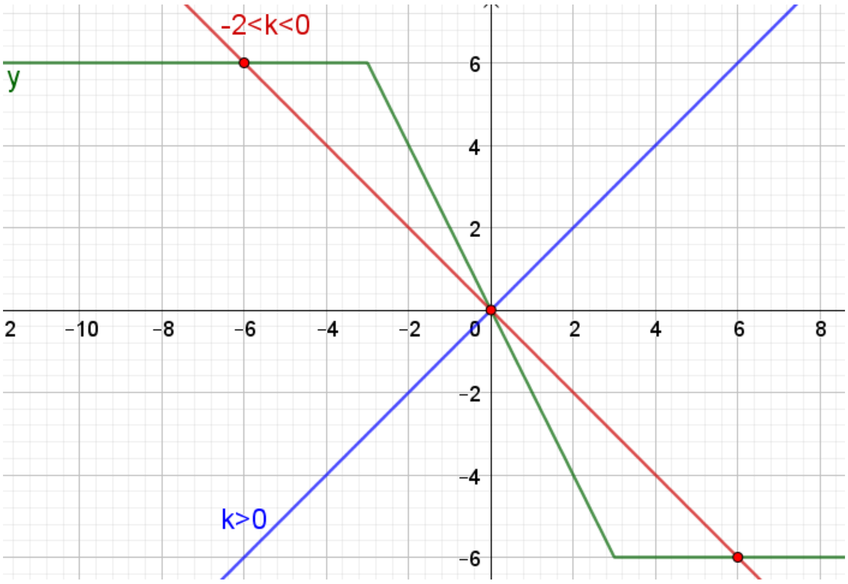
Задание:

Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение:

Раскрывая модули, получаем, что $y = \begin{cases} -6, x \geq 3, \\ -2x, -3 < x < 3, \\ 6, x \leq -3. \end{cases}$

Изобразим график данной функции.



На рисунке видно, что при $-2 < k < 0$ - прямая имеет с графиком функции 3 общие точки. А при $k \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$ прямая имеет с графиком функции ровно одну точку.

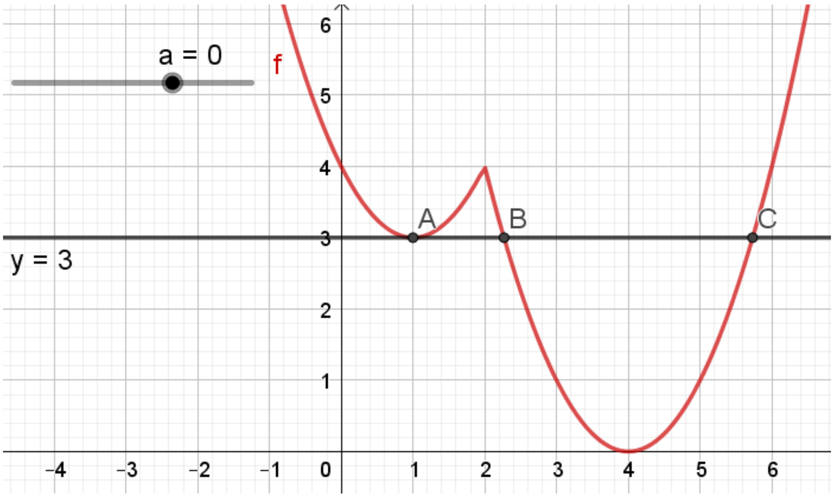
Ответ: $k \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$ [35].

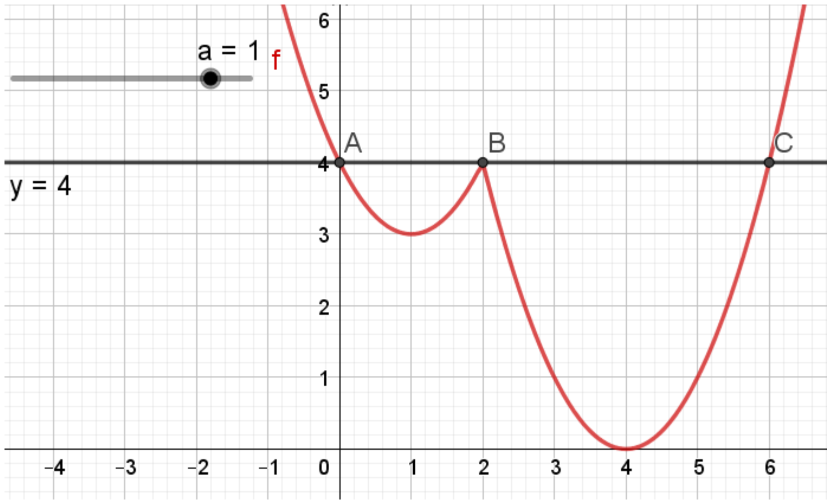
Задание:

Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$.

Решение.

Построим график функции $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, x < 2, \\ x^2 - 8x + 16, x \geq 2. \end{cases}$





Прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ:0; 1 [7].

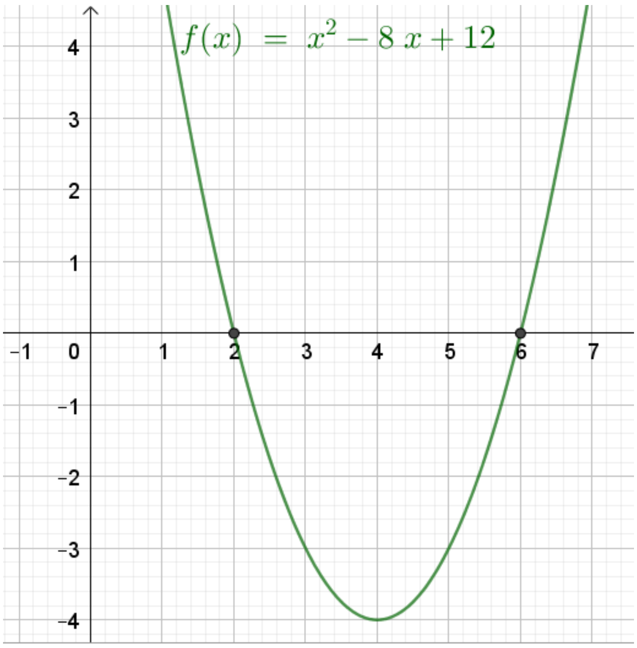
Уравнения высоких степеней

Задание:

Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

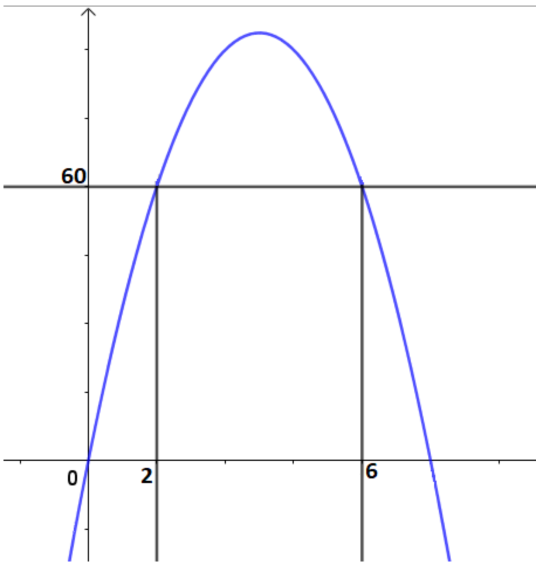
Решение.

Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h(м), на которой брошенный вертикально вверх мяч окажется через $t(c)$, может быть найдена по формуле $h = V_0\, t - \frac{gt^2}{2}$, где V_0(м/с) – начальная скорость, g – ускорение свободного падения, приближенно равное 10 м/с^2. Подставив значения h и V в формулу, получим $60 = 40t - 5t^2$. Получили квадратное уравнение, решим его графически, но сначала приведем. $5t^2 - 40t + 60 = 0$, $t^2 - 8t + 12 = 0$. Рассмотрим график функции $f(x) = x^2 - 8x + 12$.



Видно, что корнями уравнения являются 2 и 6.

Рассмотрим график зависимости h от t, где $h = 40t - 5t^2$.



Из графика видно, что мяч, брошенный вертикально вверх, в течении первых 4 с поднимается вверх до высоты 80 м, а затем начинает падать. На высоте 60 м от земли оно оказывается дважды: через 2 с и через 6 с после бросания. Условию задачи удовлетворяют оба найденных корня.

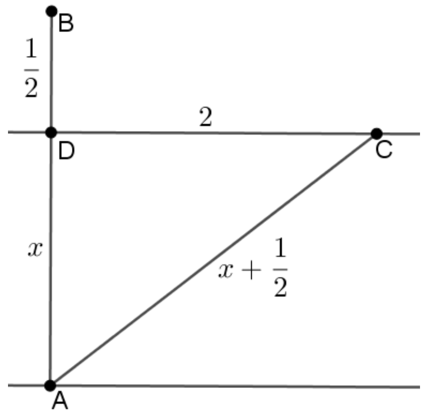
Ответ: на высоте 60 м тело окажется через 2 с и через 6 с [1].

Задание: (Задача Бхаскары, Индия, XII в.)

Цветок лотоса возвышался над тихим озером на полфута. Когда порыв ветра отклонил цветок от прежнего места на 2 фута, цветок скрылся под водой. Определите глубину озера.

Решение.

Пусть отрезки AB и AC изображают лотос в двух положениях. Если $AD = x$ – глубина озера, то $BD = \frac{1}{2}$, $AC = x + \frac{1}{2}$.



Составим уравнение $x^2 + 2^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Решим уравнение $x^2 + 2^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$x^2 + 4 - x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$. $x = 3\frac{3}{4}$.

Ответ: глубина озера $3\frac{3}{4}$ фута [13].

Задание:

Решить уравнение $x^7 + 3x - 134 = 0$.

Решение.

Перейдем к равносильному уравнению $x^7 = 134 - 3x$.

Можно заметить, что $x = 2$ является решением данного уравнения. Докажем, что это единственный корень. Функция $y = x^7$ – возрастает на всей области определения. Функция $y = 134 - 3x$ – убывает на всей области определения. Тогда графики этих функций либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке, эту точку мы уже нашли $x = 2$.

Ответ: $x = 2$ [31].

Дробно-рациональные уравнения

Задание:

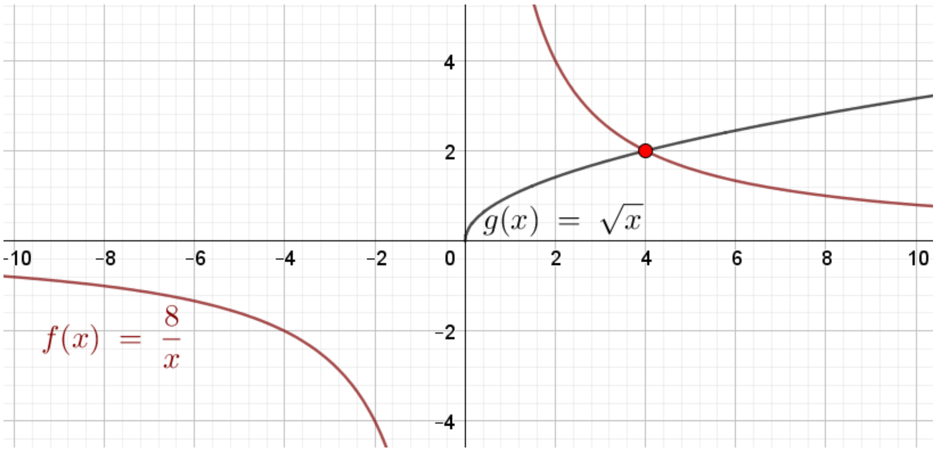
Решите уравнение $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$.

Решение:

Данное уравнение можно решить двумя способами:

1) Опять же заметим, что $x = 4$ – корень уравнения. На отрезке $[0; +\infty)$ гипербола убывает, а функция корня квадратного возрастает. Следовательно, имеется не более одного пересечения графиков. Значит, $x = 4$ - единственный корень данного уравнения.

2) Построим графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.



На графике видна точка пересечения графиков с абсциссой $x = 4$.

Ответ: $x = 4$ [42].

Задание:

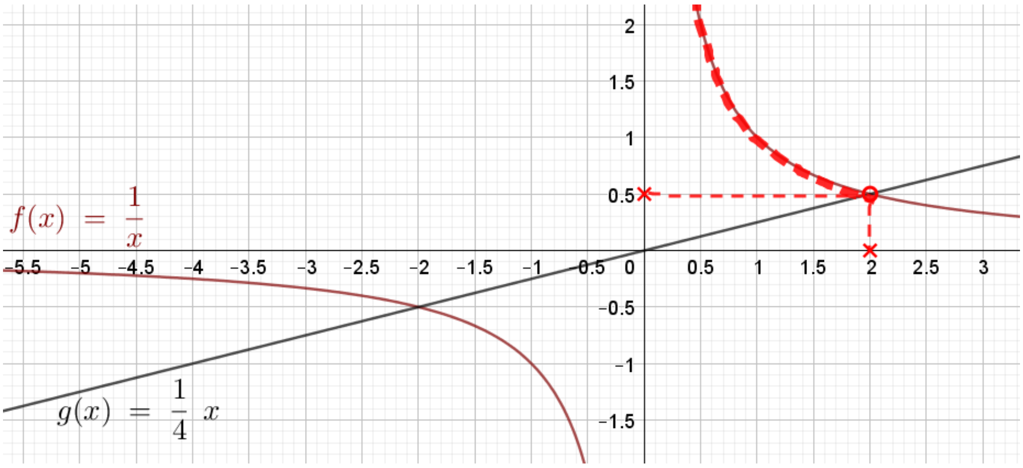
Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.

Найдем область определения функции: $x^2 - 2x > 0; x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Поскольку $\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = \frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



По условию необходимо, чтобы прямая $y = kx$ имела с графиком одну общую точку. По рисунку видно, что на области определения функции, прямая $y = kx$ имеет общую точку при $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ [35].

Задание:

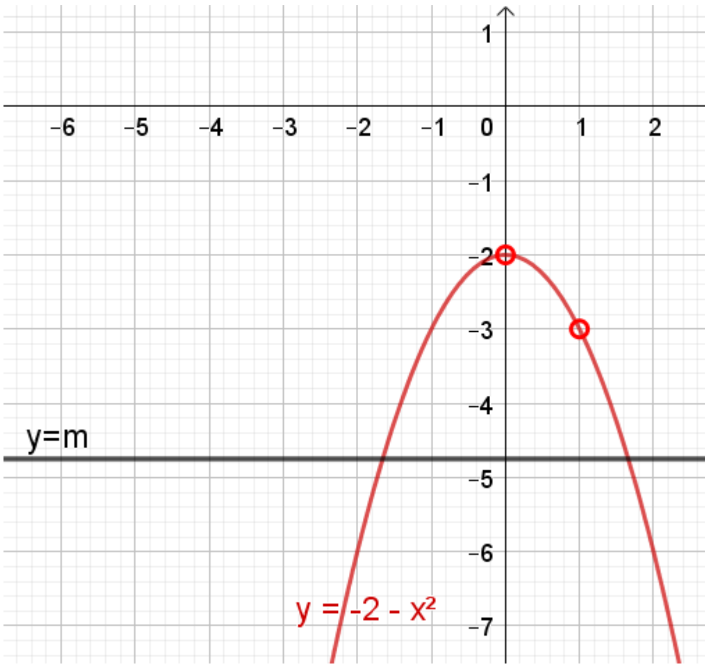
Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Упростим выражение: $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2$.

Таким образом, получили, что график нашей функции сводится к графику функции $y = -x^2 - 2$ с выколотыми точками $(0; -2)$ и $(1; -3)$. Построим график функции (см. рисунок).

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при m принадлежащем промежутку $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$ [35].

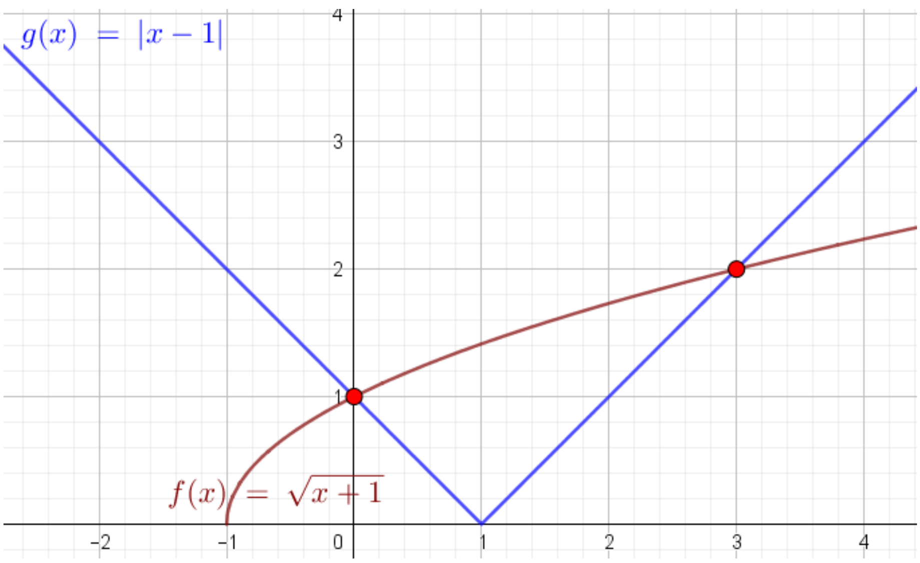
<u>Иррациональные уравнения</u>

Задание:

Решите уравнение $\sqrt{x+1} = |x-1|$.

Решение:

Построим графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = |x-1|$ на одной координатной плоскости.



Как видно из рисунка графики пересекаются в двух точках с координатами $(0;1),(3;2)$. Решением исходного уравнения будут абсциссы этих точек.

Ответ: $x=0, x=3$ [42].

<u>Уравнения с параметром</u>

Задание:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Решение.

Введём обозначения: $a-3=b, f(x)=x^4+b^2, g(x)=|x-b|+|x+b|$.

В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x)=g(x)$.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ − чётные. Значит, если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x=0$.

Решим уравнение $f(0)=g(0)$ относительно b:

$b^2=2|b| \Leftrightarrow |b|\cdot(|b|-2)=0$, значит, $x=0$ является решением уравнения $f(x)=g(x)$ при $b=0$ или $|b|=2$.

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2}, x=0, x=\sqrt[3]{2}$.

Рассмотрим случай $|b|=2$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\geq|b|, g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Если $|x|\geq|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Если $|x|<|b|=2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2=2|b|=g(x)$, причём равенство возможно только при $x=0$.

Значит, при $|b| = 2$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $|b| > 2$.

Если $|x| \geq |b| > 2$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq 2x^2 \cdot |b| > 2|x| = g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Если $|x| < |b| = 2$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq b^2 > 2|b| = g(x)$ то то есть уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случай $0 < |b| < 2$.

В этом случае верны неравенства $f(0) < g(0)$ и $f(2) > g(2)$, так как $b^2 < 2|b|$ и $16 + b^2 > 4$. Значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения отличные от нуля, а значит решений больше одного.

Таким образом, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b \leq -2$ и $b \geq 2$, то есть при $a \leq 1$ и $a \geq 5$.

Ответ: $a \leq 1$, $a \geq 5$ [42].

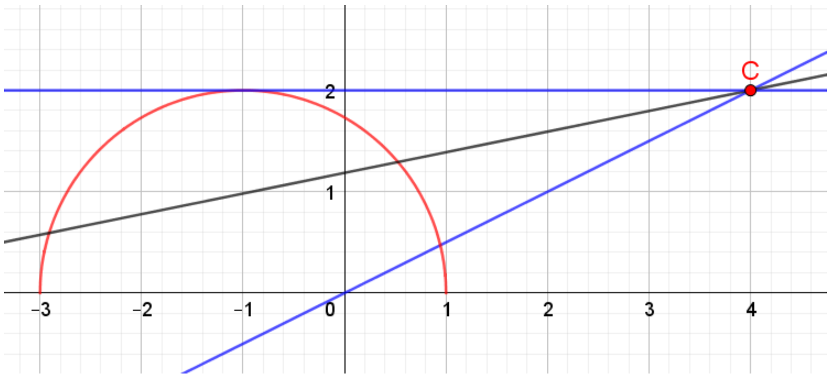
Задание:

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

Решение:

Преобразуем уравнение следующим образом: $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -a(x - 4) + 2$. Замечаем, что справа стоит функция $y = -a(x - 4) + 2$, являющаяся уравнением «пучка» прямых, проходящих через точку $(4; 2)$.

Построим график функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$. Данный график пересекает ось Ox в точках -3 и 1, а так как значение арифметического квадратного корня всегда число положительное, то график располагается выше оси Oy. Также построим «пучок» прямых, проходящих через точку с координатами $(4; 2)$.



Видим, что прямая имеет с графиком функции одну общую точку при $a = 0$. Также есть промежуток, в котором прямая пересекает график один раз. Чтобы выяснить значение a в этом промежутке подставим в уравнение прямой точки с координатами $(-3; 0)$и $(1; 0)$: $0 = -a(-3-4) + 2 \Leftrightarrow 7a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{7}$ и $0 = -a(1-4) + 2 \Leftrightarrow 3a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$ [42].

Задание:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (1-a)^2 = |x - 1 + a| + |x - a + 1|$ имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $x^2 + (1-a)^2 = |x + a - 1| + |x - a + 1|$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x_0 = 0$ в уравнение: $(1-a)^2 = 2|1-a| \Leftrightarrow |1-a| \cdot (|1-a| - 2) = 0$, откуда либо $|1-a| = 0 \Leftrightarrow a = 1$, либо $|1-a| = 2 \Leftrightarrow a = -1$ или $a = 3$.

При $a = 1$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $-2, 0$ и 2, то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = -1$ и при $a = 3$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = -1$ и при $a = 3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = -1$ и $a = 3$.

Источник: МИОО: Диагностическая работа по математике 24.09.2013 вариант МА10116 [42].

Задание:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $64x^6 - (3x + a)^3 + 4x^2 - 3x = a$ имеет более одного корня.

Решение.

Преобразуем уравнение $64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + (3x + a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(4x^2) = f(3x + a)$ равносильно уравнению $4x^2 = 3x + a$. Оно имеет более одного корня в тех случаях, когда дискриминант уравнения $4x^2 - 3x - a = 0$ положителен. То есть когда $9 + 16a > 0, a > -\frac{9}{16}$.

Ответ: $a > -\frac{9}{16}$ [42].

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко, 2016.

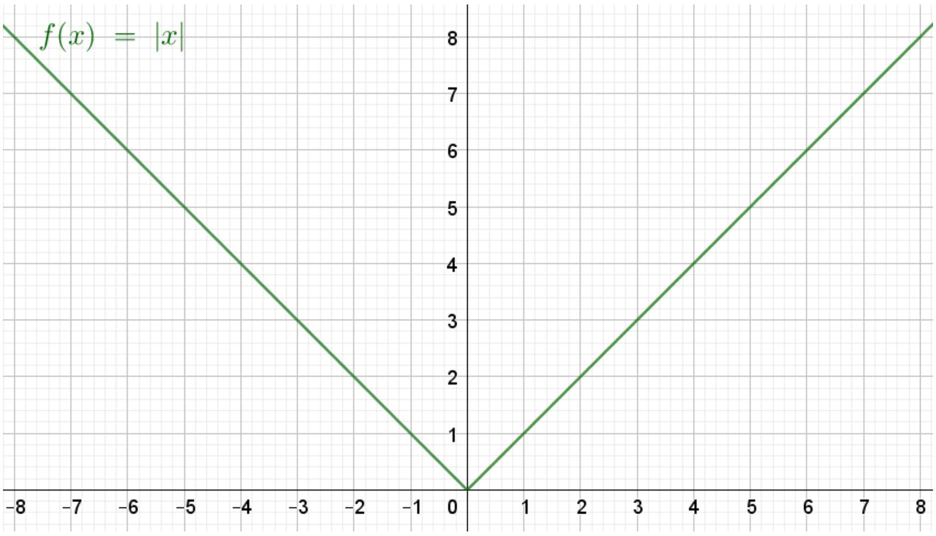
<u>Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля</u>

Задание:

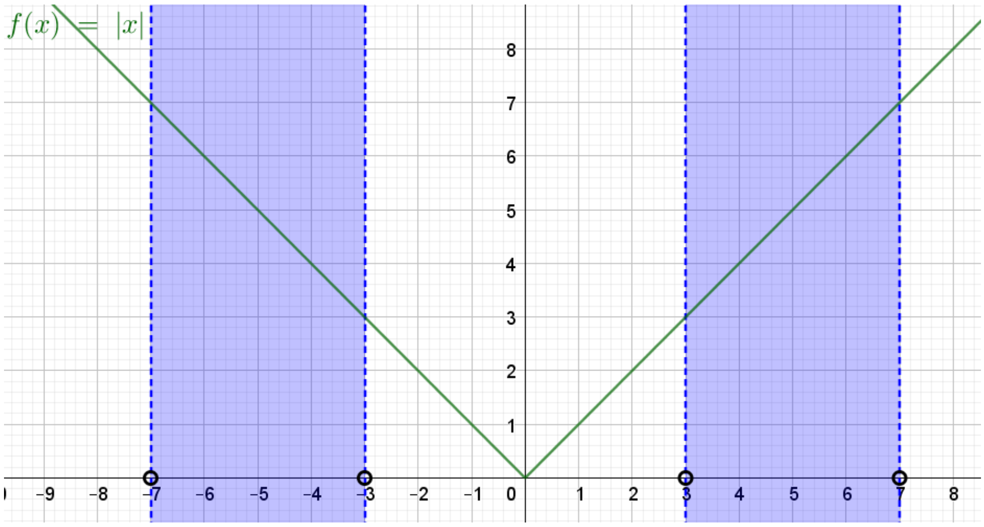
Решите двойное неравенство $3 < |x| < 7$.

Решение.

Данное неравенство нагляднее решить графическим способ. Изобразим график функции $y = |x|$.



Изобразим решение неравенства при раскрытии знака модуля:



Видим, что решением данного неравенства является множество $x \in (-7; -3) \cup (3; 7)$.

Ответ: $x \in (-7; -3) \cup (3; 7)$ [35].

<u>Неравенства высоких степеней</u>

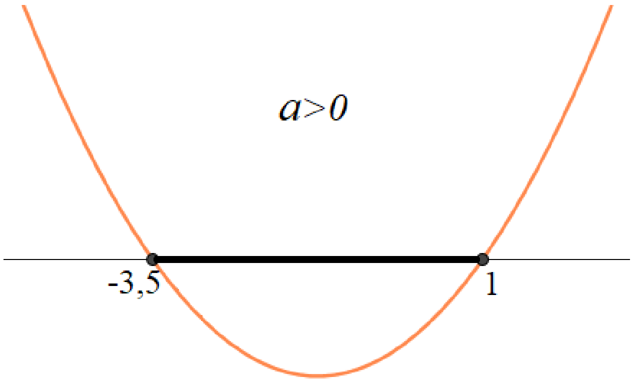
Задание:

Решить квадратное неравенство $2x^2 + 5x - 7 \leq 0$.

Решение.

Введём квадратичную функцию $y = 2x^2 + 5x - 7$. Старший коэффициент $a = 2$ положительный, следовательно, ветви её графика – параболы направлены вверх. Определим нули функции. Для этого решим квадратное уравнение $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Используя свойства коэффициентов квадратного уравнения, имеем, сумма коэффициентов равна нулю, значит, корнями уравнения являются числа 1 и – 3,5.

На координатной прямой Ox отметим найденные корни квадратного уравнения и построим параболу, проходящую через отмеченные на числовой прямой точки ветвями вверх.



В исходном неравенстве стоит нестрогий знак не больше, значит, выделим часть параболы ниже оси Ox и закрасим точки пересечения.

Решением неравенства являются абсциссы точек выделенной области, то есть все значения x, расположенные между числами $-3{,}5$ и 1 включительно.

Ответ: $x \in [-3{,}5; 1]$ [35].

Задание:

Решите неравенство $-x^3 + 4x \leq x^2 - 4$.

Решение.

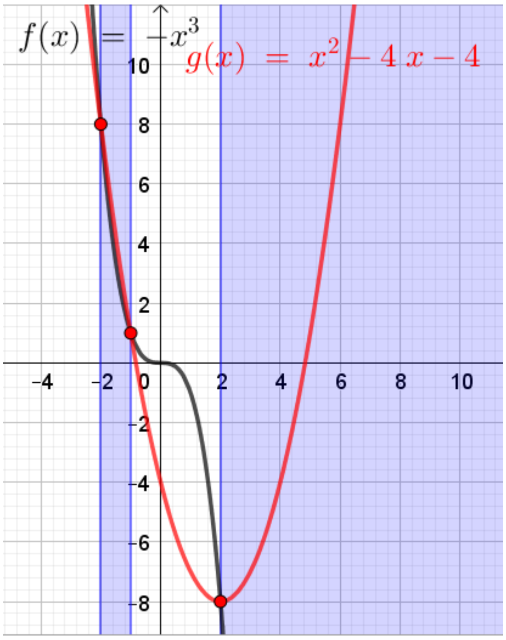
Приведём рациональное неравенство к виду $f(x)$ не больше $g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ будут удобными функциями для построения их графиков. Сформировать функции $f(x)$ и $g(x)$ можно переносом слагаемых из одной части неравенства в другую различными способами. Удобнее всего выделить кубическую функцию и квадратичную функцию. Тогда имеем $-x^3 \leq x^2 - 4x - 4$.

Теперь применим алгоритм решения рациональных неравенств с помощью графиков:

1. В одной системе координат построим графики кубической функции $y = -x^3$ и квадратичной функции $y = x^2 - 4x - 4$. Графиком кубиче-

ской функции является кубическая парабола с вершиной в точке с координатами $(0;\ 0)$ и ветвями, проходящими через точки $(-2;\ 8)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ -1)$ и $(2;\ -8)$. Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола $y = x^2$ в новой системе координат с началом в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = y(x_0)$, то есть точка с координатами $(2; -8)$.

2. Выделим точки пересечения графиков с координатами $(-2;\ 8)$, $(-1;\ 1)$ и $(2;\ -8)$ закрашенными точками, так как неравенство нестрогое.
3. Выделим область графика кубической параболы, расположенную ниже квадратичной параболы.
4. Решением данного неравенства является отрезок от -2 до -1 и луч от 2 до $+\infty$.



Ответ: $x \in [-2; -1] \cup [2; +\infty)$ [31].

Задание:

Тело двигалось в течение некоторого целого количества секунд и прошло за первую секунду 3 м, а за каждую следующую секунду на 4 м больше, чем за предыдущую.

Если бы это тело прошло за первую секунду 1 м, а за каждую следующую – на 8 м больше, чем за предыдущую, тогда длина пути, пройденного телом за тот же промежуток времени, была бы короче действительно пройденного им пути более, чем на 6 м, но менее, чем на 30 м.

Определить продолжительность движения этого тела.

Решение.

Применив формулу $S = \frac{2a+d(n-1)}{2}n$ суммы первых n членов арифметической прогрессии, составляем в соответствии с условиями задачи систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x - (2x^2 + x) > 6 \\ 4x^2 - 3x - (2x^2 + x) < 30, \end{cases} \quad (1)$$

где x —искомая продолжительность движения, выраженная в секундах.

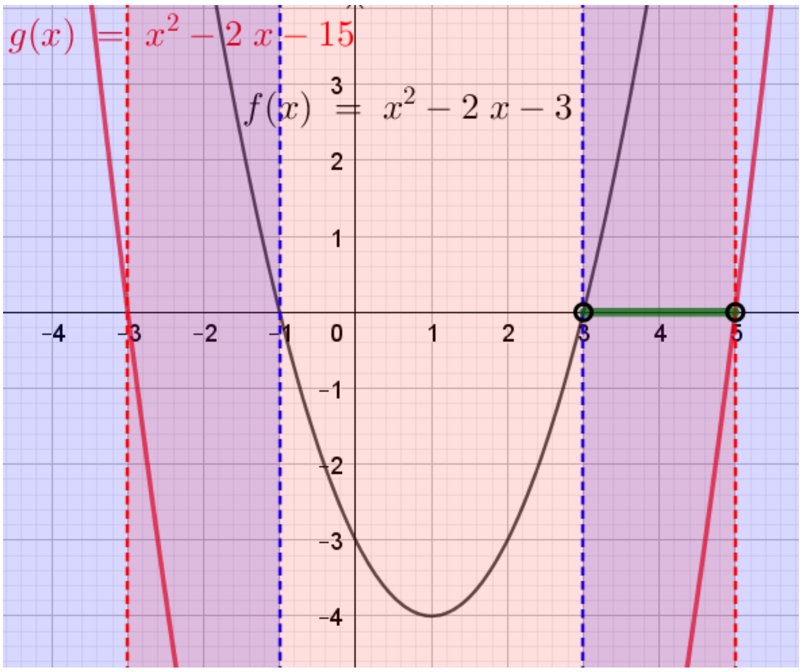
Систему (1) упростим к виду:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 15 < 0, \end{cases} \quad (2)$$

Решим графически данную систему неравенств. Но предварительно рассмотрим функцию $x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x-1)^2 - 4$, то есть парабола $y = x^2 - 2x - 3$ может быть построена путем двух поступательных перемещений параболы $y = x^2$, а именно: смещение ее направо на единицу и вниз на 4 единичные клетки.

Очевидно, что, так как $x^2 - 2x - 15 = (x^2 - 2x - 3) - 12$, то парабола $y = x^2 - 2x - 15$ получится в результате смещения параболы $y = x^2 - 2x - 3$ вертикально вниз на 12 единиц масштаба.

Изобразим графики этих функций. Вспомним, что за переменную мы обозначили продолжительность время в секундах. А значит, исключаем отрицательные значения переменной. Изобразим решения этих неравенств. Видим, что решением системы неравенств является интервал $(3;5)$.



В этом интервале единственное целое число (а по условию необходимо именно целое число), значит $x = 4$.

Ответ: тело двигалось 4 с [16].

<u>Дробно-рациональные неравенства</u>

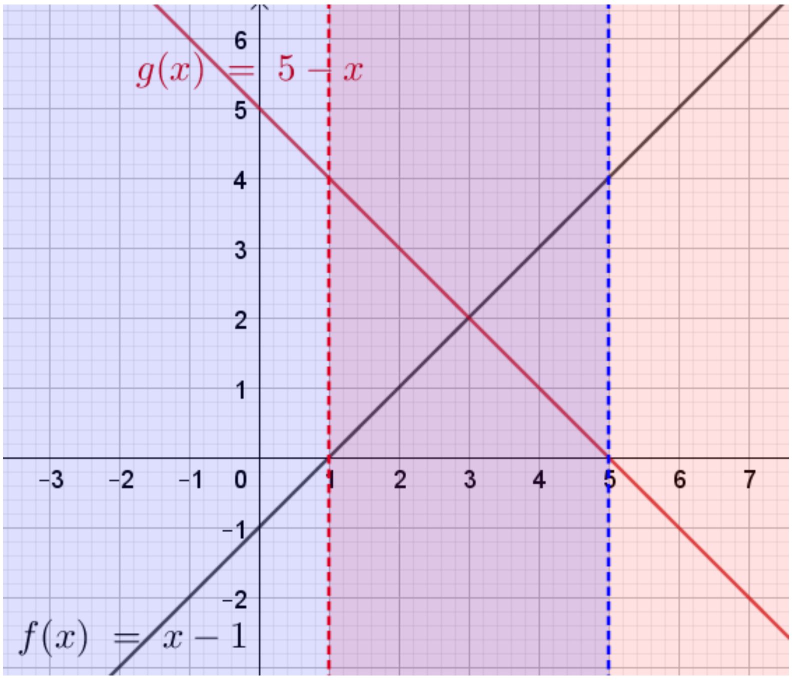
Тему «Решение дробно-рациональных неравенств» изучают в 9 классе. Решаются они методом интервалов. Задания, включенные в данный раздел, решаются функционально-графическим методом, и ориентированы на обучающихся 8 классов. Решение функционально-графическим методом дробно-рациональных неравенств в 8 классе следует рассматривать как подготовку к решению более сложных заданий, например, задания с параметром 18 из ЕГЭ профильного уровня.

Задание:

Решите неравенство $\frac{x-1}{5-x} > 0$.

Решение.

Отметим, что всякая дробь положительна, если числитель и знаменатель ее одинаковых знаков (либо оба положительны, либо оба отрицательны). В нашем случае имеем две системы неравенств: $\begin{cases} x-1>0, \\ 5-x>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-1<0, \\ 5-x<0. \end{cases}$ Изобразим графики функций $f(x) = x - 1$ и $g(x) = 5 - x$.



Из рисунка видно, что решениями данного неравенства являются все числа, содержащиеся в интервале $(1; 5)$.

Ответ: $(1; 5)$ [18].

Задание:

Решите неравенство $\frac{x^2+2x+6}{x+2} > 3x + 8$.

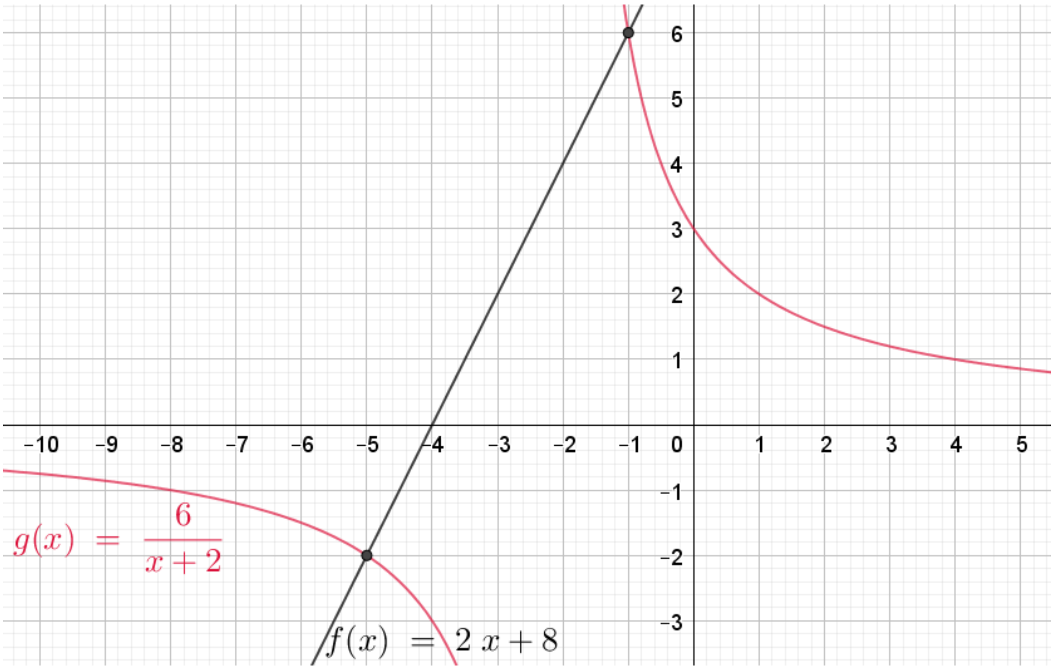
Решение.

Приведём дробно-рациональное неравенство к удобному виду для построения графиков. Для этого числитель дроби представим в виде $x(x+2) + 6$ и почленно разделим на знаменатель $x + 2$. Получаем неравенство $x + \frac{6}{x+2} > 3x + 8$. Теперь перенесем x из левой части неравенства в правую, поменяв знак коэффициента на противоположный. Имеем неравенство $\frac{6}{x+2} > 2x + 8$. Теперь применим алгоритм решения дробно-рациональных неравенств с помощью графиков:

1. В одной системе координат построим графики функции обратной пропорциональности $y = \frac{6}{x+2}$ и линейной функции $y = 2x + 8$. Графиком функции обратной пропорциональности являются две ветви гиперболы $y = \frac{6}{x}$ в новой системе координат с началом в точке с коор-

динатами $(-2; 0)$. Графиком линейной функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 8)$ и $(-3; 2)$.

2. Выделим точки пересечения графиков с координатами $(-5; -2)$ и $(-1; 6)$ выколотыми точками, так как неравенство строгое.
3. Выделим область графика гиперболы, расположенную выше прямой.
4. Решением данного неравенства является открытый луч от – ∞ до – 5 и открытый интервал от – 2 до – 1.



Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1)$ [31].

<u>Иррациональные неравенства</u>

Задание:

Решите неравенство: $\sqrt{x + 15} \le 5 - x$.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{x + 15}$ и $g(x) = 5 - x$ на промежутке $[-15; +\infty)$, то есть в их общей области определения. Так как $f(x)$ - возрастает, а $g(x)$ - убывает, то по теореме если существует решение, то оно единственно. Подбором находим $x = 1$ уравнения $\sqrt{x + 15} = 5 - x$, тогда $f(x) \le g(x)$ при $-15 \le x \le 1$.

Ответ: $[-15; 1]$ [35].

<u>Неравенства с параметром</u>

Задание:

Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2 + (2a + x)4 + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Решение.

График функции $y = x^2 + (2a + x)4 + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (2a + x)4 + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

Имеем $D = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Ответ: $(1; 3)$ [35].

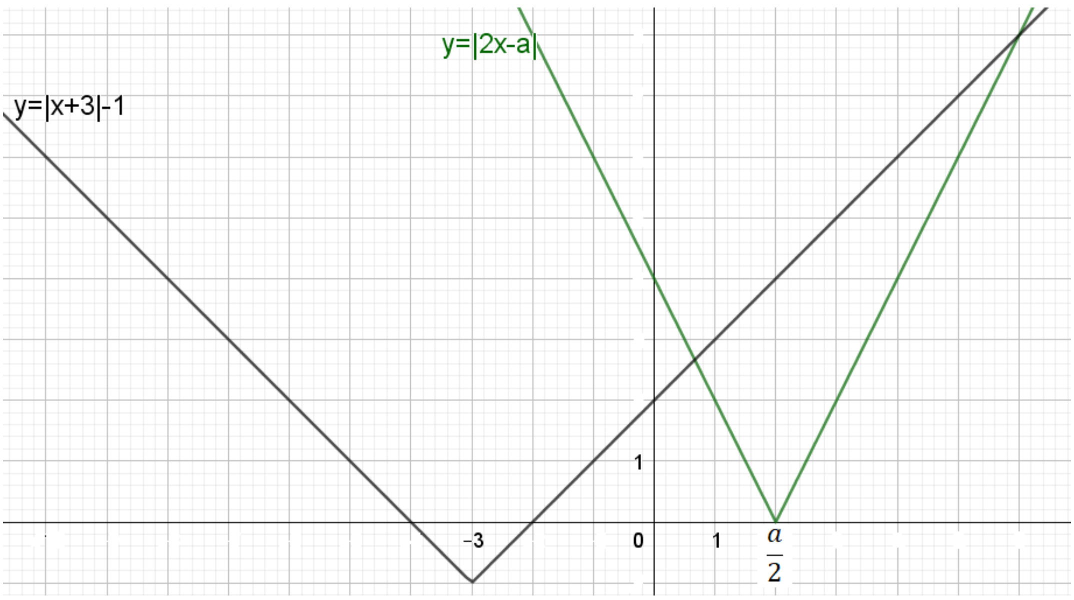
Задание:

Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x - a| \leq |x + 3| - 1$.

Построим схематично графики функций $y = |2x - a|$ и $y = |x + 3| - 1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

При $\frac{a}{2} \le -4$: $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x - a| \le -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8, \\ 2x - a \le -x - 4, \\ 2x - a \ge x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8, \\ x \le \frac{a-4}{3}, \\ x \ge a + 4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-4}{3} - (a + 4) = 1$, откуда $a = -\frac{19}{2}$.

При $\frac{a}{2} \ge -2$: $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x - a| \le x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4, \\ 2x - a \le x + 2, \\ 2x - a \ge -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a + 2, \\ x \ge \frac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a + 2 - \frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $a = -\frac{19}{2}$ [42].

Задание:

Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $20b \ge 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Решение:

Найдем все a, при каждом из которых неравенство $20b \ge 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ выполнимо при любом $b > a$. Данное неравенство равносильно неравенству $F(b) = 20b - 6|2a + b| - 2|b - 2| + |2a - b| + 5|4a^2 - b + 2| \ge 0$, причем функция $F(b)$ строго возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \ge 0$, то есть $20a^2 + 15a - 17|a| - 2|a - 2| + 10 \ge 0$ при $a \ge 0$.

Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству $10a^2 + 17a + 3 \ge 0$; $\left[\begin{array}{l} -0{,}2 \le a < 0; \\ a \le -1{,}5. \end{array}\right.$

Существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Ответ: -1.

Задание:

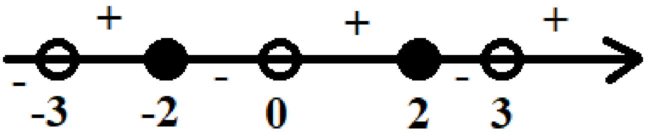
Построить график функции $y = \frac{x^2-4}{x^3-9x}$.

Решение.

1) Ищем вертикальные асимптоты.

$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 3$

Находим промежутки знакопостоянства:



2) Ищем горизотальные асимптоты.

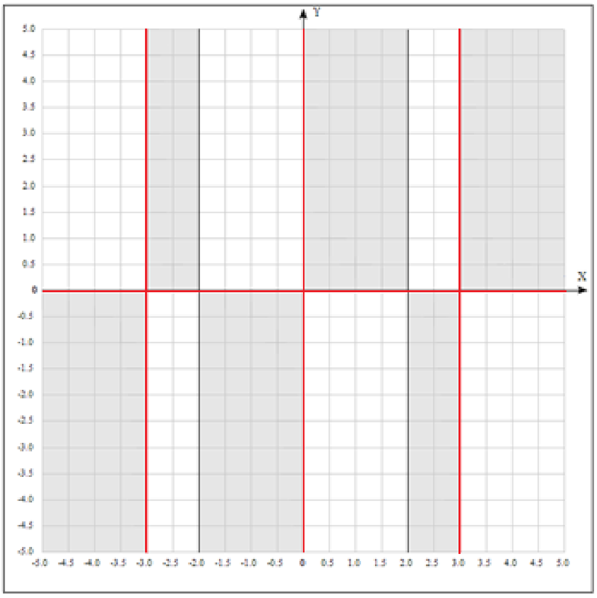
$$\lim_{x\to\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{горизонтальная асимптота}$$

3) Находим, к чему стремится функция в точках асимптот слева и справа. (Можно использовать знак предела, можно ограничиться записью вида $y \to \infty$ при $y \to -3 - 0$).

$\lim\limits_{x\to-3-0} y = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to0-0} y = -\infty$ $\lim\limits_{x\to3-0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-3+0} y = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0+0} y = +\infty$ $\lim\limits_{x\to3+0} y = +\infty$

Строим систему координат и закрашиваем те области, в которых возможно существование графика функции (рис. 1).



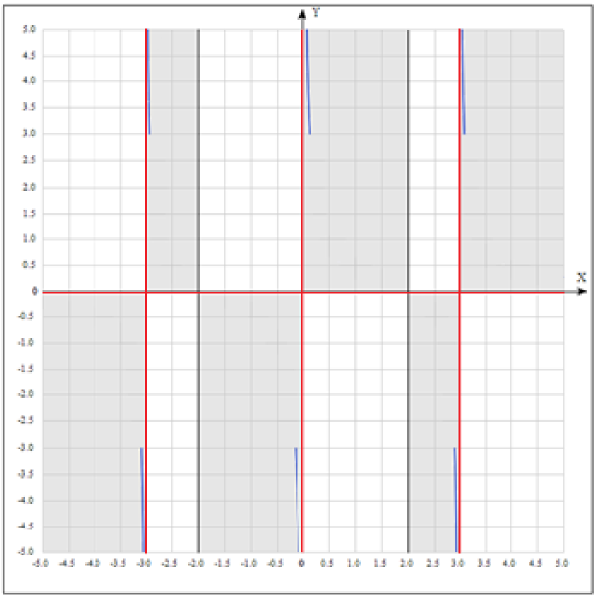


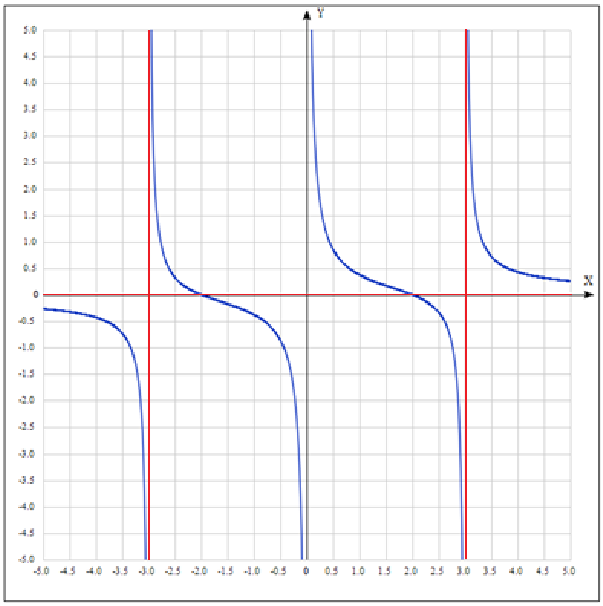
Рис.1. *Рис.2.*

4) Отмечаем приближения графика к асимптотам (рис. 2).

5) Находим несколько контрольных точек.

x	–5	–2	2	5
y	–0,2625	0	0	0,2625

6) Строим график (рис. 3) [47].



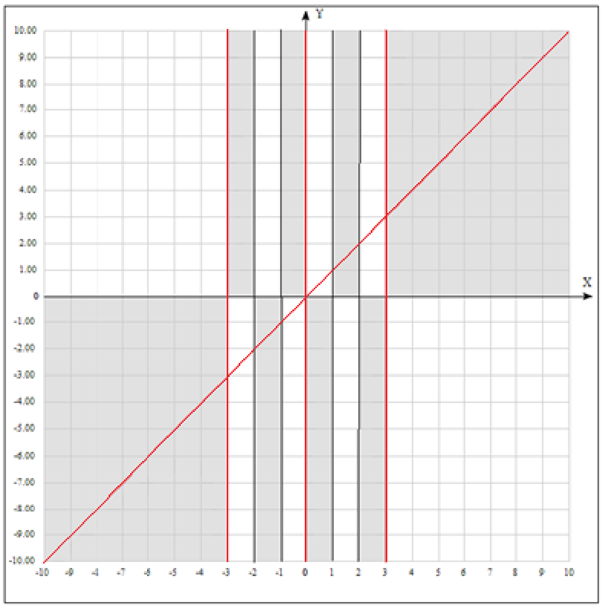


Рис.3 *Рис.4*

Задание:

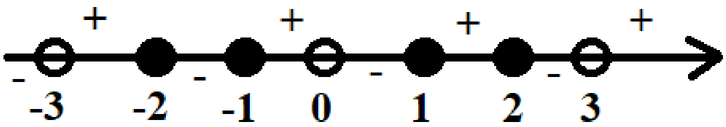
Построить график функции $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x}$.

Решение.

1) Ищем вертикальные асимптоты.

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0; x = \pm 3$$

2) Находим промежутки знакопостоянства:



3) Горизонтальных асимптот нет, так как степень числителя выше степени знаменателя.

4) Находим, к чему стремится функция в точках асимптот слева и справа.

$\lim\limits_{x \to -3-0} y = -\infty;$ $\quad \lim\limits_{x \to 0-0} y = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 3-0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3+0} y = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0+0} y = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 3+0} y = +\infty$

Наибольшая степень в числителе 4, в знаменателе – 3, следовательно, существует наклонная асимптота. Найдем ее. Для этого выделим целую часть в аналитическом выражении функции.

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x} = x + \frac{4x^2 + 4}{x^3 - 9x} \Rightarrow y = x \text{ – наклонная асимптота.}$$

График функции не пересекает наклонную асимптоту (т.к. числитель новой дроби не имеет нулей).

Строим систему координат и закрашиваем те области, в которых возможно существование графика функции (рис. 4).

5) Отмечаем приближения графика к асимптотам (рис. 5).

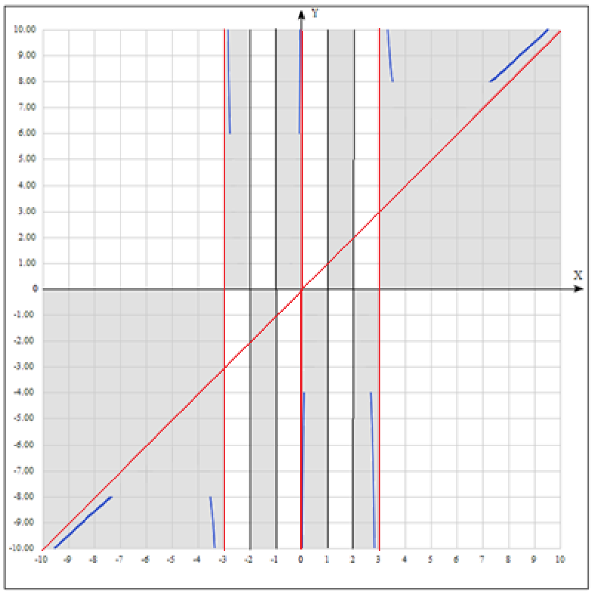


Рис.5.

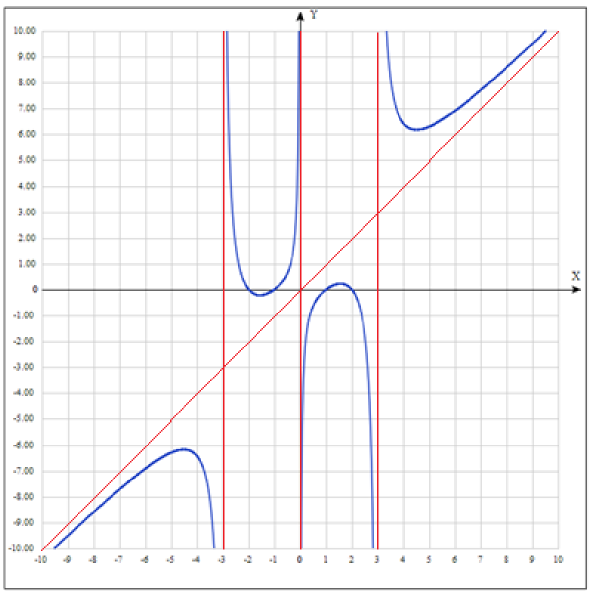


Рис.6.

6) Находим несколько контрольных точек.

x	–5	–2	2	5
y	–6,3	0	0	6,3

7) Строим график (рис. 6) [47].

В основном данное разбиение на группы, как говорилось выше, условно, так как в большинстве своем чаще всего уравнения и неравенства, разрешимые функционально-графическим методом, представляют собой по разные стороны от знака равно функции разных видов. И это вполне логично и очевидно, ведь при решении графическим методом точки пересечения лучше видны и имеют не столь большие координаты у разных видов функций. А при решении функциональным методом удобнее подбирать либо функции, графиками которых являются прямые, с разной монотонностью, либо различные по виду функции.

Представленный комплекс задач содержит задачи из разных учебных комплектов, а также учебных пособий, что расширяет содержание рассматриваемого материала по сравнению с любым учебным комплектом, используемым учителем. Кроме того, многие из представленных задач могут быть решены и исследованы в компьютерной среде GeoGebra, что увеличивает их методическую ценность. Также в комплексе есть задания, которые можно использовать как подготовительные для решения задания 23 ОГЭ и задания высокого уровня сложности 18 профильного уровня ЕГЭ по математике, что может увеличить статистику их решаемости (являющуюся довольно низкой).

2.2 Фрагменты уроков с использованием задач на функционально-графический метод

Ниже представлены фрагменты серии уроков с использованием задач на функционально-графический метод, описанные в предыдущем параграфе. Разработанная серия уроков ориентирована на 9 класс, при реализации уроков использовалась компьютерная среда GeoGebra. Следует отметить, что представленные фрагменты являются различными по типу и этапу урока [17, 41]. Таким образом, наглядно показывается возможность применения разработанного комплекса упражнений на различных этапах урока любого типа.

Для реализации подобной серии уроков требуется класс, оборудованный компьютерами и интерактивной доской.

Тип урока: «Открытие» новых знаний

Этап урока: Постановка учебной задачи, построение и реализация проекта.

Учитель
1. Мы изучили достаточно много различных методов решения уравнений. И теперь я предлагаю вам в группах найти наиболее рациональное решение уравнения. 2. Я разделю вас на группы по 4 человека, раздам карточки. В группе вам нужно будет разделить обязанности, придумать роли. Но также все вы выступаете в качестве «генератора идей». 3. Перед началом работы спланируйте ее. Запишите план действий.

На группы обучающиеся будут разбиты по принципу уравнивания сил. То есть будут смешанные группы. Учитель заранее для себя формирует списки групп.

Коэффициент индивидуального участия обучающего в группе

1. Сумма складывается из мнения руководителя группы (того ученика, который её набирал), умноженного на 2, и суммы мнений остальных членов группы.

2. При подсчете среднего сумма делится не на 4 (количество учеников), а на 5 (количество мнений)

3. **Коэффициент индивидуального участия** рассчитывается по формуле:

$$\text{КИУ} = \frac{\text{Средний }\%}{100:n}, \text{где } n - \text{количество учащихся}$$

Группа 1 Решите уравнения: 1) $x^3 + 2x - 5 = 0$; 2) $x^5 - 3x + 2 = 0$.	Группа 2 Решите уравнения: 1) $x^3 + 7x - 2 = 0$; 2) $4 - 2x - x^7 = 0$.
Группа 3 Решите уравнения: 1) $x^3 + 4x - 3 = 0$; 2) $7x + 6 - x^5 = 0$.	Группа 4 Решите уравнения: 1) $x^3 + 6x - 1 = 0$; 2) $x^7 + 7x + 5 = 0$.

Инструкция:

Вам необходимо придумать и распределить роли внутри группы. У каждого участника должны быть конкретная роль и обозначен его функционал. Каждый член группы также является и «генератором идей».

В группе запрещается:

1. Критиковать идеи членов группы;
2. Нарушать организацию, выкрикивать;
3. Не выполнять / перекладывать свои обязанности по роли;

Вам необходимо найти наиболее рациональный способ решения поставленной задачи и обосновать выбор. Также необходимо будет представить решение задачи и пояснить для всех выбор метода.

В конце урока Лидер должен представить отчет о работе каждого члена группы. Отчет предоставляется в следующей форме:

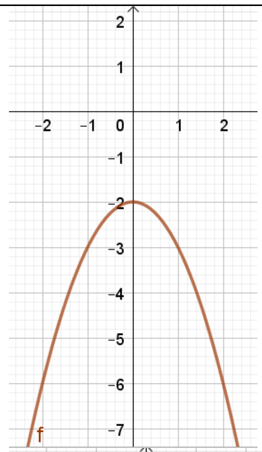
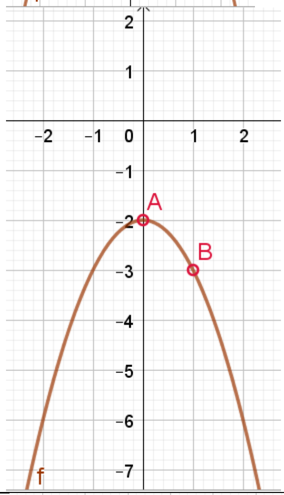
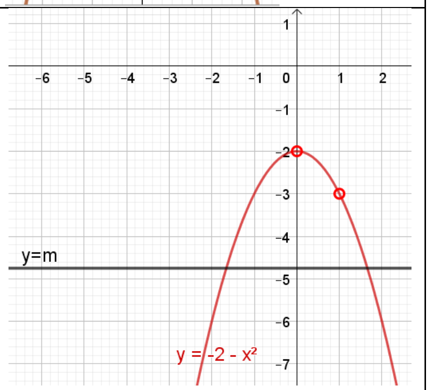
ФИО	Количество баллов, выставленное ему:				Сумма, %	Средний % (: 5)	КИУ

При реализации данного фрагмента используется групповая форма работы – мозговой штурм. У обучающихся происходит формирование коммуникативных (за счет участия в групповой работе) и регулятивных УУД (за счет оценивания своей работы и каждого члена группы).

<u>Тип урока:</u> Урок «открытия» новых знаний

<u>Этап урока:</u> Первичное закрепление

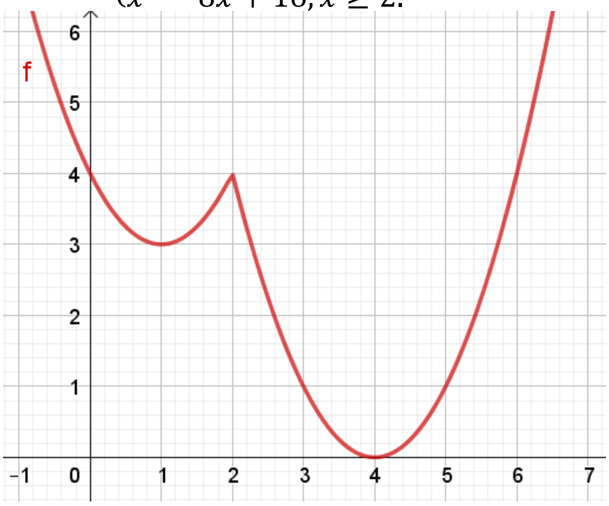
Учитель	Ученик	Доска
1. Каждый из вас сидит за компьютером, и открыл программу GeoGebra. Сейчас мы решим уравнение с помощью этой программы. Итак, задание на доске.		Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.
2. Какая функция дана? 3. Можно ли ее как-то упростить? 4. Упростите эту функцию у доски. 5. Что это за функция?	2. Дробно-рациональная. 3. Да, можно упростить. 4. 5. Квадратичная.	4. $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2$

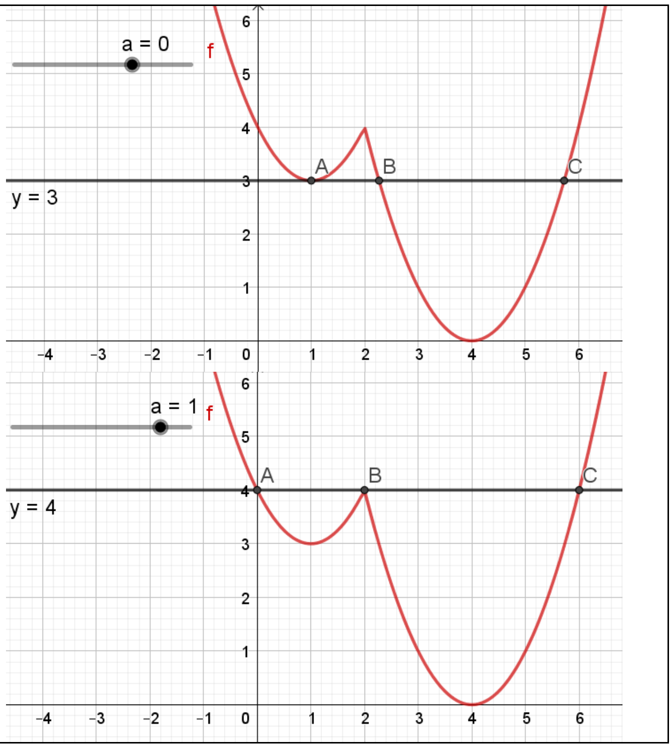
6. Что является графиком квадратичной функции? Что вы можете о ней сказать в нашем случае?	6. Парабола. Ветви направлены вниз, график смещен на две единицы вниз, выколоты точки с координатами $(0;-2)$ и $(1;-3)$.	
7. Мы обсудили, как должен выглядеть график. Теперь построим его в программе. 8. Для этого введем в строку ввода аналитическую запись функции, а именно $= -2 - x^2$. Нажимаем Enter. 9. Необходимо на рисунке указать, что есть выколотые точки. Для этого воспользуемся инструментом «Точка». Поставим точки в соответствии с нашими координатами. В левом верхнем углу Полотна выберем стиль точки так, чтобы точка была выколота.		 
10. При каком m график функции имеет с прямой $y = m$ ровно две общие точки? 11. Для того чтобы показать на рисунке это, можно создать ползунок, с помощью одноименного инструмента. 12. Зададим ползунок m с интервалом от -8 до -2. Затем в строке ввода зададим $y = m$. Изменяя положение ползунка, будет меняться положение прямой.	При m , принадлежащем промежутку $(-\infty;-3) \cup (-3;-2)$.	

В данном фрагменте использование программы GeoGebra позволяет с помощью анимации увидеть множество решений. В последующем обучающимся будет гораздо легче представить движение прямой, зависящей от параметра.

Тип урока: Урок развивающего контроля

Этап урока: Предъявление контролируемого варианта.

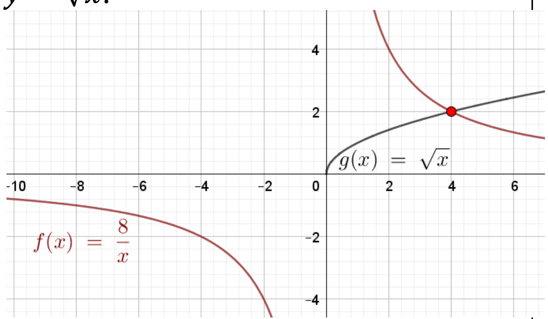
Учитель	**Ученик**	**Доска**
1. Сегодня на уроке вы будете решать самостоятельную работу. А также вы будете сами проверять свою работу. Но необычным способом.		
2. Я раздам вам варианты работы, вы ее решите в тетради, а затем проверите правильность решение с помощью программы GeoGebra.		
3. Для примера решим одно небольшое задание и выполним проверку. Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3\|x-2\|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$.		$y = x^2 - 5x + 10 - 3\|x-2\|$; $y = a + 3$. Решение: Построим график функции $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, x < 2, \\ x^2 - 8x + 16, x \geq 2. \end{cases}$  Прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$. Ответ:0; 1. Осуществим проверку в GeoGebra. Для этого изображаем функцию, строим ползунок a от -4 до 2. Запускаем анимацию ползунка и видим, что действительно, прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$.

Данный фрагмент демонстрирует предъявление эталона выполнения задания. В дальнейшем обучающиеся будут выполнять работу аналогичным образом.

<u>Тип урока:</u> Урок общеметодологической направленности

<u>Этап урока:</u> Этап обобщения затруднений во внешней речи

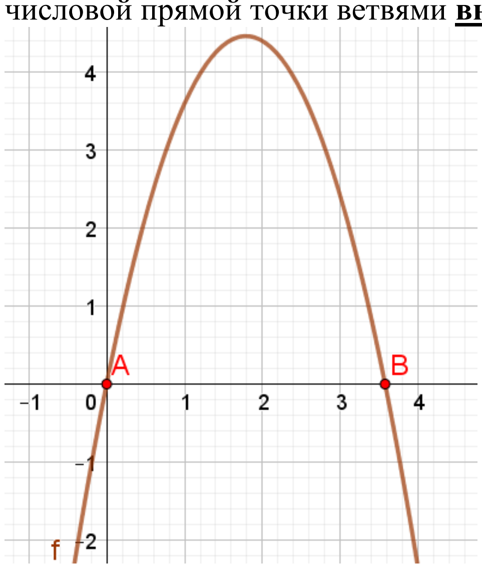
Учитель	**Ученик**	**Доска**
1. Сейчас у доски два обучающихся решат одно и то же уравнения двумя разными способами: функциональным и графическим.		Решите уравнение $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$. <u>Решение 1:</u> Заметим, что $x = 4$ – корень уравнения. На отрезке $[0; +\infty)$ гипербола убывает, а функция корня квадратного возрастает. Следовательно, имеется не более одного пересечения графиков. Значит, $x = 4$ – единственный корень данного уравнения. <u>Решение 2:</u> Построим графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.  На графике видна точка пересечения

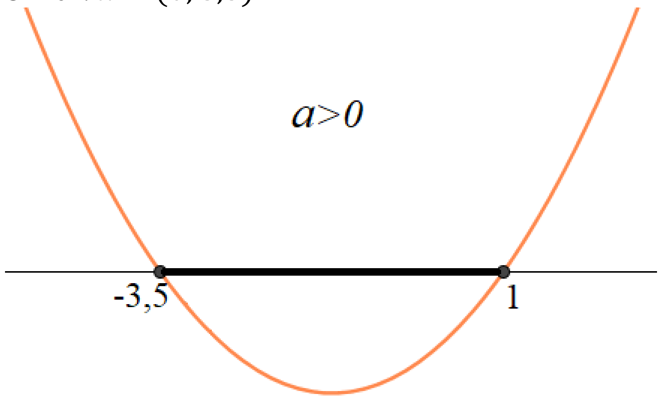
		графиков с абсциссой $x = 4$. Ответ: $x = 4$
2. На что нужно обращать внимание, при решении уравнений функциональным методом?	На поведение функций на области определения: монотонность, четность, непрерывность.	
3. А при решении графическим методом?	Легко ли построить графики функций, указанных в уравнении; возможны ли целые решения уравнения; какой ответ требуется в задании.	
4. Данное уравнение каким способом было рациональнее решить?	Скорее функциональным, так как подбором достаточно быстро нашелся корень уравнения, и видим, что у функций разная монотонность. А изображать графики данных функций несколько сложнее.	
5. Какие трудности могут возникнуть при решении данного уравнения функциональным методом?	Незнание свойств функций, незнание теоремы о монотонности и количестве корней.	
6. А графическим?	Если даже обучающийся не будет знать, как выглядит график функции, то он всегда может построить его по точкам. Так что не должно возникнуть сложностей.	

При реализации этого фрагмента урока у обучающихся происходит формирование таких УУД, как готовность к преодолению трудностей, знаково-символическое моделирование, умение осознанно строить речевые высказывания в устной форме, выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий, умение оформлять свою мысль в устной форме, понимание возможности различных позиций. Эти УУД принадлежат различным группам, но по большей части относятся все же к познавательным УУД.

<u>Тип урока:</u> Урок общеметодологической направленности

Этап урока: Этап самостоятельной работы

Учитель	Ученик	Доска
1. Сейчас вы будете работать в парах. Я раздам каждой паре по одному примеру с решением, в котором допущены ошибки. Вам необходимо будет эти ошибки найти, объяснить, почему это неверно и исправить. В итоге должно получиться верное решение.		
2. Рассмотрим на примере. Перед вами будет вот такое задание и его решение. 3. Выделим ошибки и объясним, почему это неверно. 4. Первая ошибка – ветви параболы направлены вверх, так как коэффициент при старшем члене положителен. 5. Следующая ошибка – если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю, то корнями будут являться числа 1 и $-3{,}5$, так как $c=-7$, а как известно второй корень это $\frac{c}{a}$. 6. Снова ветви направлены вниз. Также видим, что неверно построен чертеж. Построим ниже верный чертеж. 7. Выделяем часть параболы, которая ниже оси Ox, так как стоит знак не больше, а также закрасим точки, так как знак нестрогий. 8. И последняя ошибка – мы включаем концы отрезка и указываем верные значения x. Пишем верный ответ.		Решить квадратное неравенство $2x^2+5x-7\leq 0$. **Решение:** Введём квадратичную функцию $y=2x^2+5x-7$. Старший коэффициент $a=2$ положительный, следовательно, ветви её графика – параболы направлены **вниз**. Определим нули функции. Для этого решим квадратное уравнение $2x^2+5x-7=0$. Используя свойства коэффициентов квадратного уравнения, имеем, сумма коэффициентов равна нулю, значит, корнями уравнения являются числа **0** и **3, 5.** На координатной прямой Ox отметим найденные корни квадратного уравнения и построим параболу, проходящую через отмеченные на числовой прямой точки ветвями **вниз.**  В исходном неравенстве стоит нестрогий знак не больше, значит, выделим часть параболы **выше** оси Ox и **не** закрасим точки пересечения. Решением неравенства являются абсциссы точек выделенной области, то есть все значения x, расположенные между числами **3, 5 и 0 без включения**.

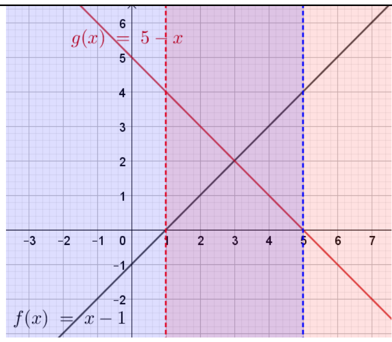
		Ответ: $x \in (0; 3{,}5)$ 
9. Вопросы по работе есть? Тогда приступаем к работе в паре. После завершения работы вы также будете ее представлять.		

В первую очередь в данном фрагменте у обучающихся формируются регулятивные УУД, а именно умение выявлять и объяснять ошибки. Также происходит формирование коммуникативных УУД за счет организации парной формы работы.

Тип урока: Урок рефлексии

Этап урока: Этап первичного закрепления с проговариванием во внешней речи

Учитель	**Ученик**	**Доска**
1. Мы с вами уже достаточно много раз использовали GeoGebra для решения уравнений. Теперь попробуем решить неравенство с ее помощью. 2. Сейчас один из обучающихся выйдет к учительскому компьютеру и решит неравенство, поясняя по ходу решения свои действия в программе.		
3. Задание следующее: Решите неравенство $\frac{x-1}{5-x} > 0$.		Решите неравенство $\frac{x-1}{5-x} > 0$.

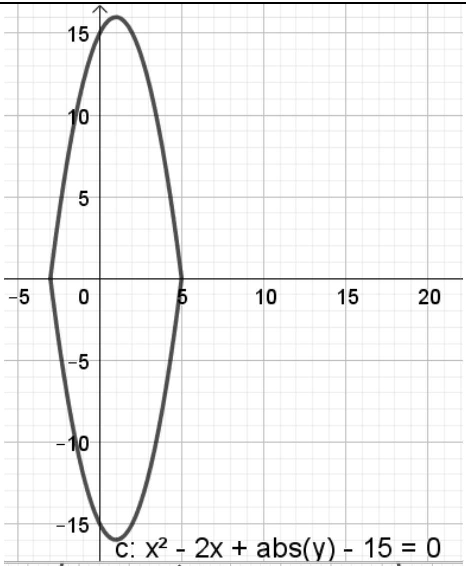
	Всякая дробь положительна, если числитель и знаменатель ее одинаковых знаков (либо оба положительны, либо оба отрицательны). В нашем случае имеем две системы неравенств: $\begin{cases} x-1>0, \\ 5-x>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-1<0, \\ 5-x<0. \end{cases}$ Изобразим графики функций $f(x)=x-1$ и $g(x)=5-x$. Для этого в строке ввода введем $x-1$ и $5-x$. Также введем $x-1>0$ и $5-x>0$. Видим, что решениями данного неравенства являются все числа, содержащиеся в интервале $(1;5)$. Если построим $\begin{cases} x-1<0, \\ 5-x<0 \end{cases}$, то увидим, что это промежуток $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$. Ответ: $(1;5)$	

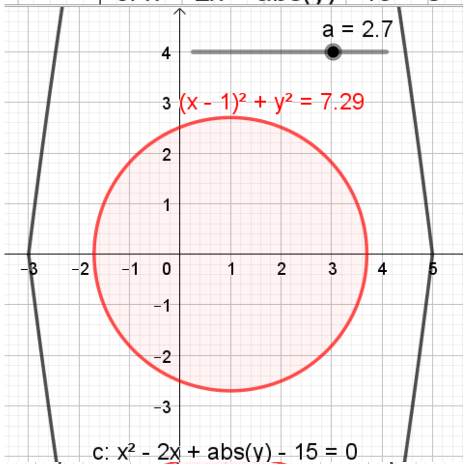
Помимо познавательных УУД, к которым относится умение осознанно строить речевые высказывания в устном и письменном виде и выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий, на данном этапе формируются коммуникативные УУД.

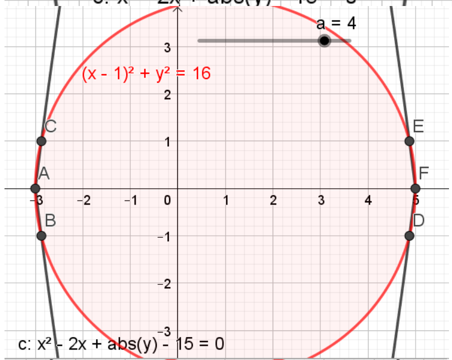
Тип урока: Урок рефлексии

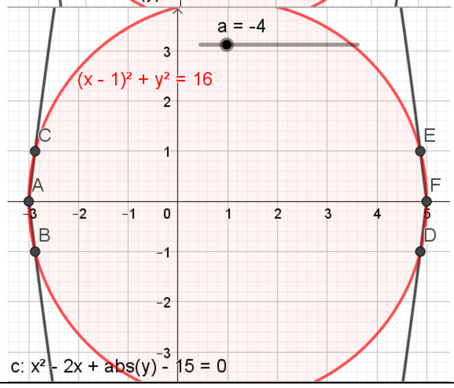
Этап урока: Этап первичного закрепления с проговариванием во внешней речи

Учитель	Ученик	Доска
Итак, вы работали за компьютером, искали ошибки в своих решениях и обосновывали верность нового решения. Один из вас сейчас представит свою работу.	Задание вы видите на доске. В программе GeoGebra в строку ввода вводим первое уравнение из системы. Программа строит график частей двух парабол. Затем вводим второе уравнение из системы, так как в нем содержится параметр, то программа предлагает создать ползунок. Создаем ползунок для a, который принимает значения от -6 до 6. Видим, что получили окружность с центром в точке с координатами $(1;0)$. Замечаем, что центр окружности разбивает отрезок, полученный в результате пересечения графиков парабол с осью Ox, пополам. А значит,	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2-2x+\lvert y\rvert-15=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ имеет ровно 6 решений. Решение:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>окружность радиусом 4 будет пересекать график параболы на оси Ox. Задаем ползунку значение 4. Возьмем инструмент «Пересечение» и используем его на два уравнения. Программа строит 6 точек. Очевидно, это и есть решение. Запускаем анимацию ползунка со скоростью 1. Замечаем, что есть еще одно решение, при $a = -4$. Таким образом, получили ответ: $-4; 4$.</td>
<td>








</td>
</tr>
</table>

Данное задание не входит в комплекс упражнений, так как является достаточно сложным заданием для обучающихся 7–9 классов. Но при помощи программы GeoGebra задания повышенной трудности могут быть решены обучающимися. Более того обучающиеся не просто решат его, а наглядно увидят и осознают верность решения.

В этом параграфе требовалось разработать серию уроков с использованием комплекса упражнений. Для серии уроков были разработаны анимационные чертежи к задачам из комплекса упражнений в программе GeoGebra. Уроки разрабатывались в соответствие с требованиями к современному уроку, а также в рамках системно-деятельностного подхода [41].

2.3 Результаты опытно-экспериментальной работы

В гипотезе говорится о повышении уровня сформированности познавательных и коммуникативных УУД. Выделим конкретные УУД, которые проверялись у обучающихся по результатам изучения данной темы.

Познавательные УУД:

- осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;
- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- построение логической цепочки рассуждений.

Коммуникативные УУД:

- умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации;
- владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка, современных средств коммуникации.

Для выявления изменений в уровне математической подготовки и сформированности познавательных и коммуникативных УУД были составлены и проведены на контрольной группе обучающихся 9 класса контрольная работа, тест и анкетирование. Контрольная работа в первую очередь была направлена на измерение уровня математической подготовки по теме «Решение уравнений и неравенств функционально-графическим методом», а также измерение уровня сформированности познавательных УУД. Тестирование направлено на проверку математических знаний, а также на проверку умения работать с заданиями в форме теста. Анкетирование было проведено с целью рефлексии обучающихся о проделанной ими работе.

Контрольная работа содержала 5 заданий. Ниже представлен вариант контрольной работы.

Вариант 1

1) Решите неравенство $-x^3 + 4x \leq x^2 - 4$.
2) Решите уравнение $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ различными способами.
3) Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.
4) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (1 - a)^2 = |x - 1 + a| + |x - a + 1|$ имеет единственный корень.
5) Тело двигалось в течение некоторого целого количества секунд и прошло за первую секунду 3 м, а за каждую следующую секунду на 4 м больше, чем за предыдущую.

   Если бы это тело прошло за первую секунду 1 м, а за каждую следующую – на 8 м больше, чем за предыдущую, тогда длина пути, пройденного телом за тот же промежуток времени, была бы короче действительно пройденного им пути более, чем на 6 м, но менее, чем на 30 м.

   Определить продолжительность движения этого тела.

Данная контрольная работа была проведена после изучения всей темы. Первое задание направлено на выявление уровня сформированности следующих познавательных УУД: определение типа функций, задействованных в уравнении/неравенстве; выявление и применение необходимых утверждений для решения задания. Второе задание направлено на выявление умения находить и реализовывать различные способы решения задачи. Третье и четвертое задания носят аналитический характер и направлены на оценивание сформированности умения провести логичные рассуждения (анализ, синтез информации) [53]. Пятое задание является заданием повышенной сложности, а также оно прикладного характера. Оно проверяет уровень сформированности таких умений, как умения моделировать и переводить информацию в знаково-символьную форму.

После выполнения контрольной работы контрольной группой обучающихся, которые изучали тему «Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств» с использованием комплекса упражнений, представленного в параграфе 2.1, а также выполнения контрольной работы обучающихся, которые проходили тему «Решение уравнений и неравенств» не используя комплекс упражнений, был проведен анализ результатов. На рис. 7 представлены результаты выполнения обеими группами контрольной работы. Первая группа – это контрольная группа, вторая – экспериментальная группа.

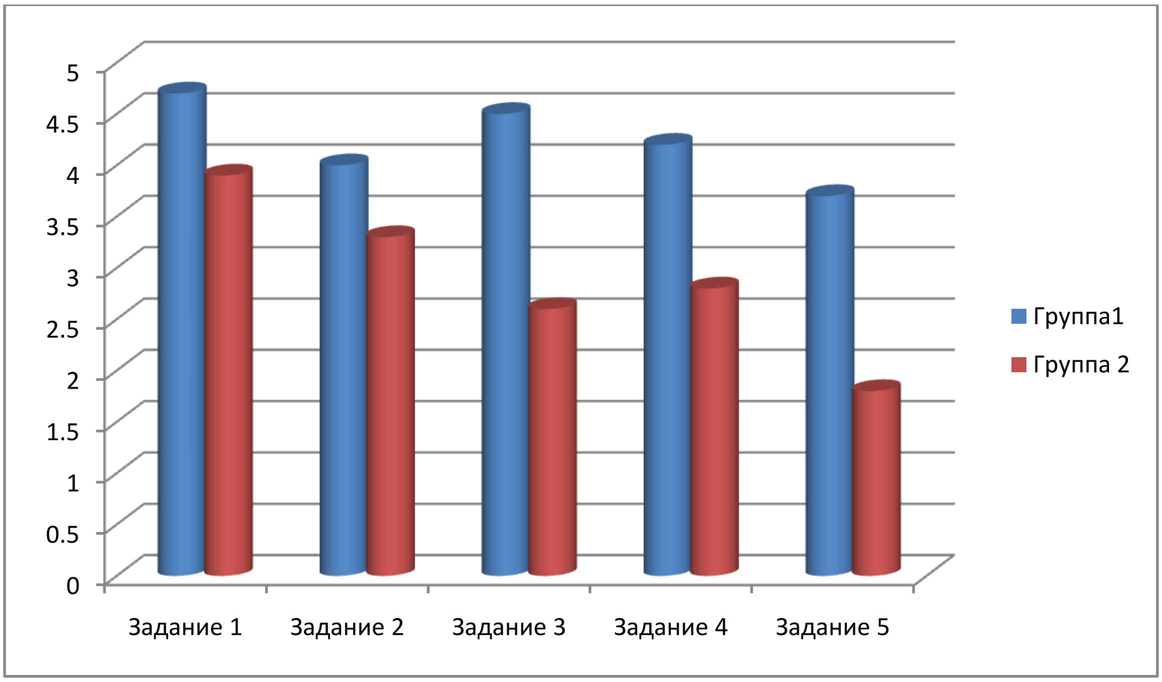


Рис. 7. Результаты выполнения контрольной работы

Как видно из диаграммы, контрольная группа справилась со всеми заданиями лучше, чем группа обучающихся, изучающих тему по плану. С пятым заданием обе группы справились хуже, чем с остальными. Скорее всего, это связано с тем, что данное задание представляет собой задание повышенной сложности, к тому же прежде чем решить систему уравнений, для начала требовалось ее составить.

Исследование представляло собой онлайн-тестирование на базе интернет ресурса Google Формы. Обучающимся было предложено 5 заданий с открытым ответом. Все задания имели формулировку, как задания 23 из ОГЭ и 18 из ЕГЭ. Ниже представлены задания из теста.

1) Постройте график функции $y = |x-2| - |x+1| + x - 2$ и найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.
2) Найдите все значения $a,$ при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.
3) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.
4) Постройте график функции $y = \frac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях k построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$.
5) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, \text{если } |x| \le 1, \\ -\frac{1}{x}, \text{если } |x| > 1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку [35, 43].

Исследование проводилось по окончанию изучения обучающимися темы «Решение уравнений функционально-графическим методом». Тестирование также проходила вторая группа обучающихся. На рис. 8 ниже представлены результаты тестирования.

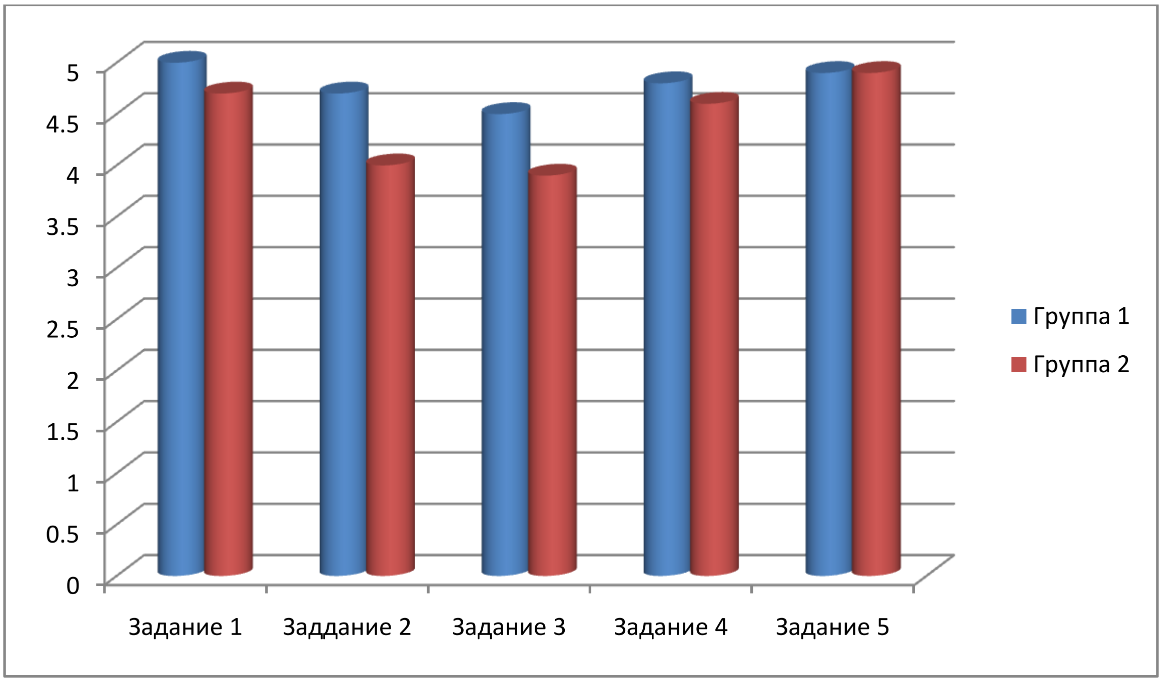


Рис. 8. Результаты тестирования

На диаграмме видно, что первая группа справилась с тестированием лучше, чем вторая. Первое, четвертое и пятое задания соответствуют заданию 23 из ОГЭ. Как видно, обучающиеся обеих групп справились с ним лучше, чем с заданиями 2 и 3. Также видно, что разрыв между выполняемостью этих заданий у групп также меньше у заданий, соответствующих ОГЭ.

Анкетирование проводилось с целью организации самоконтроля и рефлексии обучающихся. Оно было анонимным. Анкета состояла из 15 вопросов, ответом на которые было число, соответствующее варианту ответа. Ниже представлен вариант анкеты.

Вам будет предложен список вопросов или утверждений. Чтобы ответить на них, Вы должны поставить число, соответствующее вашему ответу: 1 – абсолютно не согласен, 2 – скорее нет, чем да, 3 – затрудняюсь ответить, 4 – скорее да, чем нет, 5 – абсолютно согласен. Не забудьте указать класс, в котором Вы обучаетесь. Анкетирование анонимно, пожалуйста, отвечайте честно.

1) Я могу решить любое уравнение и неравенство из тех, что мы проходили.

2) Я могу оформить решение любого уравнения и неравенства из тех, что мы проходили, в соответствие с требованиями учителя.
3) Я могу объяснить решение любого уравнения и неравенства из тех, что мы проходили, письменно.
4) Я могу объяснить решение любого уравнения и неравенства из тех, что мы проходили, устно.
5) Я легко определяю тип уравнения и неравенства.
6) Я затрудняюсь выбрать наиболее рациональный способ решения уравнения или неравенства.
7) Я могу обосновать выбор способа решения.
8) Я могу выделять утверждения, которые помогут в решении задания.
9) Я затрудняюсь записывать условие задания в знаково-математической форме.
10) Я легко рассказываю решение задания, оперируя математическими понятиями и терминами.
11) Я свободно нахожу математическую модель к реальной ситуации в задаче.
12) Я не умею провести логические рассуждения письменно.
13) Я могу провести логические рассуждения устно.
14) Я обладаю необходимыми знаниями о свойствах функции, необходимых при решении уравнений и неравенств функционально-графическим методом.
15) Я считаю, что функционально-графический метод решения уравнений и неравенств бесполезен.

Анкетирование проводилось в конце изучения темы «Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств». Анкеты заполняли обучающиеся первой и второй групп. Ниже, на рис. 3, представлены результаты анализа анкетирования.

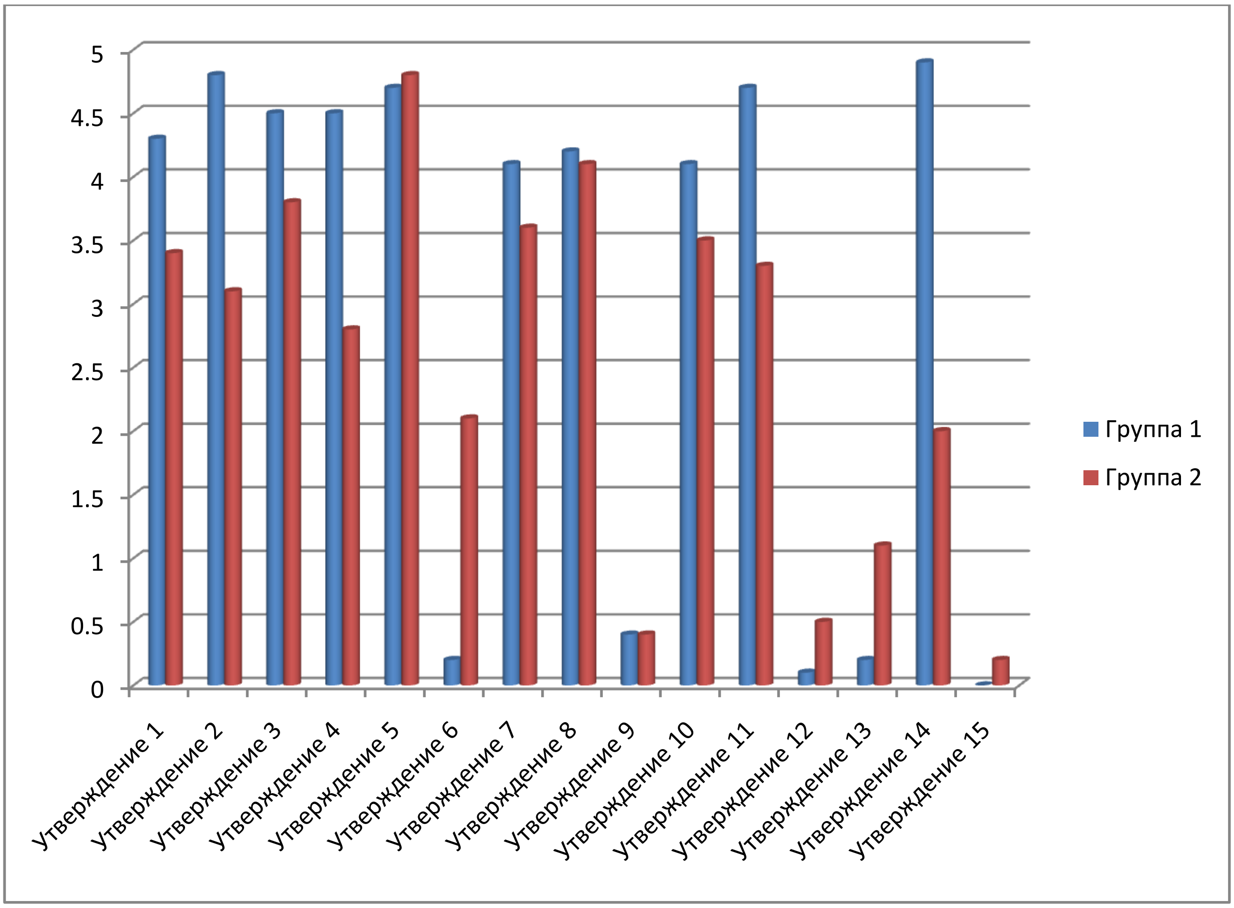


Рис. 9. Результаты анкетирования

Рис. 9 был составлен следующим образом: подсчитывалось количество обучающихся, ответивших на вопрос «скорее да, чем нет» и «абсолютно согласен».

Стоит обратить внимание, что результаты анкетирования в вопросах под номерами 6, 9, 12, 13, 15 такие низкие не потому, что уровень познавательных УУД у обучающихся обеих групп сформированы на очень низком уровне. А потому, что формулировка заданий была с отрицательным утверждением. Обучающиеся не соглашались с ним, ставили низкий балл. Так что можно сделать вывод о том, что познавательные УУД, уровень которых проверялся данными вопросами, сформированы на высоком уровне, по мнению обучающихся.

Также, обращая внимание на всю диаграмму 3, видно, что у обучающихся первой группы при проведении рефлексии мнение об уровне формирования познавательных УУД выше. В некоторых вопросах – значительно выше, чем у второй группы.

Таким образом, обучающиеся первой группы справлялись с заданиями теста и контрольной работы значительно лучше. Также сами обучающиеся этой группы оценивают свои знания на порядок выше, чем обучающиеся второй группы.

Следовательно, комплекс упражнений и серия уроков, разработанные в рамках написания этой работы, обладают высокой эффективностью для достижения поставленной цели.

Выводы по второй главе

Данная глава представляет собой результаты практической части проделанной работы. В первом параграфе был разработан комплекс упражнений, разрешаемых функционально-графическим методом. Были отобраны задания из различных источников, различного уровня сложности, различного содержания. Большая часть заданий направлена на решение уравнений и неравенств, но также присутствуют задания на построение графиков функций элементарными методами, а именно без использования производной. Это позволит обучающимся 7–9 классов в большей степени овладеть функционально-графическим методом решения уравнений и неравенств.

Во втором параграфе была разработана серия уроков с использованием ранее разработанного комплекса упражнений. Помимо направленности серии уроков на развитие определенных математических знаний, также были отобраны формы, методы и средства обучения, способствующие формированию познавательных и коммуникативных УУД. Уроки разработаны в соответствие с требованиями к современному уроку.

Третий параграф направлен на выявление эффективности разработанной серии уроков и, соответственно, комплекса упражнений. Для оценки проведения экспериментальной работы были разработаны три вида работ: контрольная, тестирование и анкетирование. В ходе обработки результатов и проведения оценки выяснилось, что у группы обучающихся, занимающихся по разработанному комплексу упражнений, повысился уровень математической подготовки, а также это способствовало формированию познавательных и коммуникативных УУД в большей степени, чем у обучающихся, занимающихся по стандартной программе.

Заключение

Образование в Российской Федерации на данном этапе имеет весьма определенный вид. Оно отличается от того образования, что было в прошлом веке. Современное образование, как и многое другое, перенимает некоторые черты с Запада, но остается самобытным. Не всегда эти нововведения с Запада органично вливаются в уже наработанные годами стандарты российского образования. Есть как полезные и положительные заимствования, так и противоречивые.

В настоящее время школа не ставит своей целью передать знание обучающимся. Целью обучения в школе является научить ребенка учиться. То есть помочь ребенку освоиться в огромном информационном пространстве, доступном сейчас каждому. Научить его правильно работать с большим объемом информации. Научить добывать знания самостоятельно. Также немаловажным является тот факт, что современные дети разительно отличаются от тех, что учились еще 20 лет назад в школе по, так сказать, традиционной программе. Как сейчас называют молодое поколение – поколение Z. И отличается это поколение не столько даже интересами, сколько процессом мышления, чертами, отличающими их от других поколений. К таким чертам в первую очередь относятся гиперактивность, клиповое мышление, замкнутость, интровертизм, предпочтение виртуального общения реальному. Разумеется, обучение таких детей также отличается от старых стандартов. Касательно стандартов и требований к школьному образованию. Образование регламентируется огромным количеством нормативных документов. Разумеется, первый, и самый главный, – это Закон об образовании. Но для педагогов важнее знать другой документ – ФГОС. Во ФГОС обозначены требования, предъявляемые к выпускнику школы. А именно, какие УУД должны быть сформированы у обучающегося на момент окончания школы. Познавательные УУД имеют различную направленность, но не все из них так легко формировать в процессе урока математики. Именно эта проблема была поднята в данной работе.

Поставленная цель была полностью достигнута в ходе выполнения работы. Для достижения цели были выполнены все поставленные задачи. На основании школьных учебников и методических материалов, а также материалов итоговой государственной аттестации, было описано содержание функционально-графической линии курса алгебры основной школы. Для описания содержания данной линии в курсе алгебры были выделены критерии сравнения учебно-методических комплектов различных авторов. В конце проведения дидактического анализа был сделан вывод о содержании функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы.

Затем были описаны с теоретической точки зрения особенности функционально-графического метода решения уравнений и неравенств. Были представлены теоремы, с помощью которых разрешимы уравнения и неравенства. Также был сделан вывод о целесообразности изучения данных теорем в основной школе. Данный вывод гласит о том, что формулировки теорем должны быть известны обучающимся, доказательство же можно провести в классах с углубленным изучением математики.

После чего началась практическая часть работы. Был разработан комплекс упражнений, направленный на формирование умений и навыков решения уравнений и неравенств функционально-графическим методом. Задания этого комплекса были отобраны из различных источников: начиная от сайтов для подготовки к сдаче ЕГЭ и ГИА, и заканчивая сборниками прикладных задач. Задания в комплексе представлены с решениями. Затем была разработана и апробирована серия уроков для 9 класса с использованием комплекса упражнений. В ходе апробации проводились оценочно-контрольные измерения результатов опытно-экспериментальной работы. Для определения результатов были разработаны контрольная работа, тестирование и анкетирование для рефлексии обучающихся. В ходе определения результатов опытно-экспериментальной работы выяснилось, что гипотеза подтвердилась. А именно: если при изучении функционально-графической линии использовать комплекс заданий, предполагающий решение функционально-графическим методом, то у обучающихся повысится уровень математической подготовки и это будет способствовать формированию познавательных и коммуникативных УУД. Таким образом, цель работы также была достигнута.

Следовательно, методические рекомендации, разработанные в данной работе, будут крайне полезны на практике для учителя математики. Это не только поднимет уровень математической подготовки обучающихся, но и поможет формированию важный познавательных УУД. Из этого можно сделать вывод, что гипотеза подтверждена.

В заключение хотелось бы добавить, что образование развивается довольно стремительно. Педагогу помимо знаний своего предмета, немаловажно быть личностью творческой, гибкой. Если грамотно и с ответственностью подходить к своей работе, то любые требования можно выполнить.

Библиографический список

1. *Аникина И.Е.* Типовые задачи по формированию универсальных учебных действий на уроках математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т.16. [Электронный ресурс]. URL: http://e-koncept.ru/2016/46532.htm (дата обращения: 21.03.2018).

2. *Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А., Карабанова О.А. и др.* Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли: система заданий. М: Просвещение, 2010.

3. *Беркалиев Т.Н.* Развитие образования: опыт реформ и оценки прогресса школы. СПб., 2007.

4. *Вербицкий А.А.* «Цифровое поколение»: проблемы образования // Профессиональное образование. Столица. 2016. № 7. [Электронный ресурс]. URL: http://m-profobr.com/files/---------_40l6l4ix.pdf (дата обращения: 14.01.2018).

5. *Воронина В.А.* Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры средней школы [Электронный ресурс]. URL: http://pandia.ru/text/78/500/39810.php (дата обращения: 03.05.2017).

6. *Гончарова Н.В., Абрамян Г.С.* Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. М.: Просвещение, 2018.

7. *Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ 2018 г.* // Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. URL: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения 03.01.2018).

8. *Демоверсии, спецификации, кодификаторы ОГЭ 2018 г.* // Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. URL: http://fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 02.01.2017).

9. *Джиоев Н.Д.* Нахождение графическим способом числа решений уравнений с параметром. // Математика в школе. 1996. №2.

10. *Дорофеев Г.В.* Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2010.

11. *Дорофеев Г.В.* Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 3-е изд. М.: Просвещение, 2016.

12. *Дорофеев Г.В.* Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 5-е изд. М.: Просвещение, 2010.

13. *Епифанова Т.Н.* Графические методы решения задач с параметрами. // Математика в школе. 2003. №7.

14. *Иванова Е.О., Осмоловская И.М.* Теория обучения в информационном обществе. М.: Просвещение, 2011.

15. *Ильина С.Д.* Графические решения уравнений, содержащих знак модуля // Математика в школе. 2001. №8.

16. *Кипнис И.М.* Сборник прикладных задач на неравенства. М.: Просвещение; Издание 2-е, доп. 1964.

17. *Козлов В.В., Кондаков А.М.* Фундаментальное ядро содержания общего образования. Москва: Просвещение, 2009

18. *Колышницына М.С.* Графические приемы решения задач с параметрами // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. [Электронный ресурс]. URL: http://e-koncept.ru/2015/65344.htm (дата обращения: 15.03.2018).

19. *Колягин Ю.*М. Алгебра, 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Просвещение, 2012.

20. *Колягин Ю.*М. Алгебра, 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Просвещение, 2013.

21. *Колягин Ю.М.* Алгебра, 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М. : Просвещение, 2014.

22. *Концепция развития математического образования в Российской Федерации* [Электронный ресурс]. URL: https://rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html (дата обращения: 10.06.2017).

23. *Крамор В.С.* Задачи с параметрами и методы их решения. М: Оникс, 2007.

24. *Куклин В.Ж.* Проблемы ЕГЭ — действительные и мнимые. // Практика, 2004. [Электронный ресурс]. URL: http://ecsocman.hse.ru/data/184/877/1219/12kuklin199-220.pdf (дата обращения: 19.09.2017).

25. *Мещерякова Г.П.* Функционально-графический метод решения задач с параметрами. // Математика в школе. 1999. №6.

26. *Макарычев Ю.Н.* Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013.

27. *Макарычев Ю.Н.* Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций с приложением на электронном носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013.

28. *Макарычев Ю.Н.* Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 21-е изд. М.: Просвещение, 2014.

29. *Миронов В.В.* Размышления о реформе российского образования, Москва, 2011 г.

30. *Мордкович А.Г.* Беседа с учителями математики: Учеб.-метод. пособие. 2-е изд., доп. и перераб. М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005.

31. *Мордкович А.Г., Семёнов П.В.* Алгебра. 9 класс. В 2-х частях. Часть 1. Задачник. 16-е издание, исправленное. М.: Мнемозина, 2013.

32. *Никольский С.М.* Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2013.

33. *Никольский С.М.* Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2014.

34. *Никольский С.М.* Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2014.

35. *ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов* / под ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование», 2016.

36. *Осмоловская И.М.* Изменение процесса обучения: от общества индустриального – к информационному. М.: Народное образование, 2009.

37. *Перминова Л.М.* Формирование общих учебных умений и навыков обучающихся как условие повышения качества общего образования: методическое пособие. СПб.: АППО, 2006.

38. *Полежаев В.Д., Барциц Р.Ч.* ЕГЭ-2015: проблемы остаются, но пути их решения прослеживаются // Наука и школа, 2015. №6.

39. *Полонский В.М.* Научно-педагогическая информация: Словарь-справочник. М.: Новая школа, 1995.

40. Постановление правительства РФ. Федеральная целевая программа развития образования [Электронный ресурс]. URL: http://base.garant.ru/71044750/ (дата обращения 30.01.2017).

41. *Поташник М.М.* Требования к современному уроку: методическое пособие. Центр педагогического образования. М.: Центр педагогического образования, 2008.

42. *Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам* [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата обращения: 04.06.2017).

43. *Салова И.Г.* Формирование универсальных учебных действий – условие достижения метапредметных образовательных результатов // Ресурсы, обзоры и новости образования. 2013. № 18 [Электронный ресурс]. URL: http://erono.ru/art/?ELEMENT_ID=1674 (дата обращения: 19.11.2017).

44. *Сафронова И.А.* Федеральный образовательный стандарт среднего (полного) образования. ФГОС. М.: Просвещение, 2014.

45. *Селевко Г.К.* Энциклопедия образовательных технологий: учебно-методическое пособие: в 2 т. М.: НИИ школьных технологий. Т. 1. 2006.

46. *Селевко Г.К.* Энциклопедия образовательных технологий: учебно-методическое пособие: в 2 т. М.: НИИ школьных технологий. Т. 1. 2006.

47. *Сивухина Е.А., Дудник М.С.* Построение графиков дробно-рациональных функций без использования производной. // Молодежь и наука: XVI Международный форум студентов, аспирантов и молодых ученых: материалы научно-практической конференции. Красноярск, 28–29 мая 2015 г. / отв. ред. С.В. Бортновский; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015.

48. *Сивухина Е.А.* Требования к результатам изучения функционально-графической линии в школьном курсе математики. // Современная математика и математические образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Краснояр. гос. пед. ун-т. им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2017.

49. *Тумашева О.В., Берсенева О.В.* Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода: монография; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноясрк, 2016.

50. *Тумашева О.В., Рукосуева Е.Г.* Какие задачи решать на уроках математики в аспекте требований ФГОС // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2016. №1 (35).

51. *Федотова А.В.* Роль универсальных учебных действий в системе современного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://idfedorov.ru/practice/stuff/article=1866 (дата обращения: 22.11.2017).

52. *Функционально-графический метод решения уравнений* [Электронный ресурс]. URL: https://mathematics-tests.com/11-klass-uroki-presentatsii/11-klass-funkzionalno-graficheskiy-metod (дата обращения: 05.05.2017).

53. *Шастун Т.А.* Формирование умений анализа и синтеза при обучении математике // Педагогический журнал. 2017. Т. 7. № 5.

54. *Шашкина М.Б.* Проблемы качества математической подготовки учащихся по результатам профильного ЕГЭ 2017 г. // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты»: материалы V Всероссийской с международным участием научно-методической конференции Международного научно-образовательного форума «Человек, семья, общество: история и перспективы развития». г. Красноярск, 16–17 ноября 2017 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2017. С. 111–122.

55. *Шашкина М.Б., Табинова О.А.* О качестве математической подготовки в школе и вузе // Математика в школе. 2014. №4. Электронное приложение. № 1.

56. *Шашкина М.Б., Табинова О.А.* Диагностика готовности выпускников школ к продолжению математического образования // Стандарты и мониторинг в образовании. 2016. Т. 4. № 3. С. 8–13.