МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П. АСТАФЬЕВА
Институт математики, физики и информатики
Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания

ЖАРКОВА ОЛЬГА АНАТОЛЬЕВНА

Магистерская диссертация

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ GEOGEBRA В РАМКАХ ПРОФИЛЬНОГО ОБУЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

Направление: 44 04 01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Информационные технологии в математическом образовании

Допущен к защите

Заведующий кафедрой
Майер В.Р., д.пед.н., проф., зав. каф. АГиМП

_______________________ (подпись)

Руководитель магистерской программы
Майер В.Р.,д.пед.н., проф., зав. каф. АГиМП

_______________________ (подпись)

Научный руководитель
Ларин С.В., к.ф.-м.н., проф. каф. АГиМП

_______________________ (подпись)

Обучающийся: Жаркова О. А.

_______________________ (подпись)

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Диссертационное исследование содержит 99 страницы, стоит из введения, двух глав, заключения, приложения на CD-диске и полностью соответствует направлению образовательной программы. Библиографический список содержит 59 названий. В диссертации представлена авторская методическая система применения компьютерной анимации при решении задач с параметрами в программной среде GeoGebra. Цель данного исследования состоит в том, чтобы разработать методическую систему обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra. Научная новизна исследования: Обоснована целесообразность использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении решению задач с параметрами в рамках профильного обучения школьников. Разработана методика обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Теоретическая значимость исследования заключается в описании дидактических условий использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в обучении решению задач с параметрами. Практическая значимость исследования заключается в разработке авторской методики обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra

В свете требований ФГОС в настоящее время остро стоит вопрос об использовании компьютерных технологий в обучении математике. В этой связи выполненное исследование представляется новым и актуальным. Практическую ценность представляют отдельные фрагменты исследования, посвященные изложению конкретного учебного материала в сопровождении анимационных рисунков. Приложение, представленное на CD-диске, содержит файлы с анимационными рисунками по избранной теме, созданные с использованием компьютерной программы GeoGebra.

The dissertation research contains 93 pages, it comes from introduction, two chapters, conclusion, application on CD-ROM and completely corresponds to the direction of the educational program. The bibliography contains 59 titles. The author presents the author's methodical application of computer animation for solving problems with parameters in the GeoGebra software environment. The purpose of this study is to develop a methodological system for learning to solve problems with parameters using the animated capabilities of the GeoGebra environment. Scientific novelty of the research: The expediency of using the animation capabilities of the GeoGebra computer system in teaching the solution of problems with parameters within the framework of profile education of schoolchildren is substantiated. The method of teaching problems with parameters using the animation capabilities of the GeoGebra computer environment has been developed.

The theoretical significance of the study is to describe the di-dactic conditions for using the animation capabilities of the GeoGebra computer environment in teaching problems with parameters. Practical significance of the research is the development of the author's method of teaching problem-solving with parameters using the animation capabilities of the computer system GeoGebra

In the light of the requirements of the GEF, the question of using computer technology in teaching mathematics is currently acute. In this regard, the research performed is new and relevant. Practical value is represented by separate fragments of the research, devoted to the presentation of a specific educational material in the accompaniment of animated drawings. The application presented on the CD-ROM contains files with animated drawings on a selected topic, created using the computer program GeoGebra.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение..6

Глава 1. Методическая система обучения решению задач с параметрами……………………………………………………………………..…12

1.1. Глоссарий……………………………………………………12

1.2. Основные типы и способы решения задач с параметрами……....16

1.3. Анализ современных учебников алгебры и начал математического анализа, дополнительных пособий по теме «Задачи с параметром» ………19

1.4.Методические аспекты обучения решению задач с параметром….25

Глава 2. Методическая система обучения решению задач с параметрами на базе анимационно-геометрического моделирования математических объектов в компьютерной среде GeoGebra……………………………………28

2.1. Компьютерная программа GeoGebra……………………………….28

2.2. Различные способы построения графиков функций………………29

2.3. Изучение преобразований графиков функций с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra………………………………31

2.4. Использование анимационных возможностей среды GeoGebra при решении задач с параметрами ………………………………………...……36

2.5. Составление и решение в среде GeoGebra однотипных задач по тригонометрии путем введения параметров…………………………………43

2.6. Цели и содержание обучения решению задач с параметрами …..60

2.7. Методы и средства обучения решению задач с параметрами с использованием анимационной среды GeoGebra……………………..…..60

2.8. Реализация методической системы………………………………..61

2.9. Элективный курс……………………………………………………62

Заключение……………………………………………………………….91

Библиографический список……………………………….............93

Приложение представлено на диске в виде анимационных файлов, составляющих дидактический материал к теме «Решение задач с параметрами»

Введение

Бурно развивающиеся информационные технологии все глубже проникают во все сферы образования. Решение задач мелом на доске – это классика, которая, казалось, будет жить всегда, пока существует ученик, школа и учитель, в последнее время стремительно изменяется. Образ учителя с кусочком мела в одной руке и тряпкой в другой уступает место новому облику учителя, оснащенного новыми средствами обучения, использующего новые информационные технологии в виде компьютерных программ, которые открывают уникальные дидактические возможности. Специализированные математические программы как средство информационно-коммуникационных технологий включают в себя мощные функции вычисления и построения, они помогают не просто раскрыть учебный математический материал, но и демонстрировать новые методы обучения, открывают новые возможности обучения математике. Особое внимание мы уделим анимационным возможностям специализированной компьютерной программы GeoGebra. Анимационная составляющая обучения математике является новым элементом современной дидактики. Этим и обусловлена актуальность данного исследования, связанная с необходимостью интенсифицировать учебный процесс по математике с опорой на чувственное, интуитивное восприятие математических понятий и утверждений.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования, утвержденный приказом Минобрнауки России от 17 апреля 2012 года, предъявляет к результатам обучения курса алгебры и начал математического анализа новые требования, связанные с овладением приемами использования компьютерных программ для поиска и иллюстрации решений уравнений и неравенств, их систем. Эти новые требования ставят перед методической наукой задачу оценки образовательных возможностей существующих программных продуктов специального назначения, определения их места в системе средств учебной математической деятельности, а также приёмов их использования в содержании обучения алгебре и началам математического анализа.

Одним из эффективных приёмов поиска решения уравнений, неравенств и их систем, по мнению многих методистов, является приём геометрических интерпретаций. Однако в практике обучения алгебре и началам математического анализа он имеет ограниченное применение, связанное с большими затратами учебного времени и технической сложностью построения геометрических интерпретаций алгебраических объектов. Решение этой проблемы мы видим в использовании анимационных возможностей интерактивной геометрической среды GeoGebra. Идейную основу этой среды составляет визуализация связей алгебры и геометрии (Geometry + alGebra = GeoGebra) .

К возможностям этой программы относится создание различных типов геометрических интерпретаций, которые позволяют использовать в процессе решения алгебраических задач такие методы, как функционально-графический, геометрический и метод геометрического места точек.

В данной работе все эти возможности GeoGebra будут проиллюстрированы конкретными примерами.

Как известно, Единый Государственный Экзамен (ЕГЭ), который сдают выпускники учебных заведений, является не только итоговой аттестацией, но и вступительным испытанием для поступления в вуз. В связи с этим требуется провести дифференциацию выпускников по уровню освоения математических знаний путем предоставления заданий разного уровня сложности таким образом, чтобы выпускники, не нацеленные на дальнейшее серьезное изучение математики, получили аттестат с оценкой по этой дисциплине, а другая группа выпускников – возможность поступления в вуз на факультет математического профиля.

Задачи с параметром относятся ко второй части заданий ЕГЭ. На экзаменах прошлых лет решаемость таких заданий не превышала 2% от всех испытуемых. Таким образом, включение задач этого типа в качестве объекта исследования представляется чрезвычайно актуальным.

С помощью задачи с параметром можно проверить знание основных разделов школьной математики, уровень логического и математического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности. Ведь, исследуя задачу с параметром, учащийся определяет логические связи и зависимость между компонентами задачи, причины изменения количества решений, ищет ключевые значения параметра.

Задачам с параметром либо уделяется небольшое количество часов в школьной программе, либо такие задачи не рассматриваются вовсе, поэтому большинство выпускников на ЕГЭ даже не приступают к решению задач с параметром, а немногие решающие часто допускают ошибки, так как у них недостаточно сформирован навык решения таких задач.

Поэтому знакомство с задачами с параметром учителю не следует проводить стихийно, рассчитывая обучить всем способам решения, например, за два года. Предполагаю, что изучение таких задач будет результативным сразу после прохождения темы «Уравнения» в 7 елассе. Уже в эту тему могут включаться параметры, как и в большинство последующих тем алгебры. Таким образом, для учащихся будет привычным делом исследовать задачи с параметром, а учителю контролировать знания по теме.

Преподавание алгебры не может обойтись без принципа наглядности. Мы реализуем этот принцип при решении уравнений и неравенств графическим методом, проводя схематическую запись условия задачи на движение, исследуя функцию на наибольшее и наименьшее значения. Процесс обучения становится рациональнее и результативнее при разумном использовании принципа наглядности с опорой на иллюстрации, схемы, таблицы. К этим, уже ставшим привычными, средствам визуализации мы добавляем анимационные модели на экране компьютера. Из этого арсенала средств визуализации учитель может выбрать наиболее подходящее для данной темы, для данного урока, для данного класса.

Современные стандарты образования требуют от учителя умения владеть компьютерными технологиями. Таким образом можно разнообразить процесс обучения новыми формами работы, новыми видами деятельности, повысить мотивацию учащихся и интерес к учебному предмету. Существует несколько относительно несложных компьютерных программ, которые могут помочь реализовать принцип наглядности на уроке. К ним относится компьютерная программа GeoGebra, которую мы используем.

Современная наглядность может быть представлена не только статическими иллюстрациям, но и анимированным изображением с интерактивными возможностями. В частности, такая динамическая наглядность может быть полезна при обучении решению задач с параметром графическим методом. При изменении контрольного значения параметра изменится расположение графика, его наклон, сжатие или растяжение вдоль оси.

Решение задачи с параметром носит исследовательский характер. Не существует единого верного алгоритма решения таких задач. Каждый класс похожих задач является уникальным, требующим своего специфического исследования.

Умение решать задачи с параметром повышает конкурентную способность выпускника при поступлении в вуз. Проблемой учителя становится необходимость разработки метода обучения решению задач с параметром, направленного на развитие математической культуры и исследовательских навыков учащихся, а также способствующего успешному прохождению итоговой аттестации.

Задачи с параметрами являются одной из наиболее трудных тем ЕГЭ, поэтому привлечение новых информационных технологий при обучении решению таких задач представляется актуальным.

Цель исследования: разработать методическую систему обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra.

Объект исследования: процесс обучения школьников решению задач с параметрами.

Предмет исследования: методика использование анимационных и вычислительных возможностей компьютерной среды GeoGebra в обучении решению задач с параметрами.

Задачи исследования

1) Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по обучению школьников решению задач с параметрами.

2) Описать роль, место и значение анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra в обучении математике.

3) Рассмотреть методические особенности обучения школьников решению задач с параметрами.

4) Представить специальную методику обучения школьников решению задач с параметрами с использованием компьютерной среды GeoGebra.

5) Разработать элективный курс обучения школьников решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Основная методическая проблема, решаемая в дипломной работе, состоит в следующем:

- в необходимости усиления роли и значения решения задач с параметрами в школьном курсе алгебры;
- в разработке новой методики обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей специализированной компьютерной среды GeoGebra.

Гипотеза: систематическое использование анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra позволяет облегчить решение задач с параметрами, способствует пониманию и овладению геометрическим методом решения таких задач.

С введением ФГОС изменяются структура и сущность результатов образовательной деятельности, содержание образовательных программ и технологии их реализации, методология, содержание и процедуры оценивания результатов освоения образовательных программ. Повышается значимость формирования условий реализации программ, в том числе создания образовательной инфраструктуры, изменяются требования к ним. «Должна быть спроектирована система управления инновационными процессами, обеспечивающая достижение нового качества образования» [ФГОС, 2012].

Глава 1. Методическая система обучения решению задач с параметрами.

1.1 Глоссарий

Следуя школьным учебникам, представим последовательно определения понятий, приводящих к понятию задачи с параметром. При этом мы введем параметр как переменную.

Понятие переменной возникает в связи с понятием функции. Определение понятия функции целесообразно связать с понятием выражения с переменной.

Пропедевтика понятия функции в школьной математике проводится, начиная с младших классов. Но систематическое изучение функций начинается с седьмого класса (см. [1], с. 41).

В основе определения функции в школе лежит понятие переменной. *Переменная* обозначается буквой, значения которой принадлежат некоторому множеству, и это множество называется *множеством значений* (или *областью определения*) переменной. Предложение «переменная x с областью значений (областью определения) X» записывается так: $x \in X$. Всякий элемент $a \in X$ называется *значением переменной* x. При этом запись $x = a$ означает: «значение переменной x равно a». В школе, как правило, X является числовым множеством, поэтому часто говорят: число x (см. [1], с. 9, упражнение 39). Иногда, называя переменную, подчеркивают ее смысловое значение, например, время t.

Само понятие «переменная» в школе не определяется. Более того, этого понятия нет в Математическом словаре [3]. Объяснение этому находим в БСЭ [4]:

ПЕРЕМЕННАЯ

переменное, одно из основных понятий математики и логики. Начиная с работ П. Ферма , Р. Декарта , И. Ньютона , Г. В. Лейбница и др. основоположников 'высшей' математики под П. понимали некоторую 'величину', которая может 'изменяться', принимая в процессе этого изменения различные 'значения'. Тем самым П. противопоставлялись 'постоянным' (или константам) - числам или каким-либо др. 'величинам', каждая из которых имеет единственное, вполне определённое значение (см. Переменные и постоянные величины) . По мере развития математики и в ходе её обоснования представления о 'процессах', 'изменении величин' и т. п. тщательно изгонялись из математического арсенала как 'внематематические', в результате чего П. стала пониматься как обозначение для произвольного элемента рассматриваемой предметной области (например, области натуральных чисел или действительных чисел), то есть как родовое имя всей этой области (в отличие от констант - 'собственных имён' для чисел или др. конкретных предметов рассматриваемой области). Этот пересмотр взглядов на понятие П. был тесно связан с перестройкой математики на базе множеств теории, завершившейся в конце 19 в.

Числовое выражение – это запись, составленная из чисел, с помощью арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления. Если выполнить все указанные в выражении действия, то полученное число называется *значением числового выражения*.

Если в числовом выражении некоторые числа заменить буквами, обозначающими переменные, то получим *выражение с переменными*. Если в выражении стоят одни буквы, то получаем *буквенное выражение*. Напомним, что каждая буква означает переменную. Кратко выражение с переменными записывается в виде $f(a,b,c,...,x)$. Здесь буква f обозначает порядок действий, правило нахождения выражения. Если вместо переменных подставить некоторые их значения и выполнить все указанные в выражении действия, то получим число, которое называется *значением выражения с переменными*. Если при вычислении значения выражения обнаруживается нуль в знаменателе, то говорят, что выражение не имеет смысла при данном наборе значений переменных. Например, выражение $\frac{ab}{c}$ не имеет смысла при $c = 0$ и любых a, b.

Таким образом, само выражение с переменной оказывается переменной (с областью определения, равной пересечению областей определения входящих в него переменных), Эта новая переменная $y = f(a,b,c,...,x)$ называется *зависимой переменной*. Если нас интересует зависимость переменной y от выделенной переменной x, то x называют независимой переменной и говорят, что зависимая переменная y является *функцией* от независимой переменной x. Остальные переменные называются *параметрами*. В этом случае говорят, что выражение явно задает функцию – зависимость зависимой переменной y от независимой переменной x. При этом можно выделить несколько независимых переменных и говорить о функциональной зависимости зависимой переменной y от выделенных независимых переменных.

Пусть дано некоторое выражение с переменными $h(a,b,c,...,x,y)$. Приравняем его к нулю: $h(a,b,c,...,x,y) = 0$. Пусть, находя отсюда переменную y, мы получаем $y = f(a,b,c,...,x)$. Это называют *представлением переменной y как функции от переменной x* (с параметрами). В этом случае говорят, что равенство $h(a,b,c,...,x,y) = 0$ задает неявно функцию y от x. Может оказаться, что из равенства $h(a,b,c,...,x,y) = 0$ очень трудно, или даже невозможно найти y, но известно, что при любом значении переменной $x = x_0$ существует и притом только одно значение переменной $y = y_0$, при котором равенство $h(a,b,c,...,x_0,y_0) = 0$ верно. В этом случае также говорят, что равенство $h(a,b,c,...,x,y) = 0$ *неявно* задает y как функцию от x. При этом остальные переменные являются параметрами.

Исходя из примеров явного и неявного заданий функции (или функциональной зависимости), дадим общее определение функции. Если каждому значению независимой переменной x ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной y, то такую зависимость называют *функциональной*, или *функцией*. Обозначая зависимость переменной y от переменной x через f, записывают: $y = f(x)$. Подчеркнем, что зависимость y от x может выражаться с помощью параметров, как это было в предыдущих примерах. В частности, f может быть выражением, содержащим независимую переменную x и параметры, то есть выражаться через x и параметры с помощью арифметических операций. Подчеркнем, что правило нахождения y по данному x может быть более сложным, чем выражение, содержащее переменную x и параметры.

Аналогично определяется функция от нескольких переменных. Переменная y называется *функцией от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждому набору значений переменных $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$ ставится в соответствие единственное значение переменной $y = y_0$.

Рассмотрим равенство с переменными $f(a,b,c,\ldots,x) = 0$. Если поставить задачу нахождения всех значений переменной x, то рассматриваемое равенство называется *уравнением с неизвестной* x. Остальные переменные при этом называются параметрами. Таким образом, получаем *уравнение с параметрами*. *Решить уравнение с параметрами – значит описать все значения неизвестной* x *в зависимости от значений параметров.* При этом ответ выглядит так: при таких-то значениях параметров x не существует, а при таких-то значениях вот так-то выражается через параметры.

Аналогично получаем *неравенство с параметрами* $f(a,b,c,\ldots,x) \le 0$.

Задачи, приводящие к решению уравнений с параметрами и неравенств с параметрами, называются *задачами с параметрами*. Типичная задача с параметром звучит так: при каких значениях параметра уравнение (неравенство) или система уравнений и неравенств обладает данным свойством? Например, имеет заданное количество решений.

Понятие параметра впервые рассматривается в школьном учебнике [2, с. 109]. Определение параметра не приводится, а рассматривается на примерах. Цитата: «Решить уравнение с параметром – это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней». На наш взгляд это определение нельзя признать удачным, по крайней мере, рабочим. Напутствие «Установление соответствия» оставляет в тени способ его установления. Наше определение выглядит более рабочим: *Решить уравнение с параметрами – значит описать все значения неизвестной x в зависимости от значений параметров.* Другими словами, выразить неизвестную x через параметры в зависимости от значений параметров, а также установить те значения параметров, при которых x не существует, то есть уравнение не имеет решения.

В Математической энциклопедии нет определения понятия «параметр». Вот что читаем в БСЭ [4]:

Параметр (от греч. parametrón — отмеривающий, соразмеряющий), величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой. Например, в декартовых прямоугольных координатах уравнением $(x—a)^2 + (y—b)^2 = 1$ определяется множество всех окружностей радиуса 1 на плоскости xOy, полагая, например, $a = 3$, $b = 4$, мы выделяем из этого множества вполне определённую окружность с центром (3, 4), следовательно, a и b суть П. окружности в рассматриваемом множестве.

1.2. Основные типы и способы решения задач с параметрами

Основные типы задач с параметрами

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение имеет решение для любого значения переменной из заданного промежутка; 2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

Наиболее массовый класс задач с параметром — задачи с одной неизвестной и одним параметром. Следующий пункт указывает основные способы решения задач именно этого класса.

<u>Основные способы (методы) решения задач с параметром</u>

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или на координатной плоскости (x; y), или на координатной плоскости (x; a).

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

<u>Плюсы и минусы графических методов в сравнении с аналитическими методами.</u>

Применение графических методов оправдано в случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или нахождения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

<u>Плюсы графических методов:</u>

- во-первых, построив графический образ, можно определить, как влияет на него и, соответственно, на решение изменение параметра;
- во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи;
- в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве решений, об их границах и т.д.

<u>Минусы графических методов:</u>

- графический метод, как правило, дает приближенный *числовой* ответ;
- при использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Требования к строгости должны определяться здравым

смыслом. Если результат, полученный графическим методом, вызывает сомнения, его необходимо подкрепить аналитически.

Перейдем теперь к демонстрации указанных способов решения задач с параметром на примерах линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений и неравенств с одной неизвестной и одним параметром.

1.3. Анализ современных учебников, дополнительных учебных пособий по алгебре и началам математического анализа, по теме «Задачи с параметром»

С темой «задачи с параметром» учащиеся встречаются, в основном, изучая углубленный курс математики. Данная тема актуальна для профильных классов

Задачи с параметрами могут присутствовать в учебниках общеобразовательной школы без выделения отдельной темой. Такие задачи идут параллельно с другими темами алгебры, они способны развивать глубину мышления и осмысленность изучения текущей темы. Таким образом, учитель сам может в качестве дополнения включать задачи с параметром в ход урока.

Чтобы понять, на каком уровне даются задачи с параметром в учебных заведениях, проанализируем типы задач с параметрами, представленные в учебниках по курсу алгебры и начал математического анализа для общеобразовательных и профильных классов.

1. Алгебра, углубленное изучение математики, 8 класс [6]

Авторы: Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло, Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, А.И. Кудрявцев.

Место темы в оглавлении: Глава VI. Квадратные уравнения. Системы нелинейных уравнений. 10. Уравнения и системы уравнений с параметрами

Анализ теории: В учебнике предлагается показать учащимся, что в течение изучения математики в средней школе они уже сталкивались с параметрами в записи общего вида уравнений: $ax+b=c$, $ax2+bx+c=0$ и другими, рассмотреть линейное уравнение, найти параметр a, при котором уравнение имеет решение и не имеет.

При прохождении темы «Линейное уравнение с одной переменной» ученики знакомятся с определением понятия «решение уравнений». По аналогии в учебнике рассмотрено, что значит решить уравнение с параметром. Таким образом, ученики, без особой теории понимают, к чему должны прийти в конце решения. В учебнике поясняется, как должен выглядеть ответ к задаче.

Анализ упражнений: Первичное закрепление отрабатывается на квадратных уравнениях. Для решения заданий требуется находить дискриминант, выписывать условие $D \geq 0$, при котором уравнение будет иметь корни. Таким образом, отрабатывается не столько способ решения уравнений с параметром, сколько отрабатывается умение решать квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным, и их исследование на количество корней.

Следующий тип упражнений – решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. Задача сводится к нахождению параметра, при котором система уравнений имеет одно решение, два решения или не имеет решений вовсе. Ученики умеют решать данные системы тремя способами: метод сложения, метод подстановки, графический метод.

2. Алгебра, углубленное изучение математики, 8 класс [7]

Авторы: Учебник – А.Г. Мордкович; задачник – Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский.

Место темы в оглавлении: Глава 6. Алгебраические уравнения. 39. Задачи с параметрами.

Анализ теории: Теория вводится после разбора двух несложных примеров квадратных уравнений путем исследования дискриминанта. В каждом примере есть свои замечания: второй способ решения, объяснение непривычного для учеников момента в записи решения.

В учебнике дается примечание, что параметр можно обозначить любой латинской строчной буквой, но более привычным является буква «*a*».

Дается определение уравнения с параметром, объясняется, в чем трудность решения этих уравнений.

Примеры 1, 2 – квадратное уравнение и уравнение, степень которого зависит от значения параметра. Вводятся до общей теории.

Решить уравнение $x^2-(2p-1)x+(p^2+p-2)=0$. Часть теории о задачах с параметром дается в самом решении, а не отдельным абзацем.

Решить уравнение $px^2+(1-p)x-1=0$. Это уравнение отличается от предыдущего тем, что сразу исследовать дискриминант нельзя, так как данное уравнение может быть не квадратным. Следует рассмотреть два случая, при которых меняется степень уравнения.

Пример 4 – линейное уравнение, содержащее модуль.

Сколько корней имеет уравнение $2|x-a|=x+1$?

Решать графическим методом рациональнее, так как не требуется находить сами корни уравнения. График уравнения, содержащего параметр, перемещается в системе координат. Это перемещение можно смоделировать в среде GeoGebra.

Пример 5 – уравнение, содержащее квадратный корень. $\sqrt{x-2}=2a-x$.

Решается двумя способами: преобразование выражения, затем графическая интерпретация (графический метод решения) и метод замены с последующим исследованием дискриминанта.

3. Алгебра и начала математического анализа, базовый и углубленный уровни, 11 класс [8]

Авторы: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.

Место темы в оглавлении: Глава 6. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств. 34. Задачи с параметрами.

Анализ теории: В теории учебника дается определение уравнения с параметром в общем виде (то же самое определение, что и в учебнике 8 класса). Объясняется, в чем трудность решения таких уравнений.

Задача изучения этой темы – дать некоторое представление учащимся о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 1. Решить относительно x:

А) уравнение $2a(a-2)x=a-2$;

Б) неравенство $2a(a-2)x>a-2$.

Рассмотрено каждое ключевое значение параметра.

Пример 2 . Решить уравнение $(a-1)x^2+2(2a+1)x+(4a+3)=0$.

– на первый взгляд уравнение кажется квадратным, но степень уравнения зависит от значения параметра *a*, также оно может быть линейным. Поэтому рассмотрены 2 случая, первая степень уравнения и вторая степень уравнения.

Исследован дискриминант на нахождение корня для случая, когда уравнение квадратное.

Пример 3 – уравнение, содержащее квадратный корень. Выполняется проверка найденных корней путем построения графиков двух функций.

Пример 4. При каких значениях параметра *a* корни уравнения

$2ax^2-2x-3a-2=0\,2ax$ меньше 1?

Это задание принципиально отличается от прошлых примеров. В его решении применяются новые методы, которые могли быть не изучены учащимся, а также свойства графика квадратичной функции.

Учащиеся имеют возможность самостоятельного или дополнительного изучения темы «Задачи с параметром». Для этого в их доступе различные пособия, лекции и практикумы. Рассмотрим некоторые дидактические материалы.

4. Пособие для школьников, абитуриентов и учителей. Математика. Элективные курсы. 8 – 11 классы [9].

Авторы: А.Х. Шахмейстер, научный редактор: А.В. Семенов

Анализ содержания: Содержание пособия разбито на 8 основных блоков. В каждом блоке есть практикум – разбор заданий автором учебника, тренировочная работа для учащихся и решение тренировочной работы. Данное пособие предполагает его использование учителями на элективных курсах или, как дополнение к урокам, школьниками при подготовке к выпускному экзамену и абитуриентами при поступлении в высшее учебное заведение. Автор пособия предлагает программу элективного курса для учащихся 8 – 11 классов, подготовленную заслуженным учителем РФ Е.Б. Лившицем. Программа рассчитана на 50 уроков, расписаны номера заданий для первичного закрепления, для повторения и контроля. В конце курса предлагаются зачетные карточки, задания которых есть в пособии.

Анализ теоретической составляющей пособия: Некоторые задания учащиеся могут решить без дополнительной теории, такие задания используют знания учащихся, полученные в традиционном курсе обучения математике. Теория, которая представлена в пособии, даётся в виде теорем кратко, наглядно, на доступном учащимся языке. Большой объем теории содержит тема «Исследование неравенств с параметром с начальными условиями». Эта тема очень важна, так как учащиеся, знающие все возможные случаи и условия их выполнения, в решении сразу будут пользоваться теорией, вместо ее выведения.

Анализ упражнений: В пособии большое количество заданий. Эти задания в оглавлении разбиты на основные типы: линейные уравнения с параметрами, квадратные уравнения с параметрами, исследование и решение систем линейных уравнений (решение проводится с помощью нахождения определителя), линейные неравенства с параметрами, исследование и решение неравенств второй степени с параметрами, исследование неравенств с параметром с начальными условиями, решение более сложных неравенств с параметрами.

5. Пособие по математике серии «ЕГЭ 2014». Задача С5. Задачи с параметром [4].

Авторы: С.А. Шестаков, А.Л. Семенов, И.В. Ященко.

Анализ содержания: Материал пособия разделён на 5 глав, по принципу «ключевой идеи». Такая классификация методически удобна, так как «ключевую идею» можно отработать на множестве задач, собранных в главу. Например, идеи, используемые в исследовании квадратного трёхчлена в задачах с параметром, применения свойств функций к решению уравнений и неравенств, идеи графической интерпретации.

Пособие содержит преимущественно упражнения для решения учащимися. Теоретический материал, поясняющий способ решения, идет до упражнений с разбором примеров.

Анализ теории: Теоретический материал написан на доступном научном языке, встречаются вопросы читателю, на которые сам автор отвечает следом. После объяснения темы теория представляется кратко в таблице, наглядно, что упрощает ее понимание и возможность использования.

Примеры разобраны подробно, но все упражнения учащимся придется выполнять самостоятельно без возможности проверки, в отличие от пособия под номером 4 данного перечисления.

Анализ упражнений: Упражнения аналогичны заданиям из ЕГЭ прошлых лет, поэтому их требуется большое количество для тренировки. В конце пособия есть задания для контроля, каждое из которых решается своим способом, рассмотренным в этом пособии. В процессе описания решения авторы подводят учащихся к пониманию, в чем заключается «ключевая идея».

Таким образом, многие учебники и учебные пособия рассматривают задачи с параметром, вводят определение уравнения и неравенства с параметром, предлагают типовые задачи. Целью изучения данной темы является знакомство школьника с таким типом задач и выявление основных принципов их решения. Изучение данной темы необходимо для подготовки к сдаче Единого Государственного Экзамена.

1.4.Методические аспекты обучения решению задач с параметром

В школьной математике прослеживаются различные содержательно-методические линии: числовая, функциональная, тождественных преобразований, алгоритмическая и др.

Многие из названных линий проходят через весь курс школьной математики, и впоследствии будут иметь продолжение в курсе высшей математики. Термином «содержательно-методическая линия» обучения обычно обозначают «систему примеров, задач, которые опираются на соответствующие понятия, определяющие линию, а также присущие ей методы решения» [5].

Можно заметить, что линия задач с параметром имеет продолжение в курсе высшей математики, являясь пропедевтикой содержательно методической линии функций многих переменных. Таким образом, учащиеся еще в школе неосознанно начинают изучать функции многих переменных на достаточно посильных для их уровня восприятия примерах.

Также стоит рассмотреть линию уравнений и неравенств, в которые может входить параметр. Учащиеся, изучая тот или иной вид уравнения (неравенства), приходят к основным способам его решения. Проводится отработка и систематизация знаний по данной линии. Для более глубокого ее освоения, рационально решать задачи с параметром теми же, недавно изученными способами, но выявляя при этом ключевые значения параметра, чтобы разделить семейство уравнений (неравенств) по типам решений.

Сформулируем некоторые принципы изучения задач с параметром в школьном курсе математики [5]:

1. Принцип консервативности (наследственности).

Каждая задача с параметром должна быть связана непосредственно с основным учебным материалом. Решение данных задач не должно предполагать новых неизвестных учащимся действий. Сами приемы и способы решения стандартны, а условие задачи (содержащее параметр) является новым.

2. Принцип от простого – к сложному.

Главная функция методики заключается в определении средств и методов, с помощью которых на базе имеющегося содержания реализуются основные цели обучения. Для достижения цели ставится задача: развитие математического теоретического мышления. Ставится вопрос о способах измерения уровня теоретического развития и методах повышения этого уровня. Одним из способов решения этого вопроса является обучение решению задач с параметром и анализ уровня компетенций учащихся при решении таких задач. Таким образом, решение задачи с параметром является одновременно и целью и средством обучения.

3. Принцип активизации учебной деятельности.

Учебную деятельность можно классифицировать по степени активности ученика: пассивная учебная деятельность или активная. Принцип активизации выводит на первые роли в учебном процессе задачу, а особенно задачу с параметром, как задачу исследовательского характера.

4. Принцип естественности.

Для формирования хорошего отношения учащихся к задачам с параметром требуется постепенное появление таких задач в учебном процессе. В частности, полезно акцентировать внимание учащихся на том, что происходит знакомство с уже известными математическими объектами только на более тонком уровне.

5. Принцип актуальности (значимости).

Важно показать значимость успешного решения задач с параметром, возможность использования или применения результатов в других научно-исследовательских работах.

6. Принцип перспективности.

Представление о том, что введение параметров в обычных задачах открывает перспективы перехода к качественно новым учебным вопросам: разработка и получение или аналогичных, или совершенно новых задачных ситуаций.

7. Принцип концентричности.

Решение задач с параметром должно постоянно опираться на ранее полученные результаты, методы и приемы. Только при таком изучении можно реализовать системный подход к решению данных задач.

8. Принцип активного усвоения.

В книге Мирошина В.В. процитировано высказывание математика и педагога Д. Пойя, сформулированное им в произведении «Математическое открытие»: «Лучший способ изучить что-либо - это открыть самому» [5]. Задачи с параметром являются прекрасным средством для воплощения этого принципа в обучении математике.

В начале 70-х годов прошлого столетия задачи с параметрами твердо перешли из разряда задач, являющихся обязательными, хотя бы в плане развития умения анализировать условие, в разряд «нестандартных», предлагаемых на вступительных экзаменах. Данные задачи встречаются на школьных олимпиадах, при внутреннем экзамене в учебное заведение, а также на ЕГЭ во второй части заданий, как задание повышенного уровня сложности.

Глава 2. Методическая система обучения решению задач с параметрами на базе анимационно-геометрического моделирования математических объектов в компьютерной среде GeoGebra

Исходя из материала, изложенного в главе 1, представим методическую систему обучения решению задач с параметрами анимационно-графическим методом с использованием компьютерной среды GeoGebra.

В соответствии с Монографией В.Р. Майера, Е.А. Семиной [23] под методической системой мы понимаем педагогическую структуру, компонентами которой являются цели, содержание, методы, формы и средства обучения. Все эти компоненты методической системы представлены ниже.

2.1. Компьютерная программа GeoGebra.

Возможности компьютерной поддержки учебного процесса определяются сегодня стремительным развитием информационных и коммуникационных технологий, проникновением их во все сферы жизни, в том числе и в сферу образования, и регламентируются требованиями государственного образовательного стандарта.

Одной из причин трудного усвоения математики является абстрактность этой науки. Задача учителя состоит в том, чтобы приблизить математику к жизни, сделать математические факты зримыми, а значит понятными. Одним из путей визуализации математики, внесения в нее движения является использование компьютерной среды Geogebra.

GeoGebra — бесплатная программа предоставляющая возможность создания динамических («живых») чертежей для использования на разных уровнях обучения геометрии, алгебре и другим смежным дисциплинам. Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java, переведена на 45 языков, в том числе полностью поддерживает русский язык

Программа обладает богатыми возможностями работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.).

В отличие от других программ для динамического манипулирования геометрическими объектами, идея GeoGebra заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления.

Можно создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, а также математическими функциями, а затем динамически изменять их. Кроме того, GeoGebra позволяет напрямую вводить уравнения и манипулировать координатами. Таким образом, можно легко изображать графики функций, работать со слайдерами для подбора необходимых параметров, искать производные, и использовать команды вроде корня и последовательности.

В нашей школе (школа №10 г. Красноярска) учащиеся знакомятся с программой GeoGebra в курсе информатики в рамках изучения темы «Моделирование», осваивая технологии построения динамических моделей, как на плоскости, так и в пространстве. Приобретенные навыки позволяют школьникам эффективно использовать данную среду в процессе обучения математике, как на уроках, так и дома, а также в проектной и исследовательской деятельности.

Рассмотрим приемы использования среды GeoGebra на конкретных примерах.

2.2. Различные способы построения графиков функций.

1. Построение графика функции с помощью «Строки ввода».

Пусть надо построить график функции $y = 3x^2 - 2x + 5$.

Построение. В «Строку ввода» записываем: y=3*x^2-2*x+5 (или f(x)=3*x^2-2*x+5) и нажимаем клавишу «Ввод». На экране появляется график данной функции.

2. Анимационное вычерчивание графика данной функции.

Построение. Сначала строим график функции с помощью «Строки ввода». Затем на оси абсцисс строим произвольную точку X, проводим через нее вертикаль и отмечаем точку F пересечения вертикали с графиком данной функции. Прячем (делаем невидимым) график данной функции, заставляем точку F оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем, как точка F, оставляя след, вычерчивает график данной функции. В зависимости от учебной ситуации это вычерчивание можно рассматривать дискретным, «точка за точкой», что соответствует действительному процессу вычерчивания, а можно рассматривать как «непрерывное» (воображаемо непрерывное). Для демонстрации «непрерывного» вычерчивания изменяем параметры анимации; делаем меньше шаг и скорость анимации.

3. Построение графика функции $y = 3x^2 - 2x + 5$ на базе геометрического моделирования операций.

Построение. На оси абсцисс строим точку X, изображающую число x, и проводим через нее вертикаль. Затем с помощью геометрических построений строим на оси ординат последовательно точки $F_1 = (0, x^2)$, $F_2 = (0, 3x^2)$, $F_3 = (0, -2x)$, $F_4 = (0, x^2 - 2x)$, $F_4 = (0, 5)$, $F_5 = (0, 3x^2 - 2x + 5)$. Через точку F_5 проводим горизонталь и отмечаем точку F пересечения горизонтали с вертикалью, проходящей через X. Делаем невидимыми вспомогательные точки и линии построения, заставляем точку F оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем «непрерывное» вычерчивание графика данной функции.

Другой, менее громоздкий, способ построения связан с представлением данной функции в виде $y = (3x - 2)x + 5$.

Построение. На оси абсцисс строим точку X, изображающую число x, и проводим через нее вертикаль. Строим прямую $y = 3x - 2$ и отмечаем точку A пересечения этой прямой с вертикалью, проходящей через точку X. Затем геометрически точку A умножаем на точку X и получаем точку

$B = (x, (3x-2)x)$. Наконец, к полученной точке B прибавляем точку $C = (0, 5)$ и получаем искомую точку $F = (x, (3x-2)x+5)$. Заставляем точку F оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем «непрерывное» вычерчивание графика данной функции.

2.3. Изучение преобразований графиков функций с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra.

При решении задач с параметрами часто приходится использовать преобразования графиков функций. По школьной программе эта тема изучается в 8 классе. Мы рассмотрим преобразования графика функции $y = f(x)$ в графики функций $y = k \cdot f(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x)+b$, $y = f(x+b)$, $y = |f(x)|$.

1. Построим виртуальный прибор, который по графику данной функции $y = f(x)$ вычерчивает график функции $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$.

Построение (рис. 1).

1) Для простоты строкой ввода строим график произвольной параболы $f(x)$. В процессе эксплуатации рисунка функцию $f(x)$ можно будет заменить на любую другую.

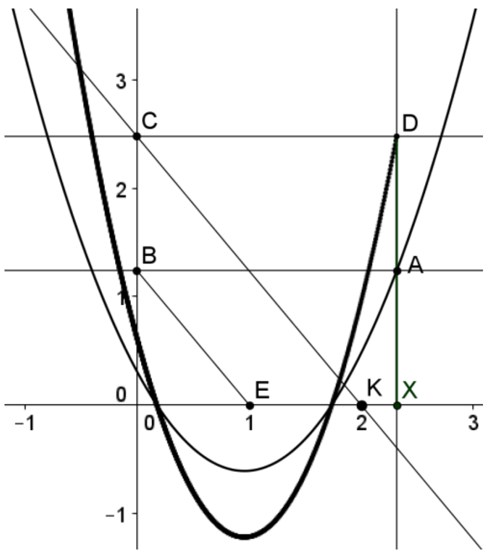


Рис. 1

2) На оси абсцисс отмечаем точку X и проводим через нее вертикальную прямую. Отмечаем точку A пересечения с графиком данной функции. Проектируем точку A на ось ординат и получаем точку B.

3) На оси абсцисс отмечаем точку $K(k,0)$ и строим произведение $kf(x)$. Для этого на оси абсцисс отмечаем единичную точку $E(1,0)$, соединяем отрезком точки B и E, а затем через точку K проводим прямую

параллельно отрезку BE. Отмечаем точку C пересечения построенной прямой с осью ординат.

4) Проектируем точку C на вертикальную прямую, проходящую через точку X, и получаем искомую точку $D(x, kf(x))$. Построение закончено.

Заставляем точку D оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем как точка D вычерчивает график функции $y = k \cdot f(x)$. Как было отмечено выше, функцию $y = f(x)$ можно заменить на другую, не изменяя построений. Поэтому построенный чертеж мы называем виртуальным прибором для вычерчивания графика функции $y = k \cdot f(x)$. Полезно поэкспериментировать, изменяя значение коэффициента k перемещением точки $K(k,0)$.

Замечаем, что $\overrightarrow{XD} = k \cdot \overrightarrow{XA}$ для любой точки $X(x,0)$. Следовательно, график функции $k \cdot f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ в результате преобразования, при котором всякая точка (x, y) графика $f(x)$ преобразуется в точку (x, ky). При $k > 1$ происходит растяжение графика функции $f(x)$ от оси абсцисс в k раз, при $0 < k < 1$ сжатие графика функции $f(x)$ к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз, а при $k = -1$ получаем отражение от оси абсцисс. В GeoGebra нет инструмента, который осуществлял бы в общем случае преобразование умножения функции $f(x)$ на число k. Но его можно создать.

В GeoGebra есть инструмент для преобразования гомотетии. Напомним, что *гомотетией с центром в точке T и коэффициентом гомотетии k* называется преобразование плоскости, при котором произвольная точка M преобразуется в точку M_1 так, что $\overrightarrow{TM_1} = k \cdot \overrightarrow{TM}$. Следовательно, преобразование умножения функции $f(x)$ на число k можно реализовать, как преобразование гомотетии с коэффициентом k и центром гомотетии в точке $X(x,0)$, которая постоянно перемещается по оси абсцисс. Для этого нажимаем кнопку «Гомотетия относительно точки», кликнем на точку A (объект), кликнем на точку X (центр гомотетии) и во всплывающей таблице укажем коэффициент гомотетии k. В результате получим точку A', которая совпадет с точкой D. Таким образом, построение точки D (пункты 3) и 4)) можно заменить указанным построением точки A'. Остается заставить точку A' оставлять след и задать анимацию точки X.

2. Построим виртуальный прибор, который по графику данной функции $y = f(x)$ вычерчивает график функции $y = f(kx)$, $k \neq 0$.

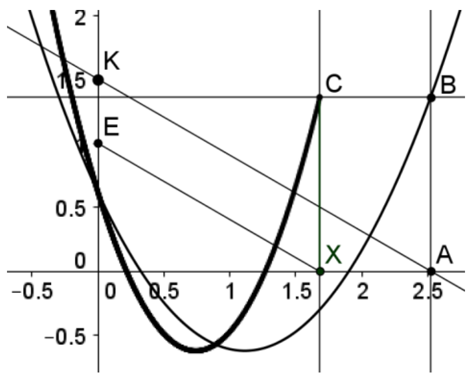


Рис. 2

Построение (рис. 2).

1) Для простоты строим график параболы $f(x)$.

2) На оси абсцисс отмечаем точку X и проводим через нее вертикальную прямую.

3) На оси ординат отмечаем точку $K(0,k)$ и строим произведение kx. Для этого на оси ординат отмечаем единичную точку $E(0,1)$, соединяем отрезком точки X и E, а затем через точку K проводим прямую параллельно отрезку XE. Отмечаем точку A пересечения построенной прямой с осью абсцисс.

4) Находим $f(kx)$. Для этого через точку A проводим вертикальную прямую и отмечаем точку B пересечения этой прямой с графиком данной функции.

5) Проектируем точку B на вертикальную прямую и получаем искомую точку $B(x, f(kx))$. Построение закончено.

Заставляем точку B оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем как точка B вычерчивает график функции $y = (kx)^2$. Первичную функцию $y = x^2$ можно заменить на другую. Поэтому построенный чертеж мы называем виртуальным прибором для вычерчивания графика функции $f(kx)$.

3. Построим виртуальный прибор для вычерчивания графика функции $y = f(x) + b$ по графику данной функции $y = f(x)$.

Построение (рис. 3).

1) Строим график функции $f(x) = x^2$.

2) На оси ординат строим точку $B(0,b)$.

3) На оси абсцисс отмечаем точку $X(x,0)$ и проводим через нее вертикальную прямую. Отмечаем точку $A(x, f(x))$ пересечения вертикальной прямой с графиком данной функции.

4) Строим искомую точку $C(x, f(x)+b)$. Для этого отмечаем начало координат O (как точку пересечения осей координат), строим отрезок OA и через точку B проводим прямую параллельно отрезку OA. Отмечаем искомую точку C пересечения построенной прямой с вертикальной прямой, проходящей через точку X. Построение закончено.

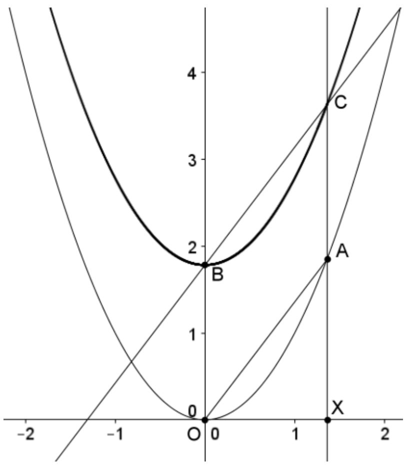


Рис. 3

Заставляем точку C оставлять след и задаем анимацию точки X. Полезно провести эксперименты, изменяя положение точки B, а также заменив функцию на новую. Например, параболу можно переместить в другое место.

Ранее мы уже показывали, что прибавление к точке (x,a) точки (x,b) равносильно параллельному переносу точки (x,a) на вектор $(0,b)$ (см. п. 1.1). Поэтому пункт 4) можно заменить на следующий.

$4'$) Отмечаем вектор $\overrightarrow{OB}$ и находим образ точки $A(x, f(x))$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OB}$. Получаем точку $C(x, f(x)+b)$. Таким образом, график функции $y = f(x) + b$ получается из графика данной функции $y = f(x)$ путем параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{OB}$.

4. Построим виртуальный прибор для вычерчивания графика функции $y = f(x+b)$.

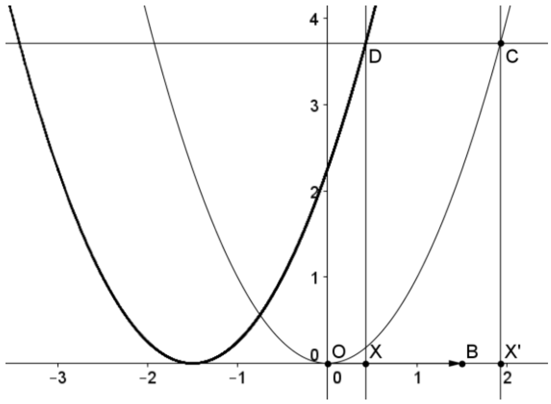


Рис. 4

Построение (рис. 4).

1) Строим график функции $f(x) = x^2$, начало координат O и точку $B(b,0)$.

2) На оси абсцисс отмечаем точку $X(x,0)$ и проводим через нее вертикальную прямую.

3) Строим число $x+b$. Для этого отмечаем вектор $\overrightarrow{OB}$ и находим образ точки X при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OB}$, получаем точку $X'(x+b,0)$.

4) Через точку X' проводим вертикальную прямую и отмечаем точку C пересечения этой прямой с графиком данной функции. Получаем точку $C(x+b, f(x+b))$.

5) Проектируем точку C на вертикальную прямую, проходящую через точку X, и получаем искомую точку $D(x, f(x+b))$. Построение закончено. Заставляем точку D оставлять след и задаем анимацию точки X.

Видим, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{X'X} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$. Следовательно, график функции $f(x+b)$ получается из графика данной функции $f(x)$ при параллельном переносе на вектор $-\overrightarrow{OB}$. Теперь можно поэкспериментировать с параметром b, передвигая точку B, а также заменяя функцию на новую. Прибор можно использовать при проверке периодичности функции. Например, в нашем приборе замените функцию $y = x^2$ на функцию $y = tgx$ и положите $b = \pi$. С помощью прибора установите, что $tgx = tg(x+\pi)$.

5. Построение графика функции $y = |f(x)|$.

Построение. Сначала «Строкой ввода» строим графики функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$. Подмечаем, что для построения графика функции $y = |f(x)|$ по графику функции $y = f(x)$ нужно части графика функции $y = f(x)$, расположенные под осью абсцисс, отразить от оси абсцисс.

2.4. Использование анимационных возможностей среды GeoGebra при решении задач с параметрами

I. Решение задач с параметром.

В последние годы задание С5 в вариантах ЕГЭ традиционно является задание с параметром. Эти задания типичны и для вступительных экзаменов в ВУЗ с высокими требованиями к математической подготовке абитуриентов.

При освоении функционально-графического метода решения задач с параметром высока эффективность применения среды Geogebra.

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 4\,|x - a^2| - 8x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

1) При $x \geq a^2$ $f(x) = x^2 - 4(x - a^2) – 8x$, или $f(x) = x^2 - 12x + 4a^2$, поэтому графиком функции является часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 6$.

2) При $x \leq a^2$ $f(x) = x^2 +4(x - a^2) – 8x$, или $f(x) = x^2 - 4x - 4a^2$, поэтому графиком функции является часть параболы с ветвями вверх и осью симметрии $x = 2$

3) Каждая из парабол имеет по одной точке минимума, и обе они проходят через точку $(a^2; f(a^2))$ поэтому вид графика функции $f(x)$ зависит от расположения точки $x = a^2$, относительно точек 2 и 6 (рис. 5)

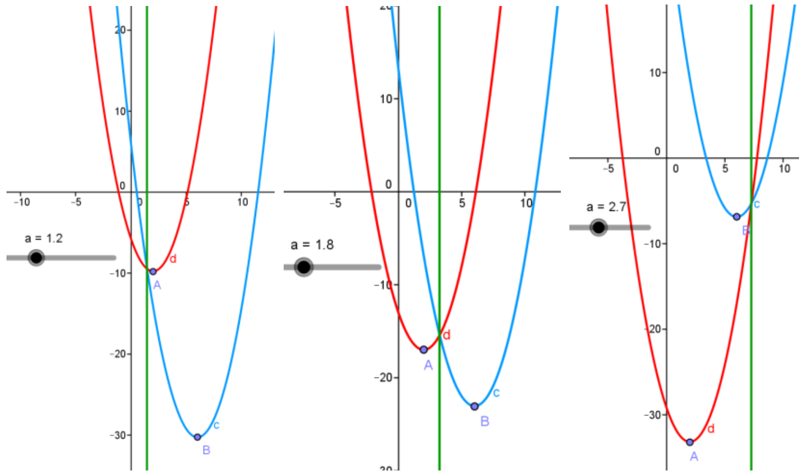


Рис. 5

Функция f(x) имеет более двух точек экстремума, тогда и только тогда, когда точка $x = a^2$ является ее точкой максимума, то есть когда $2 < a^2 < 6$

Ответ: $\sqrt{2} < |a| < \sqrt{6}$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0 \\ y = ax + 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1) Преобразуем уравнение $y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0$

$(y^2 - 14y + 49) + (xy - 7x) = 0$; $(y - 7)^2 + x(y - 7) = 0$;

$(y - 7)(y - 7 + x) = 0$

Графиком данного уравнения является совокупность прямых

$y - 7 = 0$ и $x + y - 7 = 0$.

2) Выделяем части полученных прямых, удовлетворяющих условию $x \geq 3$.

3) Строим прямую $y = ax + 1$. Меняя параметр а находим такое положение данной прямой, при котором она пересекает только прямую $y - 7 = 0$ или прямую $x + y - 7 = 0$.

а) прямая $y = ax + 1$ проходит через точку (3; 7), значит $7 = 3a + 1$, $a = 2$

б) если прямая y = ax + 1 проходит через точку (3; 4) (a = 1), то она пересекает график уравнения уже в двух точках, значит система имеет единственное решение при a принадлежащем промежутку (1; 2]

в) прямая y = ax + 1 параллельна прямой y – 7 = 0, т е a = 0

г) если прямая y = ax + 1 параллельна прямой x + y – 7 = 0, (a = - 1) то система не имеет решений, значит система имеет единственное решение при a принадлежащем промежутку (- 1; 0]

Ответ: (- 1; 0]; (1; 2] .(рис.6)

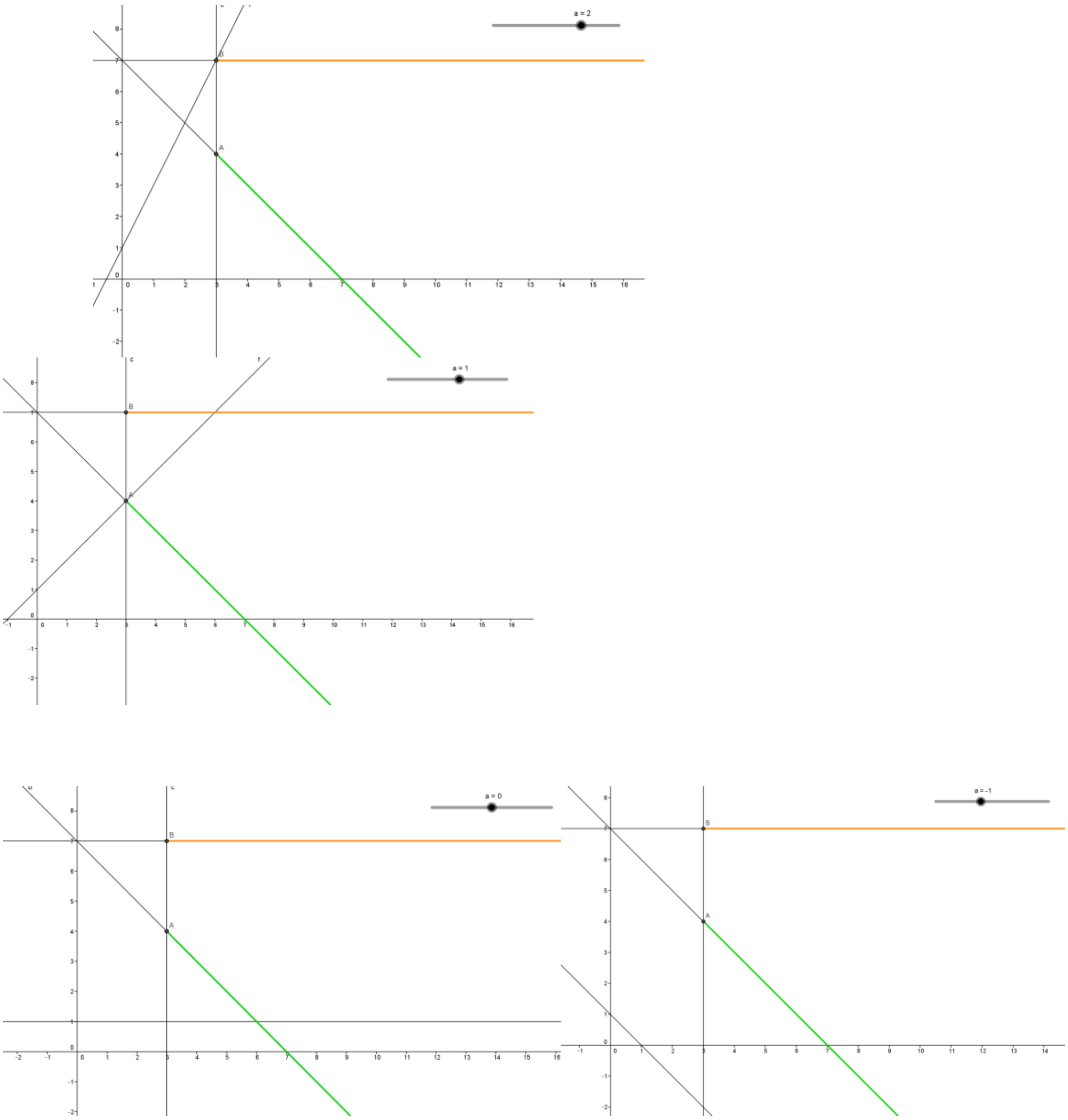


Рис. 6

Приведем пример работы над заданием повышенного уровня сложности на занятии «Решение заданий с параметрами с применением программного обеспечения GeoGebra».

Найдите, при каких значениях параметра p системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y^2 = 1 \\ 3|x| + |y| = 3p \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\pi y) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = p^2 - 5 \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений.

Решение в среде GeoGebra.

Сначала строим ползунок для параметра p.

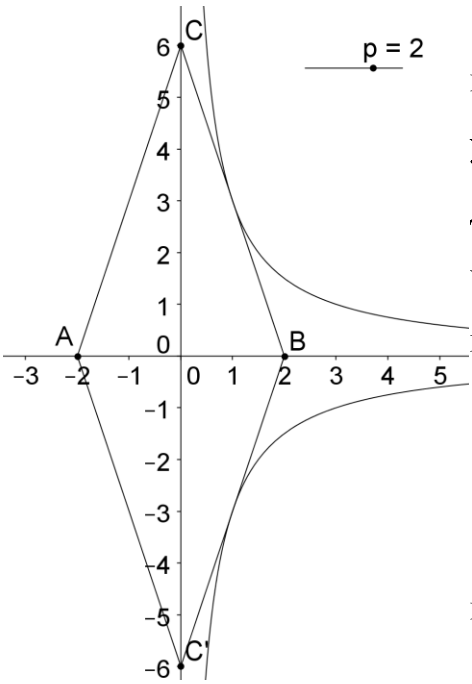


Рис. 7

1) Решаем первую систему. К сожалению, невозможно построить график данных уравнений системы, вводя их в «Строку ввода». Компьютер требует записи выражения y через x. Преобразуем первое уравнение первой системы. Предварительно заметим, что $a^{\log_a |b|} = |b| \Leftrightarrow (a^{\log_a |b|})^2 = b^2 \Leftrightarrow (a^2)^{\log_a |b|} = b^2 \Leftrightarrow \log_{a^2} b^2 = \log_a |b|$. Используя это и условия $x > 0$, $y \neq 0$, получаем:

$$\log_3 x + \log_9 y^2 = 1 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 |y| = 1$$

$\Leftrightarrow \log_3 (x|y|) = 1 \Leftrightarrow x|y| = 3.$

Поменяв местами x и y (отражение от биссектрисы 1-3 координатных углов), получим уравнение $y|x| = 3$, что эквивалентно уравнению $y = \frac{3}{|x|}$.

Строим график этой функции, а затем отражаем его от биссектрисы 2-3 координатных углов. Получаем график уравнения $x|y| = 3$.

Переходим ко второму уравнению: $|3x|+|y|=3p$, $p>0$. Имеем: $|y|=3p-|3x|$, откуда $y=3p-|3x|$ при $y>0$ и $y=-3p+|3x|$ при $y<0$. Таким образом, получаем график системы, зависящий от значений параметра p на ползунке (рис. 7). Видим, что при $p<2$ система не имеет решений, при $p=2$ имеет два решения и при $p>2$ имеет 4 решения.

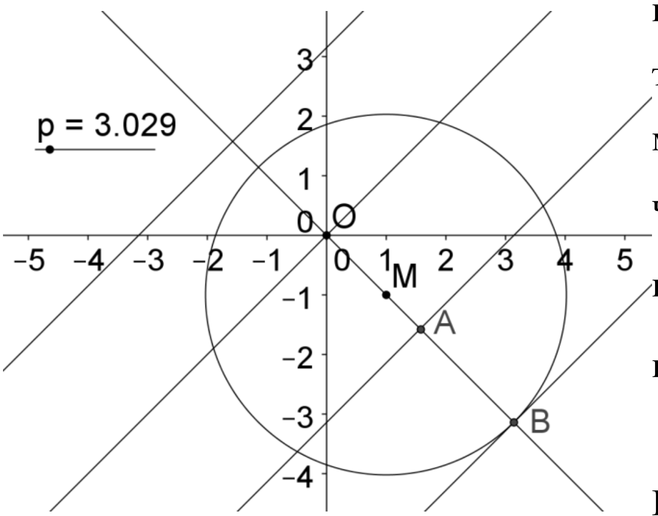


Рис. 8

2) Решаем вторую систему. Преобразуем первое уравнение: $\sin(x-y)=0 \Leftrightarrow x-y=\pi k$, $y=x-\pi k$, $k\in Z$. Графиком этих функций является биссектриса 1-3 координатных углов и все прямые, ей параллельные и делящие ось абсцисс на части длины π. Второе уравнение второй системы определяет окружность с центром в точке $M(1,-1)$ и радиусом $R=\sqrt{p^2+2}$. Таким образом, второй системе соответствует рисунок 8. Отмечаем точкой O начало координат и точками A, B пересечения биссектрисы 2-3 координатных углов с двумя соседними прямыми, параллельными биссектрисе 1-3 координатных углов. Изменяя значения параметра p на ползунке, видим, что вторая система может иметь 4 решения – столько же, сколько и первая, лишь когда радиус окружности меньше отрезка BM. Поскольку $2OA^2=\pi^2$, то $OA=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Тогда [illegible] и [illegible]. Следовательно, вторая система будет иметь 4 решения, если [illegible], откуда

[illegible], $p^2 < 2\pi^2 - 4$, $|p| < \sqrt{2\pi^2 - 4}$. Таким образом, обе системы будут иметь одинаковое количество решений – по 4, при $2 < p < \sqrt{2\pi^2 - 4}$. Компьютер дает приближенный ответ $2 < p < 3{,}02$. Точность можно повысить, меняя масштаб.

Решающая роль в решении задачи принадлежит геометрическому моделированию и анимации, поэтому разрабатываемый метод с полным основанием можно назвать анимационно-геометрическим.

До проведения занятия проводится предварительное распределение заданий для самостоятельной работы в соответствии с уровнем подготовки учащихся. Обучающимся, недостаточно знакомым с библиотекой графиков и уравнений, не имеющим необходимых навыков графической культуры, предлагается с помощью программного обеспечения GeoGebra подготовить к занятию пропедевтические презентации по темам:

1. Графики функций обратной пропорциональности $y = 1/x$, y=1/|x|. Сделать вывод: как по виду графика функции $y = f(x)$ строится график функции $y = f$(|x|);
2. График уравнения |x|+|y|=a. Последовательно записывая в ПО GeoGebra в строку ввода уравнения $x + y = a$, |x|+y=a, |x|+|y|=a для некоторого конкретного числа a, сделать вывод о влиянии знака модуля на вид графика уравнения. Далее, применив ползунок для значений a, определить влияние значения параметра a на изменения графика уравнения;
3. График линейной функции $y = -x + n$. Сделать вывод о роли параметра n на положение графика функции, организовав при использовании ПО GeoGebra ползунка для параметра n;
4. Уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Задать ползунки для значений параметров a, b, R, сделать вывод об их роли при построении графика данного уравнения.

Учащихся можно объединить в группы (возможен и индивидуальный подход) – первой группе поручить подготовить презентацию решения первой системы, а второй группе – второй системы. Самым сильным обучающимся можно поручить подготовить проект решения всего задания.

При использовании ПО GeoGebra после записи в строку ввода аналитического задания рассматриваемой функции или уравнения, обучающиеся предварительно определяют интервалы движения для каждого из ползунков соответствующих параметрам рассматриваемого уравнения или функции. Передвигая точку на ползунке, определяющую динамику изменения соответствующего параметра, учащиеся на начальном этапе самостоятельно делают выводы о влиянии каждого из параметров на вид графика заданной функции или уравнения. Обучающиеся, недостаточно знакомые с библиотекой графиков и уравнений, при этом имеют возможность с помощью графических иллюстраций, полученных при применении ПО GeoGebra, освоить и закрепить знания из раздела построения графиков элементарных функций и уравнений.

На занятии, в зависимости от уровня подготовки группы, отводится соответственно больше или меньше времени на рассмотрение презентаций, подготовленных в рамках пропедевтики базовых знаний и умений. После чего группа переходит к разбору собственно самого задания.

Разбор решения сопровождается красочной презентацией, демонстрирующей движения, заложенные в решении заданной системы уравнений.

В ходе организованной самостоятельной подготовки учащиеся осваивают владение навыками познавательной и учебно-исследовательской деятельности, способность к поиску методов решения задач; умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, излагать свою точку зрения; использовать средства ИКТ.

Школьник, принимая самостоятельное участие в подготовке занятий по разбору заданий высокого уровня из вариантов ЕГЭ, осознает ответственность за результат собственного образования, значимость своей роли в успешном решении задачи. Навыки самостоятельного приобретения знаний с использованием ИКТ-технологий являются залогом успешного продолжения выпускником учебы, формирования в дальнейшем его профессиональных компетенций.

2.5. Составление и решение в среде GeoGebra однотипных задач по тригонометрии путем введения параметров

Одним из путей составления и решения однотипных задач является прием введения параметров. Классическим примером этого приема является переход от частных квадратных уравнений к общему виду $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c параметры, а затем выводится общая формула корней квадратного уравнения. Ниже будет использован этот прием параметризации при создании анимационно настраиваемого изображения, созданного в среде GeoGebra, которое позволяет вызвать любой из 36 вариантов задач по тригонометрии, решить задание самостоятельно, а затем свое решение сверить с решением, появляющемся на экране компьютера. Созданный продукт предназначен для подготовки к ЕГЭ по тригонометрии.

Сравнивая созданный электронный ресурс с имеющейся литературой по подготовке к ЕГЭ, отметим следующие его преимущества.

1) Один живой рисунок заменяет описание решений всех 36 вариантов задания по тригонометрии и полностью выполняет функции подготовки к ЕГЭ.

2) Живой рисунок позволяет создавать свои аналогичные варианты заданий по тригонометрии и решать их, сравнивая с решением, представленном на экране компьютера. Эти новые возможности могут привлечь более продвинутых школьников.

3) Созданный живой рисунок дает образец для самостоятельного изготовления аналогичного электронного ресурса по решению заданий другого вида из ЕГЭ. Тем самым он является источником организации исследова-

тельских работ школьников. Эти исследования не просто готовят школьника к предстоящему ЕГЭ, но «вскрывают кухню» по сочинению заданий, приобщают школьника к новым информационным технологиям в математике.

За основу мы взяли задачи по тригонометрии из книги [55]. В ней приведены 36 вариантов заданий ЕГЭ, в каждом варианте по 21 заданий, и задание 15 в каждом варианте – по тригонометрии. Вот эти задания.

Задание 15 из вариантов 1-36

Вариант 1

15 а) Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

15 а) Решите уравнение $2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Вариант 3

15 а) Решите уравнение $3\sin 2x - 3\cos x + 2\sin x - 1 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Вариант 4

15 а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 5

15 а) Решите уравнение $5\sin 2x + 5\cos x - 8\sin x - 4 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Вариант 6

15 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 7

15 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 8

15 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 9

15 а) Решите уравнение $\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)} - 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 10

15 а) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)} - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 11

15 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$.

Вариант 12

15 а) Решите уравнение $\dfrac{4}{\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}-\dfrac{11}{\cos x}+6=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Вариант 13

15 а) Решите уравнение $\dfrac{3}{\cos^2\left(x-\dfrac{17\pi}{2}\right)}+\dfrac{4}{\sin x}-4=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Вариант

14

15 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{3}{\sin x}+3=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Вариант 15

15 а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\cos x-1=0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -4\pi\right]$.

Вариант 16

15 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}-3=0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Вариант 17

15 а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)} + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Вариант 18

15 а) Решите уравнение $\dfrac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

Вариант 19

15 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{9}{\operatorname{tg} x} + 8 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 20

15 а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{3}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)} + 3 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Вариант 21

15 а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 7 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 4]$.

Вариант 22

15 а) Решите уравнение $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) + \sqrt{3}\cos x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.

Вариант 23

15 а) Решите уравнение $\left(2x^2-5x-12\right)(2\cos x+1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Вариант 24

15 а) Решите уравнение $14\cdot 4^x-9\cdot 2^x+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4;-2\right]$.

Вариант 25

15 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi;-3\pi\right]$.

Вариант 26

15 а) Решите уравнение $\cos 2x-\cos x=0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 27

15 а) Решите уравнение $\cos 4x+\cos 2x=0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{3}\right]$.

Вариант 28

15 а) Решите уравнение $\left((0{,}04)^{\sin x}\right)^{\cos x}=5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Вариант 29

15 а) Решите уравнение $\cos 4x-\sin 2x=0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\pi\right]$.

Вариант 30

15 а) Решите уравнение $\left((0,25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Вариант 31

15 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 32

15 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Вариант 33

15 а) Решите уравнение $2\sin^2(x + \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Вариант 34

15 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Вариант 35

15 а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Вариант 36

15	а) Решите уравнение $4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}$.
	б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Анализ задания 15-а)

Основная идея решения состоит в преобразовании данного уравнения к виду $(x-u)(y-v)=0$ либо непосредственным разложением на множители (варианты 1-5) либо сведением данного уравнения к квадратному уравнению вида $ay^2+by+c=0$, откуда $y_1=u$, $y_2=v$ (в остальных вариантах). Компьютеру поручается решение следующих элементарных задач:

1) Решение квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$;

2) Решение элементарных уравнений вида $\sin x=u$, $\cos x=u$, $tgx=u$, $a^x=b$ (по формулам и графически);

3) Решение уравнений вида $\sin x=\sin y$, $\cos x=\cos y$, $tgx=tgy$.

В случае, когда ответ нельзя записать в виде числа мы получаем его приближенное значение в виде конечной десятичной дроби с регулируемой степенью точности. Вместе с тем, ответ приводим в виде точного выражения.

Анализ задания 15-б)

Важная роль отводится графической составляющей решения. Строим единичную окружность. Изображение на ней корней данного уравнения происходит автоматически по выбору варианта и настраиванию параметров a, b, c. Измерения искомых дуг позволяет получить ответ в виде десятичной дроби с выбранной точностью. Выделяем толщиной (и цветом) данный отрезок (дугу на единичной окружности) и видим корни, принадлежащие данному отрезку (дуге). Ответ можно увидеть на графическом изображении.

Анимационно настраиваемое решение задания 15

Варианты 0-5

Вариант 1

а) Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$6\sin x\cos x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

Разделим на 6 и разложим на множители:

$$\sin x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{3} = \cos x(\sin x - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2}(\sin x - \frac{2}{3}) =$$

$$= (\sin x - \frac{2}{3})(\cos x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Следовательно, $\sin x - \frac{2}{3} = 0$ или $\cos x + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\sin x = \frac{2}{3}$. Тогда $x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$. Тогда $x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{2\pi}{3}$, $\pi - \arcsin\frac{2}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Схема решения:

1) пользуемся формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; делением на коэффициент при $\sin x\cos x$ приводим уравнение к виду $\sin x\cos x - a\cos x - b\sin x + ab = 0$;

2) преобразуем полученное уравнение к виду $(\sin x - a_1)(\cos x - b_1) = 0$;

3) решаем простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = a_1$, $\cos x = b_1$.

Просматривая задание 15-а) вариантов 1 – 5, убеждаемся, что в каждом из них решается уравнение вида

$$a\sin 2x + b\cos x + c\sin x + d = 0.$$

Первым шагом оно приводится к виду $2a\sin x\cos x + b\cos x + c\sin x + d = 0$. Затем левую часть уравнения раскладываем на множители.

$$\cos x(2a\sin x + b) + c\sin x + d = \cos x(2a\sin x + b) + \frac{c}{2a}(2a\sin x + b) - \frac{bc}{2a} + d = 0$$

.

Для разложения на множители нужно, чтобы $-\frac{bc}{2a} + d = 0$, откуда $d = \frac{bc}{2a}$. Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$a\sin 2x + b\cos x + c\sin x + \frac{bc}{2a} = 0.$$

Решим это уравнение по указанной выше схеме.

$$2a\sin x\cos x + b\cos x + c\sin x + \frac{bc}{2a} = 0.$$

Разложим на множители:

$$\cos x(2a\sin x + b) + c\sin x + \frac{bc}{2a} = \cos x(2a\sin x + b) + \frac{c}{2a}(2a\sin x + b) =$$

$$(2a\sin x + b)(\cos x + \frac{c}{2a}) = 0.$$

1) $\sin x = \frac{-b}{2a}$, откуда $x = \arcsin\frac{-b}{2a} + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin\frac{-b}{2a} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\cos x = -\frac{c}{2a}$, откуда $x = \pm\arccos\frac{-c}{2a} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{-b}{2a} + 2\pi k$, или $x = \pi - \arcsin\frac{-b}{2a} + 2\pi k$, или $x = \pm\arccos\frac{-c}{2a} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ на вопрос б) зависит от конкретных значений параметров a, b, c.

Приведенное выше решение в общем виде позволяет создать анимационный (живой) рисунок, который после введения конкретных значений параметров a, b, c даст решение задания 15 любого из вариантов 1 – 5 и им подобных (см. рисунки).

Построение анимационного рисунка в среде GeoGebra, моделирующего все варианты.

1. Строим ползунок для параметра n и делаем надпись: «Установите номер варианта n».

2. Строим ползунки для параметров a, b, c и делаем надпись: «Установите на ползунках». При выборе варианта $n = 1$ записываем значения параметров этого варианта: «$a = 3$, $b = -4$, $c = 3$». Устанавливаем условие видимости последней записи: $n = 1$.

3. Для записи конкретного уравнения и его решения вводим вспомогательные числа: $d = \frac{bc}{2a}$, $a_1 = 2a$, $b_1 = \frac{-b}{2a}$, $c_1 = -\frac{c}{2a}$.

3. Записываем условие и решение, указывая буквенные значения из Объектов: «Вариант n», n из объектов. Далее, делаем надпись: «а) Решите уравнение $a\sin 2x + b\cos x + c\sin x + d = 0$», где a, b, c, d печатаем из Объектов. Затем при выбранном значении $n = 1$ вводим надпись «б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$» и устанавливаем условие видимости $n = 1$. Теперь приводим текст решения, указывая коэффициенты и свободный

член из Объектов. Наконец, записываем текст ответа варианта 1 и устанавливаем условие видимости надписи $n=1$.

При переходе к значению $n=2$ делаются невидимыми все надписи с условием видимости $n=1$. Делаем соответствующие надписи в замен исчезнувших с условием видимости $n=2$. И так до варианта 5 включительно.

Таким образом, для решения задания 15-а) вариантов 1 – 5 необходимо:

1) знать формулу синуса двойного угла;

2) уметь преобразовывать уравнение $2a\cos x\sin x+b\cos x+c\sin x+\frac{bc}{2a}=0$ к виду $(2a\sin x+b)(\cos x+\frac{c}{2a})=0$;

3) решать уравнения вида, $\sin x=u$, $\cos x=v$.

Вариант 0

Используя этот вариант, пользователь может создать свой вариант задания 15, подобный вариантам 1-5, и решить его, сверяя свое решение с решением на живом рисунке. Желательно рассмотреть случаи параметров a, b, c, при которых получаем сомножители вида $(\sin x-u)(\cos -v)=0$, когда u или v принадлежат множеству табличных значений $M=\{0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm 1\}$.

Анимационные рисунки.

Решение с экрана компьютера.

Задание 15

Установите номер варианта n   n = 0

Установите на ползунках значения параметров a, b, c так, чтобы выполнялись условия

$-1\leq -0.707\leq 1$, $-1\leq 1\leq 1$

a = 1   b = 1.414   c = 2

ВАРИАНТ 0

а) Решите уравнение

1sin2x+(1.414)cosx+(2)sinx+(1.414)=0.

б) Выберите отрезок длины π и найдите корни, принадлежащие этому отрезку.

Решение.

Воспользуемся формулой

Получим уравнение

2sinx·cosx+(1.414)cosx+(2)sinx+(1.414)=0.

Разложим на множители:

cosx(2sinx+(1.414))+(2)sinx+(1.414)=

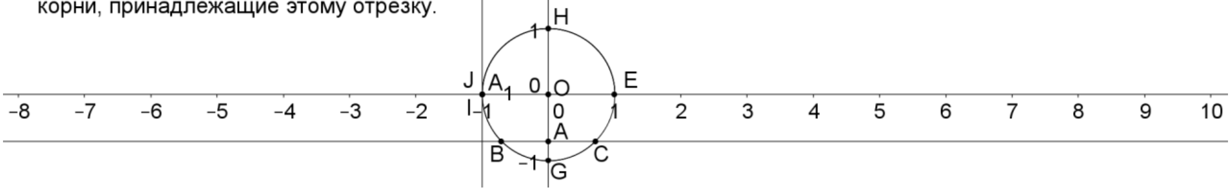
=cosx(2sinx+(1.414))+1(2sinx+(1.414))=

=(2sinx+(1.414))(cosx+1)=0

1) sinx=-0.707   x=arcsin(-0.707)+2πk≈5.498+2πk, k∈Z.

x=π-arcsin(1)+2πk≈π-5.498+2πk, k∈Z

2) cosx=-1   x=±arccos(-1)+2πk≈±π+2πk, k∈Z.



Задание 15

Установите номер варианта n   n = 1

Установите на ползунках

a=3, b=-4, c=3.

a = 3   b = -4   c = 3

ВАРИАНТ 1

а) Решите уравнение

3sin2x+(-4)cosx+(3)sinx+(-2)=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку   [π/2,3π/2].

Решение.

Воспользуемся формулой   sin2x=2sinx·cosx.

Получим уравнение

6sinx·cosx+(-4)cosx+(3)sinx+(-2)=0.

Разложим на множители:

cosx(6sinx+(-4))+(3)sinx+(-2)=

=cosx(6sinx+(-4))+0.5(6sinx+(-4))=

=(6sinx+(-4))(cosx+0.5)=0

1) sinx=0.667   x=arcsin(0.667)+2πk≈0.73+2πk, k∈Z.

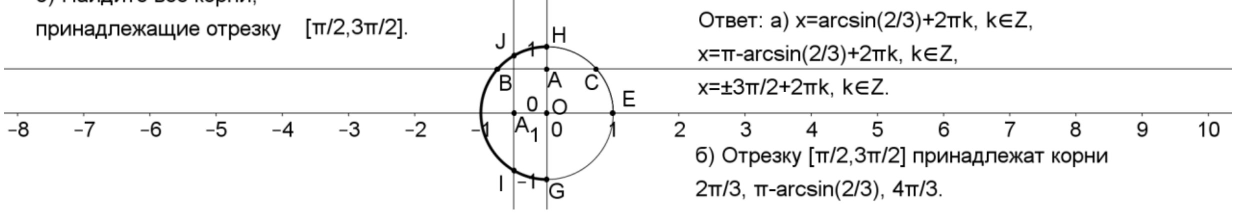
x=π-arcsin(0.5)+2πk≈π-0.73+2πk, k∈Z

2) cosx=-0.5   x=±arccos(-0.5)+2πk≈±2.094+2πk, k∈Z.

Ответ: а) x=arcsin(2/3)+2πk, k∈Z,

x=π-arcsin(2/3)+2πk, k∈Z,

x=±3π/2+2πk, k∈Z.



б) Отрезку [π/2,3π/2] принадлежат корни

2π/3, π-arcsin(2/3), 4π/3.

Задание 15

Установите номер варианта n n = 2

Установите на ползунках

a=2, b=1, c=4.

a = 2 b = 1 c = 4

ВАРИАНТ 2

а) Решите уравнение

2sin2x+(1)cosx+(4)sinx+(1)=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [5π/2,7π/2].

Решение.

Воспользуемся формулой sin2x=2sinx·cosx.

Получим уравнение

4sinx·cosx+(1)cosx+(4)sinx+(1)=0.

Разложим на множители:

cosx(4sinx+(1))+(4)sinx+(1)=

=cosx(4sinx+(1))+1(4sinx+(1))=

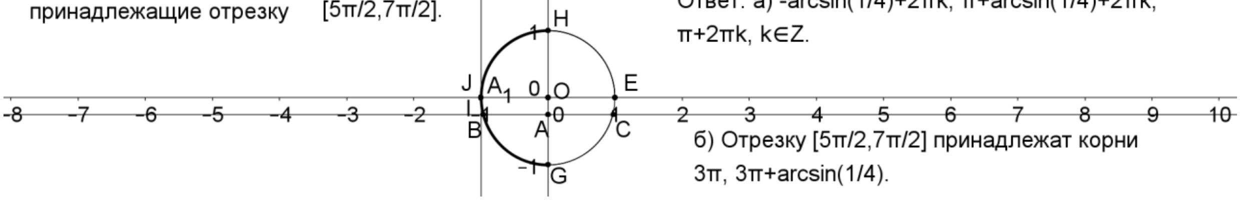
=(4sinx+(1))(cosx+1)=0

1) sinx=-0.25 x=arcsin(-0.25)+2πk≈6.031+2πk, k∈Z.

x=π-arcsin(1)+2πk≈π-6.031+2πk, k∈Z

2) cosx=-1 x=±arccos(-1)+2πk≈±π+2πk, k∈Z.

Ответ: а) -arcsin(1/4)+2πk, π+arcsin(1/4)+2πk, π+2πk, k∈Z.



б) Отрезку [5π/2,7π/2] принадлежат корни 3π, 3π+arcsin(1/4).

Задание 15

Установите номер варианта n n = 3

Установите на ползунках

a=3, b=-3, c=2.

a = 3 b = -3 c = 2

ВАРИАНТ 3

а) Решите уравнение

3sin2x+(-3)cosx+(2)sinx+(-1)=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [-2π,-π].

Решение.

Воспользуемся формулой sin2x=2sinx·cosx

Получим уравнение

6sinx·cosx+(-3)cosx+(2)sinx+(-1)=0.

Разложим на множители:

cosx(6sinx+(-3))+(2)sinx+(-1)=

=cosx(6sinx+(-3))+0.333(6sinx+(-3))=

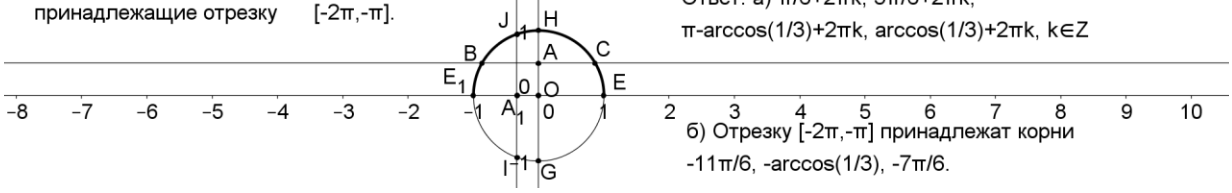
=(6sinx+(-3))(cosx+0.333)=0

1) sinx=0.5 x=arcsin(0.5)+2πk≈0.524+2πk, k∈Z.

x=π-arcsin(0.333)+2πk≈π-0.524+2πk, k∈Z

2) cosx=-0.333x=±arccos(-0.333)+2πk≈±1.911+2πk, k∈Z.

Ответ: а) π/6+2πk, 5π/6+2πk, π-arccos(1/3)+2πk, arccos(1/3)+2πk, k∈Z



б) Отрезку [-2π,-π] принадлежат корни -11π/6, -arccos(1/3), -7π/6.

Задание 15

Установите номер варианта n   n = 4

Установите на ползунках

a=2, b=-4, c=3.

a = 2   b = -4   c = 3

ВАРИАНТ 4

а) Решите уравнение

2sin2x+(-4)cosx+(3)sinx+(-3)=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [π,5π/2].

Решение.

Воспользуемся формулой sin2x=2sinx·cosx

Получим уравнение

4sinx·cosx+(-4)cosx+(3)sinx+(-3)=0.

Разложим на множители:

cosx(4sinx+(-4))+(3)sinx+(-3)=

=cosx(4sinx+(-4))+0.75(4sinx+(-4))=

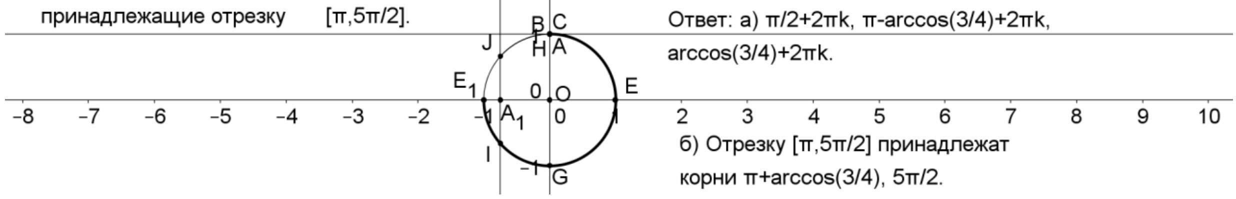
=(4sinx+(-4))(cosx+0.75)=0

1) sinx=1   x=arcsin(1)+2πk≈1.571+2πk, k∈Z.

x=π-arcsin(0.75)+2πk≈π-1.571+2πk, k∈Z

2) cosx=-0.75 x=±arccos(-0.75)+2πk≈±2.419+2πk, k∈Z.

Ответ: а) π/2+2πk, π-arccos(3/4)+2πk, arccos(3/4)+2πk.



б) Отрезку [π,5π/2] принадлежат корни π+arccos(3/4), 5π/2.

Задание 15

Установите номер варианта n   n = 5

Установите на ползунках

a=5, b=5, c=-8

a = 5   b = 5   c = -8

ВАРИАНТ 5

а) Решите уравнение

5sin2x+(5)cosx+(-8)sinx+(-4)=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [-5π/2,-3π/2].

Решение.

Воспользуемся формулой sin2x=2sinx·cosx

Получим уравнение

10sinx·cosx+(5)cosx+(-8)sinx+(-4)=0.

Разложим на множители:

cosx(10sinx+(5))+(-8)sinx+(-4)=

=cosx(10sinx+(5))+-0.8(10sinx+(5))=

=(10sinx+(5))(cosx+-0.8)=0

1) sinx=-0.5   x=arcsin(-0.5)+2πk≈5.76+2πk, k∈Z.

x=π-arcsin(-0.8)+2πk≈π-5.76+2πk, k∈Z

2) cosx=0.8   x=±arccos(0.8)+2πk≈±0.644+2πk, k∈Z.

Ответ: а) -π/6 +2πk, -5π/6+2πk, arccos(4/5)+2πk, -arccos(4/5)+2πk, k∈Z.

б) Отрезку [-5π/2,-3π/2] принадлежат корни -2π-arccos(4/5), -13π/6, -2π+arccos(4/5).

Задание 15

Установите номер варианта n n = 6

Установите на ползунках

a=1, b=0, c=-0.75

a = 1 b = 0 c = -0.5

ВАРИАНТ 6

а) Решите уравнение $\cos^2 x-\cos 2x=0.75$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi,-\pi/2]$.

Решение.

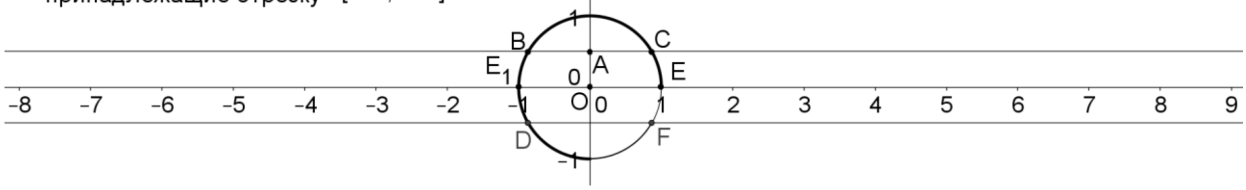
Воспользуемся формулой $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

Получим уравнение $1\sin^2 x=0.5$.

1) $\sin x=-0.707$, $x=\arcsin(-0.707)+2\pi k\approx 0.524+2\pi л$,
$x=\pi-\arcsin(-0.707)+2\pi k\approx\pi-0.524+2\pi k$, $k\in Z$.

2) $\sin x=0.707$, $x=\arcsin(0.707)+2\pi k\approx 5.76+2\pi k$,
$x=\pi-\arcsin(0.707)+2\pi k\approx\pi-5.76+2\pi k$, $k\in Z$

Ответ: а) $x=\pm\pi/3+\pi k$, $k\in Z$;
б) Отрезку $[-2\pi,-\pi/2]$ принадлежат корни
$-5\pi/3$, $-4\pi/3$, $-2\pi/3$.



Задание 15

Установите номер варианта n n = 7

Установите на ползунках

a=1, b=0, c=-0.5

a = 1 b = 0 c = -0.5

ВАРИАНТ 7

а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=0.5$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[3\pi/2,5\pi/2]$

Решение.

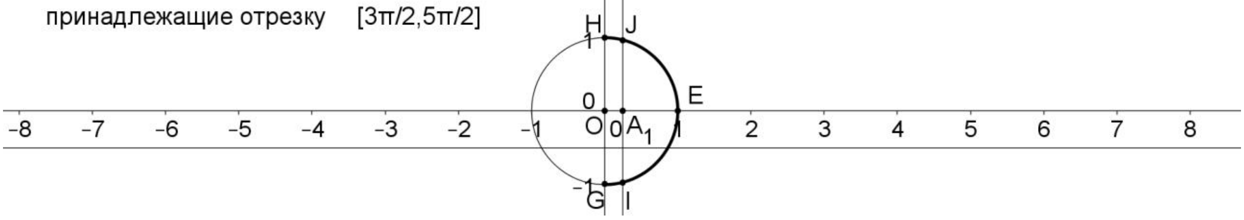
Воспользуемся формулой $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

Получим уравнение $\cos^2 x=0.5$.

1) $\cos x=-0.707$,
$x=\pm\arccos(-0.707)+2\pi k\approx\pm 1.318+2\pi k$, $k\in Z$

2) $\cos x=0.707$,
$x=\pm\arccos(0.707)+2\pi k\approx\pm 0.524+2\pi k$, $k\pm Z$

Ответ: а) $\pi/4+\pi k/2$, $k\in Z$;
б) Отрезку $[3\pi/2,5\pi/2]$ принадлежат
корни $7\pi/4$, $9\pi/4$.



Задание 15

Задание 15

Установите номер варианта n   n = 8

Установите на ползунках

a=1, b=0, c=-0.5

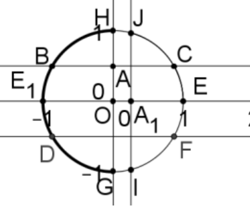
a = 1   b = 0   c = -0.5

ВАРИАНТ 8

а) Решите уравнение

cos²x-cos2x=0.5.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [-3π/2,-π/2].



Решение.

Решение.

Воспользуемся формулой cos2x=cos²x-sin²x.

Получим уравнение sin²x=0.5.

1) sinx=-0.707, x=arcsin-0.707+2πk≈5.76+2πk, x=π-arcsin+2πk≈π-5.76+2πk, k∈Z.

2) sinx=0.707, x=arcsin(0.707)+2πk≈0.524+2πk, x=π-arcsin(0.707)+2πk≈π-0.524+2πk, k∈Z.

Ответ: а) π/4+πk/2, k∈Z;

б) Отрезку [-3π/2,-π/2] принадлежат корни -5π/4, -3π/4.

Задание 15

Установите номер варианта n   n = 9

Установите на ползунках

a=7, b=1, c=-6.

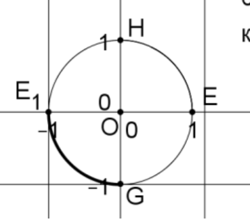
a = 7   b = 1   c = -6

ВАРИАНТ 9

а) Решите уравнение

7/cos²x-1/sin(9π/2+x)-6=0.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку [-3π,-π/2]



Решение.

Воспользуемся равенством sin(9π/2+x)=-cosx.

Получим уравнение 7/cos+1/cosx-6=0.

Обозначим y=1/cosx Получим уравнение

7y²+(1)y+(-6)=0, корни y=-1, y=0.857.

1) 1/cosx= -1   cosx=-1   x=π+2πk, k∈Z

2) 1/cosx= 0.857   cosx= 1.167

x не существует

Ответ: а) π+2πk, k∈Z;

б) Отрезку [-3π,-π/2] принадлежат корни -π.

2.6. Цели и содержание обучения решению задач с параметрами.

Основной целью является разработка системного подхода при обучении решению задач с параметрами, отработка практики использования анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при решении таких задач. Содержание обучения не только охватывает всю школьную программу, но и расширяет и систематизирует знания учащихся, лежащие в основе решения задач с параметрами.

2.7. Методы и средства обучения решению задач с параметрами с использованием анимационной среды GeoGebra.

Выделим основные этапы решения задачи с параметром анимационно-геометрическим методом.

1) Формулировка задачи, приспособленная для геометрического решения на экране компьютера.

2) Анимационно-геометрическое решение задачи на экране компьютера. Получение искомых приближенных значений параметра.

3) Перевод решения, увиденного на экране, на математический язык, получение точного ответа для искомых значений параметра.

В качестве средства создания анимационных изображений, используемых при решении задач с параметрами, мы применяем компьютерную программу GeoGebra, которая наилучшим образом подходит для этих целей.

2.8. Реализация методической системы.

Опыт применения GeoGebra в школе № 10 г. Красноярска позволяет сделать следующие выводы.

1.Реализуется системно-деятельностный подход, направленный на развитие исследовательской деятельности учащихся, поскольку GeoGebra может эффективно применяться не только в передаче знаний, но и способствовать саморазвитию ученика.

2.Изменяется характер учебной деятельности через разнообразие методов и способов достижения учебных целей с помощью ИКТ.

3.Изучение интерактивной среды доступно для учащихся разного возраста, начиная с 5 класса, т.к. программа русифицирована и проста в использовании в сравнении с другими аналогами.

4.При изучении математики применение среды GeoGebra способно более эффективно влиять на развитие познавательного интереса обучающихся за счет интерактивности средств, лёгкости построения чертежей, высокой степени наглядности.

5. Осуществляется дифференцированный подход в обучении.

6.Происходит оптимизация учебного процесса за счёт более рационального использования времени на различных этапах урока.

7.Снижается эмоциональное напряжение на уроке, т.к. возрастает уровень понимания учебного материала.

Все эти выводы говорят об эффективности использования интерактивной динамической среды GeoGebra в обучении математике, что делает ее одним из важных педагогических инструментов. И как любой новый педагогический инструмент требует времени на освоение, пересмотра имеющихся методик и определенной технической базы.

Поэтому возможными перспективами внедрения GeoGebra в образовательный процесс является: распространение опыта, интеграция с другими образовательными предметами (физика, география, химия), создание банка информационных ресурсов для поддержки образовательного процесса (педагогические материалы и работы учащихся), проведение конкурсов и фестивалей,

Думаем, что в дальнейшем для каждого учителя интерактивная динамическая среда GeoGebra станет необходимым инструментом в его педагогической деятельности.

2.9. Элективный курс «Решение задач с параметрами с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra»

Пояснительная записка

Целью профильного обучения, как одного из направлений модернизации математического образования является обеспечение углубленного изучения предмета и подготовка учащихся к продолжению образования.

Основным направлением модернизации математического школьного образования является отработка механизмов итоговой аттестации через введение единого государственного экзамена. В заданиях ЕГЭ по математике с развернутым ответом (часть С) встречаются задачи с параметрами. Обязательны такие задания и на вступительных экзаменах в ВУЗы.

Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, т.к. с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления и математической культуры обучаемого.

Решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо допускают непростительные ошибки. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках.

В связи с этим возникла необходимость в разработке и проведении элективного курса для старшеклассников по теме: «Решение задач с параметрами».

Многообразие задач с параметрами охватывает весь курс школьной математики. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.

Специально не оговаривая, систематически будем использовать анимационные возможности среды GeoGebra для визуализации решений задач с параметрами.

Цель курса

- Формировать у учащихся умения и навыки по решению задач с параметрами для подготовки к ЕГЭ и к обучению в ВУЗе.

- Изучение курса предполагает формирование у учащихся интереса к предмету, развитие их математических способностей.
- Развивать исследовательскую и познавательную деятельность учащихся.
    - Обеспечить условия для самостоятельной творческой работы.

В результате изучения курса учащийся должен:

- усвоить основные приемы и методы решения уравнений, неравенств, систем уравнений с параметрами;
- овладеть методами использования анимационных возможностей компьютерной программы GeoGebra при решении задач с параметрами
- применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр;
- проводить полное обоснование при решении задач с параметрами;
- овладеть исследовательской деятельностью.

Структура курса планирования учебного материала

Темы:

I. Первоначальные сведения. 2ч

II. Решения линейных уравнений, содержащих параметры. 2 ч.

III. Решения линейных неравенств, содержащих параметры.2 ч.

IV. Модуль и параметр. 2 ч.

V. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметры. 7 ч.

VI. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами. 4ч.

VII. Рациональные уравнения. 2 ч.

VIII. Рациональные неравенства. 2 ч.

IX. Иррациональные уравнения. 2 ч.

X. Иррациональные неравенства. 2 ч.

XI. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметры. 4 ч.

XII. Показательные и логарифмические неравенства, содержащие параметры . 4 ч.

XIII. Производная и ее применения. 4 ч.

XIV. Тригонометрия и параметры. 4 ч.

XV. Графические приемы решения. 4 ч.

XVI. Нестандартные задачи с параметрами. 6 ч.

- количество решений уравнений;
- уравнения и неравенства с параметрами с некоторыми условиями.

XVII. Текстовые задачи с использованием параметра. 4 ч.

Краткое содержание курса

I. Первоначальные сведения.

Определение параметра. Виды уравнений и неравенств, содержащие параметр. Основные приемы решения задач с параметрам. Решение простейших уравнений с параметрами.

Цель: Дать первоначальное представление учащемуся о параметре и помочь привыкнуть к параметру, к необычной форме ответов при решении уравнений.

II. Решение линейных уравнений (и уравнений, приводимых к линейным), содержащих параметр.

Общие подходы к решению линейных уравнений. Решение линейных уравнений, содержащих параметр.
Решение уравнений, приводимых к линейным.
Решение линейно-кусочных уравнений.
Применение алгоритма решения линейных уравнений, содержащих параметр.
Геометрическая интерпретация.
Решение систем уравнений.

Цель: Поиск решения линейных уравнений в общем виде; исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

III. Решение линейных неравенств, содержащих параметр.

Определение линейного неравенства.
Алгоритм решения неравенств.
Решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами.
Исследование полученного ответа.
Обработка результатов, полученных при решении.

Цель: Выработать навыки решения стандартных неравенств и приводимых к ним, углубленное изучение методов решения линейных неравенств.

IV. Модуль и параметр.

Определение модуля.

Алгоритм решения уравнений и неравенств с модулем.

Раскрытие разных модулей.

Графический способ решения.

Цель: Выработать навыки решения уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр.

V. Квадратные уравнения, содержащие параметр.

Актуализация знаний о квадратном уравнении. Исследования количества корней, в зависимости от дискриминанта. Использование теоремы Виета.

Исследование трехчлена.
Алгоритм решения уравнений.
Графический способ. Аналитический способ решения.
Классификация задач, с позиций применения к ним методов исследования.

Цель: Формировать умение и навыки решения квадратных уравнений с параметрами.

VI. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами.

Область значений функции.
Область определения функции.
Монотонность. Координаты вершины параболы.

Цель: Познакомить с многообразием задач с параметрами, решаемых с помощью свойств квадратичной функции.

VII. Рациональные уравнения.

Общая схема решения целых и дробно-рациональных уравнений.

Решение соответствующих уравнений, содержащих параметр.

Различные способы решения.

Цель: Сформировать умение решать рациональные уравнения с параметром.

Исследование дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр.

VIII. Рациональные неравенства.

Общая схема решения, «метод областей».

Различные способы решений.

Цель: Формировать умение и навыки решения рациональных неравенств с параметром.

IX. Иррациональные уравнения.

Схемы решения иррациональных уравнений.

Область определения уравнения.

Решение соответствующих уравнений, содержащих параметр.

Цель: Сформировать умение решать иррациональные уравнения с параметром.

Исследование иррациональных уравнений, содержащих параметр.

X. Иррациональные неравенства.

Схемы решения иррациональных неравенств.

Решение соответствующих неравенств, содержащих параметр.

Цель: Формировать умение и навыки решения иррациональных неравенств с параметром.

XI. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметры.

Свойства степеней и показательной функции. Решение показательных уравнений, содержащих параметры.

Свойства логарифмов и логарифмической функции. Решение логарифмических уравнений с параметрами.

Цель: Сформировать умение решать показательные и логарифмические уравнения с параметрами.

XII. Показательные и логарифмические неравенства, содержащие параметры.

Свойства показательной функции. Решение показательных неравенств, содержащих параметры.

Свойства логарифмической функции. Решение логарифмических неравенств с параметрами.

Цель: Формировать умение и навыки решения показательных и логарифмических неравенств с параметром.

XIII. Производная и ее применения.

Касательная к функции.

Критические точки.

Монотонность.

Наибольшие и наименьшие значения функции.

Построение графиков функций.

Цель: Познакомить учащихся с типом задач с параметрами, использующих приемы и методы дифференциального исчисления.

XIV. Тригонометрия и параметры.

Использование основных свойств тригонометрических функций в задачах с параметрами. Тригонометрические уравнения, содержащие параметр. Тригонометрические неравенства, содержащие параметр.

Цель: Сформировать умение использования свойств тригонометрических функций при решении тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами.

XV. Графические приемы решения.

Использование свойств различных функций при решении заданий с параметром.

Специфика решений графическим способом.

Преимущества и недостатки графического способа.

Цель: Научить графическим приемам решения задач с параметром.

XVI. Нестандартные задачи с параметрами.

Использование различных свойств при решении задач с параметрами.

Умение проводить анализ задачи, находить алгоритм решения.

Цель: Формировать навыки исследовательской деятельности, развивать логическое и математическое мышление.

XII. Текстовые задачи с использованием параметра.

Использование различных свойств при решении задач с параметрами.

Умение проводить анализ задачи, находить алгоритм решения.

Цель: Формировать навыки исследовательской деятельности, развивать логическое и математическое мышление.

Планирование ***(64 часа)***

№ урока	Тема	Дата проведения
1	Основные понятия уравнений с параметрами	
2	Основные понятия неравенств с параметрами	
3 – 4	Решение линейных уравнений с параметрами	
5 – 6	Решение линейных неравенств с параметрами	
7 – 8	Модуль и параметр	
9 – 12	Квадратные уравнения, содержащие параметр	
13 – 15	Квадратные неравенства, содержащие параметр	
16 – 19	Свойства квадратичной функции	
20 – 21	Рациональные уравнения с параметром	
22 – 23	Рациональные неравенства с параметрами	
24 – 25	Иррациональные уравнения с параметром	
26 – 27	Иррациональные неравенства с параметрами	
28 – 29	Показательные уравнения с параметром	
30 – 31	Логарифмические уравнения с параметром	
32 – 33	Показательные неравенства с параметром	
34 – 35	Логарифмические неравенства с параметром	
36 – 39	Производная и ее применения	
40 – 43	Параметры в тригонометрии	
44 – 47	Графические приемы решения	
48 – 49	Количество решений уравнений	
50 – 53	Уравнения и неравенства с параметрами с различными условиями	

54 – 57	Текстовые задачи с использованием параметра	
58 – 60	Итоговая контрольная работа по курсу	
62 – 64	Защита индивидуальных проектов	

Методические рекомендации при изучении некоторых тем

Линейные и квадратные уравнения

Линейное уравнение, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами: $ax = b$, где x – неизвестное, a, b – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра a является значение $a = 0$.

1. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров a и b оно имеет единственное решение $x = \frac{в}{a}$.

2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид: $0\,x = b$. В этом случае значение $b = 0$ является особым значением параметра b.

2.1. При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

2.2. При $b = 0$ уравнение примет вид: $0\,x = 0$. Решением данного уравнения является любое действительное число.

П р и м е р. Решить уравнение

$$2a(a - 2)\,x = a - 2. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0. Такими значениями являются a=0 и a=2. При этих значениях a невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x. В то же время при значениях параметра $a \neq 0$,

$a \neq 2$ это деление возможно. Таким образом, целесообразно множество всех действительных значений параметра разбить на подмножества

$A_1=\{0\}$, $A_2=\{2\}$ и $A_3=\{a \neq 0, a \neq 2\}$

и решить уравнение (1) на каждом из этих подмножеств, т. е. решить уравнение (1) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра:

1) $a=0$; 2) $a=2$; 3) $a \neq 0, a \neq 2$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a=0$ уравнение (1) принимает вид $0\,x = -2$. Это уравнение не имеет корней.

2) При $a=2$ уравнение (1) принимает вид $0\,x=0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При $a \neq 0$, $a \neq 2$ из уравнения (1) получаем, $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$,

откуда $x = \dfrac{1}{2a}$.

О т в е т : 1) Если $a=0$,то корней нет;

2)если $a=2$, то x – любое действительное число;

3) если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \dfrac{1}{2a}$.

П р и м е р . **Решить уравнение**

$$(a - 1)\,x^2+2\,(2a+1)\,x+(4a+3) =0; \qquad (2)$$

Р е ш е н и е . В данном случае контрольным является значение $a=1$. Дело в том, что при $a=1$ уравнение (2) является линейным, а при $a \neq 1$ оно квадратное (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (2) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) a = l; 2) $a \neq 1$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При a=1 уравнение (2) примет вид $6x+7=0$. Из этого уравнения находим $x = -\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (2) обращается в 0.

Дело в том, что если дискриминант $D=0$ при $a=a_o$, то при переходе значения D через точку a_o дискриминант может изменить знак (например, при $a<a_o$ D< 0, а при $a>a_o$ D>0). Вместе с этим при переходе через точку a_o меняется и число действительных корней квадратного уравнения (в нашем примере при $a<a_o$ корней нет, так как D< 0, а при $a>a_o$ D>0 уравнение имеет два корня). Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых обращается в 0 дискриминант квадратного уравнения, также относят к контрольным значениям.

Составим дискриминант уравнения (2):

$\frac{D}{4}=(2a+1)^2 - (a - 1)(4a+3)$. После упрощений получаем $\frac{D}{4} = 5a+4$.

Из уравнения $\frac{D}{4} = 0$ находим $a = -\frac{4}{5}$ — второе контрольное значение параметра a. При

этом если $a < -\frac{4}{5}$, то D <0; если $a \geq -\frac{4}{5}$, то D≥0, $a \neq 1$.

Таким образом, осталось решить уравнение (2) в случае, когда $a < -\frac{4}{5}$ и в случае, когда $\{ a \geq -\frac{4}{5},\ a \neq 1 \}$.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение (2) не имеет действительных корней; если же

$\{ a \geq -\frac{4}{5},\ \ a \neq 1 \}$, то находим $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

О т в е т : 1) если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

2) если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

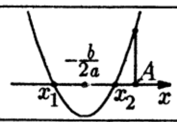
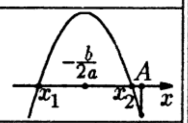
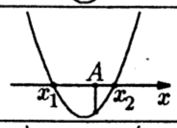
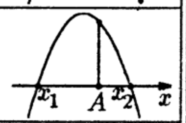
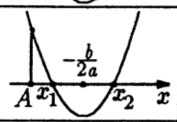
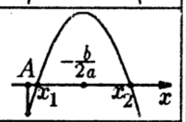
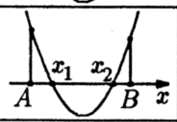
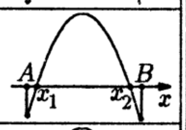
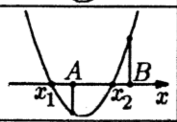
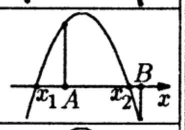
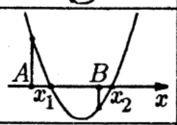
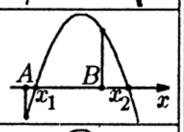
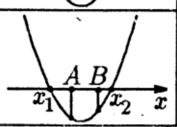
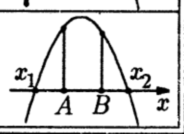
3) если $a \geq -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами

При решении различных задач часто используются не только свойства квадратного уравнения, но и свойства квадратичной функции. Полезно дать учащимся таблицу, позволяющую составлять систему неравенств для нахождения решений задачи.

Таблица

x_1 и x_2 – корни многочлена $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac>0$, $a\neq 0$

Условия на корни	$a>0$		$a<0$	
$x_1<A,\ x_2<A$ $x_1\ \ x_2\ \ A$	$-\frac{b}{2a}<A$, $f(A)>0$		$-\frac{b}{2a}<A$, $f(A)<0$	
$x_1<A<x_2$ $x_1\ \ A\ \ x_2$	$f(A)<0$		$f(A)>0$	
$x_1>A,\ x_2>A$ $A\ \ x_1\ \ x_2$	$-\frac{b}{2a}>A$, $f(A)>0$		$-\frac{b}{2a}>A$, $f(A)<0$	
$A<x_1<B$ $A<x_2<B$ $A\ \ x_1\ \ x_2\ \ B$	$A<-\frac{b}{2a}<B$, $f(A)>0$, $f(B)>0$		$A<-\frac{b}{2a}<B$, $f(A)<0$, $f(B)<0$	
$x_1<A$ $A<x_2<B$ $x_1\ \ A\ \ x_2\ \ B$	$f(A)<0$, $f(B)>0$		$f(A)>0$, $f(B)<0$	
$B<x_2$ $A<x_1<B$ $A\ \ x_1\ \ B\ \ x_2$	$f(A)>0$, $f(B)<0$		$f(A)<0$, $f(B)>0$	
$x_1<A,\ x_2>B$ $x_1\ \ A\ \ B\ \ x_2$	$f(A)<0$, $f(B)<0$		$f(A)>0$, $f(B)>0$	

П р и м е р. **При каких значениях параметра *a* один из корней уравнения**

$$(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a=0$$

больше числа *a*, а другой меньше числа *a*?

Р е ш е н и е. Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a нули квадратичной функции

$$g(x)=(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a$$

лежат на вещественной оси по разные стороны от точки $x = a$?

Исходя из таблицы, имеем условие: $af(A)<0$.

В нашем случае это условие принимает вид

$(a^2-2)\,g(a)<0$.

Следовательно, требованию задачи удовлетворяют решения неравенства

$(a^2-2)((a^2-2)a^2+(a^2+a-1)a-a^3+a)<0$, где $a^2-2\neq 0$ ($a=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{2}$ требованию задачи не удовлетворяют).

Решая полученное неравенство,

находим, что $a\in(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$.

Ответ: При $a\in(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$.

Пример. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$ax^2-(2a+1)x+3a-1=0 \qquad (1)$$

больше 1?

Решение. Очевидно, что задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a корни квадратного трехчлена

$$f(x)=ax^2-(2a+1)x+3a-1$$

больше 1?

Переход от одной формулировки задачи к другой подчеркивает ту общую часто используемую при решении алгебраических уравнений второй степени идею, которая связана с описанием тех или иных свойств квадратного трехчлена и их геометрической интерпретации на графике. В частности, для того, чтобы корни квадратного трехчлена

$$f(x)=ax^2+bx+c, \quad (a\neq 0) \qquad (2)$$

были больше числа d, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ \dfrac{-b}{2a}>d, \\ af(d)>0 \end{cases}$$

(3)

(см. рис. 1.1.)

Условия (3) равносильны условиям

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ af(d) > 0, \\ af'(d) < 0, \end{cases}$$

где D - дискриминант, а f' - производная квадратного трехчлена. Требование же того, чтобы корни квадратного трехчлена были меньше числа d, означает выполнение условий

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ af(d) > 0, \\ af'(d) > 0. \end{cases}$$

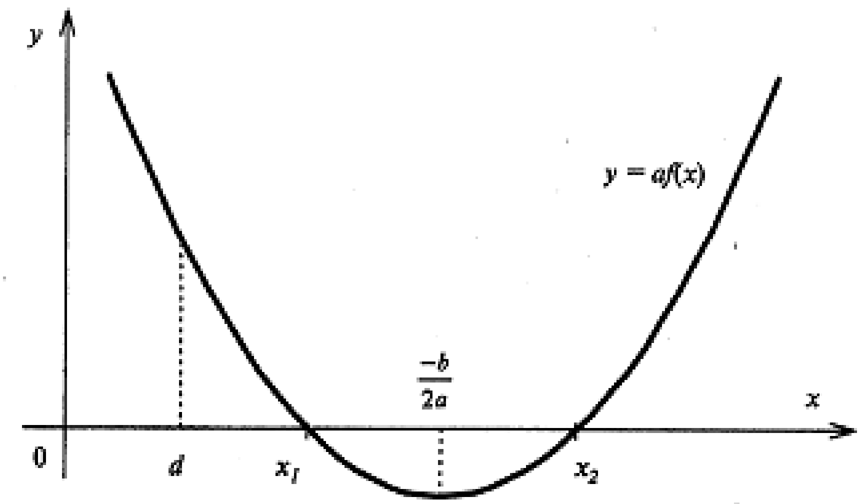


Рис. 1.1

Возвращаясь к исходной задаче, замечаем, что при a=0 уравнение (1) имеет корень $x=-1$, который требованиям задачи не удовлетворяет.

Рассмотрим случай $a \ne 0$. При таких a условия (3) запишутся в виде

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \ge 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a-(2a+1)+3a-1) > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Очевидно, что этот же результат мы получили бы и решая неравенство $x_1 > 1$, где x_1 - меньший корень уравнения (1)

Ответ: $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Рациональные неравенства с параметрами

Пример. Найти все значения параметра p, при которых неравенство

$$(4x-3)^2 + p(4x-3)(x^2+1) + (2p+1)(x^2+1)^2 > 0$$

выполняется при всех $x \in R$.

Решение. Исходное неравенство является однородным неравенством второй степени относительно функции $(4x-3)$ и (x^2+1). Если разделить его на $(x^2+1) > 0$, то получится равносильное неравенство

$$\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right)^2 + p\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right) + 2p + 1 > 0,$$

которое после замены $t = t(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ становится квадратным неравенством относительно переменной t с параметром p:

$$t^2 + pt + 2p + 1 > 0.$$

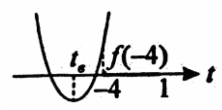
(*)

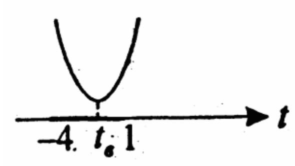
Найдем множество значений функции $t = t(x)$ при $x \in R$. Имеем: $(x^2+1)t = 4x-3$, то есть $tx^2 - 4x + t + 3 = 0$. Отсюда $t = 0$ при $x = \dfrac{3}{4}$; другие значения t (отличные от нуля) найдем из условия неотрицательности дискриминанта этого квадратного уравнения: $\dfrac{D}{4} = 2^2 - t(t+3) = -t^2 - 3t + 4 = (1-t)(t+4) \geq 0$, то есть $-4 \leq t \leq 1$.

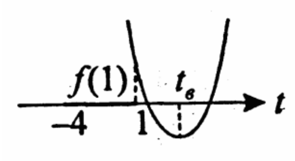
Итак, исходное неравенство выполняется для всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда неравенство (*) выполняется для всех $t \in -4;1$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t)=t^2+pt+2p+1$ с абсциссой вершины $t_в=-\dfrac{p}{2}$ и дискриминантом $D_1=p^2-4(2p+1)=p^2-8p-4$. Тогда имеем следующие необходимые и достаточные условия для нахождения искомых значений параметра p:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} t_в<-4, \\ f(-4)>0, \end{cases} & (1) \\ \\ \begin{cases} -4\le t_в\le 1, \\ D_1<0, \end{cases} & (2) \\ \\ \begin{cases} t_в>1, \\ f(1)>0. \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$







Последовательно преобразуя, получаем:

$$(1):\begin{cases} -\dfrac{p}{2}<-4, \\ (-4)^2+p\cdot(-4)+2p+1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p>8, \\ p<\dfrac{17}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow p\in\left(8;\dfrac{17}{2}\right);$$

$$(2):\begin{cases} -4\le-\dfrac{p}{2}\le 1, \\ p^2-8p-4<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le p\le 8, \\ 4-2\sqrt{5}<p<4+2\sqrt{5}, \end{cases} \Leftrightarrow p\in\ 4-2\sqrt{5};8\,\Big];$$

$$(3):\begin{cases} -\dfrac{p}{2}>1, \\ 1^2+p+2p+1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p<-2, \\ p>-\dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow p\in\varnothing.$$

Объединяя решения систем (1)-(3), получаем ответ.

<u>**Ответ**</u>**:** $p\in\left(4-2\sqrt{5};\dfrac{17}{2}\right)$.

Иррациональные уравнения с параметрами

Существует несколько способов решения иррациональных уравнений с параметрами. Познакомимся с ними, разобрав следующий пример.

Пример. **В зависимости от значений параметра a решить уравнение**

$$\sqrt{4x+a}=2x-1 \qquad (1)$$

Решение. Решим уравнение (1) пятью способами, которые необходимо знать, ибо наряду с другими подходами они могут быть использованы и при решении иных типов уравнений.

Способ 1. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 4x+a=(2x-1)^2, \\ x\geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} 4x^2-8x+1-a=0, \\ x\geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(2)

Решая уравнение из системы (2), находим

$$x_1=\frac{2-\sqrt{a+3}}{2}, \quad x_2=\frac{2+\sqrt{a+3}}{2}, \qquad (3)$$

откуда следует, что при $a=-3$ уравнение (1) имеет одно решение $x=1$. Если $a>-3$, то $x_1<x_2$, и тогда уравнение (1) будет иметь два решения при тех значениях параметра a, при которых совместна система

$$\begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{a+3}}{2}\geq \dfrac{1}{2}, \\ a>-3, \end{cases}$$

т.е. при $-3<a\leq -2$

Уравнение (1) будет иметь только один корень x_2, если $x_1<\dfrac{1}{2}$, а $x_2\geq \dfrac{1}{2}$. В этом случае решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{a+3}}{2}<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2+\sqrt{a+3}}{2}\geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

приходим к выводу, что $a > -2$.

Замечая теперь, что при $a < -3$ дискриминант уравнения системы (2) отрицателен, получаем

<u>Ответ:</u> если $a < -3$, то решений нет;

если $a = -3$, то $x = 1$;

если $-3 < a \le -2$, то $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{a+3}}{2}$;

если $a > -2$, то $x = \dfrac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$.

<u>Способ 2</u>. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение из системы (2), корни которого задаются формулами (3). Но здесь надо иметь в виду, что при возведении обеих частей уравнения (1) в квадрат могли появиться посторонние корни.

Поэтому при данном способе решения необходимо произвести проверку. Так, подставляя корень x_1 в исходное уравнение, придем к соотношению

$$\left|1 - \sqrt{a+3}\right| = 1 - \sqrt{a+3},$$

откуда $-3 \le a \le -2$.

Если же подставить корень x_2 в уравнение (1), то придем уже к отношению $\left|\sqrt{a+3} + 1\right| = \sqrt{a+3} + 1$, и, таким образом, $a \ge -3$.

Учитывая теперь, что при $a < -3$ корней нет, а при $a = -3$ имеем $x = 1$, получаем тот же ответ, что и при первом способе решения.

<u>Способ 3.</u> Если воспользоваться геометрическим смыслом квадратного трехчлена, то, обращаясь к равносильной уравнению (1) в системе (2), приходим к выводу, что уравнение (1)будет иметь корни x_1 и x_2 в том случае, когда корни квадратного трехчлена $f(x) = 4x^2 - 8x + 1 - a$ не меньше $\frac{1}{2}$. Аналитически соответствующие условия записываются в виде системы

$$\begin{cases} D = 16(3+a) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{8}{8} > \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 4 + 1 - a \geq 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $-3 < a \leq -2$.

При $a = -3$ уравнение (1) имеет решение $x = 1$.

Если же $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2 - a < 0$, т.е. $a > -2$, то уравнение (1) будет иметь один корень x_2. При $a < -3$ решений нет.

__*Способ 4.*__ Рассмотрим графики функций

$$y_1(x) = 2\sqrt{x + \frac{a}{4}} \text{ и } y_2\ (x) = 2x - 1,$$

заданных соответственно левой и правой частями уравнения (6.1).

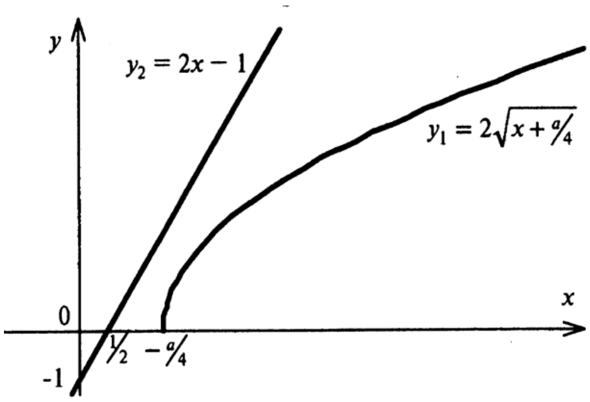


Рис.6.1

Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут решениями уравнения (1). При $a < -3$ графики не пересекаются (см. рис. 6.1) и значит уравнение (1) решений не имеет.

При $a = -3$ графики касаются и уравнение (1) имеет один корень $x = 1$.

При $-3 < a \leq -2$ уравнение (1) будет иметь корни x_1 и x_2, определяемые формулами (3) (см. рис. 6.2).

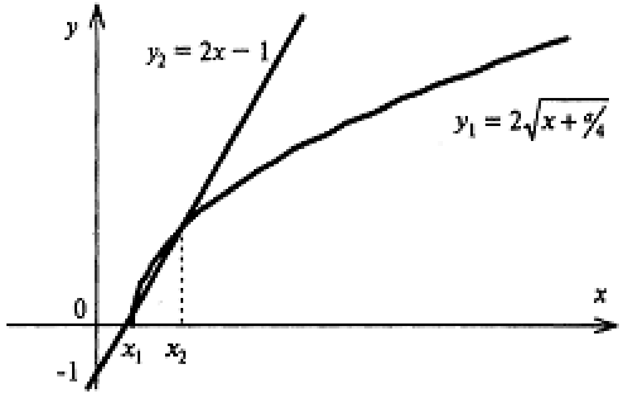


Рис.6.2

При $a < -2$ графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в одной точке, и значит уравнение (1) имеет одно решение x_2 (см. рис. 6.3)

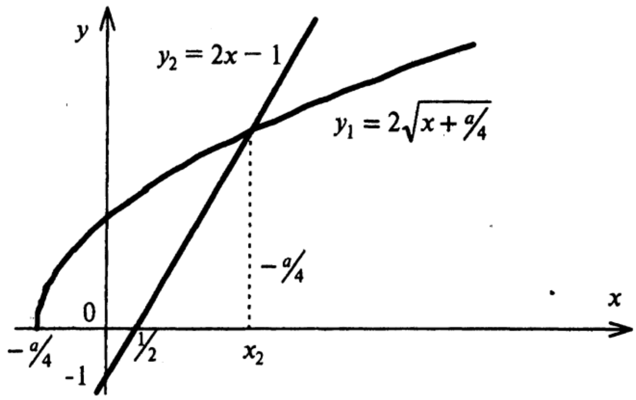
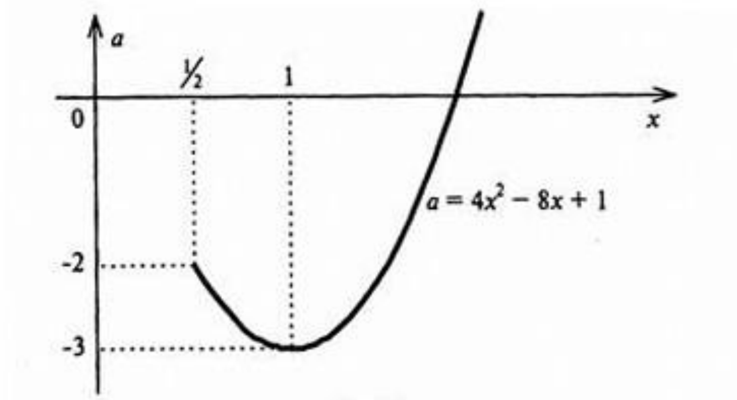


Рис.6.3

<u>Способ 5.</u> Перепишем равносильную уравнению (1) систему (2) в виде

$$\begin{cases} a = 4x^2 - 8x + 1, \\ x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Построив тогда в плоскости xOa график функции $a(x) = 4x^2 - 8x + 1$ при условии $x \geq \dfrac{1}{2}$ (см. рис. 6.4), мы приходим к выводам, полученным ранее четырьмя рассмотренными способами.



О т в е т : если $a < -3$, то решений нет;

если $a = -3$, то $x = 1$;

если $-3 < a \le -2$, то $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{a+3}}{2}$;

если $a > -2$, то $x = \dfrac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$.

Показательные и логарифмические неравенства с параметрами

П р и м е р . **Найти все значения параметра a, при которых неравенство**

$$\log_{\frac{9-5a}{4}} \left[\frac{(3-a)x^2 - 4a + 7}{x^2 + 4} \right] > 0$$

выполняется для всех действительных значений x.

Р е ш е н и е . Исходное неравенство

$$\log_{\frac{9-5a}{4}} \left[\frac{(3-a)x^2 - 4a + 7}{x^2 + 4} \right] > \log_{\frac{9-5a}{4}} 1$$

равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<\dfrac{9-5a}{4}<1,\\ 0<\dfrac{(3-a)x^2-4a+7}{x^2+4}<1,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{9-5a}{4}>1,\\ \dfrac{(3-a)x^2-4a+7}{x^2+4}>1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<9-5a<4,\\ (3-a)x^2-4a+7>0,\\ (3-a)x^2-4a+7<x^2+4,\end{cases}\\ \begin{cases}9-5a>4,\\ (3-a)x^2-4a+7>x^2+4,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<a<\dfrac{9}{5},\\ (3-a)x^2-4a+7>0,\\ (2-a)x^2-4a+3<0,\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}a<1,\\ (2-a)x^2-4a+3>0,\end{cases} \quad (2)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

В системе (1) параметр $a<\dfrac{9}{5}$, поэтому коэффициент $(2-a)$, стоящий при x^2 в левой части последнего неравенства, положителен, следовательно, последнее неравенство системы (1) равносильно неравенству

$$x^2<\frac{4a-3}{2-a},$$

которое не может выполняться при всех действительных значениях x при любом фиксированном значении параметра a. Таким образом, система (1) не дает искомых значений параметра.

В системе

$$\begin{cases}a<1,\\ (2-a)x^2>4a-3,\end{cases}$$

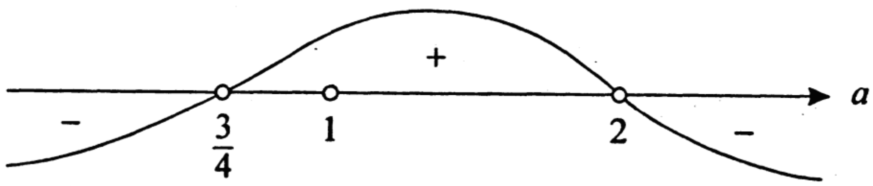
(2)

из первого неравенства ($a<1$) так же, как и раньше, вытекает, что $2-a>0$, следовательно, второе неравенство равносильно неравенству

$$x^2 > \frac{4a-3}{2-a},$$

которое, очевидно, выполняется для всех действительных x тогда и только тогда, когда

$$\frac{4a-3}{2-a} < 0:$$



С учетом того, что $a<1$, получаем $a<\frac{3}{4}$.

<u>Ответ:</u> $a \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

Производная и ее применения

<u>Пример.</u> Найти все значения параметра a, при которых функция

$$y = \frac{x^2+2ax-3a-4}{x-2}$$

имеет хотя бы один экстремум строго между числами a и $3a$.

<u>Решение.</u> Для вычисления экстремумов функции $y(x)$ найдем её производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x^2+2ax-3a-4}{x-2}\right)' = \frac{(2x+2a)(x-2)-(x^2+2ax-3a-4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+4-a}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-a}{(x-2)^2},$$

откуда следует, что в точках экстремума, то есть при $y'(x)=0$, значение параметра $a=(x-2)^2>0$, так как $x \neq 2$. Поэтому интервал $(a;3a)$, на котором, согласно условию задачи, надо искать экстремум, целиком расположен справа от точки 0.

Дальнейшее решение задачи изложим двумя способами.

<u>I- ый способ.</u> Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x)=x^2-4x+4-a$ с абсциссой вершины $x_в=2$ и дискриминантом D, положительность которого следует из того, что $\frac{D}{4}=2^2-(4-a)=a>0.$

Если абсцисса $x_в$ вершины параболы, являющейся графиком функции $y=f(x)$, расположена левее интервала $(a;3a)$, то есть величина $x_в \le a$, то значения $f(a)$ и $f(3a)$ должны быть разных знаков, причем $f(a)$ - отрицательно:

$$\begin{cases} x_в \le a, \\ f(a)<0, \\ f(3a)>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2, \\ a^2-5a+4<0, \\ 9a^2-13a+4>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2, \\ 1<a<4, \\ \left[\begin{array}{l} a<\frac{4}{9}, \\ a>1, \end{array} \right. \end{cases}$$

откуда следует, что $2 \le a < 4.$

Если $x_в$ лежит строго между a и $3a$, то либо $f(a)$, либо $f(3a)$ должно быть положительно:

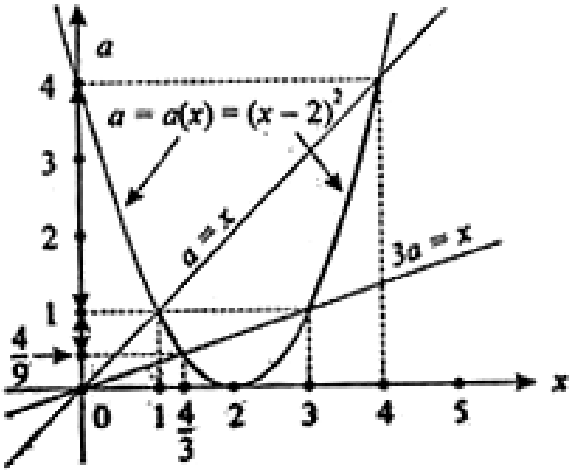
$$\begin{cases} a<x_в<3a, \\ \left[\begin{array}{l} f(a)>0, \\ f(3a)>0, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a^2-5a+4>0, \\ 9a^2-13a+4>0, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a<1, \\ a>4, \\ a<\frac{4}{9}, \\ a>1, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}<a<2, \\ a \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3}<a<1, \\ 1<a<2. \end{array} \right.$$

Если $x_в$ лежит правее интервала $(a;3a)$, то есть $x_в \ge 3a$, то значения $f(a)$ и $f(3a)$ должны быть разных знаков, причем $f(a)$ - положительно:

$$\begin{cases} x_в \ge 3a, \\ f(a) > 0, \\ f(3a) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \dfrac{2}{3}, \\ a^2 - 5a + 4 > 0, \\ 9a^2 - 13a + 4 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \dfrac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 4, \end{array}\right. \\ \dfrac{4}{9} < a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{4}{9} < a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} < a \le \frac{2}{3}.$$

Объединяя найденные значения параметра a в рассмотренных трех случаях$\left(a \in \ 2;4 \ , a \in \left(\dfrac{2}{3};1\right) \cup (1;2), a \in \left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{3}\right] \right)$, получает ответ: $a \in \left(\dfrac{4}{9};1\right) \cup (1;4)$.

<u>II – й способ.</u>



Как мы уже получили ранее, в точках экстремума, то есть при $y'(x) = 0$ имеем $a = (x-2)^2$. В плоскости Oxa нарисуем график функции $a = a(x) = (x-2)^2$. Точки экстремума будем искать на интервале $(a;3a)$, то есть при $\begin{cases} a < x, \\ 3a > x, \end{cases}$ что соответствует внутренним точкам острого угла, ограниченного прямыми $a = x$ и $3a = x$, и находящегося в первой четверти. Найдем точки пересечения прямых $a = x$ и $3a = x$ с параболой $a = (x-2)^2$. Решая квадратные уравнения, получаем:

$$\begin{cases} a = x, \\ a = (x-2)^2, \end{cases} \Rightarrow a \in \ 1;4 \ ,$$

$$\begin{cases} 3a = x, \\ a = (x-2)^2, \end{cases} \Rightarrow a \in \left\{\frac{4}{9}; 1\right\}.$$

Так как производная $y'(x) > 0$ при $a < (x-2)^2$ и $y'(x) < 0$ при $a > (x-2)^2$, то исходная функция $y(x)$ является возрастающей в области $(x; a)$, расположенной ниже параболы $a = (x-2)^2$, и убывающей в области, расположенной выше этой параболы; в точках параболы функция $y(x)$ имеет экстремум (в силу того, что выполнено достаточное условие экстремума – смена знака производной).

Левая ветвь параболы $a = (x-2)^2$ пересекается с прямыми $3a = x$ и $a = x$ в точках $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{9}\right)$ и $(1;1)$ соответственно. Все точки параболы, расположенные строго между этими точками пересечения, отвечают точкам экстремума функции $y(x)$, соответствующим искомым значениям параметра a: $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right)$ (проекция на ось Oa указанного участка левой ветви параболы $a = (x-2)^2$).

Правая ветвь параболы $a = (x-2)^2$ пересекается с прямыми $3a = x$ и $a = x$ в точках $(3;1)$ и $(4;4)$ соответственно. Все точки параболы, расположенные строго между этими точками пересечения, отвечают точкам экстремума функции $y(x)$, соответствующим искомым значениям параметра a: $a \in (1;4)$ (проекция на ось Oa указанного участка правой ветви параболы $a = (x-2)^2$).

Объединяя найденные выше интервалы $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$ и $(1;4)$ значений параметра a, получаем ответ.

Ответ: $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1;4)$.

Заключение

Как сказано во введении, основной целью диссертационного исследования является создание методической системы обучения решению задач с параметрами с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra в рамках школьного курса алгебры 9-11 классов.

Для достижения данной цели была проделана следующая работа:

– проанализирована учебно-методическая литература по теме «Задачи с параметром»;

– изучены психологические особенности старшеклассников; (в работе не представлено);

– рассмотрены основные способы решения задач с параметром;

– исследованы основные принципы обучения решению задач с параметрами с использованием анимации;

– выделены критерии отбора содержания учебного материала;

Основной целью применения разработанного метода является формирование у учащихся навыка решения типовых уравнений и неравенств с параметром, в том числе с использованием анимационно графического метода, основанного на анимационных возможностях компьютерной среды GeoGebra.

Разработан элективный курс «Решение задач с параметрами». Он необходим учащимся как при подготовке к ЕГЭ, так и к вступительным экзаменам в ВУЗы. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики.

Даже если бы эти задачи не предлагались на выпускных и вступительных экзаменах, то все равно в школьной математике задачам с параметрами должно уделяться большое внимание. В этом автор данного реферата глубоко убеждена: ведь известно, какую роль играют данные задачи в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются (и опыт это подтверждает) с другими задачами. Решение задач, уравнений с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале.

При решении задач с параметрами одновременно активно реализуются следующие основные методические принципы:

принцип параллельности – следует постоянно держать в поле зрения несколько тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь;

принцип вариативности – рассматриваются различные приемы и методы решения с различных точек зрения: стандартность и оригинальность, объем вычислительной и исследовательской работы;

принцип самоконтроля – невозможность подстроиться под ответ вынуждает делать регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач;

принцип регулярности – увлеченные математикой дети с удовольствием дома индивидуально исследуют задачи, т. е. занятия математикой становятся регулярными, а не от случая к случаю на уроках.

Разработанный элективный курс может быть использован учителями математики при подготовке к ЕГЭ, вступительным экзаменам в ВУЗы, на занятиях математического кружка. В нем систематизирован теоретический и дидактический материал, отвечающий ***принципу последовательного нарастания сложности.***

В процессе апробации разработанной методики на уроках математики в школе № 10 г. Красноярска выдвинутая во введении гипотеза нашла свое подтверждение.

Материалы диссертационного исследования опубликованы в двух статьях автора и были доложены на семинаре кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания.

Библиографический список

1. Алгебра. 8 кл. [Текст] : учебник для общеобразоват. учреждений и шк. с углубл. изучением математики / [Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. – 9-е изд. , дораб. – М. : Просвещение, 2010. – 303 с. : ил.

2. Амелькин. В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. – 2-е изд. - Мн. ООО «Асар», 2002. – 464 с.; ил.

3. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды [Текст] / Ю. К. Бабанский ; сост. М. Ю. Бабанский. – М. : Педагогика, 1989. – 560 с

4. Большая Советская Энциклопедия. – М.:

5. Бортаковский А. С., Закалюкин В. М. Задачи повышенной сложности по математике для абитуриентов, - М.: Изд-во МАИ, 2003. – 424 с.

6. Бортаковский А. С., Закалюкин В., Шапошников В. П. Экзаменационные задачи и варианты по математике: Учебное пособие. – 3-е изд. – М.: Изд-во МАИ, 2004. – 384 с.

7. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – 4-е изд. – Просвещение, 1997. – 271 с.; ил.

8. Говоров В. М. и др. Математика: сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М.: АСТ: Астрель,2005. – 829 с.; ил.

9. Горнштейн П. И., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б. Якир М. С. Экзамен по математике и его подводные рифы. – М.: Илекса, Харьков:Гимназия, 1998. – 236 с.

10. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – 3-е изд. – М.; Илекса, Харьков: Гимназия, 1998, - 336 с.

11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М., Харьков, «Илекса», Гимназия», 1999.

12. Данелян С. А. Организация самостоятельной работы выпускников в рамках подготовки к ЕГЭ по математике с применением программного обеспечения GeoGebra / С. А. Данелян, И. И. Данелян // Педагогическое мастерство: материалы II междунар. науч. конф. (г. Москва, декабрь 2012 г.). — М.: Буки-Веди, 2012.

13. Дорофеев Г. В. и др. Математика: Для поступающих в вузы: Пособие. – 5-е изд. – М.: Дрофа, 2002. – 672 с.; ил.

14. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс] : Мультимедиа демонстрация по теме 3.10 Решение задач с параметром с использованием графиков входящих в условие задачи функций. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/176a6cd2-c764-487f-bb83-82fa7a290bcb/MD_3-10.swf, свободный.

15. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс] : Задача для самопроверки по теме 3.11 Решение задач с параметром с использованием графиков входящих в условие задачи функций. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/38ed0277-5494-4aae-921d-7f707b89a5a4/S_3.11_1.swf, свободный.

16. Ершова А. П., Голобородько В. В., Ершова А. С. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре (7-11 кл)

17. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы II Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 14-15 ноября 2013 г.

18. История педагогики и образования [Текст] : От зарождения воспитания в первобытном обществе до конца XX в. / А. И. Пискунов и др. ; под ред. А. И. Пискунова. – М. : Сфера, 2001. – 512 с.

19. Кагермазова, Л. Ц. Возрастная психология [Электронный ресурс] : Психология развития / Л. Ц. Кагермазова. – Электрон. текст. дан. - Режим доступа:

https://docviewer.yandex.ru/?url=http%3A%2F%2Fkpip.kbsu.ru%2Feluch%2Fvozr_psih.doc&name=vozr_psih.doc&lang=ru&c=574c2dc68e34, свободный.

20. Карп. А. П. Сборник задач для подготовки к выпускным экзаменам по алгебре и началам анализа. – Санкт-Петербург: Оракул, 1998. – 284 с.

21. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики

22. Лебедев В. В. Решения задач репетиционного экзамена по математике 2002-2004 г. М.: «Экспресс-Полиграф-Сервис»., - 2002.

23. Майер В.Р., Семина Е. А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров-будущих учителей математики

24. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра: Доп. главы к шк. и кл. с углубл. изуч. матаматики. – М.: Просвещение,1997. – 224 с.; ил.

25. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра 7 класс. – М.: «Просвещение»,2004.

26. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феоктистов И.Е. – М.: «Мнемозина», 2010.

27. Маркова Т. В., Тарасова Л. В., Куркова Н. Н. Использование интерактивной геометрической среды GEONExT и GEOGEBRA при обучении геометрии в 7-8 классах http://sc-journal.mggu-sh.ru/media/articles/2013_issue1/Markova_Tarasova_Kurkova__Use_of_interactive_geometry_enviroment_GEONExT_and_Geo_Gebra_for_teatching_Geometry_in_7_8_classes.pdf

28. Математическая энциклопедия. – М.: "Советская энциклопедия", 1977.

29. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Сборник задач и контрольных работ (7-9 кл.). – Москва-Харьков: Илекса, Гимназия, 1999.

30. Методическое пособие по GeoGebra 3D: построение 3D графиков

31. Мирошин, В. В. Решение задач с параметрами [Текст] : Теория и практика / В. В. Мирошин. – М. : Экзамен, 2009. – 286 с.

32. Мордкович, А. Г. Алгебра [Текст] : 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – 10-е изд. , доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 256 с. : ил.

33. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа [Текст] : 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 14-е изд. , стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 400 с. : ил.

34. Мордкович, А. Г. Математика [Текст] : алгебра и начала математического анализа, геометрия. 11 кл. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 2-е изд. , стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 311 с. : ил.

35. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Учебно-методическое пособие для учащихся 10-11 кл. – М.: Экзамен, 1998. – 192 с.

36. Осколков В. А. и др. Сборник конкурсных задач по математике с решениями и ответами. – М.: МИФИ, 2003. – 92 с.

37. Педагогика [Электронный ресурс] : Принципы обучения. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://www.grandars.ru/college/psihologiya/principy-obucheniya.html, свободный. Приходько Л. А., Грознова С. Ю. Математика: Пособие для поступающих в 10-ый лицейский класс. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2002. – 69 с.

38. Рождественская Л. Помощница GeoGebra или учителя учат учителей...https://edugalaxy.intel.ru/?automodule=blog&blogid=8&showentry=1017

39. Ромашко В. Д. Параметры. – Интернет.

40. Саакян С. М. и др. задачи по алгебре и началам анализа: Пособие для учащихся 10-11 кл. общеобразоват.учреждений. – М.: Просвещение, 1997. – 256 с.; ил.

41. Сайт GeoGebra. http://www.geogebra.org

42. Сборники «Математика. ЕГЭ». – М.: АСТ: Астрель,2006, 2007.

43. Сборники «Математика. ЕГЭ». – М.: Просвещение, 2005-2007.

44. Сборники «Математика. ЕГЭ». – М.: Экзамен,2004, 2005, 2006.

45. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. – М.:КДУ, 2005. – 3-е изд. – 360 с.; ил.

46. Сканави М. И. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. – 7-е изд. – М. 1996. – 528 с.; ил.

47. Турчин, Г. Д. Народное образование. Педагогика. [Электронный ресурс] : Золотое правило дидактики Я. А. Коменского / Г. Д. Турчин. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://cyberleninka.ru/article/n/zolotoe-pravilo-didaktiki-ya-a-komenskogo, свободный.

48. Черкасов О. Ю.Якушев А. Г. Математика для поступающих в серьезные вузы. – М.: Московский лицей, 1998. – 400 с.

49. Шаповаленко, И. В. Возрастая психология [Текст] : Психология развития и возрастная психология / И. В. Шаповаленко. – М. : Гардарики, 2005. – 349 с.

50. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: АСТ: Астрель, 2001. – 448 с.; ил.

51. Шахмейстер, А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст] / А. Х. Шахмейстер. – М. : МЦНМО ; СПб. : Петроглиф : Виктория плюс, 2010. – 304 с. : ил.

52. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2014. [Текст] : Математика. Задача С5. Задачи с параметром / С. А. Шестаков ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2014. – 240 с.

53. Яникова Н. Математика в парке имения Алтун.

54. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М.: «Просвещение», 1986.

55. Ященко И.В. ЕГЭ 2015. Математика. 36 вариантов. Типовые экзаменационные варианты. – М. «Национальное образование», 2015. -272 с.

56. [Электронный ресурс] / Фирма 1С. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : 1С : Образование 4. Дом, [2014]. – 1 элект. опт. диск (CD-ROM) : зв., цв.; 12 см. + Инструкция для пользователя (1 л.). – (1С : Школа). - Миним. систем. требования : Windows 2000 / XP / Vista / Windows 7 / Windows 8; Pentium III 700 Мгц; HDD 785 Мб; RAM 256 Мб; видеорежим 1024x768, true color; устройство чтения CD / DVD-ROM; звуковая карта 16 бит; колонки или наушники; мышь. – Диск и сопроводит. материал помещены в контейнер 12x14 см.

57. http://kpfu.ru/portal/docs/F487527991/Shigapov.pdf

58.https://edugalaxy.intel.ru/index.php?automodule=blog&blogid=8190&showentry=6286

59.http://www.kspu.ru/upload/documents/2013/12/01/177f94bf69a68473a81b57d041e69a73/sbornik-forum-pdf.pdf

Публикации автора:

1. Жаркова О.А. Использование среды GEOGEBRA при решении задач с параметрами. IV Международный научно-образовательный форум 2015 КГПУ им. В.П. Астафьева ЧЕЛОВЕК,СЕМЬЯ И ОБЩЕСТВО: ИСТОРИЯ И

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ. Информационные технологии в математике и математическом образовании. Красноярск, 18-19 ноября 2015г.

2. Жаркова О.А. GEOGEBRA в математике Научно-издательский центр АЭТЕРНА. СОВРЕМЕННЫЙ ВЗГЛЯД НА БУДУЩЕЕ НАУКИ. 25 мая 2016г.

3. Жаркова О.А. Современные математические подходы. Научно-издательский центр АЭТЕРНА. ЭВОЛЮЦИЯ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ.25 июля 2016г.

4. Жаркова О.А. Преобразование графиков функций с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra Научно-издательский центр АЭТЕРНА. ПРОШЛОЕ. НАСТОЯЩЕЕ. БУДУЩЕЕ. 1 августа 2016г.

5. Жаркова О.А. Компьютерная анимация при подготовке к ЕГЭ. V Международный научно-образовательный форум 2016 КГПУ им. В.П. Астафьева ЧЕЛОВЕК,СЕМЬЯ И ОБЩЕСТВО: ИСТОРИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ. Информационные технологии в математике и математическом образовании. Красноярск, 16-17 ноября 2016г.