МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. П. АСТАФЬЕВА (КГПУ им. В. П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
Кафедра
Алгебры, геометрии и методики их преподавания
Специальность 050201 «Математика»

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой Алгебры, геометрии и методики их преподавания
В. Р. Майер
« » декабря 2015 г.

Выпускная квалификационная работа

Группы симметрий в технологии синтеза новых многогранников с приложением в образовательном процессе сельской школы

Выполнила студентка группы 61
А. А. Шуппе " " июня 2017 г.

Форма обучения заочная
Научный руководитель:
д-р физ.-мат.н., профессор А. В. Тимофеенко
" " июня 2017 г.

Дата защиты " " июня 2017 г.
Оценка

Красноярск, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

1 Определения, известные факты, обозначения **4**
1.1 Группа 4
1.2 Матрицы, порождающие конечные группы движений 5
1.2.1 Циклическая группа $[n]^+$ порядка $n = 1, 2, \ldots$ 5
1.2.2 Группа $[3, 3]^+$ поворотов ТЕТРАЭДРа 5
1.2.3 Группа $[3, 5]^+$ поворотов ДОДЕКАЭДРа 5
1.2.4 Группа $[2, n]^+$ поворотов ДИЭДРа порядка $2n$ 6
1.3 Группа 6

2 Построение алгебраической и компьютерной модели многогранника **7**

3 Группы поворотов и симметрий правильногранников **9**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **10**

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ **12**

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 **13**

Список иллюстраций

1 Кубооктаэдр $[3, 4, 3, 4]$ 8

Введение

На московском международном математатическом конгрессе (1966 г.) В. А. Залгаллер представил теорему о классификации выпуклых тел с правильными гранями, [2]. В работе [3] опубликован атлас таких тел, содержащий описание, включая группу симметрий каждого из них. К 2011 году доказано, [1], что кроме выпуклых многогранников с правильными гранями, существует ещё 78 выпуклых многогранников, грань каждого из которых составлена из конечного числа правильных многоугольников так, что каждая вершина этих многоугольников служит и вершиной грани. Другими словами, кроме призм Π_n и антипризм A_n, $n = 3, 4, \ldots$, существует ровно 186 выпуклых правильногранников, из которых 78 обладают условными рёбрами. Таблицы выпуклых многогранников опубликованы, [1]. Однако и бумажные и электронные атласы правильногранников не содержат сведений о группах симметрий правильногранников с условными рёбрами.

Настоящая работа посвящена нахождению групп симметрий многогранников и частично заполняет указанный выше пробел. Отметим, что эти группы играют ключевую роль в работе алгоритма, по которому строятся соединения правильногранников в процессе работы над пока открытой проблемой классификации выпуклых тел с условными рёбрами и вершинами. В частности, применение компьютерной модели группы симметрий многогранника лежит в основе построения алгебраической и компьютерной (“живой”) модели многогранника.

Изложение выпускной квалификационной работы построено так, чтобы нахождение группы симметрий многогранника стало доступно и обладающему невысокой математической подготовкой участнику исследования, такому как некоторые мои пятиклассники. Привлечение широкого круга лиц к решению проблемы классификации выпуклых тел с паркетными гранями носит не только просветительский характер. Дело в том, что процесс автоматизации доказательства классификацонных теорем в этой области именно при вычислении группы симметрий не решается пока программированием. А поскольку в теореме появлются многие десятки новых многогранников, то коллективное нахождение групп симметрий видится едва ли не единственным выходом.

Таким образом цель исследования можно разделить на математическую задачу описания группы симметрий выпуклого правильногранника и педагогическую её составляющую: создание мотивации учащегося к исследованию многогранников, их симметрий и организации коллективной работы над открытой математической проблемой.

Математическая и педагогическая компоненты процесса коллективного решения проблемы классификации выпуклых многогранников с паркетными гранями, синтезирующего структурные изменения обучения математике, составляют объект исследования.

Предметом исследования являются симметрии многогранников, конечные группы совмещающих многогранник с собой поворотов.

В работе показано как найти группу симметрий каждого из названных выше 78 выпуклых правильногранников с условными рёбрами. После введения необходимых обозначений, определений и известных результатов, строятся примеры групп симметрий некоторых составленных из правильногранных пирамид тел. Показано как по порождающим такой группы, её фундаментальным вершинам и граням построить с помощью систем компьютерной алгебры и графики алгебраическую и компьютерную модель самого многогранника. Для групп симметрий применены обозначения работы [3]. Они ставятся в соответствие некоторым из указанных выше 78 правильногранников публикации [1], каждый из которых обозначен там как $P_{i,j}$. Эти обозначения из теоремы о классификации выпуклых правильногранников применены для призм, антипризм, тел Платона, Архимеда и Джонсона согласно атласу работы [1], в которой можно найти соответствие с другими обозначениями и названиями, а также расположены электронные адреса атласов правильногранников.

1 Определения, известные факты, обозначения

Для каждого $n = 2, 3, \dots$ ось поворота, совмещающего собой многогранник, называется осью n-го порядка, если минимальный угол такого поворота равен $2\pi/n$.

Напомним, что группами поворотов, совмещающих с собой призму с n-угольным основанием, $n = 3, 4, 5, \dots$, икосаэдр и их подгруппами исчерпываются конечные группы движений первого рода, т. е. не меняющие ориентацию. Если группа симметрий содержит движения второго рода, то её подгруппа поворотов имеет индекс два. Естественно, в настоящей работе мы различаем такие изоморфные четверной группе Клейна группы как:

1) группа, порожденная поворотами на 180° с пересекающимися перпендикулярными осями;

3)группа, порождённая поворотом на 180° и отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворота;

2)группа, порождённая отражениями от двух перпендикулярных плоскостей.

На стр.181 работы [3] введены следующие обозначения конечных групп движений первого рода. Каковы эти движения станет ясно из рассмотрения порождающих эти группы матриц, записанных в файл с указанным после обозначения группы названием.

1.1 Группа

$[n]^+$ циклическая порядка n поворотов неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием
c_n.txt

$[2]^+$ порядка два поворотов (симметрий) дважды наращенного трёхскатного прямого бикупола $P_{4,12}$

$[]^+$ единичная

$[2,n]^+$ поворотов диэдра порядка $2n$ (двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием)
d_n.txt

$[3,3]^+$ поворотов тетраэдра
tetr.txt

$[3,4]^+$ поворотов куба
cube.txt

$[3,5]^+$ поворотов икосаэдра
icos.txt

Файл с моделями групп $[2]^+$ и $[]^+$ получается из файла c_n.txt присвоением параметру n значений 2 и 1 соответственно. Сами файлы (для системы компьютерной алгебры GAP) напечатаны в приложении. Чтобы не отвлекаться на компьютерную алгебру покажем

1.2 Матрицы, порождающие конечные группы движений

1.2.1 Циклическая группа $[n]^+$ порядка $n = 1, 2, \ldots$

$$[n]^+ = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

Бывает удобно обратиться к тривиальной группе C_1, состоящей из единичной матрицы.

1.2.2 Группа $[3,3]^+$ поворотов ТЕТРАЭДРа

изоморфна группе чётных подстановок четвёртой степени.

$$m_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & 0 \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \sqrt{2}; m_2 = \begin{pmatrix} \frac{s}{t} & 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{t} & 0 & \frac{s}{t} \end{pmatrix}, t = \sqrt{3};$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0, & \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, a = m_3^{m_2 \cdot m_1}, b = m_3^{(m_1 \cdot m_2)^{-1}};$$

$$[3,3]^+ = \langle a, b \rangle .$$

1.2.3 Группа $[3,5]^+$ поворотов ДОДЕКАЭДРа

изоморфна группе чётных подстановок пятой степени. Оси порождающих её поворотов и другие представления можно найти на с. 121 работы [4].

$$\alpha = \begin{pmatrix} co & 0 & -si \\ 0 & 1 & 0 \\ si & 0 & co \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{t_3}{2} \\ 0 & -\frac{t_3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$si = \frac{\tau}{t_3}, co = \frac{1}{\tau t_3}, \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, t_3 = \sqrt{3}.$$

$$[3,5]^+ = \left\langle \beta^{\alpha}, \beta^{\alpha^{-1}} \right\rangle.$$

1.2.4 Группа $[2,n]^+$ поворотов ДИЭДРа порядка $2n$

$$[2,n]^+ = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Сравнивая теперь построенные матрицы с их записью в системе компьютерной алгебры GAP в виде файла приложения, получаем возможность и без дополнительных знаний об этой системе понимать какие соответствующие им движения порождают группу симметрий. Продолжая список 1.1, будем обращаться толко к компьютерным моделям групп.

1.3 Группа

$[n]$ диэдральная симметрий неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием
2c_n.txt

$[2^+, 2n^+]$ расширяющая при нечётных n группу $[n]^+$ отражением от точки
2.c_n.txt

$[2, n^+]$ расширяющая группу $[n]^+$ поворотов отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворотов
d1cn.txt

$[3,3]$ симметрий тетраэдра
tetr_2.txt

$[3,4]$ симметрий куба
cube_2.txt

$[3^+, 4]$ расширяющая отражением от точки группу поворотов тетраэдра
2.tetr.txt

$[3,5]$ симметрий икосаэдра
icos_2.txt

$[2, n]$ симметрий двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием
d_1d_n.txt

$[2,2]$ симметрий прямой ромбической призмы $P_{2,2}$

$[2^+, 2n]$ симметрий антипризмы A_n порядка $4n$, при $n = 3$
вместо октаэдра рассматривается дважды наращенный октаэдр $P_{4,11}$ с шестью ромбическими гранями d_2n.txt

$[2,2]^+$ Клейна четверная поворотов прямой ромбической призмы $P_{2,2}$
4_Klein.txt

$[2^+,2]$ Клейна четверная с вращательной симметрией (симметрий скошенного куба $P_{4,30}$)
K4.txt

[2] Клейна четверная отражений (симметрий клинокороны $P_{1,28} = M_{22}$)

Последним трём группам соответствуют описанные в начале раздела группы Клейна.

2 Построение алгебраической и компьютерной модели многогранника

На примере одного архимедова тела рассмотрим построение его группы симметрий и применим последнюю для построения названных моделей. Первый шаг построения предполагает нахождение всех осей поворотов, совмещающих с собой многогранник. Очевидно, если такая ось существует, то она содержит либо середину ребра, либо середину грани. Кубооктаэдр получен из куба путем отсечения вершин плоскостями, проходившими через середины ребер. Поскольку в каждой вершине кубооктаэдра встречаются четыре грани: треугольник, квадрат, треугольник, квадрат. Поэтому его обозначают [3, 4, 3, 4], рис. 2. В работе [1] кубооктаэдр обозначен $P_{2,36}$, причём первый индекс указывает на составленность кубооктаэдра из двух несоставных правильногранников. Если же допускать условные (по другой терминологии фиктивные) вершины, то кубооктаэдр можно соединить из 14 правильногранных пирамид. Соответствующее обозначение $S_{14,6}$ применено в работе [5]. Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра.

Существует ось, проходящая через середину противоположных квадратных граней. Так как у кубооктаэдра шесть четырехугольных граней, то таких осей – три. Эти оси являются осями четвертого порядка.

Далее, рассмотрим ось, проходящую через центры противоположных треугольных граней. Такая ось существует, так как при повороте на 120° кубооктаэдр совмещается с собой. Таких осей третьего порядка кубооктаэдр имеет четыре.

Рассмотрим ось, проходящую через противоположные вершины многогранника. Таких осей второго порядка существует шесть. Они совпадают с осями куба, которые проходят через середины противоположных ребер. Через середину ребра кубооктаэдра не может проходить ось совмещающего с собой ось поворота потому, что каждое такое ребро соединяет грани с различным числом сторон.

Рассмотрены все прямые, содержащие вершины, центры ребер и граней кубооктаэдра. Оказалось, что существует 13 таких осей, причем справедливо

Утверждение 1. Оси поворотов, совмещающих с собой кубооктаэдр, содержат:

1) середины квадратных граней;

2)середины треугольных граней;

3)вершины.

Этим осям соответствуют согласно рис. 2 повороты, совмещающие с собой куб, из которого отсечениями вершин получен кубооктаэдр:

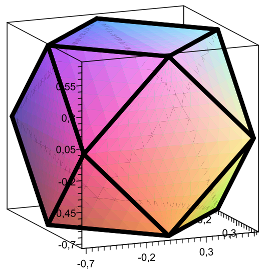

Рис. 1: Кубооктаэдр $[3, 4, 3, 4]$

1) повороты на углы, кратные прямому углу;

2)повороты на углы, кратные углу 120° с осями, содержащими диагонали куба;

3)повороты с осями, проходящими через середины рёбер куба (на угол 180°).

Следовательно, группа $Aut^+[4, 3, 4, 3]$ поворотов кубооктаэдра равна группе $[3, 4]^+$ поворотов куба. Поскольку плоскость, содержащая две оси четвёртого порядка, определяет и для куба и для кубооктаэдра отражение, переводящая в себя многогранник, то равны и группы $Aut[4, 3, 4, 3]$ и $[3, 4]$ симметрий этих тел.

Для построения компьютерной модели кубооктаэдра необходимо обратиться к GAP-модели найденной группы, см. файл cube_2.txt и заметить, что фундаментальной является одна вершина кубооктаэдра и расположена она на середине ребра куба, из центров граней которого выходят координаные оси.Если рёбра куба имеют длину $\sqrt{2}$, то рёбра соответствующего кубооктаэдра единичные. Координатами фундаментальной вершины можно взять числа $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0$. Действуем на эту тройку группой матриц, построенной командами файла cube_2.txt, и получаем все вершины кубооктаэдра. Точнее, в системе компьютерной алгебры GAP файл cube_2.txt переименован в group.txt, координатные тройки записаны в файл v.txt и к этим файлам система GAP обращается в программе, записанной под именем main08po.g4. Результатом работы программы являются два списка: v – координатные тройки вершин кубооктаэдра, полученные в виде орбиты точки $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0]$, f – объединение орбит граней при действии группы $[3, 4]$. Поскольку в файл v.txt мы могли поместить только одну нульмерную грань, то список f появляется после работы программы main08po.g4 в виде 12 списков номеров вершин: [1],[2],[3],...,[12]. Эти вершины можно увидеть с помощью системы компьютеной алгебры Maple, поскольку программа main08po.g4 выводит ещё файл from.txt, состоящий из команд системы Maple, выводящих на экран как списки вершин v и граней f, а также номера этих вершин на проекциях граней. По этим "живым" проекциям выписываем в данном случае две фундаментальные грани кубооктаэдра, т.е. заменяем в файле v.txt список f на состоящий из двух упорядоченных списков троек и четверок номеров вершин. А перед списком f располагаем новый, состоящий из двенадцати координатных троек список v. К искомой модели кубооктаэдра нас приводит файл from.txt, созданный новым обращением к программе main08po.g4 .

Для освоения технологии построения компьютерной модели многогранника с помощью программы main08po.g4 читатель может обратиться к электронному приложению, файл P431.zip, где многогранник $P_{4,31}$ обладает несколькими фундаментальными вершинами.

3 Группы поворотов и симметрий правильногранников

В работе [1] составленные из k несоставных тел правильногранники $P_{k,i}, k = 1, 2, \ldots$ размещены в таблицах 1-9. Из несоставных тел $P_{1,i}$ в таблицы не попали правильногранники, соединения которых с любым правильногранником приводит к невыпуклому телу. Из отсутствующих в таблицах тел только многогранникам Иванова Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 в известных автору атласах не поставлены в соответствие их группы симметрий: $[2^+, 2], [2, 2], [], [2^+, 2]$. Номера следующих таблиц совпадают с номерами таблиц работы [1].

Таблица 1: Несоставные F'-многогранники $P_{1,j}$

Номер j тела $P_{1,j}$	29	30
Группа $AutP_{1,j}$	[]	[]

Таблица 2: Двухсоставные F'-многогранники $P_{2,j}$

Номер j тела $P_{2,j}$	3	4	22	25	29	30	31	42	48
Группа $AutP_{2,j}$	[2]	[2]	[]	[]	[]	[]	[5]	[4]	[5]

Таблица 3: Двухсоставные F-многогранники $P_{2,j}$

Номер j тела $P_{2,j}$	33	34	38
Группа $AutP_{2,j}$	[]	[2]	[3]

Таблица 4: F'-многогранники $P_{3,j}$

Номер j тела $P_{3,j}$	1	22	31	33	34	35	37
Группа $AutP_{3,j}$	[]	[5]	[5]	[3]	[]	[4]	[]
	38	39	40	41	44	51	54
	[]	[]	[5]	[]	[5]	[]	[2]

Таблица 5: 3-составные F-многогранники $P_{3,j}$

Номер j тела $P_{3,j}$	2	3	4	5	6	36
Группа $AutP_{3,j}$	$[2,2]$	$[2,2]$	$[2]$	$[2]$	$[]$	$[2^+,2]$
	42	43	48	49	53	55
	$[5]$	$[5]$	$[4]$	$[2,4]$	$[5]$	$[2^+,10]$

Оставшиеся таблицы 6-9 будут достроены вместе с учащимися. В частности, обозначение [] группы в таблицах 6 и 7 будет заменено обозначением найденной в ходе дальнейшей работы группой симметрий соответствующего правильногранника.

Таблица 6: F'-многогранники $P_{4,j}$

Номер j тела $P_{4,j}$	7	8	10	16	17	19	20	21
Группа $AutP_{4,j}$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$

Таблица 7: F-многогранники $P_{4,j}$

Номер j тела $P_{4,j}$	1	2	5	6	9	11	12	13	14
Группа $AutP_{4,j}$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$
	15	18	22	25	26	27	30	31	
	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[]$	

Заключение

Оглашенная во введении математическая целевая задача частично решена и созданы инструменты, позволяющие закончить решение совместно с учениками. Наработанный материал можно считать основой для подготовки к занятиям с лицами, заинтересованными в изучении выпуклых многогранников с паркетным гранями. Научным вкладом работы являются её таблицы групп симметрий, продолжающие опубликованную на мехмате МГУ статью научного руководителя. Таблицы уже нашли приложения в применении интегрированной программной среды для синтеза новых выпуклых тел с паркетными гранями.

Автор начала изучать выпуклые многогранники ещё в школьном курсе. Но это все проходило так быстро по верхам и тема для меня осталась под большим вопросом. Придя в КГПУ на факультет "Математики"я познакомилась с Алексеем Викторовичем. Знакомство прошло в итерактивном музее науки "Ньютон-парк". Туда меня пригласили студенты старших курсов. Затем лекции и семинары стал у нас преподавать Алексей Викторович,где я снова встретилась с правильногранными многогранниками. Мы работали в программах, где самостоятельно строили многогранники, которые можно было крутить со всех сторон и в разные направления. Меня это очень заинтересовало и я решила подробнее заняться этим вопросом. Ведь мои ученики взрослеют и скоро мы дойдем до многогранников, а мне хочется, чтобы им стало это тоже интересно, а главное понятно.

Алексей Викторович пригласил меня в Ньютон-парк, куда были приглашены ученики разного возраста. Перед ними ставилась задача самостоятельно построить модели. Перед ними лежали необходимые приборы и уже построенные для примера модели многогранников. Учащиеся очень сильно увлеклись этим занятием, к этой работе подтянулись и родители. В конце этого мероприятия все остались довольны, а многие даже хотели собрать еще модели, уже более сложные. У них появился интерес, и я думаю некоторые из них еще придут для продолжения изучения.

Со своими учениками планирую тоже посетить Ньютон-парк. Показать, как на самом деле интересна тема: “О выпуклых праильногранных многогранниках”. Я же смогла на построенных самостоятельно моделях видеть оси симметрии. Теперь могу представить многогранник в пространстве и сказать каковы оси совмещающих его с собой поворотов и найти отображающие его на себя отражения от плоскостей.

Список цитированной литературы

[1] *А. В. Тимофеенко.* К перечню выпуклых правильногранников, Современные проблемы математики и механики. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, 6, Математика:3 (2011), 155—170.

[2] *В. А. Залгаллер.* Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап.науч. семинаров ЛОМИ. 1967.Т.2.С.5–221.

[3] *N. W. Johnson.* Conwex polyhedra with regular faces // Canad.J. Mat, 18 (1966), 169–200.

[4] *А. В. Тимофеенко.* О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб., Т. 12. №2(2011), С.118–126.

[5] *Полтанов Е.В., Судак Д.Н., Тимофеенко А. В., Якушева А.В.* О выпуклых соединениях правильногранных пирамид // Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016. С.148-158. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf (дата обращения: 27.05.2017)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Компьютерные GAP-модели конечных групп движений трехмерного евклидова пространства

Перед командами для системы компьютерной алгебры GAP, задающими компьютерную модель группы, напечатаны обозначение этой группы и имя файла.

$[n]^+$ c_n.txt

```
 Read("trig");al:=360/n;
g:=Elements(Group([[cos(al),-sin(al),0],
                   [sin(al), cos(al),0],
                   [      0,       0,1]]));
```

$[2,n]^+$ d_n.txt

```
 Read("trig");al:=360/n;
g:=Elements(Group([[cos(al),-sin(al),0],
                    [sin(al), cos(al),0],
                    [      0,       0,1]],
                    [[1,0, 0],
                    [0,-1, 0],
                    [0, 0,-1]]));
```

$[3,3]^+$ tetr.txt

```
 s:=ER(2);
m1:=[[1/s, 1/s,0],
     [-1/s,1/s,0],
     [0,   0,  1]]; t:=ER(3);
m2:=[[s/t,0,-1/t],
     [0,  1,   0],
     [1/t,0, s/t]]; m3:=[[1,   0,   0],
                         [0,-1/2,-t/2],
                         [0, t/2,-1/2]]; a:=m3^(m2*m1);
                                         b:=m3^((m1*m2)^-1);
g:=Elements(Group(a,b));
```

$[3,4]^+$ cube.txt

```
 alpha:=[[1,0, 0],
        [0,0,-1],
        [0,1, 0]];nu:=[[ER(2)/2,0,-ER(2)/2],
                      [      0,1,       0],
                      [ER(2)/2,0, ER(2)/2]];
```

```
beta:=[[1, 0, 0],
       [0,-1, 0],
       [0, 0,-1]];
G:=Group(alpha,beta^nu);
 g:=Elements(Group(alpha,beta^nu));
Print("В группе куба ",Length(g), " поворота.", "\n");

iso:= IsomorphismFpGroupByGenerators(G,[alpha,beta^nu]);

fp:=Image(iso);
rel:=RelatorsOfFpGroup(fp);

Elements(fp);
```

$[3,5]^+$ icos.txt

```
 tau:=(ER(5)-1)/2;
t3:=ER(3);
si:=tau/t3;co:=1/tau/t3;
alpha:=[[co, 0,-si],
        [ 0, 1,  0],
        [si, 0, co]];
beta:=[[ 1,   0,    0],
       [ 0,-1/2, t3/2],
       [ 0,-t3/2,-1/2]];

G:=Group(beta^alpha,beta^(alpha^-1)); g:=Elements(G);

Print("Группа поворотов икосаэдра содержит ",Size(G), " матриц.","\n");

iso:= IsomorphismFpGroupByGenerators(G,[beta^alpha,beta^(alpha^-1)]);

fp:=Image(iso);
rel:=RelatorsOfFpGroup(fp);

Elements(fp);
```