МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

Н.А. Журавлева

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ НАЧАЛ АНАЛИЗА НА ОСНОВЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Учебное пособие

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2018

ББК 22.1
Ж 911
Печатается по решению редакционно-издательского совета
Красноярского государственного педагогического университета
им. В.П. Астафьева.

Рецензенты:

В.А. Шершнева, доктор педагогических наук, профессор (СФУ)
Е.А. Попова, кандидат педагогических наук, доцент (СФУ)

Журавлева Н.А.

Ж 911 Изучение основных понятий начал анализа на основе визуализации: учебное пособие / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2018. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-182-7

Учебное пособие содержит теоретический материал и задания для усвоения основных понятий математического анализа: предел, непрерывность, производная, интеграл на наглядно-интуитивном уровне, для овладения техниками вычисления пределов, производных и интегралов, а также изучения преобразований графиков основных элементарных функций и построения графиков сложных функций.

Предназначено для студентов 1 курса, направление 44.03.05 «Педагогическое образование», направленность (профиль) образовательной программы «Математика и информатика» по дисциплине «Математика», а также для студентов 2 и 3 курсов, направление 44.03.01 «Педагогическое образование», направленность (профиль) образовательной программы «Математика» заочной формы обучения по дисциплине «Математический анализ и элементы теории функций».

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-182-7

Введение

В математической подготовке будущих педагогов одной из фундаментальных дисциплин является математический анализ. Так как эта дисциплина изучается на младших курсах, то студенты испытывают значительные трудности, связанные с усвоением базовых понятий и методов математического анализа, с высокой степенью абстрактности изучаемого материала и насыщенностью его символическим языком. В связи с этим курсу математического анализа предшествует курс математики. Студентам предстоит изучить три больших раздела математического анализа: предел, дифференциальное и интегральное исчисление. Усвоить основные понятия математического анализа: предел, непрерывность, производная, интеграл на наглядно-интуитивном уровне, овладеть техниками вычисления пределов, производных и интегралов, а также изучить преобразование графиков основных элементарных функций и построение графиков сложных функций.

Пособие содержит три главы. В первой – кратко излагаются такие фундаментальные понятия математического анализа, как множества, функция, последовательность, предел, непрерывность, асимптоты. Во второй главе «Дифференциальное исчисление» вводится понятие производной, рассматриваются особенности вычисления производных и геометрические приложения. В третьей главе «Интегральное исчисление» вводится понятие неопределенного, определенного интегралов и их геометрические приложения.

Для визуализации в учебном пособии активно используется принцип наглядности с привлечением геометрической интерпретации приводимых определений понятий и формулировок теорем. В конце каждого параграфа приведены задания для усвоения и закрепления полученной теории.

Глава 1. Предел

1.1. Действительные числа. Числовые множества. Модуль действительного числа

Множество натуральных чисел появилось в связи со счетом предметов. $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Числа n и $-n$ называются **противоположными** друг другу.

Натуральные числа, числа, им противоположные, и число нуль образуют **множество целых чисел**. $Z = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Рациональные числа – это числа, которые можно представить в виде дроби $\dfrac{m}{n}$, где m целое, а n натуральное.

$$Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$$

Иррациональные числа – это числа, которые нельзя представить в виде дроби $\dfrac{m}{n}$. Множество иррациональных чисел обозначается I.

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел называют **множеством действительных чисел** и обозначают $R = Q \cup I$.

Определение 1.1. **Действительным числом** называют:

1) любую бесконечную десятичную дробь $\pm N, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, не оканчивающуюся ни последовательностью нулей, ни последовательностью девяток;

2) любую пару бесконечных десятичных дробей вида: $\pm N, n_1 n_2 \ldots n_m 000\ldots$ и $\pm N, n_1 n_2 \ldots (n_m - 1) 999\ldots$;

3) пару бесконечных десятичных дробей $+0{,}000\ldots$ и $-0{,}000\ldots$

Рациональные числа – десятичные бесконечные периодические дроби, а иррациональные – десятичные бесконечные непериодические дроби.

Множество действительных чисел представлено на диаграмме Эйлера (рис. 1).

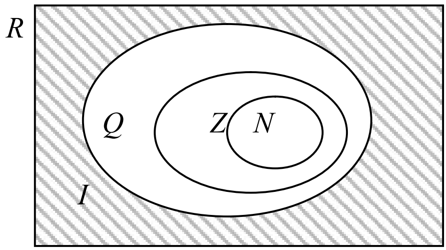


Рис. 1. Диаграмма Эйлера

Десятичные приближения по избытку и недостатку

Пусть $x = N, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ координата точки A.

$$x \in [N; N+1]$$

$$x \in \left[N, n_1; N, n_1 + \frac{1}{10}\right]$$

$$x \in \left[N, n_1 n_2; N, n_1 n_2 + \frac{1}{10^2}\right]$$

$\ldots$

Числа $N; N, n_1; N, n_1 n_2, \ldots$ называют **десятичными приближениями числа *x* по недостатку.**

Числа $N+1; N, n_1 + \dfrac{1}{10}; N, n_1 n_2 + \dfrac{1}{10^2}, \ldots$ **называют десятичными приближениями числа *x* по избытку.**

Например, 6,14993…

Десятичные приближения по недостатку: 6; 6,1; 6,14; 6,149; 6,1499; 6,14993;…

Десятичные приближения по избытку: 7; 6,2; 6,15; 6,150; 6,1500; 6,14994;…

Числовым множеством называется множество, элементами которого являются действительные числа.

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a \le x \le b$, называется **отрезком** и обозначается $[a;b]$.

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется **интервалом** и обозначается $(a;b)$.

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a \le x < b$, называется **полуинтервалом, открытым справа,** и обозначается $[a;b)$.

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a \le x$, называется **закрытый луч** и обозначается $[a;+\infty)$.

Множество всех действительных чисел *x*, удовлетворяющих условию $a < x$, называется **открытый луч** и обозначается $(a;+\infty)$.

Определение 1.2. Числовое множество называется **ограниченным сверху**, если существует число *b*, что для всех элементов множества *X* выполняется неравенство $x \le b$. Число *b* называют верхней границей множества *X*.

Определение 1.3. Числовое множество называется **ограниченным снизу**, если существует число *b*, что для всех элементов множества *X* выполняется неравенство $x \ge b$. Число *b* называют нижней границей множества *X*.

Определение 1.4. Если множество *X* ограничено сверху и снизу, то множество *X* **ограниченно**.

Определение 1.5. Множество X **неограниченно сверху**, если для любого числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $x > c$.

Определение 1.6. Множество X **неограниченно снизу**, если для любого числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $x < c$.

Определение 1.7. Множество X **неограниченно**, если для любого положительного числа c найдется элемент x из множества X, для которого выполняется неравенство $|x| > c$.

Определение 1.8. Наименьшую из верхних границ называют **точной верхней гранью** и обозначают sup X (supremum).

Определение 1.9. Наибольшую из нижних границ называют **точной нижней гранью** и обозначают inf X (infimum).

Теорема 1.1. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Определение 1.10. Число a называется **наименьшим элементом множества** X если a является элементом множества X, и для всех элементов множества X, выполняется неравенство $x \geq a$ и обозначается $\min X = a$.

Определение 1.11. Число b называется **наибольшим элементом множества** X, если b является элементом множества X, и для всех элементов множества X выполняется неравенство $x \leq b$ и обозначается $\max X = b$.

Модуль действительного числа

Определение 1.12. **Модулем действительного числа** x называется само число, если x неотрицательно, и противоположное число, если x отрицательно.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля:

$|x|$ – расстояние от начала координат до точки с координатой x;

$|x-y|$ – расстояние между точками с координатами x и y.

Свойства модуля

1. $\forall x \in R \ |x| \geq 0$
2. $\forall x \in R \ |x| = |-x|$
3. $\forall x \in R \ -|x| \leq x \leq |x|$
4. $\forall x \in R, \forall a \in R, a > 0 \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
5. $\forall x, y \in R \ |x+y| \leq |x| + |y|$
6. $\forall x, z \in R \ |x+z| \geq |z| - |x|$
7. $\forall x, y \in R \ |xy| = |x| \cdot |y|$
8. $\forall x, y \in R, \ y \neq 0 \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x \in R, \forall a \in R, a > 0 \ |x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right.$
10. $\forall x, y \in R \ |x-y| \leq |x| + |y|$
11. $\forall x, y \in R \ |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Задания

1. Укажите, какое из чисел является натуральным, целым, рациональным, иррациональным, действительным:

1.1. $\frac{3}{7}$; 1.2. 4,131131113111131…; 1.3. 5; 1.4. –16; 1.5. π; 1.6. 2,(5); 1.7. –23,13278787878…; 1.8. $\log_3 2$; 1.9. $\sqrt{5}$; 1.10. $\sin 30°$.

2. Сравните числа:

2.1. $3{,}3$ и $3{,}298$; 2.2. $-5{,}7891$ и $-5{,}788$; 2.3. $3{,}141592$ и $\frac{22}{7}$.

3. Выясните, какие из следующих числовых множеств ограничены сверху, какие – снизу и какие – не ограничены. Для ограниченных множеств найдите верхние и нижние грани. Найдите наибольшее и наименьшее числа множеств, если они существуют:

3.1. $\{1;3;7\}$; 3.2. $[2;\sqrt{6}]$; 3.3. $(\log_2 3;2)$;
3.4. $[2;\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 3.5. $(\sin 14°;+\infty)$; 3.6. $[2;4]\cup[3;5]$;
3.7. $(5;\sqrt{35})\cup\{6\}$; 3.8. $[2;4]\cap[4;6]$; 3.9. $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in N\right\}$;

3.10. множество натуральных чисел;

3.11. множество целых чисел;

3.12. множество иррациональных чисел;

3.13. множество десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ по избытку;

3.14. множество рациональных чисел вида $r=\frac{m}{n}$, где $0<n<m$.

4. Верно ли утверждение:

4.1. если числовое множество содержит конечное число элементов, то оно ограниченно;

4.2. если числовое множество ограниченно, то оно содержит конечное число элементов;

4.3. если числовое множество ограниченно, то оно содержит свои наибольший и наименьший элементы;

4.4. если у числового множества есть наибольший и наименьший элементы, то оно ограниченно.

5. Вычислите:

5.1. $\left|2-\sqrt{2}\right|$; 5.2. $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$; 5.3. $\left|\sqrt{6}-2{,}5\right|$.

6. Упростите выражение:

6.1. $\sqrt{a^2}$; 6.2. $\sqrt{(a-1)^2}$ при $a<1$;

6.3. $\sqrt{4-4x+x^2}$ при $x<2$; 6.4. $\sqrt[4]{(3\pi-10)^4}$;

6.5. $\sqrt[8]{(2x-3)^8}+\sqrt[10]{(4x-7)^{10}}$ при $1{,}5<x<1{,}75$.

7. Решите уравнение:

7.1. $\left|3-2x\right|=5$; 7.2. $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$.

8. Решите неравенство:

8.1. $\left|x-2\right|<3$; 8.2. $\left|x+3\right|>2$; 8.3. $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|<2x-3$.

9. Используя неравенство со знаком модуля, запишите утверждение:

9.1. расстояние между числами x и 1 меньше 0,2;

9.2. расстояние между числами x и –1 больше 0,2;

9.3. расстояние между числами x и –2 не меньше $\frac{2}{5}$;

9.4. расстояние между числами x и 0 не больше 1;

9.5. расстояние между числами x и 0 меньше ε, где ε – положительное число.

1.2. Числовая функция. Классификация функций. Преобразование графиков функций

Определение 1.13. Если даны два множества X и Y и каждому элементу множества X поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что задано **отображение f множества X во множество Y.**

Определение 1.14. Множество X является подмножеством множества действительных чисел. Отображение f, сопоставляющее каждому числу x из множества X единственное число y из множества Y, называют **числовой функций** и обозначают $y = f(x)$. X – область определения функции f. Y – множество значений функции f.

Способы задания функций

1) Аналитический: функция задана с помощью формулы. Правая часть формулы – аналитическое выражение.

2) Табличный: дана таблица, сопоставляющая значения x и y.

3) Графический: графическое изображение. **Графиком функции** $y = f(x)$ называют множество точек плоскости с координатами x и $f(x)$.

4) Словесный: задание функции при помощи словесного описания закона соответствия, позволяющего по заданному x находить y.

Основные элементарные функции представлены в приложении 1.

Пример 1. Функция Антье (целая часть) $y = [x]$.

Пусть y означает наибольшее целое число, не превосходящее данного действительного числа x.

$$y = [x],\ n \le x < n+1.$$

График функции Антье представлен на рисунке 2.

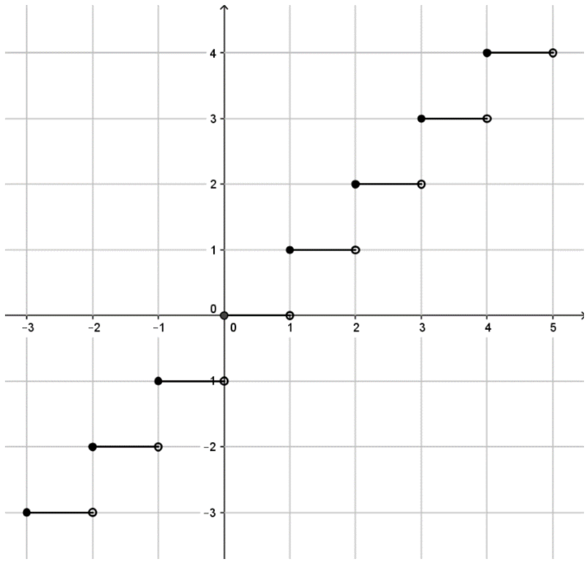


Рис. 2

Пример 2. Функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in I\end{cases}$.

Графиком функции $y=f(x)$, заданной на множестве X, называется множество точек плоскости с координатами x и $f(x)$. $\{(x;y): x\in X, y=f(x)\}$

Две функции f и g называют **равными** на множестве X, если для всех элементов множества X выполняется равенство $f(x)=g(x)$.

Пример. $y=\log_2 x^2$ равна $y=2\log_2 x$ на множестве $X=(0;+\infty)$.

Сужением функции f называется функция g, если $D(g)\subset D(f)$ $\forall x\in D(g)$ $g(x)=f(x)$.

Пример. Сужением функции $y = \sin x$ будет функция $y = \sin x$ на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Продолжением функции g будем называть функцию f $D(f) \supset D(g)$ $\forall x \in D(g)$ $g(x) = f(x)$.

Пример. Продолжением функции $y = \ln x$ будет функция $y = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$.

Классификация функций по их свойствам

1. Четные и нечетные функции

Определение 1.15. Числовое множество X называется **симметричным относительно начала координат**, если $\forall x \in X$ следует, что $-x \in X$.

Определение 1.16. Функция f, заданная на множестве X, называется **четной**, если: 1) X – множество симметричное относительно начала координат. 2) Для всех элементов x из множества X выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Определение 1.17. Функция f, заданная на множестве X, называется **нечетной**, если: 1) X – множество симметричное относительно начала координат. 2) Для всех элементов x из множества X выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат O.

Пример. Сделаем продолжение функции $y = \ln x$ четным и нечетным способом. Функция $y = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$ четная (рис. 3), а $y = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -\ln(-x), & x < 0 \end{cases}$ нечетная (рис. 4).

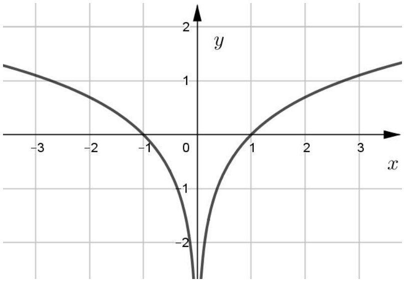


Рис. 3

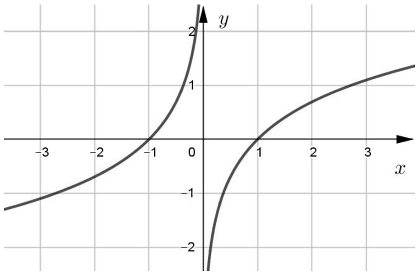


Рис. 4

2. Периодические и непериодические функции

Определение 1.18. Числовое множество X называется **периодическим** с периодом l, если $\forall x \in X$ следует, что $x + l \in X$ и $x - l \in X$.

Определение 1.19. Функция f, заданная на множестве X, называется **периодической с периодом *l***, если: 1) X – множество периодическое с периодом l. 2) Для всех элементов x из множества X выполняется условие $f(x+l) = f(x)$.

Определение 1.20. **Основным периодом функции** называется наименьший положительный период.

График периодической функции имеет повторяющиеся фрагменты.

Примеры. 1) $y = x - [x] = \{x\}$ – дробная часть числа x (рис. 5).

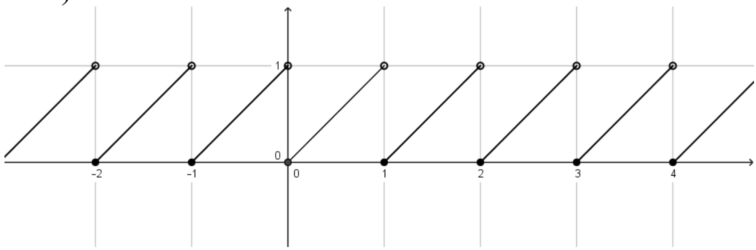


Рис. 5

Периодична с периодом 1:

$$y(x+1) = \{x+1\} = x+1-[x+1] =$$
$$= x+1-[x]-1 = x-[x] = \{x\} = y(x).$$

2) Функция Дирихле периодична, причем периодом является любое рациональное число r.

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & x+r \in Q \\ 0, & x+r \in I \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases} = D(x).$$

3) $y = const$ – периодом функции является любое действительное число.

Утверждение 1. Основным периодом функции $Af(kx+b)+B$ будет число $T_0 = \dfrac{T}{|k|}$, где T – основной период функции *f(x)*.

Утверждение 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют периоды T_1 и T_2, соответственно, то основной период функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ равен наименьшему общему кратному числителей периодов T_1 и T_2.

3. Монотонные и немонотонные функции

Определение 1.21. Функция f, заданная на множестве X, называется **строго возрастающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 1.22. Функция f, заданная на множестве X, называется **строго убывающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 1.23. Функция f, заданная на множестве X, называется **возрастающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

Определение 1.24. Функция f, заданная на множестве X, называется **убывающей**, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Строго убывающие и строго возрастающие функции образуют класс **строго монотонных функций**. А убывающие и возрастающие – **монотонных**.

Примеры. 1) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ возрастает на множестве действительных чисел.

2) Функция Дирихле не монотонна.

Функция f называется **кусочно-монотонной** на множестве X, если числовой промежуток X можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция монотонна.

Свойства монотонных функций

1. Функция, являющаяся суммой двух возрастающих функций, возрастает.

2. Функция, являющаяся суммой двух убывающих функций, убывает.

3. Если f и g возрастают и положительны на некотором промежутке, то $f \cdot g$ также возрастает и положительна на этом промежутке.

4. Если f возрастает, то $-f$ убывает.

5. Если $f > 0$ и возрастает, то $\frac{1}{f}$ убывает.

6. Композиция двух убывающих функций есть функция возрастающая.

7. Композиция двух возрастающих функций есть функция возрастающая.

8. Если $F(t)$ возрастает на $[f(b); f(a)]$, а $t = f(x)$ убывает на $[a, b]$, то $F(f(x))$ убывает на $[a, b]$.

4. Ограниченные и неограниченные функции

Определение 1.25. Функция f, заданная на множестве X, называется **ограниченной**, если ограничено множество её значений, то есть $\exists C > 0\ \forall x \in X\ |f(x)| < C$.

Определение 1.26. Функция f, заданная на множестве X, называется **неограниченной**, если неограничено множество её значений, то есть $\forall C > 0\ \exists x \in X\ |f(x)| \geq C$.

Пример. Функция Дирихле ограничена.

Сложная функция

Одним из способов образования новых функций из данных является способ композиции, заключающийся в конструировании так называемых сложных функций.

Определение 1.27. Пусть функция $y = f(t)$ определена на множестве T, а множество ее значений является Y. Тогда если функция $t = g(x)$ определена на множестве X, а множеством её значений является множество $T_1 \subset T$, то говорят, что на множестве X задана **композиция функций *f* и *g*** или **сложная функция** $y = f(g(x))$.

Возможна композиция большего числа функций.

Пример. Функция $y = \cos \ln x$ получилась в результате композиции функций $y = \cos t$, отображающей $R \to [-1;1]$, и функции $t = \ln x$, отображающей $(0;+\infty) \to R$.

Обратная функция

Определение 1.28. Функция f отображает множество X во множество Y, причем разным значениям аргумента x соответствуют различные значения функции y, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \;\; f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда отображение множества Y во множество X называется **обратным** по отношению к отображению f и обозначается f^{-1}.

Определение 1.29. Множество Y является подмножеством множества действительных чисел. Отображение f^{-1}, сопоставляющее каждому числу y из множества Y единственное число x из множества X, называют **обратной функцией** и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Определение 1.30. Функция, имеющая обратную, называется **обратимой**.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема 1.2. Если функция $f: X \to Y$ строго возрастает (строго убывает), то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая строго возрастает (строго убывает).

Пример. Функция $y = \arcsin x$ является обратной для сужения функции функция $y = \sin x$ на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Преобразование графиков функций

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т. п.) можно построить график более сложных функций.

График функции $y = f(x + b)$ получается параллельным переносом графика $y = f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|b|$ при $b > 0$ и в положительном направлении на $|b|$ при $b < 0$.

График функции $y = f(x)+B$ получается параллельным переносом графика $y = f(x)$ в положительном направлении оси Oy на B при $B > 0$ и в отрицательном направлении этой оси на $|B|$ при $B < 0$.

График функции $y = f(ax)$ получается сжатием графика $y = f(x)$ в a раз к оси Oy при $a > 1$ или растяжением в $1/a$ раз от этой оси Oy при $0 < a < 1$.

График функции $y = Af(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз при $A > 1$ и сжатием вдоль этой оси в $1/A$ раз при $0 < A < 1$.

График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси Oy.

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси Ox.

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью Ox, сохраняется, часть его, лежащая под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox.

График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: при $x \geq 0$ график $y = f(x)$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.

Пример. 1. Построить график функции $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1$, далее постройте графики функций $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

Преобразуем квадратный трехчлен следующим образом:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1 = 3\left(\frac{x^2}{4} - x\right) + 1 =$$

$$= 3\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\frac{x}{2}\cdot 1 + 1\right) - 3 + 1 = 3\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - 2.$$

Построим графики в следующем порядке

1) $y = x^2$ (рис. 6);

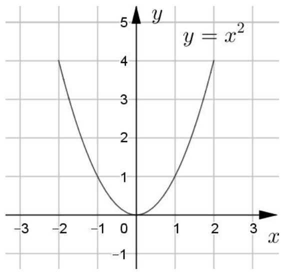


Рис. 6

2) $y = (x-1)^2$ (рис. 7);

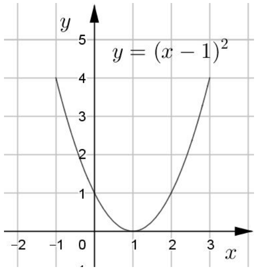


Рис. 7

3) $y = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2$ (рис. 8);

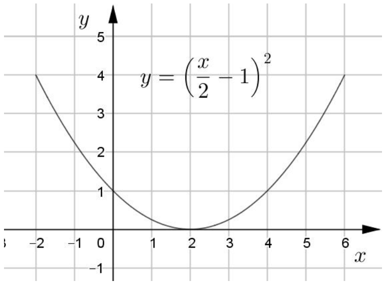


Рис. 8

4) $y = 3\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2$ (рис. 9);

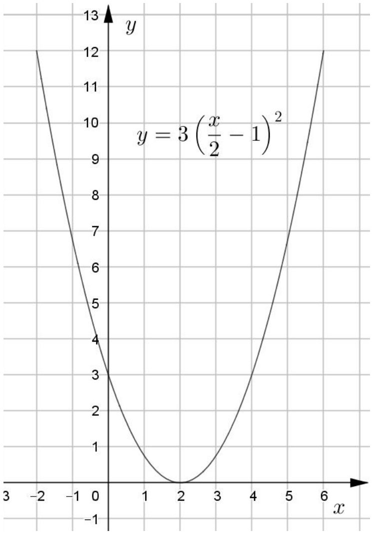


Рис. 9

5) $y = 3\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - 2$ (рис. 10).

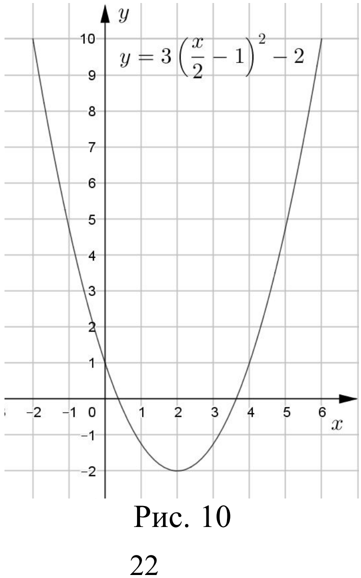


Рис. 10

Далее выполним преобразования получившегося графика:

1) График функции $y = -f(x)$, то есть $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 1$ (рис. 11):

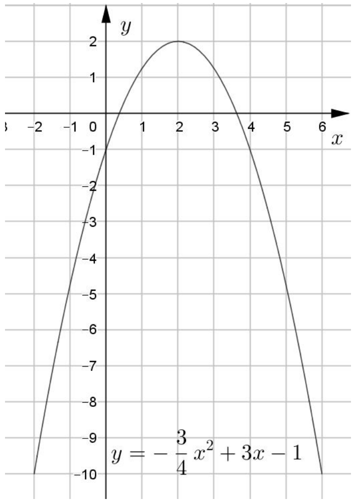


Рис. 11

2) График функции $y = f(-x)$, то есть $y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$ (рис. 12):

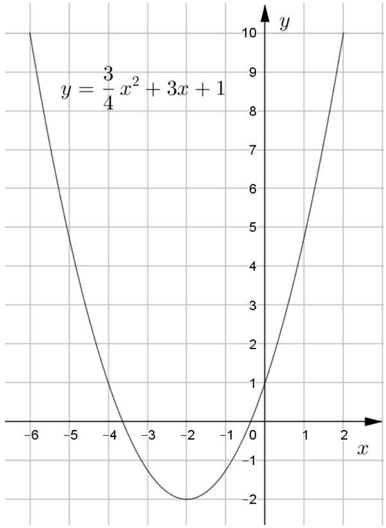


Рис. 12

3) График функции $y = |f(x)|$, то есть $y = \left|\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 1\right|$ (рис. 13):

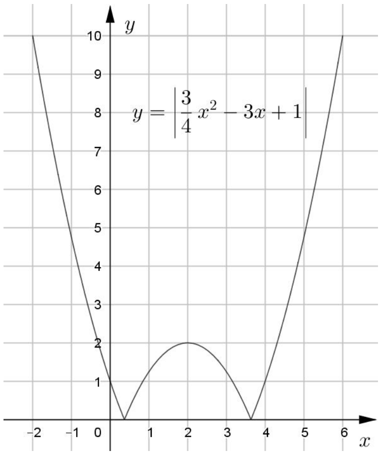


Рис. 13

4) График функции $y = f(|x|)$, то есть $y = \frac{3}{4}x^2 - 3|x| + 1$ (рис. 14):

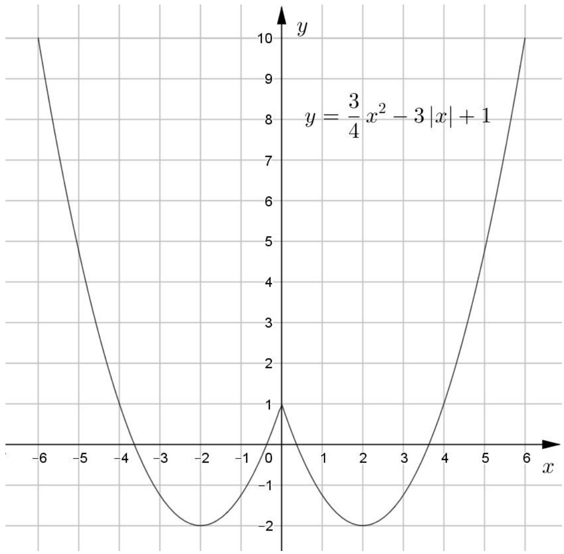


Рис. 14

Задания

1. Какие из указанных на рис. 15 соответствий являются функциями?

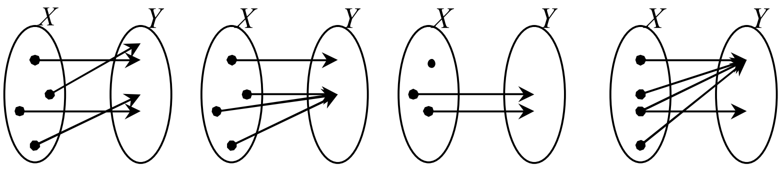


Рис. 15

2. Найдите область определения функций:

2.1. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; 2.2. $f(x) = \sqrt[4]{9x^2 - 4}$;

2.3. $f(x)=\log_x(10-x)$;

2.4. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{-x^2+7x-6}}$; 2.5. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

3. Исследуйте функцию на четность:

3.1. $f(x)=\sqrt{x}$; 3.2. $f(x)=2x^4-x^2+3$;

3.3. $f(x)=x^5-3x^3+x$; 3.4. $f(x)=6x^8+x$;

3.5. $f(x)=\lg\dfrac{7x-8}{7x+8}$.

4. Найдите основной период функции:

4.1. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$; 4.2. $f(x)=\operatorname{tg}5x$; 4.3. $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}-1\right)$;

4.4. $f(x)=\sin\dfrac{3x}{4}+5\cos\dfrac{2x}{3}$.

5. Найти промежутки монотонности функций:

5.1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$; 5.2. $f(x)=\lg\left(x^2-6x+10\right)$;

5.3. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}$; 5.4. $f(x)=\sqrt[3]{4-x^2}$.

6. Найдите множество значений функции. Выясните, является ли функция ограниченной.

6.1. $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin^2 x+3)$; 6.2. $f(x)=x^2-6x+6$;

6.3. $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$; 6.4. $f(x)=\log_2\left(10x-x^2-17\right)$.

7. Найдите функцию, обратную данной, и постройте графики данной и обратной функции:

7.1. $f(x)=2x^2+1$ при $x\ge 0$;

7.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } 1\le x<2; \\ 12-3x, & \text{если } 2\le x\le 3. \end{cases}$

8. Постройте графики функций с помощью цепочки преобразований (каждый график строится на отдельной координатной плоскости):

8.1. $y=\left|\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$: 1) $y=\sin(x)$, 2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, 3) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, 4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

5) $y=\left|\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$;

8.2. $y=\log_3|2-3x|-1{,}5$: 1) $y=\log_3 x$, 2) $y=\log_3|x|$, 3) $y=\log_3|x-2|$, 4) $y=\log_3|3x-2|$, 5) $y=\log_3|3x-2|-1{,}5$;

8.3. $y=\left|-2^{|x+1|}+3\right|$: 1) $y=2^x$, 2) $y=2^{|x|}$, 3) $y=2^{|x+1|}$,

4) $y=2^{|x+1|}-3$, 5) $y=\left|2^{|x+1|}-3\right|$.

1.3. Последовательности. Свойства последовательностей. Предел последовательности

Определение 1.31. Функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется **последовательностью** и обозначаются $\{x_n\}$.

Способы задания последовательностей

1) Аналитический.
2) Табличный.
3) Графический.
4) Описательный.

5) Рекуррентный. Если n-й член последовательности выражен через её предыдущие члены, то последовательность задана рекуррентно.

Примеры. Арифметическая прогрессия: $a_n = a_{n-1} + d$.

Геометрическая прогрессия: $b_n = b_{n-1} \cdot q$.

Последовательность Фибоначчи: $a_1 = 1, a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Определение 1.32. Имеем последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ Тогда последовательность, полученная из данной последовательности $\{x_n\}$ путем произвольного выбора из неё бесконечного числа членов, взятых в том порядке, в каком они находились первоначально в $\{x_n\}$, называется $\{x_{n_k}\}$ **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Пример. $\{x_n\}$: $x_n = n^{\cos \pi n}$ (рис. 16) выделим две подпоследовательности: при $n = 2k-1$ $x_{n_k} = \dfrac{1}{2k-1}$, при $n = 2k$ $x_{n_k} = 2k$.

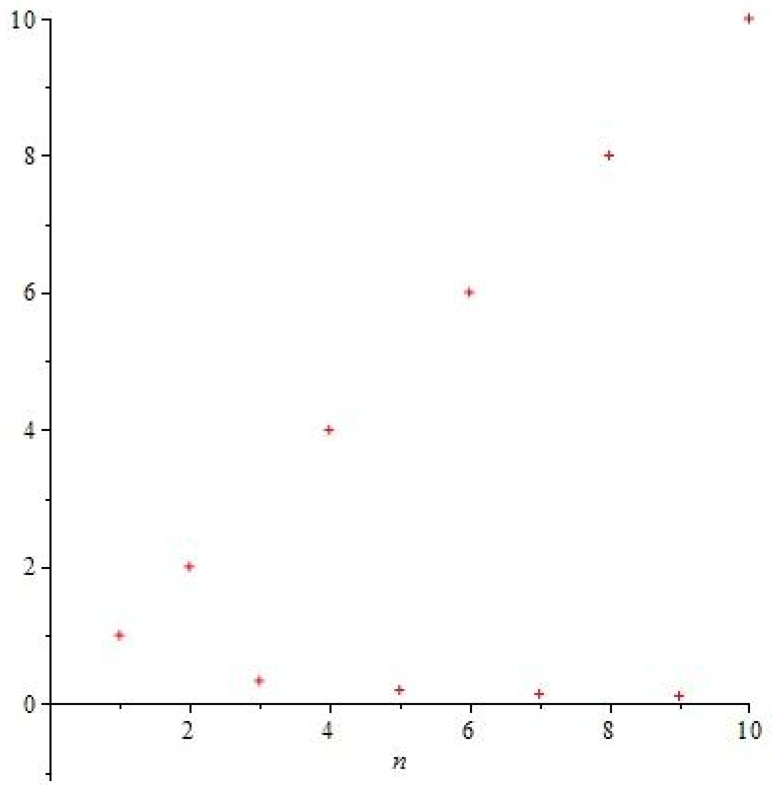


Рис. 16

Пример. $\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n$ (рис. 17). Выделим две подпоследовательности:
$\{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ и $\{-1, -1, -1, \dots, -1, \dots\}$

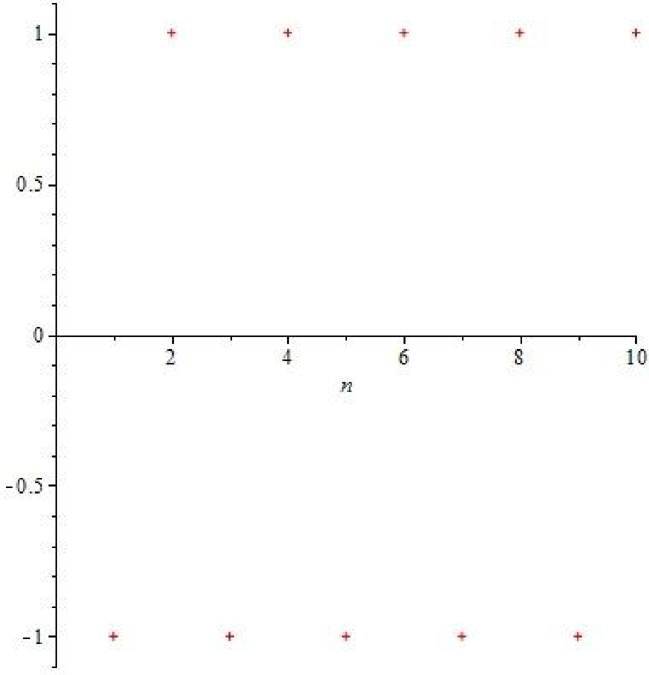


Рис. 17

Определение 1.33. Последовательность называется **стационарной**, если все члены последовательности постоянны.

Понятие четности и нечетности для последовательностей не имеет смысла, так как множество натуральных чисел не симметрично.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **периодической,** если $\exists l \in N : \forall n \in N \quad x_n = x_{n+l}$, l – период.

Пример. $\{x_n\}: x_n = (-1)^n$ периодическая с периодом 2.

Определение 1.34. $\{x_n\}$ **строго возрастает** $\Leftrightarrow \forall n \in N \ x_n < x_{n+1}$.

Определение 1.35. $\{x_n\}$ **строго убывает** $\Leftrightarrow \forall n \in N\ \ x_n > x_{n+1}$.

Определение 1.36. $\{x_n\}$ **возрастает** $\Leftrightarrow \forall n \in N\ \ x_n \le x_{n+1}$.

Определение 1.37. $\{x_n\}$ **убывает** $\Leftrightarrow \forall n \in N\ \ x_n \ge x_{n+1}$.

Примеры.

1. $\{x_n\}$: $x_n = n$ (рис. 18) строго возрастает:

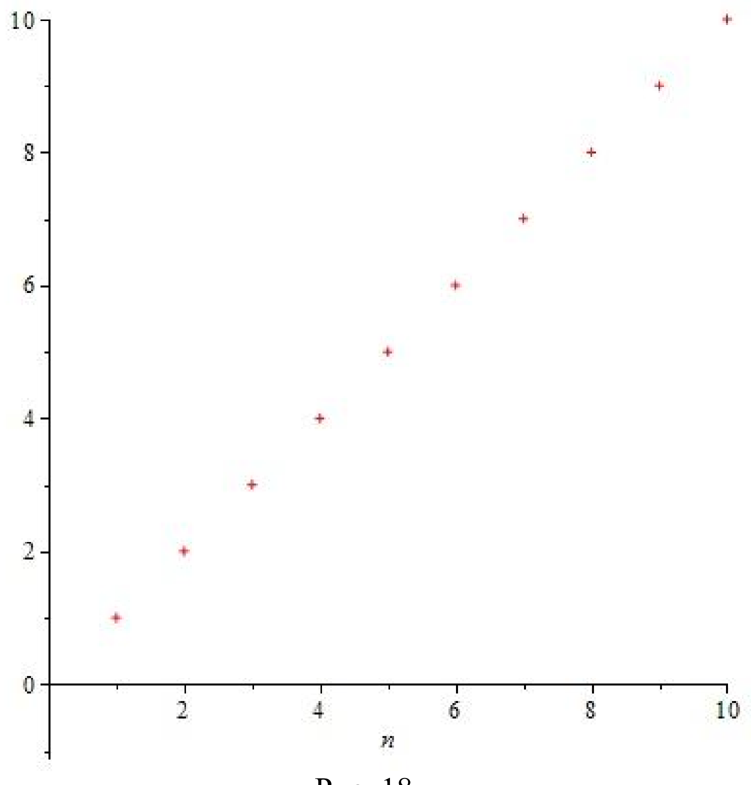


Рис. 18

2. $\{1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; \ldots\}$ (рис. 19) возрастает:

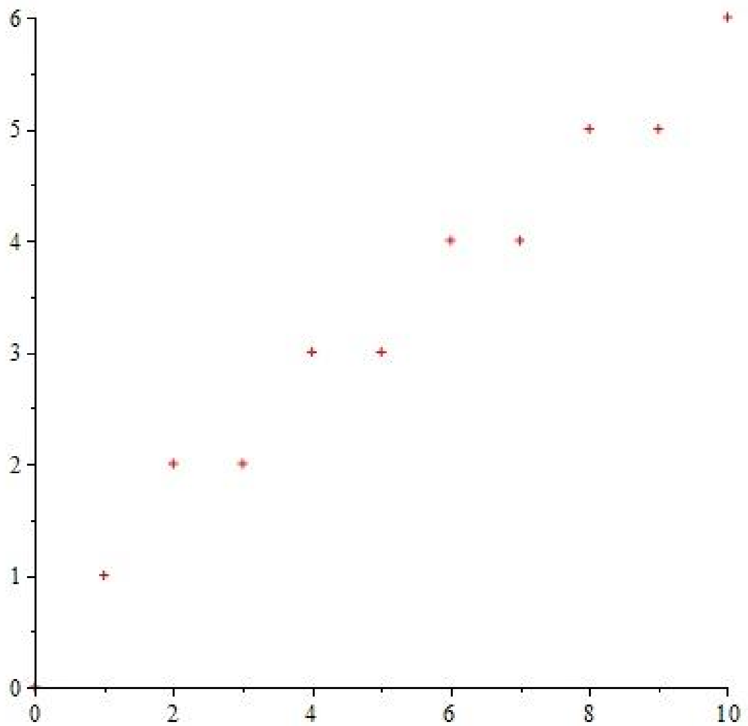


Рис. 19

3. $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{1}{n}$ (рис. 20) строго убывает:

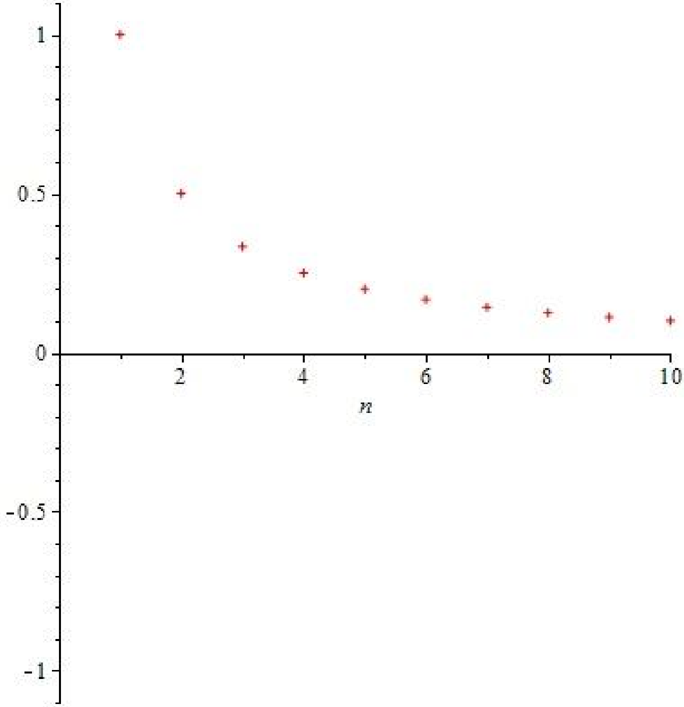


Рис. 20

4. $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (рис. 21) не монотонная:

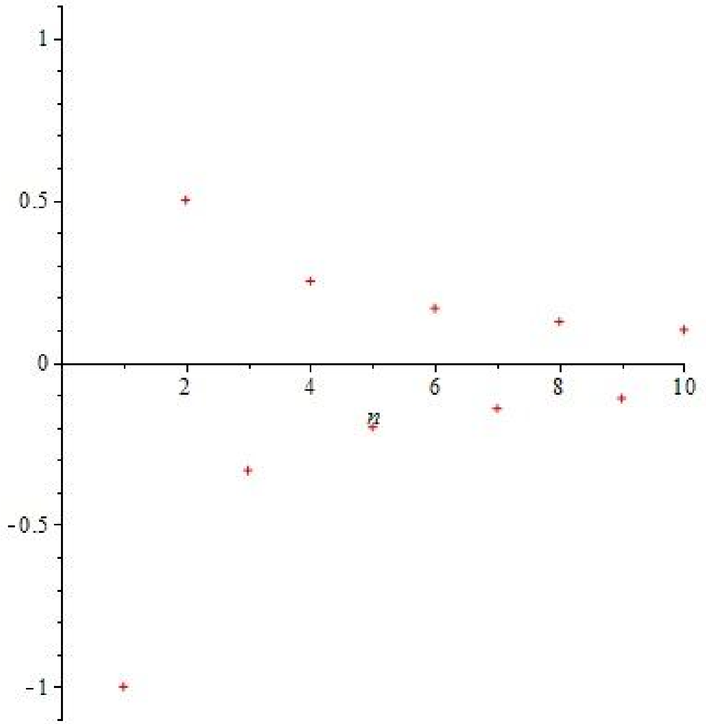


Рис. 21

Определение 1.38. $\{x_n\}$ **ограниченная сверху** $\Leftrightarrow$ $\exists M\ \forall n \in N\ x_n \le M$.

Определение 1.39. $\{x_n\}$ **ограниченная снизу** $\Leftrightarrow$ $\exists m\ \forall n \in N\ x_n \ge m$.

Определение 1.40. $\{x_n\}$ **ограниченная** $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0\ \forall n \in N\ |x_n| \le M$.

Определение 1.41. $\{x_n\}$ **неограниченная сверху** $\Leftrightarrow$ $\forall M \ \exists n \in N \ x_n > M$.

Определение 1.42. $\{x_n\}$ **неограниченная снизу** $\Leftrightarrow$ $\forall m \ \exists n \in N \ x_n < m$.

Определение 1.43. $\{x_n\}$ **неограниченная** $\Leftrightarrow$ $\forall M > 0 \ \exists n \in N \ |x_n| > M$.

Примеры.

1. $\{x_n\}$: $x_n = -\dfrac{1}{n}$ (рис. 22), ограниченная сверху и снизу:

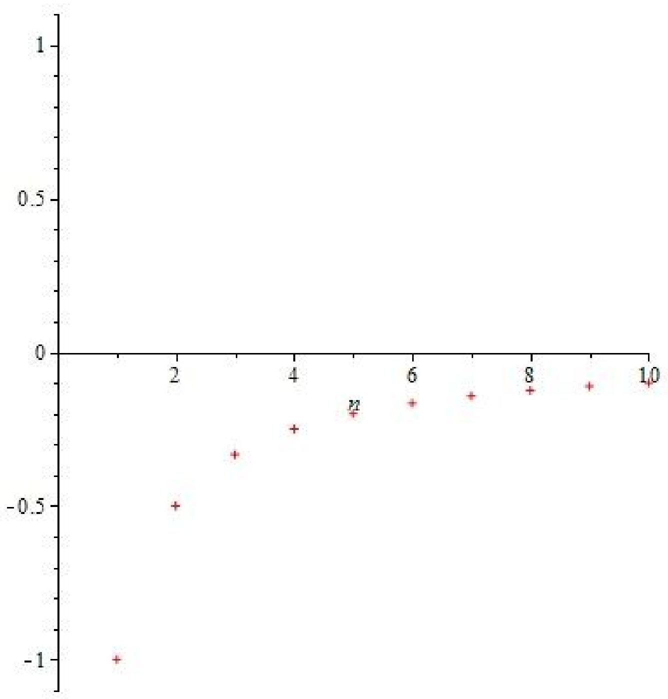


Рис. 22

2. $\{x_n\}$: $x_n = -n$ (рис. 23), ограниченная сверху и не ограниченная снизу:

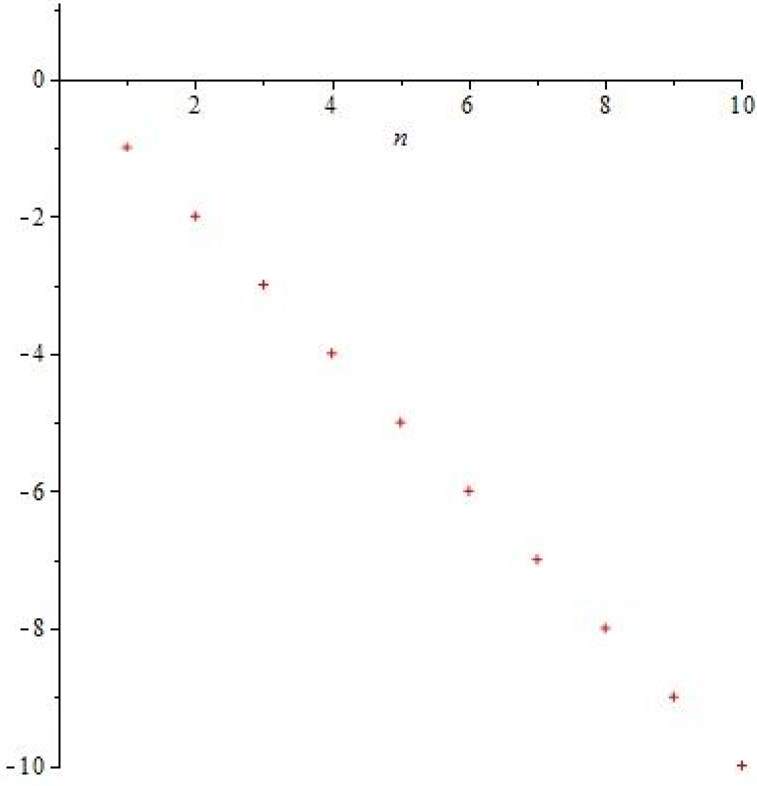


Рис. 23

3. $\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n \cdot n$ (рис. 24), не ограниченная сверху и снизу:

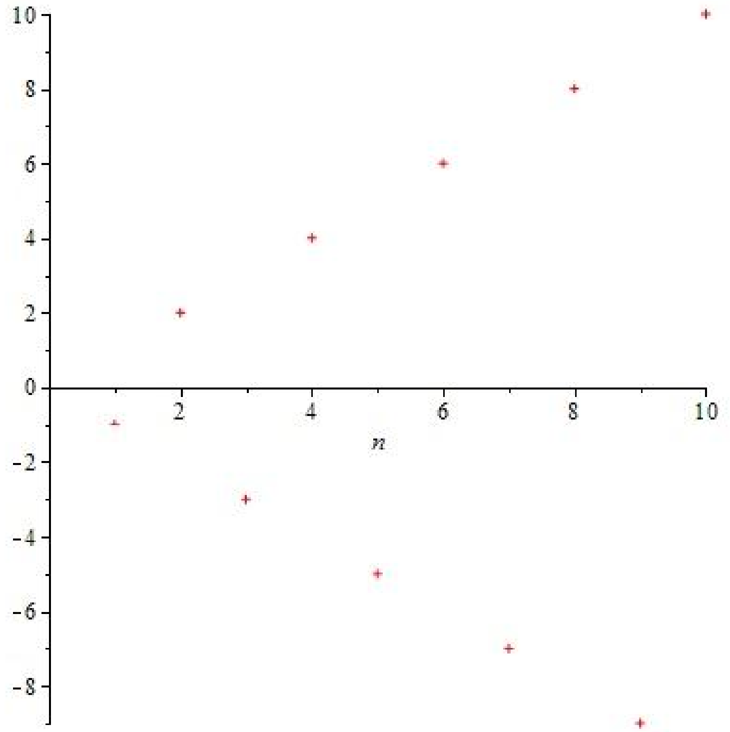


Рис. 24

Исследуйте последовательности на монотонность и ограниченность, используя рисунки 16, 18 – 24:

1. $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{n}$, 2. $\{x_n\}$: $x_n = -\frac{1}{n}$, 3. $\{x_n\}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

4. $\{x_n\}$: $x_n = n$, 5. $\{x_n\}$: $x_n = -n$, 6. $\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n \cdot n$,

7. $\{x_n\}$: $x_n = n^{\cos \pi n}$.

Определение 1.44. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \quad |x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Примеры бесконечно больших последовательностей:

1. $\{x_n\}$: $x_n = n$ (рис. 18);
2. $\{x_n\}$: $x_n = -n$ (рис. 23);
3. $\{x_n\}$: $x_n = (-1)^n \cdot n$ (рис. 24).

Определение 1.45. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \quad |x_n| < \varepsilon$.

Примеры бесконечно малых последовательностей:

1. $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{1}{n}$ (рис. 20)
2. $\{x_n\}$: $x_n = -\dfrac{1}{n}$ (рис. 22)
3. $\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (рис. 21)

Теорема 1.3 (*о связи бесконечно большой и бесконечно малой последовательности*). Если последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, то последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая.

Предел последовательности

Определение 1.46. Точка a числовой прямой называется **пределом последовательности**, если какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последнее неравенство равносильно $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Пример. 1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \dfrac{8}{n}(-1)^n\right) = 4$, на рисунке 25 изображена последовательность и ε-окрестность 4, при $\varepsilon = 1$ все члена последовательности, начиная с девятого, находятся внутри ε-окрестности.

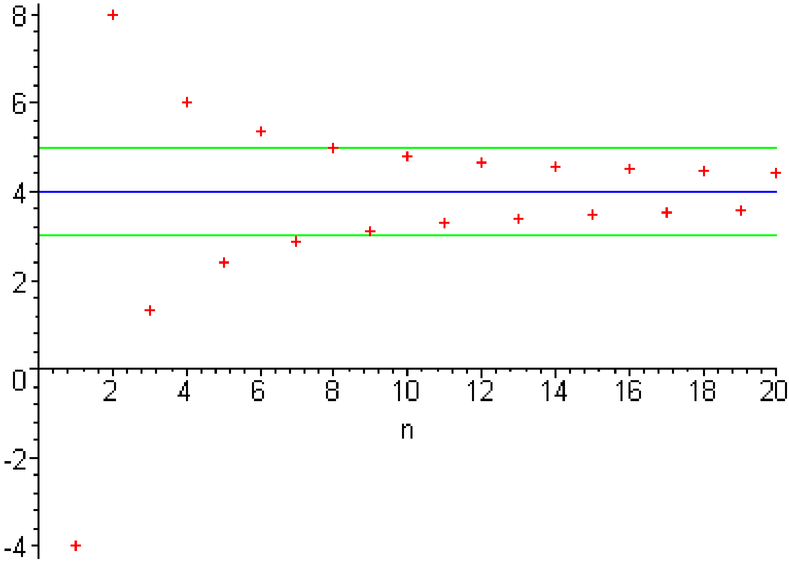


Рис. 25

Определение 1.47. Всякая последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**.

Определение 1.48. Если последовательность не является сходящейся, то ее называют **расходящейся**.

Теорема 1.4. Предел бесконечно малой последовательности равен нулю.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x_n > \frac{1}{\varepsilon} \\ x_n < -\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right.$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \quad x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \quad x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Теорема. 1.5. Бесконечно большая последовательность расходится.

Основные теоремы о пределе последовательности

Теорема 1.6. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Теорема 1.7. Если последовательность сходится, то она ограниченна.

Обратная теорема неверна, например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограниченна и не сходится.

Теорема 1.8. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то сумма и разность этих последовательностей тоже будут сходиться $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 1.9. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то произведение этих последовательностей тоже будет сходиться. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Теорема 1.10. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то частное этих последовательностей тоже будет сходиться. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Теорема 1.11 (*о пределе промежуточной последовательности*). Если последовательность $\{z_n\}$ такая, что выполняется неравенство $x_n \le z_n \le y_n$ для всех значений *n*, начиная с некоторого номера, причем последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу, то последовательность $\{z_n\}$ сходится к этому же числу (рис. 26).

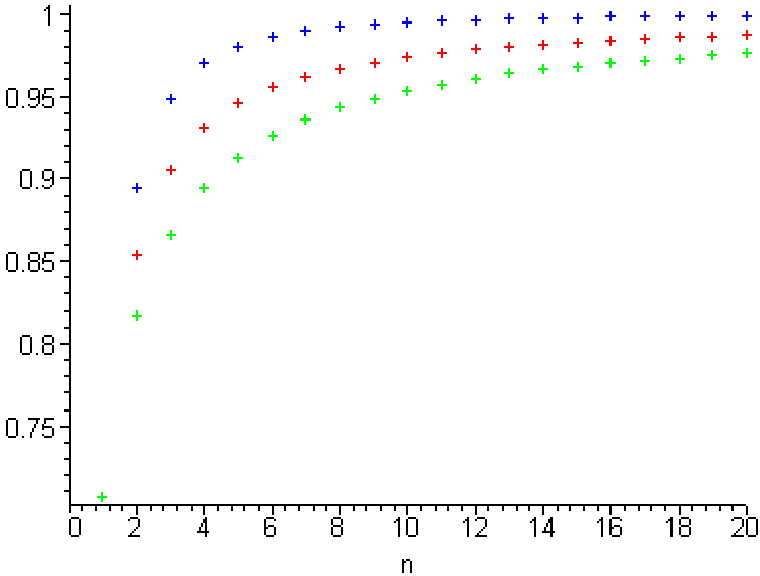


Рис. 26

Теорема 1.12 (*теорема Вейерштрасса*). Если возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Теорема 1.13 (*теорема Больцано-Вейерштрасса*). Из всякой ограниченной последовательности всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Второй замечательный предел для последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, иррациональное число $e \approx 2{,}71828...$ экспонента.

Задания

1. Вычислите предел последовательности, пользуясь схемой в приложении 2:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{1}{n}}$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+4}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}$; 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+0{,}25}{8n+1}}$; 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n-3}$; 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$; 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)$; 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2)^2-(n+3)^2}{(n-2)^2+(n+3)^2}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^3-(3n+3)^3}{(3n+5)^2+(3n+7)^2}$; 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$; 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{3n}{n+2}}$; 17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{2n+4}{n-5}}$; 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}}$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-6}{3n^3+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n-8}}$; 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2-6}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}}$; 21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}$;

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2}\right)^{2n^2+1}$; 23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+6}{n^2+3}\right)^{n}$; 24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+5}{n^3+4}\right)^{2n^3}$;

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^2}$; 26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{n^2}$; 27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4n-1}{n^2+4n+5}\right)^{n^2}$;

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+5}{n^4+6}\right)^{n^5}$; 29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}}$;

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n+5}{2n^2+2n+1}\right)^{\frac{3n^2+1}{n+6}}$; 31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+5n-1}{3n^2+3n+2}\right)^{1-3n}$;

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-6n+7}{2n^2+20n-1}\right)^{\frac{1-n^3}{n^2+5}}$.

1.4. Предел функции. Асимптоты. Непрерывность функции и точки разрыва

Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ задана на некотором множестве X, за исключением точки x_0. Возьмем из множества X последовательность точек, отличных от x_0: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходящуюся к точке x_0. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n),...$ по отношению к которой можно ставить вопрос о существовании и нахождении предела. Последовательность $\{x_n\}$ можно составлять различными способами и каждый раз получать новую последовательность $\{f(x_n)\}$. Если последовательности $\{f(x_n)\}$, соответствующие всевозможным последовательностям $\{x_n\}$, имеют один и тот же предел, например, число A, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Если хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$,сходящейся к x_0 последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеет предела или имеет предел, но отличающийся от других, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 предел не имеет.

Определение 1.49 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ $\forall\{x_n\}:\ \forall n \in N\ x_n \neq x_0\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (рис. 27).

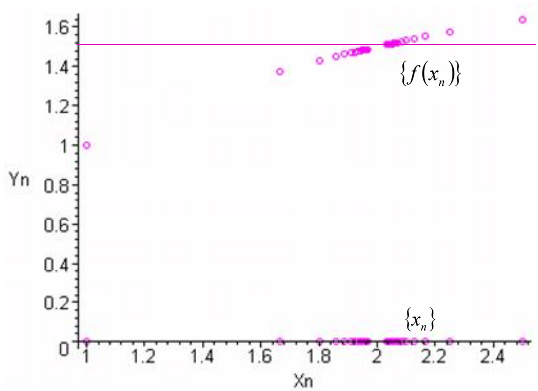


Рис. 27

Определение 1.50 (*по Коши*). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 28).

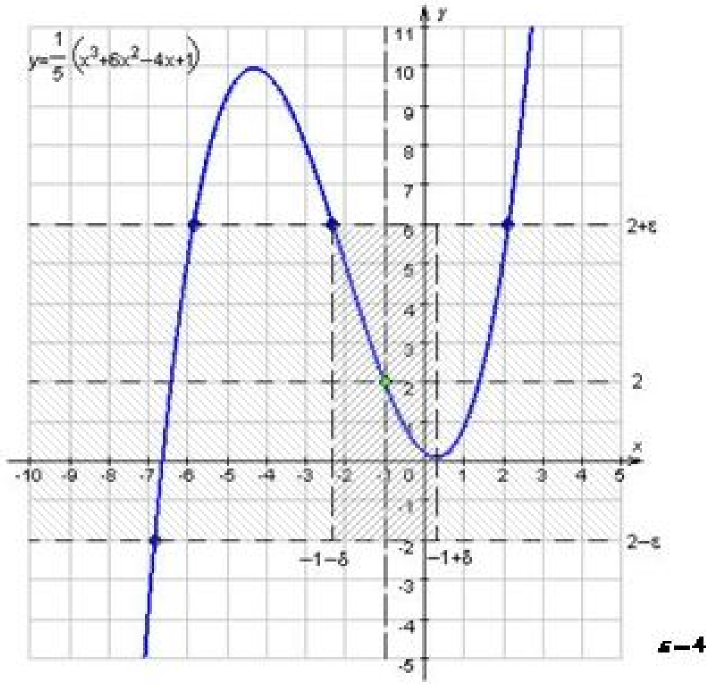


Рис. 28

Односторонние пределы в точке

Определение 1.51 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}\!:\ \forall n \in N\ x_n < x_0\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Определение 1.52 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}\!:\ \forall n \in N\ x_n > x_0\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Определение 1.53 (*по Коши*). $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:-\delta<x-x_0<0\ \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Определение 1.54 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:0<x-x_0<\delta\ \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Теорема 1.14. Если существует предел функции f в точке x_0 и равен A: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют пределы функции слева и справа, причем односторонние пределы равны пределу функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Бесконечные пределы в точке по Коши

Определение 1.55. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:0<\left|x-x_0\right|<\delta\ \left|f(x)\right|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 1.56. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:0<\left|x-x_0\right|<\delta\ f(x)>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 1.57. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x:0<\left|x-x_0\right|<\delta\ f(x)<-\frac{1}{\varepsilon}.$$

Предел функции на бесконечности

Определение 1.58 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A .$$

Определение 1.59 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\{x_n\}:\ \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A .$$

Определение 1.60 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Определение 1.61 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x > c\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 1.62 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x < c\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 1.63 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists c > 0\ \ \forall |x| > c\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Бесконечные пределы на бесконечности

Определение 1.64 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Определение 1.65 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Определение 1.66 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Определение 1.67 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Определение 1.68 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Определение 1.69 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall\{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Определение 1.70 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Определение 1.71 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall \{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Определение 1.72 (*по Гейне*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall \{x_n\}:\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Определение 1.73 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x > c\ \ |f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.74 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x < c\ \ |f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.75 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0\ \ \forall |x| > c\ \ |f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.76 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x > c\ \ f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.77 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c\ \ \forall x < c\ \ f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.78 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0\ \ \forall |x| > c\ \ f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.79 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \ \ \forall x > c \ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.80 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \ \ \forall x < c \ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.81 (*по Коши*). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \ \ \forall |x| > c \ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема 1.15. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

Теорема 1.16. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то существует окрестность точки x_0, в которой функция ограничена.

Теорема 1.17. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ при $B \neq 0$.

Теорема 1.18. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и для всех *x* из окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, то $A < B$.

Теорема 1.19. Если для всех *x* из окрестности точки

x_0 $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

Теорема 1.20. Пусть $y = f(t)$, $t = g(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = A$ функция $y = f(g(x))$ определена $U_\delta^\circ(x_0)$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$.

Если в теоремах 1.15 – 1.20 заменить x_0 на ∞, то теоремы будут верны.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ или

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение 1.82. Две бесконечно малые функции называются эквивалентными, если $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$; 2. $\operatorname{tg} x \sim x$; 3. $\arcsin x \sim x$; 4. $\operatorname{arctg} x \sim x$;

5. $(1 - \cos x) \sim \dfrac{x^2}{2}$; 6. $(1 + x)^n - 1 \sim n \cdot x$; 7. $\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$;

8. $\ln(1 + x) \sim x$; 9. $\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$;

10. $(a^x - 1) \sim x \ln a$; 11. $(e^x - 1) \sim x$.

Асимптоты кривой

Определение 1.83. Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равен бесконечности.

Определение 1.84. Прямая $y=y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= y_0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= y_0$.

Определение 1.85. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. Причем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Непрерывность функции и точки разрыва

Определение 1.86. Функция f **непрерывна** в точке x_0, если предел функции в точке равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= f(x_0)$.

Если в точке функция не является непрерывной, то она терпит разрыв в этой точке.

Определение 1.87. Если предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует и не равен значению функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ (рис. 29) или функция не определена в этой точке, то точка x_0 (рис. 30) называется **точкой устранимого разрыва**.

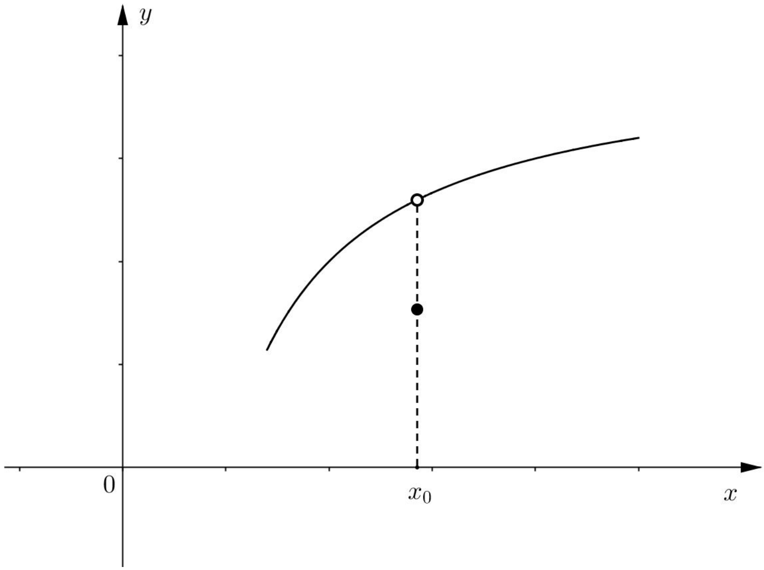


Рис. 29

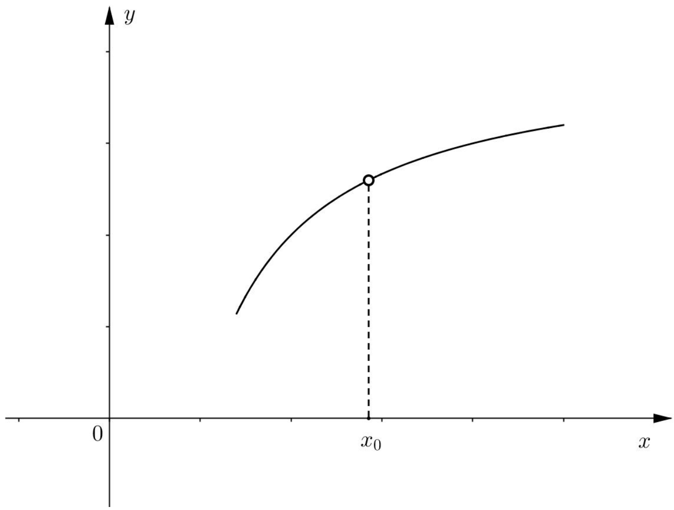


Рис. 30

Определение 1.88. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (рис. 31), то точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода (скачок)**. Величина скачка $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Неважно, равно или нет $f(x_0)$ одному из односторонних пределов.

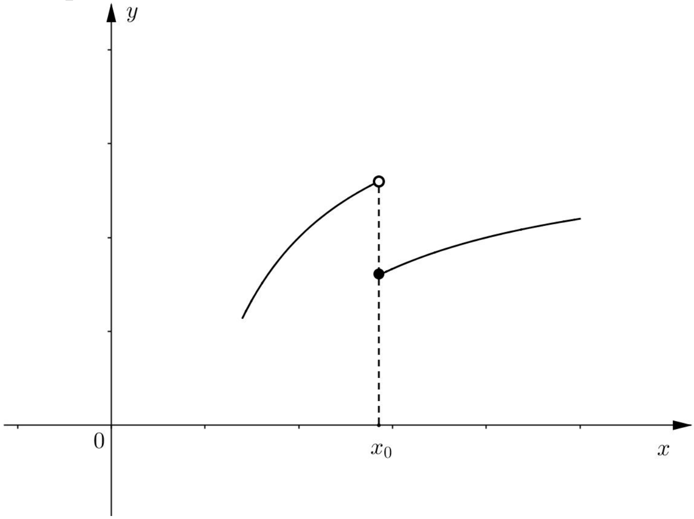


Рис. 31

Определение 1.89. Если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности (рис. 32) или не существует (рис. 33), то точку x_0 называют **точкой разрыва второго рода**.

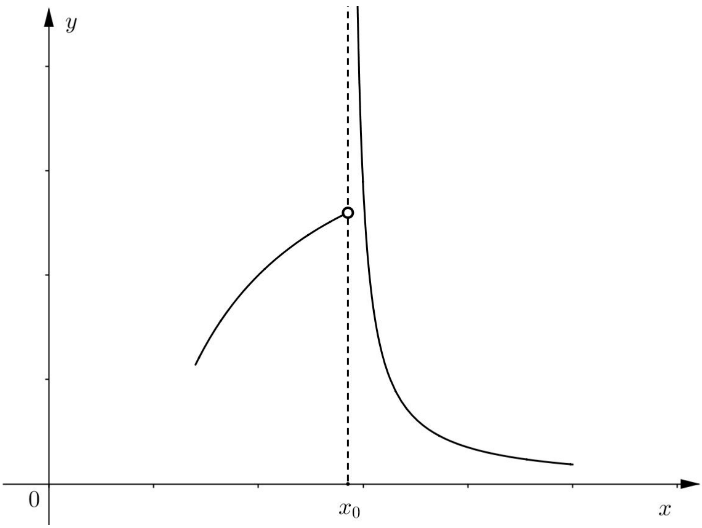


Рис. 32

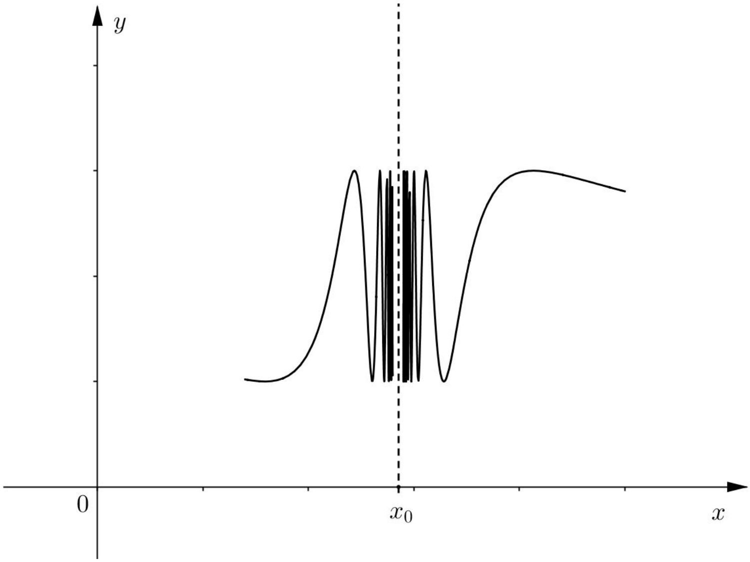


Рис. 33

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1.21. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует такая окрестность точки x_0, в которой функция ограничена.

Теорема 1.22. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$ ($f(x_0)<0$), то существует окрестность точки x_0, что для всех *x*, входящих в эту окрестность, выполняется неравенство $f(x)>0$ ($f(x)<0$).

Теорема 1.23. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$ и $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0)\neq 0$) непрерывны в точке x_0.

Теорема 1.24. Если функция $t=g(x)$ непрерывна в точке x_0, функция $y=f(t)$ непрерывна в точке $t_0=g(x_0)$, то функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность функций на множестве

Определение 1.90. Функция называется **непрерывной на множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 1.25 (*I теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на нем.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на нем, значит, ограничено множество значений функции, следовательно, существуют $m=\inf E(f)$ и $M=\sup E(f)$.

Теорема 1.26 (*II теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на $[a;b]$, то она достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значения, то есть существует точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c) = m$ и существует точка $d \in [a;b]$, такая, что $f(d) = M$.

Теорема 1.27 (*I теорема Больцано-Коши*). Если функция непрерывна на $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой $f(c) = 0$.

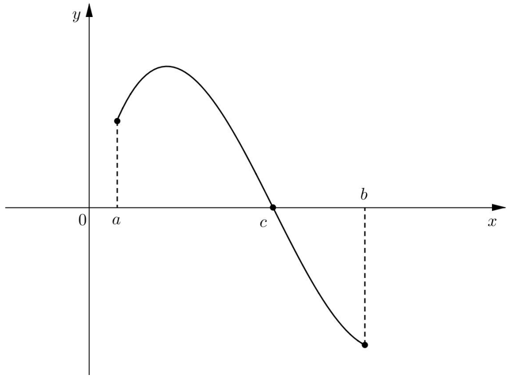


Рис. 34

Теорема 1.28 (*II теорема Больцано-Коши*). Если функция непрерывна на $[a;b]$, причем $f(a) \neq f(b)$, тогда для любого числа *C*, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a;b)$, в которой $f(c) = C$.

Следствие. Если функция непрерывна на $[a;b]$ и $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, то функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ принимает все значения из $[m;M]$.

Метод интервалов. Необходимо решить неравенство $f(x) > 0$, где функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Решим уравнение $f(x) = 0$, оно имеет n корней $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$. Можно утверждать, что внутри интервалов $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, …, $(x_n;b)$ функция $y=f(x)$ сохраняет постоянный знак. Поэтому достаточно взять на каждом из интервалов одну пробную точку и посмотреть в ней знак функции. Тот же знак будет иметь функция на всем интервале. Объединим промежутки, на которых $f(x)>0$, и получим решение неравенства.

Теорема 1.29. Если функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна на $[a;b]$, тогда на $[f(a);f(b)]$ определена, монотонна и непрерывна обратная функция $x=f^{-1}(y)$.

Задания

1. Вычислите предел функции:

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3x+4}{1-2x^3}$;
1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 10x}{x^2+5}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+\cos x}{5x^2+1}$;
1.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)$;

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+5x^2-1}-3x^2\right)$;
1.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$;

1.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt[5]{32x^5+1}}{\sqrt[6]{x+7}-x}$;
1.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^7-1}+\sqrt[3]{x^2+1}}$;

1.9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$;
1.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5-2x^4+3x^3}{x^3(1+3x)}$;

1.11. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}$;
1.12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

1.13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$;
1.14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2+x+6}$;

1.15. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^4-6x^3+10x^2-6x+9}$;

1.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$; 1.17. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{x+17}-5}{x-8}$;

1.18. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2x^2-15x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; 1.19. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+11}-3}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+3}}$;

1.20. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x-4}}$; 1.21. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}-3}{\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt[6]{x-5}}$;

1.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x}$; 1.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$; 1.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

1.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\sin 5x-\sin 3x}$; 1.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; 1.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

1.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$; 1.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x-\cos x}{3x}$;

1.30. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$; 1.31. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

1.32. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+4}\right)^{\frac{3x^3+2}{7-x^3}}$; 1.33. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{15}{x}}$;

1.34. $\lim\limits_{x\to 0} (1+6x)^{\frac{x+1}{6x^2+12x}}$; 1.35. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}}$;

1.36. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 10x}{x^2+5}$; 1.37. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+\cos x}{5x^2+1}$.

2. Вычислите предел с помощью эквивалентных бесконечно малых:

2.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin x}$; 2.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x\cdot \operatorname{tg}^2(6x)}{\operatorname{arctg}^2 3x\cdot \sin 2x}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x\cdot(1-\cos x)}{\arcsin^2 3x\cdot\sin\dfrac{x}{\pi}}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{1+3x}-1}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^5-1}{\sqrt{x+4}-2}$;

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\log_3(1+x)}$;

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$;

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1-\sin 3x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 3x-1}{\sin^2 2x}$; 2.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; 2.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

3. Найдите асимптоты кривой:

3.1. $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$; 3.2. $y=\dfrac{3-2x^2}{x}$; 3.3. $y=\dfrac{2x^3+3x^2-x+1}{x^2+4x-3}$;

3.4. $y=\dfrac{2x+1-x^2}{7x+2x^2-4}$;

3.5. $y=\dfrac{\cos^2 x+6x^2}{x^2+9}$;

3.6. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}+2x$;

3.7. $y=\sqrt{x^2+x}$.

4. Постройте график функции, найдите точки разрыва и классифицируйте их:

4.1. $f(x)=\operatorname{sign}x$; 4.2. $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2}$; 4.3. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$;

4.4. $f(x)=\begin{cases} x^3-1, & x\le -1,\\ x, & -1<x\le 0\\ \dfrac{2}{x}, & 0<x<1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$; 4.5. $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+6, & x<-2,\\ \log_2(2-x), & -2<x<2,\\ \sin(x-2), & x\ge 2.\end{cases}$.

5. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ так, чтобы она стала непрерывной.

6. Решите неравенства методом интервалов:

6.1. $(x+1)(x-3)(2x+1)(x-7)(x-2)>0$;

6.2. $(x^2-3x-4)x\geq 0$;

6.3. $\dfrac{(x+3)(x-4)x}{(x+1)(x+2)}\leq 0$;

6.4. $(x-2)^2(x+1)(x-3)<0$;

6.5. $\dfrac{(x-5)(x+2)^2}{(x-1)}\leq 0$;

6.6. $\dfrac{4-x^2}{(x+7)x}\leq 0$;

6.7. $\dfrac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x+2)}>0$;

6.8. $\dfrac{5}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$;

6.9. $\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}>\dfrac{5}{x}$.

Глава 2. Дифференциальное исчисление

2.1. Понятие производной и дифференцируемой функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на $(a;b)$. Зафиксируем произвольную точку x из $(a;b)$. Δx – произвольное число, настолько малое, что $x+\Delta x\in(a;b)$, причем $\Delta x\neq 0$.

Приращением функции $y=f(x)$ в точке x, отвечающим приращению аргумента Δx, будем называть число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Определение 2.1. **Производной** функции $y=f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел при $\Delta x\to 0$ отношения приращения функции к приращению аргумента. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

Определение 2.2. **Правой производной** функции $y=f(x)$ в фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to 0+0$, т.е. $\Delta x>0$ и $\Delta x\to 0$. $f'(x+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
Левой производной функции $y=f(x)$ в фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to 0-0$, т.е. $\Delta x<0$ и $\Delta x\to 0$). $f'(x-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если функция $y=f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то эта функция в точке x имеет как правую, так и левую производную, причем $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$.

Если же $f'(x+0) \neq f'(x-0)$, то $f'(x)$ не существует.

Определение 2.3. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке *x*, если приращение функции Δy этой функции в точке *x* может быть представлено в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Теорема 2.1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке *x*, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную.

Эта теорема позволяет нам в дальнейшем отождествлять понятие дифференцируемости функции в данной точке с понятием существования конечной производной в функции в данной точке.

Операцию нахождения производной будем называть дифференцированием.

Определение 2.4. Пусть функция $y = f(x)$, определенная на $(a;b)$, имеет конечную производную в каждой точке $x \in (a;b)$, тогда на $(a;b)$ определена **производная функция** $y = f'(x)$.

Теорема 2.2. Если функция *f* дифференцируема в точке *x*, то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема не верна.

Рассмотрим функцию *f*, дифференцируемую в точке *x*.

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. $A = f'(x)$.

$A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ – главная часть приращения Δy.

$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx.

Определение 2.5. **Дифференциалом функции** f в точке x называется главная часть приращения Δy и обозначается $df = f'(x)\cdot \Delta x$.

Геометрический смысл производной и дифференциала

Геометрический смысл производной: производная функции в точке x – это угловой коэффициент наклона касательной, проведенной к графику функции в данной точке, или тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox. $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$.

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной,

$y = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение нормали (рис. 35).

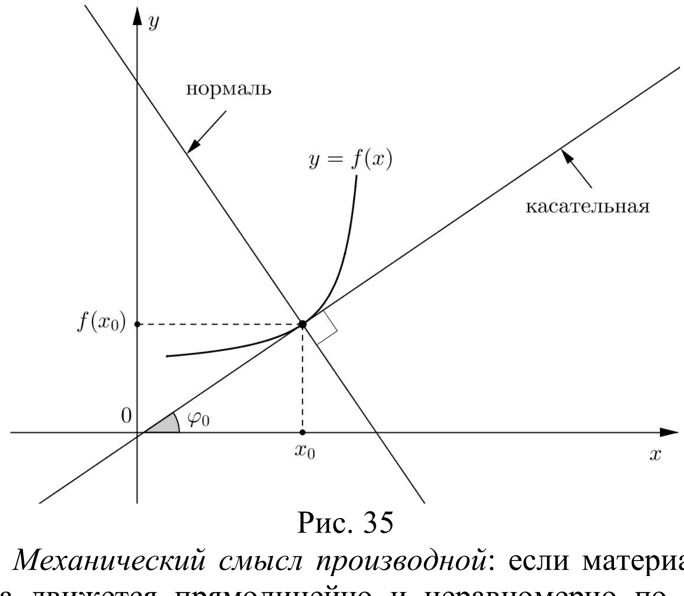


Рис. 35

Механический смысл производной: если материальна точка движется прямолинейно и неравномерно по закону $x = x(t)$, где x – расстояние, t – время, то мгновенная скорость есть производная пути по времени $v(t) = x'(t)$, а ускорение в данный момент времени – как производная от скорости $a(t) = v'(t)$.

Правила дифференцирования

Теорема 2.3. Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы в точке *x*, тогда сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что значение $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причем:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (u \cdot v)' = u'v + uv', \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Следствие 2.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

Теорема 2.4. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке *t*, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \varphi(t)$, тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке *t*, причем $(f(\varphi(t)))' = f'(x) \cdot \varphi'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Теорема 2.5. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Пусть *f* дифференцируема в точке *x* и ее производная равна $f'(x) \neq 0$, тогда в некоторой окрестности точки $y = f(x)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, дифференцируемая в точке *y* и $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Задания

Вычислите производные функций, используя приложение 3:

1. $y = x^{13} - 5x^5 + 12x$; 2. $y = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$;

3. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[5]{x^4}$; 4. $y = \frac{x^2 - 2x + 3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;

5. $y = x^8 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{10\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[4]{x^5}}$; 6. $y = 5\sin x - 4\cos x + \pi^2$;

7. $y = \frac{3}{4}\operatorname{tg} x + \frac{4}{3}\operatorname{ctg} x$; 8. $y = \log_2 x + 5 \cdot 3^x - \log_3 8$;

9. $y = e^x + \ln x - e^2$; 10. $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{3}\arcsin x$;

11. $y = e^x \cdot \sin x + \cos\frac{\pi}{12}$; 12. $y = \arccos x \cdot \cos x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;

13. $y = 3^x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin 1$; 14. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$;

15. $y = \frac{\log_5 x}{6^x}$; 16. $y = \log_x 3 \cdot \arccos x$;

17. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arccos x} + \sqrt[3]{6}$; 18. $y = \sin 5x + \operatorname{tg} 10x$;

19. $y = \log_5\left(x^4 + x\right)$; 20. $y = \arcsin\left(3x^2 - 4x^5\right)$;

21. $y = \cos^3 x + \sin\frac{\pi}{3}$; 22. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$;

23. $y = \operatorname{arcctg}^2 x - 8^{\sin x}$; 24. $y = 2^{\sin x^2} + 3^{\cos^2 x}$;

25. $y = \log_2 \log_3 \log_5 x$; 26. $y = \ln^2 \cos^3(4x - 1)$;

27. $y = \arccos\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$; 28. $y = \ln\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$;

29. $y = \sin\cos^2 x \cdot \cos\sin^2 x$;

30. $y = \ln\left(1+\sin^2 x\right) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg}\sin x$;

31. $y = \operatorname{tg}\arcsin^3 \log_{11} \operatorname{ctg} x$;

32. $y = \cos e^{\operatorname{arctg}(x\cdot\ln x)}$;

33. $y = \arcsin 4^{ctgx} \cdot \operatorname{arcctg}\dfrac{x+2}{3-x^3}$;

34. $y = \dfrac{1}{\sin\alpha}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \ln\dfrac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$;

35. $y = e^x \cdot \arcsin\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x}$;

36. $y = \dfrac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x - 2\sin x} + 2\arcsin\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{2}}$.

2.2. Инвариантность дифференциала. Логарифмическое дифференцирование. Производные функций, заданных параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков

Инвариантность формы дифференциала

Задана функция $y = f(x)$, если x независимая переменная, $dy = f'(x)dx$.

Рассмотрим случай, когда аргумент x является дифференцируемой функцией $x = \varphi(t)$. Мы получили сложную функцию $y = f(\varphi(t))$. Вычислим ее дифференциал:

$$dy = \left(f(\varphi(t))\right)' dt = f'\underbrace{(\varphi(t))}_{x}\cdot\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx} = f'(x)dx.$$

Таким образом, дифференциал имеет один и тот же вид для независимой переменной x и для дифференцируемой функции $x = \varphi(t)$. Это свойство принято называть инвариантностью формы дифференциала.

Замечание. Производную функции f обозначают

$\frac{df}{dx} = f'(x)$.

Применение дифференциала для приближенных вычислений

$dy = f'(x_0)dx$, т.к. $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Из условий $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ и $dy = A \cdot \Delta x$ следует, что $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на бесконечно малую функцию, следовательно, $\Delta y \approx dy$. Значит, $y - y_0 \approx f'(x_0)\Delta x$, $y \approx f'(x_0)\Delta x + y_0$

Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно-степенной функции

Пусть дана функция $y = f(x)$ положительная и дифференцируемая в точке *x*.

$$(\ln y)' = \ln' y \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Величину $(\ln y)'$ принято называть логарифмической производной функции $y = f(x)$ в точке *x*.

Вычислим производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемые, причем $y = u(x) > 0$.

$$(\ln y)' = \left(\ln u(x)^{v(x)}\right)' = \left(v(x) \cdot \ln u(x)\right)' =$$

$$= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

$$\left(u^v\right)' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Дифференцирование функции, заданной параметрически

До сих пор мы рассматривали уравнения линий на плоскости, связывающие непосредственно координаты x и y. Однако часто применяется другой способ задания линии, в котором координаты x и y рассматриваются как функции новой переменной t.

Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ называют параметрическими уравнениями, а переменную t – параметром.

Функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют производные по параметру t, а функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную. Производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Производные и дифференциалы высших степеней

Производная $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на $(a;b)$, представляет собой функцию, определенную на $(a;b)$. Если функция $y = f'(x)$ дифференцируема, то можно вычислить ее производную $y = f''(x)$ – ее называют производной второго порядка. Также вводится понятие производной третьего порядка и так далее. Если предположить, что нами введено понятие (n-1) производной и что она дифференцируема, то вычислив от нее производную, получим производную n-го порядка, обозначаемую $y = f^{(n)}(x)$.

Таким образом, понятие n-ой производной вводится индуктивно, переходя от первой производной к последующим $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Таблица производных высших порядков

1. $(\sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cdot \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in N$

2. $(\cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}n\right)$, $n \in N$

3. $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n \in N$

4. $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$, $n \in N$

5. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{x^n}$, $n \in N$

6. $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a}$, $n \in N$

7. $\left((ax+b)^c\right)^{(n)} = a^n \cdot c \cdot (c-1) \cdot \ldots \cdot (c-n+1) \cdot (ax+b)^{c-n}$, $n \in N$

Правила нахождения производных высших порядков

1. $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$, $n \in N$

2. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$, $n \in N$

3. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}$, $n \in N$ – формула Лейбница, где C_n^k число сочетаний из n элементов по k элементов и вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Дифференциалы высших порядков

Если x независимая переменная, то $dy = f'(x)dx$

$d^2 y = f''(x)dx^2$, …, $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Если же $x = \varphi(t)$, то $dy = f'(x)dx$.

А $d^2 y = f''(x)dx + f'(x)d^2 x$.

Второй и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантной формы.

Производные высших степеней функции, заданной параметрически

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{\varphi'_t} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\left(\varphi'\right)^3}$$

Задания

1. Вычислите производную функции, используя логарифмическое дифференцирование:

1.1. $y = (x-a)(x-b)(x-c)$;

1.2. $y = \dfrac{\sqrt[7]{x+1}\cdot\sqrt[5]{(x-3)^2}}{\sqrt[10]{(x-4)^3}}$; 1.3. $y = (x-1)\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt[5]{x-2}}}$.

2. Вычислите производную показательно-степенной функции:

2.1. $y = \left(x^2+3\right)^{\sqrt{x}}$; 2.2. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

2.3. $y = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$; 2.4. $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

3. Вычислите производные функций, заданных параметрически:

3.1. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$; 3.2. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$.

4. Напишите уравнение касательной и нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

5. На графике функции $y = 3x^3 - 4x^2 + 1$ найдите точку, в которой касательная образует с осью абсцисс угол $\dfrac{\pi}{4}$.

6. Составьте уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x = 8\sin^3 t; \\ y = 8\cos^3 t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t = \dfrac{\pi}{3}$.

7. Определите, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$.

8. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $S = 1 + t + 2t^2$, где S – путь в сантиметрах, t – время в секундах. Определите кинетическую энергию тела через 3 секунды после начала движения.

9. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 секунд. Определите угловую скорость ω через 32 секунды после начала движения.

10. Высота h снаряда, вылетевшего с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, изменяется по закону $h = (V_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$. В какой момент времени скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна 0?

11. Найдите дифференциал функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

11.1. x – независимая переменная;

11.2. $x = t^5 + t^2 - 3$.

12. Найдите дифференциал функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = 27\sin^3 t; \\ y = 27\cos^3 t \end{cases}$.

13. Вычислите значение дифференциала функции

$f(x)=\cos^3 x$ при изменении функции от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{12}$.

14. Вычислите приближенное значение выражения:

14.1 $\sqrt{9{,}02}$; 14.2 $\sin 29°$.

15. Вычислите $f^{(5)}(x)$, если $f(x)=x^5+x$.

16. Вычислите $f'''(x)$, если $f(x)=x^2\cdot e^{2x}$.

17. Вычислите $f^{(n)}(x)$, если $f(x)=\sin x$.

18. Вычислите $f^{(n)}(x)$, если $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

19. Вычислите $f^{(50)}(x)$, если $f(x)=x^2\cdot e^{2x}$.

20. Вычислите y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

21. Вычислите $d^2 f(x)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

2.3. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Правило Лопиталя

При вычислении пределов рассматривались неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$ и 1^∞. Это не полный перечень неопределенностей. Так же существуют $0\cdot\infty$, 0^0 и ∞^0.

Правило Лопиталя. Если

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) функции f и g дифференцируемы в точке a;

3) в окрестности точки a: $g'(x)\neq 0$;

4) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание. Правило Лопиталя выполняется, если $a=\infty$.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ приводятся к неопределенностям вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $\dfrac{0}{0}$ с помощью следующих преобразований: $0\cdot\infty=\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\infty}$ или $0\cdot\infty=0\cdot\dfrac{1}{0}=\dfrac{0}{0}$.

Неопределенности вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} приводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью основного логарифмического тождества $a^{\log_a b}=b$:

$u^{v}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\ln u^{v}}=e^{v\cdot\ln u}=[\infty\cdot 0]$;

$u^{v}=\left[0^{0}\right]=e^{\ln u^{v}}=e^{v\cdot\ln u}=[0\cdot\infty]$;

$u^{v}=\left[\infty^{0}\right]=e^{\ln u^{v}}=e^{v\cdot\ln u}=[0\cdot\infty]$.

Формула Тейлора

Пусть функция f не является многочленом и в точке x_0 имеется n производных

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – многочлен Тейлора функции $f(x)$

в точке x_0.

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – остаточный член n-го порядка формулы Тейлора

$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ – остаточный член в форме Пеано;

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $c \in [x_0; x]$, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0;1)$ – остаточный член в форме Лагранжа,

Если в формуле Тейлора подставить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$

Рассмотрим разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o\left(x^n\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o\left(x^n\right).$$

Применение дифференциального исчисления к исследованию функции. Условие постоянства, возрастания, убывания функций

Если функция f непрерывна на $[a;b]$, существует конечная производная на $(a;b)$:

f – постоянная $\Leftrightarrow$ $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)=0$;

f – возрастает (убывает) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$);

f – строго возрастает (строго убывает) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$).

Экстремумы функций

Определение 2.6. Точка x_0, в которой $f'(x_0)=0$, называется **стационарной точкой**. Точки, в которых $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, называются **критическими точками**.

Необходимое условие экстремума: Если функция f в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Достаточные условия экстремума.

1. Если x_0 – критическая точка и производная при переходе через нее меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка

минимума, а если с «+» на «–», то x_0 – точка максимума.

2. Если функция f в точке x_0 имеет конечную не нулевую производную второго порядка, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума, а если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума.

3. Пусть функция f имеет в точке x_0 производные n–го порядка включительно. Тогда если $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при четном n точка x_0 является точкой экстремума. Если $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума, если $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума. При нечетном n экстремума в точке x_0 нет.

На рисунке 36 показано, как выглядит минимума в случае, когда $f'(a)=0$ и $f'(b)=\infty$.

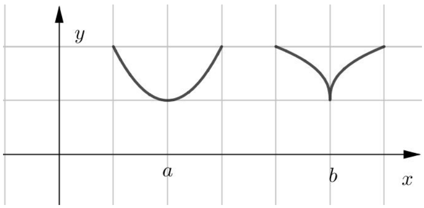


Рис. 36

Исследование функции на направление выпуклости. Точки перегиба

Определение 2.7. Дифференцируемая функция называется **выпуклой вверх** на $(a;b)$, если график этой функции расположен ниже любой своей касательной (рис. 37).

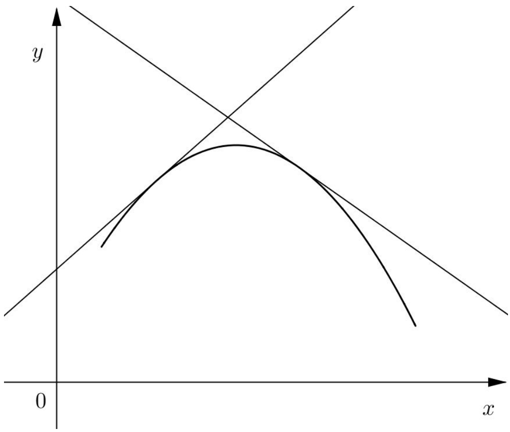


Рис. 37

Определение 2.8. Дифференцируемая функция называется **выпуклой вниз** на $(a;b)$, если график этой функции расположен выше любой своей касательной (рис. 38).

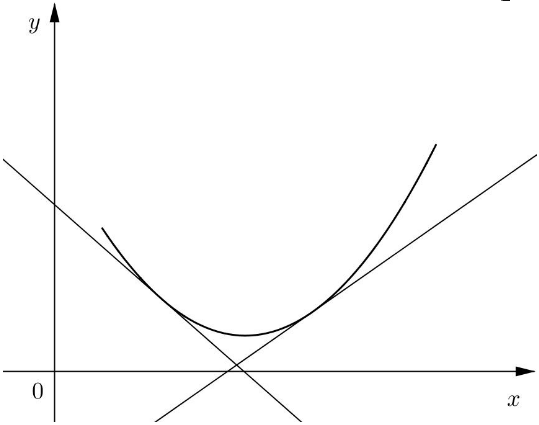


Рис. 38

Определение 2.9. Точка графика непрерывной функции, в которой изменяется направление выпуклости, называется **точкой перегиба** (рис. 39).

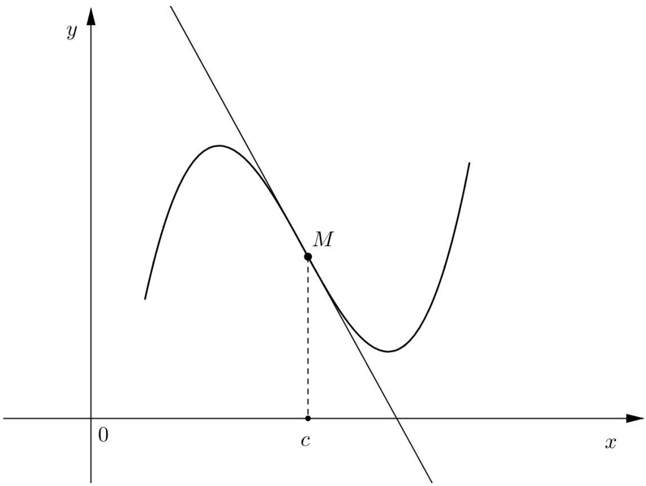


Рис. 39

Если $f''(x) < 0$, то функция выпукла вверх, если $f''(x) > 0$, то функция выпукла вниз.

Если в точке x_0 $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и вторая производная при переходе через нее меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) найти критические точки;

2) вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка;

3) из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Алгоритм решения оптимизационных задач:

1. Задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$. Об этой величине ставится вопрос в задаче её наибольшего и наи-

меньшего значения при определенном параметре, который мы обозначили за x.

2. Исследовать функцию на наибольшее или наименьшее значение на некотором промежутке.

3. Выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Задания

1. Вычислите предел функций, используя правило Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-0{,}5\mathrm{tg}x}{1+\cos 4x}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-0{,}01x}$; 1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

1.5. $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; 1.6. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$; 1.7. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

2. Разложите многочлен $f(x)=x^4+2x^3-8x^2+4x+4$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$.

3. Разложите многочлен $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=0$.

11. Разложите многочлен $f(x)=\ln(5-4x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=0$.

12. Вычислите предел с помощью формул Тейлора, если $\mathrm{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$;

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} + o\left(x^{2n+2}\right);$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right):$$

12.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x - \arcsin x}{\operatorname{tg}x - \sin x}$; 12.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

13. Найдите промежутки возрастания и убывания:

13.1. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; 13.2. $f(x) = x \cdot e^{-3x}$;

13.3. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$;

13.4. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 3x + 2}$; 13.5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$.

14. Найдите точки максимума и минимума функций

14.1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 10$;

14.2. $f(x) = \operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (используя 2 достаточный признак экстремума);

14.3. $f(x) = \operatorname{ch}x + \cos x$ (используя 3 достаточный признак экстремума);

14.4. $f(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$;

14.5. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$.

15. Постройте схематически график функции, производная которой имеет график, изображенный на рисунке 40.

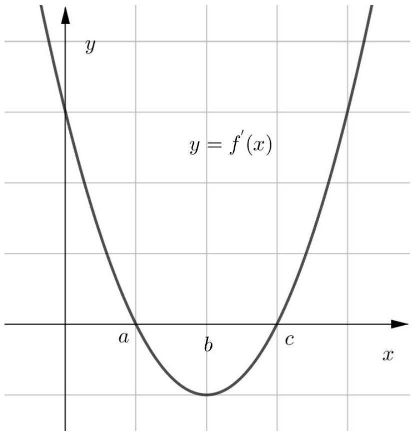


Рис. 40

16. По графикам функций, изображенным на рисунках 41-44, постройте схематические графики их производных.

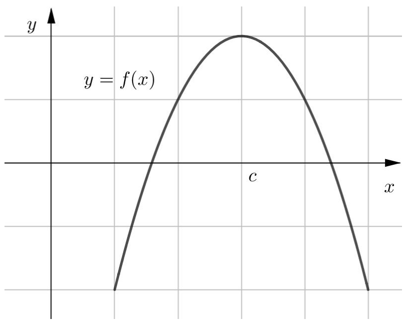


Рис. 41

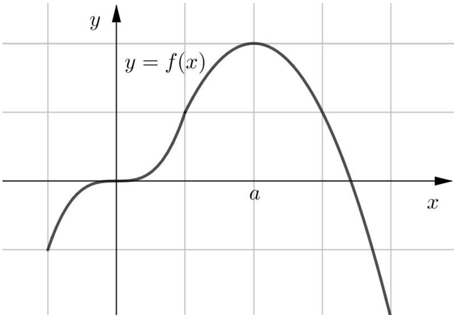


Рис. 42

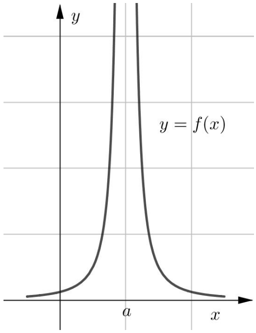


Рис. 43

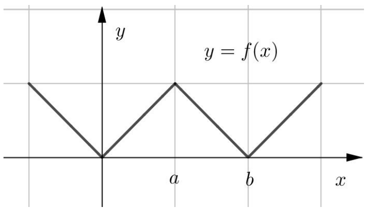


Рис. 44

17. Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз, а также точки перегиба графиков функций:

17.1. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$;

17.2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$;

17.3. $f(x) = x + \sin x$;

17.4. $f(x)=\dfrac{2x^2-x-4}{x^2-4x+4}$; 17.5. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.

18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанных промежутках:

18.1. $f(x)=x^2-1$, $[0;3]$; 18.2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(0;4]$;

18.3. $f(x)=2\sin 2x+\cos 4x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

19. Определите, при каком действительном значении p сумма квадратов корней уравнения $x^2-(p-2)x+(p-3)=0$ принимает наименьшее значение и найдите это наименьшее значение.

20. Какова наибольшая площадь прямоугольника, имеющего периметр, равный P см?

21. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 45). Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

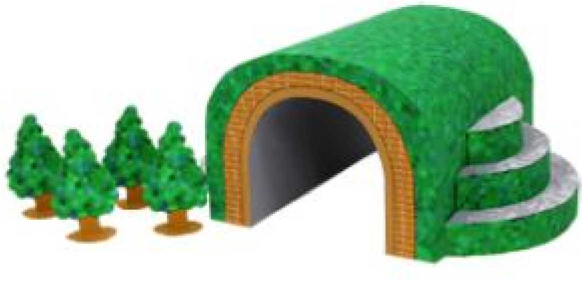


Рис. 45

22. Консервная банка цилиндрической формы (рис. 46) должна иметь объем V. Каковы должны быть высота

цилиндра и диаметр его основания, чтобы на изготовление банки пошло наименьшее количество жести?

Рис. 46

2.4. Исследование функций и построение графиков

Схема исследования.

1. Область определения.
2. Четность функции.
3. Периодичность функции.
4. Нули функции и промежутки знакопостоянства.
5. Непрерывность. Точки разрыва.
6. Промежутки монотонности. Экстремумы.
7. Промежутки выпуклости. Точки перегиба.
8. Асимптоты.
9. Множество значений.
10. Итоговая таблица и график.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x-1)}$

1. Областью определения данной функции является множество действительных чисел, то есть $D(f) = R$.

2. Данная функция является ни четной, ни нечетной,

так как $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2\cdot\left(-x-1\right)}=-\sqrt[3]{x^2\cdot\left(x+1\right)}$, $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

3. Функция является непериодической.

4. Нули функции и промежутки знакопостоянства. $\sqrt[3]{x^2\cdot\left(x-1\right)}=0$ при $x=0$ и $x=1$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 47).

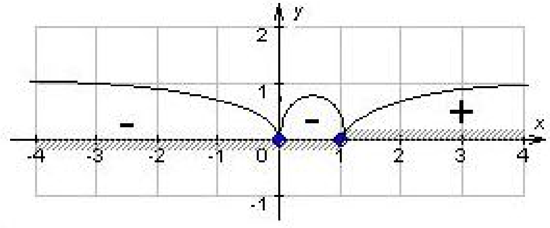


Рис. 47

Функция отрицательна при $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1\right)$ и положительна при $x\in\left(1;+\infty\right)$.

5. Функция непрерывна, так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{x^2\cdot\left(x-1\right)}=\sqrt[3]{x_0{}^2\cdot\left(x_0-1\right)}=f(x_0)$.

6. Промежутки монотонности, экстремумы.

Найдем производную функции:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^2\cdot(x-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^2-2x\right)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}}.$$

$\dfrac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}}=0$ при $x=\dfrac{2}{3}$ и неопределенно при $x=0$ и $x=1$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 48).

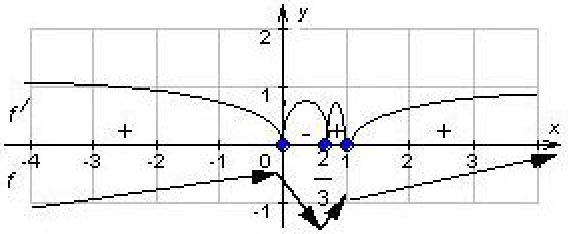


Рис. 48

Функция возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ и убывает при $x \in \left(0;\frac{2}{3}\right)$. $x_{\max} = 0$, $f(0) = 0$ $x_{\min} = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

7. Промежутки выпуклости, точки перегиба.

Найдем вторую производную с помощью логарифмического дифференцирования:

$$\ln\left(f'(x)\right) = \ln\frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 \cdot (x-1)\right)^2}} = \ln\left(3x^2 - 2x\right) - \ln 3 - \frac{2}{3}\ln\left(x^3 - x^2\right)$$

$$\left(\ln\left(f'(x)\right)\right)' = \frac{6x-2}{3x^2-2x} - \frac{2}{3}\frac{3x^2-2x}{x^3-x^2} =$$

$$= \frac{3(6x-2)\left(x^3-x^2\right) - 2\left(3x^2-2x\right)^2}{3\left(3x^2-2x\right)\left(x^3-x^2\right)} =$$

$$= \frac{3\left(6x^4 - 8x^3 + 2x^2\right) - 2\left(9x^4 - 12x^3 + 4x^2\right)}{3\left(3x^2-2x\right)\left(x^3-x^2\right)} =$$

$$= \frac{18x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 18x^4 + 24x^3 - 8x^2}{3\left(3x^2-2x\right)\left(x^3-x^2\right)} =$$

$$= \frac{-2x^2}{3\left(3x^2-2x\right)\left(x^3-x^2\right)}.$$

$$f''(x) = \frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}} \cdot \frac{-2x^2}{3\left(3x^2-2x\right)\left(x^3-x^2\right)} =$$

$$= \frac{-2x^2}{9\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}\cdot x^2\cdot\left(x-1\right)} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}\cdot\left(x-1\right)}.$$

$\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{\left(x^2\cdot(x-1)\right)^2}\cdot\left(x-1\right)} = 0$ – это уравнение не имеет решений и неопределенно при $x=0$ и $x=1$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 49).

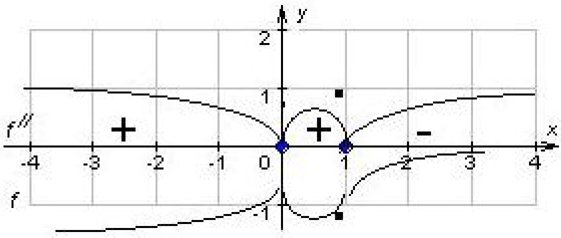


Рис. 49

Функция выпукла вверх при $x \in \left(-\infty;0\right) \cup \left(0;1\right)$ и выпукла вниз при $x \in \left(1;+\infty\right)$, $x=1$ – точка перегиба.

8. Асимптоты. Так как функция определена на множестве действительных чисел, то вертикальных асимптот нет.

Наклонная асимптота $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right)$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}\right)^2+x\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}+x^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}\right)^2+x\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}\right)^2+x\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{3}.$$

$y=x-\frac{1}{3}$ – наклонная асимптота.

Найдем точки пересечения наклонной асимптоты $y=x-\frac{1}{3}$ с графиком функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}$:

$$\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}=x-\frac{1}{3},$$

$$\sqrt[3]{x^3-x^2}=x-\frac{1}{3},$$

$$x^3-x^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$x^3-x^2=x^3-3\cdot x^2\frac{1}{3}+3\cdot x\frac{1}{9}-\frac{1}{27},$$

$$x^3 - x^2 = x^3 - x^2 + x\frac{1}{3} - \frac{1}{27},$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0,$$

$$x = \frac{1}{9}.$$

При $x \in \left(\frac{1}{9};+\infty\right)$ график функции подходит к асимптоте снизу, т.к. $\sqrt[3]{x^2 \cdot (x-1)} < x - \frac{1}{3}$, $x^3 - x^2 < \left(x - \frac{1}{3}\right)^3$, $x^3 - x^2 < x^3 - x^2 + x\frac{1}{3} - \frac{1}{27}$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{27} > 0$, $x > \frac{1}{9}$, а при $x \in \left(-\infty;\frac{1}{9}\right)$ график функции подходит к асимптоте сверху. $f\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{9}$.

9. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x-1)}$ неограниченна, следовательно, множество ее значений совпадает с множеством действительных чисел, т.е. $E(f) = R$.

10. Составим итоговую таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	∞	+
$f''(x)$	+	∞	+	+	+	∞	–
$f(x)$	–	0 max	–	min $-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	–	0	+

Построим график функции (рис. 50):

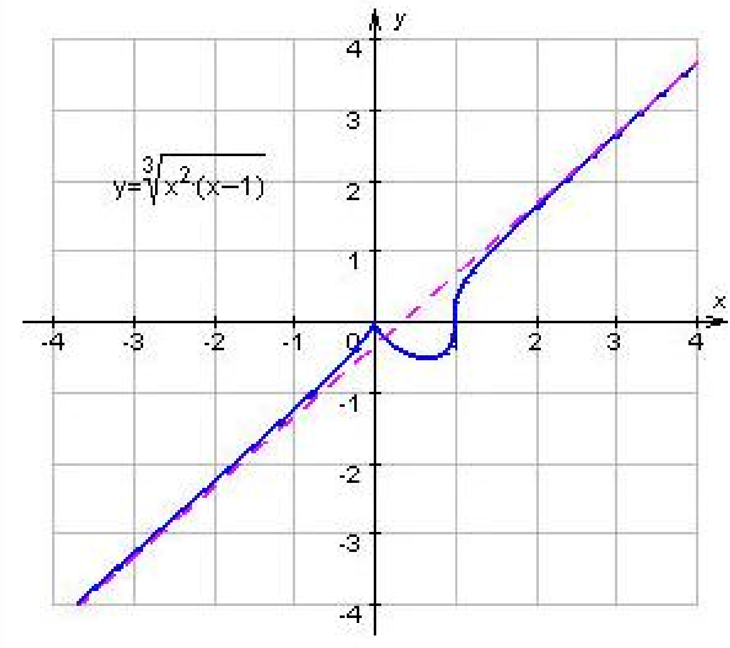


Рис. 50

Пример 2. Постройте график функции $f(x) = \sin x + \cos x$

1. Областью определения данной функции является множество действительных чисел, то есть $D(f) = R$.

2. Данная функция является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Функция является периодической с основным периодом $T = 2\pi$, так как
$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПРОВЕДЕМ НА ПРОМЕЖУТКЕ $[0;2\pi)$.

4. Нули функции и промежутки знакопостоянства. $f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$.

$f(x) = 0$: $\sin x + \cos x = 0$, $\mathrm{tg}x + 1 = 0$, $\mathrm{tg}x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. При $n = 1$ $x = \frac{3\pi}{4} \in [0;2\pi)$, при $n = 2$ $x = \frac{7\pi}{4} \in [0;2\pi)$. Таким образом, нули функции $(0;1)$, $\left(\frac{3\pi}{4};0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4};0\right)$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 51).

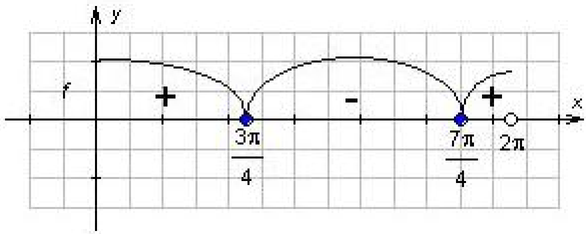


Рис. 51

Функция положительна при $x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$ и отрицательна при $x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

5. Функция непрерывна, так как является суммой двух непрерывных функций.

6. Промежутки монотонности, экстремумы.

Найдем производную функции: $f'(x) = \cos x - \sin x$.

$\cos x - \sin x = 0$, $1 - \mathrm{tg}x = 0$, $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi)$, при $n = 1$ $x = \frac{5\pi}{4} \in [0; 2\pi)$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 52).

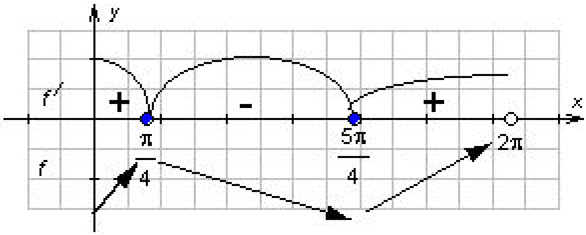


Рис. 52

Функция возрастает при $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right)$ и убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

$$x_{\max} = \frac{\pi}{4},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_{\min} = \frac{5\pi}{4},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

7. Промежутки выпуклости, точки перегиба.

Найдем вторую производную: $f''(x)=-\sin x-\cos x$.

$\cos x+\sin x=0$, $1+\mathrm{tg}x=0$, $\mathrm{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$. При $n=1$ $x=\frac{3\pi}{4}\in[0;2\pi)$, при $n=2$ $x=\frac{7\pi}{4}\in[0;2\pi)$. Отметим точки на числовой прямой (рис. 53).

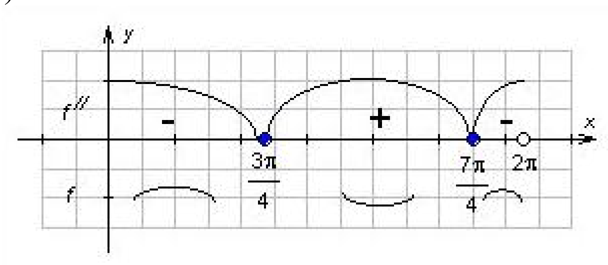


Рис. 53

Функция выпукла вверх при $x\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4};2\pi\right)$ и выпукла вниз при $x\in\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$. Точки перегиба: $\left(\frac{3\pi}{4};0\right)$ и $\left(\frac{7\pi}{4};0\right)$.

8. Асимптоты. Т.к. функция определена на множестве действительных чисел, то вертикальных асимптот нет.

У всех периодических функций нет ни наклонных, ни горизонтальных асимптот.

9. Функция $f(x)=\sin x+\cos x$ ограниченна, и мно-

жеством ее значений является отрезок $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, то есть $E(f)=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

10. Составим итоговую таблицу:

x	0	$\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$\dfrac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	1	$+$ ↗	max $\sqrt{2}$ $\cap$	$+$ ↘	0

x	$\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\left(\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right)$	$\dfrac{7\pi}{4}$	$\left(\dfrac{7\pi}{4};2\pi\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘ $-$	min $\cup$ $-\sqrt{2}$	$-$ ↗	0	$+$ ↗

Построим график функции на $[0;2\pi)$ и продлим периодически с основным периодом $T=2\pi$ (рис 54):

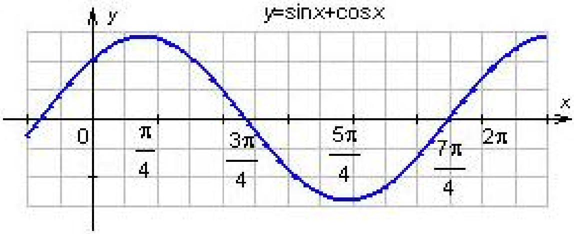


Рис. 54

Задания

1.Постройте эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;

2) Вертикальные асимптоты: $x=1$;

3) Горизонтальные асимптоты: $y=1$ $(x\to-\infty)$, $y=-2$ $(x\to+\infty)$;

4) Наклонные асимптоты: – ;

5) Стационарные точки: $-2;0;2;4$;

6) Точки, где $y'=\infty$: -1;

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания $(-2;-1)\cup(1;2)\cup(4;+\infty)$,

б) убывает $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;4)$;

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;1)\cup(1;3)\cup(5;+\infty)$,

б) вогнутости: $(-2{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(3;5)$;

9) Значение функции в некоторых точках: $y(-2{,}5)=0{,}75$, $y(-2)=0{,}5$, $y(-1)=4$, $y(0)=1$, $y(2)=-1$, $y(3)=-2$, $y(4)=-3{,}5$, $y(5)=-2{,}5$.

2. По готовому исследованию построить итоговую таблицу и эскиз графика функции.

1) Область определения: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) Вертикальные асимптоты: $x=0$;

3) Горизонтальные асимптоты: $y=0$;

4) Наклонные асимптоты: –;

5) Стационарные точки: $-3;\ -1;\ 1;\ 3$;

6) Точки, где $y'=\infty$: $-2;2$;

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания $(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$,
б) убывает $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(0;1)\cup(2;3)$;
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
а) выпуклости: $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$,
б) вогнутости: $(-4;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4)$;
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-4)=-0{,}5$, $y(-3)=-1$, $y(-2)=3$, $y(-1)=0$, $y(1)=0$, $y(2)=3$, $y(3)=-1$, $y(4)=-0{,}5$.

3. Проведите полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-4}{x}e^{\frac{-5}{3x}}$ и постройте ее график.

Глава 3. Интегральное исчисление

3.1. Неопределенный интеграл

Определение 3.1. **Первообразной** функцией от данной функции f в области D называется такая функция F, производная которой равна f, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразными будут функции $F(x) = x^3$ и $F(x) = x^3 + 2$.

Если F первообразная для функции f, то всякая функция $y = F(x) + C$, где $C = const$, также является первообразной.

Определение 3.2. Совокупность всех первообразных на области D функций для функции f называется **неопределенным интегралом** от этой функции на области D и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

4. Интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от слагаемых. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. 2. $\int 0 \cdot dx = C$

3. $\int dx = x + C$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

9. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$

10. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

15. $\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Методы интегрирования

1. Метод подстановки (замена переменной).

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C$$

Пример.

$$\int \sin 5x dx = \begin{bmatrix} t = 5x, \ dx = \frac{dt}{5}, \\ dt = 5dx \end{bmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{1}{5} dt =$$

$$= \frac{1}{5}\int \sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

2. Интегрирование по частям.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$

$u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$

$\int u\cdot dv=d(u\cdot v)-\int v\cdot du$ – формула интегрирования по частям.

Интегралы вида $\int P_n(x)\ln ax\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P_n(x)\arccos ax\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$ ($P_n(x)$ – многочлен степени n относительно x). Необходимо положить $dV=P_n(x)dx$.

В интегралах вида $\int P_n(x)\sin axdx$, $\int P_n(x)\cos axdx$, $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)a^{bx}dx$ ($P_n(x)$ – многочлен степени n, a, b – постоянное число). Необходимо положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз.

Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int \sin\ \ln\ axdx$, $\int \cos\ln axdx$ (a, b – постоянные числа) вычисляются двукратным интегрированием по частям:

$$\int f(x)dx=\Phi(x)+k\int f(x)dx;$$

$$(1-k)\int f(x)dx=\Phi(x),$$

$$\int f(x)dx=\frac{\Phi(x)}{1-k}+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида: $\int \sin mx\cos nxdx$, $\int \cos mx\cos nxdx$, $\int \sin mx\sin nxdx$ вычисляются с помощью формул, позволяющих перейти от произведения к сумме тригонометрических функций:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin ms \sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

2. Интегралы вида: $\int \sin^{2k+1} xdx$ и $\int \cos^{2k+1} xdx$, где k-натуральное число:

$$\int \sin^{2k+1} xdx = \int \sin^{2k} x \cdot (\sin xdx) =$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cdot (\sin xdx) = \int (1-\cos^2 x)^k \cdot (\sin xdx) =$$

$$= [t = \cos x, dt = -\sin x\, dx] = -\int (1-t^2)^k\, dt\ ;$$

$$\int \cos^{2k+1} xdx = \int \cos^{2k} x \cdot (\cos xdx) =$$

$$= \int (\cos^2 x)^k \cdot (\cos xdx) = \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \cdot (\cos xdx) =$$

$$= [t = \sin x, dt = \cos x\, dx] = \int (1-t^2)^k\, dt\ .$$

3. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^{2k+1} xdx$ и $\int \sin^n x \cdot \cos^{2k+1} xdx$:

$$\int \sin^n x \cdot \cos^{2k+1} xdx = \int \sin^n x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^k \cdot (\cos xdx) =$$

$$= [t = \sin x, dt = \cos x\, dx] = \int t^n (1-t^2)^k\, dt\ ;$$

$$\int \sin^n x \cdot \cos^{2k+1} xdx = -\int \cos^n x \cdot (1-\cos^2 x)^k \cdot (\sin xdx) =$$

$$= [t = \cos x, dt = -\sin x\, dx] = -\int t^n (1-t^2)^k\, dt\ .$$

4. Интегралы вида: $\int \sin^{2k} x dx$ и $\int \cos^{2k} x dx$:

$$\int \sin^{2k} x dx = \int (\sin^2 x)^k dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k dx ;$$

$$\int \cos^{2k} x dx = \int (\cos^2 x)^k dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^k dx .$$

5. Интегралы вида: $\int \cos^{2n} x \cdot \sin^{2k} x dx$:

$$\int \cos^{2n} x \cdot \sin^{2k} x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k dx .$$

6. Интегралы вида: $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x} = \int \frac{1}{\sin^{2n-2} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^{n-1} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)^{n-1} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \left[t = \operatorname{ctg} x, dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} \right] =$$

$$= -\int \left(1 + t^2\right)^{n-1} dt ;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \int \frac{1}{\cos^{2n-2} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{n-1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$\int \left(1 + tg^2 x\right)^{n-1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[t = \operatorname{tg} x, dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] = \int \left(1 + t^2\right)^{n-1} dt .$$

7. Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^{2k} x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^{2k} x dx$:

$$\int \operatorname{tg}^{2k} x dx = \int \left(\operatorname{tg}^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^k dx ;$$

$$\int \mathrm{ctg}^{2k} x dx = \int \left(\mathrm{ctg}^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)^k dx .$$

8. Интегралы вида: $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = \int \frac{\sin x}{\sin^{2k+2} x} dx = \int \frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^{k+1}} (\sin x dx) =$$

$$= \int \frac{1}{\left(1 - \cos^2 x\right)^{k+1}} (\sin x dx) = \left[t = \cos x,\ dt = -\sin x dx\right] =$$

$$= -\int \frac{1}{t^{k+1}} dt ;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \int \frac{\cos x}{\cos^{2k+2} x} dx = \int \frac{1}{\left(\cos^2 x\right)^{k+1}} (\cos x dx) =$$

$$\int \frac{1}{\left(1 - \sin^2 x\right)^{k+1}} (\cos dx) = \left[t = \sin \cos x,\ dt = \cos x dx\right] =$$

$$= \int \frac{1}{t^{k+1}} dt .$$

9. Интегралы вида: $\int \mathrm{tg}^{2k+1} x dx$ и $\int \mathrm{ctg}^{2k+1} x dx$:

$$\int \mathrm{tg}^{2k+1} x dx = \int \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos^{2k+1} x} dx = \int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2k+1} x} (\sin x dx) =$$

$$\int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)^k}{\cos^{2k+1} x} (\sin x dx) = \left[t = \cos x,\ dt = -\sin x dx\right] =$$

$$= -\int \frac{\left(1 - t^2\right)^k}{t^{2k+1}} dt ;$$

$$\int \mathrm{ctg}^{2k+1} x dx = \int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^{2k+1} x} dx = \int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k+1} x} (\cos x dx) =$$

$$= \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^k}{\sin^{2k+1} x}(\cos x dx) = \left[t = \sin x,\ dt = \cos x dx\right] =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^k}{t^{2k+1}} dt \ .$$

10. $P(-\sin x, -\cos x) = P(\sin x, \cos x)$, необходимо перейти к переменной $\operatorname{tg} x$ и, сделав замену $t = tgx$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, проинтегрировать рациональную функцию.

11. Универсальная тригонометрическая подстановка:

$t = tg\dfrac{x}{2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1-t^2}{2t}$; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Интегрирование рациональных функций

1) Если рациональная дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} dx = \int\left(L_{n-k}(x) + \frac{r_{k-1}(x)}{Q_k(x)}\right) dx$; при $n \geq k$;

2) Разложить знаменатель правильной дроби на множители:

$Q_k(x) = (x-a)^{p_1}(x-b)^{p_2}(x^2+px+q)^{p_3}(x^2+cx+d^2)^{p_4}$, где $p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 = k$.

3) Правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}:$$

$$\frac{Q_{k-1}(x)}{Q_k(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{p_1}}{(x-a)^{p_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{p_2}}{(x-b)^{p_2}}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_{p_3}+N_{p_3}}{(x^2+px+q)^{p_3}}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\ldots+\frac{C_{p_4}x+D_{p_4}}{(x^2+cx+d)^{p_4}}\ .$$

Вычислить коэффициенты $A_1, A_{2,}, \ldots, A_{p_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{p_2}, M_1, M_2, \ldots, M_{p_3}$, $N_1, N_2, \ldots, N_{p_3}$, C_1, C_2, ..., C_{p_4}, D_1, D_2, ..., D_{p_4} – методом частных значений или методом неопределённых коэффициентов.

Метод неопределённых коэффициентов. Приведя сумму простейших дробей к общему знаменателю, мы получим равенство двух многочленов, оставшихся в числителях. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, стоящих в левой и правой частях равенства, мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Решив систему, находим **неопределённые коэффициенты**.

Метод частичных значений. При нахождении неопределенных коэффициентов можно дать переменной *x* несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов) и получить, таким образом, систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Особенно удачно применять этот метод в случае, когда корни знаменателя просты и действительны. Тогда оказывается удобным переменную x последовательно приравнивать к каждому из корней знаменателя.

Проинтегрировать сумму многочлена и простейших дробей:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

II.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C;$$

III.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left[\begin{array}{l}(x^2+px+q)' = (2x+p) \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + (N-\frac{Mp}{2})\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

Интегрирование иррациональных функций

1. $\int P\left(x;\sqrt[m]{x}\right)dx = [t = \sqrt[m]{x}, x = t^m, dx = mt^{m-1}dt] =$ $\int P\left(t^m;t\right)mt^{m-1}dt$.

2. $\int P\left(x;\sqrt[m_1]{x};\sqrt[m_2]{x}\right)dx = [M = НОК\left(m_1, m_2\right), t = \sqrt[M]{x},$ $x = t^M$, $dx = Mt^{M-1}dt] = \int P\left(t^M;t^{\frac{M}{m_1}};t^{\frac{M}{m_2}}\right)Mt = t^{M-1}dt$.

3. $\int P\left(x;\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx =$

$$\left[t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, dx=-\frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{\left(a-ct^m\right)^2}dt\right]=$$

$$=\int P\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m};t\right)\left(-\frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{\left(a-ct^m\right)^2}\right)dt .$$

4. Тригонометрические и гиперболические подстановки:

$\int P\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можно, выделив полный квадрат подкоренного выражения, свести к интегралам вида $\int P\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int P\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int P\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, вычисляемым с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок:

$\int P\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ подстановка $x=a\sin t$ или $x=a\,\mathrm{th}\,t$;

$\int P\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ подстановка $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{sh}\,t$;

$\int P\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ подстановка $x=\dfrac{a}{\cos t}$ или $x=a\,\mathrm{ch}\,t$.

5. Вычисление следующих интегралов рассмотрим на примерах $I_1=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+17}}$, $I_2=\int\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x-1)^2}dx$ и $I_3=\int\frac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{(x-3)}dx$:

При вычислении вначале нужно выделить полный квадрат подкоренного выражения $I_1=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x^2-2x+1)+16}}=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4^2}}$. Вынести из-под корня выражение $(x-1)$: $I_1=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+\left(\frac{4}{x-1}\right)^2}}$.

Сделать замену дроби $t=\frac{4}{x-1}$, $dt=\frac{-4dx}{(x-1)^2}$, тогда $I_1=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Вычислим табличный интеграл и получим $I_1=-\frac{1}{4}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C$. Сделаем замену и получим ответ $I_1=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{4}{x-1}+\sqrt{1+\left(\frac{4}{x-1}\right)^2}\right|+C$.

$I_2=\int\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x-1)^2}dx$ выделим полный квадрат подкоренного выражения $I_2=\int\frac{\sqrt{(x-1)^2-4}}{(x-1)^2}dx$, домножим числитель и знаменатель дроби на корень

$I_2=\int\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2-4}}dx$, поделим числитель на знаменатель почленно и получим сумму двух интегралов $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}-4\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2-4}}$. Первый интеграл табличный, а у второго вынесем из-под корня выражение $(x-1)$: $I_2=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|-4\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{1-\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}}$. Сделаем замену $t=1-\left(\frac{2}{x-1}\right)^2$, $dt=\frac{8dx}{(x-1)^3}$, тогда $I_2=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$. Проинтегрируем и получим $I_2=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|-\sqrt{t}+C$. Сделаем замену и получим ответ $I_2=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|-\sqrt{1-\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}+C$.

$I_3=\int\frac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{(x-3)}dx$ выделим полный квадрат подкоренного выражения $I_3=\int\frac{\sqrt{4-(x-3)^2}}{(x-3)}dx$, домножим числитель и знаменатель дроби на корень $I_3=\int\frac{4-(x-3)^2}{(x-3)\sqrt{4-(x-3)^2}}dx$, поделим числитель на знаменатель почленно и получим сумму двух интегралов

$I_3 = 4\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{4-(x-3)^2}} - \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$. С первым интегралом проделаем то же, что и с I_1, а во втором – заменим подкоренное выражение на $t = 4-(x-3)^2$, $dt = -2(x-3)dx$, тогда $I_3 = 4\int \frac{dx}{(x-3)^2\sqrt{\left(\frac{2}{x-3}\right)^2 - 1}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$. В первом интеграле сделаем замену дроби $y = \frac{2}{x-3}$, $dy = \frac{-2dx}{(x-3)^2}$, тогда $I_3 = -2\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} + \sqrt{t} + C$, $I_3 = -2\ln\left|y + \sqrt{y^2-1}\right| + \sqrt{t} + C$. Сделаем замены и получим ответ $I_3 = -2\ln\left|\frac{2}{x-3} + \sqrt{\left(\frac{2}{x-3}\right)^2 - 1}\right| + \sqrt{4-(x-3)^2} + C$.

Задания

1. Какие из функций $F_1 = \frac{1+2x+\sin 2x}{2}$, $F_2 = x + \sin 2x$, $F_3 = x\sin 2x + 1$, $F_4 = x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ являются первообразной для функции $f = 1 + \cos 2x$.

2. Вычислите интегралы:

2.1. $\int \left(3x^2 + 2x - 1\right)dx$; 2.2. $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

2.3. $\int\left(4\cos x-\frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx$; 2.4. $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx$;

2.5. $\int\left(10^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2}\right)dx$.

3. Вычислите интегралы методом замены переменной:

3.1. $\int\frac{2dx}{2x+3}$; 3.2. $\int\frac{2xdx}{x^2+5}$; 3.3. $\int(2x-3)^{10}dx$;

3.4. $\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x}$; 3.5. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-2}}$; 3.6. $\int\frac{xdx}{1+x^4}$;

3.7. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$; 3.8. $\int\frac{\mathrm{ch}(\mathrm{tg}x)dx}{\cos^2 x}$; 3.9. $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

3.10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям

4.1. $\int x^2\ln xdx$; 4.2. $\int\ln xdx$; 4.3. $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

4.4. $\int x^2\sin xdx$; 4.5. $\int x^2e^{-x}dx$; 4.6. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;

4.7. $\int e^x\sin xdx$; 4.8. $\int\sin\ln xdx$.

5. Вычислите интегралы от тригонометрических функций

5.1. $\int\sin 5x\cdot\sin 3x\;dx$; 5.2. $\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 5x\;dx$;

5.3. $\int\sin^5 x\;dx$; 5.4. $\int\sin^5 x\cdot\cos^4 x\,dx$;

5.5. $\int\cos^4 x\,dx$; 5.6. $\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx$;

5.7. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 5.8. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx$; 5.9. $\int \mathrm{ctg}^4 x\, dx$.

6. Вычислите интегралы от рациональных функций

6.1. $\int \frac{dx}{x-3}$; 6.2. $\int \frac{x^3+10x^2+21x+15}{x+2}dx$;

6.3. $\int \frac{7x-9}{x^2-9}dx$; 6.4. $\int \frac{x^5+x^4-x^3+x^2+5x+5}{x^2+x-2}dx$;

6.5. $\int \frac{dx}{(x-3)^5}$; 6.6. $\int \frac{3x^2+19x+32}{(x+3)^3}dx$;

6.7. $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx$; 6.8. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$;

6.9. $\int \frac{2x+5}{x^2+6x+13}dx$; 6.10. $\int \frac{4x+7}{x^2+10x+34}dx$;

6.11. $\int \frac{4x^2-2x+1}{(x^2+2)(x-1)}dx$; 6.12. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$;

6.13. $\int \frac{x^3-1}{(x^2-6x+10)^2}dx$; 6.14. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

6.15. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 6.16. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

7. Вычислите интегралы от иррациональных функций

7.1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 7.2. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}dx$;

7.3. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; 7.4. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$;

7.5. $\int \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}dx$; 7.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

7.7. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+5)^5}}$; 7.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

7.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$; 7.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$;

7.11. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+13}}$; 7.12. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{-x^2+6x-5}}$;

7.13. $\int \frac{\sqrt{x^2+6x+7}}{(x+3)^2}dx$; 7.14. $\int \frac{\sqrt{x^2-4x+7}}{(x-2)}dx$;

7.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 7.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 7.17. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

3.2. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла

Определение 3.3. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots x_{n-1}<x_n=b.$$

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, где k = 1, 2, …, n-1 выберем произвольную точку ξ_k ($x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$). Вычислим значения функции f: $f(\xi_k)$ и умножим его на разность $x_k-x_{k-1}=\Delta x_k$, после этого составим сумму $\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, которая называется **интегральной суммой** для функции f на отрезке $[a;b]$. Длину наибольшего частичного отрезка обозначим $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$.

Если существует конечный предел интегральной суммы $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется **определенным интегралом** функции f на отрезке $[a;b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Функция f в этом случае называется **интегрируемой** на отрезке $[a;b]$.Числа a и b называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интеграла**, f – **подынтегральной функцией**, x – **переменной интегрирования**.

Условие существования определенного интеграла

Теорема 3.1 (*необходимое условие интегрируемости функции*). Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.

*Теорема 3.1** (*равносильная теореме 3.1*). Если функция f – неограниченная на отрезке $[a;b]$, то функция f не интегрируема на нем.

Суммы Дарбу

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей. Функция f непрерывна на $[a;b]$ и будет непрерывна в каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$. По первой теореме Вейерштрасса функция f будет ограниченна на отрезке, а по второй теореме Вейерштрасса на каждом отрезке будет достигать своего наибольшего M_k и наименьшего m_k

значений. Составим следующие суммы: $s=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $S=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$. Эти суммы называются соответственно **нижней** и **верхней суммами Дарбу**.

Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Криволинейная трапеция, ограниченная осью *Ox*, прямыми $x=a$, $x=b$ и дугой $y=f(x)$, где *f* – непрерывная, неотрицательная функция на отрезке $[a;b]$, имеет определенную площадь, которая выражается формулой $S=\int_a^b f(x)dx$.

Расширение понятия определенного интеграла

Вводя понятие определенного интеграла функции *f* на $[a;b]$, мы предполагали, что $a<b$. Рассмотрим понятие интеграла, когда $a \geq b$.

Примем по определению:

а) если $a>b$, то $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

б) $\int_a^a f(x)dx=0$.

Основные свойства определенного интеграла

1°. Пусть *f* интегрируема в наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда она интегрируема в двух других и имеем место равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

каково бы ни было расположение точек a,b и c.

2°. Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то и $k \cdot f$ также интегрируема на $[a;b]$, причем $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$.

3°. Если функции f и g – обе интегрируемы на $[a;b]$, то и $f \pm g$ также интегрируема на $[a;b]$, причем $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

4°. Если функция f, интегрируемая на $[a;b]$, неотрицательна и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

5°. Если обе функции f и g интегрируемы на $[a;b]$ и всегда $f(x) \leq g(x)$, то и $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$ при $a < b$.

6°. Если функция f, интегрируемая на $[a;b]$ и $a < b$, тогда и функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке, и имеет место неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

7°. Если функция f, интегрируемая на $[a;b]$, где $a < b$, и если на всем этом отрезке выполняется неравенство $m \leq f \leq M$,то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

8°(*Теорема о среднем*). Если f непрерывна на $[a;b]$, то существует хотя бы одна точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Геометрический смысл теоремы о среднем. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной кривой, равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой – одной из ординат кривой.

Для криволинейной трапеции существует равновеликий ей прямоугольник.

Формула Ньютона-Лейбница

$\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбница.

Формула Ньютона-Лейбница устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами. А также дает правило для вычисления определенного интеграла: Значение определенного интеграла от непрерывной функции равно разности первообразной от нее при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование четных и нечетных функций

Если функция f непрерывна на отрезке $[-a;a]$ и является четной, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$

Если функция f непрерывна на отрезке $[-a;a]$ и является нечетной, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной на $[a;b]$ функции $y=f(x)$. Для вычисления неопределенного интеграла иногда требуется произвести замену переменного $x=\varphi(t)$.

Теорема 3.2 (*о замене переменного под знаком определенного интеграла*). Пусть выполняются следующие условия:

1) Уравнения $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$ имеют решение (обозначим их соответственно через t_1 и t_2, так что $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$).

2) Функция $\varphi(t)$ на отрезке, образованном точками t_1 и t_2, имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$.

3) При изменении t на отрезке, образованном точками t_1 и t_2, значения функции $x=\varphi(t)$ не выходит из отрезка $[a;b]$.

Тогда имеет место равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Пример.

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x}, & t(4)=2 \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, & t(1)=1 \end{bmatrix} = 2\int_1^2 e^t\,dt = 2e^t\Big|_1^2 = 2\left(e^2-e\right).$$

Для замены в основном берут непрерывные монотонные функции.

Теорема 3.3 (*об интегрировании по частям в опреде-*

ленном интеграле). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a;b]$ непрерывные производные, то выполняется формула интегрирования по частям $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Пример.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Задания

1. Вычислите определенный интеграл:

1.1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

1.2. $\int\limits_0^2 2^x dx$;

1.3. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x}$;

1.4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$;

1.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$;

1.6 $\int\limits_3^4 \frac{x^2 + 3}{x - 2} dx$;

1.7. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x + 1}{x^2(x - 1)} dx$;

1.8. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$;

1.9. $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin^2\frac{x}{2} dx$;

1.10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$;

1.11. $\int_0^2 e^{x^2} x dx$;

1.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$;

1.13. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x) dx}{x}$;

1.14. $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$;

1.15. $\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

1.16. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

1.17. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

1.18. $\int_0^1 \arcsin x dx$;

1.19. $\int_0^1 x \cdot \mathrm{arctg} x dx$;

1.20. $\int_1^e \ln^2 x \, dx$;

1.21. $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$;

1.22. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

1.23. $\int_1^e \sin \ln x dx$;

1.24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$;

1.25. $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x} dx$;

1.26. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$;

1.27. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x + x^2 \sin x\right) dx$;

1.28. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(x^3 \sin 5x + \cos\frac{x}{3} + \mathrm{tg}^3 x \right) dx$;

1.29. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx$;

1.30. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$.

3.3. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где f – неотрицательная, непрерывная на $[a;b]$ функция (рис. 55), вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx$.

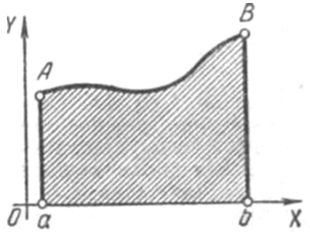


Рис. 55

Фигуру, ограниченную прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ и кривой $x = \varphi(y)$, где φ – неотрицательная, непрерывная на $[c;d]$ функция (рис. 56), также называется криволинейной трапецией (относительно оси *Oy*). Площадь такой фигуры вычисляется по формуле $S = \int\limits_c^d \varphi(y)dy = \int\limits_c^d xdy$.

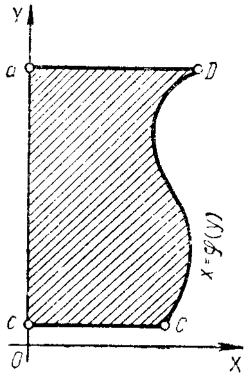


Рис. 56

Пользуясь рассмотренными формулами, мы можем применить определенный интеграл к вычислению площадей некоторых криволинейных фигур, не являющихся криволинейными трапециями. Рассмотрим криволинейную фигуру *aABb*, ограниченную прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ и кривой $y=f(x)$, где f – неположительная, непрерывная на $[a;b]$ функция (рис. 57). Эта криволинейная фигура симметрична криволинейной трапеции $aA'B'b$, ограниченной прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ и кривой $y=-f(x)$, значит, их площади совпадают, следовательно, $S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

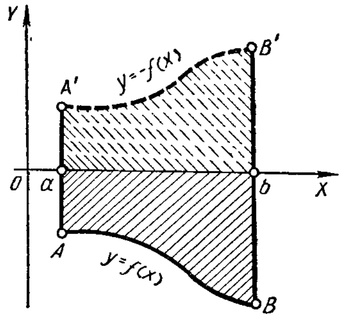


Рис. 57

Если непрерывная на $[a;b]$ функция f меняет на нем (конечное число раз) знак, обращаясь в нуль, например, при $x=p$, $x=q$ и $x=r$, где $a<p<q<r<b$, так что некоторые части графика данной функции находятся с одной стороны от оси Ox, а иные – с другой ее стороны (рис. 58), то для того, чтобы вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ и кривой $y=f(x)$, нужно отрезок $[a;b]$ разбить на части точками, в которых f обращается в нуль, отдельно вычислить интеграл от f на каждой полученной части и взять сумму абсолютных величин всех полученных интегралов, то есть

$$S=\left|\int_a^p ydx\right|+\left|\int_p^q ydx\right|+\left|\int_q^r ydx\right|+\left|\int_r^b ydx\right|.$$

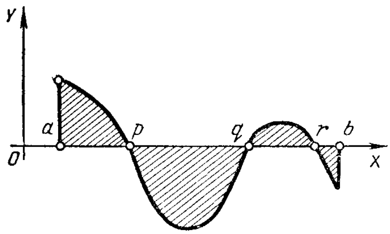


Рис. 58

Рассмотрим плоскую фигуру, содержащуюся между двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непрерывными на $[a;b]$ кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ на всем отрезке $[a;b]$. Обе функции f_1 и f_2 неотрицательны на отрезке $[a;b]$, тогда искомая площадь криволинейной фигуры A_1ABB_1 (рис. 59) будет представлять собой разность площадей криволинейных трапеций $aABb$ и aA_1B_1b, поэтому вычислять площадь рассматриваемой криволинейной фигуры будем по следующей формуле $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

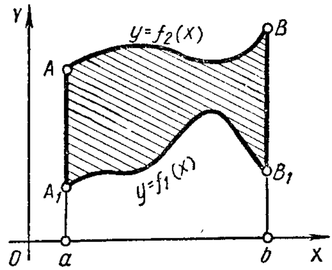


Рис. 59

Случай, когда функции f_1 и f_2 на отрезке $[a;b]$ меняют (конечное число раз) знак (рис. 60), вычисляются, так же, как и в предыдущем случае. Так как функции f_1 и f_2 непрерывны на отрезке $[a;b]$, то они ограниченны на нем. Поэтому существует такое число M, что $|f_1(x)| \le M$ и $|f_2(x)| \le M$ для всех значений x из отрезка $[a;b]$. Тогда функции $\overline{f_1}(x) = f_1(x) + M$ и $\overline{f_2}(x) = f_2(x) + M$ будут неотрицательными на отрезке $[a;b]$ функциями. Фигура

$A_1'A_2'B_2'B_1'$, заключенной между кривыми $y=\overline{f_1}(x)$, $y=\overline{f_2}(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, получена параллельным переносом фигуры $A_1A_2B_2B_1$, поэтому их площади совпадают и вычисляются по формуле $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$.

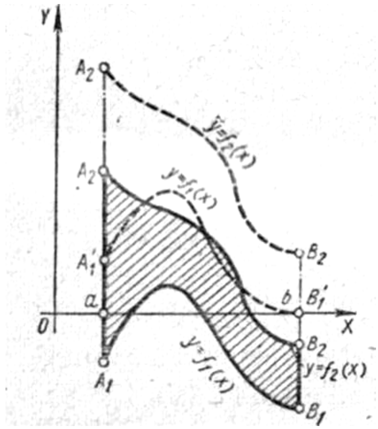


Рис. 60

Аналогично, если фигура $C_1D_1D_2C_2$ ограничена двумя прямыми $y=c$, $y=d$ и двумя кривыми $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, где функции φ_1 и φ_2 на отрезке $[c;d]$ непрерывны и удовлетворяют условиям $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ (рис. 61), тогда $S=\int\limits_c^d\left[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right]dy$.

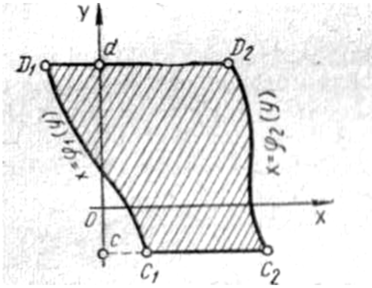


Рис. 61

Объем тел вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и дугой AB кривой $y = f(x)$, где f – неотрицательная, непрерывная на $[a;b]$ функция. Тогда эта функция опишет тело, являющееся телом вращения (рис. 62), объем которого вычисляется по формуле $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx = \pi \int\limits_a^b y^2 dx$.

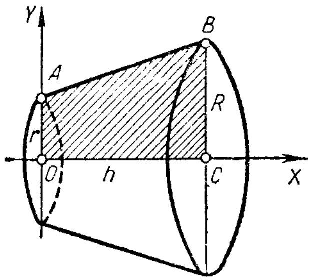


Рис. 62

Если тело образуется вращением криволинейной трапеции $cCDd$ (рис. 63), ограниченной осью Oy, прямыми $y = c$, $y = d$ и дугой CD кривой $x = \varphi(y)$, где φ – неотрицательная, непрерывная на $[c;d]$ функция, тогда объем этого тела вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy=\pi\int_c^d x^2dy\,.$$

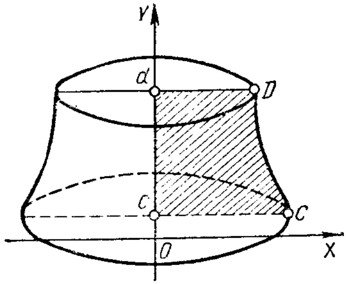


Рис. 63

Если вокруг оси Ox вращается фигура $A_1A_2B_2B_1$, ограниченная двумя прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя непрерывными на $[a;b]$ кривыми $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, где $0\le f_1(x)\le f_2(x)$ на всем отрезке $[a;b]$, то объем получившегося при этом кольцеобразного тела вращения (рис. 64) вычисляется по формуле $V=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$.

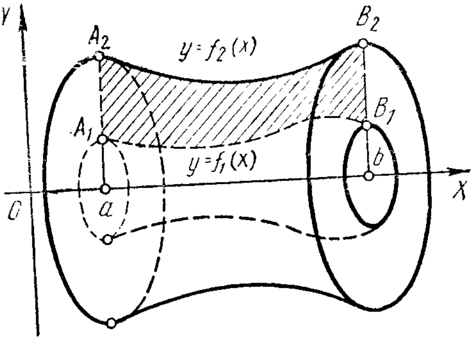


Рис. 64

Аналогично, если тело образовано вращением вокруг оси Oy фигуры $C_1D_1D_2C_2$ (рис. 65), ограниченной двумя прямыми $y=c$, $y=d$ и двумя кривыми $x_1=\varphi_1(y)$, $x_2=\varphi_2(y)$, где функции φ_1 и φ_2 на отрезке $[c;d]$ непрерывны и удовлетворяют условиям $0\le\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, тогда $V=\pi\int\limits_a^b\left(x_2^2-x_1^2\right)dy$

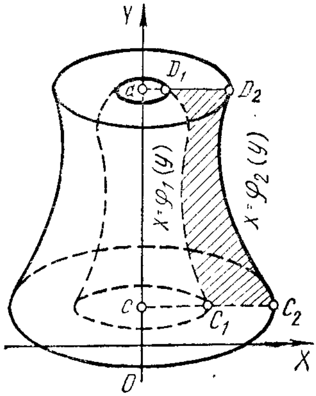


Рис. 65

Длина дуги

Длина дуги плоской кривой, определяемой в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, находится по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, где a и b – соответственно, абсциссы начала и конца дуги.

Площадь поверхности

Площадь поверхности тела вращения определяется по формуле $S_{пов}=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ **(**вокруг оси Ox**)**

и $S_{пов} = 2\pi \int\limits_c^d x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy$ (вокруг оси Oy).

Задания

1. Постойте фигуру, ограниченную линиями, и найдите ее площадь:

1.1. $y = 4x - x^2$, $y = 0$;

1.2. $y = -2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

1.3. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;

1.4. $y = 6x - x^2 - 7$, $y = x - 3$;

1.5. $y = x^2 - 2x - 4$, $y = -x^2$;

1.6. $y = \dfrac{2}{x}$, $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$;

1.7. $y = 2^{x-3} + 1$, $y = 2^{3-x} + 1$, $y = 1{,}5$;

1.8. $x = y^2(y-1)$, $x = 0$;

1.9. $x = 4 - y^2$, $x = \dfrac{y^2}{3} - 4$;

1.10. $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = 0$ $x = 1$, $x = 4$, вокруг оси Ox.

3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной параболами $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.

4. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Oy, кривой $y = \dfrac{1}{2}x^2$ и прямой $y = 2\sqrt{2}$.

5. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, и дугой параболы $y = x(4 - x)$.

6. Определите длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$.

7. Вычислите длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от точки $x = \frac{\pi}{6}$ до точки $x = \frac{\pi}{3}$.

8. Вычислите длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ до точки $x = 1$.

9. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox $y = x^3$, при $x \in [0;1]$.

10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой $y = 1 - x^2$, расположенной над осью абсцисс.

Библиографический список

1. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа. Том I. Учебное пособие для студентов-заочников физико-мат. факультетов пед. институтов. Под редакцией проф. Б.З. Вулиха. М.: Просвещение, 1972. 511 с.

2. Журавлева Н.А., Якименко М.Ш. Лабораторные работы с использованием компьютера как средство формирования компетентности учения студентов первого курса математического факультета // Роль кафедры в обновлении качества подготовки будущего учителя в педагогическом вузе: межвузовский сборник научных трудов. Красноярск, 2005. С. 161-171.

3. Задачник по курсу математического анализа. Учеб. пособие для студентов заоч. отделений физ.-мат. пединститутов. Ч. 1. Под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1971. 343 с.

4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979. 720 с.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие под ред. Л.Д. Кудрявцева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

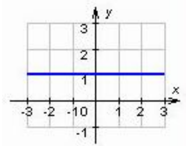
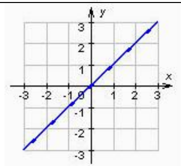
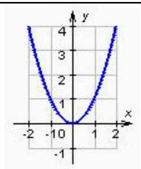
6. Мордкович А.Г., Мухин А.Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функции одной переменной: Учеб. пособие для студ. заоч. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1985. 144 с.

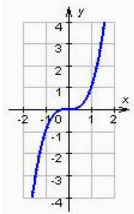
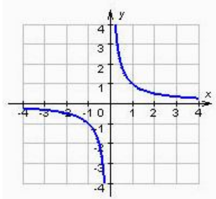
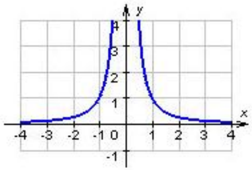
7. Очан Ю.С., Шнейдер В.Е. Математический анализ: учебное пособие для педагогических институтов. М.: Государственное научно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1961. 884с.

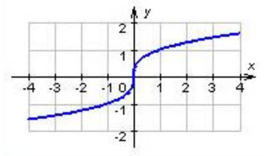
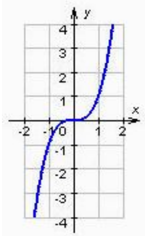
8. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Том 1. М.: Просвещение, 1966. 641 с.

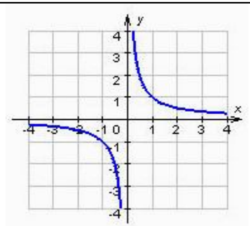
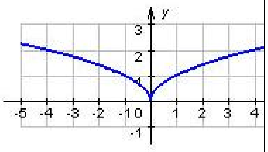
Приложение 1

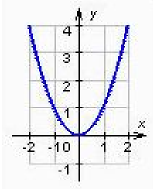
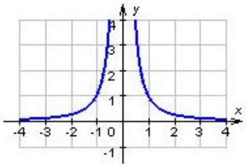
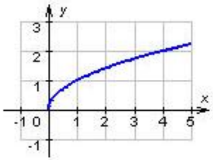
Свойства и графики основных элементарных функций

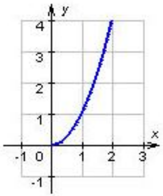
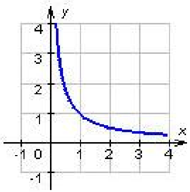
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
Степенная функция									
$y=1$		$(-\infty;+\infty)$	$\{1\}$	Четная	Нет	Постоянная	Нет	Ограниченная	Периодичная, период любое действительное число
$y=x$		$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Не ограниченная	Не периодична
$y=x^{2n}$, $n\in \mathrm{N}$		$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Четная	$(0;0)$	Убывает $(-\infty;0)$, возрастает $(0;+\infty)$	$x_{\min}=0$	Ограниченная снизу $y=0$	Не периодичная

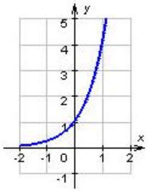
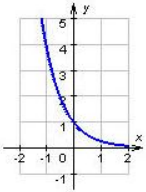
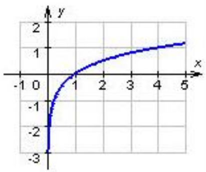
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y = x^{2n-1}$, $n \in \mathrm{N}$		$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Не ограниченная	Не периодичная
$y = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \mathrm{N}$		$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	Нечетная	Нет	Убывает $(-\infty;0)$, убывает $(0;+\infty)$	Нет	Не ограниченная	Не периодичная
$y = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in \mathrm{N}$		$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Четная	Нет	Возрастает $(-\infty;0)$, убывает $(0;+\infty)$	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная

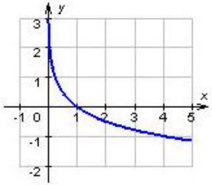
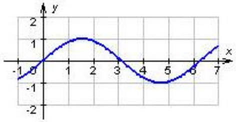
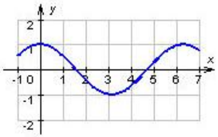
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{2m+1}{2n+1}$, $\alpha < 1 \ \ n, m \in N$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Не ограниченная	Не периодичная
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{2m+1}{2n+1}$, $\alpha > 1 \ \ n, m \in N$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Не ограниченная	Не периодичная

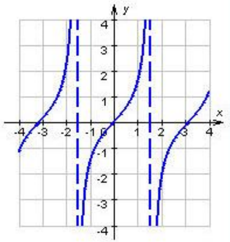
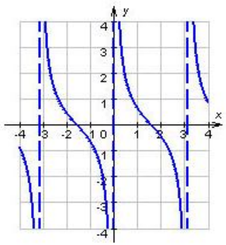
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = -\frac{2m+1}{2n+1}$, $n, m \in \mathrm{N}$		$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	Нечетная	нет	Убывает $(-\infty;0)$, убывает $(0;+\infty)$	Нет	Не ограниченная	Не периодичная
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{2m}{2n+1}$, $\alpha < 1$ $n, m \in \mathrm{N}$		$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Четная	$(0;0)$	Убывает $(-\infty;0)$, возрастает $(0;+\infty)$	$x_{\min} = 0$	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная

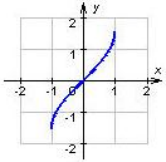
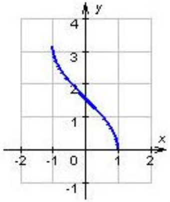
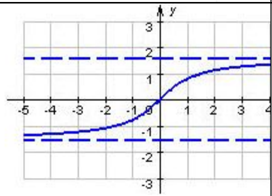
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{2m}{2n+1}$, $\alpha > 1$ $n, m \in \mathrm{N}$		$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Четная	$(0;0)$	Убывает $(-\infty;0)$, возрастает $(0;+\infty)$	$x_{\min} = 0$	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = -\frac{2m}{2n+1}$, $n, m \in \mathrm{N}$		$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Четная	нет	Возрастает $(-\infty;0)$, убывает $(0;+\infty)$	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная
$y = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{2m+1}{2n}$, $\alpha < 1$ $n, m \in \mathrm{N}$		$[0;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная

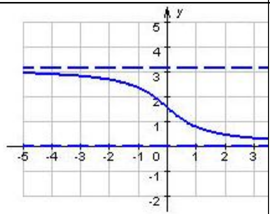
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y=x^{\alpha}$, $\alpha=\frac{2m+1}{2n}$, $\alpha>1$ $n,m\in N$		$[0;+\infty)$	$[0;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Ограниченная снизу $y=0$	Не периодичная
$y=x^{\alpha}$, $\alpha=-\frac{2m+1}{2n}$, $n,m\in N$		$(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	нет	Убывает	Нет	Ограниченная снизу $y=0$	Не периодичная

Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
Показательная функция									
$y = a^x$, $a > 1$		$(-\infty;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Нет	Возрастает	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная
$y = a^x$, $0 < a < 1$		$(-\infty;+\infty)$	$(0;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Нет	Убывает	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$	Не периодичная
Логарифмическая функция									
$y = \log_a x$, $a > 1$		$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	$(1;0)$	Возрастает	Нет	Не ограниченная	Не периодичная

Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y = \log_a x$, $0 < a < 1$		$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Ни четная, ни нечетная	$(1;0)$	Убывает	Нет	Не ограниченная	Не периодичная
Тригонометрические функции									
$y = \sin x$		$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$	Нечетная	$(\pi n;0)$ $n \in Z$	$(-\pi/2+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n)$ возрастает, $(\pi/2+2\pi n;\ 3\pi/2+2\pi n)$ убывает	$x_{\min}=-\pi/2+2\pi n$; $x_{\max}=\pi/2+2\pi n$; $n \in Z$	Ограниченная снизу $y=-1$, ограниченная сверху y=1	Периодичная, период 2π
$y = \cos x$		$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$	Четная	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$ $n \in Z$	$(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$ возрастает, $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$ убывает	$X_{\min}=\pi+2\pi n$; $x_{\max}=2\pi n$; $n \in Z$	Ограниченная снизу $y=-1$, ограниченная сверху y=1	Периодичная, период 2π

Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y=\operatorname{tg} x$		$(-\infty;+\infty)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}$ $n\in Z$	$(-\infty;+\infty)$	Нечетная	$(\pi n;0)$ $n\in Z$	$(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$ возрастает	Нет	Не ограниченная	Периодичная, период π
$y=\operatorname{ctg} x$		$(-\infty;+\infty)\setminus\{\pi n\}$ $n\in Z$	$(-\infty;+\infty)$	Нечетная	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$ $n\in Z$	$(\pi n;\ \pi+\pi n)$ убывает	Нет	Не ограниченная	Периодичная, период π

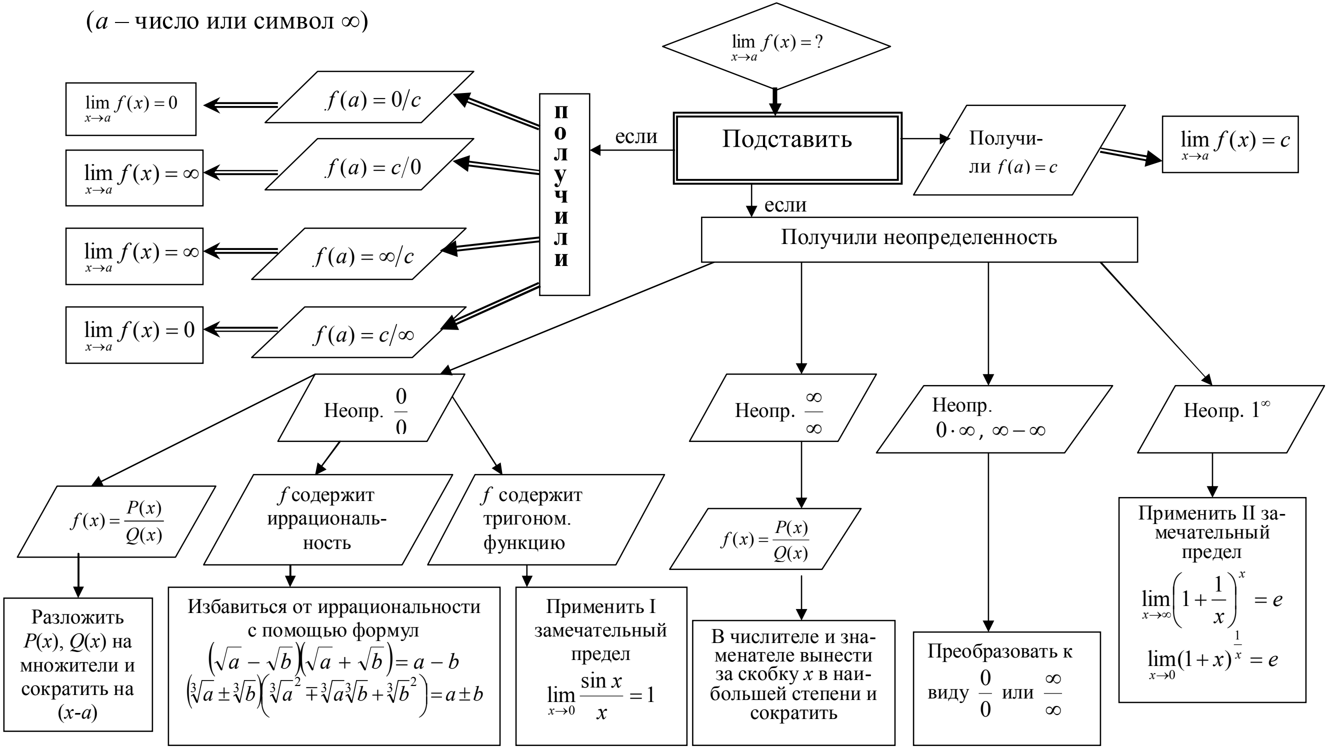
Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
Обратные тригонометрические функции									
$y = \arcsin x$		$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Ограниченная снизу $y = -\pi/2$, ограниченная сверху $y=\pi/2$	Не периодичная
$y = \arccos x$		$[-1;1]$	$[0;\pi]$	Ни четная, ни нечетная	$(1;0)$	Убывает	Нет	Ограниченная снизу $y = 0$, ограниченная сверху $y=\pi$	Не периодичная
$y = \operatorname{arctg} x$		$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	Нечетная	$(0;0)$	Возрастает	Нет	Ограниченная снизу $y = -\pi/2$, ограниченная сверху $y=\pi/2$	Не периодичная

Функция	График функции	Область определения	Множество значений	Четность (нечетность)	Нули функции	Промежутки монотонности	Экстремумы функции	Ограниченность функции	Периодичность функции
$y=\mathrm{arcctg}x$		$(-\infty;+\infty)$	$(0;\pi)$	Ни четная, ни нечетная	Нет	Убывает	Нет	Ограниченная снизу $y=0$, ограниченная сверху $y=\pi$	Не периодичная

Приложение 2

Схема вычисления предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

(a – число или символ ∞)



Приложение 3

Таблица производных

1. $(C)' = 0$
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$
4. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
15. $(\sec x)' = \mathrm{tg}\, x \cdot \sec x$ $\qquad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
16. $(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{ctg}\, x \cdot \mathrm{cosec}\, x$ $\qquad \mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$
17. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$ гиперболический синус $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
18. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$ гиперболический косинус $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ гиперболический тангенс $\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$
20. $(\mathrm{cth} x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ гиперболический котангенс $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$

Правила нахождения производных

1. $(C \cdot u)' = C \cdot (u)'$
2. $(u + v)' = u' + v'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
5. $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

Оглавление

Учебное издание

Наталья Александровна Журавлева

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ НАЧАЛ АНАЛИЗА НА ОСНОВЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Учебное пособие

Электронное издание

В авторской редакции
Корректор Н.А. Агафонова

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 29.01.18
Формат 60х84 1/16
Усл. печ. л. 9,13