МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П. АСТАФЬЕВА»

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Выпускающая кафедра: алгебры, геометрии и методики их преподавания

ФИРЯГО ИРИНА НИКОЛАЕВНА

Магистерская диссертация

Тема: **МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В 7-9 КЛАССАХ В СТИЛЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.**

Направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование

Магистерская программа: Информационные технологии в математическом образовании

Допускаю к защите:

Заведующий кафедрой

д.п.н., профессор Майер В.Р.

«17» 06 2017г. ____________

Руководитель магистерской программы

д.п.н., профессор Майер В.Р.

«17» 06 2017г. ____________

Научный руководитель

Д.п.н., профессор, Майер В.Р.

«17» 06 2017г. ____________

Обучающийся: Фиряго И.Н.

«16» 06 2017г. ____________

Красноярск, 2017

Реферат

Актуальность исследования. В концепции модернизации российского образования на период до 2020 года подчеркивается, что одним из результатов правильно организованного образовательного процесса является развитие способности учащихся к исследовательской деятельности [3]. Поэтому формирование исследовательских умений учащихся становится одной из важных задач современной школы.

Переход на использование в общеобразовательной школе идей проектного и исследовательского обучения является не только одним из требований новых Федеральных государственных образовательных стандартов (2010–2012 гг.), но и поиск путей их рационального использования при изучении всех предметов на всех ступенях обучения [2]. Одной из таких возможностей является усиление внимания к экспериментальному методу обучения математике. Эффективность использования экспериментальной математики для исследовательского обучения с использованием динамических программных сред сегодня уже не вызывает сомнений.

Исследованию возможностей программной среды «Живая математика» для реализации экспериментального подхода при обучении геометрии в основной школе и посвящена данная работа.

Цель исследования: Разработать для учащихся основной школы (7-9 классы) систему заданий, реализующих линию экспериментального подхода к обучению геометрии с использованием среды «Живая математика».

Объект исследования: Учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование в обучении математике систем динамической геометрии.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка (178 наименований) и 10-ти приложений; содержит 21 таблицу и 18 рисунков.

Во введении представлены объект и предмет исследования, цели и задачи исследования, сформулирована методическая гипотеза, которая подтверждается всем содержанием диссертации.

В первой главе «Теоретическое обоснование целесообразности экспериментального подхода при обучении геометрии в основной школе» кратко изложена идея экспериментального подхода к обучению дисциплинам естественнонаучного и математического циклов. Рассмотрены дидактические возможности среды Живая математика для проведения исследований и экспериментов при обучении геометрии. Уточнены теоретические основы построения содержательно-методической линии экспериментальной математики при обучении геометрии в школе на основе использования системы динамической геометрии Живая математика.

Во второй главе «Основные этапы реализации экспериментального подхода при обучении геометрии в 7 – 9 классах» представлена реализация авторской методики экспериментального подхода при обучении планиметрии в основной школе. Глава состоит из четырёх параграфов, первые три из которых посвящены методике использования среды Живая математика для реализации экспериментального подхода при обучении геометрии в седьмом, восьмом и девятом классах, соответственно. В последнем параграфе представлен элективный курс «Экспериментальная математика» для учащихся 9 класса и результаты его апробации.

Научная новизна исследования состоит в том, что показаны возможности формирования исследовательских умений у всех учащихся 7-9 классов в процессе обучения геометрии средствами экспериментальной математики.

Оглавление

Введение

Одной из важнейших задач Национальной образовательной инициативы «Наша новая школа» [1] является формирование личности обладающей инициативностью способностью творчески мыслить и находить нестандартные решения, умение выбирать профессиональный путь, готовность обучаться в течение всей жизни. Одним из направлений национальной инициативы является реализация образовательных стандартов, которые предполагают вооружение ученика знаниями для успешной социализации, применения в жизни и для дальнейшего использования в обучении и развитие творческой среды для выявления особо одаренных ребят.

Федеральные государственные образовательные стандарты общего образования нового поколения требуют формирования у учащихся опыта исследовательской деятельности. В примерной основной образовательной программе основного общего образования [2] уже указаны приоритеты в формировании у учащихся опыта исследовательской деятельности. Математика рассматривается не только как основной предмет в овладения основами проведения теоретических исследований, но и как равноправная с предметами естественно-научного цикла область для формирования умений проводить эксперименты и исследования в виртуальных лабораториях, навыков сбора, обработки и анализа эмпирических данных на основе знаний элементов статистики.

Серьезное внимание к интеллектуальному развитию учащихся на всех ступенях общего образования – залог успеха стран, являющихся мировыми лидерами по качеству естественнонаучного и математического образования. По результатам исследований PISA 2012 года к числу таких стран относятся Китай, Сингапур, Япония, Финляндия, Эстония, Республика Корея. Территории Российской Федерации занимают лишь 34–38 места в рейтинговой таблице. Это вынуждает нас искать идеи создания подходящих условий, направленных на популяризацию и развитие творческого потенциала учащихся в сфере математики. В связи с этим приоритетным направлением становится обеспечение развивающего потенциала новых образовательных технологий, каким и является использование экспериментальной математики

Направление в теории и методике обучения математике, связанное с использованием экспериментальной математики как содержательно-методической линии школьного курса математики, было предложено М.В. Шабановой (САФУ им. М.В. Ломоносова) на III Всероссийском съезде «Школьное математическое образование», затем в Красноярске на IV Всероссийской научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Оба научных форума поддержали предложенное М.В.Шабановой направление. Так в пункте 6 резолюции съезда записано: «Экспериментальный, исследовательский подход к изучению математики является перспективной мировой тенденцией. Такой подход, за счет повышения мотивации, содействует выбору учащимися продолжения образования в направлениях, требующих повышенного уровня математических знаний. Он особенно эффективен при использовании компьютерных инструментов и сред. Целесообразно рекомендовать для включения в примерные основные образовательные программы на всех уровнях образования в части предмета «Математика» использование компьютерных инструментов математической деятельности». Эффективность использования экспериментальной математики для исследовательского обучения с использованием динамических программных сред сегодня уже не вызывает сомнений. Она подтверждена многочисленными зарубежными и российскими исследованиями (G. Hanna, K. Jones, A. Mariotti, В.А. Далингер, В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, М.Г. Шабат).

Исследованию возможностей программной среды «Живая математика» для реализации экспериментального подхода при обучении геометрии в основной школе и посвящена данная работа.

Цель исследования: Разработать для учащихся основной школы (7-9 классы) систему заданий, реализующих линию экспериментального подхода к обучению геометрии с использованием среды «Живая математика».

Объект исследования: Учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование в обучении математике систем динамической геометрии.

Предмет исследования: Компьютерное сопровождение обучения геометрии в основной школе на базе системы динамической геометрии «Живая математика».

Гипотеза данного исследования состоит в том, что обучение геометрии в 7 — 9 классах с использованием методов экспериментальной математики способствует формированию исследовательской компетенции учащихся; повышению уровня обученности по геометрии и развитию познавательного интереса к предмету

Задачи исследования:

а) проанализировать темы курса геометрии в основной школе и существующие элективные геометрические курсы, допускающие экспериментальный подход, в том числе и с точки зрения использования при обучении геометрии «Живой математики»;

б) изучить динамические, конструктивные, исследовательские и вычислительные возможности среды «Живая математика» как виртуальной лаборатории на предмет использования ее при экспериментальном подходе к обучению геометрии;

в) разработать систему заданий для 7-9 классов, реализующих линию экспериментального подхода к обучению геометрии;

г) осуществить экспериментальную апробацию заданий и опытную проверку эффективности их использования при обучении геометрии в основной школе.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы**:

- анализ психолого-педагогической, математической и методической литературы, программ и государственных образовательных стандартов, учебников и учебных пособий по геометрии для основной школы;
- педагогический эксперимент по проверке основных положений диссертации.

Научная новизна исследования состоит в том, что показаны возможности формирования исследовательских умений у всех учащихся 7-9 классов в процессе обучения геометрии средствами экспериментальной математики.

Практическая значимость исследования заключается в разработке и апробации:

- системы заданий для 7-9 классов, реализующих линию экспериментального подхода к обучению геометрии;
- методических рекомендаций по реализации линии экспериментального подхода обучению геометрии в 7, 8, 9 классах по учебнику А.В.Порелова

Глава 1. Теоретическое обоснование целесообразности экспериментального подхода при обучении геометрии в основной школе.

§1. Экспериментальный подход к обучению естественнонаучным и математическим дисциплинам, история происхождения термина «Экспериментальная математика»

Многие математические результаты, на протяжении всей истории развития предметной области были получены посредством экспериментов и индуктивных рассуждений, лишь позднее они были доказаны дедуктивно. История развития математической науки показывает, что к математическому решению, прикладных проблем, и теоретических ученые часто приходили используя эксперимент с объектами исследования (числовыми последовательностями, рядами, аналитическими выражениями, геометрическими фигурами, их реальными прототипами, моделями и т.п.). В математике, в отличие от естественных наук, эксперимент принимал и принимает самые различные формы: натурные эксперименты для получения эмпирических соотношений, модельные имитационные эксперименты для получения выводов по аналогии, численные эксперименты для получения обобщенных выводов и др.. экспериментальные начала, так как экспериментальные методы использовались учеными на всем протяжении истории развития математической науки. На их значимость для самой науки, так и для математического образования обращали внимание многие видные ученые (Ж. Адамар, Н. Бор [22], Г. Вейль, Д. Гильберт и др.). «Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук» [4, с. 28] подчеркнул В.И. Арнольд, говоря о пагубности для развития математической науки и математического образования разделение математики и физики, которое было предпринято в середине XX века. Говоря «О преподавании математики» В.И. Арнольд доказывает, что «непостижимая эффективность математики в естественных науках», о которой говорил Ю. Вигнер [9], наблюдается лишь тогда, когда не только математическая модель, но и исходные положения аксиоматических теорий, дедуктивные выводы получают экспериментальное подтверждение. В трудах В.И. Арнольда не только много внимания уделено экспериментальным методам в математике, но и фигурирует термин «Экспериментальная математика» [10], смысловое значение которого тесно связано с широким использованием в решении математических проблем вычислительных (статистических) экспериментов.

Термин впервые произнесен на открытии Уральского научного центра АН СССР (1969г). Популяризатором его выступал Н.Н. Красовский – директор Института математики и механики УНЦ АН СССР (с 1970-1977гг), основоположник идей информатизации математического образования. В математическом образовании использовал Георгий Борисович Шабат «Клуб экспериментальной математики» (с 1983 г.). Название клуба показывает распространение термина в образовательной сфере.

Широкое распространение в научном мире данный термин получил лишь в последнее десятилетие XX века с появлением программных пакетов для математической обработки данных (Maple, Mathematica, Mathcad и других). Они существенно расширили возможности ученых в экспериментировании с объектами математических исследований. Основоположники данного направления Дж. Борвей и Д. Бейли (J. Borwein, D. Bailey) подтверждают существенное влияние на математическое мышление. Дж. Борвей и Д. Бейли описали методологию экспериментальной математики, опираясь на собственный опыт исследований в этой области. Ими было отмечено, что эксперименты использовались в математике всегда как основа интуитивных выводов, но в описании своих результатов математики, об их роли не упоминали.

В конце 70-х годов XX века появляются автоматизированные системы научных исследований, которые использовались лишь для компьютерной поддержки проведения и обработки данных экспериментов в области химической технологии (институт им. М. Планка, ФРГ, 1968 г., центр научных исследований компании Du Pont, США, 1970 г.). Затем они стали быстро распространяться и на другие сферы научной деятельности. Это привело к возникновению понятия «компьютерного эксперимента». Под компьютерным экспериментом первоначально понимали модельный эксперимент, при котором объект исследования полностью моделируется в цифровом виде на ЭВМ. Главным отличием компьютерного эксперимента от экспериментов других видов является полное снятие задачи установления связи объекта исследования с ЭВМ, что устраняло погрешности, связанные с влиянием случайных факторов.

Появление компьютерных экспериментов позволило включить эксперименты в математические публикации и представить результаты и способы формального доказательства. Так редколлегия журнала «Experimental Mathematics»(Нью-Йорк 1992 г.) при отборе статей опиралась на философские представления об экспериментальной математике: «Экспериментальная математика основана на убеждении, что теория и эксперимент влияют друг на друга, и что математическое сообщество лишь выиграет от более полного их взаимодействия. Ранний обмен идеями увеличивает вероятность того, что они приведут к появлению новых теорем: интересно, что гипотеза часто формулируется исследователем, которому не хватает техники для ее формализованного доказательства, в то время как те, кто хорошо владеет техникой доказательств, будут искать в другом месте. Даже если человек не имеет представлений о способе доказательства, обсуждение эвристического процесса может помочь ему, или, по крайней мере, вызовет интерес других исследователей. Значимым является не только само открытие, но и дорога, ведущая к нему» [25].

Специфичным является использование компьютерных экспериментов практически на всех этапах исследования. Говоря об экспериментальной математике, мы имеем в виду особую методологию математической деятельности, которая включает в себя использование компьютеров для:

1. Достижения понимания и поддержки интуиции.
2. Открытия новых моделей и отношений.
3. Графической визуализации основных принципов.
4. Тестирования и предотвращения фальсификации гипотез.
5. Изучения возможного результата, чтобы увидеть, стоит ли он поиска формального доказательства.
6. Выдвижения гипотез о подходах к формальному доказательству.
7. Замены технически сложных выкладок компьютерными расчетами в ходе доказательств.
8. Подтверждения аналитически полученных результатов.

К преимуществам экспериментального подхода можно отнести:

- возможность уже на ранних этапах исследования исключить использование ложных гипотез, одно компьютерное вычисление или динамический чертеж убережет от напрасной траты времени и сил для поиска доказательства утверждения, полученного на основании ложных представлений;
- методы экспериментальной математики предоставляют возможность поддерживать рассуждения на первоначальном этапе на достаточно высоком уровне в отсутствии теоретической опоры для проведения рассуждений.

Существует проблема экспериментального подхода в математике – нельзя считать доказательством наличие факта или явления полученного с помощью программной среды. В математической науке стали накапливаться проверенные, но не доказанные результаты, т.е. результаты, не подкрепленные описанием способа или программы формального доказательства. Но, несмотря на нерешенность проблемы «компьютерного доказательства», использование компьютерных экспериментов значительно упростило работу математиков, несмотря на постоянное повышение уровня сложности решаемых ими проблем. Кроме того, именно появление компьютеров привело к распространению экспериментального подхода в математике, что сблизило методологии математики и естественных наук. Сближение методологий позволило уточнить понятие «компьютерный (математический) эксперимент», проведя его сопоставление с экспериментами, применяемыми в естественных науках.

Традиционно в науковедческой литературе выделялись четыре вида экспериментов, связанных с именами Канта (Kantian), Бэкона (Baconian), Аристотеля (Aristotelian) и Галилея (Galilean):

- Бэконовские эксперименты (Baconian Experimentation) – это натурные эксперименты. Они призваны ответить на вопрос: «Что произойдет, если …».
- Эксперименты Аристотеля (Aristotelian Experiments) – это лабораторные эксперименты, позволяющие в искусственных условиях воссоздать явления и управлять ими.
- Эксперименты Галилея (Galilean Experiments) – это эксперименты, применяемые для подтверждения гипотез или для получения данных, корректирующих гипотезу. Ярким примером эксперимента данного вида является эксперимент, опровергший утверждение Аристотеля о том, что легкие тела падают на землю медленнее, чем тяжелые. Г. Галилей опроверг - для проверки этого утверждения сбрасывал с Пизанской башни пушечное ядро весом 80 кг и мушкетную пулю весом 200 г. Оба тела достигли земли одновременно.
- Кантовские эксперименты – это мысленные эксперименты. Яркими примерами экспериментов данного вида являются рассуждения, которые привели к появлению неевклидовых геометрий.

Функции экспериментов в исследовании.

Функции	разведочные	контрольные
Виды экспериментов	Эксперименты Бэкона, Аристотеля	Эксперименты Галилея и Кантора
Предназначение	Для открытия новых фактов и закономерностей	Для проверки гипотез

В методологии экспериментальной математики границы этих функций размываются. Компьютерный (математический) эксперимент выполняет сразу несколько функций потому, что его результат является более надежным и каждое из полученных данных может рассматриваться как единичный пример проявления некоторой общей закономерности, которую мы собираемся открыть или проверить. Кроме того компьютерные (математические) эксперименты позволяют за короткий срок получать очень большое количество данных, что приводит к убедительному индуктивному выводу. Но истинность получаемых таким образом утверждений остается по вопросом. Обусловлено тем, что многие математические объекты обладают свойствами (бесконечности, непрерывности и т.п.), исключающими возможность полного перебора всех вариантов.

Таким образом, говоря о методологии экспериментальной математики, следует отметить, что отношение к этой области математического знания и к термину, ее обозначающему, пока не устоялось. Наряду с термином «экспериментальная математика» часто используется термин «компьютерная математика», что позволяет определяющим признаком считать широкое использование компьютеров, но не экспериментального подхода. Другие склонны считать экспериментальную математику как новый раздел математической науки, третьи полагают, что это принципиально новое качество современной математики в целом. Во всех случаях методы экспериментальной математики существенным образом меняют характер математического исследования, получение результатов и способы проведения доказательств. Сегодня методы и средства экспериментальной математики все чаще находят применение в обучении математике позволяя использовать исследовательское обучение в школе. В процессе преподавания математики на всех уровнях целесообразно добиваться от школьников как усвоения математических фактов, так и овладения исследовательскими умениями в области математики, причем то и другое должно происходить одновременно и в равной мере. В частности, процесс обучения должен включать в себя математические эксперименты, поскольку математика в процессе своего становления была наукой экспериментальной и до настоящего времени сохранила оба свои начала, теоретическое и экспериментальное.

Новый раздел математической науки, специфика которого состоит в широком использование возможностей компьютерной техники для постановки задач, получения и верификации гипотез, проведения компьютерных доказательств, визуализации математических фактов. Развитие компьютерной техники повысило значимость экспериментальных методов в математической науке, что позволяет сегодня создать таких условия обучения математике, которые будут способствовать воспитанию у обучающихся качеств исследовательской компетенции; способности использования возможности образовательной среды для достижения метапредметных и предметных результатов обучения; адаптироваться в условиях профессиональной деятельности; личностно и профессионально самореализовываться.

§2. Возможности среды «Живая математика» для проведения экспериментов и исследований при обучении геометрии

Требованиями Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования нового поколения определена необходимость формирования у учащихся опыта исследовательской деятельности. Для реализации этих требований в образовательных организациях начального общего образования должна быть реализована программа формирования универсальных учебных действий (УУД), к числу которых отнесены и действия постановки и решения проблем [2]. Программа реализуется за счет внеурочной деятельности учащихся по подготовке и выполнению учебно-исследовательских проектов, а также через включение элементов исследовательского обучения в предметную подготовку. В примерной основной образовательной программе [5] раскрыта связь формируемых универсальных учебных действий с содержанием учебных предметов. В частности в программе указано, что овладению начальными формами исследовательской деятельности должно содействовать изучение предмета «Окружающий мир», в то время как «Математика» рассматривается лишь в качестве предмета, способствующего формированию логических и алгоритмических УУД, а также УУД, связанных со знаковосимволической деятельностью.

В примерной основной образовательной программе основного общего образования [5] математика рассматривается уже не только как основной предмет в овладения основами проведения теоретических исследований, но и как равноправная с предметами естественно-научного цикла область для формирования умений проводить эксперименты и исследования в виртуальных лабораториях, навыков сбора, обработки и анализа эмпирических данных на основе знаний элементов статистики.

История развития человеческого общества и математики, как науки подтверждает, что эксперимент всегда являлся средством научного познания. А сущность ребенка? Природой заложено его развитие через эксперименты. Экспериментальная деятельность в обучении обладает большим развивающим эффектом. Теоретически доказано, что знания, полученные учеником самостоятельно, усваиваются лучше, чем преподнесенные учителем. Положительный опыт эксперимента был подтвержден преподаванием М.В. Ломоносовым, который широко использовал постановку творческих задач, требующих от учащихся самостоятельного проведения экспериментов. Это, по его мнению, должно было способствовать развитию творческого мышления у детей, выработке интереса и потребности к знаниям.[6] Можно считать отправной точкой идеи включения учащихся в исследовательскую деятельность в процессе обучения математике введение М.В. Ломоносовым в середине XVIII века «экспериментального метода» в систему преподавания физико-математических наук учащимся гимназии (для дворян и разночинцев) при Академии наук Петербурга, а затем при Московском университете, которые великий русский ученый возглавлял с 1758 по 1765 г. Но в преподавании математического цикла экспериментальные методы применяются редко. Обусловлено это тем, что теоретические аспекты допускают доказательство без экспериментального подтверждения.

Среди разделов математики большим экспериментальным потенциалом обладает геометрия. Большинство понятий, утверждений можно проверить или «открыть» в ходе учебного исследования с элементами эксперимента. Рассмотрим пример с доказательством свойства длины окружности (число π, 9 класс). Перед доказательством теоремы об отношении длины окружности к ее диаметру традиционно можно провести эксперимент:

1. Каждому ученику предлагается взять предмет, имеющий форму круга (стакан, ваза, кружка). Измерить диаметр окружности.
2. Взять нить и обтянув нить вокруг объекта, измерить длину окружности.
3. Вычислить отношение длины окружности к диаметру
4. Повторить эксперимент для другой окружности.

Большинство учащихся проявляют большой интерес к эксперименту, позже с интересом принимают участие в доказательстве теоремы. Но данная форма имеет недостатки: погрешности при измерении длины диаметра и длины окружности, при вычислении отношения длин. Решить проблему с погрешностями позволяет компьютер. Компьютерный эксперимент не только исключит недостатки, но и открывает большие возможности при проведении эксперимента на уроке. Современное программное обеспечение предлагает 50 видов систем динамической математики: GeoGebra 2002 год, Математический конструктор 2006 год, GeoNext 1999г, Cabri 1986 г, The Geometer's Sketchpad 1989 г., Живая математика (ЖМ) 2002 г. и др. Некоторые из них, например, Живая математика востребованы, так как обладают следующими особенностями:

a) Динамичного изображения объекта, который при изменении конфигурации сохраняет структурность объекта (отношения отрезков, принадлежность точек прямым, параллельность и др).

b) Полнота изображения. Можно добавить к готовому изображению дополнительное построение, числовые значения и все необходимое для более полного изображения с целью увидеть предполагаемую зависимость;

c) Компьютерная анимация, которая позволяет увидеть след от движения геометрического объекта и которую можно задать.

ЖМ представляет собой компьютерную среду, которую можно считать микромиром, исключительно удачно сочетающим евклидову идеализацию плоскости и динамические возможности современной компьютерной математики. *Конструктивно* она основана на двух основных операциях — построениях циркулем и линейкой; комбинации некоторых из них (например, построения перпендикуляров) соединены в легко выполняемые команды. Это позволяет пользователю быстро овладеть навыками классических построений, результаты которых по качеству, простоте и скорости значительно превосходят результаты традиционных построений на бумаге. *Измерительный аппарат* ЖМ позволяет параллельно с построениями проводить количественные наблюдения. о сравнению с идеализированной евклидовой плоскостью микромиру ЖМ присущи два (не очень существенных с точки зрения математического эксперимента) ограничения. Во-первых, все происходит на ограниченной части плоскости: в пределах экрана. По этому поводу следует отметить, что подавляющая часть результатов евклидовой геометрии также моделируется на ограниченной части плоскости; исключение составляет *пятый постулат* о параллельных, который, впрочем, занимает особое положение в математике: более чем двухтысячелетнее продумывание этого постулата привело к *неевклидовой* геометрии. Во-вторых, все измерения в ЖМ приближенны, причем точность приближений невелика и (в отличие от систем компьютерной алгебры) принципиально не повышаема. Это говорит о том, что изучение в среде ЖМ таких вопросов, как *несоизмеримые отрезки или длина окружности, должно быть дополнено рассмотрениями вне среды ЖМ.*

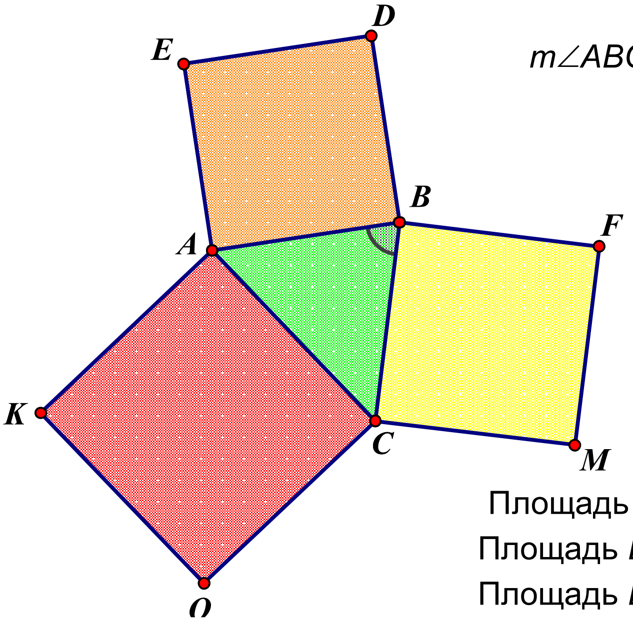
Более существенны *динамические* возможности ЖМ: связанные с ними динамические и анимационные чертежи и сценарии развивают стиль геометрического мышления, воспитанного рассмотрением *подвижных* фигур, мышления намного более плодотворного, чем традиционный стиль созерцательно-статических рассмотрений. Здесь также следует выделить два аспекта. Во-первых, *конфигурационное мышление*, о котором писал Дж. Пойа, из области неуверенных полетов в мир неосязаемого перемещается в простую работу с легкодоступными и самостоятельно изготавливаемыми манипулятивами. Например, перемещая по экрану вершины треугольника, мы можем из одного треугольника получить *все* (с точностью до подобия). Различные стандартные теоремы, например, теорема о пересечении медиан *произвольного* треугольника, превращаются (для всех, включая слабейших по математике учащихся) в *очевидные*, хотя и *нетривиальные*, экспериментально проверяемые факты. Во-вторых, возникают новые классы объектов: *следы движущихся точек*. Даже простейшие из них, такие как следы середины отрезка, соединяющего точки, равномерно движущиеся по двум окружностям, очень красивы, причудливы и математически интересны. В традиционной математике такие кривые назывались *механическими* и изучались, начиная с античности, а особенно интенсивно — в XIX веке, например, П.Л. Чебышевым в России и В. Понселе во Франции. При этом «механическая» деятельность, например, Понселе, противопоставлялась (им самим и Ф. Клейном в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии») чистой геометрической. ЖГ, таким образом, представляет собой среду, в которой области чистой и прикладной математики, ранее мыслившиеся как далеко отстоящие друг от друга, естественно объединяются.

Простейшие эксперименты отличаются от наблюдений тем, что сознательно ставятся; и должны быть понятны и интересны экспериментатору. Успешные наблюдения очень естественно переходят в эксперименты. Например, наблюдения могут привести к вопросу: а что происходит с равнобедренным треугольником, когда одна из его сторон становится самой длинной или короткой? Поставивший такой вопрос семиклассник будет двигать вершины по экрану уже не произвольно, а вполне определенным образом, обращая особое внимание на моменты некоторого качественного изменения треугольника. Нетрудно понять, что в процессе этого эксперимента школьник на эмпирическом уровне обнаружит большую часть теорем школьной программы, относящихся к теме равнобедренные треугольники. Школьнику, вовлеченному в экспериментально-математические исследования, доступны все элементы взрослой научно исследовательской деятельности.

Опыт использования среды «Живая математика» показывает, что за короткое время можно провести эксперимент в различном разделе геометрии за короткий промежуток времени, провести расчеты. Повторить эксперимент многократно.

Продемонстрируем возможности применения динамической среды «Живая математика» для проведения экспериментов и исследований при обучении геометрии.

.З а д а ч а 1: *На сторонах произвольного треугольника во внешнюю часть построить квадраты и определить вид треугольника, для которого сумма площадей двух меньших квадратов является равной площади большего квадрата (рис.1)*



$m\angle ABC = 74{,}47°$

Площадь $\triangle ABC$ = 7,07 см^2
Площадь *BAED* = 13,83 см^2
Площадь *BFMC* = 15,56 см^2
Площадь *AKOC* = 21,54 см^2
(Площадь *BAED*) + (Площадь *BFMC*) = 29,39 см^2

рис 1.

Построим произвольный треугольник АВС. Достроим на каждой стороне треугольника квадраты. Проведем эксперимент: измерив величину углов треугольника и площадей новообразовавшихся квадратов. Если изменять треугольник (зацепив мышкой одну из его вершин), то можно проследить за изменением суммы $a^2 + b^2$ сравнить ее с c^2 . Когда будет достигнуто равенство $a^2 + b^2 = c^2$, треугольник станет прямоугольным.

Можно продолжить эксперимент по определению вида треугольника предложив исследовать следующую ситуацию: «Может ли служить признаком вида треугольника соотношение площадей не только квадратов, построенных на его сторонах, но и других правильных многоугольников?». На сторонах треугольника во внешнюю сторону с помощью инструмента «правильный многоугольник» отложить многоугольники, число сторон которых зависят еще от одного параметра n, принимающего целочисленные значения.

Эксперимент показывает, что при этих изменениях равенство площадей не изменяется. Получаем обобщение теоремы Пифагора на случай любых правильных многоугольников, построенных вне его на сторонах прямоугольного треугольника. Дополнительно можно проверить, как изменится соотношение сумм площадей правильных n-угольников, при изменении вида треугольника.

З а д а ч а 2. *Даны две окружности. Радиус одной из них равен 3 см, расстояние между их центрами 10 см. Пересекутся ли эти окружности?* Анализируя условие задачи, и выполняя построение модели, ученики улавливают, что это задача с недостающими данными – нельзя ответить на вопрос, не зная радиус второй окружности (рис 2).

Экспериментируя с радиусом второй окружности решить вопрос о взаимном расположении двух окружностей на плоскости.

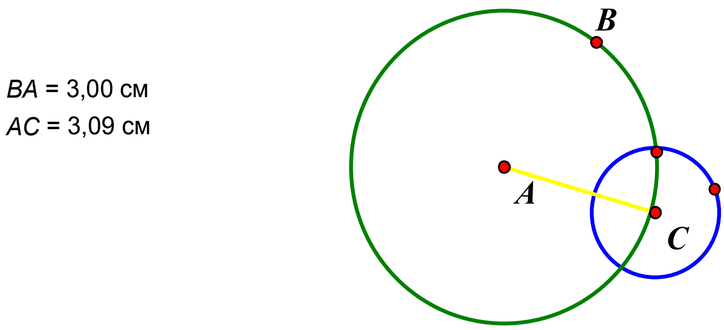


Рис. 1

Рассмотрим пример использования компьютерного эксперимента И.С. Храповицким [26].

З а д а ч а 3. *В окружности проведены два диаметра, и из её свободной точки M опущены два перпендикуляра на диаметры, их основания соединены отрезком AB. Покажите, что:*

1) длина отрезка AB не зависит от места положения точки M на окружности;

2) длина отрезка AB не зависит от взаимного расположения диаметров;

3) значимым для сохранения длины отрезка AB является принадлежность точки M окружности.

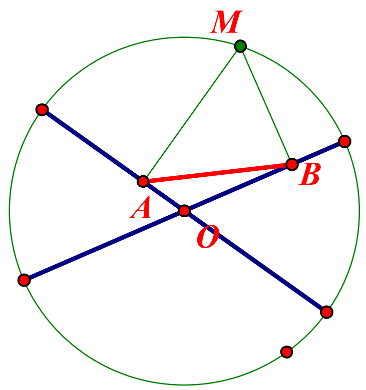


Рисунок 3

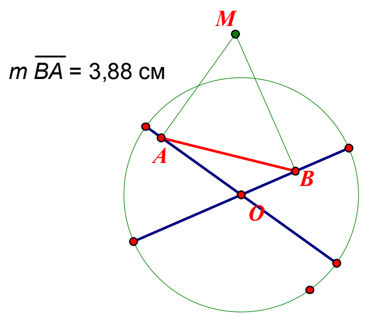


Рисунок 3

Для проверки первого утверждения необходимо задать M на окружности с помощью инструмента «точка на объекте». Двигая точку M (зацепив мышкой), убеждаемся в том, что длина отрезка AB не зависит от места положения точки M на окружности (рис.4).

Для проверки второго утверждения нужно изменять угол между хордами (зацепив мышкой конец одного из диаметров). Учащиеся убеждаются, что длина отрезка AB не зависит от взаимного расположения диаметров. Для проверки третьего утверждения необходимо задать M произвольно. Двигая точку M (зацепив мышкой), убеждаемся в том, что длина отрезка AB зависит от места положения точки M только в случае нахождения точки M на окружности, длина отрезка AB становится неизменной величиной (рис.3).

В ходе компьютерной проверки может быть выявлена необходимость уточнения ранее сформулированного утверждения или сделан обоснованный выбор рабочей гипотезы, т.е. наиболее правдоподобной гипотезы из нескольких альтернатив. Приведем пример.

З а д а ч а 4. *На окружности выбрана точка M. Провести хорду AB параллельно касательной к окружности в точке M. Треугольник ABM будет иметь наибольшую площадь, если а) треугольник ABM – прямоугольный ?; б)* *треугольник ABM – равносторонний?; в) ни в одном из указанных случаев. Создадим модель для исследования данной задачи (Рис. 5).*

Очевидно, что положение точек A и B на окружности определяется значением угла AMB. Площадь треугольника ABM можно измерить, предварительно выполнив построение внутренней области треугольника.

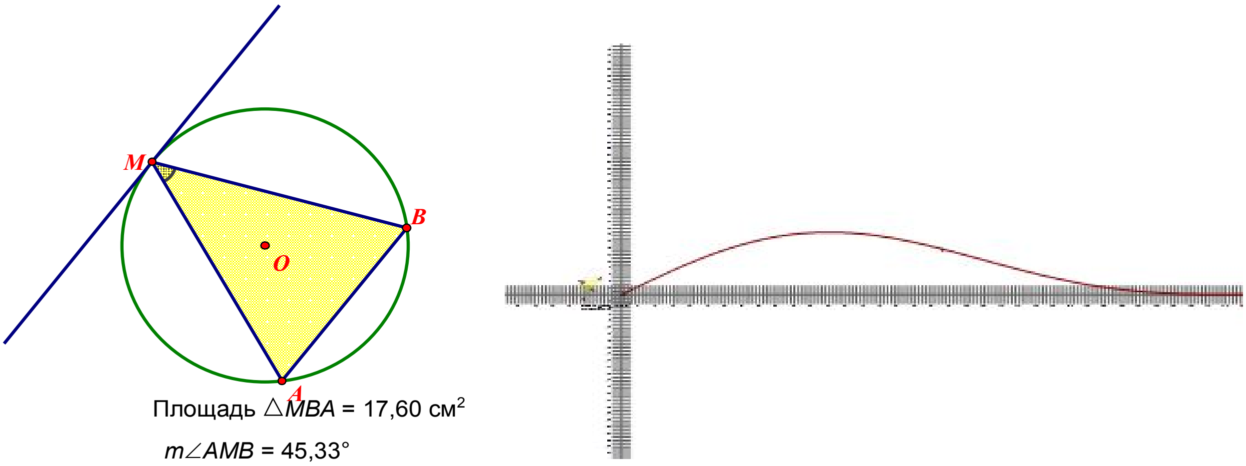


Рисунок 4

Чтобы легче было наблюдать за многочисленными изменениями значения площади треугольника ABM при движении точки A по окружности, представим зависимость между значением угла AMB и соответствующей этому значению площадью треугольника в графическом виде. Для этого построим в декартовой системе координат точку K, координатами которой будут измеренные значения угла (абсцисса точки) и площади (ордината точки), а затем применим к этой точке команду Геометрическое место при изменении положения точки A. На чертеже появится график соответствующей зависимости, имеющий единственную точку максимума. Эмпирически убеждаемся, что точка K попадает в точку максимума при условии, что AMB = 60°, т.е. наибольшая площадь будет у равностороннего треугольника ABM.»

§3. Методология и средства экспериментальной математики в школьном курсе геометрии

На значимость экспериментальных методов для математического образования обращали внимание многие видные ученые (Ж. Адамар, Н. Бор [20], Г. Вейль, Д. Гильберт и др.). В своем выступлении «О преподавании математики» В.И. Арнольд привел примеры, доказывающие, что «непостижимая эффективность математики в естественных науках», о которой говорил Ю. Вигнер [7], наблюдается лишь тогда, когда не только математическая модель, но и исходные положения аксиоматических теорий, дедуктивные выводы получают экспериментальное подтверждение: «математики-схоласты (мало знакомые с физикой) верят в принципиальное отличие аксиоматической математики от обычного в естествознании моделирования (всегда нуждающегося в последующем контроле выводов экспериментом). Не говоря уже об относительном характере исходных аксиом, нельзя забывать о неизбежности логических ошибок в длинных рассуждениях (скажем, в виде сбоя в компьютере, вызванного космическими лучами или квантовыми осцилляциями). Каждый работающий математик знает, что если не контролировать себя (лучше всего – примерами), то уже через какой-нибудь десяток страниц половина знаков в формулах будет переврана, а двойки из знаменателей проникнут в числители. Технология борьбы с подобными ошибками – такой же внешний контроль экспериментами или наблюдениями, как и в любой экспериментальной науке, и ему следует с самого начала учить школьников младших классов» [1].

Многие математики рассматривают экспериментальную математику как новый раздел математической науки, например, Дж. Борвейн и Р. Борвейн [20]: «Экспериментальная математика является то, что отрасль математики, которая касается себя, в конечном счете с кодификации и передачи идеи в рамках математического сообщества посредством использования экспериментальных (в любом Галилея, Бэкона, Аристотеля или кантовском смысле) разведки домыслов и более неформальных убеждений и осторожны анализ данных, полученных в этом стремлении»

Другие полагают, что это есть принципиально новое качество современной математики в целом. «Новый раздел математической науки, специфика которого состоит в широком использование возможностей компьютерной техники для постановки задач, получения и верификации гипотез, проведения компьютерных доказательств, визуализации математических фактов» [8].

Методы экспериментальной математики существенным образом меняют характер математического исследования, получение результатов и способы проведения доказательств. В этой связи нам представляется очевидным существенное воздействие «компьютерной математики» на систему образования в целом и на отдельные ее элементы. Сегодня методы и средства экспериментальной математики все чаще находят применение в исследовательском обучении математике.

Математика, как и всякая наука с одной стороны представляет собой деятельность по получению новых знаний в своей области, а с другой стороны, она является суммой знаний, накопленных к данному моменту. Из этого следует, что в процессе преподавания математики на всех уровнях целесообразно добиваться от школьников как усвоения математических фактов, так и овладения исследовательскими умениями в области математики, причем и то и другое должно происходить одновременно и в равной мере. Процесс обучения должен включать в себя математические эксперименты, поскольку математика в процессе своего становления была наукой экспериментальной и до настоящего времени сохранила оба свои начала, теоретическое и экспериментальное.

Деятельность в области экспериментальной математики, результатом которой являются гипотезы о свойствах математических объектов или математических предпонятий или понятий идеально позволяет организовать исследовательскую работу по предмету.

Для проведения математических экспериментов существуют различные инструменты. К ним можно отнести кубики для игры в кости, игральные карты и монеты; квадратные листы бумаги для оригами; реальные циркуль, линейка и папирус, а впоследствии бумага; идеальные циркуль и линейка; транспортир, двусторонняя линейка и шаблон прямого угла; компьютер и т.д Особая роль принадлежит компьютеру. Его возможности в постановке экспериментов очень велики, с его помощью получены интересные и разнообразные результаты, что в последнее время стали отождествлять математический эксперимент с компьютерным экспериментом. Это указывает на возрастание роли экспериментального компонента математики. Важно, что математические эксперименты можно активно использовать в сфере образования. Цифровые образовательные ресурсы позволяют организовать математический эксперимент в рамках реального учебного процесса.

Модель исследовательского обучения геометрии в стиле экспериментальной математики опирается на :

1. Исследовательское обучение математике в массовой школе – это включение ***на всех или некоторых*** этапах дидактического цикла в деятельность, ***сходную*** с деятельностью ученых в области экспериментальной математики.

2. Своеобразие методологии экспериментальной математики состоит в целесообразном использовании возможностей, предоставляемой ***экспериментальным и теоретическим подходами с*** привлечением средств компьютерной техники.

3. При проектировании каждого дидактического цикла учитель всякий раз принимает решение, какой подход: ***репродуктивный или исследовательский, и с какой степенью полноты*** применять на каждом из

этапов с учетом факторов: уровня базовой математической подготовки учащихся, уровня сформированности у учащихся качеств математика-экспериментатора и математика-теоретика и лимита учебного времени, отведенного на изучение материала

Под *линией экспериментальной математики мы понимаем содержательно-методологическую линию школьного курса математики, ведущим понятием которой является понятие математического эксперимента.*

§4. Теоретические основы построения содержательно-методической линии экспериментальной математики при обучении геометрии в школе

Содержательно-методическая линия экспериментальной математики может быть осуществлено без каких-либо существенных расширений учебных программ по математике, а лишь за счет «вывода из подполья» математических экспериментов, так или иначе привлекаемых к процессу обучения. Речь не идет о дополнении учебных программ по математике новым содержанием, а об оформлении в отдельную содержательно-методическую линию образцов деятельности, раскрывающих содержание и объем фундаментального (*ведущего*) понятия «*математический эксперимент*».

Анализ рабочих программ по математике позволяет наметить неспецифическое содержание линии экспериментальной математики, обеспечивающее развитие перечисленных выше методологических знаний.

1. Развитие линии экспериментальной математики в начальной школе. Изучение математики в начальной школе предоставляет возможности и условия для продуктивного формирования базовых умений, связанных с реализацией экспериментального подхода при изучении математики, так как все правила математических действий формируются в этот период как индуктивные обобщения частных закономерностей, к обнаружению которых учащиеся пришли случайно или по заданию учителя. Первые математические знания являются благоприятной основой для зарождения и накопления представлений опыта использования *натурных экспериментов бэконовского типа.* К потребности их проведения обычно приводят вопросы, типа «Что, если попробовать сделать так?» «А что произойдет, если …?» и т.п.

Овладение этим видом экспериментов проявляется в способности подмечать закономерности при выполнении одних и тех же заданий с объектами разной природы, абстрагируясь от их природы, а также в способности видеть причины сходства и различия результатов одних и тех же практических действий в, казалось бы, сходных условиях и использовать их для рационализации рутинных действий.

Формирование представлений об экспериментах бэконовского типа способствует постановка заданий на выполнение серии практических действий, с последующей вербализацией способа их выполнения. Например, задание на сравнение количеств объектов: На столе лежат коробочки со счетными палочками. Определите, в какой коробочке палочек больше всего, в какой – меньше всего.

Следующим видом экспериментов, с которыми знакомятся учащиеся при изучении математики в начальной школе, являются *эксперименты аристотелевского типа*. На этом этапе происходит обучение планированию экспериментов, целенаправленному их проведению и получению *адекватных выводов.* Вводится специальные термины, учащиеся узнают о различном назначении экспериментов в математическом познании, кроме того учащиеся знакомятся с различными видами вещественных (интерпретационных) моделей изучаемых математических объектов, осваивают способы их создания и целесообразного использования. **Формированию** первых представлений о возможности активного воздействия на объект изучения способствует введения правил математических действий, которые на первый взгляд кажутся искусственными. Для их оправдания требуется найти подходящую интерпретацию. Первым примером такого правила является правило нахождения неизвестного слагаемого. Оно оправдывается интерпретацией этой задачи как задачи нахождения длины части отрезка.

2. Развитие линии экспериментальной математики в основной школе. Основная школа является наиболее важным периодом в развитии линии экспериментальной математики, так как здесь учащимся предстоит не только освоить компьютерное экспериментирование во всем его многообразии, но и осознать ограниченность экспериментального подхода, значимость разумного сочетания экспериментальных методов с теоретическими. В 5–6 классах учащиеся продолжают экспериментировать с вещественными моделями математических объектов, делают выводы о математических закономерностях, убеждаются в целесообразности вводимых правил математических действий с опорой на различные типы интерпретационных моделей (диаграммы, графики, масштабные и схематичные изображения геометрических фигур, изображение чисел точками числовой прямой, игральная кость, монета, урна с шарами, дерево вариантов и т.п.). Большие возможность для решения этих задач предоставляет линия числа и вычислений в органичном сочетании с мерными величинами и геометрическими фигурами, введение буквенного обозначение числа, пропедевтика функциональных зависимостей, начала комбинаторики и теории вероятностей.

С развитием знаний учащихся 7–9 классах, во-первых, о дедуктивном методе и его роли в математике, во-вторых, о об автоматизированных системах поддержки экспериментальных исследований, начинают складываться обобщенные представления об экспериментальном и теоретическом подходах к исследованию, о видах экспериментов и специфике компьютерных экспериментов. Компьютерный эксперимент предстает перед учащимися, как разновидность модельного эксперимента, отличительной особенностью которого является изучение поведения не вещественной, а математической модели объекта исследовании самого математического объекта в той или иной его интерпретации.

Компьютерный эксперимент направлен на получение дискретного конечного набора данных о согласованных значениях двух или большего количества параметров, которые характеризуют поведение модели. Погрешности данных носят систематический (а не случайный) характер и обусловлены особенностями программно-аппаратного комплекса, избранного способа моделирования, степени точности модели. В этот период содержание в линии экспериментальной математики целесообразно включить лабораторные работы. Это облегчит учащимся понимание сходства и различий применения экспериментальных методов в математике и дисциплинах естественнонаучного цикла.

С развитием визуального, логического и абстрактного мышления учащихся ситуации, в которых учащиеся могут отказаться от реального экспериментирования с вещественными или компьютерными моделями математических объектов и перейти к мысленному экспериментированию по канторовскому типу, все более усложняются. Формированию представлений о мысленном экспериментировании способствуют ситуации, в которых построение модели является более трудоемм, чем получение данных о результатах экспериментирования с этой модельюки, а также ситуации столкновения с неэффективными алгоритмами построения модели. Таким образом линия экспериментальной математики в основной школе имеет следующий вид:

- 5-6 класс - формируются представления о компьютерных экспериментах, его преимуществах перед экспериментами с вещественными моделями, ограниченностях экспериментального подхода.

Результаты:

1) критическое отношение к результатам экспериментов, потребность в теоретическом осмыслении экспериментальных данных;

2) знания о приближенности экспериментальных данных, причинах появления приближенных значений, систематических и случайных ошибках экспериментов, зависимость надежности выводов от массовости данных;

3) умения делать выводы, адекватные собранным экспериментальным данным, теоретически осмысливать их

- 7-9 класс - формирование обобщенных представлений об экспериментальном и теоретическом подходах к исследованию, видах экспериментов и специфике компьютерных экспериментов.

Результаты:

1) представление о компьютерном эксперименте, как разновидности модельного эксперимента, о систематическом характере погрешностей компьютерного эксперимента;

2) формирование умений рационально сочетать экспериментальный и теоретический подходы;

3) умение экспериментировать не только с вещественными или компьютерными моделями, но и с образами математических объектов

3. Развитие линии экспериментальной математики в старшей школе. Изучение в старшей школе начал математического анализа создает условия для **распространения** мысленных экспериментов на новую область, а также для развития представлений учащихся о значимости компьютерных экспериментов в расширении возможностей мысленного экспериментирования.

Благоприятные условия складываются под влиянием необходимости работы с абстракциями актуальной и потенциальной бесконечности. Как известно, ознакомление с началами математического анализа в старшей школе может быть осуществлено только с опорой на правдоподобные рассуждения и наглядность. Базовая математическая подготовка учащихся недостаточна не только для доказательства теорем математического анализа, но даже и для введения строгих определений фундаментальных понятий: переменной, функции, бесконечности, предела, производной и интеграла. В этих условиях авторы учебников по Алгебре и началам анализа используют методические решения, которые способствуют формированию адекватных представлений об идейной основе математического анализа. Так, например, в учебнике А.Г. Мордковича [58, с. 140], предлагается сопроводить введение определения понятия предела последовательности образами «точки сгущения» для членов числовой последовательности и асимптоты графика функции, заданной на множестве натуральных чисел.

Подобные методические решения создают благоприятные условия для дальнейшего развития линии экспериментальной математики. По существу, они основаны на использовании эвристических возможностей метода неделимых, опирающегося на идею геометрического атома; метода исчерпывания, неявно апеллирующего к понятию предела; нестрогого метода линейной аппроксимации, исторически предопределивших появление интегральных и дифференциальных методов.

С первыми образцами применения методов, основанных на интуиции бесконечно малой, учащиеся сталкивались уже в основной школе: вывод формул длины окружности и площади круга, установление фактасуществования иррационального числа, получение формулы для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Переход к изучению начал математического анализа создает условия для расширения области применения этих методов, выявления и уточнения смысла используемых математических абстракций. Так, например, введение понятия предела функции на бесконечно сти (аналогично, введение понятий предела последовательности, предела функции в точке) может быть предварено постановкой заданий наэкспериментальное исследование поведения функции при неограниченном увеличении значения аргумента, на создание визуализаций, иллюстрирующих это поведение.

Компьютерный эксперимент может быть использован и *для распространения ранее изученных понятий на новые объекты*. Например, для введения понятия касательной к графику функции. Или разрешение софизма: «Если треугольники имеют хотя бы одну пару равных сторон, то их площади равны».

Важным элементом развития представлений учащихся о значении компьютерных экспериментов в математике является постановка *аналитически неразрешимых задач на уровне общего образования.* К числу таких задач относится интересный для учащихся вопрос о раскрытии неопределенностей, который вытекает из обсуждения причин запрета деления на ноль, о сравнении бесконечно малых, скоростей изменения функций и т.п.

Курс стереометрии также представляет массу возможностей для развития знаний учащихся об экспериментальных методах. В силу ограниченности познавательных функций статических проекционных изображений, изучение стереометрии осуществляется с применением вещественных моделей, а также компьютерных динамических моделей геометрических фигур.

Пример 19. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, F и L. Исследуйте зависимость вида сечения от положения данных точек на ребрах куба.

Проведение экспериментов с использованием проекционных динамические моделей требует от учащихся знания свойств, сохраняемых и не сохраняемых проекционных чертежом, а также использования возможностей изменения ракурса изображения, введения дополнительных построений и построения развертки для «настройки» проекционных изображений по заданным метрическим свойствам геометрических фигур, получения данных об этих свойствах в ходе компьютерного эксперимента. Таким образом, линия экспериментальной математики в старшей школе имеет следующий вид: распространение мысленных экспериментов на новые области, развитие знаний о роли компьютерных экспериментов в поддержке мысленного экспериментирования и выхода за границы возможностей, определенных уровнем теоретической подготовки

Результаты:

1) способность к компьютерной визуализации мысленных экспериментов и их результатов;

2) способность к использованию компьютерных экспериментов в качестве вспомогательного средства для расширения возможностей мысленного экспериментирования;

3) способность использования компьютерных экспериментов в качестве средства выхода за пределы возможностей, определяемых уровнем теоретических знаний.

Представленное описание содержательно-методической линии экспериментальной математики призвано лишь наметить и проиллюстрировать примерами основные ориентиры ее развертывания в содержании базовых математических курсов по ступеням общего образования. Отметим лишь, что данная линия с полным правом относится к методологической составляющей математического образования, что определяет необходимость реализации при ее проектировании следующего набора ***принципов*** [9]:

Принцип функциональной значимости – включение в школьный курс лишь тех знаний об использовании экспериментального подхода в математике, которые значимы для ее изучения (в соответствии с идеями исследовательского обучения в математике)

Принцип функциональной полноты – включение в школьный курс такого комплекса знаний об экспериментальном подходе в математике, который обеспечит готовность учащихся к саморегуляции деятельности по использованию экспериментальных методов в рациональном сочетании с теоретическими.

Принцип предметной обусловленности – использование для развития содержания линии тех возможностей, которое предоставляет методика обучения содержанию основных линий школьного курса математики.

Принцип комплексности источников – использование в качестве источников содержания линии образцов реализации экспериментального подхода к математике, которые предоставляются научными данными, опытом деятельности создателей учебников и учителей.

Глава 2. Основные этапы реализации экспериментального подхода при обучении геометрии в основной школе.

§5. Реализация экспериментального подхода при обучении геометрии в 7 классе.

Общая характеристика курса геометрии основной школы.

Математическое образование в основной школе складывается из следующих содержательных компонентов (точные названия блоков): арифметика; алгебра; геометрия; элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики и логики.

Геометрия – один из важнейших компонентов математического образования, необходимая для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, для эстетического воспитания учащихся. Изучение геометрии вносит вклад в развитие логического мышления, в формирование понятия доказательства.

Согласно федеральному базисному учебному плану для образовательных учреждений Российской Федерации на изучение геометрии на ступени основного общего образования отводится не менее 204 ч. из расчета 2 ч в неделю с VII по IX класс, 68 ч. в год.

Результаты обучения представлены в Требованиях к уровню подготовки и задают систему итоговых результатов обучения, которых должны достигать все учащиеся, оканчивающие основную школу, и достижение которых является обязательным условием положительной аттестации ученика за курс основной школы. Эти требования структурированы по двум компонентам: «знать/понимать», «уметь».

Знать/понимать:

- существо понятия математического доказательства; приводить примеры доказательств;
- существо понятия алгоритма; приводить примеры алгоритмов;
- каким образом геометрия возникла из практических задач землемерия; примеры геометрических объектов и утверждений о них, важных для практики;
- смысл идеализации, позволяющей решать задачи реальной действительности математическими методами, примеры ошибок, возникающих при идеализации.

Уметь:

- пользоваться геометрическим языком для описания предметов окружающего мира;
- распознавать геометрические фигуры, различать их взаимное расположение;
- изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условию задач; осуществлять преобразования фигур;
- распознавать на чертежах, моделях и в окружающей обстановке основные пространственные тела, изображать их;
- проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами;
- вычислять значения геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); в том числе определять значения тригонометрических функций по заданным значениям углов; находить значения тригонометрических функций по значению одной из них, находить стороны, углы и площади треугольников, длины ломаных, дуг окружности, площадей основных геометрических фигур и фигур, составленных из них;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения, алгебраический и тригонометрический аппарат, соображения симметрии;

- проводить доказательные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования;
- решать простейшие планиметрические задачи в пространстве;

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- описания реальных ситуаций на языке геометрии;
- расчетов, включающих простейшие тригонометрические формулы;
- решения геометрических задач с использованием тригонометрии;
- решения практических задач, связанных с нахождением геометрических величин (используя при необходимости справочники и технические средства);
- построение геометрическими инструментами (линейка, угольник, циркуль, транспортир).

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом в основе преподавания геометрии лежит системно-деятельностный подход, который обеспечивает:

- формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;

- овладение универсальными учебными действиями;

- активную учебно-познавательную деятельность обучающихся

- построение образовательного процесса с учётом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся.

Реализовать успешно данный подход можно средствами экспериментальной математики, на примере использования динамической среды Живая Математика. (Под термином экспериментальная математика будем считать широкое использованием возможности компьютерной техники для получения научных результатов в математике).

Введение федеральных государственных стандартов ориентирует учителя на достижение новых образовательных результатов школьниками, в частности, умений:

- генерировать вопросы,
- формулировать предположения,
- подтверждать (опровергать) сформулированные предположения,
- обнаруживать закономерности в наблюдаемых геометрических явлениях,
- исследовать нестандартные задачи и создавать модели различных объектов и т.п.

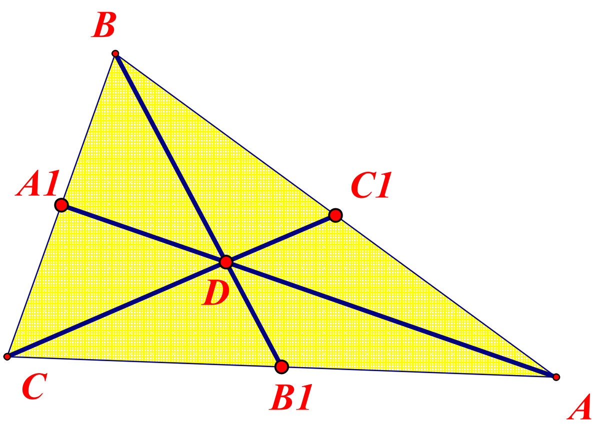
Что реально достижимо средствами виртуального конструктора Живая математика. Это компьютерная система интерактивного моделирования, исследования и анализа широкого спектра задач при изучении геометрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа. Виртуальный конструктор Живая математика предназначен для построения и исследования геометрических чертежей и проведения численных экспериментов, содержит комплект задач, поддерживающих все существующие варианты школьных учебников планиметрии и стереометрии, содержит исследовательские задачи, позволяющие самостоятельно открывать геометрические закономерности.

В данном проекте мы остановимся на рассмотрении экспериментального подхода изучения геометрии в 7 классе. Понимание изучаемого материала достигается продолжительными экспериментами с чертежами, деформациями, измерениями и сравнениями, что способствует развитию геометрической интуиции и обеспечивает развитие деятельности учащегося по таким направлениям, как анализ, исследование, построение, доказательство, решение задач, головоломок и даже рисование

Цель: формирование обобщенных представлений об экспериментальном и теоретическом подходах к исследованию, видах экспериментов и специфике компьютерных экспериментов. Результаты: 1) представление о компьютерном эксперименте, как разновидности модельного эксперимента, о систематическом характере погрешностей компьютерного эксперимента; 2) формирование умений рационально сочетать экспериментальный и теоретический подходы; 3) умение экспериментировать не только с вещественными или компьютерными моделями, но и с образами математических объектов

В 7 классе, приступая к изучению, ученики уже имеют некоторое представление о геометрических фигурах, но сейчас им предстоят увидеть их в связи друг с другом, изучить их свойства и признаки, научиться выдвигать гипотезы и доказывать их.

Исследование 1. «Свойства медианы треугольника» (тема «Треугольник, высота, биссектриса и медиана треугольника», §3 «Признаки равенства треугольника»).



$m\,\overline{A1|D} = 2{,}90$ см

$m\,\overline{DA} = 5{,}81$ см

$\dfrac{m\,\overline{DA}}{m\,\overline{A1|D}} = 2{,}00$

$m\,\overline{CD} = 3{,}97$ см

$m\,\overline{D|C1} = 1{,}98$ см

$\dfrac{m\,\overline{CD}}{m\,\overline{D|C1}} = 2{,}00$

$\dfrac{BD}{m\,\overline{D\vert B1}}$	$\dfrac{m\,\overline{DA}}{m\,\overline{A1\vert D}}$	$\dfrac{m\,\overline{CD}}{m\,\overline{D\vert C1}}$
2,00	2,00	2,00
2,00	2,00	2,00

Рис. 5

Задача. *Сколько точек пересечения имеют медианы треугольника, проведённые к трем сторонам?*

Участники эксперимента проводят все медианы и находят ответ на поставленный вопрос (рис 6).

Каково отношение частей полученных отрезков каждой медианы? Учащиеся формулируют гипотезу об отношение частей отрезков медианы. Учащиеся получают опыт проведения эксперимента и оформления результатов исследования в таблицу. Анализируя вычислительные результаты, проведя исследование с помощью инструмента «Измерения» и «Числа-Вычисления» получают замечательную точку треугольника «Центр тяжести или центроид», обладающей свойством отношения частей медианы как 2:1, считая от вершин.

Проведя следующий эксперимент, сравнивая длины медиан и сторон треугольника открываем еще одно свойство медиан «Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана и наоборот». Можно продолжить серию экспериментов с медианой рассмотрев: а) свойство медианы в прямоугольном треугольнике, проведенной к медиане; б) равновеликость площадей двух треугольников, на которые разбивает медиана данный треугольник (при условии, что учащиеся знакомы с понятием площадь многоугольника); в) и о 6 равновеликих треугольниках, на которые делится треугольник тремя медианами. Продолжая работу со свойствами не только медианы, а треугольника вообще, используя ресурс внеурочной деятельности, например, элективный курс «Экспериментальная математика» интересно посмотреть на свойства медиан в равнобедренном и равностороннем треугольниках, проверить соотношения длин медианы и сторон треугольника (теорема Апполония $m_c = \frac{\sqrt{2 * a^2 + 2 * b^2 - c^2}}{2}$, где m_c — медиана к стороне c; a, b, c — стороны треугольника), и наоборот длины стороны треугольника и длин трех медиан: $a = \frac{2}{3} * \sqrt{2 * (m_c^2) + m_b^2 - m_a^2}$;

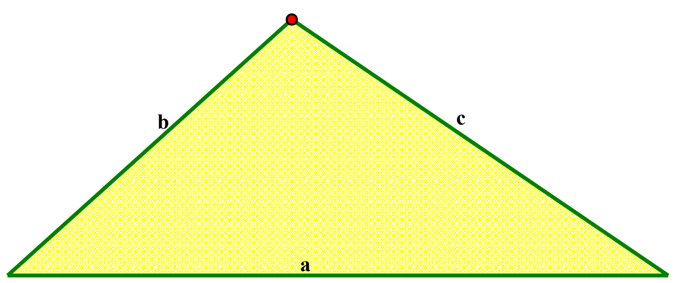
найти сумму квадратов трех медиан: $m_a^2 + m_c^2 + m_b^2 = \frac{3}{4} * (a^2 + b^2 + c)$.

И главное, обязательно провести доказательство найденных свойств, чтобы избежать искажения истинности и правильно развить качества экспериментатора в учениках. На практике это звучит как задача на доказательство, например, «Докажите, что медианы треугольника делятся точкой пересечения как 2:1, считая от вершин.

Очень полезным бывает в качестве экспериментального исследования предложить ученикам задачу с условием, которое нельзя реализовать. Например, исследование 2.

Исследование 2. «Условие существования треугольника» (§1 «Основные свойства геометрических фигур», п.9 «Треугольник»). Эксперимент в рамках изучения данной темы позволяет выйти за рамки планируемого учебного материала, шагнув в программный материал 8 класса «Неравенство треугольника».

Задача1. В школьной мастерской из проволоки изготовили четыре стержня с длинами 3см, 7см, 9см и 10см. Выясните, из каких трёх стержней можно составить треугольник, а из каких нельзя. Необходимо провести эксперименты с моделью треугольника, в ходе которых устанавливается истина - можно построить только треугольники, в котором каждая сторона меньше суммы трех (*Рис. 7*). В случаи 3+7=10, точки лежат на одной прямой и треугольника не существует, так же как и если одна из сторон больше суммы двух других.



a = 13,09 см
b = 7,64 см
c = 9,08 см
a + b = 20,74 см
b + c = 16,72 см
a + c = 22,17 см

a	b + c
13,09 см	16,72 см

Рис. 6

И вновь, не забываем провести доказательство «открытого» условия существования треугольника «Докажите, что в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон».

При организации исследовательской деятельности на уроке через эксперимент, задача учителя – предлагать достойные темы, показывать методы исследования, побуждать к теоретическому обоснованию гипотез, выдержавших экспериментальные проверки. Не стоит сужать эксперимент до простой демонстрации уже открытых фактов (хотя сама по себе она тоже неплоха). С другой стороны, не стоит злоупотреблять экспериментами в области, которую ученики на уровне 7 класса ещё не способны осмыслить теоретически (хотя небольшие «заделы» полезны).

Методическое планирование учебного модуля § 6 Четырехугольники

А.В. Погорелов 7-9 класс

№	Тема урока, тип урока	Дидактические задачи урока (диагностируемые цели)	Основные понятия	Учебные задания			Методическое обеспечение процесса обучения (используемые методы, организационные формы и средства)
				формирующие	диагностические / контролирующие	коррекционные	
1-2	Многоугольник. Четырехугольник	1.Актуализировать понятия многоугольника, четырехугольника 2. Сформировать у обучающихся представление об элементах многоугольника (соседние и противолежащие вершины и стороны,	многоугольник, вершины, стороны, углы, периметр, диагонали, вписанные и описанные многоугольники	В ЖМ построить 4 точки и последовательно соединить их отрезками. Изучить полученные фигуры (+вариант, когда любые три точки лежат на одной	Задание на распознавание четырехугольников. Задание на нахождение периметра многоугольника. Задание на логику (следующего типа: периметр	Карточка - образец решения+2 - аналогичных задачи	1 урок комбинированный - объяснительно – иллюстративный, частично-поисковый и репродуктивный методы. 2 урок - индивидуальной практической работы.

		диагональ 3. Вспомнить каким образом находится периметр многоугольника 4. Рассмотреть примеры вписанных и описанных многоугольников		прямой), сформировать понятие 4-угольника, n-угольника. Обозначить все элементы. Вычислить периметр многоугольника, если известны его стороны.	одного многоугольника равен периметру другого. Могут ли быть равными эти многоугольники? И пр.)		
3	Параллелограмм	1. Сформировать понятие параллелограмма. .2. Познакомить учащихся с признаком параллелограмма его док-ом 3. Развить способность преобразования словесных данных в	Параллелограмм, теорема, доказательство, признак параллелограмма	Практическая работа в ЖМ по построению параллелограмма; Исследование: если диагонали четырехугольника пересекаются …..(подтвержд	Самостоятельное решение задач к п.52 учебника с. 86 в среде ЖМ	Решение задач по готовым чертежам в среде ЖМ (с самопроверкой или образцами решения)	Урок - комбинированный. Применяются методы объяснительно – иллюстративный и исследовательский.

		чертеж 4. Отработать навык решения задач по готовым чертежам 5 .Научить школьников применять признак параллелограмма при решении практических задач		ение признака параллелограмма)			
4, 5, 6	Параллелограмм. Свойства параллелограмма	1. Актуализация свойств параллелограмма. 2. Сформировать навыки применения свойств параллелограмма 3. Познакомить учащихся с теоремами данных параграфов 3. Развить способность преобразования словесных данных в чертеж 4.	Свойства диагоналей, противоположных углов и сторон параллелограмма	У-4: исследовательская работа в ЖМ. У-5: задачи на построение параллелограмма по 2 сторонам и диагонали; по 2 сторонам и углу и др. У-6:	У-4: решение задач на нахождение неизвестных элементов параллелограмма; У-5: самостоятельное решение задач п 53 У-6: Сам.работа «Параллелограмм	Индивидуально – задания на решение задач, доказательство свойств параллелограмма «Заполни пропуски»	У-4: урок изучения новых знаний и формирования новых умений; У-5: комбинированный урок; У-6: урок контроля и коррекции

				доказательство свойств параллелограмма	»		
7, 8, 9	Прямоугольник, ромб, квадрат	1. Формирование понятия прямоугольника, ромба, квадрата 2. Знакомство со свойствами прямоугольника, ромба, квадрата их доказательство 3. Сформировать навыки применения свойств всех четырехугольников 4. Отработать навык решения задач по готовым чертежам 5 .Научить школьников применять свойства четырехугольников при	Свойства прямоугольника, ромба, квадрата. Виды 4-угольников.	У-7: исследование (проверка гипотез о свойствах 4-угольников), классификация всех 4-угольников. У-8: решение задач на построение в ЖМ У-9: работа по готовым чертежам в ЖМ,	У-7: самостоятельное решение и разбор задач учебника п. 54,55,56 У-8: Сам.работа «Задачи на построение» У-9: проверочная работа «Четырехугольники»	У7: составление конспектов по по теме «Четырехугольники»; запонение таблицы «Классификация 4-угольников»; решение задач-по карточкам-алгоритмам (индивидуально)	У-7: урок изучения новых знаний и формирования новых умений; У-8: комбинированный урок; У-9: урок контроля и коррекции

		решении практических задач		практическая работа «четырехугольники			
10, 11	Теорема Фалеса. Пропорциональные отрезки	1. Знакомство с теоремами Фалеса, о пропорциональных отрезках 2. Сформировать навыки применения теорем Фалеса и пропорциональных отрезках 3. Отработать навык решения задач на деление отрезка на n равных отрезков; построения пропорциональных отрезков.	Равные отрезки, пропорциональные отрезки	У10: практикум – доказательство т.Фалеса в ЖМ и т. О пропорциональных отрезках; Решение задач на построение. У11: решение задач на построение	У10: рассмотрение задач на деление стороны угла и прямой на равные отрезки. У11: решение задач на доказательство	Индивидуально задания на построение в ЖМ	У10 – комбинированный, У11 – урок практического применения знаний и умений

12, 13	Трапеция. Средняя линия треугольника, трапеции	1. Формирование понятия трапеция, средняя линия трапеции и треугольника 2. Знакомство со свойствами равнобокой трапеции, средних линий. 3. Сформировать навыки применения свойств средних линий треугольника и трапеции. 4. Отработать навык решения задач по готовым чертежам 5 .Научить школьников применять свойства различных трапеций.	Трапеция, прямоугольная и равнобокая трапеции, средняя линия треугольника, трапеции.	После введения понятия трапеции и ее видов – решение задач по готовым чертежам, в среде ЖМ на нахождение элементов трапеции. Решение задач на построение и доказательство в ЖМ.	Решение задач учебника п 58-59	Работа по карточкам – алгоритмам; решение задач на построение в ЖМ.	У12 – комбинированный урок; У-13 – закрепление изученного, урок-обобщения знаний.

14	Контрольная работа «Четырехугольники	1. Оценка и измерение уровня форсированности у обучающихся УУД по теме «Четырехугольники»	-	-	Контрольная работа	Индивидуальная домашняя работа по карточкам	Урок контроля знаний

§6. Реализация экспериментального подхода при обучении геометрии в 8 классе

Одним из эффективных средств выполнения экспериментов - это возможность построения динамического чертежа. Динамический чертеж обеспечивает процесс движения одного или нескольких элементов исходной фигуры, по ходу которого вскрываются необходимые взаимосвязи. Направление движения может быть указано стрелкой, а его характер на рисунке может быть отражен посредством следов в виде точек, контуров и т.п., которые характеризуют промежуточные положения геометрического объекта, изменяющегося указанным способом.

При рассмотрении динамического чертежа глаз "обегает" контуры всего изображения сначала спонтанно, пока происходит восприятие той ситуации, которая запечатлена на нем, а затем – в соответствии с характером заданного движения, отслеживая при этом все те состояния фигуры, которые не представлены визуально, и вскрывая при деятельном участии мышления весь динамизм картины. Для более яркого восприятия наиболее значимые элементы геометрических фигур, определяющие важные взаимосвязи, полезно каким-либо образом выделять (толщиной линий, их цветом и т.п.) [3].

Для нахождения зависимостей опытным путем школьники в 8 классе уже способны в виртуальных образовательных средах выполнять конструктивную геометрическую деятельность (видоизменение и преобразование геометрических фигур и их конфигураций: перемещение, наложение друг на друга, изменение размеров, вращение).

Чтобы каждый ученик мог поэкспериментировать самостоятельно, предлагаю интересные теоремы в виде открытых задач, в которых спрашивают: «верно ли, что...», «существует ли...», «когда существует», «уточните условие», «обобщите», «проверьте справедливость обратного утверждения». Прототипы таких задач присутствуют в формате ОГЭ, блок геометрия №13. Например, **Исследование 4** «Свойства параллелограмма» (§6 Четырехугольники.

Задача1.1: «Верно ли, что если у четырехугольника диагонали равны, то этот четырехугольник - параллелограмм» или **Задачи 1.2**«Если диагонали параллелограмма пересекаются по прямыми углами, то этот четырехугольник – ромб».(рис 8)

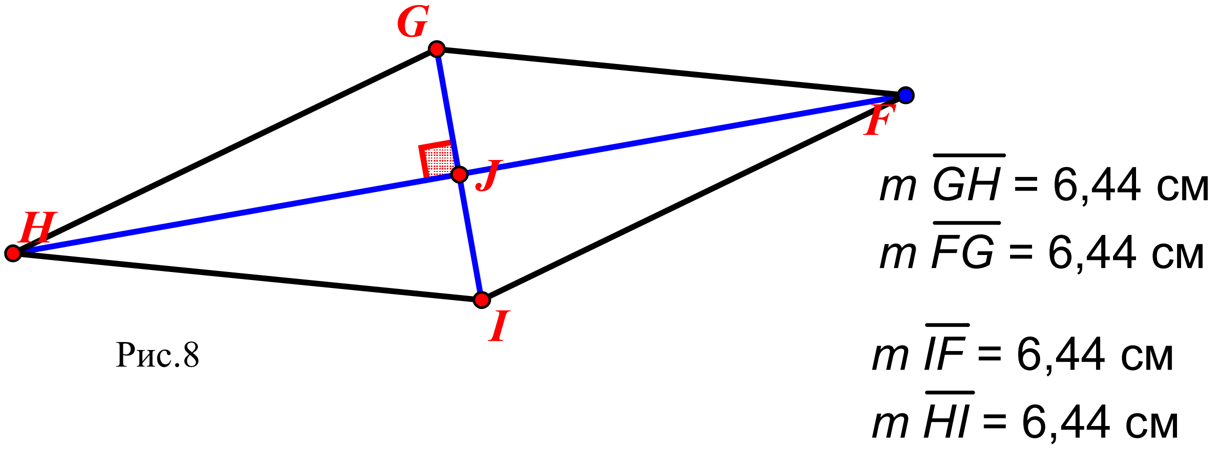


Рис.8

При работе с данной задачей могут возникнуть трудности с построением модели: учащиеся могут начать построение с параллелограмма и вручную выравнивать диагонали так, чтобы угол между ними был равен 90^0 . Возможен и другой вариант: построить перпендикулярные диагонали, а затем по определению – достроить параллелограмм. Исследование во всех случаях будет состоять из наблюдения за длинами сторон параллелограмма. В ходе эксперимента, ученики не только повторят и закрепят ранее изученный материал (свойства параллелограмма), но и «откроют» новое – свойство диагоналей ромба. Было бы замечательно продолжить начатое исследование новым экспериментом. Задача2 «Соедините середины сторон параллелограмма с его вершинами. Проверьте справедливость утверждения, что площадь многоугольника получившегося при пересечении данных линий в 6 раз меньше площади параллелограмма. Рассмотрите различные виды параллелограммов» (рис. 9). Результатом этой работы является красивое свойство параллелограмма, которое не изучается в школьном курсе геометрии, а можно встретить на олимпиадах или математических турнирах.

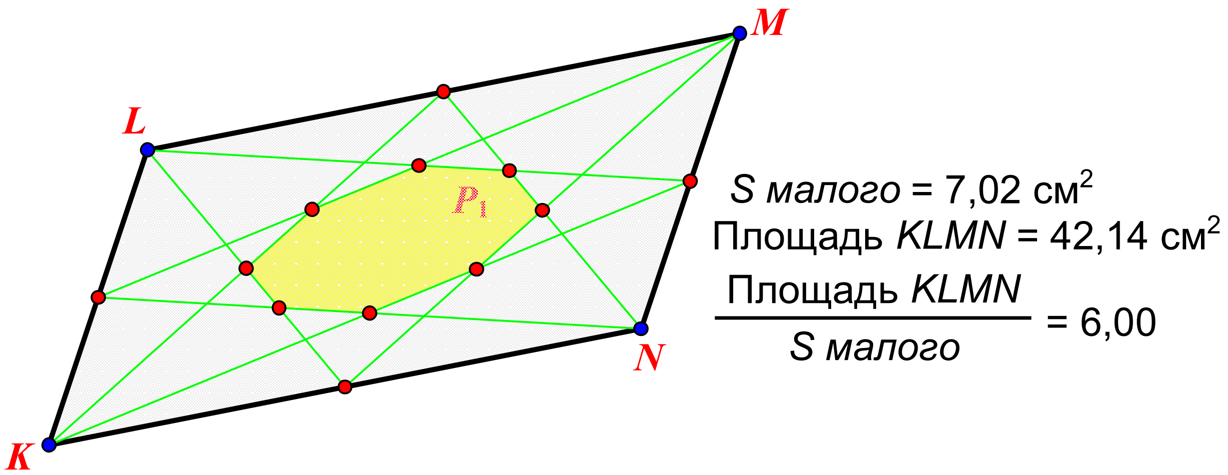


Рис.9

Очень важным, считаю возвращением в 8 классе к одному из методов решения задач на построение – методу геометрических мест. В геометрии имеется класс задач на нахождение множества точек, обладающих определенным свойством. Обычно эти задачи называются задачами на нахождение геометрического места точек (сокращенно ГМТ). В силу неопытности семиклассников (в учебном пособии А.В.Погорелова в 7 классе) тема остается мало понятной Во-первых, в математике термин множество точек употребляется не только случаях, когда решается задача на нахождение ГМТ. Так, например, и фрактал, известный как множество Мандельброта и часть координатной плоскости, на которой изображено решение неравенства $y < \log_2 x$, - в современной терминологии рассматриваются как множества точек. Во-вторых, с дидактической точки зрения важно сформировать у школьников достаточно ясное и полное представление о геометрической фигуре как множестве точек, обладающих определенным свойством.

Решение задач на нахождение множества точек удобно выстроить из двух этапов. Сначала на чертеже проводятся наблюдения, в результате которых возникает догадка о том, каково искомое множество точек. Эта догадка формулируется в виде гипотезы. Затем для обоснования гипотезы формулируются и доказываются два утверждения (прямое и обратное или прямое и противоположное).

Для выдвижения гипотезы проводятся неоднократные построения, которые требуют значительного времени, если их выполнять на бумаге. Использование компьютерной программы «Живая математика» позволяет значительно ускорить этот процесс. В этой программе имеются доступные средства для того, чтобы ученики на основе собственных экспериментов самостоятельно догадались, какой ответ получится в задаче, т.е. какую фигуру образует то или иное множество точек.

Рассмотрим на примере **исследование 5 (**можно рассматривать после темы «Движение») **Задача:** Найдите множество четвертых вершин всех квадратов, две вершины которых находятся на одной стороне данного угла, а третья - на другой.

Решение каждой задачи состоит из решения трех вспомогательных задач и выполняется с помощью различных инструментов.

Первая вспомогательная задача: *Дан угол с вершиной O и точка A на его стороне. а) Постройте квадрат ABCD так, чтобы его вершины B и C лежали на другой стороне этого угла. в) Сколько таких квадратов можно построить?(Рис.10)* Она нужна для того, чтобы ученик лучше понял текст основной задачи, чтобы он осознал, о каких квадратах в ней идет речь, какими специальными свойствами они обладают. Кроме того, решение задач на построение вообще благотворно влияет на усвоение геометрии.

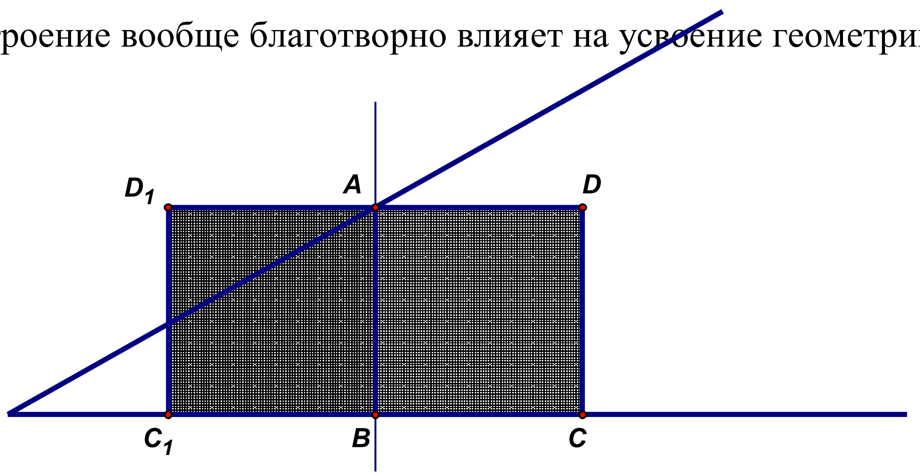


Рис.10

Вторая вспомогательная задача2: *Дан угол с вершиной О. Найдите множество вершин всех квадратов, две вершины которых находятся на одной стороне данного угла, а третья - на другой С помощью личного инструмента "Два квадрата" постройте несколько пар квадратов, одна вершина которого лежит на одной стороне квадрата, две другие - на второй стороне. Для этого достаточно щелкнуть курсором последовательно по любой стороне угла, по его вершине, а затем по второй стороне угла .*

• На каких линиях расположены четвертые вершины этих квадратов?

• Сформулируйте гипотезу: какую геометрическую фигуру образуют четвертые вершины?

Для ее решения применяется личный инструмент, специально созданный для этой задачи – «Два квадрата». Он позволяет быстро построить сколько угодно точек, принадлежащих искомому множеству. Этих точек должно быть достаточно для того, чтобы ученик мог догадаться, о какой геометрической фигуре идет речь в основной задаче, то есть чтобы он мог самостоятельно сформулировать гипотезу о искомом множестве точек. Личный инструмент находится на нижней кнопке готовальни. На поле чертежа имеется указание, как этим инструментом воспользоваться

При построении гипотезы (два луча с общи началом) внимание ученика сосредоточено на точках. Поэтому может оказаться полезным скрыть те вспомогательные построения - квадраты, с помощью которых были построены эти точки - четвертые вершины квадрата. (рис.11)

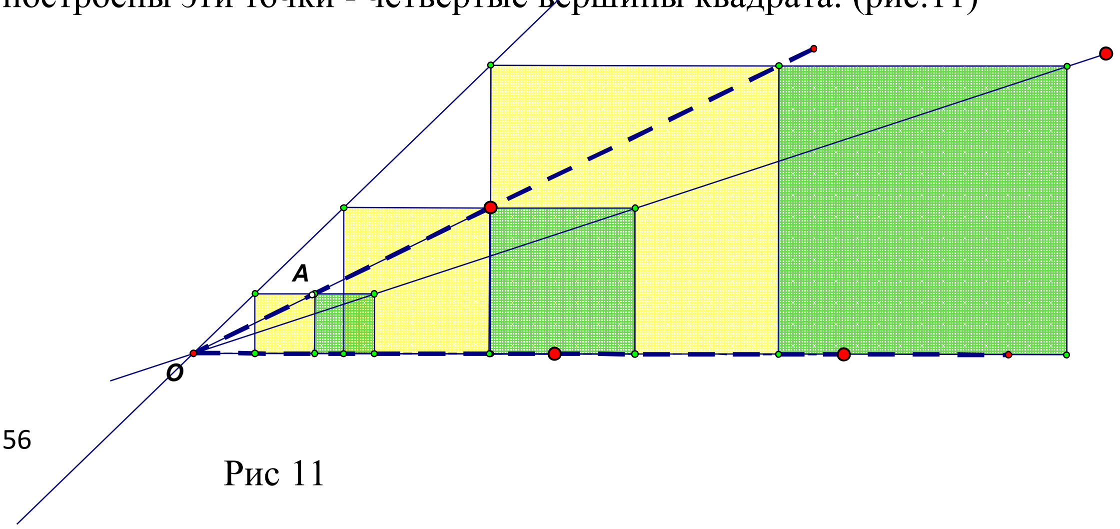


Рис 11

Третья вспомогательная задача: На чертеже имеется угол с вершиной О, точка А на его стороне и два квадрата с вершиной в точке А, причем две другие вершины каждого квадрата лежат на второй стороне угла.

• Щелкнув кнопку "Анимация", посмотрите множество четвертых вершин этих квадратов.

• Совпадает ли ваша гипотеза с этим результатом?

Задача решается автоматически с помощью кнопки «Анимация». В результате ученик видит искомое множество точек. Для этого ученику достаточно только щелкнуть по указанной кнопке. Теперь ему нужно сопоставить собственный результат во второй задаче с полученной геометрической фигурой. Может оказаться, что он должен уточнить свой ответ к предыдущей задаче, либо признать ошибку в собственной гипотезе, либо, наоборот, признать свой ответ правильным. Важно, что в любом случае ученик видит верный ответ. К сожалению, именно в этот момент у ученика создается впечатление о том, что поставленная задача решена полностью, поскольку он с помощью картинки проверил свою гипотезу.

На самом же деле теперь он должен перейти к логическому обоснованию полученного результата уже без использования программы «Живая математика».

Отмечу, что при решении третьей вспомогательной задачи можно воспользоваться имеющейся в программе «Живая математика» специальной командой Геометрическое место (меню Построение), применение которой позволяет увидеть искомую геометрическую фигуру в готовом виде. Однако в этом случае ученик видит только результат, но не процесс его получения.

Предлагаю фрагмент **календарно - тематического планирования по геометрии для 8 класса с использованием ресурсов УМК «Живая математика» к учебному пособию «Геометрия 7-9 А.В.Погорелов»**

№ урока	№ пункта	Тема	Часы	УМК «Живая математика». Введение в компьютеризированный курс планиметрии. Площадь	Тип ресурса
		Глава 6. Площадь.	**14**		
1	п. 48, 49	**Площадь многоугольника.**	1	Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Понятие площади многоугольника.	Иллюстрации к понятиям и свойствам, эксперимент с
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Площадь многоугольника.	Иллюстрации к доказательству
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Разбить на треугольники.	Экспериментальная задача на применение свойств площади
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Свойства площадей многоугольников.	Иллюстрация качественных утверждений о свойствах многоугольников
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и	Задача на построение

				прямоугольника. → Задача 446	
2	п.50	**Площадь прямоугольника.**	1	Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Площадь многоугольника.	Пошаговое доказательство теоремы
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Задача 453	Экспериментальная задача с решением
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Задача 453	Задача на вычисление с подсказкой
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Задача 454	Урок 2. Площадь параллелограмма → Задача на площадь (постановка, подсказка, решение с подсказкой
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и прямоугольника. → Задача 456	Задача на вычисление с подсказкой
				Урок 1. Понятие площади многоугольника. Площадь квадрата и	Задача на вычисление с иллюстрированны

				прямоугольника. → Задача 457	м ответом
3	п.5 1	**Площадь параллелограмма.**	1	Урок 2. Площадь параллелограмма→ Площадь параллелограмма	Иллюстрация к теореме
				Урок 2. Площадь параллелограмма→ Задача на площадь (постановка, подсказка, решение)	Задача на построение с подсказкой и решением
				Урок 2. Площадь параллелограмма→ Задача 460	Задача на вычисление
				Урок 2. Площадь параллелограмма→ Задача 461	Задача на вычисление с дополнительным построением
				Урок 2. Площадь параллелограмма→ Задача 463	Задача на вычисление с дополнительным построением
				Урок 2. Площадь параллелограмма→ Задача о наименьшем периметре	Экспериментальная задача
				Урок 4. Площадь ромба → Существует ли такой ромб?	Задача на построение
				Урок 4. Площадь ромба → Задача 462	Задача на вычисление с дополнительным

					построением
4	п.5 2	Площадь треугольник а.	1	Урок 3. Площадь треугольника→ Площадь треугольника (вкладки 1,2)	Иллюстрация к доказательству теоремы о площади треугольника, иллюстрация качественного утверждения 2 следствия.
				Урок 3. Площадь треугольника→ Теорем о площади треугольника	Количественная иллюстрация теоремы о площади треугольника
				Урок 3. Площадь треугольника→ Следствия из теоремы	Количественная иллюстрация следствий
				Урок 3. Площадь треугольника → Существует ли такой треугольник?-1,2	Задача на построение
				Урок 3. Площадь треугольника→ Задача 472	Задача на вычисление
				Урок 3. Площадь треугольника→ Задача 473	Экспериментальна я задача с дополнительным построением
				Урок 3. Площадь треугольника→ Задача 474	Экспериментальна я задача

5		Площадь треугольника. Решение задач.	1	Урок 3. Площадь треугольника→ Площадь треугольника (вкладка 3)	Иллюстрация к доказательству теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы
6	п.53	Площадь трапеции.	1	Урок 5. Площадь трапеции → Площадь трапеции	Пошаговое доказательство теоремы
				Урок 5. Площадь трапеции → Теорема о площади трапеции	Количественная иллюстрация теоремы
				Урок 5. Площадь трапеции → Задача о диагоналях и площади трапеции	Задача на построение
				Урок 5. Площадь трапеции → Задача о сторонах и площади трапеции	Задача на построение
7		Решение задач по теме «Площадь».	1	Урок 4. Площадь ромба → Задача 467	Экспериментальная задача
				Урок 4. Площадь ромба → Задача 468	Экспериментальная задача
8		Решение задач по теме «Площадь».	1		
9	п.54	Теорема Пифагора.	1		

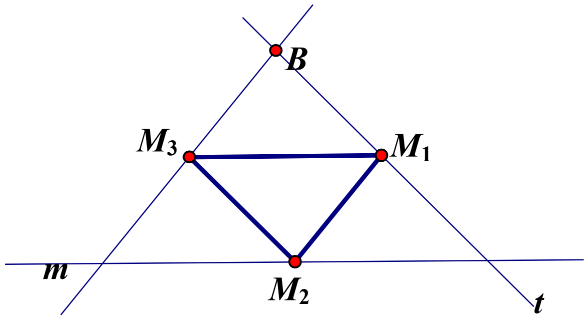
10	п.5 5	Теорема, обратная теореме Пифагора.	1		
11		Решение задач на применение теоремы Пифагора и ей обратной.	1	Урок 4. Площадь ромба → Задача 526	Задача на вычисление с дополнительным построением
12		Решение задач по теме «Площадь».	1		
13		Решение задач по теме «Площадь».	1		
14		Контрольная работа №2.	1		

§7. Реализация экспериментального подхода при обучении геометрии в 9 классе

Геометрия, в силу своей специфики, располагает широкими возможностями для организации исследовательской деятельности учащихся. При этом создание гипотезы в геометрических исследованиях основывается на интуиции обучаемых, выполнении ими опытов (экспериментов) и проведении рассуждений. Рассмотрим пример такой интуитивной работы: **исследование 6 (§13 Многоугольники)**

Задача. На доске нарисовали треугольник, отметили середины сторон, потом треугольник стерли. Как восстановить треугольник? Сколькими способами? Решите ту же задачу для четырехугольника и пятиугольника.

Решение строится на исследовании треугольника, удовлетворяющего условиям задачи (предполагаем, что задача решена). Анализ модели «решенной задачи» помогает сформировать гипотезу, проверить которую необходимо экспериментально для всех условий задачи (Рис. 12).



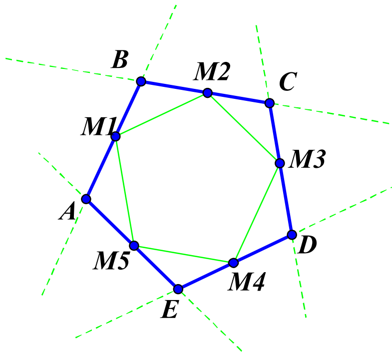


Рис. 7

Опытный учитель, задав вопрос, делает паузу и даёт детям подумать.. Традиционно, теоретический материал также является ответом на некоторый обобщённый вопрос: облегчает решение задач, упорядочивает примеры, создавая стройную картину… Полезно в той или иной форме задать этот вопрос и дать ученикам его осознать. Экспериментальная пауза позволяет ученику осознать вопрос как заданный ему, и последующее теоретическое разрешение воспринимается как ответ на его вопрос. При этом подходе легче понять, что теорию придумывают для облегчения жизни, а не для зубрёжки.

В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

§8. Элективный курс «Экспериментальная математика» для учащихся 7-9 классов, итоги апробации результатов исследования (10 стр.)

Рабочая программа элективного курса «**Экспериментальная математика**» составлена на основе :

Закона Российской Федерации «Об образовании», Федерального государственного образовательного стандарта второго поколения, составлена в соответствии с письмом «О методических рекомендациях по реализации элективных курсов предпрофильного и профильного обучения» МО и Н РФ №03/413 от 05.04.2010, приказом МО и Н РФ от 05.03.2004. № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего среднего (полного) образования».

Элективный курс «Экспериментальная математика», предназначен для учащихся 7 - 9-х класса и является формой работы по реализации модели исследовательского обучения в стиле экспериментальной математики во внеурочной деятельности. Предлагаемый курс имеет прикладное и общеобразовательное значение. Он способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, творческих способностей, интереса к предмету. Участники будут не только вычислять, преобразовывать, доказывать, но и проводить эксперименты и осваивать разные методы и средства экспериментальной работы

Программа рассчитана на 40 учебных часов (из них 34 часов — занятия по решению исследовательских задач, 6 часов — научно-популярные лекции). Занятия рекомендуется проводить 1 раз в неделю, продолжительность каждого занятия — 2 академических часа.

Проведение занятий может быть организовано в индивидуальной и фронтальной форме. Содержание индивидуальных групповых заданий предлагает выбор учащимися объектов исследования.

Основная цель – формирование представления об экспериментальной математике как о возможности привлечения учащихся к дополнительному изучению математики, к участию в математических конкурсах, развитие их творческих способностей и исследовательских умений.

.Выделяются следующие **дополнительные цели:**

- формировать устойчивый интерес к экспериментальной математике и предоставить учащимся возможность реализовать интерес к исследованиям в данной области;
- выявить и уточнить уровень готовности к освоению предмета «Математика» и развитию математических способностей через экспериментальную деятельность по предмету;
- способствовать созданию более осознанных мотивов изучения математики;
- создать условия для исследовательской деятельности по математике , осваивая экспериментальные методы;
- предоставить возможность утвердиться в желании избрать математический профиль.

Задачи:

- расширить представление об экспериментальных методах изучения математики в естественных науках, в области гуманитарной деятельности, искусстве, производстве, быту;
- формировать представление об экспериментальной математике как части науки;
- убедить в необходимости владения конкретными математическими знаниями и способами выполнения математических исследований для развития исследовательской компетенции;
- расширить сферу применения математических знаний;
- формировать навыки применения математического эксперимента для решения прикладных задач;
- развивать мышление;
- готовить к профильному обучению и выбору профильных курсов в старших классах.
- Отличительная особенность данной программы заключается в ознакомлении учащихся с возможностями систем динамической математики

для поддержки деятельности по постановке и решению задач элементарной математики, формировании их готовности к использованию программных продуктов этого класса для создания динамических моделей объектов исследования и проведения компьютерных экспериментов..

Данная программа имеет прикладное и образовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей. С целью повышения познавательной и исследовательской активности обучающихся, формирования способности самостоятельного экспериментирования, школьники имеют возможность познакомиться с научно – популярной литературой по проблеме экспериментальной математики. Подводит к выбору направлений **для дальнейшей исследовательской работы**, консультированию учащихся по вопросам определения логики исследования, оформления отчета о проведенном исследовании, презентации результатов исследования на ученических конференциях и конкурсах.

Требования к уровню подготовки учащихся:

Хотя при изучении программы не ставится цель выработки каких – либо специальных умений и навыков, при достаточно полном рассмотрении вопросов несомненно появится прогресс в подготовке учащихся.

При определении структуры и содержания программы электива а также методики проведения занятий использованы следующие **принципы:**

- Принцип **занимательности**. Он реализован при подборе задач. Каждая задача имеет название, которое призвано вызвать интерес учащихся и желание прийти на занятие.

- Принцип «**Комплексного использования возможностей игровой, исследовательской и учебной деятельности»** реализуется в методике организации работы с каждой задачей. Сначала проходит интеллектуальная разминка, где учащиеся решают задачи на проверку сообразительности экспериментальными методами. Решение задачи начинается для учащихся как игра. Это может быть игра настольная, игра на местности, или театрализация, в них разыгрывается описанная в задаче ситуация. Это позволяет учащимся лучше понять условие задачи, а также убедиться в том, что для разрешения проблемы необходимо использовать знание математики. Результатом этого этапа является постановка задачи, т.е. перевод сюжетной задачи на математический язык.

- Следующий этап «**До-компьютерное решение**» предстает перед учащимися как учебная деятельность. Они вспоминают определения математических понятий, теоремы, которые могут пригодиться в ходе решения. Пытаются свести задачу к известной. Главный результат этого этапа — это понимание того, как и для чего будет использоваться компьютерный эксперимент. Стоит ли его вообще привлекать к решению.
- Третий этап «**Компьютерное решение**» — это исследовательская деятельность учащихся методом компьютерного эксперимента. На этом этапе учащиеся сами создают динамические чертежи в «Живой математике», планируют и проводят эксперимент, делают выводы с опорой на экспериментальные данные.
- Четвертый этап «**После-компьютерное решение**» направлен на поиск способа доказательства выдвинутых гипотез, хотя бы для частных случаев. Все зависит от уровня математической подготовки учащихся, простоты обнаружения идеи доказательства.
- **Последний этап** имеет целью показать учащимся возможности дальнейшего развития идеи задачи, помочь им определиться с тематикой индивидуальных исследовательских работ.

Принципы организации учебных занятий:

Принцип «**Рационального сочетания экспериментальных и теоретических методов»**. Это очень важный принцип. Его реализация позволяет предотвратить возникновение экспериментально-теоретического разрыва. Для его реализации необходимо создать ситуацию при решении задачи, которая порождает у учащихся сомнения в правильности экспериментальных данных. Раскрытие существования аномалии является мотивом для них к поиску доказательства гипотезы. При расширении идеи задачи также необходимо побуждать учащихся использовать теоретические методы.

Принцип **«успешности всех учащихся в решении исследовательских задач»** обеспечивается многообразием видов деятельности, в которые вовлекаются учащиеся при работе с задачей. Одни ученики могут проявить себя в организации игры, другие — в переводе задачи на язык математики, третьи — в создании динамической модели или выдвижении гипотезы, четвертые в постановке новых задач и доказательстве экспериментально установленных фактов.

Принцип «**самостоятельности и завершенности исследовательского и игрового цикла на каждом занятии**» реализуется при построении учебной программы. Каждое занятие посвящено решению одной задачи. Занятия проводятся по 2 часа 1 раз в неделю.

Методы обучения:

Общепедагогические методы определяют способ организации взаимодействия преподавателя и ученика на занятии. :К ним относятся:

- Методы исследовательского обучения (проблемное изложение в ходе расширения математического кругозора учащихся, сократовская беседа для подведения учащихся к критическому переосмыслению, метод задач для направления учащихся в исследование, исследовательский метод по решению исследовательских задач);
- Методы игрового обучения (деловые, ролевые для организации взаимодействия в ходе решения Исследовательски задач).
- *Специальные методы* определяют логику содержания деятельности учителя и ученика, заимствованы в адаптированной форме из методологии экспериментальной математики: методы имитационного

моделирования для построения компьютерных динамических моделей объектов исследования, компьютерные эксперименты для выдвижения гипотез, проверки правдоподобия, контроля аналитических преобразований и вычислений, постановки новых задач на базе решенной, чтсленные, статистические методы для планирования компьютерных экспериментов.

Формы занятий:

Сочетание различных форм обучения: индивидуальная работа при оказании учащимся дозированной помощи в ходе решения исследовательских задач; групповая, коллективная и фронтальная работа в процессе обсуждения результатов решения исследовательских задач.

Средства обучения:

Задачные средства обучения: сюжетные исследовательские задачи, серии взаимосвязанных задач на построение инструментами динамической среды «Живая математика».

Материально-технические средства обучения: ПК, мульти-медиа проектор, интерактивная доска, операционная система Windows10, программа «Живая математика», браузер Firefox8, программа acrobat Reder.

Учебно-тематический план курса.

№ занятия	Тема	Содержание	Количество часов	Виды учебной деятельности	Дата проведения
1	**Введение.**	История возникновения экспериментальной математики. Применение математики в различных сферах деятельности человека.	1	Лекция, знакомство с динамической средой «ЖМ»	

2	**Постройение середины данного отрезка двумя способами – с помощью циркуля и линейки и с помощью функции «Живой математике»**	Построение с помощью циркуля и линейки	1	Исследовательская работа, работа с инструментами вычисления длины	
3		Функции геометрических построений в «Живой математике»	1	Исследовательская работа, работа с инструментами вычисления длины	
4	**Построение биссектрисы данного угла теми же двумя способами**	Построение с помощью циркуля и линейки	1	Исследовательская работа, работа с инструментами вычисления величины угла	25
5		Функции геометрических построений в «Живой математике»	1	Исследовательская работа, работа с инструментами вычисления величины угла	2.10
6	**Построение**	Построение с помощью	1	Лекция, фронтальн	

	треугольника по трём сторонам.	циркуля и линейки		ый опрос, дифференцированные задания	
7-8.	**Построение прямоугольного треугольника по двум катетам**	Функции геометрических построений в «Живой математике»	2	Работа с таблицами, практическая работа	
9-10		Построение с помощью циркуля и линейки	2	Решение задач, дифференцированные задания	
11-12	**Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе**	Построение с помощью циркуля и линейки	2	Подготовка тематического сообщения, презентации	
13-14		**Задача**: Дан четырёхугольник. Найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин четырёхугольника минимальна. А если он невыпуклый?	2	Творческая работа	
15	**Лекция «Может ли компьютер генерировать задачи?»**	Интересные факты о математике.	1	Лекция, тематические сообщения	
16	**Постройте окружность данного**	Задача: Найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний а) до двух данных точек, б)	1	Работа над математическим экспериме	

	радиуса, проходящую через две данные точки	до трёх данных точек – наименьшая. *Обобщите гипотезу на n точек.		нтом	
17-18	**Постройте треугольник а) по трём сторонам; б) по трём медианам; в*) по трём высотам; г**) по трём биссектрисам.**	Построение с помощью циркуля и линейки и функций «Живой математики»	2	Решение задач на построение	
19-20	**Решение эксперементальных задач**	Задача «Хижина Робинзонов»	2		
21-22		Задача «Неприятности котенка»	2		
23-24		Задача «Приключения Буратино»	2		
25-26	**Построение треугольника по основаниям медиан**	Построение с помощью циркуля и линейки и функций «Живой математики»	2	Исследовательские задачи	
27-	**Построение треугольника**	Построение с помощью циркуля и линейки и функций «Живой	1	Разбор творческих заданий	

	по основаниям высот	математики»			
28	**Построение треугольника по основаниям биссектрис**	Построение с помощью циркуля и линейки и функций «Живой математики»	1		
29-30	**Решение исследовательской задачи**	«Рождение сверхновой звезды»	2		
31-32		«Зеркальная комната»	2		
34-35	*** Восстановите квадрат по четырём точкам, лежащим на его сторонах**	Построение с помощью циркуля и линейки и функций «Живой математики»	2		
36-37	**лекция**	«Компьютерная помощь в решении задач»	2		
38-39	**Решение задач**	«Игра с инверсией»	2		
40	**Разбор задач**	«Пифагоровы штаны и Наполеоновская треуголка»	1		

Список учебно-методического обеспечения

Для учащихся:

1. Лысенко Ф.Ф. (ред.) Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2012-13-Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011-12.-272с.

2. Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д») / Под ред. В. Доценко. – М.: МЦНМО, 2004

3. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. – М.: МЦНМО. – 2003.

Для учителя:

1. Тарасов Л. Этот удивительно симметричный мир. – М.: Просвещение, 1982.

2. Сгибнев А.И. Как задавать вопросы? Приложение «Математика» к газете «1 сентября», N 12, 2007.

3. Сгибнев А.И. Исследуем на уроке и на проекте. / В сборнике «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2006. С. 59-71.

4. . Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. М.: Просвещение. – 1992.

5. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: МЦНМО. – 2004. [9] Шноль Э.Э. Семь лекций по вычислительной математике. – Пущино, 1992

Итоги апробации результатов использования экспериментальных приемов в преподавании геометрии

Основные положения и результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на конференциях различного уровня: на городском дне точных наук (декабрь 2016 г),);, на научно-методической конференции г. Красноярск «««Информационные технологии в математике и математическом образовании»2015,2016 г в рамках Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество:история и перспективы развития»; публикации «*Возможности систем динамической геометрии в организации и проведении учебных исследований учащимися» и «Невозможное возможно, если при обучении математике использовать системы динамической геометрии»*

Работа с учащимися: участие в турнире «Экспериментальная математика», клуб «Что, где, когда», «Эрудиты».

Заключение

Проанализировав темы курса геометрии в основной школе и существующие элективные геометрические курсы, допускающие экспериментальный подход, в том числе и с точки зрения использования при обучении геометрии «Живой математики». И изучив динамические, конструктивные, исследовательские и вычислительные возможности среды «Живая математика» как виртуальной лаборатории на предмет использования ее при экспериментальном подходе к обучению геометрии убедились, что что то обучение геометрии в 7 — 9 классах с использованием методов экспериментальной математики способствует формированию исследовательской компетенции учащихся; повышению уровня обученности по геометрии и развитию познавательного интереса к предмету.

Это объясняется тем, что включение исследовательских заданий в содержание учебного материала не приводит к увеличению учебного времени, не требует дополнительного времени, не предусмотренного программой, так как при включении исследовательских заданий сокращается число рутинных задач, а, значит, и время на их решение. Решение исследовательских заданий позволяет учащимся более глубоко усваивать основные понятия и факты школьного курса геометрии, что тоже сокращает время при изучении программного материала.

Разработана для учащихся основной школы (7-9 классы) систему заданий, реализующих линию экспериментального подхода к обучению геометрии с использованием среды «Живая математика».

Продолжение исследования мы видим в следующих направлениях: 1) разработать систему исследовательских заданий, охватывающих все основные темы курса геометрии 7-8 классов основной школы, и разработать соответствующее методическое обеспечение;

Библиографический список

1. Национальная образовательная инициатива "Наша новая школа"[электронный ресурс].URL: минобрнауки.рф/документы/1450.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего полного общего образования [Электронный ресурс]. URL: http://минобрнауки.рф/документы/2194/файл/521/12.05.03-ФГОС.pdf (дата обращения: 02.11.15).

3. «Концепция федеральной целевой программы развития образования на 2016 — 2020 годы» утверждена Распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2014 г. № 2765-р.

4. Арнольд В.И. О преподавании математики: выступление на дискуссии о преподавании математики в Palais de Découverte в Париже 7 марта 1997 [Электронный ресурс]. URL: http://ega-math.narod.ru/Arnold2.htm (дата обращения: 02.11.15).

5. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. URL: http:// минобрнауки.рф/ документы/543/ файл/227/poop_noo_reestr. doc (дата обращения: 02.11.15).

6. Буторина Т.С. М.В. Ломоносов и педагогика: монография. 2-е изд. Архангельск: Изд-во АГТУ, 2001. 223 с.

7. Вигнер Ю. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии / пер. с англ. Ю.А. Данилова М.: Мир, 1971. С. 182–199.

8. Шабанова М.В. Лабораторные работы творческого характера по теме «Интеграл и его приложения». Архангельск, 1992. 39 с.

9. *Шабанова М.В.* Методология учебного познания как цель изучения математики: Монография. Архангельск: Поморский университет, 2004. 402 с.

10. Алексеев Н.Г. Концепция развития исследовательской деятельности учащихся / Н.Г. Алексеев, А.В. Леонтович, А.С. Обухов, Л.Ф. Фомина // Исследовательская работа школьников. 2002. № 1. С. 24–33.

11. Альтшулер О.Г. Школьный эксперимент (конспекты лекций): Электронное учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / О.Г. Альтшулер, Н.И. Гордиенок. Кемерово: КемГУ, 2005. URL: http://physic.kemsu.ru/pub/library/learn_pos/ds_pos/school/index.html (дата обращения: 02.11.15).

12. Викол Б.А. Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики. Автореф. дис. . канд. пед. наук. — М., 1977. — 22 с.

13. Гарднер М. Есть идея ! — М.: Мир, 1982.

14. Арнольд В.И. Экспериментальная математика. М.: ФАЗИС, 2005. 64 с.

15. Гусев В.А. Как помочь ученику полюбить математику ? Часть 1. — М., 1994. — 168 с.

16. Иванова Н.Н. Развитие творческих способностей учащихся на основе системы факультативных курсов по геометрии (7-9 класс). Автореф. дис. . канд. пед. наук. — М., 1982. — 16 с.

17. Белозеров С.Е. Пять знаменитых задач древности (История и современная теория). Изд-во Ростовского ун-та, 1975. 320 с.

18. Клименченко Д.В. Задачи и упражнения в школьном курсе геометрии как средство активизации мыслительной деятельности учащихся. Дис. . канд. пед. наук. — Киев, 1969. — 265 с.

19. Лоповок Л.М. Факультативные задания по геометрии для 7 — 11 классов. Пособие для учителя. — Киев, 1990. — 128 с.

20. . Викол Б.А. Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики: автореф. дис. канд. пед.наук. М., 1977. 22 с.27.

21. Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Арифметика.Алгебра: пособие для учащихся 10–11 кл. / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. М.: Просвещение, 2008. 192 с.: ил.

22. . McEvoy M. Experimental mathematics, computers and the a priori Received: 25 April 2011 / Accepted: 5 October 2011 / Published online: 20 October 2011 – Springer Science + Business Media B.V. 2011

23. А.И Храповицкий (персональная страница). URL:http://janka-x.livejournal.com/

24. Бор Н. Избранные научные труды. Т. II. М.: Наука, 1971. С. 280–288.

25. McEvoy M. Experimental mathematics, computers and the a priori Received: 25 April 2011 / Accepted: 5 October 2011 / Published online: 20 October 2011 – Springer Science + Business Media B.V. 2011.

26. Лоповок Л.М. Факультативные задания по геометрии для 7 — 11 классов. Пособие для учителя. — Киев, 1990. — 128 с.

27. Голавская Н.И. Дидактические принципы конструирования исследовательского урока // Вестник Бурятского государственного университета. 2010. № 1. С. 226–228.

28. Перельман Я.И. Живая математика. — М., 1978 — 176 с.

29. Клещёва И.В. Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся при изучении математики: дисс. ... канд. пед. наук.СПб., 2003. 176 с.

30. Соловьев И.М. Задачи исследовательского метода в школе. — Тверь, 1928. — 14 с.

31. Щукина Г.И. Роль деятельности в учебном процессе. — М.: Просвещение, 1986. — 144 с.

32. И.Н. Фиряго. Невозможное возможно, если при обучении математике использовать системы динамической геометрии / И.Н. Фиряго, А.М. Погорелова // Информационные технологии в математике и

математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 18-19 ноября 2015 г.; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. С. 110-114.

33. Фиряго И.Н. Возможности систем динамической геометрии в организации и проведении учебных исследований учащимися / И.Н.Фиряго // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 16-17 ноября 2016 г.; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. С. 155-157.