МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П.АСТАФЬЕВА

(КГПУ им.В.П.Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета)

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Направление 44.03.05 Педагогическое образование, профили «математика и информатика», квалификация «бакалавр»
(код направления подготовки)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав.кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

_____ (подпись) В.Р. Майер (И.О.Фамилия)

«09» 06 2017 г.

Выпускная квалификационная работа

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ САМОКОНТРОЛЯ У ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ИХ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Выполнил студент
В.А. Масленкова (И.О.Фамилия) 09.06.17 (подпись, дата)

Форма обучения очная

Научный руководитель:
к.п.н, доцент, М.А. Кейв (ученая степень, должность, И.О.Фамилия) 09.06.17 (подпись, дата)

Дата защиты _____

Оценка _____

Красноярск, 2017

Введение

«Самое первое и самое главное в жизни – стараться владеть самим собою»

Вильгельм Гумбольдт

Согласно ФГОС среднего общего образования самоконтроль является регулятивным универсальным учебным действием, входящим в состав метапредметных результатов обучения. Самоконтроль – необходимое условие качества обучения. Нельзя не отметить важность навыков самостоятельного контроля при прохождении итоговой аттестации (ОГЭ, ЕГЭ), когда особенно важно умение не просто осуществлять деятельность, но и умение контролировать и корректировать её.

Человек с развитым самоконтролем обладает особой собранностью, точностью и последовательностью в действиях. При наличии сформированного самоконтроля обучающиеся фактически участвуют в управлении своей собственной учебной деятельностью. Это порождает у них удовлетворённость своей работой, знаниями, позволяет поверить в себя и свои способности. Наличие сформированного самоконтроля при изучении математики позволяет обучающимся использовать различные ресурсы для достижения поставленных целей, выбирать успешные стратегии в различных ситуациях.

В наше время проблема самоконтроля всё больше становится предметом исследований. Это обусловлено тем, что самоконтроль – один из важнейших факторов, обеспечивающих самостоятельную деятельность обучающихся. Учебную деятельность рациональнее всего начинать с формирования самостоятельного контроля, но, как показывает практика, что именно этот навык обычно оказывается наиболее слабо сформированным у обучающихся.

Проблема исследования заключается в поиске и создании дидактических условий, обеспечивающих формирование навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике.

Объектом исследования является процесс обучения школьников математике.

Предметом исследования являются дидактические условия, способствующие формированию у обучающихся навыков самоконтроля.

Цель исследования заключается в повышении уровня сформированности у школьников навыков самоконтроля в процессе обучения их математике.

В ходе работы решались следующие *задачи:*

- проанализировать специальную литературу и имеющийся опыт по теме исследования;
- охарактеризовать понятие «самоконтроль» и разработать содержательно-диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности у обучающихся навыков самоконтроля;
- выделить и описать дидактические условия, способствующие формированию навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике;
- разработать специальное методическое обеспечение по школьному курсу математики (ШКМ), направленное на формирование у обучающихся навыков самостоятельного контроля;
- провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

Глава 1. Теоретические основания для формирования навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике

§1.1. Самоконтроль – как функция самоорганизации

Рационализация учебной деятельности достигается путём применения обучающимися рациональных методов и приёмов самоорганизации учебной работы.

Л.Ф. Фалеева определяет *самоорганизацию* как деятельность и способность личности, связанные с умением организовывать себя, проявляющиеся в целеустремлённости, активности, обоснованности мотивации, планировании своей деятельности, самостоятельности, быстроте принятия решений и ответственности за них, критичности оценки результатов своих действий, чувстве долга [Фалеева, 2012].

А.Ю. Киселёва под *личностной самоорганизацией* понимает умение организовывать себя, своё время, свои действия. Другими словами, самоорганизация – это умение организовывать ресурсы, имеющиеся в нашем распоряжении, также это процесс изменения жизненных стереотипов, отработка необходимых умений для действий, сами действия и их контроль. К элементам самоорганизации она относит время, планирование дисциплину и самоконтроль [Киселёва, А. Ю., 2010].

Рассмотрим сущность и методы самоорганизации учебной деятельности обучающихся *(рис. 1)*.

Рис. 1. Самоорганизация учебной деятельности

Самоорганизация учебной деятельности начинается, как правило, с *самопознания* — процесса познания самого себя, своих потенциальных и актуальных свойств, личностных, интеллектуальных способностей, черт характера, своих отношений с другими людьми и т.д. [Блинова В.Л., Блинова Ю.Л., 2009].

Маралов В.Г. выделяет наиболее распространённые способы самопознания: самонаблюдение; самоанализ; сравнение себя с некоторой «меркой»; моделирование собственной личности; осознание противоположностей в каждом качестве, поведенческой характеристике; и средства самопознания: познание других людей; самоотчёты; чтение литературы. Результатом самопознания являются система знаний о себе и система самоотношения [Маралов В.Г., 2004].

Следующим методом самоорганизации деятельности является *самоконтроль* – самостоятельное регулирование и управление личностью своей деятельностью. Метод самоконтроля включает такие операции, как осознание учеником потребности в работе, постановка цели, планирование, реализация программы действий и коррекция результатов. Особое внимание в процессе самоконтроля следует уделять *планированию* – выделению основных и промежуточных целей в предстоящей и текущей умственной деятельности и взаимодействиях её с личными целями. При осуществлении самоконтроля целесообразно применять следующие приёмы: самоубеждение, самовнушение, самоприказ и самокоррекция. Стоит отметить, что именно в способности ученика к самоконтролю проявляется степень его самоорганизации.

Методы самопознания и самоконтроля связаны с методом самооценки. *Самооценка* представляет собой оценивание личностью себя и своих возможностей; качеств, свойств, действий и результатов деятельности; а также места среди других людей. Самооценка является важным регулятором учебной деятельности, влияющим на эффективность умственного труда.

Более подробно рассмотрим такой метод самоорганизации учебной деятельности, как самоконтроль. Обратимся к тому, как определяют самоконтроль некоторые исследователи.

В.И. Страхов определяет *самоконтроль*, как «форму деятельности, проявляющуюся в проверке поставленной задачи, в критической оценке процесса работы и в исправлении её недочётов».

Г.А. Соболева считает, что «*самоконтроль* – это умение критически отнестись к своим поступкам, действиям, чувствам и мыслям, регулировать своё поведение и управлять им. Самоконтроль связан с личностью в целом».

Проанализировав психолого-педагогическую литературу, можно сделать вывод о том, что в широком смысле слова под *самоконтролем* понимают свойства человека, заключающиеся в стремлении и умении регулировать свою деятельность.

Человек в ходе самоконтроля совершает умственные и практические действия по самооценке, корректированию и совершенствованию выполняемой им деятельности; овладевает соответствующими умениями и навыками. Кроме того, самоконтроль способствует развитию мышления.

Процесс формирования у обучающихся навыков самоконтроля включает в себя три этапа:

- формирование потребности в выработке у себя навыка самоконтроля;
- обучение школьников системой знаний, которые раскрывают сущность самоконтроля и пути его формирования;
- осуществление длительной тренировочной деятельности по формированию навыков самоконтроля.

К структурным элементам самоконтроля Н.Д. Левитов относит:

- внимание к результатам своей деятельности;
- наблюдение за ходом работы по её показателям: скорости, точности применяемых приёмов и т.д.;
- мыслительные операции (анализ результатов наблюдения, установление причинной зависимости имеющихся недостатков от внешних условий и от самого обучающегося);
- точную и своевременную реакцию на подмеченные недостатки в работе (выражаются в их исправлении).

К числу общих принципов *классификации видов самоконтроля* относят: *временной, пространственный, структурный*, а также *принцип произвольности самоконтроля.*

Остановим внимание на таких принципах, как временной и принцип произвольности самоконтроля.

В соответствии с временным принципом следует различать предварительный, текущий (промежуточный) и результирующий (итоговый) виды самоконтроля.

Роль *предварительного самоконтроля* заключается в предотвращении ошибочных решений, действий, неправильных поступков.

Текущий самоконтроль сменяет предварительный (направлен на проверку правильности промежуточных результатов).

Результирующий самоконтроль подводит итоги проделанному и помогает ответить на основной вопрос: достигнута ли исходно поставленная цель?

Согласно принципу произвольности различают *произвольный* (предполагает осознанный характер постановки и достижения соответствующих целей при выполнении определённого вида деятельности) и *непроизвольный* (происходит на подсознательном уровне) виды самоконтроля.

К *функциям самоконтроля* относят: диагностирующую, корректирующую, развивающую, воспитательную и функцию организации и управления учебной деятельностью *(рис.2)*.

Рис.2. Функции самоконтроля

Диагностирующая функция самоконтроля проявляется в постоянном процессе выявления уровня усвоения знаний. С помощью диагностирующей функции устанавливается подготовленность обучающихся к получению новых знаний.

Корректирующая функция заключается в реакции на собственные ошибки и их исправление.

Развивающая функция проявляется в развитии самоанализа, самонаблюдений и самостоятельного развития способов усвоения учебного материала.

Воспитательная функция характеризуется дисциплинированностью и стремлением к обучению в полную силу.

Под функцией *организации и управления учебной деятельностью* понимают самоуправление и саморегуляцию учебным процессом с опорой на самоанализ и внесения изменений с помощью коррекции

Для определения сформированности навыков самоконтроля условно выделим три уровня: первый (низкий уровень сформированности самоконтроля), второй (средний уровень сформированности навыков самостоятельного контроля) и третий (высокий уровень) *(таблица 1)*.

Таблица 1.

Характеристика уровней сформированности навыков самоконтроля

уровень сформированности навыков самоконтроля	*характеристика*
первый уровень	➢ низкая сформированность навыков самоконтроля
второй уровень	➢ средняя сформированность навыков самоконтроля
третий уровень	➢ высокая сформированность навыков самоконтроля

Первый уровень характеризуется низкой сформированностью навыков самоконтроля: у обучающегося наблюдается либо отсутствие самоконтроля вообще (когда совершаемые им действия не контролируются, часто оказываются неправильными, допущенные ошибки не замечаются и не исправляются), либо самоконтроль присутствует на основе непроизвольного внимания (неосознанная учеником схема действия, которая зафиксировалась в его непроизвольной памяти за счёт многократного выполнения одного и того же действия; что касается новых, не достаточно усвоенных знаний, то ошибки в них допускаются часто, и при этом не замечаются и не исправляются).

Второй уровень характеризуется средней сформированностью навыков самостоятельного контроля: подразумевается, что обучающийся, выполняя задание, может допустить ошибку, однако, если учитель попросит его проверить свои действия или найти ошибку, то ученик, как правило, находит её и исправляет, при этом может объяснить свои действия

Третий уровень характеризуется высокой сформированностью навыков самоконтроля: данный уровень подразумевает, что ученик способен безошибочно решать большое количество разнообразных задач; способен контролировать свои действия и действия других учеников при совместном выполнении задания.

Можно сделать вывод, что при проведении специальной работы по формированию навыков самоконтроля, его уровень должен повышаться от первого к третьему.

Высоко сформированный навык самоконтроля у обучающихся обеспечивает комфорт в обучении, снимает стресс и позволяет школьникам учиться с интересом и большим желанием, а также даёт ученикам реальный «инструмент», с помощью которого они могут самостоятельно управлять процессом своего учения.

§1.2. Дидактические условия формирования навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике

Под *дидактическими условиями* понимают обстоятельства процесса обучения и воспитания, которые являются результатом отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения и воспитания, способствующих эффективному решению поставленных дидактических задач [Штеймарк О.В., 2008].

Одним из ключевых дидактических условий формирования навыков самостоятельного контроля является специальное содержание обучения.

С*одержание обучения* представляет собой непосредственно некоторый объём теоретического учебного материала, комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач из жизни [Кейв М.А., Власова Н.В., 2015].

Выделим некоторые составляющие специального содержания обучения, способствующие формированию самоконтроля у обучающихся на уроках математики:

- *провоцирующие задачи или задачи-ловушки;*

К задачам провоцирующего характера относят такие задачи, условия которых содержат упоминания, указания, намёки или другие побудители, подталкивающие обучающихся к выбору ошибочного пути решения или неверного ответа [Зайкин М.И., Колосова В.А., 1997].

Выделяют следующие *разновидности задач провоцирующего характера:*

1) задачи, условия которых в той или иной форме навязывают неверный ответ;

Приведём примеры таких задач:

1. Сколько граней имеет новый шестигранный карандаш?

Навязывается ответ: «6 граней», но он неверен, так как помимо 6 боковых граней у нового карандаша есть ещё 2 торцевые грани.

2. Какое из следующих утверждений истинно?

а) Четырёхугольник, диагонали которого делятся точкой пересечения пополам и взаимно перпендикулярны, является прямоугольником;

б) Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны, является квадратом;

в) Четырёхугольник, диагонали которого делятся точкой пересечения пополам и равны, является ромбом [Зайкин М.И., Колосова В.А., 1997].

2) задачи, условия которых тем или иным способом подсказывают неверный путь решения;

Пример такого задания: «У куба 8 вершин, если одну из них отпилить, сколько вершин будет?» [Зайкин М.И., Колосова В.А., 1997]. Формулировка задания навязывает ответ 7. Но в реальности сечение куба плоскостью, проходящей через три стороны трёхгранного угла при вершине куба, порождает вместо одной отпиленной вершины ещё три, т.е. правильный ответ – 10 вершин.

3) задачи, вынуждающие придумывать, составлять, строить и т.п. математические объекты, которые при заданных условиях не могут иметь места;

К таким задачам относятся задачи, при решении которых обучающиеся работают с фигурами (вычисляют их площади, периметры, объёмы и т.д.), которых в реальности не существует.

Например: «Найдите объём и боковую поверхность конуса, у которого угол при вершине осевого сечения равен 60°, радиус основания равен 6 см, а высота – 13 см» [Масленкова В.А., 2016].

4) *задачи, вводящие в заблуждение из-за неоднозначности трактовки терминов, словесных оборотов, буквенных или числовых выражений;*

В качестве примера приведём следующее задание: «На листке бумаги написано число 606. Какое действие нужно совершить, чтобы увеличить его в полтора раза?». В данном случае имеется в виду не математическое «действие», а просто игра с бумажным листком: если перевернуть лист, на котором написано 606, то увидим запись 909, т.е. то число, которое в 1,5 раза больше, чем 606 [Зайкин М.И., Колосова В.А., 1997].

5) *задачи, условия которых допускают возможность «опровержения» семантически верного решения синтаксическим или иным нематематическим способом.*

Пример такой задачи: «Три спички выложили на стол так, что получилось четыре. Могло ли такое быть, если других предметов на столе не было?»

Напрашивающийся отрицательный ответ опровергается рисунком (рис.3).

Рис.3

Включение провоцирующих задач в процесс обучения школьников математике способствует у них формированию критичности, приучает к анализу воспринимаемой информации и её разносторонней оценке [Масленкова В.А., 2016].

➢ *математические софизмы, парадоксы, головоломки и фокусы;*

Софизм – это формально кажущееся правильным утверждение, но по существу являющееся ложным умозаключением, основанное на неправильном подборе исходных положений [Ожегов С.И., 2012].

Мартин Гарднер определяет *математический софизм* как удивительное утверждение, в доказательстве которого кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки.

Среди математических софизмов выделяют арифметические, геометрические, логические и алгебраические софизмы.

Представим несколько математических софизмов:

1) Все числа равны между собой

Возьмём два произвольных неравных между собой числа a и b. И запишем для них очевидное тождество:

$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2.$$

Слева и справа стоят полные квадраты, т.е. можем записать :

$$(a-b)^2 = (b-a)^2. \qquad (1)$$

Извлекая из обеих частей последнего равенства квадратный корень, получим:

$$a - b = b - a \qquad (2)$$

или *2a = 2b*, или окончательно

$$a = b.$$

Исходное тождество и равенство (1) вполне справедливы. Но при переходе от равенства (1) к равенству (2) была допущена ошибка в извлечении квадратного корня из обеих частей равенства (1). В действительности же вместо равенства (2) из равенства (1) должно следовать равенство

$$|a-b| = |b-a|, \qquad (3)$$

которое вытекает из следующих соотношений:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0, \end{cases} \qquad (*)$$

$$\sqrt{x^2} = |x|. \qquad (**)$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая.

I случай. $a - b \geq 0, \text{тогда, очевидно}, b - a \leq 0. \text{Согласно}$ (*) из равенства (3) следует $a - b = -(b-a)$, или

$$a = a,$$

т.е. просто тождество числа a самому себе.

II случай. $a - b < o$, тогда $b - a > 0$, откуда в соответствии с (*) из равенства (3) следует $-(a-b) = b - a$, или

$$a = a$$

[Мадера А.Г. , 2003].

2) В любой окружности хорда, не проходящая через её центр, равна её диаметру

В произвольной окружности проводим диаметр *AB* и хорду *AC* (рис.4). Через середину *D* этой хорды и точку *B* проводим хорду *BE*. Соединив точки *C* и *E*, получаем два треугольника *ABD* и *CDE*. Углы *BAC* и *CEB* равны как вписанные в одну и ту же окружность, опирающиеся на одну и ту же дугу; углы *ADB* и *CDE* равны как вертикальные; стороны *AD* и *CD* равны по построению.

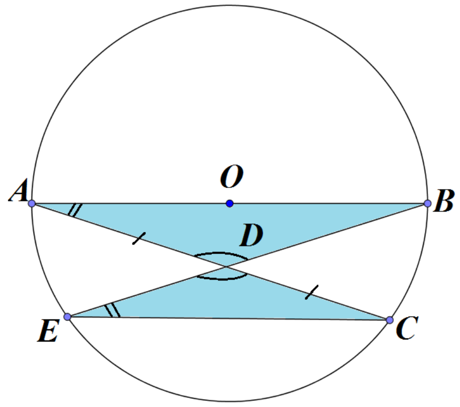


Рис.4

Отсюда заключаем, что треугольники *ABD* и *CDE* равны (по стороне и двум углам). Но стороны равных треугольников, лежащие против равных углов, сами равны, а потому

$$AB = CE,$$

т.е. диаметр окружности оказывается равным некоторой (не проходящей через центр окружности) хорде, что противоречит утверждению о том, что диаметр больше всякой не проходящей через центр хорды.

В софизме доказывается, что два треугольника *ABD* и *CDE* равны, ссылаясь при этом на признак равенства треугольников по стороне и двум углам. Однако такого признака нет. Правильно сформулированный признак равенства треугольник гласит: *если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны* [Мадера А.Г., 2003].

Парадокс в широком смысле слова представляет собой утверждение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися мнениями. В более узком смысле, парадокс – это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются аргументы, представляющиеся убедительными.

Математическая головоломка – задача с игровыми элементами, требующая сообразительности.

Приведём пример *математической головоломки (фокуса)* с магическим квадратом. В традиционном магическом квадрате суммы чисел в каждом столбце, каждом ряду и по каждой диагонали одинаковы. Совершенно иной тип магического квадрата изображён на *рис.1.* На первый взгляд может показаться, что квадрат составлен хаотично (числа расположены случайным образом). Но тем не менее он обладает магическим свойством.

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	1	4	18	0
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Рис.1. Магический квадрат

Это свойство можно продемонстрировать с помощью пяти монет и 20 фишек. Необходимо выбрать любое из чисел, вписанных в стенки квадрата, положить на это число монету и закрыть фишками числа, стоящие в одной строке и одном ряду с выбранным.

Теперь необходимо выбрать любое число, вписанное в незакрытые клетки, также положить на него монету, а числа, стоящие в одной и той же строке и в том же столбце, что и выбранное во второй раз число, снова закрыть фишками. Повторив процедуру ещё два раза, обнаружится, что незакрытой осталась одна клетка. Нужно положить на эту клетку последнюю (пятую) монету.

Если теперь вычислить сумму чисел, накрытых монетами, то она окажется равной 57. Сколько бы не повторялся эксперимент, сумма всегда останется равной 57.

Секрет этого фокуса заключается в том, что квадрат представляет собой не что иное, как самую обычную таблицу сложения, составленную замысловатым образом (строится с помощью двух наборов чисел: 12, 1, 4, 18, 0 и 7, 0, 4, 9, 2). Сумма всех этих чисел равна 57.

Написав числа первого набора над верхней строкой квадрата, а числа второго набора слева от самого левого столбца, можно понять, как получаются числа в клетках квадрата *(рис.2).* Так, число в левом верхнем углу равно сумме чисел 12 и 7, также получаются и остальные числа.

	12	1	4	18	0
7	19	8	11	25	7
0	12	1	4	18	0
4	16	1	4	18	0
9	21	10	13	27	9
2	14	3	6	20	2

Рис.2.

Теперь нетрудно понять основную идею фокуса: число, стоящее в любой клетке квадрата, равно сумме каких-то двух чисел в исходных наборах. Положив монету на выбранное число, тем самым «вычёркиваются» эти два числа. Каждая новая монета кладётся на пересечение другой строки с другим столбцом, поэтому пяти монетам соответствует сумма пяти пар выбранных исходных чисел, которая равна сумме всех десяти исходных чисел [Гарднер М., 1999].

Включение в процесс обучения математике софизмов, головоломок, фокусов и парадоксов формирует у обучающихся критическое мышление, посредством формирования умений дать оценку рациональности способов решения задач; умений осуществлять самоконтроль своей деятельности и прогнозировать результат использования различных способов решения задач.

- *задачи с ошибками;*

Задания с ошибками ориентированы на формирование у обучающихся умений находить в предложенных решениях ошибки и объяснять их. Например:

1) Укажите уравнение, в решении которого допущена ошибка. Объясните свой выбор.

   а) $\sin\alpha = 0{,}7$.

   Решение: $x = (-1)^n \arcsin 0{,}7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

   б) $\sin x = \frac{\sqrt{27}}{2}$.

   Решение: $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{27}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ [Масленкова В.А., 2016].

2) Укажите, на каком шаге была допущена ошибка при выполнении задания:

Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение:

$$cos^2\alpha + sin^2 a = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2 a$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

[Масленкова В.А., 2016].

3) Найдите ошибку в формулировке задания: «Между какими из следующих пар выражений: $\left(\sqrt{3} - b\right)^2$ и $\left(b - \sqrt{3}\right)^2$, $\left(a - 2\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(2\sqrt{2} - a\right)^3$ можно поставить знак равенства?» [Масленкова В. А., Молдыбаева А. И., Ширшикова М.Е., 2016].

➢ *задачи с параметром;*

Задачи с параметрами обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций сравнения, аналогии, классификации, конкретизации, обобщения, способности к анализу и синтезу [Далингер В.А., 2012].

Приведём примеры таких задач:

1) При каком значении параметра k значение выражения $\frac{4^{-3k}}{4^{-2k}}$ равно 0,5? [Иванов С.О., Войта Е.А., Ковалевская А.С., Ольховая Л.С., 2011].

2) Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $16^x + a < 30 \cdot 4^x$ не имеет ни одного целочисленного решения [Садовничий Ю.В. , 2015].

3) Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 6y = 40 - 5a \\ 6x + (a+5)y = 30 \end{cases}$$

Имеет бесконечное множество решений. В ответе запишите найденное значение параметра, а если таких значений несколько, то их сумму [Карасёв В.А., Лёвшина Г.Д., 2013].

Решение задач с параметрами требует от школьников умений:

- ✓ анализировать условие задачи в соответствии вопросом задачи;
- ✓ преобразовывать основную задачу в ряд частных задач, подчинённых главной задаче;
- ✓ проектировать план и этапы решения задачи;
- ✓ синтезировать различные направления поиска решения задачи [Чугунова А.А., Пустовалова Н.И., 2012].

Все перечисленные выше умения формируют у обучающихся навыки самостоятельного контроля.

- ➢ *контрпримеры;*

Контрпример – опровержение некоторого общего утверждения.

Так, утверждение «квадрат любого числа есть число положительное» – ложно, т.к. существует такое число, квадрат которого не является положительным числом (например, число 0). В данном случае это число 0 называют контрпримером.

- ➢ *задачи с неполными и избыточными данными;*

Такие задачи не подлежат алгоритмизации и решаются с помощью специальных приёмов [Тумашева О.В., Зданович О.В., 2010], применение которых требует от обучающихся проявления навыков самоконтроля.

Приведём пример задач с неполными данными:

1) Дочь моложе своей мамы на 25 лет, папа старше мамы на 6 лет. Сколько лет папе?

2) Работая на заводе, слесари за работу получили по 2 500р. Если их было бы меньше, то каждый слесарь получил бы по 2 800р. Сколько слесарей работало на заводе [Масленкова В.А. , 2016] ?

Пример задач с дополнительными (избыточными) данными:

1) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle ACB = 90°),\ BC = 3,\ AB = 5$. Найдите $tg\left(\frac{1}{2} arcsin\frac{3}{5}\right)$, если известно, что $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ [Масленкова В.А., 2016]

2) Круиз по Енисею на теплоходе «Куприян» составляет 10 ч. В тур по Енисею, чтобы увидеть самые красивые места Сибири, отправилось 75 человек. Спустя 4 часа теплоход остановился на пристани в г. Дивногорск. На пристани 25 пассажиров вышли, а 20 сели в теплоход. Сколько пассажиров продолжило тур по р. Енисей?

➢ *задачи с несколькими способами решения;*

«Лучше решить одну задачу несколькими методами, чем несколько задач – одним» (Д. Пойя).

Решая одну и ту же задачу разными способами, можно лучше понять специфику того или иного метода, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи.

Приведём пример задания:

Решите уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$ несколькими способами. Какой способ оказался для вас наиболее оптимальным?

Решение задач различными методами важно для планирования своей работы, своих действий (чтобы они были разумными, рациональными и безошибочными).

➢ *задания на выбор условия к данному вопросу* и *вопроса к данному условию задачи и др.;*

Такие задания способствуют формированию навыков самоконтроля на этапе анализа условий задачи. Например:

1) Один рыбак за неделю поймал 90 рыб, другой – в 2 раза меньше. Какой из вопросов можно поставить к условию задачи:

а) Сколько рыб поймал второй рыбак?

б) Сколько денег заработают рыбаки, продав половину пойманной рыбы?

в) Сколько рыб поймали оба рыбака?

2) Вычислите радиусы вписанной и описанной окружности. Выберите условие задачи, подходящее к данному требованию:

а) В равнобедренном треугольнике основание равно 18 см, боковая сторона – 12 см.

б) В ромбе $ABCD$ $\angle AB = 45°$, $AB = 6$, а $AD = 4$.

в) Сторона равностороннего треугольника равна 9 см [Масленкова В.А., 2016].

Организация на уроках математики самоконтроля (посредством включения в процесс обучения специального содержания) в практической деятельности формирует умение рассуждать, приводит к концентрации всех обучающихся, даёт возможность лучше разобраться в изучаемом материале, что почти исключает возможность совершения ошибки при выполнении заданий. При этом следует учитывать, что для успешного формирования навыков самоконтроля необходимо:

1) конструировать не отдельную задачу, а систему задач;

2) учебные задачи должны конструироваться так, чтобы освоение действия самоконтроля выступало прямым продуктом решения задачи;

3) система задач должна позволить сформировать навыки самоконтроля не только на конкретном математическом содержании, а обеспечить формирование навыков самоконтроля как одного из метапредметных умений [Тумашева О.В., Зданович О.В., 2010] [Масленкова В.А., 2016].

Важную роль при формировании навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике играет выбор методов и форм организации обучения.

Методы обучения представляют собой способы совместной деятельности педагога и обучающихся, направленные на достижение ими образовательных целей [Беспалько В.П., 1995].

Организационная форма обучения – способ осуществления взаимодействия педагога и обучающихся, в пределах которого реализуется содержание, дидактические задачи и методы обучения [Кейв М.А., Власова Н.В., 2015].

К специальным методам и формам обучения, способствующим формированию навыков самоконтроля в процессе обучения школьников математике относят: *самопроверку; взаимный опрос; работу в группе (например, составление «цепочкой» задачи по схеме и др.); комментированное решение; проверку решения; сверку с образцом; моделирование; «прикидку» (примерная оценка искомых результатов); выделение частей и целого; подбор вопроса к заданному условию задачи; подбор нескольких способов выполнения задания и выбор наиболее рационального; проверку по инструкции, определение причин анализируемых ошибок; выяснение того, какие ошибки могут быть; нахождение и исправление ошибок; повторное решение задачи; проверку на частном случае* и др.

Все перечисленные выше методы и формы организации обучения способствуют у обучающихся развитию внимательности, умения планировать свою деятельность, контролировать качество приобретаемых знаний и умений; способствуют формированию познавательных мотивов учения.

Особое место в формировании самостоятельного контроля у школьников занимают средства обучения.

Средства обучения включают в себя материальные объекты, с помощью которых учитель осуществляет обучающее воздействие (учебный процесс) [Иванова В.А., Левина Т.В., 2015].

Среди разнообразных средств обучения выделим специальные средства, оказывающие влияние на формирование навыков самостоятельного контроля у школьников:

- *специальные задачи и упражнения для формирования навыков самоконтроля у обучающихся;*
- *тесты закрытого и открытого типа;*

Педагогический тест определяется как система параллельных заданий возрастающей трудности, специфической формы, которая позволяет качественно и эффективно измерить уровень и структуру подготовленности испытуемых [Аванесов В.С., 2005].

Выделяют два типа тестовых заданий: открытые и закрытые. *Открытые тестовые задания* требуют самостоятельного ответа испытуемого, но формулировка должна предполагать однозначный ответ. Среди *закрытых тестовых заданий* выделяют закрытые тестовые задания альтернативных ответов (требуют однозначного ответа из двух предложенных), закрытые тестовые задания множественного выбора (предполагают наличие вариативности в выборе: имеют несколько вариантов ответов, среди которых один или несколько верных), задания на установление последовательности и задания на установление соответствия.

Продемонстрируем несколько тестовых заданий открытого и закрытого типа (задания) по теме: *«Функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, их графики и свойства»* [Масленкова В.А., 2017].

1. Область определения функции $y = \sin x$ составляет множество … чисел.
2. Функция $y = \cos x$:

   а) ни чётная, ни нечётная;

   б) чётная;

   в) нечётная.
3. Функция $y = \cos x$:

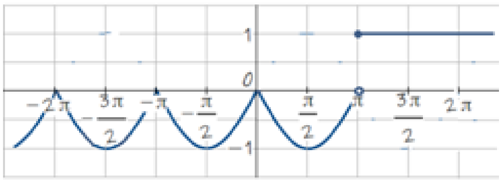
   а) непрерывная;

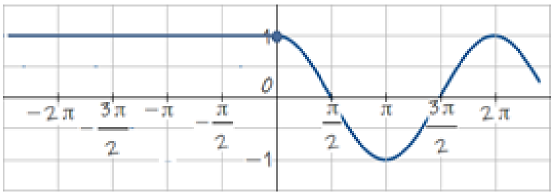
б) разрывная.

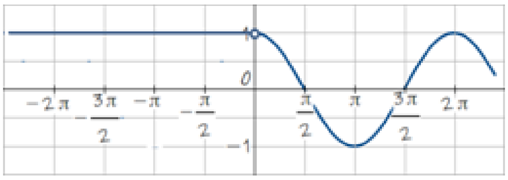
4. Сопоставьте кусочные функции и их графики:

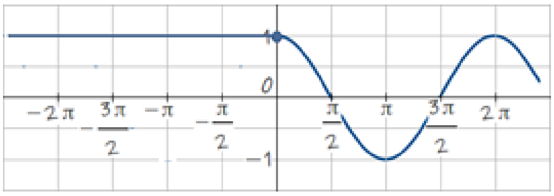
1) $y = \begin{cases} |\sin x|, & \text{если } x \le \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi \end{cases}.$

2) $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x \le 0 \end{cases}.$

А) 

В) 

Б) 

Г) 

1	2

Внедрение педагогических тестов в процесс обучения математике позволяет быстро выявить пробелы в текущей и итоговой подготовке обучающихся и наладить самоконтроль

- *рабочие тетради для самостоятельной работы* и др.

Рабочая тетрадь – это пособие для работы непосредственно с содержащимся в нём материалом по соответствующему разделу изучаемого предмета; применяется для закрепления темы с целью увеличения объёма практической деятельности и разнообразия содержания, форм работы, а также видов деятельности обучающихся [Соломенцева А.М., Неудахина Н.А., 2006].

Использование рабочих тетрадей для самостоятельной работы способствует устойчивости внимания на уроках; формированию умений и навыков самоконтроля; позволяют совершать постоянный контроль и способствуют рациональной организации работы обучающихся. Пример рабочей тетради для самостоятельной работы представлен в приложении 1.

Разработка и использование на уроках математики перечисленных выше дидактических условий обеспечивает формирование у учеников самоконтроля, а как показывает практика, самоконтроль является одним из необходимых условий повышения качества математической подготовки школьников.

Глава 2. Методика формирования навыков самоконтроля в процессе обучения математике

§2.1. Методическое обеспечение, направленное на формирование навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике

В параграфе 1.2. были описаны дидактические условия формирования навыков самостоятельного контроля у школьников в процессе обучения их математике.

Приведём примеры, способствующие формированию самоконтроля у обучающихся при изучении некоторых тем школьного курса математики.

Таблица 2.

Тема / раздел ШКМ	*Методическое обеспечение, направленное на формирование навыков самоконтроля у обучающихся*
Тригонометрия	При изучении раздела «Тригонометрия» предлагаем следующее методическое обеспечение: – *педагогический тест* с заданиями открытого и закрытого типа по теме: *«Функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, их графики и свойства»* [Масленкова В.А., 2017]. *№1.* Область определения функции $y = \sin x$ составляет множество … чисел. *№2.* Область определения функции $y = \cos x$ составляет множество … чисел. *№3.* Функция $y = \sin x$: 1) чётная; 2) ни чётная, ни нечётная; 3) нечётная. *№4.* Функция $y = \cos x$: 1) ни чётная, ни нечётная; 2) чётная; 3) нечётная. *№5.* Отрезок / отрезки, на котором / которых функция $y = \sin x$ возрастает: 1) $[-\pi; 0]$; 2) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 5) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. *№6.*

Отрезок / отрезки, на котором / которых функция $y = cos\ x$ возрастает:

1) $[\pi; 2\pi]$;
2) $\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$;
3) $(\pi; 2\pi)$;
4) $(\pi; 0)$;
5) $[\pi; 0)$.

№7.

Отрезок / отрезки, на котором / которых функция $y = sin\ x$ убывает:

1) $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$;
2) $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$;
3) $\left[-\ \frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$;
4) $[-\pi; 0]$;
5) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

№8.

Отрезок / отрезки, на котором / которых функция $y = cos\ x$ убывает:

1) $(-2\pi;\ -\pi)$;
2) $[0; \pi)$;
3) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
4) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;
5) $[-2\pi;\ \pi]$.

№9.

Функция $y = sin\ x$:

1) ограничена;
2) ограничена только снизу;
3) не ограничена;
4) ограничена только сверху.

№10.

Функция $y = cos\ x$:

1) ограничена только сверху;
2) не ограничена;
3) ограничена только снизу;
4) ограничена.

№11.

В точках вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ функция $y = sin\ x$ достигает своего … значения.

№12.

В точках вида $t = \pi + 2\pi n$ функция $y = cos\ x$ достигает своего … значения.

№13.

Основной период функции $y = sin\ x$ равен … .

№14.

Основной период функции $y = cos\ x$ равен … .

№15.

Функция $y = sin\ x$:

1) непрерывная;
2) разрывная.

№16.

Функция $y = cos\ x$:

1) непрерывная;
2) разрывная.

№17.

Область значений функции $y = sin\ x$ – это отрезок … .

№18.

Область значений функции $y = cos\ x$ – это отрезок … .

№19.

Отрезок, на котором функция $y = sin\ x$ выпукла вниз:

1) $[0; \pi]$;
2) $[\pi; 2\pi]$.

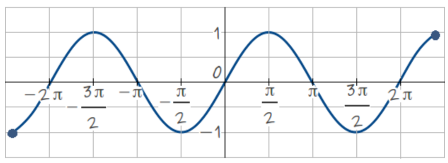
№20.

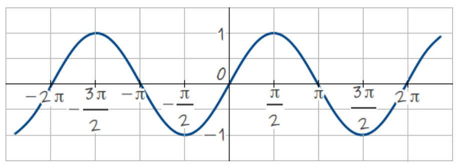
Отрезок, на котором функция $y = cos\ x$ выпукла вверх:

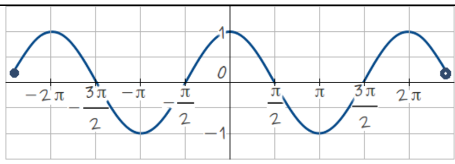
1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

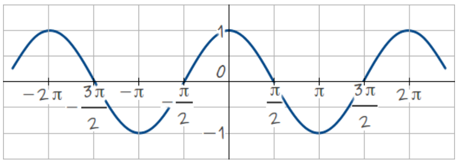
№21.

График функции $y = sin\ x$ имеет вид:

1) 

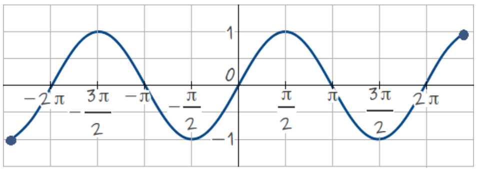
2) 

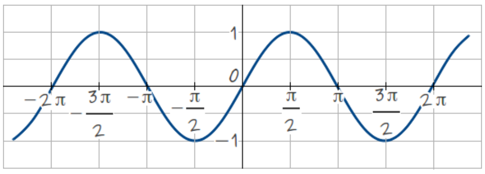
3) 

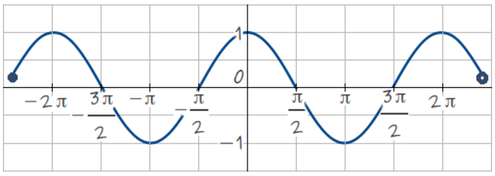
4) 

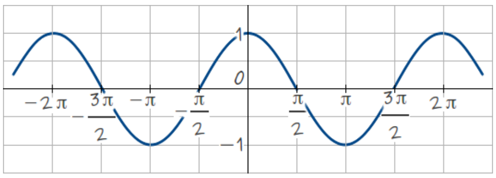
№22.

График функции $y = \cos x$ имеет вид:

1) 

2) 

3) 

4) 

№23.

… – координаты точки пересечения графиков функции $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

№24.

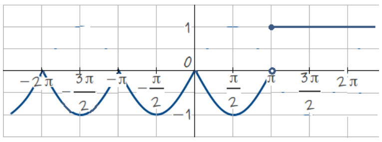
… – корень уравнения $\cos x = x^2 + 1$.

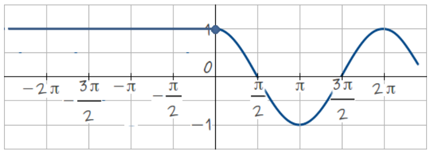
№25.

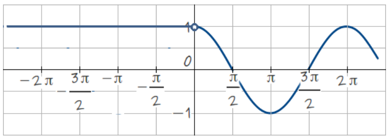
Сопоставьте кусочные функции и их графики:

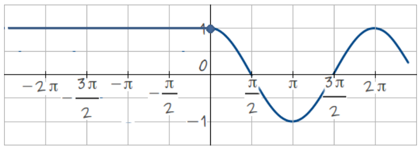
3) $y = \begin{cases} |\sin x|, & \text{если } x \le \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi \end{cases}$.

4) $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x \le 0 \end{cases}.$

А) 

В) 

Б) 

Г) 

1	2

– задача с ошибками:

Проанализируйте представленное решение уравнения $2\,log_4^2(\cos x) - 7\,log_4(\cos x) - 4 = 0$. Является ли это решение верным? Если нет, то укажите шаги, на которых допущены ошибки.

$2\,log_4^2(\cos x) - 7\,log_4(\cos x) - 4 = 0$

Пусть $log_4(\cos x) = t$, тогда

$$2t^2 - 7t - 4 = 0$$

$$D = 49 + 32 = 81$$

$$t_1 = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = 4$$

$$log_4(\cos x) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{aligned}\right., n\,, k \in \mathbb{Z}.$$

$$log_4(\cos x) = 4$$

$$\cos x = 4^4$$

$$\left[\begin{aligned} x &= arccos 4^4 + 2\pi l \\ x &= -arccos 4^4 + 2\pi m \end{aligned}\right., l, m \in \mathbb{Z}.$$

– сверка с образцом:

Решите неравенство $\sin x < a$

при $a = 1; 1{,}66; -\frac{1}{2}; 0; -1{,}73; -\frac{\sqrt{39}}{3}; -1.$

Сверьте решения с образцом:

Значение a	*Ответ*
1	$-\frac{3\pi}{2}+2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k\,, k \in \mathbb{Z}$
1,66	$-\infty < x < +\infty$
$-\frac{1}{2}$	$-\pi-\arcsin(-0{,}5)+2\pi k < x < \arcsin(-0{,}5)+2\pi k$
0	$-\pi+2\pi k < x < 2\pi k\,, k \in \mathbb{Z}$
$-1{,}73$	$\emptyset$
$-\frac{\sqrt{39}}{3}$	$\emptyset$
-1	$\emptyset$

– *задача с несколькими способами решения:*

Решите уравнение $\sin x-\cos x=1$ тремя способами из предложенных:

1 способ: приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса;

2 способ: разложение левой части уравнения на множители;

3 способ: введение вспомогательного угла;

4 способ: преобразование разности / суммы тригонометрических функций в произведение;

5 способ: приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций;

6 способ: возведение обеих частей уравнения в квадрат;

7 способ: с помощью универсальной тригонометрической подстановки;

8 способ: графическое решение.

Какое из решений на ваш взгляд наиболее рационально? Поясните свой ответ.

– *контрпример:*

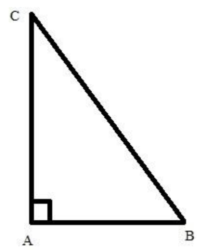
а) $\sin x = 0{,}7$;

б) $\sin x = \frac{\sqrt{27}}{2}$.

Примечание:

Решая уравнение $\sin x = 0{,}7$, ученик запишет: «$x=(-1)^n arcsin 0{,}7+\pi n$».

Для того, чтобы проверить, понимает ли он решение, даём контрпример $\sin x = \frac{\sqrt{27}}{2}$. Если ученик не вникает в условие, то

	допустит ошибку: «$x = (-1)^n arcsin\frac{\sqrt{27}}{2} + \pi n$". – *задача с параметром:* а) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2a\sin x - \cos 2x + 3 - 2a^2 = 0$ не имеет решение. б) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2x - 2a\cos x + 2a^2 - 43 = 0$ не имеет корней. – *рабочая тетрадь для самостоятельной работы* (фрагменты рабочей тетради представлены в *приложении 1*).
Площадь треугольника	Провоцирующие задачи в процессе обучения школьников геометрии играют важную роль при формировании навыков самостоятельного контроля. При изучении теоремы о площади треугольника рационально предложить блок задач, включающий *провоцирующую задачу*. Провокация заключается в том, что данный блок задач содержит побуждение к применению неверной аналогии при решении одной из задач. а) Вычислите площадь треугольника, у которого $AB = 6$ см, $BC = 4$ см, $\angle ABC = 30°$. б)В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 13 см, а угол при вершине $60°$. Найдите площадь треугольника. в)В треугольнике ABC $AB = BC = 8$ см, $\angle BAC = 30°$.
Теорема Пифагора	– *задача с ошибкой:* *Оцените предложенное решение следующей задачи в соответствии с предложенными критериями, обосновав свой выбор:* Меньший катет прямоугольного треугольника равен 6 м, а его гипотенуза равна 10 м. Найдите больший катет этого треугольника. Решение: 1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ 2) $6^2 + AC^2 = 10^2$ 3) $36 + AC^2 = 100$ 4) $AC^2 = 100 - 36$ 5) $AC^2 = 64$ Ответ: 64.  *Критерии оценивания задания:* <table><tr><th>Содержание критерия</th><th>Баллы</th></tr><tr><td>Представлено верное решение. Получен верный ответ.</td><td>2</td></tr></table>

<table>
<tr><td></td><td><table><tr><td>Решение не доведено до конца, но представленные шаги выполнены верно</td><td>1</td></tr><tr><td>Допущена ошибка при применении теоремы Пифагора</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Синус, косинус, тангенс угла</td><td>– задача с ошибкой:
Нет ли ошибки в выражении: «Синус угла – это отношение прилежащего катета к гипотенузе»? Поясните ответ.</td></tr>
<tr><td>Признаки делимости</td><td>При изучении признаков делимости предлагаем включить задания провоцирующего характера:
№1.
Выберите из чисел 51; 17; 33; 666; 912; 1001; 10 000 000 100 000 010; 345 651; 109 768 223; 900 000 070 950 000 те, которые делятся на 3.
№2.
Выберите из чисел 3; 81; 32; 12 345; 2 812 104; 51; 639; 43 000; 123 456 789 те, которые одновременно делятся на 3 и на 9.
№3.
Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 123* делилось на 2?
№4.
Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 546 763 45* одновременно делилось на 2 и на 5?
№5.
Отметьте неверные высказывания:
1) Число 81 делится на 3 и на 9;
2) Число 564 780 делится на 5, но не делится на 10;
3) Число 51 делится на 3 и на 9;
4) Число 8567 764 не делится на 2;
5) Число 100 500 делится на 9;
6) Число 765 450 делится на 10 и на 5;
7) Число 111 111 000 110 100 делится на 3, на 5, на 9 и на 10;
8) Число 135 делится на 3;
9) Число 135 делится на 5, но не делится на 3.
Исправьте эти высказывания, чтобы они были верными.</td></tr>
<tr><td>Квадратичная функция. Её график и свойства</td><td>Умение планировать свою деятельность способствует формированию навыков самоконтроля. В связи с этим возникает необходимость включать в процесс обучения математике задачи, направленные на развитие навыков планирования.
Приведём пример такого задания:
Определите последовательность шагов, которую необходимо выполнить, чтобы построить график следующей функции $y = (2x^2 + 5) - 2$.</td></tr>
</table>

Линейные неравенства	*– задание на составление плана:* *Укажите шаги, необходимые для того, чтобы выполнить следующее задание:* Сопоставьте неравенства с их решениями: 1) $-3-3x>7x-9$ А) $(0{,}6;\ +\infty)$ 2) $-10x^2<-1\ 000$ Б) $(-\infty;\ -10)\cup(10;\ +\infty)$ В)$(-10;10)$ Г) $(-\infty;0{,}6)$
Разложение многочлена на множители	1. *Что следует учитывать при оценке следующего задания:* Представьте выражение $(a^2-c^2+2ab+b^2)$ в виде произведения. 2. *Представьте выражение в виде произведения иррациональных выражений:* а) $\left(\left(\left(\sqrt[5]{x+3}\right)^2\right)-2\cdot\sqrt[5]{x+3}+1\right)-9;$ б) $17-12b.$
Формулы сокращённого умножения	*– задача с ошибками:* 1. Найдите ошибку в записи формул: а) $(a+b)^2=a^2+ab+b^2$ б) $(a-d)^2=a^2-2ab-b^2$ в) $a^2+b^2=(a-b)(a+b)$ 2. В таблице представлены выражения. Выберите правильный ответ. $(c+3)^2$: а) c^2+6c+9; б) c^2+2c+9; в) c^2+6c+9 $(4-2y)^2$: а) $16+16y+y^2$; б) $16-16y+y^2$; в) $8-8y+y^2$ $(9+5x)^2$: а) $25x^2+90x+81$; б) $25x^2+81$; в) $25x^2-90x-81$
Тождественные преобразования иррациональных выражений	Какие ошибки можно совершить при выполнении следующего задания? Упростите выражение:

Таблица к заданию 2 (Формулы сокращённого умножения):

$(c+3)^2$	а) c^2+6c+9 б) c^2+2c+9 в) c^2+6c+9
$(4-2y)^2$	а) $16+16y+y^2$ б) $16-16y+y^2$ в) $8-8y+y^2$
$(9+5x)^2$	а) $25x^2+90x+81$ б) $25x^2+81$ в) $25x^2-90x-81$

	$\frac{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}{(\sqrt{a}-\sqrt{3})^2+\sqrt{3a}} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{3})$.
Линейные уравнения	*Верно ли составлен план выполнения задания:* Решите уравнение: $\frac{7}{17}(x-1) = 14\frac{7}{17}$. План: Шаг 1: правильную часть уравнения приведём к неправильной дроби; Шаг 2: сократим на общий знаменатель; запишем ответ.
Квадратные уравнения	1. а) Решите уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$ двумя способами: 1 способ: использование формул дискриминанта. 2 способ: разложение левой части уравнения на множители. б) Решите уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$ двумя способами: 1 способ: использование формул дискриминанта; 2 способ: метод выделение полного квадрата. Какое из этих уравнений можно решить с помощью теоремы Виета?

§2.2. Результаты педагогического эксперимента

Для диагностики и определения уровня сформированности навыков самоконтроля на базе МБОУ СШ №150 г. Красноярска в рамках уроков математики был проведён педагогический эксперимент, включающий в себя констатирующий, формирующий и заключительный этапы. В эксперименте приняли участие обучающиеся 10 класса в количестве 14 человек.

Для выявления у старшеклассников уровня сформированности навыков самоконтроля по математике были проведены тестирование и срез.

Цель тестирования заключалась в выявлении пробелов в знаниях обучающихся. Цель среза – в определении сформированности навыков самостоятельного контроля.

В тест были включены задания открытого и закрытого типа. Тестовые задания представлены в таблице *(таблица 3)*.

Таблица 3

Тест (констатирующий этап эксперимента)

№1.

Область определения функции $y = \sin x$ составляет множество … чисел.

№2.

Функция $y = \cos x$:

5) ограничена только сверху;
6) не ограничена;
7) ограничена только снизу;
8) ограничена.

№3.

В точках вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ функция $y = \sin x$ достигает своего … значения.

№4.

Область определения функции $y = \cos x$ составляет множество … чисел.

№5.

Функция $y = \sin x$:

5) ограничена;
6) ограничена только снизу;
7) не ограничена;
8) ограничена только сверху.

№6.

В точках вида $t = \pi + 2\pi n$ функция $y = \cos x$ достигает своего … значения.

№7.

Основной период функции $y = \sin x$ равен … .

№8.

Основной период функции $y = \cos x$ равен … .

№9.

Заполните таблицу:

Знаки тригонометрических функций по четвертям

четверти / *функции*	I	II	III	IV
	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\mathrm{tg}\,\alpha$				
$\mathrm{ctg}\,\alpha$				

Результаты тестирования представлены в *таблице 4*. Знак «+» обозначает, что в задание выполнено верно, а «–» – если был дан неверный ответ.

Таблица 4

Результаты тестирования (констатирующий этап эксперимента)

№ задания / ученик	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	+	+	+	+	+	+	+	+	–
2.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4.	+	+	–	+	+	–	+	+	–
5.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7.	+	+	+	+	+	+	+	+	–
8.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9.	+	+	–	+	+	+	+	+	–
10.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12.	+	+	+	+	+	+	+	+	–
13.	+	+	+	+	+	–	+	+	–
14.	+	+	+	+	+	+	+	+	+

С заданиями среза можно ознакомиться *в таблице 5.*

Таблица 5

Задания среза (констатирующий этап эксперимента)

№1. Решите уравнения:

$$1)\ \cos x = \frac{1}{2};$$

$$2)\ tg\, x = \sqrt{3};$$

$$3)\ \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

№2. Найдите $\cos\alpha$, если известно, что:

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

№3. Решите уравнение:

$$-6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\cos x + 8 = 0.$$

Предполагалось, что первые два примера в задании №1 сформулируют стереотип, результатом которого для примера 1.3. окажется неверный ответ. Ожидания оправдались. 50% обучающихся для уравнения 1.3. автоматически определили его корни, не обращая внимание на то, что $\sin x > 1$ не существует.

При нахождении тригонометрической функции $\cos\alpha$ в задании №2 28% обучающихся не обратили внимания на знак, который имеет функция данного угла $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$.

С заданием №3 не справились 64% учеников. При решении уравнения часть учеников не увидели в тригонометрическом уравнении квадратное, в связи с чем не произвели замену переменной ($\cos x = t$). Другая часть учеников после выполнения замены переменной и сведения тригонометрического уравнения к квадратному уравнению ($-6t^2 + 5\sqrt{2} \cdot t + 8 = 0$), не смогли довести решение до конца. Многие испытывали затруднения при вычислении дискриминанта (это обусловлено неумением работать с иррациональными числовыми выражениями). Некоторые ученики, вычислив дискриминант и получив $D = \sqrt{242}$, не провели преобразование $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$. Это сделало корни уравнения громоздкими $t_{1,2} = \frac{-5\sqrt{2} \pm \sqrt{242}}{-12}$ и в основном приводило решение в тупик.

Правильное выполнение первого задания оценивалось в 3 балла.

Правильное выполнение второго задания – в 5 баллов.

И верное решение третьего задания – 7 баллов.

Если ученик при выполнении среза набрал от 0 до 5 баллов, то у него навык самоконтроля сформирован на низком уровне.

Если набрано баллов 6-10, то уровень самоконтроля – средний.

Если количество набранных баллов составило 11-15, то у ученика навык самоконтроля сформирован на высоком уровне.

Результаты среза приведены в *таблице 6*.

Таблица 6

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента

	№ задания / баллы			*ИТОГО баллов*	*уровень сформированности навыка*
№ ученика	*1*	*2*	*3*		

1.	2	3	3	8	*средний*
2.	3	5	7	13	*высокий*
3.	3	5	7	13	*высокий*
4.	2	1	1	4	*низкий*
5.	3	5	1	9	*средний*
6.	1	0	2	3	*низкий*
7.	2	5	0	7	*средний*
8.	3	5	7	13	*высокий*
9.	2	5	0	7	*средний*
10.	2	1	1	4	*низкий*
11.	3	5	7	13	*высокий*
12.	3	5	7	13	*высокий*
13.	2	1	0	3	*низкий*
14.	2	5	2	9	*средний*

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента показали, что у 29 % обучающихся навыки самоконтроля сформированы на низком уровне. У 36 % обучающихся – средний уровень сформированности навыков самостоятельного контроля. И у 36 % – навыки самоконтроля сформированы на высоком уровне.

На *рис.5* представлена диаграмма сформированности у обучающихся 10 класса навыков самоконтроля (констатирующий этап педагогического эксперимента).

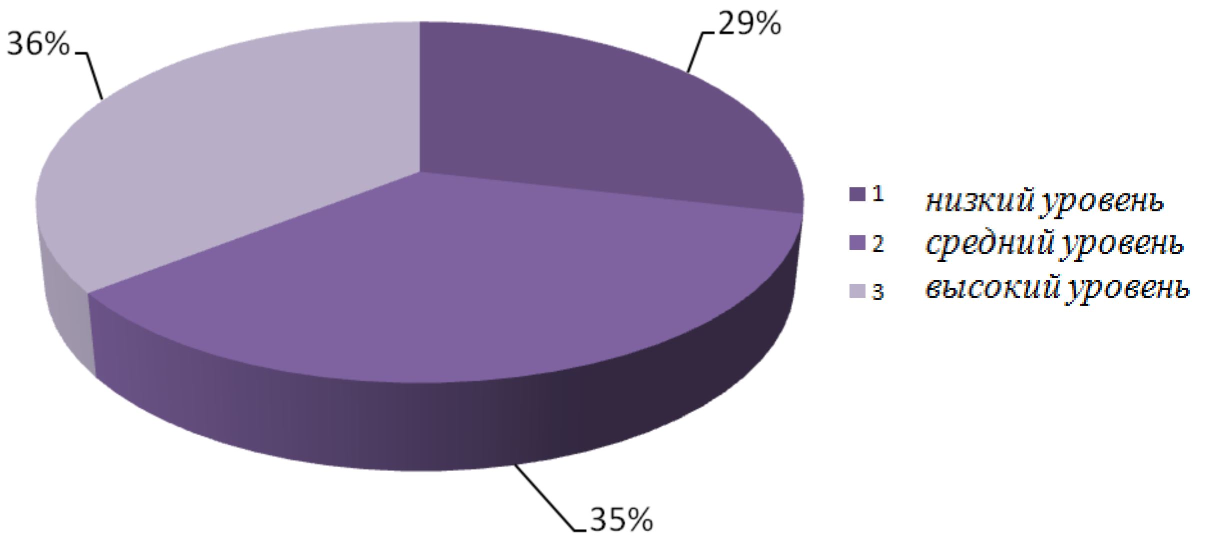


Рис. 5.Диагностика уровней сформированности навыков самоконтроля у обучающихся 10 класса на констатирующем этапе эксперимента

Основываясь на результатах констатирующего этапа, можно сделать вывод о необходимости формирования навыков самоконтроля у школьников в процессе обучения их математике.

В рамках формирующего этапа педагогического эксперимента у учеников 10 класса было организовано специальное обучение с применением разработанного нами методического обеспечения (приведённого в §2.1.), направленное на формирование у них навыков самоконтроля.

В ходе данного этапа обучающимся предлагались различные задания, способствующие формированию самоконтроля; использовались различные методы и формы организации обучения. В процессе работы, направленной на формирование навыков, было замечено, что улучшилось качество выполнения самостоятельных и контрольных работ, тестов. Обучающиеся при выполнении упражнений стали более внимательны, старались анализировать ответы.

После целенаправленной работы по повышению у обучающихся 10 класса уровня сформированности навыков самостоятельного контроля был проведён заключительный этап педагогического эксперимента. Цель данного этапа заключалась в выявлении динамики сформированности самоконтроля у старшеклассников. Обучающимся было предложено пройти тестирование и срез.

Тестовые задания представлены в *таблице 7*.

Таблица 7

Тест (заключительный этап эксперимента)

№1.
Укажите область определения функции $y = tg\ x$.
№2.
Укажите область определения функции $y = ctg\ x$.
№3.
Запишите равенство треугольника.
№4.
Выразите следующие тригонометрические функции $\cos x, \sin x, tg\ x, ctg\ x$ через тангенс половинного аргумента.
№5.

Запишите правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного.

№6.

Заполните пропуски:

а) $(C)' =$

б) $(\ )' = 1;$

в) $(\cos x)' =$

г) $(\sin x)' =$

д) $(\ )' = n \cdot x^n - 1$;

е) $\left(\sqrt{x}\right)' =$

ё) $(\ )' = a^x \ln a.$

Результаты тестирования представлены в *таблице 8*. Знак «+» обозначает, что в задание выполнено верно, а «–» – если был дан неверный ответ.

Таблица 8

Результаты тестирования (заключительный этап эксперимента)

№ ученика \ *№ задания*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1.	+	+	–	–	+	+
2.	+	+	+	–	+	+
3.	+	+	–	–	+	+
4.	+	+	–	–	+	+
5.	+	+	+	+	+	+
6.	+	+	+	+	+	+
7.	+	+	+	+	+	+
8.	+	+	–	+	+	+
9.	+	+	–	–	+	+
10.	+	+	–	+	+	+
11.	+	+	–	–	+	+
12.	+	+	–	+	+	+
13.	+	+	+	+	+	+
14.	+	+	+	–	+	+

Задания среза представлены *в таблице 9.*

Таблица 9

Задания среза (заключительный этап эксперимента)

№1.
Верно ли найдены производные?
а) $(3\sin x)' = 3' \cdot \sin x + 3 \cdot \sin' x = 3\sin x + 3\cos x = 3(\sin x + \cos x)4$
б) $\left(\frac{5}{\sin x}\right)' = \frac{5' \cdot \sin x - 5 \cdot sin' x}{sin^2 x} = \frac{5 \cdot \sin x - 5 \cdot \cos x}{sin^2 x} = \frac{5(\sin x - \cos x)}{sin^2 x}$;
№2.
Вычислите производные:
а) $\left(\frac{5}{x^2}\right)'$;
б) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$;
в) $\left(\sqrt{x^3}\right)'$.
№3.
Какая из производных найдена неверно?
а) $(x^9)' = 9 \cdot x^{9-1} = 9x^8$;
б) $(9^x)' = x \cdot 9^{x-1}$.
№4.
Проанализируйте решение уравнения.
На каком шаге допущена ошибка?
$3^x(x^2 - 6x - 5) = 9(x^2 - 6x - 5)\ / x^2 - 6x - 5$
$3^x = 9$
$3^x = 3^2$
$x = 2.$
№5.
а)Решите уравнение: $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)ctg\, x$;
б)Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

№6. Верно ли, что диаметр – это линия, соединяющая две точки окружности и проходящая через центр? №7. Периметр треугольника равен 6, его стороны относятся как 1 : 2 : 3. Чему равна его средняя по величине сторона?

Предполагалось, что в первом задании ученики могут не заметить, что один из сомножителей (задание под буквой а)) и числитель дроби (задание под буквой б)) являются постоянными множителями, которые можно вынести за знак производной (в таком случае не была бы допущена ошибка).

Во втором задании предполагалось, что обучающиеся могут совершить ошибки при дифференцировании с константой (примеры под буквами а) и б)), а в примере под буквой в) могут допустить ошибки при переходе от корня к дробной степени (т.к. данная функция не является табличной и должна дифференцироваться по правилу для сложной функции).

В задании №3 предполагалось запутать школьников. В первом случае переменная находится в основании степени, а во втором – в показателе степени. Функции разные, следовательно, и формулы для вычисления производных разные.

В следующем задании предполагалось, что ученики не увидят ошибку при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное (в решении были потеряны корни, которые обращают то выражение в ноль).

Пятое задание побуждает учеников представить тангенс суммы двух углов по формуле, в связи с чем могут потеряться корни.

Задания №6 и №7 – это задания провоцирующего характера. В шестом задании формулировка неверна, т.к. диаметром окружности является не линия, а отрезок, соединяющий две точки этой окружности и проходящий через её центр. Формулировка седьмого задания провоцирует обучающихся на ответ: 2. Но на самом деле, задача не имеет решение, т.к. при таком условии не будет выполняться равенство треугольника.

Правильное выполненные задания 1-3 оценивались в 1 балл.

Правильное выполнение четвёртого задания – в 2 балла.

Верное решение пятого задания – 3 балла.

И 5 и 6 задания оценивались в 1 балл.

Если ученик при выполнении среза набрал от 0 до 4 баллов, то у него навык самоконтроля сформирован на низком уровне.

Если набрано баллов 5-7, то уровень самоконтроля – средний.

Если количество набранных баллов составило 8-10, то у ученика навык самоконтроля сформирован на высоком уровне.

Результаты среза приведены в *таблице 10*.

Таблица 10

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента

		№ задания / баллы						*ИТОГО баллов*	*уровень сформированност и навыка*
№ ученика	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*		
1.	1	1	1	2	3	1	0	9	*высокий*
2.	1	1	1	2	3	1	1	10	*высокий*
3.	1	1	1	2	3	1	1	10	*высокий*
4.	0	1	0	0	0	1	1	3	*низкий*
5.	1	1	1	2	2	1	1	9	*высокий*
6.	1	0	0	0	0	1	0	2	*низкий*
7.	1	1	1	2	1	1	1	8	*высокий*
8.	1	1	1	2	3	1	1	10	*высокий*
9.	1	1	0	2	3	1	0	8	*высокий*
10.	1	0	1	2	1	1	1	7	*средний*
11.	1	1	1	2	3	1	0	9	*высокий*
12.	1	1	1	2	3	1	1	10	*высокий*
13.	0	0	1	0	2	1	1	3	*низкий*
14.	1	1	1	0	3	1	1	8	*средний*

Результаты заключительного этапа педагогического эксперимента показали, что у 21 % обучающихся навыки самоконтроля сформированы на низком уровне. У 14 % обучающихся – средний уровень сформированности навыков самостоятельного контроля. И у 64 % – навыки самоконтроля сформированы на высоком уровне.

На рис.6 представлена диаграмма сформированности у обучающихся 10 класса навыков самоконтроля на заключительном этапе педагогического эксперимента.

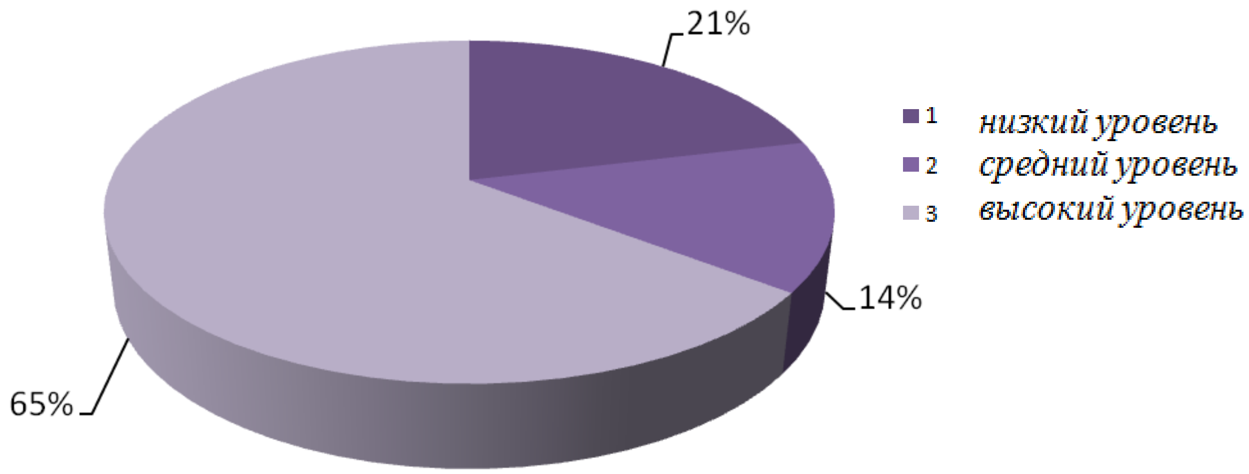
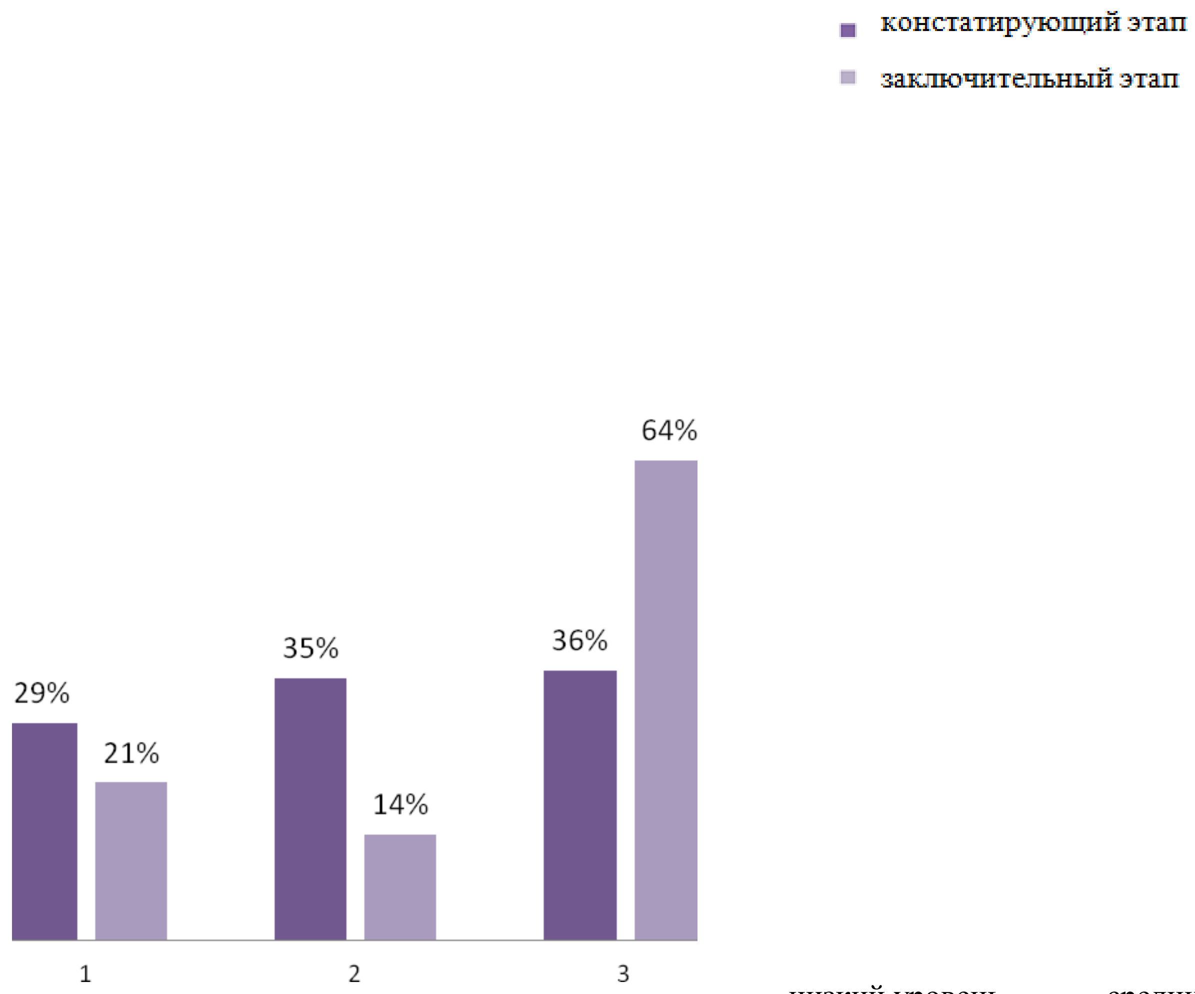


Рис.6. Диагностика уровней сформированности навыков самоконтроля у обучающихся 10 класса на заключительном этапе эксперимента

На *рис.7* представлена динамика сформированности навыков самостоятельного контроля по математике у обучающихся 10 классов.



низкий уровень средний уровень высокий уровень

Рис.7. Динамика *сформированности навыков самоконтроля по математике у обучающихся 10 классов*

На основе проведённого педагогического эксперимента можно сделать вывод о том, что разработанная нами методика обучения, способствует повышению сформированности навыков самоконтроля.

Заключение

Анализ специальной литературы и имеющийся опыт по теме исследования, а также результаты диагностики позволили сделать вывод о том, что у обучающихся 10 классов необходимо формировать навыки самостоятельного контроля в процессе обучения их математике.

В ходе работы были рассмотрены понятия «самоконтроля», классифицированы его виды и функции, выделены и охарактеризованы уровни сформированности навыков самостоятельного контроля: первый (низкий), второй (средний) и третий (высокий).

В работе описываются специальные дидактически ... щие формированию самоконтроля у обучающихся; описываю ... о эксперимента (констатирующий, формирующий и заключи ... базе школы №150 г. Красноярска.

Результаты заключительного этапа эксперимента св ... у старшеклассников уровня сформированности самостоятельно ... ных результатов можно сделать вывод о том, что разработанная на ... етодика способствует формированию навыков самостоятельного контроля у школьников в процессе обучения их математике.

Приложения

Приложение 1. Рабочая тетрадь по тригонометрии

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

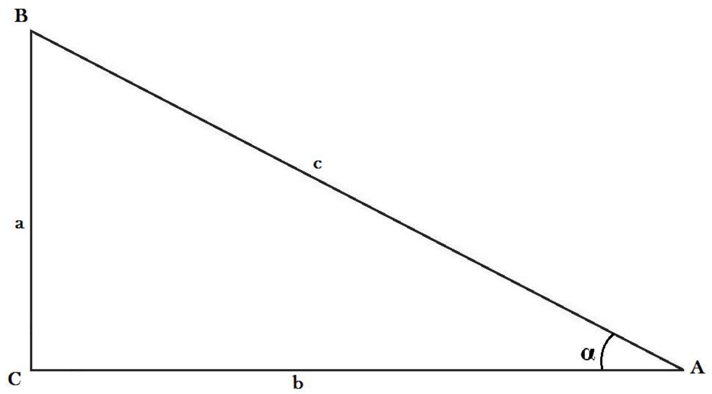
Пособие посвящено систематическому изложению методов решения задач по тригонометрии. Для удобства восприятия пособие разбито по параграфам, где последовательно излагается всё многообразие задач по тригонометрии.

Учебное пособие будет полезно учителям математики и учащимся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, а также студентам и преподавателям математических специальностей педагогических вузов.

Содержание

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника



Пусть ABC – прямоугольный треугольник. AC, BC – его катеты, AB – гипотенуза; a и b – длины катетов BC и AC, c – длина гипотенузы. Тогда тригонометрические функции острого угла α прямоугольного треугольника определяются следующим образом.

Синусом острого угла α называется отношение длины противолежащего катета (против угла α) к длине гипотенузы:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла α называется отношение длины прилежащего катета (прилежащего к углу α) к длине гипотенузы:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом острого угла α называется отношение длины противолежащего катета (против угла α) к прилежащему (прилежащему к углу α):

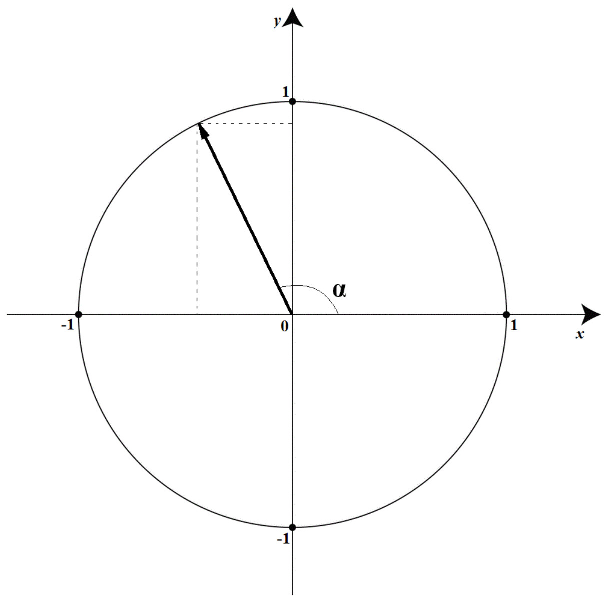
Тригонометрия *(от греч. τρίγωνον (треугольник) и греч. μέτρεο (меряю), то есть измерение треугольников) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их использование в геометрии. Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии (науке, исследующей размеры и форму Земли).*

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом острого угла α называется тношение длины прилежащего катета прилежащего к углу α) к противолежащему против угла α):

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}.$$

Тригонометрические функции произвольного угла



Пусть на координатной плоскости *Oxy* задана диничная окружность (окружность радиуса единица) с ентром в начале координат. M – произвольная точка на кружности. За угол α принимаем угол между оложительным направлением оси *Ox* и вектором *OM*, роведённым из начала координат в точку *M*. При этом угол считается положительным, если этот угол получен ращением вектора *OM* против часовой стрелки от оложительного направления оси *Ox*, и отрицательным, если гол α получен вращением вектора *OM* по часовой стрелке т положительного направления оси *Ox*.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, оптика, электроника, теория вероятностей, биология, медицина, фармацевтика, химия, теория чисел, сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Тогда *cos α* равен абсциссе точки М: $\cos\alpha = x$; *sin α* равен ординате точки М: $\sin\alpha = y$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

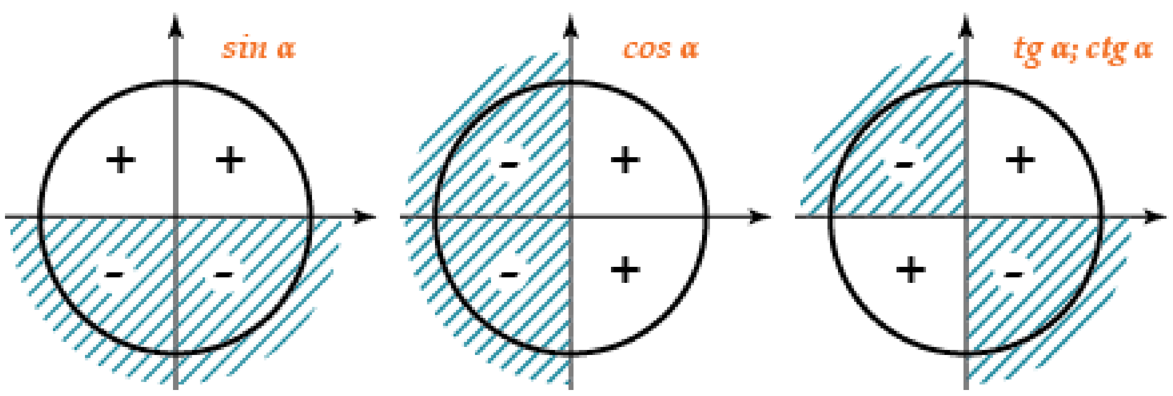
$$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$$

$$tg\, x = \frac{1}{ctg\, x},\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \ ,\ n \in Z;$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z;$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Чётность, нечётность, периодичность

Функция $y = cos\ x$ является чётной, т.е. для любого $x \in (-\infty;\ +\infty)$ выполняется равенство $cos(-x) = cos\ x$.

Функции $sin\ x$, $tg\ x$, $ctg\ x$ являются нечётными, т.е. для любого x из соответствующей области определения выполняются равенства:

$$sin(-x) = -sin\ x; \qquad tg(-x) = -tg\ x; \qquad ctg(-x) = -ctg\ x.$$

Все тригонометрические функции являются периодическими. Функции $sin\ x$ и $cos\ x$ имеют наименьший положительный период 2π, а функции $tg\ x$ и $ctg\ x$ – π,

$$sin(x \pm 2\pi) = sin\ x; \qquad cos(x \pm 2\pi) = cos\ x;$$

$$tg(x \pm \pi) = tg\ x; \qquad ctg(x \pm \pi) = ctg\ x,$$

для любого x из соответствующей области определения.

$$\left(\begin{array}{c} cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x = 2cos^2 x - 1 = 1 - 2sin^2 x; \\ sin\ 2x = 2sin\ x \cdot cos\ x; \\ tg\ 2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}; \\ ctg\ 2x = \dfrac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}. \end{array} \right)$$

Формулы двойного аргумента

Формулы тройного аргумента

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x};$$

$$ctg\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

Формулы половинного аргумента

Формулы понижения степени

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

$$tg\,3x = \frac{3tg\,x - tg^3 x}{1-3\,tg^2 x};$$

$$ctg\,3x = \frac{3ctg\,x - ctg^3 x}{1-3\,ctg^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y;$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y;$$

$$tg\,(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y};$$

$$tg\,(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y};$$

$$ctg\,(x+y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y};$$

$$ctg\,(x-y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y + 1}{ctg\,y - ctg\,x}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Формулы сложения

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

$$tg\,x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}};$$

$$ctg\,x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{2tg\,\frac{x}{2}}.$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot sins\frac{x-y}{2};$$

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$$ctg\,x + ctg\,y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y};$$

$$ctg\,x - ctg\,y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \cdot \sin y}.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

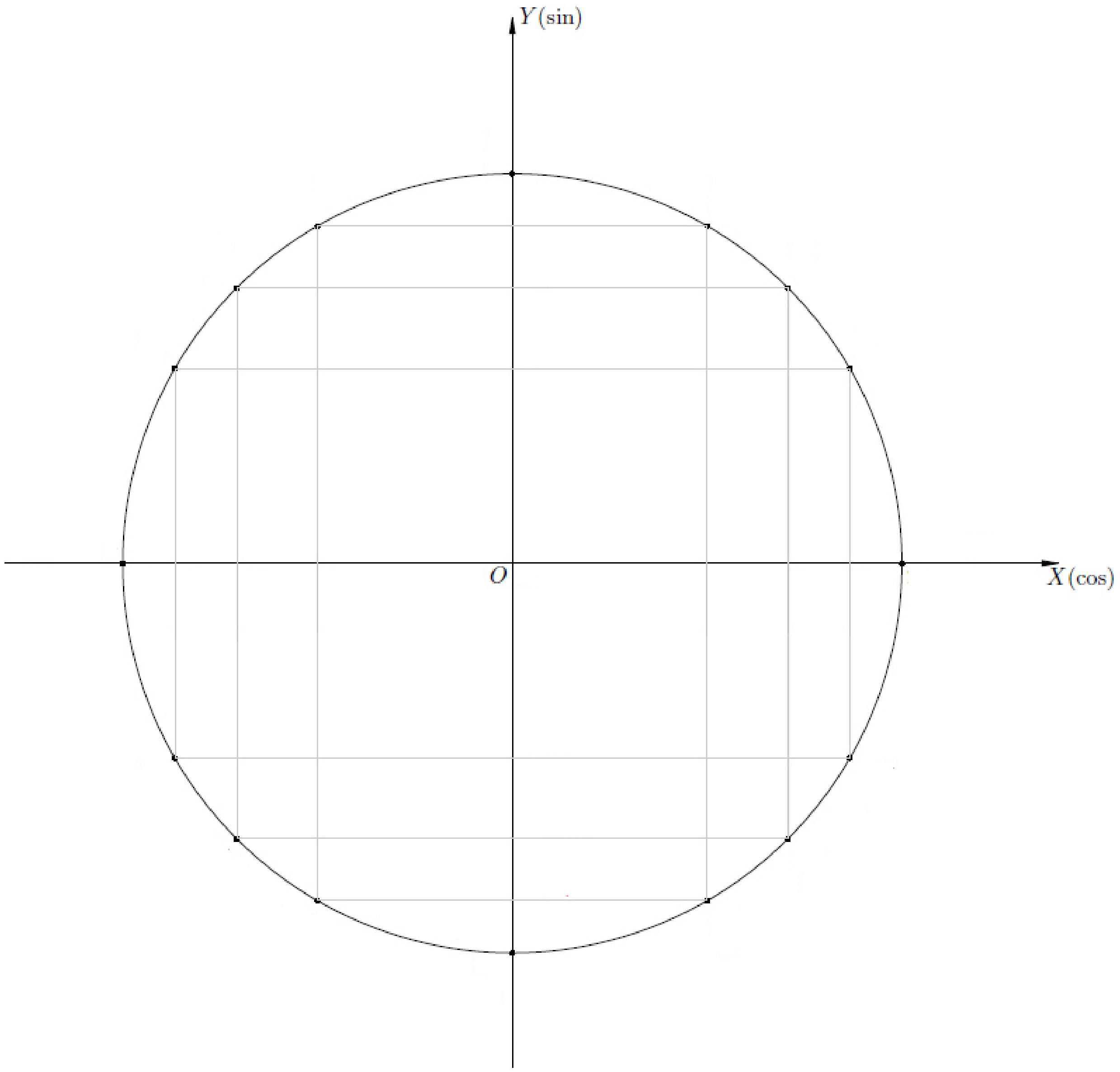
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y));$$

§1. Числовая окружность. Функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Рис. 1



Задание 1

Отметьте четверти на числовой окружности (рис.1).

Задание 2

Найдите на числовой окружности (рис. 1) точку, которая соответствует заданному числу:

1) $\frac{3\pi}{2}$

2) 0

3) $\frac{\pi}{2}$

4) π

5) 2π

6) $\frac{2\pi}{3}$

7) $\frac{7\pi}{4}$

8) $\frac{\pi}{3}$

9) $\frac{7\pi}{6}$

10) $\frac{4\pi}{3}$

11) $\frac{3\pi}{4}$

12) $\frac{\pi}{6}$

13) $\frac{11\pi}{6}$

14) $\frac{5\pi}{6}$ 16) $\frac{5\pi}{3}$

15) $\frac{\pi}{4}$ 17) $\frac{5\pi}{4}$.

Задание 3

К точкам (из задания 2) поставьте в соответствие градусную меру (рис. 1).

Задание 4

Заполните таблицы. Полученные значения отметьте на числовой окружности (рис.1).

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x									

x	***0***	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x									
sin x									
sin x									

Задание 5

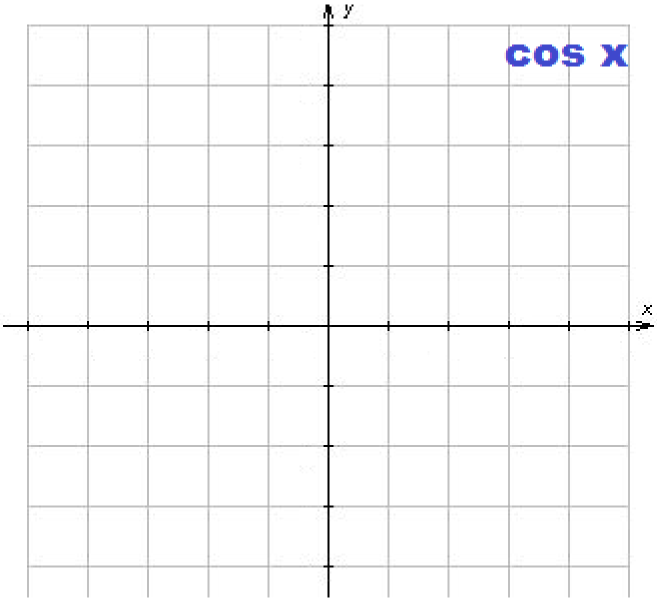
Заполните таблицы.

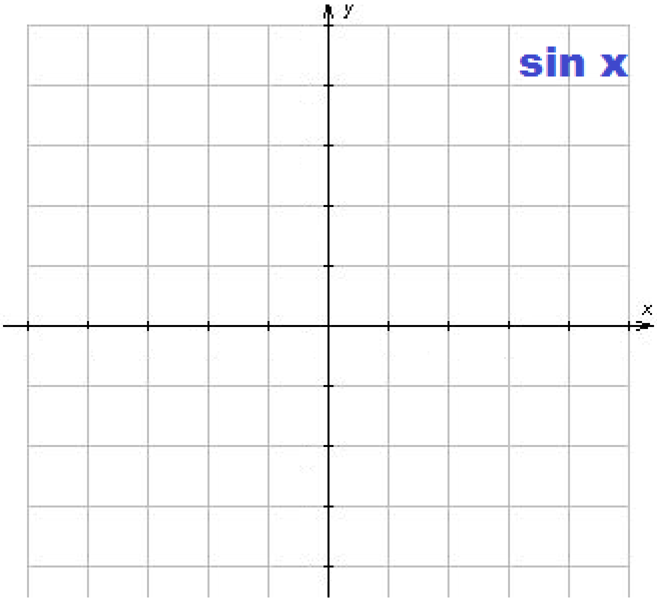
x	***0***	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

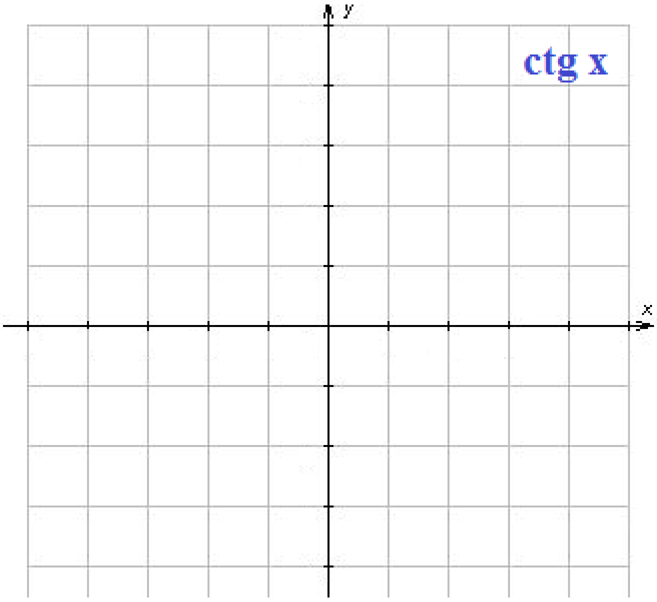
tg x									
ctg x									

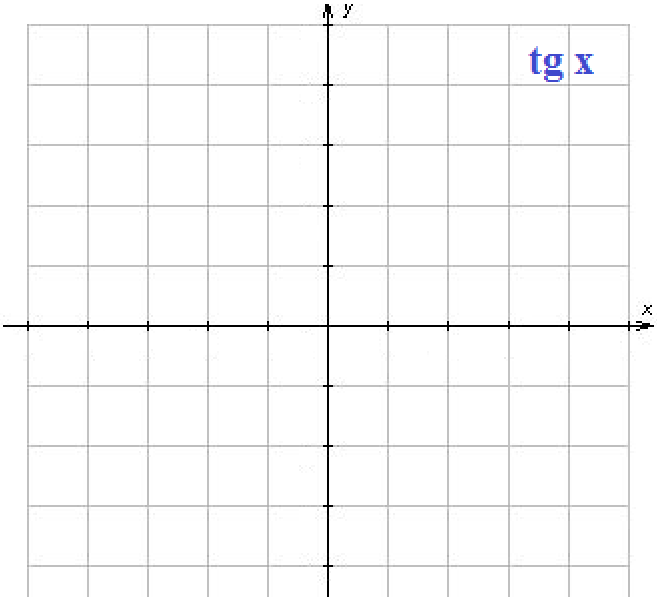
Задание 6

На координатной плоскости нарисуйте графики *cos x, sin x, tg x и ctg x.*









Задание 7

Вычислите:

а) $sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + cos\frac{\pi}{6};$

б) $cos\frac{\pi}{6} \cdot cos\frac{\pi}{3} \cdot cos\,\pi;$

в) $sin\frac{\pi}{4} \cdot sin\frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{\pi}{3}.$

Задание 8

Найдите значение выражения:

а) $\cos 3t$, *если* $t = \frac{\pi}{3}$;

б) $\sin \frac{t}{4}$, *если* $t = \frac{4\pi}{3}$.

Задание 9

Вычислите:

а) $tg\, \pi \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot ctg \frac{3\pi}{4}$;

б) $3ctg\frac{\pi}{3} \cdot 8cos\frac{\pi}{4} - sin\ 0.$

Задание 10

Упростите выражение:

а) $2sin\ t \cdot cos\ t \cdot 4ctg\ t;$

б) $\frac{1 - cos^2 t}{1 - sin^2 t}$.

Задание 11

Решите уравнение:

а) $cos\ t = \frac{1}{2}$;

б) $sin\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $cos\ t = 1$;

г) $sin\ t = -1$;

д) $|cos\ t| = 1$;

е) $\sqrt{1 - cos^2 t} = \frac{1}{2}$.

Задание 12

Решите неравенство:

а) $sin\ t > 0$;

б) $cos\ t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $sin\ t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $cos\ t \leq -\frac{1}{2}$.

Задание 13*

Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sin t > 0 \\ \sin t < \frac{1}{2} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} cos\, t > \frac{1}{2} \\ \sin t < \frac{1}{2} \end{cases}$.

§2. Тригонометрические функции числового аргумента

Задание 1

Упростите выражение:

а) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$; б) $(\sin t + 1)(1 - \cos t)$.

Задание 2

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $s = f(t)$, если $f(t) = 1 - (\sin^2 t - \cos^2 t)$.

Задание 3

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

а) $\sin t = \frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) *cos t* = 0,7 , $0 < \pi < \frac{\pi}{2}$.

Задание 4*

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

а) *ctg t* =$\frac{3}{10}$, $3\pi < t < \frac{7\pi}{2}$.

Задание 5

Зная, что $tg\ t = a$, найдите:

а) $sin^3 t$;

б) $cos^2 t \cdot sin^4 t$.

§3. Тригонометрические функции условного аргумента

Задание 1*

Высота треугольника равна 5 см, а углы, прилегающие к основанию, равны 60 и 45 градусам. Найдите площадь треугольника.

Задание 2**

Дано выражение: $cos\ 1° + cos\ 2° + cos\ 3° + \ldots + cos\ n°$.

а) при каких значениях n $\le$ 360 это выражение положительно?

б) при каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

§4. Функции y = sin x, y = cos x, их свойства и графики

Задание 1*

Исследуйте функцию y = $x^6 \cdot sin\frac{x}{2}$ на чётность:

Задание 2*

Найдите основной период функции:

а) y = cos 2x;

б) y = sin $\frac{3x}{4}$.

Задание 3

Решите уравнение:

а) $\cos(t + 2\pi) + \sin(t - 4\pi) = 1$;

б) $\sin(t + \pi) + \sin(t - 6\pi) = 0$.

Задание 4

Постройте график функции:

а) $y = \sin x - 2$;

б) $y = \cos x + 5$.

Задание 5*

Докажите, что функция y = sin x:

а) возрастает на отрезке $[12; 13]$;

б) убывает на интервале (8; 10).

Задание 6**

Постройте график функции $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

§5. Функции y = tg x, y = ctg x, их свойства и графики

Задание 1

Решите графически уравнение:

а) $ctg\ x = 1$;

б) $tg\ 2x = 0$.

Задание 2*

Найдите основной период функции:

а) $y = tg\ 5x$;

б) $y = ctg\ 4x$.

Задание 3*

Постройте график функции:

а) y = – ctg $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$;

б) y = tg $\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

Задание 4**

Постройте график функции:

а) y = |tg x| – 1;

б) $y = |ctg\,|x| + 2|$.

§6. Обратные тригонометрические функции

Задание 1*

Постройте график функции:

а) $y = arcos\,(-x)$; б) $y = -arcsin\,(x)$.

Задание 2*

Исследуйте функцию $y = arcos\ x + arcctg\ x$ на чётность.

Заключение

Анализ специальной литературы и имеющийся опыт по теме исследования, а также результаты диагностики позволили сделать вывод о том, что у обучающихся 10 классов необходимо формировать навыки самостоятельного контроля в процессе обучения их математике.

В ходе работы были рассмотрены понятия «самоконтроля», классифицированы его виды и функции, выделены и охарактеризованы уровни сформированности навыков самостоятельного контроля: первый (низкий), второй (средний) и третий (высокий).

В работе описываются специальные дидактические условия, способствующие формированию самоконтроля у обучающихся; описываются результаты педагогического эксперимента (констатирующий, формирующий и заключительный этапы), проведённого на базе школы №150 г. Красноярска.

Результаты заключительного этапа эксперимента свидетельствуют о повышении у старшеклассников уровня сформированности самостоятельного контроля. На основе данных результатов можно сделать вывод о том, что разработанная нами специальная методика способствует формированию навыков самостоятельного контроля у школьников в процессе обучения их математике.

Список используемой литературы

1. [Аванесов В.С. Форма тестовых заданий: Учеб. пособ. Для учителей школ, лицеев, преподавателей вузов и колледжей. – 2-е изд., перераб. и расширен. – М.: Центр тестирования, 2005. – 156 с.]
2. [Беспалько В.П, Педагогика и прогрессивные технологии обучения. М.: Издательство ИРПО МО РФ, 1995. 336 с.]
3. [Блинова В.Л., Блинова Ю.Л. Психологические основы самопознания и саморазвития: учебно-методическое пособие. – Казань: ТГГПУ, 2009. – 222с.]
4. [Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ. – М.: «Мир», 1999, 447 с., ил. – (Математическая мозаика)]
5. [Далингер В.А, Задачи с параметром: учебное пособие. – Омск : Изд-во ООО «Амфора», 2012. – 961 с.]
6. [Зайкин М.И., Колосова В.А. Провоцирующие задачи / Математика в школе. 1997. №6. с.32-36]
7. [Иванов С.О., Войта Е.А., Ковалевская А.С., Ольховая Л.С. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5 / Учебно-методическое пособие под редакцией Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю., издание второе, переработанное Легион-М, г. Ростов-на-Дону, 2011]
8. [Иванова В.А., Левина Т.В. Педагогика [электронный ресурс]. URL: http://www.kgau.ru/distance/mf_01/ped-asp/01_01.html электронный учебно-методический комплекс (дата обращения 15.06.2017).]
9. [Карасёв В.А., Лёвшина Г.Д. Решение задач с параметрами с помощью графиков функций / Математика в школе. 2013. №4]
10. [Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное посоие; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015. – 168 с.]

11. [Киселёва, А. Ю. Развитие самоорганизация как одна из целей обучения менеджеров организации [Электронный ресурс] : Тез. докл. IV Всероссийской научной Интернет-конференции «Культура и взрыв: социальные смыслы в эпоху перемен» 2010 URL: http://socio.my1.ru/forum/4]
12. [Мадера А.Г. Математические софизмы : Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям : Кн. для учащихся 7-11 кл. / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. – М. : Просвещение, 2003. – 112 с.: ил. – ISBN 5-09-010795-5]
13. [Маралов В.Г. Основы самопознания и саморазвития: Учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 256 с.]
14. [Масленкова В. А., Молдыбаева А. И., Ширшикова М. Е. Формирование метапредметных умений при обучении тождественным преобразованиям иррациональных выражений // Молодой ученый. — 2016. — №20. — С. 708-710]
15. [Масленкова В.А. Тест по математике на тему: «Функции y = cos x, y = sin x, их графики и свойства» [Электронный ресурс] // URL: https://videouroki.net/razrabotki/test-po-matematike-na-temu-funktsii-y-cos-x-y-sin-x-ikh-grafiki-i-svoystva.html (дата обращения: 15.06.2017)]
16. [Масленкова В.А. Формирование навыков самоконтроля в процессе обучения математике / Символ науки. 2016. №3.]
17. [Ожегов С.И. Толковый словарь русского языка: Ок. 100 000 слов, терминов и фразеологических выражений / С.И. Ожегов; Под ред. проф. Л.И. Скворцова. – 28-е изд., перераб. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: ООО «Издательство «Оникс», 2012. – 1 376 с.]
18. [Садовничий Ю.В. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 126, [2] с. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»)]

19. [Соломенцева А.М., Неудахина Н.А. Рабочая тетрадь как средство организации самостоятельной работы студентов/А.Н. Неудахина, А.М. Соломенцева//3-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и молодёжь». Секция «Информационные технологии». Подсекция «Инженерная педагогика»./Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул: изд-во АлтГТУ,2006.-33с.]
20. [Тумашева О.В., Зданович О.В. Организация исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике: учеб.-метод. пособие. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2010. – 131 с.]
21. [Фалеева, Л.В. Организованность и самоорганизация как качество личности: сравнительный анализ понятий// Современные проблемы науки и образования. – 2012. № 4. – С. 266 – 274.]
22. [Чугунова А.А., Пустовалова Н.И. Роль задач с параметром при обучении математическому анализу / Вектор науки ТГУ. 2012. №4 (11)]
23. [Штеймарк О.В. Педагогические условия эффективного использования компьютерных технологий в педагогическом процессе. // Научный потенциал: работы молодых ученых. – 2008.-№1.- С.211-215.].
24. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2007. – 384 с.
25. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 255 с. : ил. – (Мгу – школе).
26. Вольфсон Б.И. Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи: учебное пособие / Б.И. Вольфсон, Л.И. Резницкий. – Ростов н/Д : Легион-М, 2011. – 224 с. – (Готовимся к ЕГЭ.)

27. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В, Семёнов. – 6-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 424 с.