МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

Н.А. Журавлева

ОСВОЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Учебное пособие

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2018

ББК 22.1
Ж 911
Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева.

Рецензенты:

В.А. Шершнева, доктор педагогических наук, профессор (СФУ)
Е.А. Попова, кандидат педагогических наук, доцент (СФУ)

Журавлева Н.А.

Ж 911 Освоение основных понятий математического анализа посредством решения задач на доказательство: учебное пособие / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Красноояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2018. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-181-0

Учебное пособие содержит теоретический материал, направленный на формирование доказательной базы студентов по темам действительные числа, числовые функции, последовательность, предел последовательности, предел функции, асимптоты, непрерывность функции, равномерная непрерывность, дифференцируемая функция и производная и их приложений.

Предназначено для студентов 2 курса, направление 44.03.05 «Педагогическое образование», Направленность (профиль) образовательной программы «Математика и информатика» по дисциплине «Математический анализ и элементы теории функций», а так же для студентов 2 курса направление 44.03.01 «Педагогическое образование», направленность (профиль) образовательной программы «Математика» заочной формы обучения по дисциплине «Математический анализ и элементы теории функций».

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-181-0

Введение

Математический анализ – это больший раздел высшей математики. Открытие математического анализа явилось важным шагом в развитии человеческого разума, так как позволило перейти от решения отдельных конкретных задач к развитию методов решения этих задач. В дальнейшем математический анализ, развиваясь, нашел многочисленные приложения в различных областях человеческого знания.

Пособие содержит пять глав. В первой вводится понятие действительных чисел и числовых функций. Действительные числа вводятся как бесконечные десятичные дроби и аксиоматически. Вводится понятие функции и различные способы задания. Понятие сложной и обратной функций, свойства функций и преобразования графиков. Во второй главе вводится понятие последовательности и предела последовательности. В третьей главе вводится понятие предела функции в точке и на бесконечности. Теория предела изучается на более общей основе, с необходимой глубиной и строгостью изложения, что позволяет рассмотреть приложение теории пределов к вычислению асимптот. В четвертой главе вводится понятие непрерывности функции в точке и на множестве, рассматриваются точки разрыва и вводится понятие равномерной непрерывности. В пятой главе центральное место занимает понятие производной и дифференцируемой функции и их приложений.

Данное пособие является продолжением «Изучение основных понятий начал анализа на основе визуализации» и направлено на формирование у студентов умений проводить доказательства. В конце каждого параграфа приведены задания на доказательства. Таким образом, изучение математического анализа происходит «по спирали».

Глава 1. Действительные числа. Функции

1.1. Действительные числа

Понятие числа является первичным и основным неопределяемым в математике. Это понятие прошло длинный путь исторического развития.

Множество натуральных чисел появилось в связи со счетом предметов.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Допустимые действия с натуральными числами:

• Операции сложения и умножения: $a + b = c$ и $a \cdot b = c$.

Операции сложения и умножения обладают свойствами:

Сочетательный закон: $(a+b)+c = a+(b+c)$ и $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Переместительный закон: $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$.

Распределительный или дистрибутивный закон: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

• Операции сравнения

Если $a > b$, то $a = b + n$.

Однако на множестве натуральных чисел уравнение $a + x = b$ не всегда разрешимо, например, $6 + x = 3$.

Возникает необходимость расширить множество натуральных чисел, ввести понятие противоположных чисел и определить множество целых чисел.

Числа n и $-n$ называются **противоположными** друг другу.

Натуральные числа, числа, им противоположные, и число нуль образуют **множество целых чисел**.

$$Z = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Для целых чисел справедливо равенство: $a+(-a)=0$.

Над целыми числами можно производить все те же операции, что и с натуральными числами.

Таким образом, на множестве целых чисел возможны следующие операции: сложение, вычитание, умножение. Однако на множестве целых чисел уравнение $a \cdot x = b$ не всегда разрешимо, например, $4 \cdot x = 1$.

Возникает необходимость расширить множество целых чисел, ввести понятие дроби и определить множество рациональных чисел.

Рациональные числа – это числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где *m* целое, а *n* натуральное.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N \right\}$$

Операции над рациональными числами:

Сложение и вычитание: $\frac{m}{n} \pm \frac{r}{s} = \frac{ms \pm rn}{ns}$.

Умножение и деление: $\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot s}$ и $\frac{m}{n} : \frac{r}{s} = \frac{m \cdot s}{n \cdot r}$ $r \neq 0$.

Отношение порядка на множестве *Q*: $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ если $\frac{m}{n} - \frac{r}{s}$ отрицательно.

Модулем рационального числа r называется $|r|$ такое, что $|r| = \begin{cases} r, \ r > 0 \\ 0, \ r = 0 \\ -r, r < 0 \end{cases}$

Рассмотрим геометрическое изображение рациональных чисел.

Назовем числовой осью прямую l, на которой выбраны две точки: начало координат O и точка E (рис. 1). Отрезок OE примем за единицу измерения длин, а направление от O к E будем считать положительным.

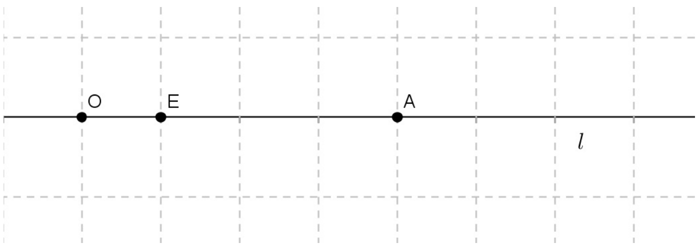


Рис. 1

Каждому рациональному числу r поставим в соответствие точку A числовой оси, такую, что:

1) Длина отрезка OA равна $|r|$.

2) Если $r > 0$, то точка A лежит справа от точки O, а если $r < 0$, то слева от точки O.

Число r называют координатой точки A и обозначают $A(r)$.

Возникает вопрос: Все ли точки прямой получили при этом координаты? То есть, если мы на прямой возьмем точку, то её координата будет рациональным числом?

Пусть ответ на эти вопросы будет положительным. Рассмотрим рациональное число *r*, соответствующее точке *M*, такое, что $r^2 = 2$ (рис. 2).

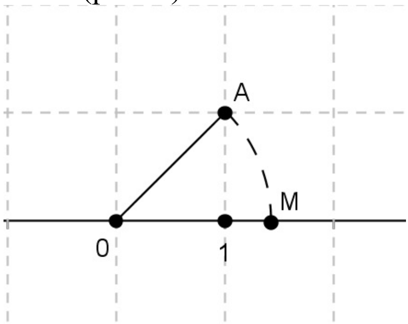


Рис. 2

Число *r* является рациональным, следовательно, его можно представать в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, которая является несократимой, причем $m \in Z, n \in N$.

Так как $r^2 = 2$, то и $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $\underline{m^2 = 2n^2}$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 нацело делится на 2, следовательно, и число *m* нацело делится на 2, и его можно представить в виде $m = 2m_1$. Подставим получившееся равенство в подчеркнутое равенство: $(2m_1)^2 = 2n^2$, $4m_1^2 = 2n^2$, $2m_1^2 = n^2$.

Из последнего равенства следует, что число n^2 нацело делится на 2, следовательно, и число *n* нацело делится на 2, и его можно представить в виде $n = 2n_1$.

Таким образом, $r = \frac{m}{n} = \frac{2m_1}{2n_1}$ – мы получили сократимую дробь, что противоречит тому, что изначально дробь $\frac{m}{n}$ мы брали несократимой. Следовательно, число r не принадлежит множеству рациональных чисел.

Мы видим, что множества рациональных чисел недостаточно, чтобы каждой точке числовой прямой поставить в соответствие её координату. Множество рациональных чисел необходимо расширить, добавив новые числа, называемые не рациональными – иррациональными.

Иррациональные числа – это числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, а множество иррациональных чисел обозначается I.

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел называют множеством действительных чисел и обозначают $R = Q \cup I$.

Рассмотрим детальнее процесс измерения отрезков:

Возьмем на числовой оси любую точку A, лежащую справа от точки O. Нанесем на ось точки с целочисленными координатами. Они разбивают ось на отрезки вида $[n; n+1], n \in Z$.

Если точка A имеет целочисленную координату N, то она принадлежит сразу двум отрезкам $[N-1; N]$ и $[N; N+1]$.

В противном случае она лежит на одном отрезке $[N; N+1]$. Разобьем отрезок $[N; N+1]$ на 10 равных частей. Точки деления имеют координаты N,1; N,2; …, N,9.

Если A совпадает с одной из этих точек N,4, то она принадлежит двум отрезкам $[N,3; N,4]$ и $[N,4; N,5]$.

В противном случае найдется только один отрезок вида $\left[N, n_1; N, n_1 + \frac{1}{10}\right]$. Например, $2{,}43 \in [2{,}4; 2{,}5]$.

Продолжим описанный процесс до бесконечности. Возможны два случая:

1) Ни на одном этапе точка A не окажется точкой деления, тогда координату точки A можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$

Точка $A \in \left[N, n_1 n_2 \dots n_k ; N, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k} \right]$(*) при всех натуральных k.

2) Точка A является одной из точек деления. Тогда ее координатой является конечная десятичная дробь $N, n_1 n_2 \dots n_m$. Эту дробь можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, приписав к ней бесконечную последовательность нулей или девяток, уменьшив последний разряд на единицу: $N, n_1 n_2 \dots n_m 000 \dots = N, n_1 n_2 \dots (n_m - 1) 999 \dots$

Например, $\frac{1}{3} = 0,(3)$. Домножим на 3 и получим, что $1 = 0,(9)$

Точка A при $k > m$ показывает на левый конец отрезка (*).

Например, число $0{,}52 \in [0{,}5; 0{,}6]$

$0{,}52 \in [0{,}51; 0{,}52]$ и $0{,}52 \in [0{,}52; 0{,}53]$

$0{,}52 \in [0{,}519; 0{,}520]$ и $0{,}52 \in [0{,}520; 0{,}521]$

$0{,}52 \in [0{,}5199; 0{,}5200]$ и $0{,}52 \in [0{,}5200; 0{,}5201]$

$0{,}52 = 0{,}52(0) = 0{,}51(9)$

Возьмем точку B, лежащую слева от точки O. Точке B ставится в соответствие число $-N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$

Точке O ставится в соответствие число $\pm 0{,}000\dots$

Определение 1.1. **Действительным числом** называют:

1) любую бесконечную десятичную дробь $\pm N, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, не оканчивающуюся ни последовательностью нулей, ни последовательностью девяток.

2) любую пару бесконечных десятичных дробей вида: $\pm N, n_1 n_2 \ldots n_m 000\ldots$ и $\pm N, n_1 n_2 \ldots (n_m - 1)999\ldots$

3) пару бесконечных десятичных дробей $+0{,}000\ldots$ и $-0{,}000\ldots$

Рациональные числа – десятичные бесконечные периодические дроби, а иррациональные – десятичные бесконечные непериодические дроби.

Десятичные приближения по избытку и недостатку

Пусть $x = N, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ координата точки A.

$$x \in [N; N+1]$$

$$x \in \left[N, n_1; N, n_1 + \frac{1}{10}\right]$$

$$x \in \left[N, n_1 n_2; N, n_1 n_2 + \frac{1}{10^2}\right]$$

$\ldots$

Числа $N; N, n_1; N, n_1 n_2, \ldots$ называют десятичными приближениями числа x по недостатку.

Числа $N+1; N, n_1 + \dfrac{1}{10}; N, n_1 n_2 + \dfrac{1}{10^2}, \ldots$ называют десятичными приближениями числа x по избытку.

Например, 6,14993…

Десятичные приближения по недостатку: 6; 6,1; 6,14; 6,149; 6,1499; 6,14993;…

Десятичные приближения по избытку: 7; 6,2; 6,15; 6,150; 6,1500; 6,14994;…

Отношение порядка во множестве действительных чисел

Действительное число x меньше действительного числа y, если точка числовой оси $A(x)$ лежит слева от точки $B(y)$ (рис. 3).

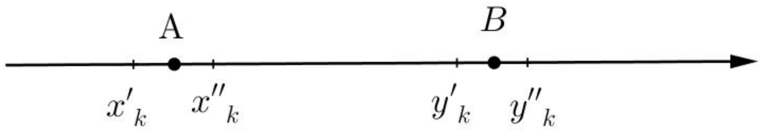


Рис. 3

Действительное число x меньше действительного числа y, если имеется такое число k, что k-тое десятичное приближение x по избытку меньше k-того десятичного приближения y по недостатку.

$$x''_k < y'_k,\ x''_k \in Q,\ y'_k \in Q$$

Правило перевода десятичной бесконечной периодической дроби в обыкновенную

Любая периодическая десятичная дробь может быть обращена в некоторую обыкновенную дробь по следующему правилу.

а) Если период начинается сразу после запятой (чистая периодическая дробь), то надо сохранить целую часть числа, а дробную часть заменить дробью, в числителе которой стоит период, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде.

б) Если после запятой перед периодом стоят некоторые цифры (смешанная периодическая дробь), то надо сохранить целую часть, а дробную часть заменить дробью, в числителе которой стоит разность между числом, идущим после запятой до второго периода, и числом, идущим после запятой до первого периода; знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде, и стольких нулей, сколько цифр после запятой до первого периода.

Задания

1. Докажите, что ниже приведенные числа иррациональны:

1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[5]{3}$; 4) $\log_3 5$; 5) $\lg 3$.

2. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(7); 2) 2,(17); 3) 1,2(4); 4) –3,37(2); 5) 0,4(23).

3. Вычислите $1{,}5(6)-1{,}4(7)$.

4. Пусть a – рациональное число, b – иррациональное. Докажите, что число $a + b$ является иррациональным.

5. Укажите два иррациональных числа, разность которых рациональна.

6. Известно, что α – иррациональное число, r – рациональное число, $r\neq 0$. Докажите, что $\frac{1}{\alpha}; \alpha \cdot r; \frac{\alpha}{r}; \frac{r}{\alpha}$ – иррациональные числа.

1.2. Числовые множества

Числовым множеством называется множество, элементами которого являются действительные числа.

Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a \le x \le b$, называется **отрезком** и обозначается $[a;b]$.

$$[a;b]=\{x : x \in R, a \le x \le b\}$$

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется **интервалом** и обозначается $(a;b)$.

$$(a;b)=\{x : x \in R, a < x < b\}$$

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a \le x < b$, называется **полуинтервалом, открытым справа,** и обозначается $[a;b)$.

$$[a;b)=\{x : x \in R, a \le x < b\}$$

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a \le x$, называется **закрытым лучом** и обозначается $[a;+\infty)$.

$$[a;+\infty)=\{x : x \in R, x \ge a\}$$

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a < x$, называется **открытым лучом** и обозначается $(a;+\infty)$.

$$(a;+\infty)=\{x : x \in R, x > a\}$$

Интервал $(a-\delta; a+\delta)$ называют δ **- окрестностью** точки *a* и обозначают $U_\delta(a)$, где *a* – центр окрестности, δ – радиус окрестности. $U_\delta(a)=\{x : |x-a| < \delta\}$.

Если из δ-окрестности $U_\delta(a)$ удалить её центр – точку *a*, то получим **проколотую** δ**-окрестность** $\overset{\circ}{U}_\delta(a)=\{x : 0 < |x-a| < \delta\}$.

Определение 1.2. Числовое множество называется **ограниченным сверху**, если существует число *b*, что для всех элементов множества *X* выполняется неравенство $x \le b$. Число *b* называют верхней границей множества *X*.

$$X \text{ – ограниченно сверху} \Leftrightarrow \exists b\ \forall x \in X\ \ x \le b$$

Определение 1.3. Числовое множество называется **ограниченным снизу**, если существует число *b*, что для всех элементов множества X выполняется неравенство $x \geq b$. Число b называют нижней границей множества X.

$$X \text{ – ограниченно снизу} \Leftrightarrow \exists b \ \forall x \in X \ \ x \geq b$$

Определение 1.4. Если множество X ограниченно сверху и снизу, то множество X **ограниченно**.

$$X \text{ – ограниченно} \Leftrightarrow \exists b > 0 \ \forall x \in X \ |x| \leq b$$

Определение 1.5. Множество X **неограниченно сверху**, если для любого числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $x > c$.

$$X \text{ – неограниченно сверху} \Leftrightarrow \forall c \ \exists x \in X \ \ x > c$$

Определение 1.6. Множество X **неограниченно снизу**, если для любого числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $x < c$.

$$X \text{ – неограниченно снизу} \Leftrightarrow \forall c \ \exists x \in X \ \ x < c$$

Определение 1.7. Множество X **неограниченно** если для любого положительного числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $|x| > c$.

$$X \text{ – неограниченно} \Leftrightarrow \forall c > 0 \ \exists x \in X \ |x| > c$$

Определение 1.8. Наименьшую из верхних границ называют **точной верхней гранью** и обозначают $\sup X$ (supremum)

Определение 1.9. Наибольшую из нижних границ называют **точной нижней гранью** и обозначают $\inf X$ (infimum)

Теорема 1.1. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

(без доказательства)

Теорема 1.2. Для того, чтобы число b было точной верхней гранью множества X, необходимо и достаточно, чтобы:

1) для всех элементов множества X выполнялось неравенство $x \le b$;

2) для любого положительного числа ε найдется такой элемент x из множества X, что $x > b - \varepsilon$.

Доказательство. $\sup X = b \Leftrightarrow$

1) $\forall x \in X \ x \le b$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > b - \varepsilon$.

(*Необходимость*).

$\sup X = b$, b – верхняя граница, тогда $\forall x \in X \ x \le b$. Пункт 1 доказан.

Доказательство пункта 2 проведем методом от противного.

Пусть $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in X : x \le b - \varepsilon$, тогда $b - \varepsilon$ – верхняя граница и $b - \varepsilon < b$, что противоречит тому, что b – наименьшая верхняя граница. Пункт 2 доказан $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > b - \varepsilon$.

(*Достаточность*).

Из пункта 1) $\forall x \in X \ x \le b$ следует, что b – верхняя граница. Докажем, что b – наименьшая верхняя граница методом от противного. Пусть существует верхняя граница $b' < b$. Обозначим $\varepsilon = b - b' > 0$. Подставим $\varepsilon = b - b'$ в пункт 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > b - \varepsilon$. $x > b - b + b'$, $x > b'$. Тогда b' не может быть верхней границей, что противоречит нашему предположению, следовательно, $\sup X = b$.

Теорема 1.2*. Для того, чтобы число c было точной нижней гранью множества X, необходимо и достаточно, чтобы:

1) для всех элементов множества X выполнялось неравенство $x \geq c$

2) для любого положительного число ε найдется такой элемент x из множества X, что $x < c + \varepsilon$.

(Доказательство аналогично)

Определение 1.10. Число a называется **наименьшим элементом множества** X, если a является элементом множества X и для всех элементов множества X выполняется неравенство $x \geq a$ и обозначается $\min X = a$.

$$\min X = a \Leftrightarrow a \in X \;\; \forall x \in X \;\; x \geq a$$

Определение 1.11. Число b называется **наибольшим элементом множества** X, если b является элементом множества X, и для всех элементов множества X выполняется неравенство $x \leq b$ и обозначается $\max X = b$.

$$\max X = b \Leftrightarrow b \in X \;\; \forall x \in X \;\; x \leq b$$

Разделяющее число двух числовых множеств

Определение 1.12. Пусть X и Y – два непустых числовых множества. Множество Y **лежит справа** от множества X, если для всех элементов x из множества X и всех элементов y из множества Y выполняется неравенство $x \leq y$.

Определение 1.13. Число C **разделяет числовые множества** X и Y, если для всех элементов множества X выполняется неравенство $x \leq C$, а для всех элементов множества Y выполняется неравенство $y \geq C$.

Теорема 1.3 (*о разделяющем числе*). Если числовое множество Y лежит справа от числового множества X, то существует хотя бы одно число C, разделяющее эти множества.

Доказательство. Любой элемент $y \in Y$ является одной из верхних границ множества X, тогда множество X

ограниченно сверху, значит, существует $\sup X$. Обозначим $\sup X = C$. Тогда $\forall x \in X \ x \le C$.

Каждый $y \in Y$ является верхней границей для X, а C – наименьшая из всех верхних границ, следовательно, $\forall y \in Y \ y \ge C$.

$\forall x \in X \ x \le C$ и $\forall y \in Y \ y \ge C$, значит, C – разделяющее число множеств X и Y.

Теорема 1.4 (*необходимое и достаточное условие единственности разделяющего числа*). Пусть числовое множество Y лежит справа от числового множества X. Для того, чтобы множества X и Y разделялись одним и только одним числом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists [x; y]: \ x \in X \ y \in Y \ \ y - x < \varepsilon$.

Доказательство. (*Достаточность*).

Дано: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists [x; y]: \ x \in X \ y \in Y \ \ y - x < \varepsilon$. Метод от противного. Пусть множества X и Y разделяются двумя числами C_1 и C_2, $C_1 < C_2$. Тогда $\forall y \in Y \ y \ge C_2$ и $\forall x \in X \ x \le C_1$.

$$\begin{array}{l} y \ \ge C_2 \\ \underline{-x \ge -C_1} \\ y - x \ge C_2 - C_1 = \varepsilon \end{array}$$

Доказали, что $\forall x \in X \ \ \forall y \in Y \ y - x \ge \varepsilon$, что противоречит условию

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists [x; y]: \ x \in X \ y \in Y \ \ y - x < \varepsilon$, следовательно, множества X и Y разделяются одним числом C.

(*Необходимость*). Множества X и Y разделяются одним числом C, тогда $\sup X = C$ и $\inf Y = C$. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$

$$\sup X = C \Rightarrow \exists x \in X : x > C - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\inf Y = C \Rightarrow \exists y \in Y : y < C + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y < C + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{-x < -C + \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$y - x < C + \frac{\varepsilon}{2} - C + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, мы доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists [x; y]: \ x \in X \ \ y \in Y \ \ y - x < \varepsilon$.

Арифметические операции над действительными числами

1. **Сложение**. Пусть $x \in R, y \in R$.

x_n' – десятичное приближение к числу x по недостатку, $x_n' \in Q$

x_n'' – десятичное приближение к числу x по избытку, $x_n'' \in Q$

y_n' – десятичное приближение к числу y по недостатку, $y_n' \in Q$

y_n'' – десятичное приближение к числу y по избытку, $y_n'' \in Q$

Рассмотрим $A = \{x'_n + y'_n\}$ – множество сумм приближений по недостатку и $B = \{x''_n + y''_n\}$ – множество сумм приближений по избытку. Так как любое приближение по избытку больше любого приближения по недостатку, то множество A лежит слева от множества B. Поэтому существует число, разделяющее эти множества.

Так как $x''_n = x'_n + \frac{1}{10^n}$, $y''_n = y'_n + \frac{1}{10^n}$, то

$(x''_n + y''_n) - (x'_n + y'_n) =$

$x'_n + \frac{1}{10^n} + y'_n + \frac{1}{10^n} - x'_n - y'_n = \frac{2}{10^n}$. При достаточно больших n эта разность становится сколь угодно малой. Значит, множества A и B разделяются только одним числом. Это число называется **суммой действительных чисел** x и y и обозначается $x + y$.

2. **Разностью чисел** x и y называют сумму числа x и числа ($-y$), противоположного y: $x - y = x + (-y)$.

3. Умножение. Пусть x и y – положительные действительные числа.

Рассмотрим $A = \{x'_n \cdot y'_n\}$ – множество произведений приближений по недостатку и $B = \{x''_n \cdot y''_n\}$ – множество произведений приближений по избытку. Множество A лежит слева от множества B. Поэтому существует число, разделяющее эти множества.

$$(x''_n \cdot y''_n) - (x'_n \cdot y'_n) = \left(x'_n + \frac{1}{10^n}\right) \cdot \left(y'_n + \frac{1}{10^n}\right) - x'_n \cdot y'_n =$$

$$x'_n \cdot y'_n + x'_n \cdot \frac{1}{10^n} + y'_n \cdot \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} - x'_n \cdot y'_n = = \frac{x'_n + y'_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$$

. При достаточно больших n эта разность становится сколь угодно малой. Значит, множества A и B разделяются только одним числом. Это число называется **произведением действительных чисел** x и y и обозначается $x \cdot y$.

Если одно из чисел x, y или оба эти числа отрицательны, то произведение определяется формулами $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -xy$, $(-x)\cdot(-y) = xy$.

4. Деление. Пусть y положительное действительное число. y'_n и y''_n – его десятичные приближения по недостатку и по избытку. Тогда множества чисел $A = \left\{\dfrac{1}{y''_n}\right\}$ и $B = \left\{\dfrac{1}{y'_n}\right\}$ разделяются одним и только одним числом, которое обозначают $\dfrac{1}{y}$. Если $y \neq 0$, то полагают, что $\dfrac{x}{y} = x \cdot \dfrac{1}{y}$.

Если одно из чисел x, y или оба эти числа отрицательны, то частное определяется формулами $\dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

Модуль действительного числа

Определение 1.14. **Модулем действительного числа** x называется само число, если x неотрицательно, и противоположное число, если x отрицательно.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля:

$|x|$ – расстояние от начала координат до точки с координатой x;

$|x-y|$ – расстояние между точками с координатами x и y.

Свойства модуля

1. $\forall x \in R \ \ |x| \geq 0$.

2. $\forall x \in R \ \ |x| = |-x|$.

3. $\forall x \in R \ \ -|x| \leq x \leq |x|$.

4. $\forall x \in R, \forall a \in R, a > 0 \ \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

5. $\forall x, y \in R \ |x+y| \leq |x| + |y|$.

6. $\forall x, z \in R \ |x+z| \geq |z| - |x|$.

7. $\forall x, y \in R \ |xy| = |x| \cdot |y|$.

8. $\forall x, y \in R, \ y \neq 0 \ \ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

9. $\forall x \in R, \forall a \in R, a > 0 \ \ |x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right.$.

10. $\forall x, y \in R \ \ |x-y| \leq |x| + |y|$.

11. $\forall x, y \in R \ \ |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Аксиоматика множества действительных чисел

Немецкий математик Давид Гильберт предложил аксиоматическое определение действительных чисел, тесно связанное с данной им же аксиоматикой евклидовой геометрии. При аксиоматическом построении теории действительных чисел они не конструируются из более простых объектов (натуральных, целых, рациональных чисел). Вместо этого указываются лишь основные отношения и операции для действительных чисел, а также аксиомы, которым эти отношения и операции должны удовлетворять.

Основные операции:

– сложение $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \exists c \in R : a + b = c$;

– умножение $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \exists d \in R : a \cdot b = d$.

Основные отношения: отношение порядка.

Аксиомы сложения:

1. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ a + b = b + a$ (коммутативность сложения)

2. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ (a + b) + c = b + (a + c)$ (ассоциативность сложения)

3. $\exists 0 : \forall a \in R\ \ a + 0 = a$ (существование нуля)

4. $\forall a \in R\ \ \exists (-a) \in R\ \ \ a + (-a) = 0$ (существование противоположного числа)

Аксиомы умножения:

5. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)

6. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ (a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c)$ (ассоциативность умножения)

7. $\exists 1 : \forall a \in R\ \ a \cdot 1 = a$ (существования единицы)

8. $\forall a \in R\ a \neq 0\ \ \exists \frac{1}{a} \in R\ \ \ a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (существования обратного числа)

Аксиома сложения и умножения:

9. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)

Аксиомы порядка:

10. Любые два числа можно сравнить $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \ \ a > b$ или $a = b$ или $a < b$ (связность отношения порядка)

11. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ \ a < b, b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность отношения порядка)

Аксиома связи сложения и порядка:

12. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ \ a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (монотонность сложения)

Аксиома связи умножения и порядка:

13. $\forall a \in R\ \ \forall b \in R\ \ \forall c \in R\ \ \ a < b,\ c > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (монотонность умножения)

Аксиома непрерывности (аксиома полноты):

14. Каковы бы не были непустые множества $A \subset R$ и $B \subset R$, такие что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$, существует такое действительное число c, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \le c \le b$.

Задания

1. Докажите свойства модуля.

1.3. Числовые функции

Определение 1.15. Если даны два множества X и Y и каждому элементу множества X поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что задано **отображение *f* множества *X* во множество *Y*.**

$$f : X \to Y \ \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \exists! y \in Y$$

Определение 1.16. Множество X является подмножеством множества действительных чисел. Отображение f, сопоставляющее каждому числу x из множества X единственное число y из множества Y, называют **числовой функцией** и обозначают $y = f(x)$. X – область определения функции f. Y – множество значений функции f.

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ X \subset R\ \ \ \forall x \in X\ \exists! y \in Y$$

Способы задания функций

1) Аналитический: функция задана с помощью формулы. Правая часть формулы – аналитическое выражение.

2) Табличный: дана таблица, сопоставляющая значения x и y.

3) Графический: графическое изображение. **Графиком функции** $y = f(x)$ называют множество точек плоскости с координатами x и $f(x)$.

4) Словесный: задание функции при помощи словесного описания закона соответствия, позволяющего по заданному x находить y.

Графиком функции $y = f(x)$, заданной на множестве X, называется множество точек плоскости с координатами x и $f(x)$. $\{(x; y) : x \in X, y = f(x)\}$

Две функции f и g называют **равными** на множестве X, если для всех элементов множества X выполняется равенство $f(x) = g(x)$.

Например, $y = \log_2 x^2$, равна $y = 2\log_2 x$ на множестве $X = (0; +\infty)$.

Сужением функции f называется функция g, если $D(g) \subset D(f)$ $\forall x \in D(g)$ $g(x) = f(x)$.

Продолжением функции g будем называть функцию f, если $D(f) \supset D(g)$ $\forall x \in D(g)$ $g(x) = f(x)$.

Классификация функций по их свойствам

1. Четные и нечетные функции

Определение 1.17. Числовое множество X называется симметричным относительно начала координат, если $\forall x \in X$ следует, что $-x \in X$.

Определение 1.18. Функция f, заданная на множестве X, называется **четной**, если:

1) X – множество, симметричное относительно начала координат.

2) Для всех элементов x из множества X выполняется условие $f(-x)=f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Определение 1.19. Функция f, заданная на множестве X, называется **нечетной**, если:

1) X – множество, симметричное относительно начала координат.

2) Для всех элементов x из множества X выполняется условие $f(-x)=-f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат O.

Теорема 1.5. Любую функцию f, заданную на симметричном относительно начала координат множестве X, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Доказательство.

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\varphi(x)+\psi(x);$$

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),$$

следовательно, φ четная.

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-\psi(x),$$ следовательно, ψ нечетная.

2. Периодические и непериодические функции

Определение 1.20. Числовое множество X называется **периодическим** с периодом l, если $\forall x\in X$ следует, что $x+l\in X$ и $x-l\in X$

Определение 1.21. Функция *f*, заданная на множестве *X*, называется **периодической с периодом *l***, если:

1) *X* – множество, периодическое с периодом *l*.

2) Для всех элементов *x* из множества *X* выполняется условие $f(x+l)=f(x)$.

Определение 1.22. **Основным периодом функции** называется наименьший положительный период.

График периодической функции имеет повторяющиеся фрагменты.

3. Монотонные и немонотонные функции

Определение 1.23. Функция *f*, заданная на множестве *X*, называется **строго возрастающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 1.24. Функция *f*, заданная на множестве *X*, называется **строго убывающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 1.25. Функция *f*, заданная на множестве *X*, называется **возрастающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

Определение 1.26. Функция *f*, заданная на множестве *X*, называется **убывающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Строго убывающие и строго возрастающие функции образуют класс **строго монотонных функций**. А убывающие и возрастающие – **монотонных**.

Функция *f* называется **кусочно-монотонной** на множестве *X*, если числовой промежуток *X* можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция монотонна.

4. Ограниченные и неограниченные функции

Определение 1.27. Функция f, заданная на множестве X, называется **ограниченной**, если ограниченно множество её значений, т.е. $\exists C > 0 \ \forall x \in X \ |f(x)| < C$.

Определение 1.28. Функция f, заданная на множестве X, называется **неограниченной**, если неограниченно множество её значений, т.е. $\forall C > 0 \ \exists x \in X \ |f(x)| \geq C$.

Пример. Функция Дирихле ограниченна.

Сложная функция

Одним из способов образования новых функций из данных является способ композиции, заключающийся в конструировании так называемых сложных функций.

Определение 1.29. Пусть функция $y = f(t)$ определена на множестве T, а множество ее значений является Y. Тогда если функция $t = g(x)$ определена на множестве X, а множеством её значений является множество $T_1 \subset T$, то говорят, что на множестве X задана **композиция функций *f* и *g*** или **сложная функция** $y = f(g(x))$.

Возможна композиция большего числа функций.

Пример. Функция $y = \cos \ln x$ получилась в результате композиции функций $y = \cos t$, отображающей $R \to [-1;1]$, и функции $t = \ln x$, отображающей $(0;+\infty) \to R$.

Обратная функция

Определение 1.30. Функция f отображает множество X во множество Y, причем разным значениям аргумента x соответствуют различные значения функции y, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \ \ f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда отображение множества Y во множество X называется **обратным** по отношению к отображению f и обозначается f^{-1}.

Определение 1.31. Множество Y является подмножеством множества действительных чисел. Отображение f^{-1}, сопоставляющее каждому числу y из множества Y единственное число x из множества X, называют **обратной функцией** и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Определение 1.32. Функция, имеющая обратную, называется **обратимой**.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема 1.6. Если функция $f : X \to Y$ строго возрастает (строго убывает), то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая строго возрастает (строго убывает).

Доказательство. 1) Докажем существование обратной функции.

Рассмотрим любые $x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$. Пусть $x_1 < x_2$ и $y = f(x)$ строго возрастает на множестве X, тогда выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, следовательно, $f(x_1) \neq f(x_2)$. По определение 1.29, функция $y = f(x)$ имеет обратную $x = f^{-1}(y)$.

2) Докажем, что $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает.

$\forall y_1, y_2 \in Y:\ y_1 < y_2$

Введем обозначения $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$, тогда $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$

Неравенство $y_1 < y_2$ можно записать в следующем виде $f(x_1) < f(x_2)$.Так как функция f строго возрастает, то $x_1 < x_2$ (иначе не получится, что $f(x_1) < f(x_2)$), а это означает, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Следовательно, функция $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает.

Случай, когда функция $x = f^{-1}(y)$ строго убывает, доказывается аналогично.

Задания

1. Каждому параллелограмму сопоставляется его площадь. Является ли это соответствие функцией? Если да, то каковы ее область определения и множество значений?

2. Каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат. Является ли это соответствие функцией? Является ли функцией соответствие, при котором каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат?

3. Является ли функцией соответствие, при котором каждому треугольнику сопоставляется центр описанной около него окружности? Если да, то каковы ее область определениея и множество значений?

4. Докажите, что:

4.1. Сумма двух четных функций – четная функция.

4.2. Произведение двух четных функций – четная функция.

4.3. Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

4.4. Если f нечетная функция, нигде не обращающаяся в нуль, то $\dfrac{1}{f}$ – нечетная функция.

4.5. Если g четная функция, то функция $y = f(g(x))$ – четная.

4.6. Если функции f и g нечетные, то функция $y = f(g(x))$ – нечетная.

4.7. Если f – четная функция, а g – нечетная функция, то $y = f(g(x))$ – четная.

5. Представьте функцию $y = 3^x$ в виде суммы четной и нечетной функций.

6. Докажите, что:

6.1. Функция, являющаяся суммой двух возрастающих функций, возрастает.

6.2. Функция, являющаяся суммой двух убывающих функций, убывает.

6.3. Если f и g возрастают и положительны на некотором промежутке, то $f \cdot g$ также возрастает и положительна на этом промежутке.

6.4. Если f возрастает, то $-f$ убывает.

6.5. Если f положительна и возрастает, то $\dfrac{1}{f}$ убывает.

6.6. Композиция двух убывающих функций есть функция возрастающая.

6.7. Композиция двух возрастающих функций есть функция возрастающая.

6.8. Если $F(t)$ возрастает на $[f(b); f(a)]$, а $t=f(x)$ убывает на $[a, b]$, то $F(f(x))$ убывает на $[a, b]$.

7. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ строго возрастает на $(-1;+\infty)$.

8. Может ли убывающая (возрастающая) на всей числовой прямой функция быть:

1) четной; 2) нечетной?

9. Может ли четная (нечетная) функция быть:

1) убывающей; 2) возрастающей?

10. При каком значении параметра k период функции $y = f\left(\dfrac{3-5k}{2} \cdot x\right) + 1$ равен 8, если период функции f равен 5.

11. Доказать, что функция $f(x)=x^2-2x+3$ необратима на множестве действительных чисел.

12. Имеет ли сужение функции $y=\operatorname{tg} x$ на множество $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ обратную функцию?

13. Докажите, что функция $f(x)=x^2-2x+3$ необратима на множестве действительных чисел. Найдите обратимую функцию g – сужение функции f.

14. Может ли четная функция иметь обратную?

15. Может ли нечетная функция иметь обратную? Всегда ли нечетная функция имеет обратную? Приведите примеры.

16. Докажите, что функция, обратная к нечетной функции, тоже нечетная.

Глава 2. Последовательность. Предел последовательности

2.1. Последовательность. Свойства последовательностей. Предел последовательности

Определение 2.1. Функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется **последовательностью** и обозначаются $\{x_n\}$.

Способы задания последовательностей: аналитический, табличный, графический, описательный, рекуррентный.

Определение 2.2. Имеем последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Тогда последовательность, полученная из данной последовательности $\{x_n\}$ путем произвольного выбора из неё бесконечного числа членов, взятых в том порядке, в каком они находились первоначально в $\{x_n\}$, называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Определение 2.3. Последовательность называется **стационарной**, если все члены последовательности постоянны.

Определение 2.4. $\{x_n\}$ **строго возрастает** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N\ x_n < x_{n+1}$.

Определение 2.5. $\{x_n\}$ **строго убывает** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N\ x_n > x_{n+1}$.

Определение 2.6. $\{x_n\}$ **возрастает** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N\ x_n \le x_{n+1}$.

Определение 2.7. $\{x_n\}$ **убывает** $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N\ x_n \ge x_{n+1}$.

Определение 2.8. $\{x_n\}$ **ограниченная сверху** $\Leftrightarrow$ $\exists M\ \forall n \in N\ x_n \le M$.

Определение 2.9. $\{x_n\}$ **ограниченная снизу** $\Leftrightarrow$ $\exists m\ \forall n \in N\ x_n \geq m$.

Определение 2.10. $\{x_n\}$ **ограниченная** $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0\ \forall n \in N\ |x_n| \leq M$.

Определение 2.11. $\{x_n\}$ **неограниченная сверху** $\Leftrightarrow$ $\forall M\ \exists n \in N\ x_n > M$.

Определение 2.12. $\{x_n\}$ **неограниченная снизу** $\Leftrightarrow$ $\forall m\ \exists n \in N\ x_n < m$.

Определение 2.13. $\{x_n\}$ **неограниченная** $\Leftrightarrow$ $\forall M > 0\ \exists n \in N\ |x_n| > M$.

Определение 2.14. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 2.15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n| < \varepsilon$.

Пример. Докажем, что последовательность $\{x_n\}: x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ бесконечно малая.

По определению $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ при } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Целая часть числа n обозначается $[n]$. Верно неравенство $[n] \leq n < [n]+1$.

Обозначим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \ \ \forall n > N \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, следовательно, последовательность $\{x_n\}: x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ бесконечно малая.

Теорема 2.1 (*о связи бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей*). Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно большая.

Доказательство. $\{x_n\}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad |x_n| < \varepsilon$, следовательно, $\left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$, тогда по определению $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно большая.

Предел последовательности

Определение 2.16. Точка a числовой прямой называется пределом последовательности, если какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Пример. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

Доказательство. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1}-1\right|<\varepsilon$.

Преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1}-1\right|=\left|\frac{n^2-n^2+1}{n^2+1}\right|=\left|\frac{-1}{n^2+1}\right|=\frac{1}{n^2+1}<\varepsilon$$

$$n^2+1>\frac{1}{\varepsilon},\ n^2>\frac{1}{\varepsilon}-1,\ n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}.$$

Номер $N=\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right]+1$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right]+1\ \forall n>N \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1}-1\right|<\varepsilon,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$.

$\varepsilon=0{,}1\ N=4$

$\varepsilon=0{,}05\ N=[\sqrt{19}]+1=5$

$\varepsilon=0{,}01\ N=[\sqrt{99}]+1=10$

Определение 2.17. Всякая последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**.

Определение 2.18. Если последовательность не является сходящейся, то ее называют **расходящейся**.

Докажем, что последовательность $\{x_n\}: x_n=(-1)^n$ расходится.

Доказательство. (Метод от противного). Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=a \iff$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N \quad \left|(-1)^n-a\right|<\varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда при четных $n = 2k$ $\left|(-1)^{2k} - a\right| = |1-a| < \frac{1}{2}$, а при нечетных $n = 2k-1$ $\left|(-1)^{2k-1} - a\right| = |-1-a| = |1+a| < \frac{1}{2}$.

$2 = 1+1 = |1+a+1-a| \le |1+a| + |1-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, то есть $2 < 1$ – противоречие. Значит последовательность $\left\{(-1)^n\right\}$ расходится.

Теорема 2.2. Предел бесконечно малой последовательности равен нулю.

Доказательство. Последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\quad |\alpha_n| < \varepsilon$, то есть $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\quad x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\quad x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Теорема. 2.3. Бесконечно большая последовательность расходится.

Доказательство. (Метод от противного). Дано, что последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда существует действительное число *a*, такое что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$, то есть $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, что противоречит $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, никакое действительное число не может быть пределом бесконечно большой последовательности.

Задания

1. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ строго возрастает.

2. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ убывает.

3. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+4}$ ограниченна.

4. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = n^{\cos \pi n}$ неограниченна.

5. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 2n$ бесконечно большая.

6. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$бесконечно малая.

6.1. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 6.2. $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1} - 2}{n}$.

7. Докажите

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \dfrac{8}{n}(-1)^n\right) = 4$; 7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n + 9(-1)^n}{n+1} = 3$.

8. Докажите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+7}{1-4n} \neq 2$.

9. В некоторой окрестности точки 3 обнаружено бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$?

10. В окрестности точки 5 обнаружено ровно 100 членов последовательности $\{x_n\}$. Может ли число 5 являются ее пределом?

11. Дана последовательность $\{x_n\}$. Известно, что для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$ существует номер N такой, что для номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$?

12. Дана последовательность $\{x_n\}$. Известно, что для любого $\varepsilon > 0{,}1$ существует N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$?

2.2. Теоремы о пределе последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 2.4 (*о сумме и разности бесконечно малых последовательностей*). Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1\ |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n > N_2\ |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ обозначим $N = \max\{N_1; N_2\}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Следствие 1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 2.5 (*о произведении ограниченной и бесконечно малой последовательностей*). Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательности является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность $\Leftrightarrow\ \exists M > 0\ \forall n \in N\ |x_n| \le M$.

$\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow$$

$\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Теорема 2.6. Любая бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Доказательство. $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n| < \varepsilon$.

Обозначим $M = \max\{\varepsilon; |\alpha_1|; |\alpha_2|; ...; |\alpha_N|;\}$

$\exists M > 0\ \forall n \in N\ |\alpha_n| \le M\ \ \Leftrightarrow\ \{\alpha_n\}$ – ограниченная последовательность.

Следствие 2. Произведение двух (любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. По теореме 2.6 $\{\alpha_n\}$ – ограниченная последовательность, тогда по теореме 2.5 $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Теорема 2.7. Если бесконечно малая последовательность является стационарной, то все её члены равны нулю.

Доказательство. (Метод от противного). Предположим, что $\forall n \in N\ \alpha_n = c \neq 0$ и $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n| < \varepsilon$

Обозначим $\varepsilon = |c|$, тогда $|\alpha_n| < |c|$, то есть $|c| < |c|$ – противоречие, следовательно, $c = 0$.

Основные теоремы о пределе последовательности

Теорема 2.8. Для того, чтобы число a являлось пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы все её члены имели вид $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. (*Необходимость*) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$. Обозначим $\alpha_n = x_n - a$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Получили, что $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая последовательность.

(*Достаточность*) $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\alpha_n| < \varepsilon$, выразим $\alpha_n = x_n - a$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема 2.9. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство. (Метод от противного). Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $a \neq b$. Тогда $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Получаем, что $a + \alpha_n = b + \beta_n$, $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ – бесконечно малая, тогда $b - a = 0$, то есть $a = b$ – противоречие с тем, что $a \neq b$.

Теорема 2.10. Если последовательность сходится, то она ограниченна.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Обозначим $M = \max\{|a-\varepsilon|; |a+\varepsilon|; |x_1|; |x_2|; \dots; |x_N|\}$.

$\exists M > 0\ \forall n \in N\ |x_n| \le M$ $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.

Обратная теорема не верна, например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограниченна и не сходится.

Теорема 2.11. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то сумма и разность этих последовательностей тоже будут сходиться $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n + \beta_n)$, где $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, тогда по теореме 2.8 $\lim_{n\to\infty} x_n \pm y_n = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 2.12. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то произведение этих последовательностей тоже будет сходиться. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$

Доказательство. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, где $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, тогда по теореме 2.8 $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 2.13. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то частное этих последовательностей тоже будет сходиться. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

Доказательство. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Leftrightarrow$

$y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} =$$

$$= (b\alpha_n - a\beta_n) \cdot \frac{1}{b(b + \beta_n)}.$$

Последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ бесконечно малая.

Докажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{b(b + \beta_n)}\right\}$ ограниченная.

$\{\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N_2\ |\beta| < \varepsilon$. Обозначим $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$, тогда $|b + \beta_n| > |b| - |\beta_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. $\left|\frac{1}{b(b + \beta_n)}\right| < \frac{1}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|} = \frac{2}{b^2}$, следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{b(b + \beta_n)}\right\}$ ограниченная.

Тогда последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ бесконечно малая, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Теорема 2.14. Если все члены сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то и число $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ удовлетворяет неравенству $a \ge b$ ($a \le b$).

Доказательство. По условию $\forall n > N^* \quad x_n \geq b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажем, что $a \geq b$ методом от противного.

Пусть $a < b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$. Обозначим $\varepsilon = b - a$ и $N_1 = \max\{N, N^*\} \quad \forall n > N_1 \ |x_n - a| < b - a$,

$a - b < \underline{x_n - a < b - a}$, получаем, что $x_n < b \quad \forall n > N_1$, что противоречит тому, что $\forall n > N^* \ x_n \geq b$.

Случай $x_n \leq b$ доказывается аналогично.

Следствие 3. Если все члены двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n$, то и пределы этих последовательностей удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. По условию $\forall n > N^* \quad y_n - x_n \geq 0$, тогда по теореме 2.14 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) \geq 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 2.15 (*о пределе промежуточной последовательности*). Если последовательность $\{z_n\}$ такая, что выполняется неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех значений *n*, начиная с некоторого номера, причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу, то последовательность $\{z_n\}$ сходится к этому же числу.

Доказательство. По условию $\forall n > N^* \quad x_n \leq z_n \leq y_n$, $x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a$, тогда $|z_n - a| \leq \max\{|x_n - a|; |y_n - a|\}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon .$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n > N_2\ |y_n - a| < \varepsilon .$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max\{N_1; N_2; N^*\}\ \forall n > N\ |z_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

Теорема 2.16 (*теорема Вейерштрасса*). Если возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ ограниченна сверху (снизу), то она сходится.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограниченна сверху, тогда существует

$$\sup_{n\in N}\{x_n\} = a \Leftrightarrow \begin{matrix} 1)\ \forall n \in N\ x_n \le a \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N : x_N > a - \varepsilon \end{matrix} .$$

Последовательность $\{x_n\}$ возрастает, следовательно, $\forall n > N \quad x_n > x_N$.

$x_n > x_N > a - \varepsilon$, тогда и $x_n > a - \varepsilon$.

Таким образом, выполняется неравенство $a - \varepsilon < x_n \le a$, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Случай, в котором последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограниченна снизу, доказывается аналогично.

Определение. 2.19. Бесконечную последовательность вложенных отрезков $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, …, $[a_n; b_n]$, … будем называть стягивающейся последовательностью вложенных отрезков, если:

1) Каждый следующий отрезок содержится в предыдущем, т.е. $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$

2) Длина n-го отрезка стремится к нулю при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (рис. 4).

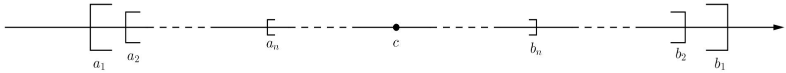


Рис. 4

Следствие 4. Для всякой стягивающейся последовательности вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}$ существует и притом единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности, т.е. $\forall n \in N \quad a_n \le c \le b_n$

Доказательство. 1. Докажем, что существует $c \in [a_n; b_n]$. $\{a_n\}$ – последовательность левых концов отрезков, и она возрастает, $\{b_n\}$ – последовательность правых концов отрезков, и она убывает. Обе последовательности ограниченны, т.к. $\{a_n\}\{b_n\} \in [a_1; b_1]$ по теореме 2.16 они сходятся. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, причем $c = \sup\{a_n\}$, $c = \sup\{b_n\}$, $a_n \le c \le b_n$

2. Докажем единственность (метод от противного). Предположим, что точка c не единственная точка, тогда существует точка $d \ne c$, $a_n \le d \le b_n$. Пусть $d > c$, тогда $[c; d] \subset [a_n; b_n]$ $\forall n \in N$.

$0 < d - c \le b_n - a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ по теореме о пределе промежуточной последовательности $d - c = 0$, $d = c$ – противоречие, следовательно, точка c единственная.

Теорема 2.17. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, то выделенная из нее любым способом подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ будет иметь предел, равный a.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$.

Член подпоследовательности x_{n_k} либо совпадает с x_k, либо правее его в последовательности $\{x_n\}$, но для $k > N$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

Теорема 2.18 (*Теорема Больцано-Вейерштрасса*). Из всякой ограниченной последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, тогда существуют числа a и b, что $\forall n \in N$ – выполняется неравенство $a \le x_n \le b$.

Разделим $[a;b]$ пополам точкой $d = \dfrac{a+b}{2}$. Тогда по крайней мере один из отрезков $[a;d]$ или $[d;b]$ будет содержать бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим этот отрезок $[a_1;b_1]$. Если оба отрезка содержат бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, тогда за $[a_1;b_1]$ обозначим любой из них.

Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам точкой $d_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, и часть, содержащую бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, обозначим $[a_2;b_2]$. Отрезок $[a_2;b_2]$ разделим пополам, и отрезок, содержащий бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, обозначим $[a_3;b_3]$ и так далее. Этот процесс деления никогда не закончится. Получаем последовательность вложенных отрезков $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$. Тогда по следствию 4, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

Возьмем какой-нибудь из членов последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в $[a_1;b_1]$, и обозначим его x_{n_1}. Затем возьмем любой член последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в $[a_2;b_2]$, и обозначим его x_{n_2} и так далее. Выделенная таким образом последовательность $\{x_{n_k}\}$ будет сходиться к числу *c*, так как $a_k\le x_{n_k}\le b_k$.

Число *e*

Лемма Бернулли. $\forall m\in\mathrm{N}\ \ \forall h\in R\ \ h>-1$ справедливо неравенство $(1+h)^m\ge 1+mh$ – неравенство Бернулли.

Доказательство. (Метод математической индукции).

1) Если $m=1$, то $1+h\ge 1+h$ – верно.

2) Предположим, что $(1+h)^m\ge 1+mh$ верно для $m=k$, то есть $(1+h)^k\ge 1+kh$. Докажем для $m=k+1$:

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k\cdot(1+h)\ge(1+kh)\cdot(1+h)=$$
$$=1+h+kh+kh^2=1+(k+1)h+kh^2,$$

$kh^2\ge 0$ поэтому $1+(k+1)h+kh^2\ge 1+(k+1)h$. Таким образом, доказали, что $(1+h)^{k+1}\ge 1+(k+1)h$.

Неравенство $(1+h)^m\ge 1+mh$ верно при всех натуральных значениях *m*.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. К последовательности $\{y_n\}$ применим неравенство Бернулли $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{1}{n}(n+1) = 1+1+\frac{1}{n} > 2$. Последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу 2.

Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ убывает.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n^{2n+2} \cdot (n-1)}{(n-1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Применим неравенство Бернулли

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1.$$

Таким образом, $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$, то есть $y_{n-1} \geq y_n$, следовательно, последовательность $\{y_n\}$ убывает.

По теореме Вейерштрасса (2.16) существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} y_n \quad -$$

этот предел обозначили буквой *e*.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, иррациональное число $e \approx 2{,}71828...$ экспонента.

Символ *e* для обозначения этого числа ввел Л. Эйлер в 1731 году. Число π тоже приобрело общеизвестность из работ Эйлера в 1736 году, хотя его ввел Джонсонс 30 годами ранее как первую букву от слова «периферия» – окружность.

Задания

1. Докажите с помощью теоремы о пределе промежуточной последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{(1-n)}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}\right)=1$.

2. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 13$, $x_{n+1} = \sqrt{12+x_n}$, $n \in \mathrm{N}$, имеет предел, и найдите его.

3. Выясните, какие из следующих утверждений истинны, а какие – нет (в случае, когда утверждение не является истинным, приведите контрпример).

3.1. Если последовательность монотонна и ограниченна, то она имеет предел;

3.2. Если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;

3.3. Ограниченность последовательности является необходимым условием ее сходимости; сходимость последовательности является достаточным условием ее ограниченности; если последовательность имеет предел, то она монотонна и ограниченна;

3.4. Если последовательность не ограниченна, то она не имеет предела;

3.5. Монотонность последовательности является необходимым условием ее сходимости;

3.6. Монотонность последовательности является достаточным условием ее сходимости;

3.7. Если последовательность не имеет предела, то она не монотонна и не ограниченна;

3.8. Если последовательность не имеет предела, то она не ограниченна;

3.9. Если последовательность не монотонна и не ограниченна, то она не имеет предела.

Глава 3. Предел функции

3.1. Предел функции в точке

Определение 3.1 (*предел функции в точке по Гейне*).
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\{x_n\}:\ \forall n\in N\ x_n\neq x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

Определение 3.2 (*предел функции в точке по Коши*).
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \ \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta\ |f(x)-A|<\varepsilon$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$$0<|x-x_0|<\delta \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}|x-x_0|<\delta\\ |x-x_0|>0\end{cases} \Leftrightarrow\ \begin{cases}-\delta<x-x_0<\delta\\ |x-x_0|\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_0-\delta<x<x_0+\delta\\ x\neq x_0\end{cases}$$

Для любой $\varepsilon-$полосы найдется $\delta-$полоса, что из условия $x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ следует $f(x)\in U_{\varepsilon}(A)$.

Теорема 3.1. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквиваленты, то есть если функция имеет предел в точке x_0 согласно одному из определений, то этот же предел функция будет иметь и по другому определению.

Доказательство.

1) Число A является пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 по Коши, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta\ |f(x)-A|<\varepsilon$. Докажем, что число A является пределом функции $y=f(x)$ в точке

x_0 по Гейне, то есть $\forall \{x_n\}$: $\forall n \in N\ x_n \neq x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Пусть произвольная последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, причем все члены последовательности $x_n \neq x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и получим $\delta > 0$ такое что $0 < |x - x_0| < \delta$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда $\delta > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - x_0| < \delta$. Так как $\forall n \in N\ x_n \neq x_0$, то $0 < |x_n - x_0| < \delta$, тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2) Число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 по Гейне, то есть $\forall \{x_n\}$: $\forall n \in N\ x_n \neq x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Докажем, что число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 по Коши. (Метод от противного). Нам нужно доказать что выполняется определение $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Запишем отрицание этого определения: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \ \exists x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| \geq \varepsilon$.

$\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in N$ $\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ следует $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$.

Из условия $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$ по теореме о пределе промежуточной последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ и $x_n\neq x_0$, тогда по определению по Гейне $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists N^*\ \forall n>N^*\quad |f(x_n)-A|<\varepsilon$, что противоречит $\forall n\in N\ |f(x_n)-A|\geq\varepsilon$.

Пример 1. Докажем, что предел функции $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x+4}$ в точке $x_0=1$ равен $\dfrac{2}{5}$, используя определение предела по Гейне.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, такую, что $\forall n\in N\ x_n\neq 1\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^2+3x_n-2}{x_n+4}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^2+3(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)-2}{(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)+4}=$$

$$=\frac{1^2+3\cdot1-2}{1+4}=\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Докажем, что предел функции $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ не существует, используя определение предела по Гейне.

$$\forall A\quad \exists\{x_n\}:\ \forall n\in N\ x_n\neq x_0\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq A.$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$: $\forall n \in N\ \dfrac{1}{\pi n} \neq 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\pi n} = 0$ и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$. Рассмотрим другую последовательность $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$: $\forall n \in N\ \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n} \neq 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0$ и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ не существует, то есть $\forall A\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$.

Пример 3. Докажем, что функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке, используя определение предела по Гейне.

Зафиксируем произвольную точку x_0 и выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$: $\forall n \in N\ x_n \neq x_0$, $x_n \in Q$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$. Если же выбрать произвольную последовательность $\{x_n\}$: $\forall n \in N\ x_n \neq x_0$, $x_n \in I$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ не существует ни в одной точке x_0.

Односторонние пределы

Определение 3.3 (*предел функции в точке слева по Гейне*) . $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\{x_n\}:\ \forall n\in N\ x_n<x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Определение 3.4 (*предел функции в точке справа по Гейне*) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\{x_n\}:\ \forall n\in N\ x_n>x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Определение 3.5 (*предел функции в точке слева по Коши*) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:-\delta<x-x_0<0\ |f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение 3.6 (*предел функции в точке справа по Коши*) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:0<x-x_0<\delta\ |f(x)-A|<\varepsilon$.

Теорема 3.2. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют пределы функции в точке слева и справа, причем они оба равны, предел функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:0<|x-x_0|<\delta\ |f(x)-A|<\varepsilon$. Двойное неравенство $0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\delta<x-x_0<0\\ 0<x-x_0<\delta\end{array}\right.$. Тогда

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:-\delta<x-x_0<0\ |f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta\ \left| f(x) - A \right| < \varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Теорема 3.2* (*эквивалентная теорема*). Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Бесконечные пределы в точке по Коши

Определение 3.7. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty\ \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta\ \left| f(x) \right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 3.8. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta\ \ f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 3.9. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\ \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta\ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Задания

1. Докажите: 1.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2$;

1.2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{7x^2 + 15x + 2}{x + 2} = -13$.

2. Докажите, что предел функции $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не существует, используя определение предела по Гейне.

3. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|\left(x^2+1\right)}{x-1}$ не существует, используя определением по Гейне.

3.2. Предел функции на бесконечности

Пусть функция $y=f(x)$ определена на луче $(b;+\infty)$.

Определение 3.10 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Определение 3.11 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists c\ \forall x>c\ |f(x)-A|<\varepsilon$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на луче $(-\infty;b)$.

Определение 3.12 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Определение 3.13 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists c\ \forall x<c\ |f(x)-A|<\varepsilon$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на луче $(-\infty;+\infty)$.

Определение 3.14 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Определение 3.15 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists c>0\ \forall|x|>c\ |f(x)-A|<\varepsilon$.

Свойства функций, имеющих предел

Теорема 3.3 (*теорема о единственности предела функции*). Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

Доказательство. (Метод от противного). Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, $A \neq B$ $\forall\{x_n\}:\ \forall n \in N\ x_n \neq x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$, тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, следовательно, последовательность имеет единственный предел – противоречие.

Теорема 3.4 (*теорема об ограниченности сходящейся функции в окрестности*). Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, в которой функция ограниченна.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon = 1$, тогда $|f(x)| - |A| < |f(x) - A| < 1$, то есть $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ |f(x)| < 1 + |A|$ – функция ограниченна.

Теорема 3.5. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определенны в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A \cdot B$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при $B \neq 0$.

Доказательство. $\forall \{x_n\} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \cdot B$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \dfrac{A}{B}$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при $B \neq 0$.

Теорема 3.6 (*о переходе к пределу в неравенствах*). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, то $A < B$.

Доказательство. $\forall \{x_n\} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. $f(x_n) < g(x_n)$, следовательно, $A < B$.

Следствие (*о сохранении знака*). Если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $A > 0$ ($A < 0$).

Теорема 3.7 (*о пределе промежуточной функции*). Если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Доказательство. $\forall\{x_n\}\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. $f(x_n)\le \varphi(x_n)\le g(x_n)$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$.

Теорема 3.8 (*о пределе сложной функции*). Пусть $y = f(t)$, $t = g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = t_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = A$ функция $y = f(g(x))$ определена $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Доказательство. $\forall\{x_n\}\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t_0$. Обозначим $g(x_n) = t_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = A$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = A$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Если в теоремах 3.3 – 3.8 заменить x_0 на ∞, то теоремы будут верны.

Замечательные пределы

Теорема 3.9. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Для всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 5).

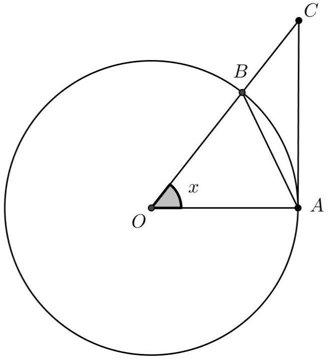


Рис. 5

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сектор}\,AOB} < S_{\Delta AOC},$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x,$$

$$\sin x < x < \mathrm{tg}\,x,$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и по теореме о пределе промежуточной функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ для $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. В неравенстве $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ все функции четные, поэтому оно будет справедливо и для $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Таким образом, доказали, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 3.10. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Доказательство. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Обозначим целую часть числа $[x]=n$, тогда выполняется неравенство:

$$n \le x < n+1,$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Вычислим пределы последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e^1$$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{n+1}{n}} = e^1,$$ следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\begin{bmatrix} x=-t \\ t\to+\infty \end{bmatrix}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(t-1)+1}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\right]^{\frac{t}{t-1}}=e,$$ то есть $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Следствие. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\begin{bmatrix} x=\dfrac{1}{t} \\ t\to\infty \end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

Задания

1. Докажите, что никакое число B не является пределом функции $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ при $x\to+\infty$.

2. Докажите: 2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2}=2$;

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+2}=2$; 2.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+36}-x\right)=0$.

3. Можно ли из данного предложения сделать вывод, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Для любого $\varepsilon > 1$ и для всех x выполняется неравенство $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$.

3.3. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших функций. Асимптоты

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Определение 3.16. Бесконечно малая α называется **бесконечно малой высшего порядка** по отношению к бесконечно малой β, если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$ и обозначается $\alpha = o(\beta)$. Бесконечно малая α называется **бесконечно малой низшего порядка** по отношению к бесконечно малой β, если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$.

Например, при $x \to \infty$ $\alpha = \dfrac{1}{x^3}$, $\beta = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$ следовательно,

$\dfrac{1}{x^3} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$.

Символ $o(\alpha)$ служит общим обозначением для бесконечно малых высшего порядка, чем α.

Определение 3.17. Две бесконечно малые α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**, если

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$. Если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми** и обозначаются $\alpha \sim \beta$

Теорема 3.11. Если имеется две пары величин α, β и α', β' бесконечно малых, причем $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, то $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Доказательство.

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \underbrace{\lim \frac{\alpha}{\alpha'}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim \frac{\beta'}{\beta}}_{\to 1} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Эта теорема означает, что при вычислении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить любой эквивалентной бесконечно малой, и от этого предел не изменится.

Эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$

Доказательство. Рассмотрим первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, следовательно, $\sin x \sim x$.

2. $\operatorname{tg} x \sim x$

Доказательство. Рассмотрим

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$, следовательно, $\operatorname{tg} x \sim x$.

3. $\arcsin x \sim x$

Доказательство. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[t=\arcsin x, x=\sin t\right]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$, следовательно, $\arcsin x\sim x$.

4. $\operatorname{arctg} x\sim x$

Доказательство. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[t=\operatorname{arctg} x, x=\operatorname{tg} t\right]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=1$, следовательно, $\operatorname{arctg} x\sim x$.

5. $(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1,$$

следовательно, $(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$.

6. $(1+x)^n-1\sim n\cdot x$

Доказательство. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{nx}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\ldots+(1+x)+1\right)}{nx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\ldots+(1+x)+1\right)}{nx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\ldots+(1+x)+1\right)}{n}.$$

Множитель $\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\ldots+(1+x)+1\right)$ содержит n слагаемых, каждое из которых стремится к единице, значит, предел равен:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\ldots+(1+x)+1\right)}{n}=\dfrac{n}{n}=1$, следовательно, $(1+x)^n-1\sim n\cdot x$

7. $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)}{\frac{x}{n}\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)}{\frac{x}{n}\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{x}{n}\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)}$. Множитель $\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)$ содержит n слагаемых, каждое из которых стремится к единице, значит, предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+1\right)}=\frac{1}{n\frac{1}{n}}=1,$$

следовательно, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

8. $\ln(1+x)\sim x$

Доказательство. С помощью второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1,$$ следовательно, $\ln(1+x)\sim x$.

9. $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{\frac{x}{\ln a}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{\frac{x}{\ln a}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$ следовательно, $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$.

10. $(a^x-1)\sim x\ln a$

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[t=a^x-1,a^x=t+1,\ln\left(a^x\right)=\ln(t+1),\right.$$

$x\ln a = \ln(t+1)\big] = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(t+1)} = 1$,следовательно, $(a^x - 1) \sim x\ln a$.

11. $(e^x - 1) \sim x$

Доказательство. Рассмотрим

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \big[t = e^x - 1, e^x = t + 1,$

$\ln(e^x) = \ln(t+1), x = \ln(t+1)\big] = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(t+1)} = 1$, следовательно, $(e^x - 1) \sim x$.

Определение 3.18. Бесконечно большая α будет **высшего порядка** по отношению к бесконечно большой β, если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$. Бесконечно большая α будет **низшего порядка** по отношению к бесконечно большой β, если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$.

Определение 3.19. Две бесконечно большие α и β называются **бесконечно большими одного порядка**, если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$. Если $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются **эквивалентными бесконечно большими** и обозначаются $\alpha \sim \beta$.

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+4}{x^3-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix} x^2+5x+4\sim x^2 \\ x^3-2\sim x^3 \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\cdot$$

Асимптоты кривой

Определение 3.20. Прямая линия называется **асимптотой** для кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь части кривой в бесконечность.

Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. В этом случае расстояние d от точки M на кривой $y=f(x)$ до прямой $x=x_0$ будет равно $|x-x_0|$. $\lim\limits_{x\to x_0} d=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, следовательно, прямая $x=x_0$ будет вертикальной асимптотой для данной кривой (рис. 6).

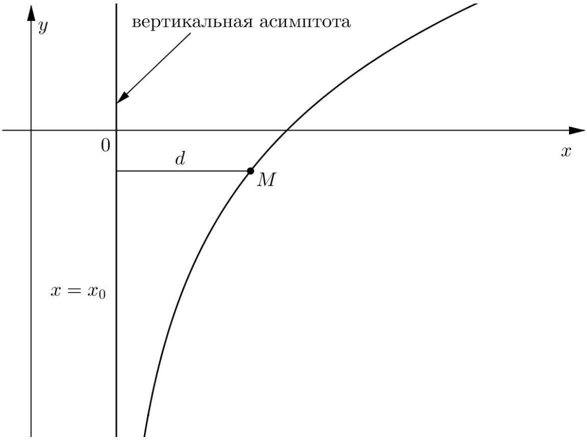


Рис. 6

Горизонтальные асимптоты. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$, то прямая $y = y_0$ будет горизонтальной асимптотой для кривой $y = f(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} d = \lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - y_0| = 0$ (рис. 7).

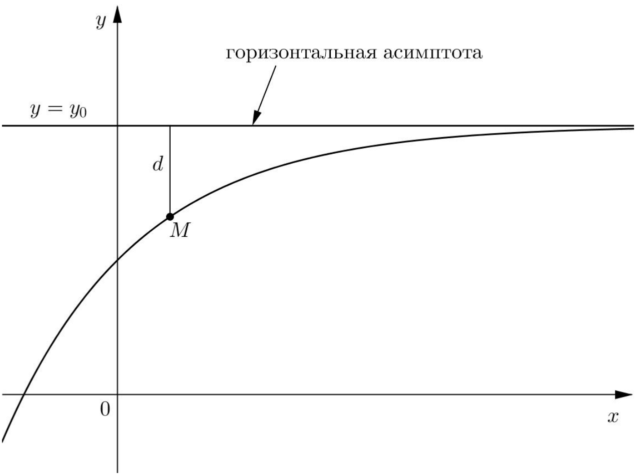


Рис. 7

Наклонные асимптоты. Пусть некоторая кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $Y = kx + b$ (рис. 8). Расстояние от точки M на прямой до прямой $d = (f(x) - Y)\sin\alpha$, где угол α постоянный. Для того, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty} d = \lim\limits_{x\to\infty} \left|(f(x) - Y)\sin\alpha\right| = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - Y) = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$.

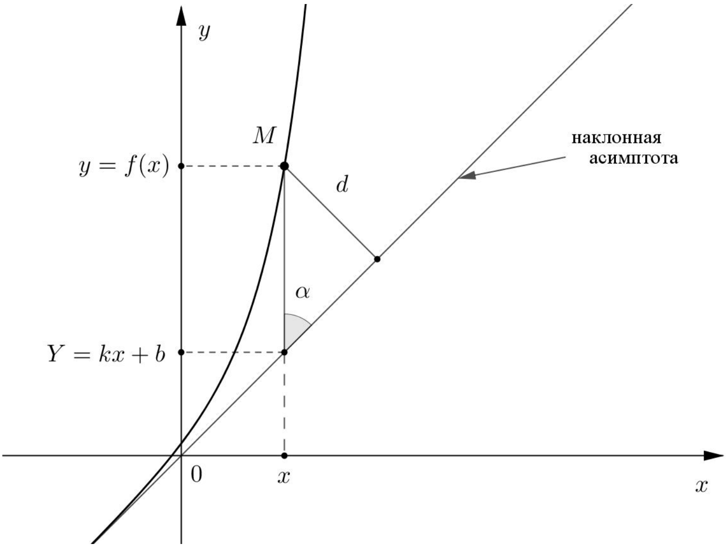


Рис. 8

Исходя из приведенного условия, найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(kx + b) = \lim_{x\to\infty}(kx) + b\text{, тогда}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty}(kx) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)\text{ и}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx + b}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = k + b\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = k.$$

Таким образом, функция $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Задания

1. Докажите, что если бесконечно малые α, β и γ удовлетворяют условию: $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$.

2. Показать, что $y = f(x)$ бесконечно малая функция при $x \to 0$, и найти функцию $y = g(x)$ вида Ax^n такую, что $f \sim g$ при $x \to 0$:

2.1. $f(x) = 2\sin^2 x^2 - 6x^6$;

2.2. $f(x) = \sqrt{9 - x^4} + x^2 - 3$;

2.3. $f(x) = 1 - x^4 - \cos x^2$;

2.4. $f(x) = 2^{\operatorname{arctg} x^3} - 1$;

2.5. $f(x) = \operatorname{tg}\left(\left(x^3 + 2\right)^4 - 16\right)$.

3. Показать, что $y = f(x)$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$, и найти функцию $y = g(x)$ вида Ax^n такую, что $f \sim g$ при $x \to x_0$:

3.1. $f(x) = \dfrac{3x^7}{2x^2 - x + 1}$, $x_0 = \infty$;

3.2. $f(x) = \sqrt{16x^8 + 7x^7 + 6x + 1}$, $x_0 = \infty$;

3.3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}}$, $x_0 = +\infty$.

4. Объясните, почему в пределе $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\operatorname{tg}x-\sin x}$ нельзя заменять слагаемые знаменателя эквивалентными бесконечно малыми.

5. Почему график ограниченной функции, заданной на ограниченном промежутке, не может иметь асимптот? Может ли иметь асимптоты и какие график ограниченной функции? Может ли иметь асимптоты и какие график функции, заданной на ограниченном промежутке?

6. Установите, сверху или снизу приближаются точки графика функции $y=f(x)$ к наклонной асимптоте при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

6.1. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; 6.2. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; 6.3. $y=\dfrac{x^3+2\sin x}{x^2+1}$.

7. Будет ли прямая $Y=ax+b$ наклонной асимптотой для кривой $y=f(x)$, если величина $y-Y\to 0$, колеблясь, то есть принимая как положительные, так и отрицательные значения? Иначе говоря, может ли кривая, приближаясь к своей асимптоте, бесконечно много раз пересекать ее?

Глава 4. Непрерывность функции

4.1. Непрерывность функции в точке

Определение 4.1. Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если предел функции в точке равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4.2 (*по Гейне*). Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если $\forall \{x_n\}: \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Определение 4.3 (*по Коши*). Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : |x - x_0| < \delta \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 4.4 (*на языке приращений*). Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, причем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 9).

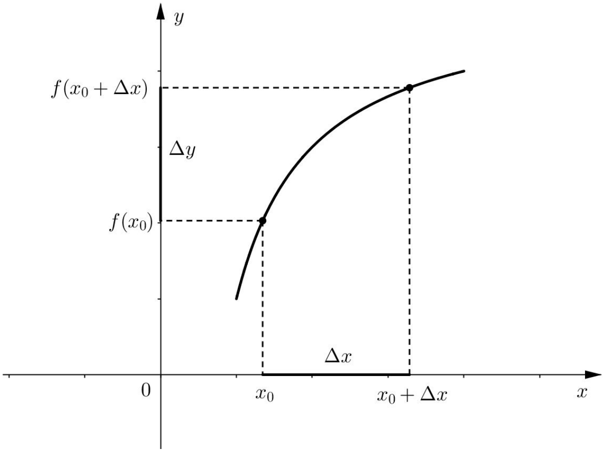


Рис. 9

Определение 4.5. Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0 справа, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Замечание. Функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если она непрерывна в ней слева и справа $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4.6. Функция $y = f(x)$ называется **разрывной** в точке x_0, если она не является непрерывной в этой точке, x_0 – **точка разрыва**.

Классификация точек разрыва

Определение 4.7. Если предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует и не равен значению функции в точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ или функция не определена в этой точке, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

Определение 4.8. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода (скачок)**. Величина скачка $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Не важно, равно или нет $f(x_0)$ одному из односторонних пределов.

Определение 4.9. Если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности или не существует, то точку x_0 называют **точкой разрыва второго рода**.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 4.1 (*об ограниченности непрерывной функции*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует такая окрестность точки x_0, в которой функция ограниченна.

Доказательство. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon > 0$, тогда $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, следовательно, $y = f(x)$ ограниченна в окрестности $U_\delta(x_0)$.

Теорема 4.2 (*о сохранении знака непрерывной функции*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то существует $U_\delta(x_0)$, что для всех *x*, входящих в $U_\delta(x_0)$, выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Доказательство. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Пусть $f(x_0) > 0$ и зафиксируем $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$, тогда

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

$$f(x_0) - \frac{1}{2} f(x_0) < f(x) < f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_0),$$

$0 < \frac{1}{2} f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$, следовательно, $f(x) > 0$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$.

Случай $f(x_0) < 0$ доказывается аналогично.

Теорема 4.3 (*о непрерывности суммы, произведения и частного*). Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$ и $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0)\neq 0$) непрерывны в точке x_0.

Доказательство. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Следовательно, функции $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$ и $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0)\neq 0$) непрерывны в точке x_0.

Теорема 4.4 (*о непрерывности сложной функции*). Если функция $t=g(x)$ непрерывна в точке x_0, функция $y=f(t)$ непрерывна в точке $t_0=g(x_0)$, то функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Функция $t=g(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=t_0$. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке t_0, тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$. Получаем, что

$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(t_0) = f(g(x_0))$, следовательно, функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Задания

1. Докажите непрерывность функции $f(x) = \dfrac{x+3}{2-3x}$ в точке $x_0 = 0{,}5$.

2. Докажите непрерывность функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ в точке $x_0 \in (-\infty; +\infty)$, используя определение непрерывности функции в точке по Гейне.

3. Докажите непрерывность функции f в точке x_0 по Коши:

3.1. $f(x) = 3x^2 - 1$ и $x_0 = 2$;

3.2. $f(x) = -5x^2 + 2$ и $x_0 = 3$.

4. Докажите непрерывность функции f в точке $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ «на языке приращений»:

4.1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$; 4.2. $f(x) = -3x^2 - 11x + 4$.

4.2. Непрерывность функций на множестве

Определение 4.10. Функция называется **непрерывной на множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 4.5 (*I теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на нем.

Доказательство. (Метод от противного). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и неограниченна на нем. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам, тогда хотя бы в одном из отрезков $\left[a; \dfrac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{a+b}{2}; b\right]$ функция $y = f(x)$

будет неограниченной. Этот отрезок обозначим $[a_1;b_1]$. Отрезок $[a_1;b_1]$ снова разделим пополам. Хотя бы на одном из двух полученных отрезков функция будет неограниченной, и его обозначим $[a_2;b_2]$. Продолжим этот процесс до бесконечности и получим последовательность вложенных отрезков $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$, на каждом из которых функция $y=f(x)$ неограниченна. Длина $[a_n;b_n]$ есть $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$. Последовательность вложенных отрезков является стягивающейся, следовательно, существует единственная точка c, что выполняется неравенство $a_n\le c\le b_n$ при всех натуральных значениях n. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она непрерывна и в точке c. Тогда по теореме 4.1 существует $U_\delta(c)$, в которой функция $y=f(x)$ ограниченна. Подберем такое значение n, что $[a_n;b_n]\subset U_\delta(c)$, следовательно, функция $y=f(x)$ ограниченна на $[a_n;b_n]$ – противоречие. Таким образом, функция $y=f(x)$ ограниченна на $[a;b]$. Теорема доказана.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограниченна на нем, значит, ограничено множество значений функции, следовательно, существуют $m=\inf E(f)$ и $M=\sup E(f)$.

Теорема 4.6 (*II теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на $[a;b]$, то она достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значения, то есть существует точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c) = m$, и существует точка $d \in [a;b]$, такая, что $f(d) = M$.

Доказательство проведем для точки $d \in [a;b]$ методом от противного.

Пусть не существует такой точки $d \in [a;b]$: $f(d) = M$, получается, что для всех значений x из $[a;b]$ $f(x) \neq M$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда она будет ограниченна на нем, то есть $\exists K > 0 \ \forall x \in [a;b] \ \varphi(x) < K$. $\dfrac{1}{M - f(x)} < K$, $M - f(x) > \dfrac{1}{K}$, $f(x) < M - \dfrac{1}{K}$. Число $M - \dfrac{1}{K}$ является верхней границей множества значений функции $E(f)$ и $M - \dfrac{1}{K} < M$, а $M = \sup E(f)$, получили противоречие. Значит, существует точка $d \in [a;b]$, такая, что $f(d) = M$.

Аналогично доказывается, что существует точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c) = m$.

Теорема 4.7 (*I теорема Больцано-Коши*) Если функция непрерывна на $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(a)>0$, $f(b)<0$ (рис. 24). Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой c_1. Если $f(c_1)=0$, то теорема доказана. Если $f(c_1)\neq 0$, то возможны два случая $f(c_1)>0$ или $f(c_1)<0$. Выберем половину отрезка, на концах которого функция $y=f(x)$ принимает значения разных знаков, и обозначим его $[a_1;b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам точкой c_2. Если $f(c_2)=0$, то теорема доказана. Если $f(c_2)\neq 0$, то выберем из двух отрезок, на концах которого функция $y=f(x)$ принимает значения разных знаков, и обозначим его $[a_2;b_2]$.

Продолжим этот процесс, и либо на каком-то шаге получим точку c_k: $f(c_k)=0$ и теорема доказана, либо не получится найти точки ни на каком из шагов и тогда продолжим этот процесс до бесконечности. В результате получится последовательность вложенных отрезков $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$. Длина $[a_n;b_n]$ есть $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$. Последовательность вложенных отрезков является стягивающейся, следовательно, существует единственная точка *c*, что выполняется неравенство $a_n\le c\le b_n$ при всех натуральных значениях *n*, причем $f(a_n)>0$, $f(b_n)<0$. Получаем, что $a<a_n<c<b_n<b$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

Функция $y=f(x)$ **непрерывна** в точке *c*, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)$. $f(a_n)>0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$, то есть $f(c) \geq 0$. $f(b_n) < 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$, то есть $f(c) \leq 0$. Тогда $f(c) = 0$.

Теорема 4.8 (*II теорема Больцано-Коши*). Если функция непрерывна на $[a;b]$, причем $f(a) \neq f(b)$, тогда для любого числа *C*, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a;b)$, в которой $f(c) = C$.

Доказательство. Пусть $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$. Функция $\varphi(x) = f(x) - C$ непрерывна на $[a;b]$

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

Тогда по I теореме Больцано-Коши точка $c \in (a;b)$, в которой $\varphi(c) = 0$, $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$.

Следствие. Если функция непрерывна на $[a;b]$ и $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, то функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ принимает все значения из $[m;M]$.

Метод интервалов. Необходимо решить неравенство $f(x) > 0$, где функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Решим уравнение $f(x) = 0$, оно имеет *n* корней $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$. Можно утверждать что внутри интервалов $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, …, $(x_n;b)$ функция $y = f(x)$ сохраняет постоянный знак. Поэтому достаточно взять на каждом из интервалов одну пробную точку и посмотреть в ней знак функции. Тот же знак будет иметь функция на всем интервале. Объединим промежутки, на которых $f(x) > 0$, и получим решение неравенства.

Теорема 4.9 (*о непрерывности обратной функции*). Если функция $y = f(x)$ монотонна и непрерывна на $[a;b]$, тогда на $[f(a);f(b)]$ определенна, монотонна и непрерывна обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Доказательство. В теореме 1.6. было доказано, что если функция $y = f(x)$ строго возрастает, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на $[f(a);f(b)]$, которая тоже строго возрастает. Докажем, что функция $x = f^{-1}(y)$ на $[f(a);f(b)]$ непрерывна. Но сначала докажем непрерывность на $(f(a);f(b))$. Для любого $y_0 \in (f(a);f(b))$ обозначим $x_0 = f^{-1}(y_0)$, тогда $y_0 = f(x_0)$.

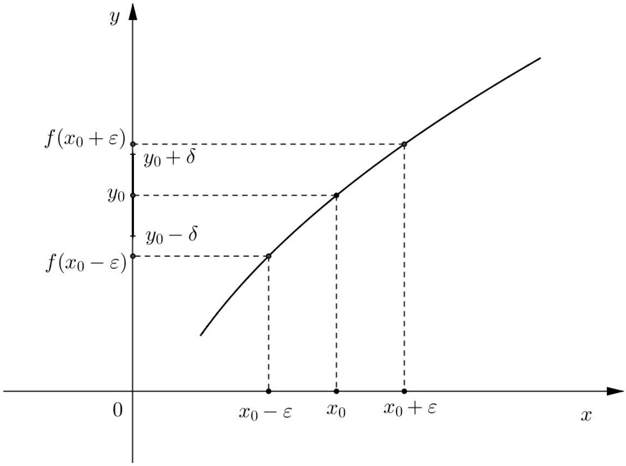


Рис. 10

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ такое, что $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset [a;b]$ (рис. 10), то есть выполняется неравенство $a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$, поскольку функция $y = f(x)$ строго возрастает, то $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, то есть $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Подберем $\delta > 0$:

$f(x_0-\varepsilon)<y_0-\delta<y_0+\delta<f(x_0+\varepsilon)$. Тогда для любого значения y, удовлетворяющего неравенству $y_0-\delta<y<y_0+\delta$, будет выполняться неравенство $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$. Так как функция $x=f^{-1}(y)$ строго возрастает, то $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$, $f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$, $\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|<\varepsilon$, тогда функция $x=f^{-1}(y)$ непрерывна на $(f(a);f(b))$.

Аналогично доказывается, что функция $x=f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $f(a)$ справа и в точке $f(b)$ слева.

Непрерывность основных элементарных функций

1. $y=C=const$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Для любого действительного числа x_0 выполняется $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

2. $y=x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Для любого действительного числа x_0 выполняется $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0)$.

3. $y=ax^n$, $n\in N$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Функция $y=ax^n=a\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ раз}}$ непрерывна как произведение непрерывных функций.

4. $y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Функция
$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ непрерывна как конечная сумма непрерывных функций.

5. $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$ непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точек, в которых знаменатель равен нулю.

Доказательство. Функция
$y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$ непрерывна как частное двух непрерывных функций.

6. $y = \sin x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Для любого действительного числа x_0 обозначим $x = x_0 + \Delta x$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) =$$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{ограниченная}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{б.м.}} = 0,$$ следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

7. $y=\cos x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Функция $y=\sin x$ непрерывна на множестве действительных чисел, а $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, следовательно, и функция $y=\cos x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

8. $y=\operatorname{tg} x$ непрерывна на множестве действительных чисел, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Доказательство. Функция $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна на множестве действительных чисел, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, как частное двух непрерывных функций.

9. $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывна на множестве действительных чисел, кроме $x=\pi n, n\in Z$.

Доказательство. Функция $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна на множестве действительных чисел, кроме $x=\pi n, n\in Z$, как частное двух непрерывных функций.

10. $y=\arcsin x$ непрерывна на $[-1;1]$.

Доказательство. Функция $y=\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ строго возрастает и непрерывна, $E(\sin x)=[-1;1]$, тогда на $[-1;1]$ существует обратная функция $y=\arcsin x$ – непрерывная и строго возрастающая.

11. $y=\arccos x$ непрерывна на $[-1;1]$.

Доказательство. Функция $y=\cos x$ на $[0;\pi]$ строго убывает и непрерывна, $E(\cos x)=[-1;1]$, тогда на $[-1;1]$ существует обратная функция $y=\arccos x$ – непрерывная и строго убывающая.

12. $y=\operatorname{arctg} x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Функция $y=\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ строго возрастает и непрерывна, $E(\operatorname{tg} x)=R$, тогда на множестве действительных чисел существует обратная функция $y=\operatorname{arctg} x$ – непрерывная и строго возрастающая.

13. $y=\operatorname{arcctg} x$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ на $(0;\pi)$ строго убывает и непрерывна, $E(\operatorname{ctg} x)=R$, тогда на множестве действительных чисел существует обратная функция $y=\operatorname{arcctg} x$ – непрерывная и строго убывающая.

14. Показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ непрерывна на множестве действительных чисел.

Доказательство. Для любого действительного числа x_0.

1) Пусть $a>1$, для любого действительного числа x_0 обозначим $x=x_0+\Delta x$, тогда $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

$\Delta y=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}\cdot a^{\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}\left(a^{\Delta x}-1\right)$. Докажем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(a^{\Delta x}-1\right)=0$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\Delta x:\Delta x<\delta\ \left|a^{\Delta x}-1\right|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<a^{\Delta x}-1<\varepsilon,$$

$1-\varepsilon < a^{\Delta x} < 1+\varepsilon$,

$\log_a(1-\varepsilon) < \log_a a^{\Delta x} < \log_a(1+\varepsilon)$,

$\log_a(1-\varepsilon) < \Delta x < \log_a(1+\varepsilon)$. Пусть $(-\delta;\delta) \subset (\log_a(1-\varepsilon); \log_a(1+\varepsilon))$, тогда для любого $x \in (-\delta;\delta)$ выполняется неравенство $\log_a(1-\varepsilon) < \Delta x < \log_a(1+\varepsilon)$, следовательно, выполняется $\left|a^{\Delta x} - 1\right| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(a^{\Delta x} - 1\right) = 0$, значит $y = a^x$, $a > 1$ непрерывна на множестве действительных чисел.

2) Пусть $0 < a < 1$, $y = a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^x}\right)}$ и $\dfrac{1}{a} > 1$, тогда функция $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ непрерывна на множестве действительных чисел, а функция $y = a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^x}\right)}$ непрерывна на множестве действительных чисел как частное непрерывных функций.

15. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$.

Доказательство. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$ по теореме о непрерывности обратной функции.

16. Степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$.

$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x} = e^t$, где $t = \alpha \ln x$.

Функция $y = e^t$ непрерывна на множестве действительных чисел, функция $t = \alpha \ln x$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$, тогда по теореме о непрерывности сложной функции функция $y = e^{\alpha \ln x}$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$, следовательно, и функция $y = x^\alpha$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$.

Таким образом, доказана непрерывность всех элементарных функций.

Все функции, полученные из элементарных путем арифметических действий и композиций, являются непрерывными на своей области определения.

Задания

1. Будет ли функция $f(x) = x^5 - 3x + 1$ в какой-либо точке отрезка $[1;2]$ принимать значение, равное нулю?

2. Для функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x - 24}$ имеем $f(5) = -\dfrac{4}{9}$; $f(7) = \dfrac{2}{5}$. Следует ли отсюда существование такого c из интервала $(5;7)$, что $f(c) = 0$?

3. Можно ли утверждать, что функция, определенная на некотором отрезке и принимающая на концах этого отрезка значения разных знаков, будет в некоторой точке отрезка принимать значение, равное нулю?

4. Может ли функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$ и принимающая значение, равное нулю, лишь в единственной точке интервала $(a;b)$, не принимать на $[a;b]$ значений разных знаков?

5. Для функции $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{если } 0\le x<2, \\ (x-4)^2+6, & \text{если } 2\le x\le 4 \end{cases}$

имеем $f(0)=-4$, $f(2)=10$, $f(4)=6$. Существуют ли значения c и d такие, что $f(c)=1$ и $f(d)=7$?

6. Можно ли утверждать, что функция, определенная во всех точках отрезка, будет ограниченна на нем?

7. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a;b]$ на всю числовую прямую?

8. Всегда ли функция, определенная во всех точках отрезка и ограниченная на нем, достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений?

9. Можно ли утверждать, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке наибольшего (наименьшего) значения лишь в единственной точке?

10. Множество значений функции f, определенной на отрезке $[a;b]$, есть отрезок. Можно ли утверждать, что функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$?

11. Докажите, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то множество ее значений на этом отрезке есть либо некоторый отрезок, либо одна единственная точка.

12. Может ли функция, непрерывная на множестве X, принимать на этом множестве только два различных значения, если

а) X – отрезок;

б) $X=[3;5]\cup[6;7]$.

13. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a;b]$ на интервал $(C;D)$?

14. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a;b]$ на множество $M=[0;1]\cup[2;3]$?

4.3. Равномерная непрерывность

Функция $y=f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x: |x-x_0|<\delta\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

В определении непрерывности по Коши, мы знаем, что δ зависит от ε. Возникает вопрос, а только ли от ε? Например, рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{x}$ на луче $(0;+\infty)$(рис. 11).

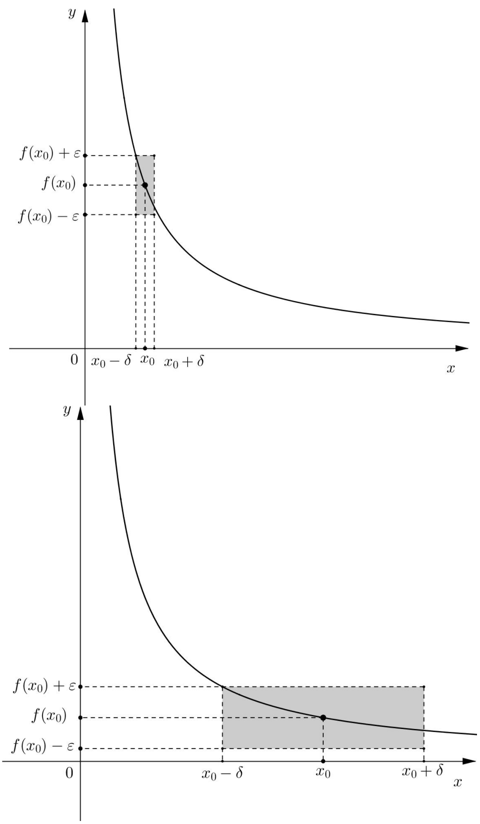


Рис. 11

Можем ли мы подобрать δ, не зависящее от x_0? Предположим, что можем. Будем рассуждать от противного и допустим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, не зависящее от x_0, что $\forall x : |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Рассмотрим произвольное $x_0 \in (0;1)$, удовлетворяющее неравенству $x_0 < \delta$, и x: $0 < x < \dfrac{1}{1 + \varepsilon x_0}$.

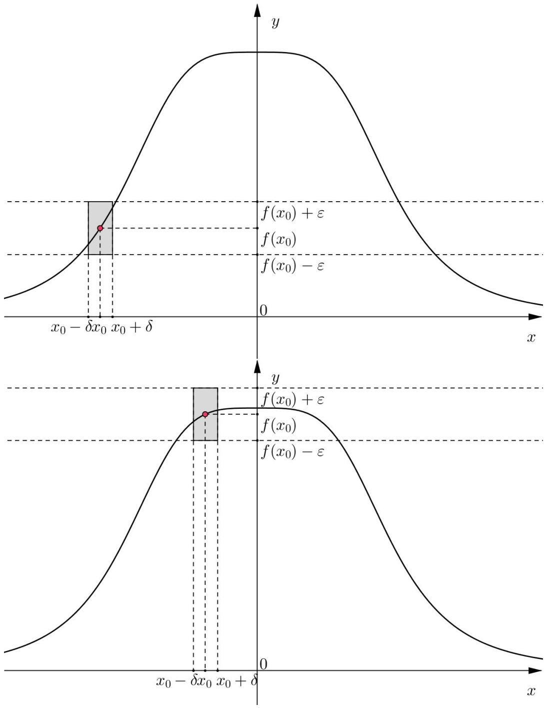
Тогда $0 < x < x_0$, следует, что $|x - x_0| < \delta$.

Получаем, что $|f(x) - f(x_0)| = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0} > \dfrac{1 + \varepsilon x_0}{x_0} - \dfrac{1}{x_0} = \varepsilon$ – противоречие, следовательно, δ зависит от ε и от x_0. Таким образом, мы не смогли подобрать δ, которое не зависит от x_0. А для других функций это возможно?

Определение 4.11. Функция $y = f(x)$ **равномерно непрерывна** на множестве X $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Равномерная непрерывность функции на множестве X означает, что в любом месте этого промежутка одна и та же степень близости значений аргумента x' и x'' обеспечивает заданную (выбором ε) близость соответствующих значений функции $f(x')$ и $f(x'')$.

Поясним равномерную непрерывность на следующей модели. Представим себе, что график заданной непрерывной функции $y = f(x)$ есть некоторая тонкая, но жесткая стальная нить. Необходимо изготовить муфту длины 2δ с цилиндрическим отверстием диаметра 2ε (рис. 12), которая могла бы свободно передвигаться вдоль этой нити, сохраняя при этом положение, при котором её ось параллельна оси Ox.



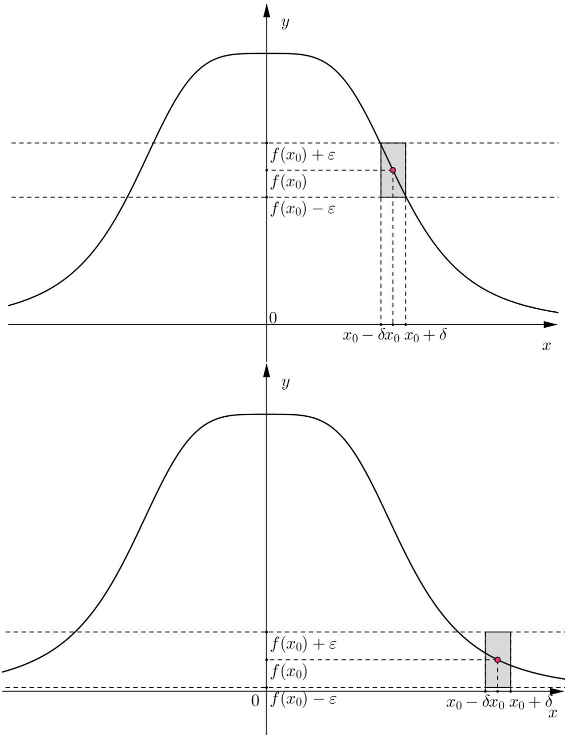


Рис. 12

Теорема 4.10 (*теорема Кантора*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. (Метод от противного). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, но не является равномерно непрерывной на этом отрезке, то есть $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x', x'' : |x' - x''| < \delta\ |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Рассмотрим $\delta = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$, тогда

$$\delta = 1 \;\; \exists x_1', x_1'' : \left| x_1' - x_1'' \right| < 1 \;\; \left| f\left(x_1' \right) - f\left(x_1'' \right) \right| \ge \varepsilon ,$$

$$\delta = \frac{1}{2} \;\; \exists x_2', x_2'' : \left| x_2' - x_2'' \right| < \frac{1}{2} \;\; \left| f\left(x_2' \right) - f\left(x_2'' \right) \right| \ge \varepsilon ,$$

$$\delta = \frac{1}{3} \;\; \exists x_3', x_3'' : \left| x_3' - x_3'' \right| < \frac{1}{3} \;\; \left| f\left(x_3' \right) - f\left(x_3'' \right) \right| \ge \varepsilon ,$$

……………………………………………,

$$\delta = \frac{1}{n} \;\; \exists x_n', x_n'' : \left| x_n' - x_n'' \right| < \frac{1}{n} \;\; \left| f\left(x_n' \right) - f\left(x_n'' \right) \right| \ge \varepsilon ,$$

…………………………………………………

Таким образом, из $[a;b]$ выделим две ограниченные последовательности: $x_1';x_2';...;x_n';...$ и $x_1'';x_2'';...;x_n'';...$. По теореме Больцано-Коши выделим сходящуюся подпоследовательность $\left\{ x_{n_k}' \right\} \to x_0$. Докажем, что подпоследовательность $\left\{ x_{n_k}'' \right\} \to x_0$

$$\left| x_{n_k}'' - x_0 \right| = \left| x_{n_k}'' - x_{n_k}' + x_{n_k}' - x_0 \right| \le$$

$$\le \left| x_{n_k}'' - x_{n_k}' \right| + \left| x_{n_k}' - x_0 \right| < \frac{1}{n} + \left| x_{n_k}' - x_0 \right| .$$

Если $\left\{ x_{n_k}' \right\} \to x_0$, то $\left\{ x_{n_k}'' \right\} \to x_0$.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна, то $f\left(x_{n_k}' \right) \to f(x_0)$ и $f\left(x_{n_k}'' \right) \to f(x_0)$ и $\left| f\left(x_{n_k}' \right) - f\left(x_{n_k}'' \right) \right| \to 0$, а это противоречит, тому что $\left| f\left(x_n' \right) - f\left(x_n'' \right) \right| \ge \varepsilon$.

Глава 5. Дифференциальное исчисление

5.1. Понятие производной и дифференцируемой функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на $(a;b)$. Зафиксируем произвольную точку x из $(a;b)$. Δx – произвольное число, настолько малое, что $x + \Delta x \in (a;b)$, причем $\Delta x \neq 0$.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x, отвечающим приращению аргумента Δx, будем называть число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 5.1. **Производной** функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции к приращению аргумента. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Определение 5.2. **Правой производной** функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0+0$, т.е. $\Delta x > 0$ и $\Delta x \to 0$. $f'(x+0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Левой производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0-0$, т.е. $\Delta x < 0$ и $\Delta x \to 0$). $f'(x-0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то эта функция в точке x имеет как правую, так и левую производную, причем $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$. Если же $f'(x+0)\neq f'(x-0)$, то $f'(x)$ не существует.

Определение 5.3. Функция $y=f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке *x*, если приращение функции Δy этой функции в точке *x* может быть представлено в виде $\Delta y = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где A – некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция аргумента Δx при $\Delta x\to 0$.

Теорема 5.1 (*о связи между дифференцируемостью функции и существованием у этой функции производной*). Для того, чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируема в точке *x*, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную.

Доказательство. (*Необходимость*). Функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке *x*, тогда $\Delta y = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\alpha(\Delta x)\right)=A$, следовательно, $f'(x)=A$.

(*Достаточность*). Функция $y=f(x)$ в точке *x* имеет конечную производную, тогда $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Рассмотрим $\alpha(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0,$$ следовательно,

$\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ бесконечно малая.

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(x) \cdot \Delta x, \quad \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x.

Доказанная теорема позволяет нам в дальнейшем отождествлять понятие дифференцируемости функции в данной точке с понятием существования конечной производной в функции в данной точке.

Операцию нахождения производной будем называть дифференцированием.

Определение 5.4. Пусть функция $y = f(x)$, определенная на $(a;b)$, имеет конечную производную в каждой точке $x \in (a;b)$, тогда на $(a;b)$ определена **производная функция** $y = f'(x)$.

Теорема 5.2 (*о связи дифференцируемой и непрерывной функций*). Если функция f дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Функция f дифференцируема в точке x, тогда $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0$, следовательно, функция f непрерывна в точке x.

Обратная теорема не верна. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема.

$$f'(0-0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

$$f'(0+0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$f'(0-0)\neq f'(0+0)$, следовательно, $f'(0)$ не существует.

А $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(|0+\Delta x|-0)=0$, тогда функция $y=|x|$ в точке $x=0$ непрерывна и не дифференцируема.

Рассмотрим функцию f, дифференцируемую в точке x.

$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. $A=f'(x)$.

$A\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\Delta x$ – главная часть приращения Δy.

$\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx.

Определение 5.5. **Дифференциалом функции** f в точке x называется главная часть приращения Δy и обозначается $df=f'(x)\cdot\Delta x$

Геометрический смысл производной и дифференциала

Рассмотрим график функции $y=f(x)$, определенной и непрерывной на $(a;b)$. Зафиксируем произвольную точку $x\in(a;b)$, придадим ей приращение $\Delta x\neq 0$, такое, чтобы $x+\Delta x\in(a;b)$. На рис. 13 точка $M(x;f(x))$, $P(x+\Delta x;f(x+\Delta x))$ фиксированная, прямая MP – секущая.

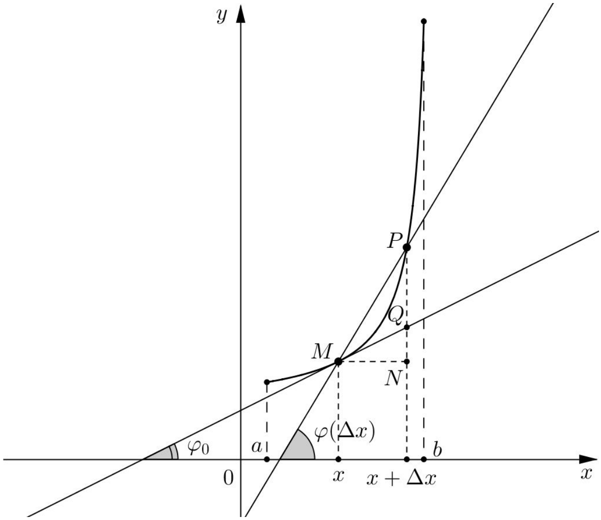


Рис. 13

Определение 5.6. Если существует предельное положение секущей *MP* при стремлении точки *P* графика функции к точке *M* ($\Delta x \to 0$), то это предельное положение называется **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке *M*.

Из этого определения следует, что для существования касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке *M* достаточно существование $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$.

Геометрический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ имеет в данной фиксированной точке *x* производную, то существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; f(x))$, причем угловой коэффициент этой касательной (то есть тангенс угла наклона ее к положительному направлению оси абсцисс) равен производной $f'(x)$.

Доказательство. В треугольнике ΔMNP $\angle N = 90°$, $\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как существует производная $f'(x)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, функция $u = \operatorname{arctg} t$ непрерывна на множестве действительных чисел, тогда существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x)$. Это и означает, что существует предельное положение секущей, то есть существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; f(x))$, причем угол наклона φ_0 касательной к положительному направлению оси абсцисс равен $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x)$, $k = f'(x)$.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

$dy = f'(x)\Delta x$, $f'(x) = \dfrac{dy}{\Delta x}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{dy}{\Delta x}$ в треугольнике ΔMNQ ($\angle N = 90°$) $dy = QN$.

Уравнение касательной и нормали

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной,

$y = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение нормали.

Правила дифференцирования

Теорема 5.3 (*о дифференцировании суммы, произведения и частного функций*). Пусть функции $y = u(x)$ и

$y = v(x)$ дифференцируемы в точке *x*, тогда сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что значение $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причем: $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство.

1) $y = u \pm v$, $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - (u(x) \pm v(x)) =$$
$$= u(x+\Delta x) - u(x) \pm (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u \pm \Delta v.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

2) $y = u \cdot v$, $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - (u(x)\cdot v(x)) =$$
$$= (u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\cdot v(x)) +$$
$$+ (u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)) =$$
$$= u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x+\Delta x) - u(x)) =$$
$$= u(x+\Delta x)\Delta v + v(x)\Delta u.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u\cdot v' + v\cdot u'.$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

3) $y = \dfrac{u}{v}$, $v(x) \neq 0$, $v(x+\Delta x) \neq 0$ $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)\big) + \big(u(x)\cdot v(x) - u(x)v(x+\Delta x)\big)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x)\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big) - u(x)\big(v(x+\Delta x) - v(x)\big)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Теорема 5.4 (*о дифференцировании сложной функции*). Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \varphi(t)$, тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t, причем $\big(f(\varphi(t))\big)' = f'(x)\cdot\varphi'(t) = f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Доказательство.

$\Delta t \neq 0$, $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$y = f(x)$ дифференцируема, тогда $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке *t*, то $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$

$x = \varphi(t)$ непрерывна в точке *t*, то $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$ и $\lim\limits_{\Delta ч \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x) \cdot \varphi'(t)$$

$$(f(\varphi(t)))' = f'(x) \cdot \varphi'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Теорема 5.5 (*о дифференцировании обратной функции*). Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Пусть *f* дифференцируема в точке *x* и ее производная равна $f'(x) \neq 0$, тогда в некоторой окрестности точки $y = f(x)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, дифференцируемая в точке *y* и $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$.

Доказательство. Функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна, тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго монотонная и непрерывная.

Пусть $\Delta y \neq 0$, составим приращение обратной функции $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. $\Delta x \neq 0$ из-за строгой монотонности обратной функции.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

При стремлении $\Delta y\to 0$ в связи с непрерывностью обратной функции $\Delta x\to 0$.

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y),$$

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-x,$$

$$x+\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y),$$

$$f(x+\Delta x)=y+\Delta y,$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y,$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}$$

Производные элементарных функций

1. $C'=0$

Доказательство. $y=C$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(C\cdot u)'=C\cdot u'$.

Доказательство.

$$(C\cdot u)'=C'\cdot u+C\cdot u'=0\cdot u+C\cdot u'=C\cdot u'.$$

2. $(\sin x)'=\cos x$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $y = \sin x$,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)}_{\to 1}\cos\left(x + \underbrace{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\to 0}\right) = \cos x.$$

3. $(\cos x)' = -\sin x$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$$y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ для любого действительного числа $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Доказательство.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ для любого действительного числа $x \neq \pi n, n \in Z$.

Доказательство.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ для любого действительного числа $x > 0$.

Доказательство. $y = \log_a x$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Зафиксируем произвольную точку x и придадим ей произвольное приращение $\Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{x} \cdot \log_a \underbrace{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}_{\to e} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ для любого действительного числа $x > 0$.

Доказательство. $(\ln x)' = (\log_e x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

8. $(a^x)' = a^x \ln a$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ является обратной к функции $x = \log_a y$.

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a .$$

9. $(e^x)' = e^x$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ для любого действительного числа $x \in (-1;1)$.

Доказательство. $y = \arcsin x$ является обратной к функции $x = \sin y$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

11. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ для любого действительного числа $x \in (-1;1)$.

Доказательство. $y = \arccos x$ является обратной к функции $x = \cos y$.

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ для любого действительного числа x.

Доказательство. $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной к функции $x = \operatorname{ctg} y$.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

14. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$ для любого действительного числа $x > 0$.

Доказательство. $y = x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}$.

$$(x^\alpha)' = \left(a^{\alpha \log_a x}\right)' = a^{\alpha \log_a x} \ln a \cdot (\alpha \log_a x)' =$$

$$= a^{\log_a x^\alpha} \ln a \cdot \alpha \frac{1}{x \ln a} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию, то есть операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций.

Инвариантность формы дифференциала

Задана функция $y = f(x)$, если x независимая переменная, $dy = f'(x)dx$.

Рассмотрим случай, когда аргумент x является дифференцируемой функцией $x = \varphi(t)$. Мы получили сложную функцию $y = f(\varphi(t))$. Вычислим ее дифференциал: $dy = \left(f(\varphi(t))\right)' dt = f'\underbrace{(\varphi(t))}_{x} \cdot \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx} = f'(x)dx$.

Таким образом, дифференциал имеет один и тот же вид для независимой переменной x и для дифференцируемой функции $x = \varphi(t)$. Это свойство принято называть инвариантностью формы дифференциала.

Замечание. Производную функции f обозначают $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

Применение дифференциала для приближенных вычислений

$dy = f'(x_0)dx$, т.к. $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Из условий $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ и $dy = A \cdot \Delta x$ следует, что $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на бесконечно малую функцию, следовательно, $\Delta y \approx dy$. Значит, $y - y_0 \approx f'(x_0)\Delta x$, $y \approx f'(x_0)\Delta x + y_0$.

Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно-степенной функции

Пусть дана функция $y = f(x)$ положительная и дифференцируемая в точке x.

$$(\ln y)' = \ln' y \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Величину $(\ln y)'$ принято называть логарифмической производной функции $y = f(x)$ в точке x.

Вычислим производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемые, причем $y = u(x) > 0$.

$$(\ln y)' = \left(\ln u(x)^{v(x)}\right)' = \left(v(x) \cdot \ln u(x)\right)' =$$

$$= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x)$$

$$\left(u^v\right)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Дифференцирование функции, заданной параметрически

До сих пор мы рассматривали уравнения линий на плоскости, связывающие непосредственно координаты x и y. Однако часто применяется другой способ задания линии, в котором координаты x и y рассматриваются как функции новой переменной t.

Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ называют параметрическими уравнениями, а переменная t – параметром.

Функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ имеют производные по параметру *t*, а функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную. Производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле $y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Физический смысл производной

Физический смысл производной: если материальна точка движется прямолинейно и неравномерно по закону $x=x(t)$, где x – расстояние, t – время, то мгновенная скорость есть производная пути по времени $v(t)=x'(t)$, а ускорение в данный момент времени как производная от скорости $a(t)=v'(t)$.

Производные и дифференциалы высших степеней

Производная $y=f'(x)$ функции $y=f(x)$, определенной и дифференцируемой на $(a;b)$, представляет собой функцию, определенную на $(a;b)$. Если функция $y=f'(x)$ дифференцируема, то можно вычислить ее производную $y=f''(x)$ – ее называют производной второго порядка. Также вводится понятие производной третьего порядка и т.д. Если предположить, что нами введено понятие (n-1) производной и что она дифференцируема, то, вычислив от нее производную, получим производную n-го порядка, обозначаемую $y=f^{(n)}(x)$.

Таким образом, понятие n-ой производной вводится индуктивно, переходя от первой производной к последующим $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Функцию, имеющую на множестве X конечную производную n-го порядка, называют n раз дифференцируемой на этом множестве.

Дифференциалы высших порядков

Если x независимая переменная, то $dy = f'(x)dx$

$d^2y = f''(x)dx^2$, …, $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Если же $x = \varphi(t)$, то $dy = f'(x)dx$. А

$d^2y = f''(x)dx + f'(x)d^2x$.

Второй и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантной формы.

Производные высших степеней функции, заданной параметрически

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{\varphi'_t}.$$

Задания

1. Накладываются ли при определении производной функции в точке x_0 какие-либо ограничения на Δx из числа нижеприводимых:

а) $\Delta x > 0$; б) $\Delta x \geq 0$; в) $\Delta x < 0$; г) $\Delta x \leq 0$; д) $\Delta x \neq 0$;

е) $x_0 + \Delta x \in D(f)$;

ж) f непрерывна на $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$.

2. Найдите производную функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ в точке $x_0 = 1$ по определению.

3. Докажите, что функция f имеет производную в точке $x_0 = 0$.

3.1. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{если } x < 0, \\ x^2, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$; 3.2. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in Q, \\ x^2, \text{если } x \in I \end{cases}$.

4. Докажите, что ни одна из функций f не имеет производной в указанной точке. Что можно сказать о непрерывности этих функций в указанных точках?

4.1. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \le 0, \\ 2x+1, \text{если } x>0; \end{cases}$ $x_0=0$;

4.2. $f(x)=|x-1|$; $x_0=1$.

5. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ дифференцируема в точках $x_0=1$ и $x_0=2$. Найдите дифференциал в этих точках.

6. Покажите, что функция f не дифференцируема в указанных точках:

6.1. $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$;

6.2. $f(x)=\begin{cases} x\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \text{если } x\ne 0, \\ 0, \text{если } x=0; \end{cases}$ $x_0=0$.

7. $f(x)=\begin{cases} x^3, \text{если } x \le x_0, \\ ax+b, \text{если } x>x_0. \end{cases}$ Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция f была непрерывна и дифференцируема в точке x_0?

8. Определите, какого порядка производными обладает в точке $x=0$ функция $f(x)=\begin{cases} 2x\cdot\cos x, \text{если } x<0; \\ \sin 2x, \quad \text{если } x\ge 0 \end{cases}$ и вычислите производные в точке $x=0$.

5.2. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Определение 5.7. Функция $y = f(x)$ строго возрастает в точке *c*, если существует окрестность точки *c* $U_\delta(c)$, что для всех $x \in U_\delta(c)$: при $x < c$ $f(x) < f(c)$, при $x > c$ $f(x) > f(c)$.

Определение 5.8. Функция $y = f(x)$ строго убывает в точке *c*, если существует окрестность точки *c* $U_\delta(c)$, что для всех $x \in U_\delta(c)$: при $x < c$ $f(x) > f(c)$, при $x > c$ $f(x) < f(c)$.

Определение 5.9. Функция $y = f(x)$ имеет в точке *c* максимум, если существует $U_\delta(c)$ и для всех $x \in U_\delta(c)$ $f(x) < f(c)$. Функция $y = f(x)$ имеет в точке *c* минимум, если существует $U_\delta(c)$ и для всех $x \in U_\delta(c)$ $f(x) > f(c)$.

Определение 5.10. Функция $y = f(x)$ имеет в точке *c* **экстремум**, если эта функция имеет в точке *c* либо максимум, либо минимум.

Теорема 5.6 (*достаточное условие строгого возрастания функции в точке*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке *c* и $f'(c) > 0$, то функция строго возрастает в точке *c*. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке *c* и $f'(c) < 0$, то функция строго убывает в точке *c*.

Доказательство. Пусть $f'(c) > 0$. По определению производной функции в точке *c*: $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Запишем определение предела функции в точке по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x : 0 < |x - c| < \delta \quad \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = f'(c)$, тогда $\left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < f'(c)$,

$$-f'(c) < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) < f'(c),$$

$0 < \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 2f'(c)$ выполняется $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(c)$.

Таким образом, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(c)$.

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(c)$ при $x < c$ $f(x) < f(c)$, при $x > c$ $f(x) > f(c)$, следовательно, функция $y = f(x)$ строго возрастает в точке *c*.

Случай с $f'(c) < 0$ доказывается аналогично.

Замечание. $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$ не являются необходимым условием возрастания (убывания) функции. Например, $y = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, но $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Теорема 5.7 (*необходимое условие экстремума дифференцируемой в данной точке функции*). Если функция дифференцируема в точке *c* и имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Если функция дифференцируема в точке *c*, то существует $f'(c)$. В точке *c* функция имеет экстремум, значит, функция не возрастает, не убывает, то есть не выполняются условия $f'(c) > 0$ и $f'(c) < 0$, следовательно, $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл. Если в точке кривой $y = f(x)$, в которой функция имеет экстремум, и существует касательная к этой кривой, то эта касательная параллельна оси абсцисс (рис. 14).

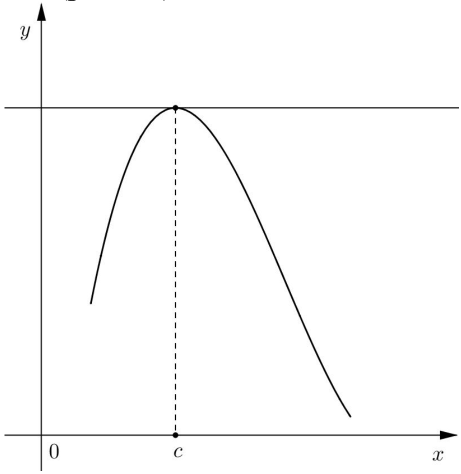


Рис. 14

Замечание. $f'(c)=0$ – необходимое, но не достаточное условие экстремума. Например, $y=x^3$ в точке $x=0$ не имеет экстремума, хотя $y'=3x^2=0$ при $x=0$.

Теорема 5.8 (*теорема Ролля*). Пусть $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $\xi\in(a;b)$: $f'(\xi)=0$.

Доказательство. Функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда по II теореме Вейерштрасса функция достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений.

Если $M=m$, то $y=f(x)=M=m=const$, следовательно, $\forall x\in[a;b]$ выполняется $f'(x)=0$.

Если $M>m$ и $f(a)=f(b)$, тогда на $(a;b)$ функция $y=f(x)$ достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения, тогда существует $\xi \in (a;b)$, ξ – точка экстремума, следовательно, $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл. Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс (рис. 15).

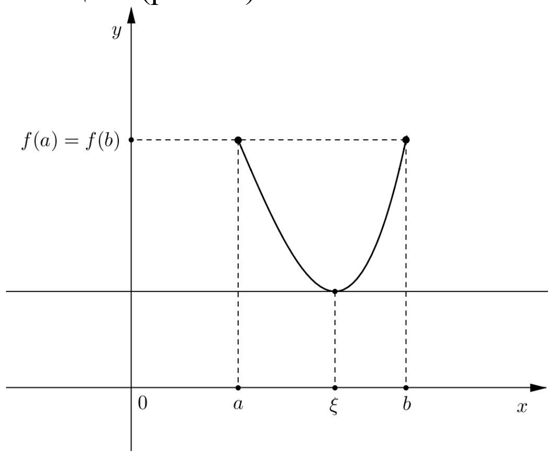


Рис. 15

Теорема 5.9 (*теорема Лагранжа*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует точка $\xi \in (a;b)$: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. $y = F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0.$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0.$$

Тогда, по теореме Ролля, существует точка $\xi\in(a;b)$: $F'(\xi)=0$.

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ – формула Лагранжа или формула конечных приращений.

Геометрический смысл. На кривой $y=f(x)$ между точками a и b найдется точка $M(\xi;f(\xi))$, такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную секущей AB (рис. 16).

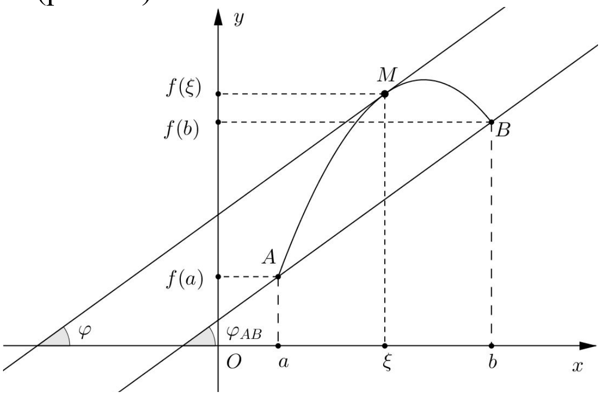


Рис. 16

$$tg\varphi=f'(\xi),\qquad tg\varphi_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теорема 5.10 (*теорема о постоянстве функции, имеющей на интервале равную нулю производную*). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполняется равенство $f'(x)=0$, то $y=C=const$ на $(a;b)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$, выберем любую точку $x \in (a;b)$, тогда $[x_0;x] \subset (a;b)$ или $[x;x_0] \subset (a;b)$. Функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[x_0;x]$, тогда по теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Но $f'(\xi) = 0$, тогда и $f(x) - f(x_0) = 0$, то есть $f(x) = f(x_0)$ для любого значения x из интервала $(a;b)$, следовательно, $y = C = const$ на $(a;b)$.

Теорема 5.11 (*необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции*). Для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастала (убывала), на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы и для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Доказательство. (*Достаточность*). Для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$. Выберем два произвольных числа $x_1, x_2 \in (a;b)$, таких, что $x_1 < x_2$. $[x_1;x_2] \subset (a;b)$, тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема и непрерывна на $[x_1;x_2]$ и по теореме Лагранжа выполняется равенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1;x_2)$.

По условию $f'(\xi) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тогда $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$, следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает.

При $f'(x) \leq 0$ функция $y = f(x)$ убывает – доказательство аналогично.

(*Необходимость*). Функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$, тогда она не убывает ни в одной точке интервала $(a;b)$, то есть не существует точек, в которых выполняется неравенство $f'(x)<0$, тогда $f'(x)\geq 0$ для всех точек из интервала $(a;b)$.

Теорема 5.12 (*достаточное условие строгого возрастания (строгого убывания) функции*). Для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ строго возрастала (строго убывала), на этом интервале достаточно, чтобы и для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполнялось неравенство $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$).

Доказательство. Для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполнялось неравенство $f'(x)>0$. Выберем два произвольных числа $x_1, x_2 \in (a;b)$, таких, что $x_1 < x_2$. $[x_1;x_2]\subset (a;b)$, тогда функция $y=f(x)$ дифференцируема и непрерывна на $[x_1;x_2]$, и по теореме Лагранжа выполняется равенство $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$, $\xi \in (x_1;x_2)$.

По условию $f'(\xi)>0$, $x_2-x_1>0$, тогда $f(x_2)-f(x_1)>0$, $f(x_2)>f(x_1)$, следовательно, функция $y=f(x)$ строго возрастает.

При $f'(x)<0$ функция $y=f(x)$ строго убывает – доказательство аналогично.

Теорема 5.13 (*терема Коши*). Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и для всех значений x из интервала $(a;b)$ выполняется неравенство $g'(x)\neq 0$, то существует точка $\xi \in (a;b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство. Докажем, что $g(a)\neq g(b)$ методом от противного. Пусть $g(a)=g(b)$, тогда по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a;b)$: $g'(\xi)=0$ – противоречие с условием. Таким образом, доказали, что $g(a)\neq g(b)$.

Рассмотрим функцию $y=F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Функция $y=F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, $F(a)=0$, $F(b)=0$, тогда по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a;b)$: $F'(\xi)=0$.

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$ то есть $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$ и $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Правила Лопиталя

Теорема 5.14 (*правило Лопиталя*). Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, для всех x из $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Тогда если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, следовательно, они непрерывны в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$. Пусть $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$, тогда функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в $U_{\delta}(x_0)$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, такую, что для всех натуральных n $x_n \neq x_0$, $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда на отрезке $[x_0; x_n]$ функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны, дифференцируемы на интервале $(x_0; x_n)$, $g'(x)\neq 0$ в интервале $(x_0; x_n)$, тогда по теореме Коши существует точка $\xi_n \in (x_0; x_n)$: $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$.

Так как $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$, то $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\xi_n \in (x_0; x_n)$, тогда по теореме о пределе промежуточной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x_0$.

По условию существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\}$: $\forall n \in N$ $x_n \neq x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ => $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = A$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$.

Замечание 1. Правилом Лопиталя воспользоваться можно не всегда, так $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать, а $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

Пример. $f = x^2\cos\frac{1}{x}$, $g=\sin x$, $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\underbrace{x}_{бм}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{огр}\right)}_{\to 0} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\overbrace{2x}^{бм}\overbrace{\cos\frac{1}{x}}^{огр}\right)}^{\to 0} + \sin\frac{1}{x}}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

Следствие. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $(-\infty;-\delta)\cup(\delta;+\infty)$ при $\delta > 0$, для всех x из $(-\infty;-\delta)\cup(\delta;+\infty)$ выполняется неравенство $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тогда если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Сделаем замену $t=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=F(t)$, $g(x)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)=G(t)$. Тогда функции $y=F(t)$ и $y=G(t)$ определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(0)$

$$G'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'=g'(x)\left(\frac{-1}{t^2}\right)=g'(x)\left(-x^2\right)\neq 0$$ для

всех значений t из $\overset{\circ}{U}_{\delta}(0)$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)\left(-x^2\right)}{g'(x)\left(-x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$ следовательно,

существует предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема 5.14* (*второе правило Лопиталя*). Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$, для всех x из $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ выполняется неравенство $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$. Тогда если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Без доказательства)

Формула Тейлора

Рассмотрим многочлен

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n.$$

Вычислим значение многочлена в точке x_0: $f(x_0)=a_0$.

Найдем первую производную многочлена и вычислим ее значение в точке x_0: $f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}$, $f'(x_0)=a_1$.

Найдем вторую производную многочлена и вычислим ее значение в точке x_0: $f''(x)=2a_2+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$, $f''(x_0)=2a_2$. Тогда $a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2}$.

И так далее, найдем n-ю производную многочлена и вычислим ее значение в точке x_0: $f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 1a_n$, $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$. Тогда $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Таким образом, мы получили формулу Тейлора для многочлена:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пусть функция f не является многочленом и в точке x_0 имеется n производных.

Теорема 5.15. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и на этом интервале имеет $(n+1)$-го порядка производные, точка $x_0 \in (a;b)$. Тогда для всех значений x из интервала $(a;b)$ существует точка $\xi \in (a;b)$, такая, что ξ расположена между точками x и x_0, имеет место формула Тейлора: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – остаточный член n-го порядка формулы Тейлора

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа.

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение x из $(a;b)$, причем $x > x_0$. Докажем,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\varphi(t)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)-$$

$$-(x-t)^{n+1}\cdot\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Функция $y=\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[x_0;x]$, дифференцируема на интервале $(x_0;x)$. Найдем значении функции на концах отрезка $[x_0;x]$:

$$\varphi(x)=f(x)-\left(f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n\right)-$$

$$-(x-x)^{n+1}\cdot\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0,$$

$$\varphi(x_0)=f(x)-\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)-(x-x_0)^{n+1}\cdot\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0.$$

Тогда по теореме Ролля существует точка $\xi\in(a;b)$: $\varphi'(\xi)=0$.

$$\varphi'(t)=-\left(f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f'(t)}{1!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}\right)+$$

$$+\left(x-t\right)^n\cdot\frac{(n+1)R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}}=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(x-t\right)^n+$$

$$+\left(x-t\right)^n\cdot\frac{(n+1)R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}}.$$

$\varphi'(\xi)=0$, тогда

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(x-\xi\right)^n+\left(x-\xi\right)^n\cdot\frac{(n+1)R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}}=0,$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}=\frac{(n+1)R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^{n+1}},$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}.$$

$R_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$– остаточный член в форме Пеано.

Если в формуле Тейлора подставить $x_0=0$, то получим ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o\left(x^n\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o\left(x^n\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o\left(x^n\right).$$

Применение дифференциального исчисления к исследованию функции

Определение 5.11. Точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, называется **стационарной точкой**. Точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, называется **критической точкой**.

Теорема 5.16 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в $U_\delta(c)$, где c – стационарная точка. Тогда для всех значений x и $U_\delta(c)$:

1) при $x < c$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > c$ выполняется $f'(x) < 0$, тогда c – точка максимума;

2) при $x < c$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > c$ выполняется $f'(x) > 0$, тогда c – точка минимума;

3) для всех x из $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$ $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$, тогда в точке c экстремума нет.

Доказательство. 1) для произвольной точки $x_0 \in U_\delta(c)$, $x_0 \neq c$. На отрезке, ограниченном точками c и x_0, применим теорему Лагранжа: $f(c)-f(x_0)=f'(\xi)(c-x_0)$, где точка ξ расположена между точками c и x_0.

Если $x_0 < c$, то $\xi \in (x_0;c)$ и $f(c)-f(x_0)=\underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(c-x_0)}_{>0}$, тогда $f(c)-f(x_0)>0$ и $f(c)>f(x_0)$. Если $x_0 > c$, то $\xi \in (c;x_0)$ и $f(c)-f(x_0)=\underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(c-x_0)}_{<0}$, тогда $f(c)-f(x_0)>0$ и $f(c)>f(x_0)$. Следовательно, c – точка максимума.

2) доказывается аналогично.

3) Если $x_0 < c$, то $\xi \in (x_0;c)$ и $f(c)-f(x_0)=\underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(c-x_0)}_{>0}$, тогда $f(c)-f(x_0)>0$ и $f(c)>f(x_0)$. Если $x_0 > c$, то $\xi \in (c;x_0)$ и $f(c)-f(x_0)=\underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(c-x_0)}_{<0}$, тогда $f(c)-f(x_0)<0$ и $f(c)<f(x_0)$. Следовательно, точка c не является точкой экстремума.

Теорема 5.17 (*второе достаточное условие экстремума*). Пусть функция $y=f(x)$ имеет в стационарной точке конечную вторую производную. Тогда если $f''(c)>0$, то c – точка минимума, если $f''(c)<0$, то c – точка максимума.

Доказательство. Если $f''(c)>0$, то функция $y=f'(x)$ возрастает в точке *с*. $f'(c)=0$ Если $x<c$, то $f'(x)<f'(c)=0$. Если $x>c$, то $f'(x)>f'(c)=0$. Тогда по теореме 5.16 *с* – точка минимума. Случай с $f''(c)<0$ доказывается аналогично.

Замечание. Теорема 5.17 не дает ответа о поведении функции при $f'(c)=0$ и $f''(c)=0$.

Теорема 5.18 (*третье достаточное условие экстремума*). Пусть $n\geq 1$ – некоторое нечетное число и пусть функция $y=f(x)$ имеет производную *n*-го порядка в $U_\delta(c)$ и производную $(n+1)$-го порядка в точке *с*. Если выполняется соотношение $f'(c)=f''(c)=...=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)\neq 0$, то функция в точке с имеет экстремум. Если $f^{(n+1)}(c)<0$, то максимум, а если $f^{(n+1)}(c)>0$, то минимум.

Доказательство. При $n=1$ данная теорема совпадает с предыдущей. Докажем для всех нечетных $n\geq 3$. Пусть $f^{(n+1)}(c)>0$, тогда функция $y=f^{(n)}(x)$ возрастает в окрестности $U_\delta(c)$, $f^{(n)}(c)=0$. Тогда в окрестности $U_\delta(c)$ если $x<c$, то $f^{(n)}(x)<f^{(n)}(c)=0$, если $x>c$, то $f^{(n)}(x)>f^{(n)}(c)=0$.

Выберем точку *x* из $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$ и разложим функцию $y=f'(x)$ по формуле Тейлора

$$f'(x)=f'(c)+\frac{f''(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1},$$ где точка ξ находится между точками *x* и *c*. По условию $f'(c)=f''(c)=...=f^{(n)}(c)=0$, тогда

$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$. Выражение $(x-c)^{n-1}>0$ для всех значений x из $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$, так как степень $(n-1)$ четная. Получается, что $f'(x)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(\xi)$. Тогда в окрестности $U_\delta(c)$, если $x<c$, то $f'(x)<f'(c)=0$, если $x>c$, то $f'(x)>f'(c)=0$. Тогда по теореме 5.16 c – точка минимума.

Теорема 5.19. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$, где в точке c функция $y=f(x)$ не дифференцируема, но является непрерывной. Тогда для всех значений x и $U_\delta(c)$:

1) при $x<c$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а при $x>c$ выполняется $f'(x)<0$, тогда c – точка максимума;

2) при $x<c$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, а при $x>c$ выполняется $f'(x)>0$, тогда c – точка минимума;

3) для всех x из $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$ $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$, тогда в точке c экстремума нет.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.16.

Выпуклость графика функции

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема для всех значений x из интервала $(a;b)$, тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$, проходящая через любую точку $M(x;f(x))$.

Определение 5.12. Функция называется **выпуклой вверх** на $(a;b)$, если график этой функции расположен ниже любой своей касательной. Функция называется **выпуклой вниз** на $(a;b)$, если график этой функции расположен выше любой своей касательной.

Теорема 5.20. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ конечную вторую производную и если эта производная неотрицательная (неположительная) всюду на этом интервале, то график функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

Доказательство. Пусть для всех значений *x* из $(a;b)$ выполняется неравенство $f''(x) \geq 0$. Для произвольной точки *c* из интервала $(a;b)$ составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке *c*: $Y_{кас} = f(c) + f'(c)(x - c)$. Разложим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки *c*: $y = f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$, где ξ находится между точками *x* и *c*. Вычтем из формулы Тейлора уравнение касательной и получим $y - Y_{кас} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$. Правая часть данного равенства неотрицательна, следовательно, и левая часть неравенства неотрицательна, то есть $y - Y_{кас} \geq 0$, $y \geq Y_{кас}$ и функция $y = f(x)$ выпукла вниз.

Для случая $f''(x) \leq 0$ доказательство аналогично.

Замечание. Если для всех значений *x* из интервала $(a;b)$ выполняется равенство $f''(x) = 0$, тогда график функции имеет вид $y = f(x) = ax + b$ – графиком функции является прямая, направление выпуклости можно считать произвольным.

Теорема 5.21. Пусть функция $y = f''(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке c. Тогда существует окрестность $U_\delta(c)$, что для всех значений x из $U_\delta(c)$ функция $y = f(x)$ выпукла вниз (вверх).

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0$ и функция $y = f''(x)$ непрерывна в точке c, тогда по теореме о сохранении знака непрерывно функции (теорема 4.2) существует $U_\delta(c)$, что для всех x, входящих в $U_\delta(c)$, выполняется неравенство $f''(x) > 0$, а по предыдущей теореме функция $y = f(x)$ выпукла вниз.

Для случая $f''(c) < 0$ доказательство аналогично.

Точки перегиба

Определение 5.13. Точка $M(x; f(x))$ графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если существует окрестность $U_\delta(c)$, что для всех x из окрестности $U_\delta(c)$ график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки c имеет разные направления выпуклости.

Теорема 5.22. Пусть для всех значений x из $U_\delta(c)$ существует непрерывная в точке c производная $f'(x)$. Тогда если график функции $y = f(x)$ на интервале $(c; c+\delta)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх), то для всех x из интервала $(c; c+\delta)$ график функции лежит выше (ниже) касательной к графику, проведенной в точке $M(x; f(x))$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \in (c; c+\delta)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Через каждую точку с координатами $(x_n; f(x_n))$ проведем касательную к графику

$Y_n = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Для всех x из интервала $(c; c+\delta)$ функция $y = f(x)$ выпукла вниз [вверх]. Для всех натуральных значений n и любой фиксированной точки x из интервала $(c; c+\delta)$

$f(x) - Y_{n\ кас} = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) > 0\ [< 0]$. Функция $y = f'(x)$ непрерывна в точке c, тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - Y_{n\ кас}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)\right) =$$

$= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$. По теореме о сохранении знака (следствие из теоремы 3.6)

$f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) > 0\ [< 0]$.

Получаем, что $f(x) - Y_{кас}(c) > 0\ [< 0]$. То есть $f(x) > Y_{кас}(c)$ $[f(x) < Y_{кас}(c)]$.

Аналогично доказывается теорема 5.22 для интервала $(c - \delta; c)$.

Теорема 5.23. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в окрестности $U_\delta(c)$, $y = f'(x)$ непрерывна в точке c. Тогда, если график функции имеет перегиб в точке $(c; f(c))$, то в окрестности $U_\delta(c)$ этот график слева и справа от точки c лежит по разные стороны от касательной, проходящей через точку $(c; f(c))$.

Доказательство. На интервалах $(c - \delta; c)$ и $(c; c+\delta)$ график функции $y = f(x)$ имеет различные направления выпуклости. Если на интервале $(c - \delta; c)$ функция выпукла вверх, то $f(x) < Y_{кас}(c)$, и на интервале $(c; c+\delta)$ функция будет выпукла вниз, то $f(x) > Y_{кас}(c)$. Если на интервале

$(c-\delta;c)$ функция выпукла вниз, то $f(x)>Y_{кас}(c)$, и на интервале $(c;c+\delta)$ функция будет выпукла вверх, то $f(x)<Y_{кас}(c)$.

Теорема 5.24 (*необходимое условие перегиба дважды дифференцируемой функции*). Если функция $y=f(x)$ имеет в точке c вторую производную и график этой функции имеет перегиб в точке $(c;f(c))$, то $f''(c)=0$.

Доказательство. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке c: $Y_{кас}=f(c)+f'(c)(x-c)$. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)-Y_{кас}$, $F(x)=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)$. Функция $y=F(x)$, как и функция $y=f(x)$, имеет вторую производную в окрестности $U_\delta(c)$, следовательно, для всех значений x из окрестности $U_\delta(c)$ существует производная, причем производная $y=f'(x)$ непрерывна в точке c. Тогда по лемме 6.18 в окрестности $U_\delta(c)$ график функции $y=f(x)$ лежит слева и справа от точки c по разные стороны от касательной, проходящей через точку $(c;f(c))$, тогда функция $y=F(x)$ слева и справа от точки c имеет разные знаки, следовательно, функция $y=F(x)$ не может иметь экстремум в точке c.

Предположим, что $f''(c)\neq 0$. $F'(x)=f'(x)-f'(c)$, тогда $F''(x)=f''(x)$, $F'(c)=f'(c)-f'(c)=0$, следовательно, в точке c экстремум функции $y=F(x)$ – противоречие. Тогда $f''(c)=0$.

Условие $f''(c)=0$ является необходимым, но не достаточным. Например, функция $y=x^4$ выпукла вниз и не имеет точек перегиба, но при этом $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$ и в точке $x = 0$ $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$.

Теорема 5.25 (*первое достаточное условие перегиба*). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности $U_\delta(c)$ и $f''(c) = 0$. Тогда если в окрестности $U_\delta(c)$ вторая производная $y = f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки *c*, то график этой функции имеет перегиб в точке $(c; f(c))$.

Доказательство. График функции $y = f(x)$ имеет касательную в точке $(c; f(c))$, поскольку существует $f'(c)$. Если вторая производная $y = f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки *c*, то по теореме 3.15 следует, что направление выпуклости слева и справа от точки *c* является различным, следовательно, точка *c* – точка перегиба.

Замечание. Если в условии теоремы 5.25 заменить условие $f''(c) = 0$ на $f''(c)$ не существует, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке *c* и график функции в точке $(c; f(c))$ имеет касательную, может, параллельную оси ординат, то теорема будет верна.

Теорема 5.26 (*второе достаточное условие перегиба*). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке *c* конечную третью производную и $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(c; f(c))$.

Доказательство. $f'''(c) \neq 0$, тогда по теореме о достаточном условии строгого возрастания функции в точке (теорема 6.1) функция $y = f''(x)$ либо строго возрастает, либо строго убывает в точке *c*, следовательно, слева и справа от точки *c* функция $y = f''(x)$ имеет разные знаки, тогда по первому достаточному условию перегиба (теорема 5.25) в точке *c* перегиб функции $y = f(x)$.

Замечание. Если $f'''(c)$ не существует или $f'''(c) = 0$, то теорема 5.26 ответа не дает.

Теорема 5.27 (*третье достаточное условие перегиба*). Пусть $n \geq 2$ – некоторое четное число, и пусть функция $y = f(x)$ имеет производную порядка n в окрестности $U_\delta(c)$ и производную порядка $(n+1)$ в точке *c*. Тогда если выполняется соотношение $f''(c) = f'''(c) = ... = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(c; f(c))$.

Доказательство. При $n = 2$ данная теорема совпадает с предыдущей теоремой. Докажем для четного $n \geq 4$.

Пусть $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, тогда по теореме о достаточном условии строгого возрастания функции в точке (теорема 5.6) функция $y = f^{(n)}(x)$ либо строго возрастает ($f^{(n+1)}(c) > 0$), либо строго убывает ($f^{(n+1)}(c) < 0$) в точке *c*. $f^{(n)}(c) = 0$, тогда в окрестности $U_\delta(c)$ функция $y = f^{(n)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки *c*. По формуле Тейлора

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}$$

, где точка ξ находится между точками *x* и *c*. По условию $f''(c) = f'''(c) = ... = f^{(n)}(c) = 0$, тогда $f''(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}$. Выражение $(x-c)^{n-2} > 0$ для всех значений *x* из $\overset{\circ}{U}_\delta(c)$, так как степень $(n-2)$ четная. Получается, что $f''(x)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(\xi)$. Тогда в окрестности $U_\delta(c)$ функция $y = f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки c. Тогда по теореме 5.25 c – точка перегиба функции $y = f(x)$.

Замечание.

$y = (x-1)^{2n}$

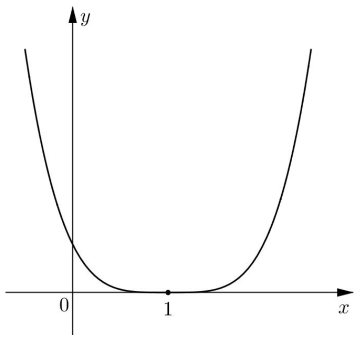


Рис. 17

$y = (x-1)^{2n+1}$

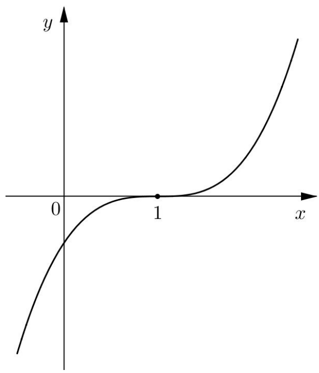


Рис. 18

$y = (x-1)^{2n}$, $y(1) = 0$

$y' = 2n(x-1)^{2n-1}$,

$y'(1) = 0$

$y'' = 2n(2n-1)(x-1)^{2n-2}$,

$y''(1) = 0$

……………………..

$y^{(2n-1)} = (2n)!(x-1)$,

$y^{(2n-1)}(1) = 0$

$y^{(2n)} = (2n)!$,

$y^{(2n)}(1) = (2n)! \neq 0$

$y = (x-1)^{2n+1}$, $y(1) = 0$

$y' = (2n+1)(x-1)^{2n}$,

$y'(1) = 0$

$y'' = (2n+1)(2n)(x-1)^{2n-1}$,

$y''(1) = 0$

……………………..

$y^{(2n)} = (2n+1)!(x-1)$,

$y^{(2n)}(1) = 0$

$y^{(2n+1)} = (2n+1)!$,

$y^{(2n+1)}(1) \neq 0$

По теореме 5.18 нечетное количество производных в точке 1 равно 0 и на четном шаге $y^{(2n)}(1) > 0$, следовательно, $x_{\min} = 1$.

По теореме 5.27 четное количество производных в точке 1 равно 0 и на нечетном шаге $y^{(2n+1)}(1) \neq 0$, следовательно, $x = 1$ точка перегиба.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a;b]$ и непрерывную на нем. Для нахождения наибольшего значения функции на отрезке $[a;b]$ нужно сравнить между собой значения функции во всех точках максимума из отрезка $[a;b]$ и в граничных точках отрезка $[a;b]$. Наибольшее из всех значений и будет наибольшим значением функции на отрезке $[a;b]$.

Аналогично находится и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Задания

1. Постройте функцию *f*, дифференцируемую во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$, удовлетворяющую условию $f(a) = f(b)$, но такую, чтобы для нее не существовало точки *c*, $a < c < b$, в которой $f'(c) = 0$.

2. Постройте функцию *f*, непрерывную на отрезке $[a;b]$, удовлетворяющую условию $f(a) = f(b)$, но такую, чтобы для нее не существовало точки *c*, $a < c < b$, в которой $f'(c) = 0$.

3. Постройте функцию *f*, непрерывную на отрезке $[a;b]$, дифференцируемую во всех внутренних точках это-

го отрезка, но такую, чтобы для нее не существовало точки c, $a < c < b$, в которой $f'(c) = 0$.

4. Можно ли на отрезке $[-1;1]$ применить к функции $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ теорему Ролля?

5. Функция $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4}$ имеет равные значения на концах отрезка $[-1;1]$, но ее производная $f'(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого отрезка. Не противоречит ли это теореме Ролля?

6. Докажите, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет действительный корень, и только один.

7. Докажите, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ имеет два действительных корня.

8. В формуле Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ определите значение с для функции $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ на отрезке $[0;2]$.

9. Можно ли на отрезке $[-1;1]$ применить к функции $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ теорему Лагранжа?

10. По формуле Лагранжа определите значение c на отрезке $[a;b]$ для функции $f(x) = x^2$.

11. Применима ли теорема Лагранжа к функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[a;b]$, если $a \cdot b < 0$?

12. Докажите неравенство $\left|\ln x_2 - \ln x_1\right| < \dfrac{\left|x_2 - x_1\right|}{a}$, если $x_1, x_2 \in [a;+\infty)$ при $a > 0$, используя теорему Лагранжа.

13. На кривой $y = x^2 + 3x + 1$ найдите точку, в которой касательная к кривой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;-1)$ и $B(1;5)$.

14. Определите значение c в формуле Коши для функций $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[1;2]$.

15. Почему теорема Коши неприменима для функций $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ на отрезке $[-1;1]$?

16. Удовлетворяют ли функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ условиям теоремы Коши на отрезке $[-8;8]$?

17. Докажите, что функция $f(x) = \sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ является постоянной, и найдите значение этой постоянной.

18. Докажите неравенство $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, при $x \geq 0$.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$ возрастает на множестве действительных чисел.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^4 + ax^3 + 1{,}5x^2 + 1$ выпукла вниз на множестве действительных чисел.

Библиографический список

1. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа. Том I. Учебное пособие для студентов-заочников физико-мат. факультетов пед. институтов. Под редакцией проф. Б.З. Вулиха. М.: Просвещение, 1972. 511 с.

2. Журавлева Н.А. Введение понятия равномерной непрерывности функции с помощью динамических моделей в среде GeoGebra // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы V Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 16-17 ноября 2017. Отв. ред. М.Б. Шашкина. Красноярск, 2017. С. 242-249.

3. Журавлева Н.А., Якименко М.Ш. Лабораторные работы с использованием компьютера как средство формирования компетентности учения студентов первого курса математического факультета // Роль кафедры в обновлении качества подготовки будущего учителя в педагогическом вузе: межвузовский сборник научных трудов. Красноярск, 2005. С. 161-171.

4. Задачник по курсу математического анализа. Учеб. пособие для студентов заоч. отделений физ.-мат. пединститутов. Ч. 1. Под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1971. 343 с.

5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979. 720 с.

6. Мордкович А.Г., Мухин А.Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функции одной переменной: Учеб. пособие для студ. заоч. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1985. 144 с.

7. Очан Ю.С., Шнейдер В.Е. Математический анализ: учебное пособие для педагогических институтов. М.: Государственное научно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1961. 884 с.

8. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Том 1. М.: Просвещение, 1966. 641 с.

Оглавление

Учебное издание

Наталья Александровна Журавлева

ОСВОЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Учебное пособие

Электронное издание

В авторской редакции
Корректор Н.А. Агафонова

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 29.01.18
Формат 60х84 1/16
Усл. печ. л. 9,31