**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА**
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета)

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Направление 44.03.05 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «математика и информатика», квалификация «бакалавр»
(код направления подготовки)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)
(подпись) В.Р. Майер
(И.О.Фамилия)
« 09 » 06 2017 г.

Выпускная квалификационная работа

# ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ 9 КЛАССОВ ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА» В ПРОЦЕССЕ ПРЕДПРОФИЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Выполнил студент
Я.А. Бондарева 09.06.17
(И.О.Фамилия) (подпись, дата)

Форма обучения Очная

Научный руководитель:
к.п.н, доцент, М.А. Кейв , 09.06.17
(ученая степень, должность, И.О.Фамилия) (подпись, дата)

Дата защиты

Оценка

Красноярск, 2017

# Оглавление

## Введение

*Математику уже затем учить следует,*
*что она ум в порядок приводит, она – школа мышления.*

*(М.В.Ломоносов)*

В наше время очень часто успех человека зависит от его способности четко мыслить, логически рассуждать и ясно излагать свои мысли. Умение правильно рассуждать необходимо в любой человеческой деятельности. Именно поэтому развитие логического мышления является одной из основных задач школьного образования.

Общепризнанно, что именно математика, как один из обязательных школьных предметов, обладает большим потенциалом в развитии у обучающихся умений и опыта построения правильных рассуждений и логических умозаключений.

Изучение элементов математической логики в школьном курсе математики способствует воспитанию культуры логического мышления. При построении математической теории нужно всякий раз отчетливо осознавать, какие утверждения приняты за исходные положения; каковы условия и заключения той или иной доказываемой теоремы. За осознанием структуры математической теоремы следует понимание методов ее доказательства. Специальное рассмотрение и уточнение всех этих понятий в процессе обучения математике способствует воспитанию у учащихся культуры логического мышления.

Однако наблюдения за практикой обучения учащихся математике показывают, что у большинства школьников недостаточно на высоком уровне сформированы логические умения, что затрудняет усвоение математики и порождает немало проблем. Например, учащиеся часто путаются в понятиях: пересечения и объединения множеств; системы и совокупности уравнений (неравенств); необходимого и достаточного условий; в употреблении союзов «и», «или» при формулировке математических утверждений; допускают самые разнообразные логические ошибки в рассуждениях и доказательствах. Одна из возможных причин логических ошибок большинства школьников заключается в отсутствии в практике обучения математике специальной методики формирования у учащихся основ математической компетенции в области «Математическая логика».

В связи с этим актуальным становится поиск и разработка специальной методики формирования у учащихся основ математической компетенции в области «Математическая логика» в процессе их обучения математике.

Гипотеза исследования состоит в том, что если в процессе обучения математике целенаправленно и систематически применять особые формы, методы, средства и содержание обучения, на основе рассмотрения специальных теоретических сведений и логических задач и упражнений, то это будет способствовать формированию у учащихся основ математической компетенции в области «Математическая логика».

Цель исследования: повышение уровня сформированности у учащихся 9 классов основ математической компетенции в области «Математическая логика» в процессе их предпрофильного обучения математике.

Объект исследования: процесс обучения учащихся 9 классов математике в рамках предпрофильной подготовки.

Предмет исследования: дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 9 классов основ математической компетенции в области «Математическая логика» в рамках предпрофильной подготовки.

Задачи исследования:

1) Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.

2) Описать роль, место и значение элементов математической логики в школьном курсе математики в рамках предпрофильной подготовки школьников.

3) Охарактеризовать понятие «математическая компетентность» и разработать содержательно-диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности у учащихся 9 классов основ математической компетенции в области «Математическая логика».

4) Выделить дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 9 классов основ математической компетенции в области «Математическая логика» в рамках предпрофильной подготовки.

5) Разработать специальную методику обучения учащихся 9 классов по теме «Элементы математической логики» в рамках предпрофильной подготовки и апробировать её на практике.

6) Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

# Глава 1. Теоретические аспекты формирования у учащихся 9 классов основ математической компетентности в области «Математическая логика»

## 1.1. Элементы математической логики в школьном курсе математики 5 – 9 классов

Согласно примерной основной образовательной программы основного общего образования (2015 г.), элементы математической логики являются «обязательным компонентом школьного математического образования, усиливающим его прикладное и практическое значение» [27].

Развитие у обучающихся различных способов мышления и математических способностей, в процессе их обучения математике, способствует формированию у них основ математической компетентности.

Проблеме формирования у школьников логических знаний и умений на уроках математики и на факультативных занятиях по математике посвящены работы: О.В. Алексеевой, М.А. Артамонова, В.Г. Болтянского, Б.Ф. Высокого, М.Е. Драбкиной, В.Г. Ежковой, В.И. Игошина, Л.А. Калужнина, А.Н. Капиносова, Т.А. Кондрашенковой, И.Л. Никольской, Ф.Ф. Притуло, А.А. Столяра, А.И. Фетисова и др.

Условно можно выделить три подхода к решению проблемы формирования у школьников логической грамотности:

1. Введение логики в курс средней школы как отдельного учебного предмета (А.Д. Гетманова, К.Я. Хабибуллии).

2. Включение элементов логики в содержание базовых школьных предметов, в частности математики (О.В. Алексеева, В.Г. Ежкова, Т.А. Кондрашенкова).

3. Изучение элементов логики на факультативных курсах по математике (И.Л. Никольская, А.А. Столяр) [11].

В истории российской школы был период (1947 - 1956 гг.), когда логика изучалась как отдельный учебный предмет в 10 (11) классе. В итоге логика как самостоятельная учебная дисциплина была исключена из школьной программы, так как практика показывала, что кратковременное изучение математической логики, да еще и в старших классах, в конце общего образования, не дает никаких результатов.

В 60-е гг. проблемой формирования и развития у школьников логических умений занялись М.А. Артамонов, М.Е. Драбкина, К.А. Рупасов, А.Д. Семушин, А.А. Столяр, А.И. Фетисов. Однако большинство исследователей рассматривали логику только как средство повышения эффективности процесса обучения самой математике. Вопрос же о формировании «логической грамотности, как необходимой и важнейшей составной части общей культуры мышления» был впервые поставлен лишь в 70-е гг. И.Л. Никольской. Именно она уточнила понятие «логическая грамотность» и предъявила требования к логической подготовке выпускников средних школ [11].

Между тем, стоит отметить еще и то, что большинство авторов предлагало изучать элементы логики и математической логики в рамках факультативных курсов. Другими словами, разработанные программы были рассчитаны только на учащихся, занимающихся математикой дополнительно.

Отметим, что предложенный И.Л. Никольской подход носил обобщенный характер и требовал конкретизации. В итоге в 80-е и 90-е гг. уже применительно к конкретным ступеням обучения появляются работы Т.А. Кондрашенковой, А.Н. Капиносова, О.В. Алексеевой. Однако предложенные методики были направлены на формирование и развитие у школьников только общелогических умений и оставили в стороне группу логических умений [11].

В настоящее время элементы логики начинают постепенно вводиться в содержание курса математики общеобразовательной школы.

В примерной программе по математике, одобренной решением Федерального учебного – методического объедения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15), введен раздел «Логика» который не предполагает дополнительных часов на изучение и встраивается в различные темы курсов математики, информатики и предваряется ознакомлением с элементами теории множеств [27].

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО), (5-9 классы), формулирует, основные метапредметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования, с помощью которых можно охарактеризовать уровень математической компетентности в области математической логики, а именно:

– умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;

– умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

Согласно ФГОС ООО предметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования, с помощью которых можно охарактеризовать уровень математической компетентности в области математической логики следующие:

– овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

– овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

– формирование умений формализации и структурирования информации, умения выбирать способ представления данных в соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы, графики, диаграммы, с использованием соответствующих программных средств обработки данных.

Согласно требованиям ФГОС ООО, в результате изучения предметной области «Математика и информатика», обучающиеся:

- развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях;
- овладевают математическими рассуждениями;
- учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты;
- овладевают умениями решения учебных задач;
- развивают математическую интуицию [30].

Из рассмотренных выше требований ФГОС ООО следует, что формирование логических умений и опыта проведения логических выводов и умозаключений является актуальным аспектом математического образования школьников.

В ходе анализа содержания школьных учебников по математике 5-9 классов нами было выявлено следующее: у большинства авторов учебников отсутствуют теоретические сведения из теории математической логики и довольно редко можно встретить задачи помогающие учиться думать, рассуждать, делать наблюдения и выводы. Так, например, в учебниках по математике для 5-6 кл., автора Н.Я. Виленкина, можно встретить следующие задачи:

1. Верно ли утверждение: а) если каждое слагаемое не кратно числу $a$, то сумма не кратна числу $a$; б) если уменьшаемое и вычитаемое кратны числу $a$, то и разность кратна числу $a$.
2. Из 35 учащихся пятого класса 22 выписывают журнал, 27- газету, а 3 ученика не выписывают ни газету, ни журнал. Сколько учащихся выписывают газету и журнал?
3. Три сына хана получили в наследство большую отару овец. Старшему сыну достались 25 частей стада, среднему – 10 частей, а младшему –

1 часть. Сколько овец было в отаре, если средний брат получил на 765 овец больше, чем младший?

4. Папа Карло пообещал каждый день давать Пьеро по 4 сальдо, а Буратино в первый день 1 сальдо, а в каждый следующий день на 1 сальдо больше, если он будет вести себя хорошо. Буратино обиделся: он решил, что, как бы ни старался, никогда не сможет получить в сумме столько же сальдо, сколько Пьеро. Подумайте, прав ли Буратино [4].

В учебниках по математике для 5-6 кл. автора Мордковича А.Г., отсутствуют задачи, развивающие логическое мышление и сообразительность.

В учебниках по математике для 5-6 классов, соответствующих требованиям ФГОС, авторов Муравин Г.К, Муравина О.В., содержится несколько задач на смекалку, задач-шуток, такие как:

1. Фигура состоит из трех равных квадратов. Как нужно вырезать из этой фигуры часть, чтобы, приложив её к оставшейся части, получить квадрат, внутри которого вырезан квадрат?

2. Задача-шутка: 6 котов за 6 минут съедают 6 мышей. Сколько понадобится котов, что бы за 100 минут съесть 100 мышей?

3. В коробке лежат цветные карандаши, по 9 карандашей каждого цвета. Известно, что в коробке натуральное число десятков и натуральное число дюжин карандашей, при этом карандашей в коробке меньше 300. Сколько карандашей в коробке?

4. Какой день недели будет через 10 лет?

5. Делится ли на 2006 сумма чисел 1+2+3+…+2006?

6. Два из трех одинаковых по виду колец имеют равные массы, а третье кольцо имеет другую массу. Как определить это кольцо с помощью двух взвешиваний на рычажных весах? [21,22]

В учебниках по математике для 5-6 классов, соответствующих требованиям ФГОС, авторы которых Козлова С.А., Рубин А.Г., так же можно встретить не большое количество задач на развитие сообразительности и логического мышления. Например:

1. Задача шутка: Лупа (увеличительное стекло) дает четырехкратное увеличение. Каким будет угол в 25 градусов, рассматриваемый через лупу?

2. Я отпил 1/6 чашечки черного кофе и долил её молоком. Затем выпил 1/3 чашечки и снова долил её молоком. Потом я выпил пол чашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я выпил больше – кофе или молока?

3. Решите старинную задачу: Волк, коза и капуста. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, или крестьянин только с волком, или только с козой, или только с капустой. Но если оставить волка с козой одних, то волк съест козу, а если оставить козу одну с капустой, то коза съест капусту. Как крестьянин перевез свой груз?

4. Ехали два крестьянина и нашли три бочонка: один восьмиведёрный с квасом и два пустых – пятиведёрный и трехведёрный. Крестьяне решили поделить квас поровну тут же на месте с помощью этих трех бочонков. Как они разделили квас? [18,19]

Количество логических задач, представленных в этих учебниках, на наш взгляд, не достаточно для развития логических умений у учащихся.

Наиболее полно представлен теоретический и практический материал, посвященный элементам математической логики, в учебниках по математике для 5-6 классов авторов Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон. Авторами этих учебников введено специальное обозначение для задач, при решении которых «главное-смекалка». Приведем, в качестве примера, ряд логических задач из этих учебников:

1. Четверо ребят – Игорь, Сережа, Миша и Юра – играли во дворе в футбол и разбили окно.

- Кто разбил окно? – спросила тетя Даша.

- Окно разбил или Юра, или Миша, – сказал Сережа.

- Я окно не разбивал, - возразил Юра.

- Это сделал Миша, - сказал Игорь.

- Нет, Игорь, ты ошибся, - заметил Миша.

- Ну что, задали они тебе задачу? – подытожил дядя Вася, наблюдавший эту беседу. – Могу еще добавить, что трое из этих футболистов всегда говорят только правду. А вот четвертого я плохо знаю.

Кто разбил окно? С кем из ребят дядя Вася был мало знаком?

2. На некотором острове отдельными селениями живут два племени, «правдолюбы» и «лжецы». «Правдолюбы» всегда говорят только правду, а «лжецы» - всегда только неправду. Жители одного племени бывают в селении другого племени, и наоборот. В одно из селений попал путешественник, но не знает, в какое. Он задал один вопрос первому встречному и сразу установил, где он находится. Что он спросил?

3. (Задача, которую в юности решал знаменитый французский физик и математик Симсон – Дени Пуассон (1781 – 1840 гг.)). Некто имеет 12 пинт меда и хочет отлить из этого количества половину, но у него нет сосуда емкостью 6 пинт. У него имеется 2 сосуда: емкостью в 8 пинт, а другой емкостью в 5 пинт. Каким образом налить 6 пинт меда в сосуд на 8 пинт?[9,10]

В ходе анализа содержания учебников по алгебре для 7-9 классов, авторов: Ю.Н. Макарычев; А.Г. Мордкович; С.М. Никольский; К.С. Муравин наличие логических задач выявлено не было.

В учебниках по алгебре для 7-9 классов, автора Ш.А. Алимова, есть рубрика, которая содержит занимательные задачи, но таких задач небольшое количество. Так, например, во всем учебнике за 9 класс, присутствует всего 3 задачи, в ходе решения которых необходимо провести логические умозаключения. Например:

1. Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки совмещаются?
2. Тремя одинаковыми цифрами записать, возможно, большее число.
3. Сколько всего прабабушек и прадедушек было у всех твоих прабабушек и прадедушек?[1]

И, только в учебнике по алгебре для 9 класса, автора Ш.А. Алимова, имеется теоретический и практический материал по теме «Множества. Логика».

В рамках изучения данной темы рассматриваются основные понятия из теории множеств и математической логики: множество; круги Эйлера; операции над множествами; высказывание; логические операции и др. В учебнике присутствуют следующие параграфы: «Прямая и обратная теоремы», «Необходимые и достаточные условия», «Противоположные теоремы» и др. Проанализировав данный учебник можно сделать вывод о том, что он содержит необходимый теоретический материал по математической логике, но отсутствуют в полной мере практические задания, которые бы способствовали развитию логического мышления у учащихся [1].

В учебнике по алгебре для 9 класса (для школ и классов с углубленным изучением математики), автора Н.Я. Виленкина, присутствует глава «Элементы теории множеств», в которой рассматриваются основные понятия теории множеств. Однако отсутствует теоретический и практический материал, посвящённый элементам математической логики [5].

Общепризнано, что изучение геометрии, в наибольшей степени способствует развитию логических умений. Однако, по ряду субъективных и объективных причин, некоторые учителя математики при обучении геометрии большинство теоретических фактов декларируют без выводов и доказательств и в основном рассматривают задачи на вычисление и лишь эпизодически рассматривают задачи на доказательство. Вследствие этого, у учащихся отсутствует опыт доказательных рассуждений.

Можно сделать вывод, о том, что, несмотря на актуальность проблемы формирования у школьников логических знаний и умений, в настоящее время отсутствует специальное учебно-методическое обеспечение и специальная методика обучения математике, направленные на развитие основ математической компетентности в области «Математическая логика» у учащихся.

## 1.2. Основы математической компетентности учащихся в области «Математическая логика»: структурные элементы, показатели и уровни сформированности

Одним из подходов, активно развивающихся в современной педагогике, является компетентностный подход. Основная идея этого подхода может быть определена как усиление практической ориентации образования, выход за пределы знаниевого образовательного пространства. В качестве результатов образования, значимых в любой сфере деятельности человека, рассматривается не сумма усвоенной информации, а способности человека действовать в различных проблемных ситуациях.

Под компетентностным подходом в образовании понимается способ обучения, ориентированный на овладение учащимися ключевыми компетенциями, являющимися универсальными для освоения различных видов деятельности, а также требующими умения использовать средства, адекватные складывающейся ситуации [33].

В докладе международной комиссии по образованию для XXI века «Образование: сокрытое сокровище» Ж. Делор сформулировал основные компетентности – «четыре столпа», на которых основывается образование: научиться познавать, научиться делать, научиться жить вместе, научиться жить [8].

И.А. Зимняя понимает под компетентностью актуальное, формируемое личностное качество как основывающуюся на знаниях, интеллектуально и личностно обусловленную социально-профессиональную характеристику человека [15]. Компетенции определяются автором как некоторые внутренние, потенциальные, сокрытые психологические новообразования (знания, представления, программы (алгоритмы) действий, системы ценностей и отношений), выявляемые в компетентности [15].

В.А. Болотов, В.В. Сериков отмечают, что компетентность – это «способ существования знаний, умений, образованности, способствующий личностной самореализации, нахождению воспитанником своего места в мире» [3]. Авторы подчеркивают, что компетентностный подход выдвигает на первое место не информированность ученика, а умения разрешать проблемы, возникающие в следующих ситуациях: 1) в познании и объяснении явлений действительности; 2) при освоении современной техники и технологии; 3) во взаимоотношениях людей, в этических нормах, при оценке собственных поступков; 4) в практической жизни при выполнении социальных ролей гражданина, члена семьи, покупателя, клиента, зрителя, горожанина, избирателя; 5) в правовых нормах и административных структурах, в потребительских и эстетических оценках; 6) при выборе профессии и оценке своей готовности к обучению в профессиональном учебном заведении, когда необходимо ориентироваться на рынке труда; 7) при необходимости разрешать собственные проблемы: жизненного самоопределения, выбора стиля и образа жизни, способов разрешения конфликтов.

А.В. Хуторской предлагает под компетенцией понимать совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определенному кругу предметов и процессов и необходимых, чтобы качественно, продуктивно действовать по отношению к ним. Компетентность автор определяет как владение соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и предмету деятельности [31].

А.В.Хуторской выделил ряд ключевых компетенций, которые должны являться основным результатом образовательного процесса:

1. Ценностно-смысловая - это основная ориентированность учеников, их готовность видеть и понимать окружающий мир, ориентироваться в нем, осознавать свою роль и предназначение, это способность ставить цели и принимать решения. От данных компетенций зависит учебная деятельность и дальнейшая жизнь ученика.

2. Общекультурная - осведомленность обучающегося в особенностях национальной и общечеловеческой культуры, духовно-нравственных основах жизни человека и человечества, отдельных народов, культурологических

основах семейных, социальных, общественных явлениях и традициях, роли науки и религии в жизни человека, их влиянии на мир, эффективных способах организации свободного времени.

3. Учебно-познавательная - готовность к самостоятельной познавательной деятельности и использованию различных видов деятельности. Умение ставить цели, планировать, анализировать и давать оценку своей деятельности. Способность действовать в различных нестандартных ситуациях.

4. Информационная - способность самостоятельно добывать, анализировать и отбирать необходимую информацию с различных источников. Владение современными средствами ИТ.

5. Коммуникативная - знания способов взаимодействия с окружающими людьми, навыки работы в группе. Развитость устной и письменной речи. Умение задавать вопросы, а так же давать четкий аргументированный ответ. Владения способами межкультурного общения.

6. Социально-трудовая - владение знаниями и опытом в гражданско-общественной деятельности (выполнение роли гражданина, наблюдателя, избирателя, представителя), в социально-трудовой сфере (права потребителя, покупателя, клиента, производителя), в области семейных отношений и обязанностей, в вопросах экономики и права, в профессиональном самоопределении.

7. Личностная (самосовершенствование) – овладение различными способами деятельности исходя из своих интересов, постоянное самосовершенствование в духовном, физическом и интеллектуальном плане [32].

Кроме ключевых компетенций, общих для всех предметных областей, существуют и предметные компетенции – это специфические способности, необходимые для эффективного выполнения конкретного действия в конкретной предметной области и включающие узкоспециальные знания, особого рода предметные умения, навыки, способы мышления.

В частности, математическая компетенция — это способность структурировать данные (ситуацию), выделять математические отношения, создавать математическую модель ситуации, анализировать и преобразовывать ее, интерпретировать полученные результаты [13].

Выделяют три уровня математической компетентности:

I уровень (уровень воспроизведения) - это непосредственное применение базовых математических знаний в известных ситуациях, знание стандартных приемов решения, распознавание математических объектов и свойств, применение известных алгоритмов, работа со знакомыми выражениями и формулами, прямое выполнение вычислений.

II уровень (уровень установления связей) - установление связей и объединение материала по различным математическим темам, для решения поставленной задачи. Применение знаний в достаточно сложных ситуациях. Способность решать многошаговые задачи (упорядочивать, соотносить и вычислять). Умения составлять уравнения, решать задания, используя различные формулы, интерпретировать информацию, представленную в таблицах или графиках.

III уровень (уровень рассуждений) - применение интуиции, размышлений и творчества в выборе математических методов и способов решения заданий, интегрирование знаний из разных разделов курса математики, самостоятельная разработка алгоритма действий. Умения составлять математическую модель. Способность решать нестандартные задачи, делать обобщения, выводы на основе исходных данных [24].

Создание методик и инструментария для оценки результатов обучения в компетентностном формате во многом зависит от того, насколько правильно смоделирована структура и содержание компетенций, насколько она поддается операционализации, представляется в виде некоторой системы показателей, поддающихся измерению либо экспертному оцениванию.

В своем исследовании мы придерживаемся предложенного авторами, в работе [33], подхода к моделированию структуры компетенций. Согласно этому подходу в структуре математической компетенции можно условно выделить три основных составляющих: когнитивный, праксиологический и аксиологический компоненты (таблица 1).

Когнитивный компонент включает систему знаний, которая необходима обучающимся для решения актуальных задач учебной деятельности, а так же определяет уровень интеллектуального развития. К элементам когнитивного компонента относятся такие элементы как знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция и знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции.

Праксиологический компонент включает совокупность умений, навыков и способов деятельности обучающихся, и их применение в собственной учебной деятельности.

Аксиологический компонент предполагает осознание обучающимися ценности и значимости математики как науки, а так же включает рефлексивные способности, позволяющие проводить анализ и давать оценку собственной деятельности, корректировать ее и осуществлять самоконтроль [29].

*Таблица 1*

*Структурно - содержательная модель основ математической компетентности учащихся 9 класса в области «Математическая логика»*

| *Аспект компетенции* | *Элемент компетенции* | *Характеристика элемента компетенции* |
|---|---|---|
| Когнитивный | Знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция | - Знание основных понятий математической логики: высказывание, истинностные значения высказываний; логическая формула, логическое следствие, виды теорем, необходимое и достаточное условие. |
| | Знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции | - Знание основных логических операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация;<br>- Знание основных типов логических задач и способов их решений: метод рассуждений, метод таблиц, метод графов, метод блок-схем;<br>- Знание методов доказательства или опровержения рассуждений (теорем). |
| Праксиологический | Умения, навыки и | -Умение строить высказывания на основе |

| | | |
|---|---|---|
| | способы деятельности в сфере компетенции | логических операций;<br>-Умение правильно составлять логические формулы и определять их истинностные значения;<br>-Умение определять необходимые и достаточные условия;<br>- Умение формулировать теоремы: прямую, обратную, противоположную, противоположную обратной;<br>-Умение распознавать какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена;<br>- Умение убедительно доказывать истинность верных суждений и опровергать ложные умозаключения;<br>- Навыки решения логических задач;<br>- Навыки проведения логических выводов, доказательств теорем. |
| | Минимально необходимый опыт деятельности в сфере компетенции | - Владение различными способами решения логических задач;<br>- Опыт решения разнообразных логических задач. |
| Аксиологический | Отношение к деятельности в сфере компетенции (понимание значения деятельности и ее результата) | - Понимание важности изучения элементов математической логики;<br>- Проявление интереса к теоретическому и практическому материалу;<br>- Осознанное применение знаний из области математической логики для решения логических задач. |

В таблице 1 описаны основы математической компетентности в области «Математическая логика» (см. третий столбец), которыми должны обладать учащиеся 9 класса.

Для формирования и диагностики уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся в области «Математическая логика» необходимо выделить и охарактеризовать уровни их сформированности.

Условно выделим три уровня сформированности математической компетентности: низкий, средний, высокий. Конкретизируем критерии сформированности математической компетентности у учащихся 9 классов в области «Математическая логика» с помощью показателей для каждого уровня и представим их в виде таблицы 2.

*Таблица 2*

*Уровни сформированности основ математической компетентности у учащихся 9 кл. в области «Математическая логика»*

| *Уровни сформированности основ математической компетентности* | *Показатели сформированности* |
|---|---|
| Низкий | -Знание таких базовых понятий как, высказывание, истинное и ложное высказывание;<br>-Знание таких логических операций как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция;<br>-Знание некоторых методов решения логических задач: метод рассуждений, метод таблиц, метод кругов Эйлера. |
| | - Умение распознавать, какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена;<br>- Владение некоторыми способами решения логических задач;<br>- Опыт решения некоторых видов логических задач. |
| | Понимание необходимости изучения математической логики, но при этом отсутствует проявление интереса к логическим задачам |
| Средний | -Знание основных понятий математической логики: высказывание, истинное и ложное высказывание, логическая формула, виды теорем;<br>-Знание таких логических операций как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация;<br>-Знание некоторых методов решения логических задач: метод рассуждений, метод таблиц;<br>-Знание знание методов доказательства или опровержения рассуждений (теорем). |
| | -Умение строить высказывание на основе логических операций;<br>-Умение формулировать теоремы: прямую, обратную.<br>- Умение распознавать, какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена;<br>- Владение различными способами решения логических задач;<br>- Опыт решения разнообразных логических задач. |
| | Понимание важности изучения математической логики, освоения способов и методов решения логических задач, проявление интереса к логическим задачам. |

| | |
|---|---|
| Высокий | - Знание основных понятий математической логики: высказывание, истинностные значения высказываний; логическая формула, логическое следствие, виды теорем, необходимое и достаточное условие;<br>- Знание основных логических операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация;<br>- Знание основных типов логических задач и способов их решений: метод рассуждений, метод таблиц, метод графов, метод блок-схем;<br>- Знание методов доказательства или опровержения рассуждений (теорем). |
| | -Умение строить высказывания на основе логических операций;<br>-Умение правильно составлять логические формулы и определять их истинностные значения;<br>-Умение определять необходимые и достаточные условия;<br>- Умение формулировать теоремы: прямую, обратную, противоположную, противоположную обратной;<br>-Умение распознавать какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена;<br>- Умение убедительно доказывать истинность верных суждений и опровергать ложные умозаключения;<br>- Навыки решения логических задач;<br>- Навыки проведения логических выводов, доказательств теорем. |
| | Понимание важности изучения математической логики, освоение разнообразных (наиболее эффективных) способов действий. Проявление намерений использования знаний в области математической логики для решения прикладных задач. |

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что:

1) понятия «компетенция» и «компетентность» не являются синонимами, исходя из того, что первое относится к общему в содержании компетентностного образования, а второе – к индивидуальному;

2) компетентность предполагает наличие минимального опыта проявления компетенции;

3) компетенция – это интегративное качество человека, включающее в себя не только знания, умения, навыки, но способность и готовность проявить их в решении актуальных задач;

4) любая компетенция имеет мотивационную и ценностную основу, выражающуюся в готовности осваивать и использовать знания, умения и способы деятельности в различных ситуациях;

5) когнитивная основа компетенции определяется способностью использовать результаты образования;

6) компетенция формируется и проявляется в деятельности [33].

### 1.3. Дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 9 классов основ математической компетентности в области «Математическая логика» в рамках предпрофильной подготовки

В справочной литературе «условие» понимается как: 1) обстоятельство, от которого что-нибудь зависит; 2) правила, установленные в какой-нибудь области жизни, деятельности; 3) обстановка, в которой что-нибудь происходит [23].

Педагогическая система может успешно функционировать и развиваться лишь при соблюдении определенных дидактических принципов и условий.

Под дидактическими условиями можно понимать обстоятельства процесса обучения и воспитания, которые являются результатом отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения и воспитания, способствующих эффективному решению поставленных дидактических задач [34].

Педагогический подход к формированию логического мышления у учащихся, в основном, состоит в разработке и экспериментальной проверке специальных методов, средств, содержания, условий, факторов организации процесса обучения, развивающих и формирующих логическое мышление у учащихся.

Одной из важнейших задач обучения математике в школе является формирование у учащихся навыков осуществления логических операций, обучение их различным приемам логического мышления, вооружение знаниями логики и выработки у школьников умений и навыков использования этих знаний в учебной и практической деятельности.

Развивать логическое мышление в процессе обучения это значит:

– развивать у учащихся умение сравнивать наблюдаемые предметы, находить в них общие свойства и различия;

– вырабатывать умение выделять значимые свойства предметов;

– учить детей анализировать предмет, разделять его на составные части и соединять части в одно целое;

– учить школьников делать правильные выводы из наблюдений или фактов, уметь аргументировать эти выводы;

– прививать умение обобщать факты;

– развивать у учащихся умение убедительно доказывать истинность своих суждений и опровергать ложные умозаключения;

– следить за тем, чтобы учащиеся излагали свои мысли четко, определенно, последовательно, обоснованно и др. [7].

Развитие логического мышления на уроке, должно носить системный характер, каждый ученик должен принимать участие в процессе решения не только стандартных заданий, но и задач развивающего характера. На уроках учитель должен формировать ту умственную деятельность, которая способствует развитию такого важного умения, как мыслить логически (учить анализировать задачи, выявлять отношения объектов и др.).

В дидактике обучения математике существует два подхода к формированию и становлению логико-математического мышления:

1. Традиционное обучение, в процессе которого формируется либо эмпирическое, либо теоретическое мышление.

2. Специально организованное обучение, направленное на формирование учебной деятельности, которая приводит к становлению логического мышления.

Для формирования логического мышления необходима особая методическая система обучения математике, включающая особое содержание и специальные формы, методы и средства обучения.

Под содержанием обучения мы будем понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а так же сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач [16].

На уроках математики необходимо систематически использовать задачи, способствующие целенаправленному развитию: логического мышления учащихся, сообразительности, познавательного интереса и т.п. К таким задачам мы относим разнообразные логические задачи, а также задачи на смекалку, задачи-шутки, математические ребусы, головоломки и т.п.

Под логическими задачами будем понимать, упражнения для мыслительной деятельности, для решения, которых ребенок должен владеть такими мыслительными операциями как анализ, синтез, классификация, обобщение и др., уметь строить цепочки рассуждений, делать логические умозаключения и выводы.

В качестве примера, приведем несколько логических задач:

*Задача 1.* У подъезда паркуются четыре машины: «Жигули», «Волга», «Москвич» и «Запорожец». Они красного, желтого, белого и зеленого цветов. По утрам на них уезжают художник, пекарь, учитель и инженер. Происходит это в 8, 9, 10 и 12 часов. Определите, кому какая машина принадлежит, какого она цвета и когда отъезжает, если известно, что: у учителя не «Москвич»; «Запорожец» не белый, а «Волга» не желтая; инженер уезжает сразу после «Запорожца»; пекарь на своей желтой машине уезжает не в 9 и не в 12; раньше всех уезжает учитель; художник уезжает позже красного «Москвича».

*Задача 2.* Три молодые супружеские пары собрались как-то раз на дружеский ужин. Завязалась беседа о возрасте. Были высказаны следующие утверждения: 1) Андрей: «Каждый из трех мужей на 5 лет старше своей жены»; 2) Ева: «Не стану скрывать – я самая старшая из всех жен»; 3) Игорь «Нам с Юлей вместе 52 года»; 4) Леонид: «Всем нам шестерым вместе 151 год»; 5) Юлия: « Нам с Леонидом вместе 48 лет». Марта не приняла участие в беседе. Кому сколько лет и кто на ком женат?

*Задача 3.* Однажды была найдена странная тетрадь. В ней было записано 100 утверждений: «В этой тетради ровно одно неверное утверждение». «В этой тетради ровно два неверных утверждения». «В этой тетради ровно три неверных утверждения». …. «В этой тетради ровно сто неверных утверждений». Есть ли среди этих утверждений верные и если да, то какие? [2].

Как писал Л.С. Выготский: «Развитие ребенка происходит только в процессе деятельности: чем активнее деятельность, тем успешнее развитие» [20]. Следовательно, формирование основ математической компетентности и опыта логических умозаключений не может развиваться вне активной деятельности самого школьника и без его собственных усилий. Это означает, что важнейшее условие развития основ математической компетентности школьников – вовлечение их в активную учебно-познавательную деятельность, посредством активных методов и форм обучения.

Активные методы обучения (АМО) – это методы, характеризующиеся высокой степенью включенности обучающихся в учебный процесс, активизирующие их познавательную и творческую деятельность при решении поставленных задач [14].

Примеры активных методов обучения: кейс – метод, «мозговой штурм», «мозговая эстафета», метод проектов, деловая игра и др.

Под формами организации обучения мы понимаем внешнее выражение согласованной деятельности учителя иучащихся, осуществ ляемой в определенном порядке и режиме: урок, экскурсии, домашняя учебная работа, консультации, семинар, факультативы, практикумы, дополнительные за нятия [17].

Для формирования основ математической компетентности, на этапе предпрофильной подготовки школьников, наиболее продуктивными формами обучения, на наш взгляд, являются следующие: дидактические игры; интеллектуальные разминки (логические викторины, тесты); практикумы по решению логических задач; проблемные семинары; деловые игры. В ходе таких форм организации обучения происходит постоянная смена деятельности – ученики слушают, думают, отвечают на вопросы, анализируют, делают выводы и др.

На этапе предпрофильной подготовки школьников особое место занимают курсы по выбору (факультативы).

*Курсы по выбору (факультативы)* – это форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний учащихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности [12].

*Классификация факультативов:*

- факультативы по отдельным предметам, входящим в учебный план, на которых углубленно изучается содержание учебного предмета, систематизируются и обобщаются полученные знания;
- прикладные факультативы проводятся с целью знакомства с важнейшими путями и методами применения знаний на практике;
- спецкурсы позволяют углубленно рассмотреть отдельные вопросы изучаемого курса;
- межпредметные факультативы проводятся с целью интеграции знаний учащихся по различным учебным дисциплинам [25].

*Функции факультативных занятий:*

1) *Предметно-повышающая:* повышение уровня изучения отдельных предметов, подготовка к предметным олимпиадам и конкурсам;
2) *Мотивирующая:* за счет удовлетворения потребностей в поиске, познании, творчестве у многих учащихся формируется устойчивая познавательная мотивация к предмету изучения;
3) *Общеобразовательная:* создаются условия для общего развития учащихся, становления их познавательных и социальных компетенций;
4) *Профориентационная:* факультативные занятия могут предоставить учащимся большие возможности для «профессиональных проб», что способствует их познавательному и профессиональному самоопределению [28].

При организации факультативных занятий учитываются те качества учащихся, которые можно развивать в процессе изучения данного факультативного курса — способности, потребности, прикладные умения и навыки.

На факультативный курс, как правило, отводится не менее 35 часов в год. Занятия проводятся по одному часу в неделю в течение учебного года или по два часа на протяжении полугодия, до или после уроков.

Обучающиеся выбирают факультативные курсы соответственно своим интересам, поэтому деятельность на занятиях характеризуется высокой активностью и интенсивностью.

При выборе методов и приёмов обучения на факультативных занятиях необходимо учитывать содержание факультативного курса, уровень развития и подготовленности учащихся, их интерес к тем или иным разделам программы. Одним из важнейших требований к методам является активизация мышления учащихся, развитие самостоятельности в различных формах её проявления.

На факультативных занятиях могут использоваться разнообразные *формы проведения занятий*: лекции; практические задания; обсуждение заданий по дополнительной литературе; доклады учеников; составление рефератов; реализация самостоятельных проектов; экскурсии и др. [6].

Факультативные занятия должны быть интересными, увлекательными, разнообразными по форме организации.

Обязательным структурным элементом теоретических и практических факультативных занятий является обсуждение результатов работы учащихся.

Руководство деятельностью учащихся на факультативных занятиях имеет свои особенности. Занятия с небольшим количеством учащихся дают возможность развивать мышление, память, воображение, внимание каждого школьника, его способности, результативно организовать индивидуальный подход.

Особое внимание учитель должен уделить названию факультативного курса. Название курса должно привлечь учащихся, вызывать интерес и желание изучить. Название может иметь вид цитаты, крылатой фразы, сформулировано как вопрос или проблема. Например, «Где родился, там и пригодился», «Нефть. Какая она на вкус?», «Чем я хуже Эйнштейна?» и т. п. [26].

Что касается структуры курса по выбору, в него должны входить следующие компоненты:

1. Аннотация (название, основное содержание, для кого предназначен курс), которая должна быть краткой и в тоже время давать весьма полное представление о курсе: в чем привлекательность курса для учащегося, учителей, родителей, школьного сообщества в целом.

2. Пояснительная записка, включающая обоснование актуальности курса по выбору; описание его цели и задач, логики структуры программы и особенностей организации учебного процесса, методов и форм обучения, ожидаемых результатов; характеристику системы оценки достижений учащихся, уровней усвоения учебного материала («иметь представление о …», «знать…», «уметь…», «владеть…» и т. п.) и др.

3. Учебно-тематический план, отражающий основное содержание всех разделов (тем) курса с указанием времени на их изучение. Отдельно выделяются практические и лабораторные работы, экскурсии, учебные проекты и т. д. Учебно-тематический план может иметь вид таблицы.

4. Программа, раскрывающая краткое содержание теоретической и практической частей каждой темы, которое излагается в научно-учебном жанре.

5. Списки литературы для учителя и учащихся.

6. Контролирующие материалы с обозначением формы проведения (зачет, собеседование, тест и т. п.).

7. Некоторые приложения: основные понятия курса, списки тем рефератов, ориентировочный перечень индивидуальных творческих проектов, курсовых работ, примеры заданий для самостоятельной работы учащихся и т. п. [26].

Согласно ФГОС ООО, программы отдельных учебных предметов, курсов разрабатываются на основе требований к результатам освоения основной образовательной программы с учётом основных направлений программ, включённых в структуру основной образовательной программы.

Программы отдельных учебных предметов, курсов должны содержать:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели основного общего образования с учётом специфики учебного предмета;

2) общую характеристику учебного предмета, курса;

3) описание места учебного предмета, курса в учебном плане;

4) личностные, метапредметные и предметные результаты освоения конкретного учебного предмета, курса;

5) содержание учебного предмета, курса;

6) тематическое планирование с определением основных видов учебной деятельности;

7) описание учебно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса;

8) планируемые результаты изучения учебного предмета, курса [30].

# Глава II Методика формирования у учащихся 9 классов основ математической компетентности в области «Математическая логика» в рамках предпрофильной подготовки

## 2.1. Программа курса по выбору «Математическая логика для школьников»

*Пояснительная записка.*

Каждый день мы сталкиваемся с множеством задач, решение которых требует от нас способности логически мыслить. Логика как умение думать и рассуждать, требуется нам во многих жизненных ситуациях, начиная с решения задачи на уроке, заканчивая спором с собеседником и совершением покупок в магазине.

Но несмотря на высокую потребность в этом умении мы часто совершаем логические ошибки, сами того не подозревая. Ведь среди многих людей бытует мнение, что правильно мыслить можно на основе жизненного опыта и так называемого здравого смысла, не пользуясь законами и специальными приемами «формальной логики».

При изучении курса «Математическая логика для школьников» обучающиеся познакомятся с классификацией логических задач, узнают все многообразие подходов к решению таких задач, познакомятся с историей возникновения математической логики как науки и узнают об элементах математической логики. Так же данный курс расширяет кругозор, повышает эрудицию и развивает навыки логического и абстрактного мышления.

Курс по выбору «Математическая логика для школьников», предназначен для обучающихся 9 классов, рассчитан на одну учебную четверть (2 час в неделю, 16 ч.). Предлагаемый курс является предметно-ориентированным.

*Цель курса:* формирование у учащихся 9 классов основ математической компетентности в области «Математическая логика».

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие *задачи:*

- познакомить учащихся с историей возникновения и развития математической логики;
- формировать у учащихся представление о том, что изучает математическая логика;
- рассмотреть основные понятия из раздела математической логики «Алгебра высказываний»;
- познакомить учащихся с языком математической логики и методами его применения при решении различных логических задач;
- развивать у учащихся навыки и опыт решения логических задач;
- формировать у учащихся ценностное отношение к математическим знаниям, в частности, к математической логике.

*Ожидаемые результаты:*

После изучения курса обучающиеся должны:

*Знать:* основную идею возникновения математической логики; основные понятия математической логики из раздела «Алгебра высказываний» (высказывание, истинностные значения высказываний, логические операции, формулы алгебры высказываний, логическое следствие, «необходимое» и «достаточное» условие, виды математических теорем и их структура); различные методы решения логических задач (метод графов, метод таблиц, с помощью языка математической логики и др.).

*Уметь:* распознавать, какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена; убедительно доказывать истинность верных суждений и опровергать ложные умозаключения; определять необходимое и достаточное условие в теореме; составлять различные виды теорем.

*Владеть:* различными способами решения логических задач; навыками решения логических задач; навыками перевода предложений с обычного языка, на язык математической логики; навыками проведения логических выводов, анализа рассуждений и доказательств теорем.

*Понимать:* важность изучения математической логики и математики в целом и для решения прикладных задач.

*Формы занятий:* лекции, практические занятия, дидактические игры.

*Учебно-тематическое планирование курса.*

| *№* | *Название темы* | *Форма проведения занятия* | *Форма контроля* | *Кол-во часов* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *«История возникновения языка математической логики»* | Лекция и практика | Фронтальная | 2 |
| *2* | *«Алфавит математической логики»* | Лекция и практика | Фронтальная | 2 |
| *3* | *«Формулы математической логики»* | Лекция и практика | Групповая | 2 |
| *4* | *«Логическое следствие»* | Лекция | - | 2 |
| *5* | *«Необходимые и достаточные условия»* | Лекция и практика | Фронтальная | 2 |
| *6* | *«Логическая структура математических теорем»* | Лекция и практика | Фронтальная | 2 |
| *7* | *«Логические задачи и методы их решений»* | Лекция и игра | Групповая | 4 |
| ИТОГО: | | | | 16 часов |

*Содержание курса.*

*Тема 1. «История возникновения языка математической логики».*

Софизмы, парадоксы, определение логики, идея создания универсального языка (Лейбниц, Буль и др.), предмет математической логики, троичная и нечетка логика.

*Тема 2. «Алфавит математической логики»*

Высказывание, истинностные значения высказываний, высказывания простые и составные, логические операции, перевод предложений с обычного языка на язык символов математической логики и обратно.

*Тема 3. «Формулы математической логики»*

Определение формулы, значение формул, виды формул, таблица истинностных значений для формулы.

*Тема 4. «Логическое следствие»*

Логические рассуждения, определение логического следствия и способы его установления (по определению, от противного), задачи на доказательство истинности логических рассуждений, правило контрапозиции, метод дедукции.

*Тема 5. «Необходимые и достаточные условия»*

Определение, примеры, задачи на определение в рассуждениях необходимых и достаточных условий.

*Тема 6. «Логическая структура математических теорем»*

Виды теорем: прямая, обратная, противоположная, противоположная обратной; их логическая структура и истинностные значения; примеры; задачи на формулировку всех видов теорем.

*Тема 7. «Логические задачи и методы их решений»*

Табличный метод, с помощью графов, с помощью языка математической логики и др.

*Список рекомендуемой литературы для учителей и учащихся:*

1. Бизам Д. Игра и логика. 85 логических задач: книга [Текст] / Д. Бизам, Я. Герцег.- Перевод с венгерского Ю.А. Данилова. – М.: Мир, 1975.-358 с.
2. Брадис В.М. Ошибки в математических суждениях: книга [Текст] / В.М. Брадим, В.Л. Минковский, А.К. Харчева. – 2-е изд., перераб. – М.: Учпедгиз, 1959. – 178 с.
3. Богомолова О. Б. Логические задачи / О. Б. Богомолова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277 с. : ил.
4. Галеева Р. А. Тренируем мышление. Задачи на сообразительность / Р. А. Галеева, Г. С. Курбанов, И. В. Мельченко – Изд. 2 – е – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 272 с.: ил. – (Большая перемена).
5. Гарднер М. А ну-ка, догадайся: книга [Текст] / М. Гарднер. – Пер. с англ. Ю.А. Данилова. – М.: Мир, 1984. – 213 с.

6. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений [Текст] / В.И. Игошин. – 3-е изд., стер. – М.: Академия, 2007. – 304 с.
7. Калужнин Л.А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики: пособие для учителей [Текст] / Л.А. Калужнин. – М.: Просвещение, 1978. – 88 с.
8. Лихтарников Л.М. Задачи мудрецов: книга для учащихся [Текст] / Л.М. Лихтарников. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. – 112 с.
9. Лихтарников Л.М. Математическая логика: курс лекций, задачник практикум и решения [Текст] / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Издательство Ланы, 1999. – 288 с.
10. Мадера А.Г. Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям: кН. Для учащихся 7 – 11 кл. [Текст] / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. – М.: Просвещение, 2003. – 112 с.
11. Никольская И. Л. Математическая логика: учебник [Текст] / И.Л. Никольская. – М.: Высш. школа, 1981. – 127 с.
12. Юшипицина Е.Н. Математическая логика. Часть 1. Алгебра высказываний: практикум [Текст] / Е.П. Юшипицина. – Красноярск: РИО ГОУ ВПО КГПУ им В.П. Аставьева, 2004. – 84 с.

## 2.2. Учебно-методические ресурсы, способствующие формированию у учащихся 9 классов основ математической компетентности в области «Математическая логика»

### Конспект занятия 1 по теме:

***«История возникновения языка математической логики»***

*Основная цель:* введение в теорию математической логики — знакомство с историей возникновения математической логики.

*Планируемые результаты:*

*предметные:* знание основной идеи возникновения математической логики как символьного языка «лишенного вольностей языка естественного»; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий по средством логических умозаключений; способность к анализу различных парадоксов и софизмов.

*метапредметные:* умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление критичности мышления и навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения в ходе рассмотрения различных парадоксов и софизмов.

*личностные:* умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Введение.
2. Практикум по разбору математических софизмов.
3. Постановка домашнего задания.
4. Подведение итогов.

1. Здравствуйте, ребята! Сегодня мы начинаем изучение курса «Математическая логика для школьников». Сегодня я проведу экскурс в историю математической логики как науки, вы познакомитесь с понятием и предметом логики.

Встречались ли вы на уроках или где то в повседневной жизни с парадоксами?

Парадоксом можно назвать рассуждение, которое доказывает не только истинность, но и ложность некоторого суждения, т. е. доказывающее как само суждение, так и его отрицание. Другими словами, парадокс – это два противоположных, несовместимых утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы.

Один из первых и, безусловно, образцовых парадоксов был записан Эпименидом. Эпименид — легендарный греческий поэт, живший на Крите в VI в. до н. э. По преданию, *Эпименид утверждал, что все жители* *острова Крит лжецы. Верно ли это утверждение, если учесть, что сам Эпименид родом с острова Крит?*

Этот парадокс именуется «королем логических парадоксов». Разрешить его до настоящего времени не удалось никому. Если это высказывание истинно, значит, исходя из его содержания, верно то, что данное высказывание — ложь; но если оно — ложь, тогда то, что оно утверждает, верно; значит, неверно, что данное высказывание — ложь, и, значит, данное высказывание истинно. Таким образом, цепочка рассуждений возвращается в начало. Поэтому данный парадокс и получил столь высокий «титул».

Существует еще несколько известных парадоксов, например:

*«Бог – всемогущий. Может ли он создать такой камень, который бы не смог сам поднять?».*

*«Парадокс брадобрея: говорят, что в некоторой деревне был всего один брадобрей. Он брил всех тех и только тех мужчин, которые не брились сами. Брил ли этот брадобрей самого себя?»* Если он бреет себя сам, то принадлежит к числу тех, кого по закону ему брить нельзя. Если же он не бреет себя сам, то по закону он должен брить себя сам.

А встречались ли вы с таким понятием, как софизм?

Софизмы, представляют собой преднамеренные, сознательно совершаемые ошибки, рассчитанные на то, чтобы ввести противника в заблуждение, выдать ложь за истину и тем самым добиться победы в споре. Еще в античной риторике софисты для этой цели использовали не только сознательно и обдуманно построенные логические ошибки, но и всевозможные психологические уловки и элементы внушения с тем, чтобы максимально воздействовать на убеждения своих слушателей.

Анализ различных софизмов в конечном итоге способствовал развитию логики. В частности, одна из книг древнегреческого философа Аристотеля так и называется «Софистические опровержения».

Вот несколько примеров софизмов:

*«Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному».*

*«Всё, что ты не потерял, ты имеешь. Ты не потерял рогов. Следовательно, ты их имеешь».*

Такие софизмы нередко использовались для того, чтобы ввести оппонента в заблуждение. Без такого оружия в руках, как логика, соперникам софистов в споре было нечего противопоставить, хотя зачастую они и понимали ложность софистических умозаключений. Споры в Древнем мире зачастую заканчивались драками.

Известен также целый ряд математических софизмов.

Например, рассмотрим софизм «Дважды два – пять». Запишем тождество 4:4=5:5. Вынеся из каждой части тождества общие множители за скобки получим: 4·(1:1)=5·(1:1) или (2·2)·(1:1)=5·(1:1). Так как 1:1=1, то 2·2=5. Где ошибка?

Ошибка сделана при вынесении общих множителей (4 из левой части и 5 из правой части). Распределительный закон не распространяется на деление. Действительно, 4:4=1:1, но 4:4≠4·(1:1).

Рассмотри еще один математический софизм «5=6». Возьмем тождество 35+10-45=42+12-54. В каждой части этого тождества вынесем за скобки общий множитель: 5·(7+2-9)=6·(7+2-9). Теперь, разделив обе части полученного равенства на их общий множитель (7+2-9), получим, что 5=6. Где ошибка?

Ошибка допущена при делении верного равенства 5·(7+2-9)=6·(7+2-9) на число 7+2-9, равное нулю. Этого нельзя делать. Любое равенство можно делить только на число, отличное от нуля.

Существуют софизмы, при рассмотрении которых мы можем найти завуалированную ошибку в рассуждениях, но существуют софизмы в которых не сразу видно где обман.

Парадоксы и софизмы показывают, что естественный язык допускает грамматически правильные конструкции, которые выглядят как осмысленные утверждения, но о которых, тем не менее, нельзя в принципе решить, истинны они или ложны

А застрахованы ли мы от подобных утверждений - «призраков» в математических доказательствах? Как же избежать парадоксов?

Для того чтобы избежать и обезопасить себя от таких вольностей естественного языка возникла идея о создании специального языка - языка математической логики (символической логики).

Эта идея была высказана Готфридом Лейбницем (Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, годы жизни: 21 июня 1646 — 14 ноября 1716). Джордж Буль (английский математик и логик, годы жизни 2 ноября 1815 - 8 декабря 1864) — реализовал ее - ввёл функции, значениями которых являются два: истина или ложь.

Что же такое логика? Как вы думаете?

Логика - это наука о правилах мышления, изучающая мышление как средство познания, и о законах мыслительных процессов, направленных на обнаружение и обоснование истины.

Логика как наука изучает способы достижения истины в процессе познания, не из чувственного опыта, а из знаний, полученных ранее, поэтому её также можно определить как науку о способах получения выводного знания.

Помимо классической логики (которая принимает значения «истина» или «ложь»), существует еще и троичная (трехзначная) логика.

Была создана еще в 1920 году Яном Лукасевичем (польский логик, член Польской академии наук, один из главных представителей львовско-варшавской школы, годы жизни:21 декабря 1878 — 13 ноября 1956). Троичная логика принимает три истинностных значения: истина, ложь, неизвестно.

Например, на вопрос парня пойдет ли девушка с ним в кино? Ответ девушки может быть: Да, нет, не знаю.

Существует так называемая нечёткая логика, в которой рассматриваются истинностные значения из отрезка от 0 до 1 включительно. Многие бытовые приборы оснащены функцией - нечёткая логика: в фото- и видеокамерах (Sony, Canon, Minolta), в однокнопочном управлении стиральных машин (Siemens, Samsung, Candy), в системе кондиционирования воздуха, автомобильных навигаторах (Opel, Porsche), автоматических коробках передач в автомобилях (Porsche, Renault, Peugeot, Hyundai, Skoda) и других отраслях нашей жизни.

2. Предлагаю вашему вниманию рассмотреть ряд софизмов. Ваша задача определить на каком этапе рассуждений допущена ошибка.

*Софизм «Один рубль не равен ста копейкам»*

Известно, что любые два неравенства можно перемножать почленно, не нарушая при этом равенства, т.е. если a=b, c=d, то ac=bd.

Применим это положение к двум очевидным равенствам

1 р.=100 коп, (1)

10р.=10*100коп.(2)

перемножая эти равенства почленно, получим

10 р.=100000 коп.(3)

и, наконец, разделив последнее равенство на 10, получим, что

1 р.=10 000 коп.

таким образом, один рубль не равен ста копейкам.

Предполагаемый ответ: ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении правил действия с именованными величинами: все действия, совершаемые над величинами, необходимо совершать также и над их размерностями. Действительно, перемножая равенства (1) и (2), мы получим не (3), а следующее равенство:

10 р. =100 000 к.,

которое, после деления на 10 дает:

1 р. = 10 000 коп. (*)

а не равенство 1р=10 000 коп., как это записано в условии софизма. Извлекая квадратный корень из равенства (*), получаем верное равенство 1р.=100 коп.

*Софизм «Спичка вдвое длиннее телеграфного столба»*

Пусть $a$ – длина спички и $в$ – длина столба. Разность между $в$ и $a$ обозначали через $c$.

Имеем $в-a=c$, $в=a+c$.

Перемножая два эти равенства по частям, находим: $в^2-aв=ca+c^2$.

Вычтем из обеих частей $вc$.

Получим: $в^2-aв-вc=ca+c^2-вc$, или $в\cdot(в-a-c)=-c\cdot(в-a-c)$, откуда $в=-c$, но $c=в-a$, поэтому $в=a-в$ или $a=2в$.

Предполагаемый ответ учеников: Нельзя делить на $в-a-c=0$.

*Парадокс «Ахиллес и черепаха»*

Ахиллес не может догнать черепаху, потому, что за время, пока Ахиллес достигает черепахи, последняя успевает сместиться на некоторое расстояние вперед; пока Ахиллес преодолевает и это расстояние, черепаха перемещается еще на какое-то расстояние и т.д. до бесконечности. Таким образом, сколь бы стремительно Ахиллес не бежал, черепаха всегда ползет впереди него.

Как вы думаете, как его можно доказать?

Пусть расстояние между Ахиллесом и черепахой 100 м. Пока Ахиллес пробежит эти 100 м, черепаха преодолеет 10 м. Пока Ахиллес пробежит эти 10 м, черепаха проползёт ещё 1 м. За то время, пока Ахиллес будет пробегать этот 1 м, черепаха окажется впереди его на 10 см. И так далее. То есть расстояние между ними всегда будет уменьшаться, но никогда не обратится в ноль, и Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Определяем размерность долей, которыми будем отмерять расстояние и понимаем, что это вовсе не софизм, а прямое нарушение законов логики. Следовательно, - доказательство некорректно.

3. Постановка домашнего задания: найти интересные математические парадоксы или софизмы и рассказать о них на следующем занятии.

4. Подведение итогов.

**Конспект занятия 2 по теме:**

***«Алфавит математической логики»***

*Основная цель:* познакомить учащихся с алфавитом математической логики; формирование умений перевода предложений с обычного языка, на язык математической логики и обратно.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание определений понятий: «высказывание», «простое и составное высказывание», «истинностное значение»; знание определений логических операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция); умение переводить предложения с обычного языка, на язык математической логики; умение определять истинность сложных высказываний.

*Метапредметные:* умение создавать модели изучаемых объектов с использованием знаково – символических средств.

*Личностные:* познавательная активность, положительная мотивация к изучению математической логики.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия.
2. Выступление учащихся.
3. Теоретическая часть.
4. Решение практических заданий.
5. Подведение итогов.

1. Продолжаем знакомиться с такой наукой как математическая логика. Сегодня познакомимся с одним из основных понятий мат. логики – высказыванием. А так же рассмотрим логические операции и научимся переводить предложения с обычного языка на язык символов математической логики и обратно.

2. Для начала послушаем выступления учащихся с докладами.

3. Высказывание – повествовательное предложение, относительно которого можно утверждать истинно оно или ложно.

Определим, какие из предложений являются высказыванием, и установим их истинность:

(***A***) «Число 6 больше числа 2» – высказывание, истинно;

(***B***) «Число 6 меньше или равно числу 2» – высказывание, ложно;

(***C***) «Волга впадает в Каспийское море» – высказывание, истинно;

(***D***) «Путин - наш президент» - утверждение, истинное в настоящий момент, однако об его истинности через 10 лет мы ничего сказать не можем; такие утверждения мы высказываниями считать не будем;

***(E***) «Чтобы хорошо жить, надо хорошо учиться!» - не высказывание, так как проверить его истинность невозможно.

Истинностные значения любого высказывания будем обозначать:

– истина - или буквой «И», или цифрой «1»;

– ложь - или буквой «Л», или цифрой «0».

Высказывание называется *простым (элементарным),* если его нельзя разделить на части, которые сами являются высказываниями. Высказывание называется *составным*, если оно допускает разделение на другие высказывания

Составные высказывания получаются из элементарных с помощью грамматических связок "не", "и", "или", "если..., то...", "тогда и только тогда". Каждая из этих связок в математической логике определяет некоторую логическую операцию. Рассмотрим эти операции.

*Операция «отрицание (инверсия)».*

Если у нас есть какое-то высказывание А, то мы всегда можем получить его отрицание. *Отрицание (инверсия)* - это такое высказывание, которое будет истинно, если исходное высказывание ложно, и наоборот - оно будет ложно, если исходное высказывание истинно.

Например, высказывание "2+2 равно 4". Оно истинно. А его отрицанием будет "2+2 НЕ равно 4". Оно ложно. Или высказывание "2+2 больше чем 5". Оно ложно. А его отрицанием будет высказывание "2+2 меньше или равно 5". Оно истинно.

Так как при отрицании часто используется частица "НЕ" (как у нас в первом случае – не равно), то эта операция (*отрицание высказывания*) иногда называется "НЕ". Обозначается отрицание - $\overline{A}$.

*Таблица истинности:*

| A | ¬A |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

*Операция «Конъюнкция»*

*Конъюнкцией* двух высказываний $x, y$ называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания $x, y$ истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Эту операцию обозначают $A \wedge B$. Читается "А и В". Союз "И" означает что для истинности высказывания $A \wedge B$ должны быть истинно как высказывание А, так И высказывание В.

Например, фраза "2+2=5 и все люди смертны" ложна, так как в ней использована конъюнкция (союз И), однако первое высказывание (2+2=5) ложно. Следовательно, и вся конъюнкция тоже ложна.

*Таблица истинности:*

| *A* | *B* | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* |

*Операция «Дизъюнкция»*

*Дизъюнкцией* двух высказываний $x, y$ называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний $x$ или $y$ истинно и ложным, если они оба ложны. Она обозначается $A \vee B$. Читается она "А или В". Союз "ИЛИ" означает что для истинности высказывания $A \vee B$ должны быть истинно ИЛИ высказывание А, ИЛИ высказывание В.

Например, фраза "2+2=5 ИЛИ все люди смертны" истинны, так как второе высказывание истинное, следовательно, и вся дизъюнкция истинна.

*Таблица истинности:*

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

*Операция «Импликация (следование)»*

*Импликацией* (следование) двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается ложным, если *x* истинно, а *y* ложно, и истинным во всех остальных случаях. Эта логическая операция соответствует словам «если…,то…». Импликация высказываний обозначается $x \to y$ и читается «если *x*, то *y*» или «из *x* следует *y*». (Из лжи следует все, что угодно!)

*Таблица истинности:*

| *x* | *Y* | $x \to y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Высказывание *x* называется *условием* или *посылкой*, а высказывание *y* – *следствием* или *заключением*.

Например:

1) *x* – «12 делится на 6», *y* – «12 делится на 3». Тогда импликация $x \to y$ – «если 12 делится на 6, то оно делится на 3» истинна, так как истинна посылка *x*, и истинно заключение *y*.

2) *x* – «12 делится на 2 и 3», *y* – «12 делится на 7». Тогда импликация $x \to y$ – «если 12 делится на 2 и 3, то оно делится на 7» ложна, так как условие истинно, а заключение ложно.

*Операция «Эквиваленция»*

*Эквиваленцией* или эквивалентностью двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x, y* либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эта логическая операция соответствует словам «тогда и только тогда, когда».

*Таблица истинности:*

| $x$ | $Y$ | $x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| 1 | 1 | 1 |

Эквиваленция высказываний $x$, $y$ обозначается символом $x \leftrightarrow y$ и читается «для того чтобы $x$, необходимо и достаточно, чтобы $y$» или «$x$ тогда и только тогда, когда $y$».

Например, $x$ – «Треугольник ABC с вершиной А и основанием ВС – равнобедренный», $y$ – «$\angle$ B=$\angle$ C». Эквиваленция $x \leftrightarrow y$ «Треугольник ABC с вершиной А и основанием ВС равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle$ B= $\angle$ C». Эквиваленция $x \leftrightarrow y$ истинна, так как высказывания $x$ и $y$ либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

А вы знаете, что компьютеры базируются на рассмотренных логических операциях. Это кажется невероятным, но задумаемся – а что вообще могут «понимать» эти «железки»? А понимать они могут следующее:

- в проводе есть ток – это *логическая единица*;
- провод обесточен – это *логический ноль*.

Простейшим «компьютером» является обычный выключатель – он хранит информацию в 1 бит (истину или ложь в указанном выше смысле). Центральный же процессор современного компьютера насчитывает сотни миллионов транзисторов, и самое сложное программное обеспечение, самая «навороченная игра» раскладывается на множество нулей и единиц, которые обрабатываются с помощью элементарных логических операций.

4. Выполним следующие задания:

*Задание 1.* Даны два высказывания:

А = «*Принтер используется для набора информации*»

В = «*Принтер используется для печати информации*».

Составьте следующие сложные высказывания и определите их истинность.

а) не А

б) не В

в) А и В

г) А или В

д) А или (не В)

е) не А или В

ж) не А и (не В)

з) не (А и В)

Ответ:

а) □А=1

б)□ В=0

в) А⍰ В=0

г) А□ В=1

д) А□ □ В=0

е) □А□ В=1

ж) □А□□ В=0

з) □ (А□ В)

*Задание 2.* Запишите пять мужских и пять женских имен, для которых истинно высказывание: «*Третья буква имени согласная, и неверно, что первая буква имени гласная*».

Возможные ответы учеников: Максим, Семен, Павел, Роман, Константин, Мария, Наталья, Виктория, Валентина, Катя.

*Задание 3.* Выделите простые высказывания в следующих сложных высказываниях. Обозначьте каждое простое высказывание логической переменной. Запишите в виде логического выражения сложные высказывания:

а) «После уроков школьники любят смотреть телевизор или играть за компьютером»

б) «Неверно, что маленькие дети любят разговаривать по телефону и смотреть в окно»

в) «На уроках информатики школьники отвечают на вопросы учителя или работают за компьютером и результат работы записывают в тетрадь»

г) «Спортсмен должен быть корректен с соперником и судьей, а также не использовать допинг»

д) «Неверно, что за проезд в автобусе нужно платить, и неверно, что штрафуют за безбилетный проезд или высаживают из автобуса»

Ответы:

а) А = «После уроков школьники любят смотреть телевизор»; В = «После уроков школьники любят играть за компьютером»

А □ В

б) А = «Маленькие дети любят разговаривать по телефону»; В = «Маленькие дети любят смотреть в окно»

□ (А □ В)

в) А = «На уроках информатики школьники отвечают на вопросы учителя»; В = «На уроках информатики школьники работают за компьютером»; С = «На уроках информатики школьники результат работы записывают в тетрадь»

(А □ В) □С

г) А = «Спортсмен должен быть корректен с соперником»; В = «Спортсмен должен быть корректен с судьей»; С = «Спортсмен должен использовать допинг»

А □ В □ □ С

д) А = «За проезд в автобусе нужно платить»; В = «Штрафуют за безбилетный проезд»; С = «За безбилетный проезд высаживают из автобуса»

□А □ □ (В□ С)

*Задание 4.* Найдите значения выражений:

а) (0 ИЛИ 1) И (0 ИЛИ 1)

б) 0 ИЛИ 1 И 0 ИЛИ 1

в) 0 ИЛИ 1 И НЕ (0 ИЛИ 1)

г) 1 ИЛИ 0 И 1 И 1 И 0 ИЛИ 1

д) ((1 ИЛИ 0) И (1 И 1))

е) (А ИЛИ 1) ИЛИ (В И 0)

ж) ((А ИЛИ 0) ИЛИ В И 1) И 0

Ответы: а) 1; б) 1; в) 0; г) 1; д) 1; е) 1; ж) если А=1, В=0, то 0; если А=1, В=1, то 0; если А=0, В=1, то 0; если А=0, В=0, то 0 .

*Опорная схема по теме: «Алгебра высказываний»*

| **Линия сравнения** | *Инверсия* | *Конъюнкция* | *Дизъюнкция* | *Импликация* | *Эквивалентность* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Название* | Отрицание | Логическое умножение | Логическое сложение | Логическое следование | Логическое равенство |
| *Обозначение* | $\overline{A}$ | А□ В | А□ В | А→В | А↔В |
| *Союз* | не | и | или | Если А, то В; Когда А, тогда В | А тогда и только тогда, когда В |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Истинность* | Когда исходное высказывание ложно | Когда истины одновременно высказывание А и В | Когда истинно А, либо В, либо А и В одновременно | Всегда, кроме случая, когда А истинно, а В ложно | Когда А и В одновременно истинны или одновременно ложны |
| *Таблица истинности* | А ¬А<br>0 1<br>1 0 | А В А□ В<br>0 0 0<br>0 1 0<br>1 0 0<br>1 1 1 | А В А□ В<br>0 0 0<br>0 1 1<br>1 0 1<br>1 1 1 | А В А→В<br>0 0 1<br>0 1 1<br>1 0 0<br>1 1 1 | А В А↔В<br>0 0 1<br>0 1 0<br>1 0 0<br>1 1 1 |

## Конспект занятия 3 по теме:
## *«Формулы математической логики»*

*Основная цель:* познакомить учащихся с понятием «формула» в математической логике; формировать умения определять истинностные значения формул алгебры высказываний.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* представление о формуле в математической логике; знание основных типов формул; умение построения таблиц истинности для различных формул алгебры высказываний.

*Метапредметные:* владение языком математической логики; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся, умение слушать собеседника при работе в паре.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач.

*Этапы занятия:*

1. Теоретическая часть.
2. Работа в парах.
3. Постановка домашнего задания. Подведение итогов.

1. С помощью логических операций, рассмотренных на предыдущем занятии, из простейших высказываний можно строить

высказывания более сложные.

Например, из высказываний A: "*Саратов находится на берегу Невы*"; B: *"Все люди смертны";* C: *"А.С.Пушкин — великий русский математик"* можно построить такое высказывание: "*Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то А.С. Пушкин — великий русский математик*". Построенное высказывание символически записывается так: $(A \wedge B) \rightarrow C$

Конечно, оно звучит несколько странно, поскольку соединяет в себе столь разнородные понятия, которые обычно существуют раздельно друг от друга. Но нас, еще раз подчеркну, интересует не содержание этого высказывания, а его логическое значение. Оно может быть определено, исходя из логических значений исходных высказываний A2,A3,A7 и той схемы, по которой из исходных высказываний построено сложное высказывание. Так как $A2=0$, $A3=1$, $A7=0$, находим $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7=(0 \wedge 1) \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=1$. Получается, что высказывание $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7$ истинно.

Итак, символическая запись $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7$, является своего рода *формулой.* В формулу вместо переменных можно подставлять конкретные высказывания, после чего вся формула будет превращаться в некоторое составное высказывание. Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, называют *высказывательными переменными*.

А как вы думаете, является ли отдельная взятая высказывательная переменная формулой?

Определение *формулы* алгебры высказываний:

1) каждая отдельно взятая высказывательная переменная есть формула алгебры высказываний;

2) если $F_1$, $F_2$ – формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний;

3) формулами алгебры высказываний являются только те выражения, которые могут быть получены в соответствии с пунктами 1) и 2)

*P, Q, R, S, X, Y, Z* или эти же буквы с индексами внизу - *высказывательные переменные* (используются для обозначения высказываний)

$\bar{}$, □ , □ , →, ↔- *логические операции* (используются для обозначения соответствующих союзов)

( , ) – *скобки* (используются для определения порядка выполнения логических операций)

$F_1$, $F_2$, $F_3$, ... - *формулы алгебры высказываний*

Порядок выполнения логических операций (если нет скобок):

- Отрицание
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Импликация
- Эквиваленция

Рассмотрим классификацию формул алгебры высказываний:

1) Формула алгебры высказываний называется *тождественно истинной (ТИ)*, если она принимает значение «истина» при любых значениях высказывательных переменных, входящих в нее.

Например:

| *A* | □*A* | *A*□□*A* |
|---|---|---|
| *1* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *1* |

2) Формула алгебры высказываний называется *тождественно ложной (ТЛ),* если она принимает значение «ложь» при любых значениях высказывательных переменных, входящих в нее.

Например:

| *A* | □*A* | *A*□□*A* |
|---|---|---|
| *1* | *0* | *0* |

| | | |
|---|---|---|
| *0* | *1* | *0* |

3) Формула алгебры высказываний называется *выполнимой*, если она принимает значение «истина» хотя бы при одном наборе значений высказывательных переменных, входящих в нее.

Например:

| *A* | *B* | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* |

Для определения истинностного значения формулы, удобно использовать таблицы истинности.

Используя определения логических операций составить таблицу истинности для формулы (A∧B)→(B□A).

В первых двух столбцах записывают всевозможные пары логических значений, которые могут принимать переменные.

| A | B | A∧B | B□A | (A∧B)→(B□A). |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Делая вывод, что можно сказать о формуле (A∧B)→(B□A)? Какой она является? (тождественно истинной)

2. Каждая пара учеников получает карточки с заданиями. На выполнение, которых отводится 20 минут и после выполнения — проверка (карточки с ответами).

*Карточка №1*

Составьте таблицы истинности и определите вид формул:

А) □ (X□Y) ↔ ( □ X□□ Y)

Б) (X→У) ↔ (У→X)

В) P□ (Q□ ( □ P□□ Q)

Г) ((A→B)□ B)→A

*Карточка №2*

Составьте таблицы истинности и определите вид формул:

А) □ (Х□ У)↔ ( □ Х□□ У)

Б) (Х→У) ↔ ( □ Х ↔ □ У)

В) □A→(A□ B)

Г) (P→Q) → ((P→□ Q) →□ P

Ответы для карточки №1:

А) □ (Х□Y) ↔ ( □ Х□□ Y) – формула не является тождественно истинной

| Х | У | □ Х | □ У | Х□Y | □ (Х□Y) | □ Х□□ Y | □ (Х□Y) ↔ ( □ Х□□ Y) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Б) (Х→У) ↔ (У→Х) – формула не является тождественно истинной

| Х | У | Х→У | У→Х | (Х→У) ↔ (У→Х) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

В) P□ (Q□ ( □ P□□ Q) – формула является ложной

| P | Q | □ P | □ Q | □ P□□ Q | Q□ ( □ P□□ Q) | P□ (Q□ ( □ P□□ Q) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Г) ((A→B)□ B)→A– формула является выполнимой

| A | B | A→B | (A→B)□ B | ((A→B)□ B)→A |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Ответы для карточки №2:

А) □ (Х□ У)↔ ( □ Х□ □ У) – формула не является тождественно истинной

| Х | У | □ Х | □ У | X□Y | □ (X□Y) | □ X□ □ Y | □ (X□Y) ↔ ( □ X□ □ Y) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Б) (Х→У) ↔ ( □ Х ↔ □ У) – не является тождественно истинной

| Х | У | □ Х | □ У | Х→У | □ Х ↔ □ У | (Х→У) ↔ ( □ Х ↔ □ У) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В) □A→(A□ B)– формула является выполнимой

| A | B | □ A | A□ B | □ A→(A□ B) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Г) (P→Q) → ((P→□ Q) →□ P – формула является тождественно истинной

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| P | Q | □ P | □ Q | P→Q | P→□ Q | (P→□ Q) →□ P | (P→Q) → ((P→□ Q) →□ P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Домашнее задание:

1. Выделите простые высказывания из следующих сложных высказываний и составьте логические формулы:

   a) *«Ты не готовишь борщ или щи, тогда и только тогда, когда ты не готовишь борщ и не готовишь щи».*

   b) *«Если солнце не планета, то луна – спутник, а Земля – звезда.*

2. Составить таблицу истинности и определить вид формулы: ((P→Q)→P)→Q

Ответы:

1.a) X – готовить борщ, У – готовить щи: □ (X□ У)↔ ( □ X□ □ У)

b) X – солнце планета, У – луна – спутник, Z – Земля – звезда: □ X→(Y□Z)

2. ((P→Q)→P)→Q – формула является выполнимой

| P | Q | P→Q | (P→Q)→P | ((P→Q)→P)→Q |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

## Конспект занятия 4 по теме:

## *«Логическое следствие»*

*Основная цель:* познакомить учащихся с понятием «логическое следствие» и методами его установления; формирование умений определять логическое следствие.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание определения понятия «логическое следствие»; умение приводить примеры логического следствия; знание основных свойств отношения «логическое следствие» (метод дедукции); знание основных логических правил вывода: закон контрапозиции и метод доказательства «от противного».

*Метапредметные:* владение языком математической логики; умение анализировать и обобщать изучаемые факты; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия
2. Теоретическая часть

1. На сегодняшнем занятии мы рассмотрим такое понятие как «логическое следствие», а так же вы узнаете, каким методом пользуется знаменитый сыщик Шерлок Холмс.

2. Одно из важнейших предназначений логики состоит в том, чтобы устанавливать, что из чего следует, т.е. устанавливать структуры высказываний, связанных отношением логического следования. Логическое следование относится к числу фундаментальных, исходных понятий логики, которую нередко характеризуют как науку о том, «что из чего следует». Для обозначения логического следования формулы G из формул $F_1$, $F_2$ ,…, $F_k$ используют следующее обозначение:

$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$

Формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется логическим следствием формул $F_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $F_2(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots, F_k(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, если она обращается в истинное высказывание при всяком наборе значений высказывательных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, при котором в истинное высказывание обращаются все формулы $F_1, F_2, ..., F_k$

$F_1, F_2, …, F_k \models G$ , где $F_1, F_2, …, F_k$ - посылки для логического следования G, а G – заключение или логическим следованием формул $F_1, F_2, …, F_k$.

Если в таблице истинности формул $F_1, F_2, ..., F_k, G$ в какой-то строке все формулы $F_1, F_2, ..., F_k$ принимают значение «истина» и в этой строке непременно формула $G$ принимает значение «истина», то это означает, что $G$ является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_k$. Иначе, не является логическим следствием. Другими словами, отличительной чертой логического следования является то, что *оно ведёт от истинных высказываний только к истинным.*

Из высказывания «Если натрий металл, он пластичен» логически вытекает высказывание «Если натрий не пластичен, он не металл», поскольку импликация, посылкой которой является первое высказывание, а следствием второе, представляет собой частный случай логического закона контрапозиции. (таблицы истинности для этих формул)

*Закон контрапозиции* – закон классической логики, утверждающий, что в том случае, если некая посылка А влечет некое следствие B, то отрицание этого следствия (то есть «не B») влечет отрицание этой посылки (то есть «не A»). На истинности закона контрапозиции основывается способ доказательства «от противного». Это такой вид доказательства, при котором доказательство некоторого суждения осуществляется через опровержение этого суждения.

Суть этого метода помогает понять загадка. Попробуйте её разгадать.

«Представьте себе страну, в которой приговорённому к казни предлагается выбрать одну из двух одинаковых на вид бумаг: на одной написано «смерть», на другой — «жизнь». Враги оклеветали одного жителя этой страны. И, чтобы у него не осталось никаких шансов спастись, сделали так, что на обороте обоих бумажек, из которых он должен выбрать одну, было написано «смерть». Друзья узнали об этом и сообщили осуждённому. Он попросил никому об этом не рассказывать. Вытащил одну из бумажек. И остался жить. Как ему это удалось?»

Осуждённый проглотил выбранную им бумажку. Чтобы установить, какой жребий ему выпал, судьи заглянули в оставшуюся бумажку. На ней было написано: «смерть». Это доказывало, что ему повезло, он вытащил бумажку, на которой было написано: «жизнь».

Решим следующую задачу, используя способ доказательства «от противного»:

Являются ли следующие рассуждения логически верными: «Если Джонс не встречал ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей».

Для этого введем логические переменные:

*A:* «Джонс не встречал ночью Смита»,

*B:* «Смит убийца»,

*C:* «Джонс лжет»,

*D:* «убийство состоялось после полуночи».

Имеем посылки $A\to(B\square C)$, $\neg B\to(A\square D)$, $D\to(B\square \neg C)$ и заключение $B$.

Предположим, что $t(A\to(B\square C))=1$, $t(\neg B\to(A\square D))=1$, $t(D\to(B\square \neg C))=1$, а $t(B)=0$.

$t(\neg B\to(A\square D))=1$ и $t(\neg B)=1 \Rightarrow t(A\square D)=1$, $t(A)=1$, $t(D)=1$

$t(A\to(B\square C))=1$ и $t(A)=1 \Rightarrow t(B\square C)=1$, т.к. $t(B)=0$, то $t(C)=1$

$t(D\to(B\square \neg C))=1$ и $t(D)=1 \Rightarrow t(B\square \neg C)=1$, т.к. $t(\neg C)=0$, то $t(B)=1$

Пришли к противоречию: $t(B)=0$, $t(B)=1$

Следовательно, предположение $t(B)=0$ неверно, а верно $t(B)=1$ и рассуждения логически правильны.

А знакомы ли вы с таким персонажем как Шерлок Холмсом? Видели ли вы как гениальный сыщик, ведет расследование и разгадывает тайны? Все его догадки и размышления основываются на сугубо фактах, из которых Шерлок строит логическую цепочку, а она приводит его к разгадке. Так вот метод, который использует Шерлок Холмс, называется дедуктивным. Понятие дедукция (лат. deductio – выведение) означает метод мышления, при котором частное положение логическим путём выводится из общего; цепь умозаключений (рассуждений), звенья которой связаны отношением логического следования.

Например: «Все металлы проводят ток. Золото — это металл. Значит, золото проводит ток».

**Конспект занятия 5 по теме:**

***«Необходимые и достаточные условия»***

*Основная цель:* познакомить учащихся с понятиями «необходимое и достаточное условие»; формировать умение определять необходимое и достаточное условие; развивать навыки составления теорем на основе различных логических структур.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание определений понятий «необходимое и достаточное условие»; умение определять необходимое и достаточное условие; умение формулировать математическое предложение (теорему) на основе различных логических структур.

*Метапредметные:* владение языком математической логики; навыки поиска и выделения необходимой информации; умение выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач*;* способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Теоретическая часть.
2. Решение практических заданий.
3. Подведение итогов.

1. Представьте жизненную ситуацию: «Что бы Ваня поехал в Москву достаточно иметь деньги на поезд». Верно ли это утверждение? (Нет, вместо «достаточно», надо «необходимо»)

«Достаточно ли, чтобы асфальт был мокрым, пошел дождь? (Да)

Если некоторое событие или факт не может иметь места без определенного условия, то это условие *необходимо* для осуществления указанного события или факта.

Если некоторое событие или факт обязательно имеет место при определенном условии, то наличие этого условия *достаточно* для осуществления этого события или факта.

С необходимыми и достаточными условиями вы постоянно встречаетесь в геометрии, но возможно вы просто не знаете, что они так называются. А именно, необходимое условие есть свойство, а достаточное условие есть признак.

Многие теоремы в математике формулируются по следующей схеме: «Для любого элемента $x \in X$ из предложения $p(x)$ следует предложение $q(x)$» или коротко: $(\forall x)\ p(x) \rightarrow q(x)$ *(1),* где знак следования (→) заменяет слова «откуда следует», «тогда», «если…, то…».

Часто запись (1) заменяют более короткой: $p(x) \rightarrow q(x)$. Предложение $p(x)$ называется условием теоремы, а предложение $q(x)$ – заключение теоремы.

Рассмотрим пример. В теореме Пифагора условие *p(x)* можно сформулировать так: «*x* – прямоугольный треугольник»; заключение *q(x)*: «В треугольнике *x* сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны». Используя терминологию логики, теоремы можно сформулировать, так: «Если некоторый треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны».

Если теорема $p(x)\rightarrow q(x)$ верна, то её условие *p(x)* называют *достаточным* условием для заключения *q(x)*, а заключение *q(x)* называют *необходимым* условием для *p(x).*

Например, теорема «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» верна, значит, её условие *p(x)* «Четырёхугольник *x* – ромб» является достаточным условием для заключения *q(x)* «Диагонали четырехугольника *x* взаимно перпендикулярны».

Таким образом, для того что бы диагонали четырехугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы этот четырехугольник был ромбом. Заключение этой теоремы *q(x)*, является необходимым для условия этой теоремы *p(x).* Можно сказать, что, для того что бы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны.

Если верна не только теорема $p(x)\rightarrow q(x)$, но и обратная ей $q(x)\rightarrow p(x)$, то *p(x)* является *необходимым и достаточным условием* для *q(x),* а *q(x)* является необходимым и достаточным условием для *p(x).*

Например, верным являются как теорема Пифагора, так и ей обратная, поэтому сформулировать её можно так: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов двух его сторон была квадрату третьей».

Так же слова «необходимо и достаточно», заменяют на «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «те и только те».

2. Выполним следующие задания:

   1. Выделить условие и заключение теоремы; сформулировать теорему, обратную данной:

1) Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3;

2) Каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов.

2. Заменить многоточие словам «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» таким образом, чтобы получено утверждение было истинным:

1) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2,…, чтобы числа были четными.

2) Для того чтобы число делилось на 9, …, что бы сумма его цифр делилась на 9.

3) Для того чтобы числа $x_1$ *и* $x_2$ были корнями уравнения $x^2 +px+q=0$, …, что бы $x_1 x_2 =q$.

Ответы:

1. 1) «Сумма цифр числа делится на 3» – условие, «Число делится на 3» - заключение. Обратная теорема: «Если число делится на 3, то сумма цифр числа делится на 3.

2)«Последовательность является арифметической прогрессией» - условие, «каждый член (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов» - заключение. Обратная теорема: «Если каждый член последовательности (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов, то это последовательность является арифметической прогрессией.

2. 1) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, достаточно, чтобы числа были четными.

2) Для того чтобы число делилось на 9,необходимо и достаточно, что бы сумма его цифр делилась на 9.

3) Для того чтобы числа $x_1$ *и* $x_2$ были корнями уравнения $x^2 +px+q=0$,необходимо, что бы $x_1 x_2 =q$.

**Конспект занятия 6 по теме:**

***«Логическая структура математических теорем»***

*Основная цель:* познакомить обучающихся с основными типами логических структур математических теорем; развивать навыки составления теорем на основе различных логических структур.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание основных типов логических структур математических теорем; умение составлять и формулировать прямую теорему, обратную, противоположную, противоположную обратной.

*Метапредметные:* владение языком математической логики; навыки поиска и выделения необходимой информации; умение выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия.
2. Теоретическая часть.
3. Решение практических заданий.
4. Подведение итогов.

1. На прошлом занятии, вы узнали, что такое «необходимое и достаточное условие», а так же что такое «условие» и «заключение» теоремы. Сегодня мы рассмотрим различные виды теорем, а так же вы сами попробуете их составить.

2. Теоремы $p(x) \to q(x)$ *и* $q(x) \to p(x)$ называются *взаимно обратными*

*теоремами.* Иногда одну их них называют прямой, а другую – обратной.

Из определения взаимно обратных теорем следует, что если в формулировке прямой теоремы поменять местами условие и заключение, то получится формулировка обратной теоремы. Например, теорему обратной теореме Пифагора, можно сформулировать так: « Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный».

Как вы думаете, какая теорема называется противоположной? Теоремы $p(x) \rightarrow q(x)$ и $\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)$ называются *взаимно противоположными.*

Например, для теоремы «Сумма (внутренних) углов треугольника равна 180» противоположной будет теорема, в которой вместо условия и заключения будут сформулированы их отрицания: «У многоугольника, не являющегося треугольников, сумма (внутренних) углов отлична от 180». Обе теоремы верны.

Бывают случаи, когда одна из взаимно противоположных теорем верна, а другая нет. Например, для теоремы о перпендикулярности диагоналей ромба противоположная ей теорема не верна.

Если теорема $q(x) \rightarrow p(x)$ обратная для теоремы $p(x) \rightarrow q(x)$, то теорема $\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)$ называется *противоположной обратной.*

Можно показать, что пары теорем: 1) прямая и противоположная обратной; 2) обратная и противоположная – всегда одновременно истинны или ложны.

Убедимся в этом, составив таблицу истинности.

Например, А-условие теоремы, В-заключение теоремы: А→В – прямая теорема, В→А – обратная теорема, ¬А→¬В – противоположная, ¬В→¬А – противоположная обратной.

| А | В | ¬А | ¬В | А→В | В→А | ¬А→¬В | ¬В→¬А |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Например:

*Прямая* теорема «Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке» истина.

*Обратная* ей теорема «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника пересекаются в одной точке, то этот многоугольник является треугольником» ложна (например, у ромба, являющегося четырехугольником, биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке).

*Противоположная* теорема «Если многоугольник не является треугольником, то биссектрисы его внутренних углов не пересекаются в одной точке» (контрпример – ромб).

Теорема *противоположная обратной* «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника не пересекаются в одной точке, то этот многоугольник не является треугольником», истинна.

Вспомним теорему Виета: Если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$ , то для них выполняются равенства $x_1+x_2=-p,\ x_2\cdot x_2=q$.

Как будет звучать обратная теорема Виета?

Если числа $x_1$ и $x_2$ таковы, $x_1+x_2=-p,\ x_2\cdot x_2=q$, то $x_1$ и $x_2$ являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Заметим, что при решении задач на уроках математики используется обратная теорема Виета.

Например, решим следующее уравнение $x^2-5x+6=0$.

Допустим, это уравнение имеет корни, а именно, $x_1$ и $x_2$ . Тогда по обратной теореме Виета одновременно должны выполняться равенства $\begin{cases} x_1\cdot x_2=6, \\ x_1+x_2=5. \end{cases}$. Обратим внимание, что произведение корней – положительное число. А значит, корни уравнения одного знака. А так как сумма корней также является положительным числом, делаем вывод, что оба корня уравнения – положительные. Вернемся снова к произведению корней.

Допустим, что корни уравнения – целые положительные числа. Тогда получить верное первое равенство можно только двумя способами (с точностью до порядка множителей): $1\cdot6=6$ или $2\cdot3=6$. Проверим для предложенных пар чисел выполнимость второго утверждения теоремы Виета: $1+6 \neq 5$, $2+3 =5$. Таким образом, числа 2 и 3 удовлетворяют обоим равенствам, а значит, и являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 3.

2. Выполним следующие задания:

1. Привести контрпример опровергающий утверждение:

1) В любой четырехугольник можно вписать окружность;

2) Для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;

3) Сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное;

4) В равнобедренном треугольнике один угол тупой.

2.Сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему противоположную обратной для данных теорем. Установите истинность каждой.

1) Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой.

2) Если суммы противолежащих углов четырехугольника равны по 180°, то около четырехугольника можно описать окружность.

3) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны.

Ответы:

1. 1) В прямоугольную трапецию или в ромб нельзя вписать окружность;

2) Например, треугольник со сторонами 2,3 и 4 ($2^2+3^2 \neq 4^2$) или равносторонний треугольник;

3) Например, $-2+3+4= 5$, 5 – число положительное;

4) Равнобедренный треугольник с углами при основании 45 градусов (два угла острых, один прямой);

2. 1) А – угол развернутый, В – обе стороны лежат на одной прямой.

*Прямая:* «Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой» - истинна.

*Обратная:* «Если обе стороны угла лежат на одной прямой, то угол называется развернутым» - истинна.

*Противоположная:* «Угол не является развернутым, если обе его стороны не лежат на одной прямой» - истинна.

*Противоположная обратной:* «Если обе стороны угла не лежат на одной, то угол не является развернутым» - истинна.

2) А – сумма противолежащих углов равна 180°, В – описать окружность.

*Прямая:* «Если суммы противолежащих углов четырехугольника равны по 180°, то около четырехугольника можно описать окружность» – истинна.

*Обратная: «*Сумма противолежащих углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°» - истинна.

*Противоположная:* «Если суммы противолежащих углов четырехугольника не равны 180°, то около четырехугольника нельзя описать окружность» - истина .

*Противоположная обратной: «*Если около четырехугольника нельзя описать окружность, то сумма его противолежащих углов не равна 180°» - истина.

3) А – две параллельные прямые пересечены секущей, В – накрест лежащие углы равны.

*Прямая:* «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны» - истинна.

*Обратная:* «Если при пересечении двух прямых секущей, образовавшиеся накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны» - истинна.

*Противоположная:* «Если две не параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы не равны» - истина.

*Противоположная обратной:* «Если при пересечении двух прямых секущей, образовавшиеся накрест лежащие углы не равны, то эти прямые не параллельны» - истина.

**Конспект занятия 7 по теме:**

***«Логические задачи и методы их решений»***

*Основная цель:* познакомить обучающихся с различными методами решения логических задач; формировать навыки и опыт решения логических задач.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание различных методов решения логических задач (метод рассуждений, метод таблиц, метод графов, метод решения с помощью языка математической логики); умение решать логические задачи различными методами.

*Метапредметные:* умение самостоятельно планировать пути достижения учебных целей; способность осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач; владение языком математической логики; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия
2. Теоретическая часть.
3. Дидактическая игра.
4. Подведение итогов.

Решали ли вы логические задачи? А чем они отличаются от обычных задач?

Логические задачи от обычных отличаются тем, что не требуют вычислений, а решаются с помощью рассуждений. Эти задачи носят занимательный характер, поэтому они привлекают даже тех учащихся, которые не очень любят математику. В то же время дух математики в них чувствуется ярче всего - половина решения любой математической задачи (а иногда и гораздо больше половины) состоит в том, чтобы как следует разобраться в условии, распутать все связи между участвующими объектами.

На сегодняшнем занятии, вы узнаете некоторые способы решения логических задач и научитесь применять их на практике.

Можно выделить несколько различных способов решения логических задач:

- Метод рассуждений;
- Метод таблиц;
- Метод графов;
- С помощью языка математической логики

Остановимся отдельно на каждом из выделенных методов, иллюстрируя их примерами решения конкретных задач.

- *Метод первый: Метод рассуждений*

Идея метода состоит в том, что мы проводим рассуждения, используя последовательно все условия задачи, и приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи. Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Например. Возраст мамы и дочки в сумме составляет 98 лет. Дочь родилась, когда маме было 22 года. Сколько лет маме и дочке? Решение: так как разница в их возрасте 22 года (именно в этом возрасте у мамы родилась дочь), то 98 – 22 =76 (лет). Это удвоенный возраст дочери, тогда 76 : 2 = 38(лет). Значит, матери 98 – 38 = 60 (лет).

- Метод второй: *Метод таблиц*

Основной прием, который используется при решении текстовых логических задач, заключается в построении таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или её ответ, но и в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи.

*Идея метода:* оформлять результаты логических рассуждений в виде таблицы.

*Преимущества метода:*

1)наглядность;

2)возможность контролировать процесс рассуждений;

3)возможность формализовать некоторые логические рассуждения.

Данным способом можно решить, известную многим загадку Эйнштейна: 5 разных человек в 5 разных домах разного цвета, курят 5 разных марок сигарет, выращивают 5 разных видов животных, пьют 5 разных видов напитков.

Вопрос:1) Кто выращивает рыбок?

2)Норвежец живет в первом доме.

3)Англичанин живет в красном доме.

4)Зеленый дом находится непосредственно слева от белого.

5)Датчанин пьет чай.

6)Тот, кто курит Rothmans, живет рядом с тем, кто выращивает кошек.

7)Тот, кто живет в желтом доме, курит Dunhill.

8)Немец курит Marlboro.

9)Тот, кто живет в центре, пьет молоко.

10)Сосед того, кто курит Rothmans, пьет воду.

11)Тот, кто курит Pall Mall, выращивает птиц.

12)Швед выращивает собак.

13)Норвежец живет рядом с синим домом.

14)Тот, кто выращивает лошадей, живет в синем доме.

15)Тот, кто курит Philip Morris, пьет пиво.

16)В зеленом доме пьют кофе.

Ответ:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Цвет дома | Жёлтый | Синий | Красный | Зеленый | Белый |
| Напиток | Вода | Чай | Молоко | Кофе | Пиво |
| Животное | Кошки | Лошади | Птицы | Рыбки | Собаки |
| Сигареты | Dunhill | Rothmans | Pall Mall | Marlboro | Philip Morris |
| Национальность | Норвежец | Датчанин | Англичанин | Немец | Швед |

- Метод четвертый: *метод графов.*

*Граф* - множество точек, изображенных на плоскости (листе бумаги, доске), некоторые пары из которых соединены отрезками. Точки называют вершинами графов, а отрезки - ребрами графов. Выделяя из словесных рассуждений главное - объекты и отношения между ними, графы представляют изучаемые факты в наглядной форме.

Примеры решения логических задач с использованием графов подкупают своей наглядностью и простотой, избавляют от лишних рассуждений, во многих случаях сокращают нагрузку на память. С одной стороны, графы позволяют проследить все логические возможности изучаемой ситуации, с другой, благодаря своей обозримости, помогают в ходе решения задачи классифицировать логические возможности, отбрасывать неподходящие случаи, не доводя до полного перебора всех случаев.

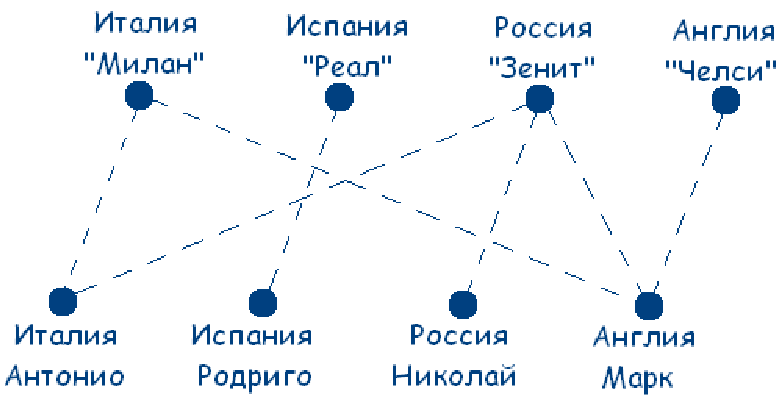
*Идея метода:* выявление и последовательное исключение логических возможностей, задаваемых условиями задачи.

Решим следующую задачу: Четыре футбольных команды: итальянская команда «Милан», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Марк. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд. Требуется определить тренера каждой команды, если известно:

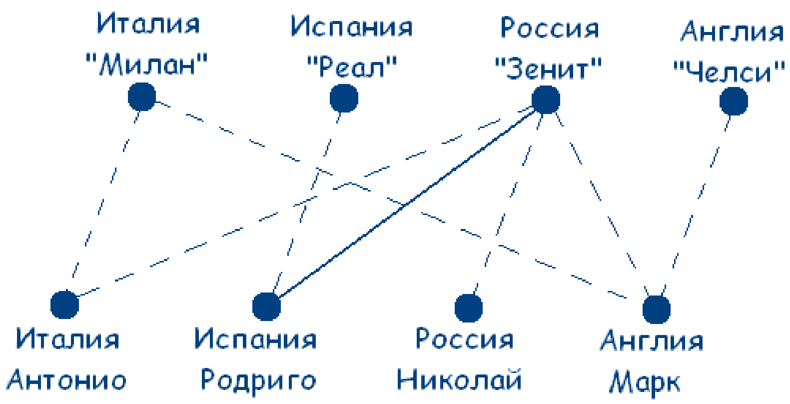
а) Зенит не тренируется у Марка и Антонио.

б) Милан обещал никогда не брать Марка главным тренером.

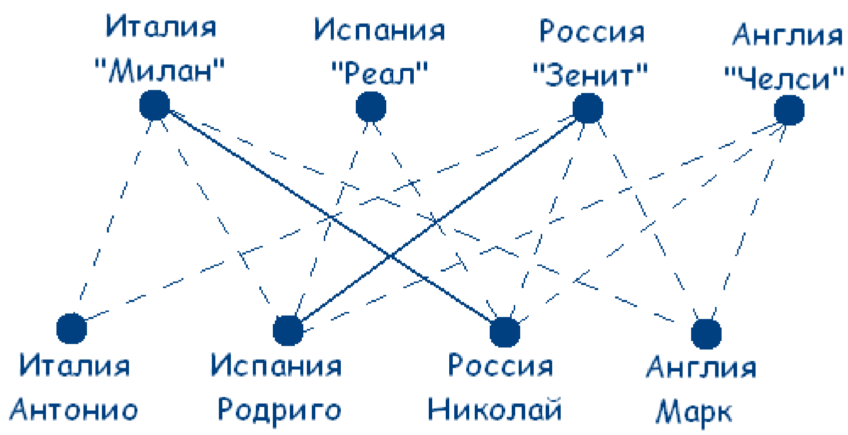
*Решение:* Исходя из условий задачи, получаем следующий граф.




Сразу можем сделать вывод, что российская команда «Зенит» тренируется у испанца Родриго. Чертеж примет вид:




Теперь получили, что итальянская команда «Милан» тренируется у русского Николая. Внесем и эти изменения в чертеж, получим:




Приходим к выводу, что английская команда «Челси» тренируется у итальянца Антонио и испанская команда «Реал» тренируется у англичанина Марка.

*Ответ:* Российская команда «Зенит» тренируется у испанца Родриго; итальянская команда «Милан» тренируется у русского Николая; английская команда «Челси» тренируется у итальянца Антонио; испанская команда «Реал» тренируется у англичанина Марка.

- Метод пятый: *С помощью языка математической логики.*

*Алгоритм применения метода:* требуется выделить элементарные высказывания, осуществить перевод на язык математической логики, составить формулы в соответствии с условием задачи, составить таблицу истинности и сделать вывод.

Для примера решим следующую задачу:

По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено:

1) если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;

2) если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Вопрос - виновен ли Иванов?

*Решение:* Рассмотрим простые высказывания:

A = «Иванов виновен», B = «Петров виновен», C = «Сидоров виновен».

Запишем на языке алгебры логики факты, установленные следствием:

$\neg A \vee B \to C$ и $\neg A \to \neg C$

Обозначим $F = (\neg A \vee B \to C) \wedge (\neg A \to \neg C)$ — единое логическое выражение для всех требований задачи. Оно истинно. Составим для него таблицу истинности:

| $A$ | $\neg A$ | $B$ | $C$ | $\neg C$ | $\neg A \vee B$ | $\neg A \vee B \to C$ | $\neg A \to \neg C$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Решить данную задачу — значит указать, при каких значениях A полученное сложное высказывание F истинно. Для этого необходимо проанализировать все строки таблицы истинности, где F = 1. И если хотя бы в одном из таких случаев A = 0 (Иванов не виновен), то у следствия недостаточно фактов для того, чтобы обвинить Иванова в преступлении.

Анализ таблицы показывает, что высказывание F истинно только в тех случаях, когда A истинно, т. е. Иванов в ограблении виновен.

*Ответ:* Иванов – виновен.

Решим эту задачу с помощью рассуждений.

Предположим, что Иванов не виновен в преступлении, тогда выполняется условия 1 и 2. По условию 2 получается, что Сидоров не виновен. Получается противоречие. Следовательно, Иванов виновен, а про остальных нельзя сказать ничего определенного.

Для дальнейшей работы, вам нужно будет разбиться на 2 команды. Каждой команде выдаются тексты с задачами. Задачи вы можете решать в произвольном порядке, любым из способов которые мы сегодня рассмотрели. За каждую правильно решенную и доступно изложенную задачу, команде засчитывается 5 баллов. В конце занятия подведем итоги.

Задачи для игры:

1) Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

*Решение:* Имеется три утверждения:

- ✓ Вадим изучает китайский;
- ✓ Сергей не изучает китайский;
- ✓ Михаил не изучает арабский.

Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

*Ответ:* Сергей изучает китайский язык, Михаил — японский, Вадим — арабский.

2) В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

- Смит – самый высокий
- Играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте
- Играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу
- Когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их
- Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

*Решение:* Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание. Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют. Из условия 4 следует, что Смит не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Браун не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Брауна - альт и кларнет. Занесем это в таблицу 1, а оставшиеся клетки столбцов "Альт" и "Кларнет" заполним нулями.

Таблица 1

| | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Смит | | | 0 | 0 | | 0 |
| Вессон | | | | | | |

Из таблицы 1 видно, что на трубе может играть только Вессон. Из условий 1 и 2 следует, что Смит не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Браун, ни Смит, то скрипачом является Вессон. Оба инструмента, на которых играет Вессон, теперь определены, поэтому остальные клетки строки "Вессон" можно заполнить нулями.

Таблица 2

| | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Смит | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| Вессон | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Из таблицы 2 видно, что играть на флейте и на гобое может только Смит. В результате получим таблицу 3.

Таблица 3

| | Скрипка | Флейта | Альт | Кларнет | Гобой | Труба |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Браун | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Смит | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Вессон | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Ответ:* Браун играет на альте и кларнете, Смит - на флейте и гобое, Вессон - на скрипке и трубе.

3) Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было у каждого мальчика в начале?

*Решение:*

Решаем задачу с конца с помощью таблицы

| Номер мальчика | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Число яблок в конце | 8 | 8 | 8 |
| Число яблок до передачи их третьим мальчиком | 8 : 2 = 4 | 8 : 2 = 4 | 8 + 8 + 4 = 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Число яблок до передачи их вторым мальчиком | 4 : 2 = 2 | 4 + 2 + 8 = 14 | 16 : 2 = 8 |
| Число яблок первоначально | 2 + 4 + 7 = 13 | 14 : 2 = 7 | 8 : 2 = 4 |

Таким образом, первоначально яблок у первого, второго и третьего мальчиков было соответственно 13, 7 и 4.

*Ответ:* 13 яблок, 7 яблок, 4 яблока

4) Однажды черт предложил бездельнику заработать. “Как только ты перейдешь через этот мост, – сказал он, – твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля”. Бездельник согласился и после третьего перехода остался без денег. Сколько денег у него было сначала?

*Решение:* Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 рубля, а до перехода третьего моста – 12 рублей. Тогда после перехода второго моста у бездельника было 12 + 24 = 36 (рублей), а до перехода второго моста – 36 : 2 = 18 (рублей). Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало 18 + 24 = 42 (рубля), а перед переходом первого моста – 42 : 2 = 21 (рубль). Таким образом, у бездельника сначала был 21 рубль.

*Ответ:* 21 рубль.

5)Из поврежденной книги выпала часть сшитых вместе листов. Номер первой выпавшей страницы - 143. Номер последней страницы записан теми же цифрами, но в ином порядке. Сколько страниц выпало из книги?

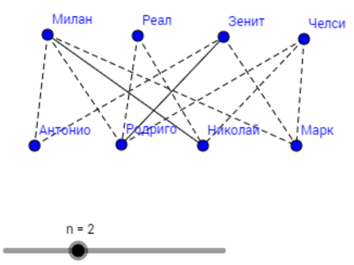
*Решение:* Первая выпавшая страница имеет нечетный номер. Следовательно, номер последней выпавшей страницы четный и равен 314 (единственное четное число, большее 143 и составленное из тех же цифр). В книге осталось 142 страницы, предшествующие выпавшим. Поэтому число выпавших страниц равно 314 - 142 = 172.

*Ответ:* 172.

В качестве итогового контроля в конце курса можно предложить учащимся пройти тест в компьютерной среде Geogebra.

Примеры заданий:

Вопрос 2.
Четыре футбольных команды: итальянская команда «Милан», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Марк. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд.
Требуется определить тренера каждой команды, если известно: а) Зенит не тренируется у Марка и Антонио. б) Милан обещал никогда не брать Марка главным тренером.




Варианты ответа

1. «Зенит» у Антонио, «Милан» у Марка, «Реал» у Николая, «Челси» у Родриго.

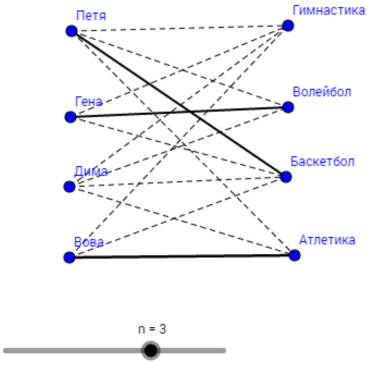
2. «Милан» у Родриго, «Зенит» у Марка, «Реал» у Антонио, «Челси» у Николая.

3. «Зенит» у Родриго; «Милан» у Николая; «Челси» у Антонио; «Реал» у Марка.

4.«Милан» у Антонио, «Зенит» у Марка, «Челси» у Николая, «Реал» у Родриго.

Рис. 2

Вопрос 3.
Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Петя, Дима и волейболист учатся в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто из мальчиков в какой секции занимается?




Варианты ответа

1.Петя – легкоатлет, Гена – гимнаст, Дима – волейболист, а Вова – баскетболист.
2. Петя – баскетболист, Гена – волейболист, Дима – гимнаст, а Вова – легкоатлет.
3.Петя– легкоатлет, Гена – баскетболист, Дима – гимнаст, а Вова – волейболист.
4. Петя – гимнаст, Гена – легкоатлет, Дима – волейболист, а Вова – баскетболист.

Рис. 3

## 2.3. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Для установления уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» у обучающихся 9 классов на базе МБОУ СОШ №150 г. Красноярска был проведен констатирующий этап эксперимента.

В эксперименте приняли участие учащиеся 9 класса в количестве 20 человек.

Для выявления уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» мы выделили следующие компоненты:

- когнитивный (система знаний, которая необходима для решений актуальных задач учебной деятельности, а так же определяет уровень интеллектуального развития);

- праксиологический (совокупность умений, навыков и способов деятельности обучающихся, и их применении в собственной учебной деятельности);

- аксиологический (осознание обучающимися ценности и значимости математики как науки)

На основе выделенных компонентов, а также для аналитической обработки результатов исследования и получения количественных показателей условно были выделены три уровня сформированности математической компетентности в области «Математическая логика»: низкий, средний и высокий.

Низкий уровень (пороговый) – знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач. Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие. Понимание необходимости изучения математической логики, но при этом отсутствие проявление интереса к логическим задачам.

Средний уровень (базовый) – знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решений задач. Решение типовых задач.

Умения применять методы решения логических задач. Понимание важности изучения математической логики, освоения способов и методов решения, проявление интереса к логическим задачам.

Высокий уровень (продвинутый) – знание понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач. Умение размышлять, строить самостоятельно алгоритм действий, уметь объяснять решение задачи. Понимание важности математической логики, освоение разнообразных способов действий.

Для выявления уровня сформированности математической компетентности в области «Математическая логика» учащимся было предложено три среза.

*Срез 1*

1. Если условие $A$: x>1; условие $B$: x>10; условие $C$: x>13; условие $D$: x>20, то

а) $C$ необходимо для $A$;

б) $C$ необходимо для $B$;

в) $D$ необходимо для $A$;

г) $B$ необходимо для $C$;

д) $D$ необходимо для $B$

2. Если условие $A$: x<0; условие $B$: x<2; условие $C$: x<20; условие $D$: x<30, то

а) $C$ достаточно для $A$;

б) $B$ достаточно для $D$;

в) $B$ достаточно для $A$;

г) $D$ достаточно для $C$;

д) $D$ достаточно для $A$.

3. Утверждение «*Если на небе тучи, то идет дождь»* имеет логическую структуру*:* $C \to D$. Определите структуру и установите соответствие для следующих утверждений:

1) Если идет дождь, то на небе тучи; *А) C↔D*

2) Если на небе нет туч, то дождь не идет; *Б) D→C*

3) Если дождь не идет, то на небе нет туч; *В) ¬D→¬C*

4) На небе есть тучи тогда и только тогда, когда идет дождь. *Г) ¬C→¬D*

4. Если $x=7$, то следующее высказывание истинно:

*а) x>0 и x=0;*

*б) x>0 или x=0;*

*в) неверно, что x<10;*

*г) x<10 и x>8; д) x>7 и x=7.*

5. Определите, какие, из следующих суждений истинны:

А) Все Митины одноклассники занимаются спортом. Значит, все спортсмены учатся в Митином классе.

Б) Никто из Митиного класса не играет в теннис. Значит, никто из теннисистов не учится в Митином классе.

В) Все числа, кратные 8, делятся на 4.Следовательно, все числа, делящиеся на 4, кратны 8.

Г) Все параллельные прямые - не пересекаются. Значит, две непересекающиеся прямые - параллельны.

*Срез 2*

Задача 1. Решите следующую задачу и объясните решение.

Я отпил 1/6 чашечки черного кофе и долил её молоком. Затем выпил 1/3 чашечки и снова долил её молоком. Потом я выпил пол чашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я выпил больше – кофе или молока?

Задача 2. Решите следующую задачу и объясните решение.

На международную конференцию приехали 10 делегатов, не понимающих языка друг друга. Какое минимальное число переводчиков потребуется для обслуживания конференции при условии, что каждый переводчик знает только два языка?

Задача 3. Решите следующую задачу и запишите ответ.

Ехали два крестьянина, и нашли три бочонка: один восьмиведёрный с квасом и два пустых – пятиведёрный и трехведёрный. Крестьяне решили поделить квас поровну тут же на месте с помощью этих трех бочонков. Как они разделили квас?

*Срез 3*

1. Согласны ли вы с утверждением: «Математику уже за тем учить следует, что она ум в порядок приводит»?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

2. Имеете ли вы опыт решения логических задач?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

3. Хотели бы вы познакомиться с различными методами решения логических задач?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

4. Как вы считаете, необходимо ли всем изучать математическую логику в школе?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

5. Используете ли вы законы логических умозаключений в повседневной жизни?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

Первый срез предполагает проверку когнитивного компонента, он включает в себя тестирование. Каждый правильный ответ оценивался в 5 баллов. Второй срез – праксиологический компонент, включает в себя 3 логические задачи разного уровня. Каждая решенная задача оценивалась в 5 баллов. Третий срез – аксиологический компонент. В этом срезе учащимся нужно было ответить на вопросы анкеты. Ответ «нет» оценивался в 2 балла, «скорее нет, чем да» - 3 балла, «скорее да, чем нет» - 4 балла, «да» - 5 баллов.

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента приведены в следующей таблице 1:

*Таблица 1*

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента

| *№ Ученика* | *Когнитивный компонент* | *Праксиологический компонент* | *Аксиологический компонент* | *Итого баллов* | *Уровень* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 15 | 18 | 43 | Средний |
| 2 | 15 | 10 | 17 | 42 | Средний |
| 3 | 10 | 10 | 15 | 35 | Средний |
| 4 | 10 | 15 | 16 | 41 | Средний |
| 5 | 15 | 5 | 20 | 40 | Средний |
| 6 | 20 | 10 | 17 | 45 | Средний |
| 7 | 15 | 10 | 12 | 37 | Средний |
| 8 | 5 | 15 | 10 | 30 | Низкий |
| 9 | 20 | 10 | 25 | 55 | Высокий |
| 10 | 10 | 5 | 20 | 35 | Средний |
| 11 | 10 | 10 | 10 | 30 | Низкий |
| 12 | 15 | 5 | 10 | 30 | Низкий |
| 13 | 10 | 5 | 10 | 25 | Низкий |
| 14 | 20 | 15 | 25 | 60 | Высокий |
| 15 | 5 | 10 | 19 | 39 | Средний |
| 16 | 10 | 10 | 10 | 30 | Низкий |
| 17 | 10 | 5 | 10 | 25 | Низкий |
| 18 | 15 | 10 | 20 | 45 | Средний |
| 19 | 10 | 10 | 10 | 30 | Низкий |
| 20 | 20 | 0 | 10 | 30 | Низкий |

*Обработка полученных данных*

Если сумма баллов 50-65(max) , можно считать, что уровень сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» высокий, если 35-49 баллов, то средний уровень, если менее 35,то низкий уровень.

На рис.1 представлена диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у обучающихся в области «Математическая логика» на констатирующем этапе педагогического эксперимента.

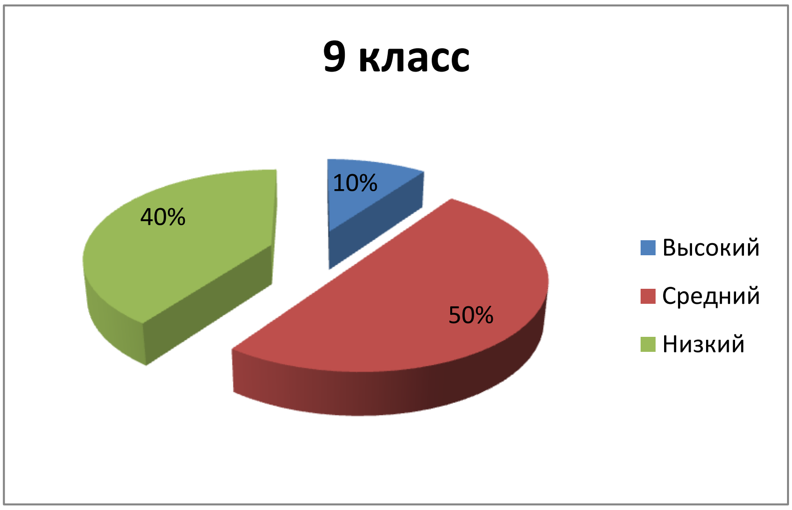



*Рис 1. Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 9 класса в области «Математическая логика» на констатирующем этапе эксперимента.*

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента показали, что у 40% учащихся 9 класса (ученики, которые набрали менее 35 баллов) низкий уровень сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика». У 10% принявших участие в эксперименте учащихся высокий уровень сформированности основ математической компетентности. У 50% учащихся – средний уровень сформированности математической компетентности.

Основываясь на результатах диагностики, можно сделать вывод о необходимости формирования у большинства учащихся 9 класса основ математической компетентности в области «Математическая логика».

В рамках формирующего этапа эксперимента на базе школы №150 города Красноярска, нами было организовано обучение учащихся 9 классов курсу по выбору «Математическая логика для школьников». В ходе педагогической практики было проведено 7 занятий по 2 часа в неделю. По наблюдениям, отметим следующее, что обучающиеся были активны на занятиях, ученикам очень понравились разные способы решения логических задач, а именно метод графов и метод таблиц, с помощью них они с легкостью решали задачи. Во время изучения курса ученики проявляли интерес к изучаемому материалу, задавали вопросы, проводили между собой дискуссии.

После целенаправленной работы по повышению уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика», был проведен завершающий этап педагогического эксперимента, с целью выявления динамики уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» у учащихся 9 класса. Учащимся было предложено три среза.

*Срез 1*

1. Если условие $A$: $x>3$; условие $B$: $x>16$; условие $C$: $x>22$; условие $D$: $x>19$, то

а) $C$ необходимо для $A$;

б) $C$ необходимо для $B$;

в) $D$ необходимо для $A$;

г) $B$ необходимо для $C$;

д) $D$ необходимо для $B$

2. Если условие $A$: $x<2$; условие $B$: $x<6$; условие $C$: $x<24$; условие $D$: $x<30$, то

а) $C$ достаточно для $A$;

б) $B$ достаточно для $D$;

в) $B$ достаточно для $A$;

г) $D$ достаточно для $C$;

д) $D$ достаточно для $A$.

3. Утверждение «*Если на небе солнце, то на улице день»* имеет логическую структуру*:* $A \to B$. Определите структуру и установите соответствие для следующих утверждений:

| | |
|---|---|
| 1) Если на улице день, то на небе солнце; | *А)* $A \leftrightarrow B$ |
| 2) Если на небе нет солнца, то на улице не день; | *Б)* $A \to B$ |
| | *В)* $\neg A \to \neg B$ |

3) Если на улице не день, то на небе нет солнца; *Г)* $\neg A \to \neg B$

4) На небе есть солнце тогда и только тогда, когда на улице день.

4.Если $x=9$, то следующее высказывание истинно:

*а)* $x>0$ *и* $x=0$*;*

*б)* $x>0$ *или* $x=0$*;*

*в) неверно, что* $x<10$*;*

*г)* $x<10$ *и* $x>8$*; д)* $x>9$ *и* $x=9$*.*

5. Определите, какие, из следующих суждений истинны:

А) Каждая планета Солнечной системы вращается вокруг своей оси.

Б) Если 12 делится на 6, то оно делится на 3.

В) Для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны.

Г) Найдется целое число $x$ удовлетворяющее соотношению $x^2=0$.

*Срез 2*

Задача 1. Решите следующую задачу и объясните решение.

Две стрелки насажены на одну ось и в некоторый момент времени совмещены. Одна из стрелок описывает круг за 12 часов, а друга за 16 часов. Через какое время стрелки совместятся опять?

Задача 2. Решите следующую задачу и объясните решение.

Из ведра, содержащего 5 литров воды, отливают 1 литр, а затем в ведро вливают 1 литр сока. Перемешав все это, из ведра отливают 1 литр смеси, затем в ведро опять вливают 1 литр сока. Опять перемешивают, отливают 1 литр смеси и вливают 1 литр сока. Сколько в ведре после этого останется воды?

Задача 3. Решите следующую задачу и запишите ответ.

Двое, Андрей и Федор, обмениваются деньгами. Сначала Андрей отдал часть своих денег Федору, потом Федор Андрею, затем опять Андрей Федору и наконец, Федор отдал Андрею деньги в последний раз, и после этой передачи у каждого стало по 160 рублей. Количество передаваемых денег всякий раз было равно количеству у получающего их. Сколько денег было у Андрея и Федора первоначально?

*Срез 3*

6. Согласны ли вы с утверждением: «Математику уже за тем учить следует, что она ум в порядок приводит»?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

7. Имеете ли вы опыт решения логических задач?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

8. Хотели бы вы познакомиться с различными методами решения логических задач?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

9. Как вы считаете, необходимо ли всем изучать математическую логику в школе?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

10. Используете ли вы законы логических умозаключений в повседневной жизни?

А) нет; Б) скорее нет, чем да; В) скорее да, чем нет; Г) да.

Результаты завершающего эксперимента приведем в следующей таблице 2:

*Таблица 2*

Результаты завершающего этапа педагогического эксперимента

| *№ Ученика* | *Когнитивный компонент* | *Праксиологический компонент* | *Аксиологический компонент* | *Итого Баллов* | *Уровень* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 15 | 25 | 60 | Высокий |
| 2 | 20 | 15 | 17 | 52 | Высокий |
| 3 | 15 | 15 | 25 | 55 | Высокий |
| 4 | 20 | 10 | 22 | 52 | Высокий |
| 5 | 15 | 15 | 20 | 50 | Высокий |
| 6 | 20 | 15 | 15 | 50 | Высокий |
| 7 | 15 | 15 | 12 | 42 | Средний |
| 8 | 15 | 15 | 17 | 47 | Средний |
| 9 | 20 | 15 | 25 | 60 | Высокий |
| 10 | 15 | 10 | 20 | 45 | Средний |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 20 | 15 | 16 | 51 | Высокий |
| 12 | 20 | 10 | 14 | 44 | Средний |
| 13 | 15 | 10 | 15 | 40 | Средний |
| 14 | 20 | 15 | 25 | 60 | Высокий |
| 15 | 10 | 10 | 20 | 40 | Средний |
| 16 | 15 | 10 | 10 | 35 | Средний |
| 17 | 10 | 10 | 15 | 35 | Средний |
| 18 | 20 | 10 | 20 | 50 | Высокий |
| 19 | 15 | 5 | 10 | 30 | Низкий |
| 20 | 20 | 5 | 10 | 35 | Средний |

Анализ срезов показал некоторое повышение у учащихся уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика». Улучшилось качество выполнения заданий, для решения которых, обучающиеся использовали знания, полученные в ходе изучения курса по выбору «Математическая логика для школьников».

На рис.2 представлена диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у обучающихся 9 классов в области «Математическая логика» на завершающем этапе педагогического эксперимента.


*Рис 2. Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» на завершающем этапе эксперимента.*

На рис. 3 представлена динамика сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» у учащихся 9 класса.

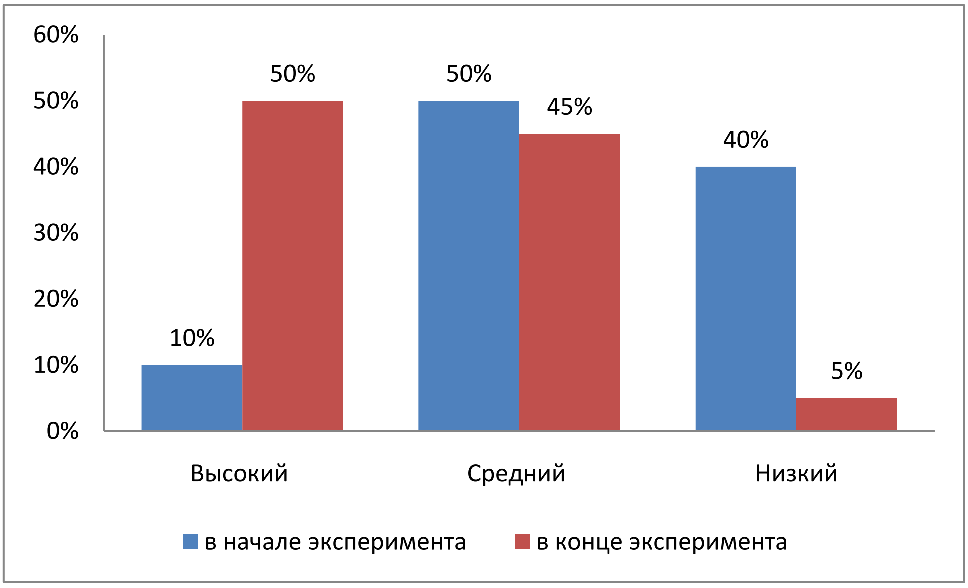



*Рис 3. Динамика сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» у учащихся 9 класса.*

Сравнивая результаты проведенных экспериментов – констатирующего и завершающего – можно сделать вывод, что разработанный нами курс по выбору «Математическая логика для школьников» позволяет повысить уровень сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика».

Результаты эксперимента и наблюдений позволяют сказать, что после изучения курса по выбору «Математическая логика для школьников», учащиеся не только научились использовать элементы математической логики и различные методы решения логических задач, но и стали более уверенными при аргументировании своих мыслей, значительно повысился познавательный интерес к вопросам математической логики.

## Заключение

В ходе проведенного исследования, проанализировав литературу, опыт учителей и результаты диагностики мы пришли к выводу: что необходимо формировать у учащихся основы математической компетентности в области «Математическая логика».

Под математической компетенцией мы понимаем способность структурировать данные (ситуацию), выделять математические отношения, создавать математическую модель ситуации, анализировать и преобразовывать ее, интерпретировать полученные результаты.

Для удобства диагностики уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся в области «Математическая логика» условно выделили три уровня сформированности математической компетентности: низкий, средний, высокий.

Нами был разработан курс по выбору для обучающихся 9 классов «Математическая логика для школьников», рассчитанный на 16 часов (2 часа в неделю).

На базе школы №150 города Красноярска, были проведены диагностирующий, формирующий и констатирующий этапы эксперимента. Результаты констатирующего этапа эксперимента свидетельствую о повышении уровня математической компетентности в области «Математическая логика» после изучения курса по выбору «Математическая логика для школьников».

Можно сделать вывод, что разработанный нами курс по выбору «Математическая логика для школьников» способствует повышению уровня сформированности основ математической компетентности в области «Математическая логика» у обучающихся 9 классов в процессе предпрофильного обучения математике.

**Список используемой литературы**

1. Алимов Ш.А. Алгебра. 9 класс. 17-е изд. - М.: 2012. - 287 с.

2. Богомолова О.Б. Логические задачи. 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277с. :ил.

3. Болотов В.А., Сериков В.В. Компетентностная модель: от идеи к образовательной программе // Педагогика. 2003. №10. С. 8–14.

4. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. Математика.5 класс. 31-е изд.,стер. - М: 2013. - 280с.

5. Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. и др. Алгебра. 9 класс. С углубленным изучением математики. 7-е изд. - М.: 2006. - 368 с.

6. Голунова А.А. Обучение математике в профильных классах: учеб. -метод. пособие / А.А. Голунова. – 2-е изд., стер. – М .: ФЛИНТА, 2014. – 204 С.

7. Гончарова О. С. Развитие логического мышления на уроках математики в начальных классах // Молодой ученый. — 2012. — №10. — С. 329-331.

8. Делор Ж. Образование: сокрытое сокровище // Основные положения Доклада Международной комиссии по образованию XXI века. М.: UNESCO, 1996.

9. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. 2-е изд., перераб. - М.: 2011; Ч.1 - 176с, Ч.2 - 240с.

10. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. 2-е изд., перераб. - М.: 2010; Ч.1 - 1112с, Ч.2 - 128с., Ч.3 - 176с.

11. Елифантьева С.С. Технология изучения элементов математической логики в основной школе: Дис… канд. пед. наук. ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, Ярославль, 2006.

12. Жуковская Е.П. Дидактические аспекты организации факультативов [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://festival.1september.ru. – (Дата обращения: 4.02.17).

13. Зарипова Р.М. Формирование ключевых компетенций у школьников на уроках математики.//Практика и тенденции социального партнерства в системе школа – СПО - ВУЗ: материалы VI Республиканской научно-методической конференции: в 2 ч. Ч. II; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань, 2013 г. - С.175-178.

14. Зарукина Е. В. Активные методы обучения: рекомендации по разработке и применению: учеб.-метод. пособие / Е. В. Зарукина, Н. А. Логинова, М. М. Новик. СПб.: СПбГИЭУ, 2010. – 59 с.

15. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. № 5. С. 34–42.

16. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие; Краснояр. гос. пед. ун-т им В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015. – 168с.

17. Коджаспирова Г.М., Коджаспиров А.Ю. Педагогический словарь: Для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 176 с.

18. Козлова С.А.. Математика. 5 кл.: учеб. для организации, осуществляющих образовательную деятельность. В 2 ч./ Козлова С.А., Рубин А.Г. –Изд. 2-е. – М.: Баласс, 2015. – 208 с.: ил. ( Образовательная система «Школа 2100»).

19. Козлова С.А.. Математика. 6 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений.: в 2-х частях./ Козлова С.А., Рубин А.Г. –Изд. 2-е. – М.: Баласс, 2013. – 208 с.: ил. ( Образовательная система «Школа 2100»).

20. Лысогорова Л.В. Педагогически условия развития математических способностей младших школьников [Текст]./ Лысогорова Л.В. // Сибирский педагогический журнал. -2007.-№9.- С.228-233.

21. Муравин Г.К, Муравина О.В. Математика. 5 класс. 3-е изд., стер. - М.: 2014. - 320с.

22. Муравин Г.К, Муравина О.В. Математика. 6 класс. 2-е изд., стер. - М.: 2014. - 320 с.

23. Ожегов, С.И. Словарь русского языка: ок. 53000 слов / С.И. Ожегов; под общ. ред проф. Л.И. Скворцова. – 24-е изд., испр. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство Мир и образование», 2007. – 640 с.

24. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA-2006 [Электронный ресурс]: Центр оценки качества образования ИСМО РАО. Руководитель работы - Ковалева Г.С.- URL: http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/351/60351/30272?p_page=10 (Дата обращения: 27.02.16)

25. Платонова Е.Н., Буслова Н.С. Организация факультативного курса «путешествие в историю информатики» для учащихся школы: материалы VI Международной студенческой электронной научной конференции "Студенческий научный форум 2014": Тобольская гос. соц.-пед. ак. им. Д.И.Менделеева.- Тобольск, 2014.

26. Предпрофильная подготовка учащихся: Разработка и экспертиза курсов по выбору. Структура и содержание портфолио (методические рекомендации). – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2006. – 84 с.

27. Примерная основная образовательная программа основного общего образования: одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. №1/15)

28. Тойбекова Б.А., Торыбаева Ж.З. Особенности организации факультативных занятий в контексте приобщения учащихся к полиязычию: материалы международной научно-практической конференции «Гуманитарные и естественные науки в стратегическом развитии современного образовательного учреждения»: Институт мировой экономики и финансов.- Астрахань, 2016.

29. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Комплексное методическое портфолио как средство мониторинга формирования методических

компетенций будущих учителей математики // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №5 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/06PVN515.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06PVN515

30. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утвержден приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897)

31. Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования // Народное образование. – 2003. - №2. – С.58-64.

32. Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Ученик в обновляющейся школе. Сборник научных трудов.— М.: ИОСО РАО, 2002. – С. 135-157.

33. Шкерина Л.В., Багачук А.В., Кейв М.А., Шашкина М.Б. Теоретические основы и технологии измерения и оценивания профессиональных компетенций студентов – будущих учителей математики: монография. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2013.-280с.

34. Штеймарк О.В. Педагогические условия эффективного использования компьютерных технологий в педагогическом процессе. // Научный потенциал: работы молодых ученых. – 2008.-№1.- С.211-215.