

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

**Материалы V Всероссийской научно-методической конференции
с международным участием**

Красноярск, 16–17 ноября 2016 г.

КРАСНОЯРСК
2016

ББК 74.00
И 471

Редакционная коллегия:

В.Р. Майер (отв. ред.)
А.В. Тимофеев
С.В. Ларин

И 471 Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 16–17 ноября 2016 г. / В.Р. Майер (отв. ред.); ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2016. – 162 с.

ISBN 978-5-00102-038-7

ББК 74.00

ISBN 978-5-00102-038-7

(V Международный форум
«Человек, семья и общество:
история и перспективы развития»)

© Красноярский государственный
педагогический университет
им. В.П. Астафьева, 2016

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИКЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКОМ
ОБРАЗОВАНИИ**

О ТЕХНОЛОГИИ СОЗДАНИЯ ТЕСТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

TECHNOLOGY CREATE TESTS ON MATHEMATICAL LOGIC IN THE COMPUTER ENVIRONMENT GEOGEBRA

Я.А. Бондарева,
В.А. Масленкова, М.А. Кейв

Y.A. Bondareva, V.A. Maslenkova,
M.A. Keiv

Математическая логика, логические задачи, среда «Geogebra», тесты.

В статье рассматривается технология создания тестов по математической логике с помощью среды «Geogebra», которая предоставляет возможность построения графа для решения логических задач.

Mathematical logic, logical problems, wednesday «Geogebra», tests.

The article discusses the technique of creating testing on mathematical logic with the help of «Geogebra» environment that provides the opportunity to construct a graph to solve logic problems.

В современном образовании применение тестов является необходимым компонентом обучения.

Слово «тест» английского происхождения и на языке оригинала означает «испытание», «проверка». Педагогический тест – это инструмент оценивания обученности учащихся, состоящий из системы тестовых заданий, стандартизированной процедуры проведения, обработки и анализа результатов. В узком смысле тестирование в педагогике означает использование стандартизированных педагогических тестов для измерения и оценки результатов обучения. В широком же смысле тестирование – это любое испытание с целью измерения достижений обучаемого [1].

Компьютерные дидактические тесты на сегодняшний день приобретают все большее распространение, что обусловлено стремлением повысить оперативность и объективность оценки качества обучения.

Тесты могут быть как контролирующими, так и обучающе-тренировочными. Первые предназначены для оценивания учебных достижений учащихся, вторые помогают учащимся выявить и устранить существующие пробелы в их подготовке. В обучающе-тренировочных тестах предусмотрен анализ выполнения учащимся каждого тестового задания, результат которого сопровождается комментариями, разъяснениями, демонстрацией последствий, возникающих в ситуации выбранных решений, что имитирует присутствие преподавателя в процессе самостоятельного изучения материала. Применение компьютерных технологий позволяет не только оперативно моделировать наступающие последствия, но и наглядно представлять их с использованием изображения, анимации.

Наиболее ярким представителем компьютерной составляющей динамической математики является компьютерная среда GeoGebra. Эта среда позволяет посредством создания анимационных чертежей визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования при решении разнообразных математических задач и при изучении математических объектов, а также позволяет создавать тесты по математике.

В данной статье представим опыт создания тестов по математической логике в компьютерной среде GeoGebra.

Специфика решения логических задач заключается в основном не в заучивании правил и готовых алгоритмов решения, а в умении рассуждать и делать правильные выводы.

При решении логических задач, в условии которых требуется найти соответствие между элементами различных множеств или перебрать все возможные варианты, наиболее эффективным, доступным и наглядным методом является метод построения графа. Компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможность построения такого графа для решения логических задач. В связи с этим возникла идея создания обучающе-тренировочного теста по математической логике в данной среде.

Технология создания тестов в компьютерной среде GeoGebra подразумевает выполнение ряда следующих действий:

1) создание ползунка с именем n , на количество вопросов: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вопросов; шаг ползунка – 1;

2) оформить первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать первый вопрос;

3) создать ползунок для выбора ответа на первый вопрос: выбрать на панели инструментов кнопку «ползунок»; задать минимальное значение – 1, максимальное значение – количество вариантов ответа; шаг ползунка – 1; установить флажок «закрепленный» и флажок «вертикальный» (для каждого вопроса нужен свой ползунок для формирования ответа);

4) оформить меню выбора ответа: выбрать на панели инструментов кнопку «текст»; сформулировать варианты возможных ответов «в столбик» рядом с вертикальным ползунком;

5) подготовить поле для следующего вопроса, скрыв все, что относится к первому вопросу: правой кнопкой мыши кликнуть на каждый объект первого вопроса и выбрать в меню вкладку «свойства»; для всех объектов во вкладке «дополнительно» отметить условие отражения объектов $n=1$;

6) повторяя шаги 2) – 5), создать остальные вопросы так, чтобы для получения ответа необходимо было воспользоваться возможностями программы GeoGebra;

7) создать таблицу для подсчета результатов: в строке ввода задать переменные $B_i = \text{Если}[\langle \text{имя ползунка ответа} \rangle == \langle \text{номер правильного ответа} \rangle, 1, 0]$, где i – номер вопроса;

для подсчета правильных ответов в строке ввода задать переменную $S = \sum_{i=1}^n B_i$ с помощью

команды $\text{Сумма}\{\{B_i\}\}$, где i – номер вопроса; для отображения на экране результатов тестирования в строке ввода задать таблицу, используя команду $\text{Таблица}\{\{i\}, \{B_i\}, S\}$, где i – номер вопроса);

8) если необходимо ограничить время выполнения теста, тогда для ползунка n , отвечающего за смену вопросов на экране, нужно задать анимацию и время просмотра каждого вопроса: правой кнопкой мыши кликнуть на ползунок n и выбрать в меню вкладку «анимировать»; во вкладке «свойства» для ползунка n задать скорость анимации.

В качестве примера представим фрагмент теста по математической логике, разработанного в соответствии с предложенной технологией в компьютерной среде GeoGebra.

На рисунках 1–3 проиллюстрировано, как выглядят вопросы теста по математической логике в компьютерной среде GeoGebra.

В ходе выполнения теста тестируемый, управляя вертикальным ползунком, выбирает вариант ответа и переходит к следующему вопросу. Если в дополнительных свойствах для объекта «Таблица результатов» не указывать условия отображения данного объекта, то тогда обучающийся может наблюдать результаты и оценку выполнения теста.

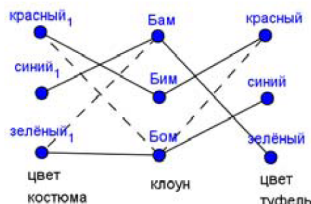
На рисунке 4 представлен результат выполнения теста: в таблице указаны баллы за ответ на каждый вопрос теста, общая сумма баллов и оценка выполнения теста.

Вопрос 1.

Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красном, синем и зелёном костюмах. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и костюм Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а костюм нет.

Постройте граф соответствия между множеством клоунов и множеством цветов для туфель и костюмов (соедините пунктирным ребром отсутствие соответствия, а сплошным ребром - возможное соответствие между объектами указанных множеств) и определите цвет костюмов и туфель у Бомы и Бима.

Варианты ответа



1. Костюм Бомы синий, а туфли зелёные
Туфли и костюм Бима красные
2. Костюм Бомы красный, а туфли зелёные
Туфли и костюм Бима синие
3. Костюм Бомы зелёный, а туфли синие
Туфли и костюм Бима красные
4. Костюм и туфли Бомы зелёные
Туфли и костюм Бима красные

n = 1



Рис. 1

Вопрос 2.

Четыре футбольных команды: итальянская команда «Милан», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Марк. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд. Требуется определить тренера каждой команды, если известно: а) Зенит не тренируется у Марка и Антонио. б) Милан обещал никогда не брать Марка главным тренером.

Варианты ответа



1. «Зенит» у Антонио, «Милан» у Марка, «Реал» у Николая, «Челси» у Родриго.
2. «Милан» у Родриго, «Зенит» у Марка, «Реал» у Антонио, «Челси» у Николая.
3. «Зенит» у Родриго; «Милан» у Николая; «Челси» у Антонио; «Реал» у Марка.
4. «Милан» у Антонио, «Зенит» у Марка, «Челси» у Николая, «Реал» у Родриго.

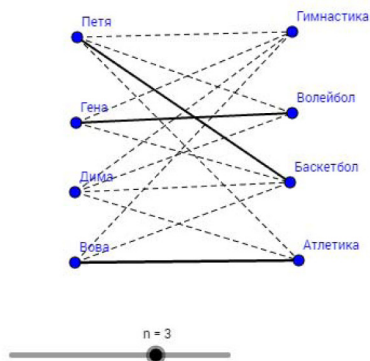
n = 2



Рис. 2

Вопрос 3.

Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Петя, Дима и волейболист учатся в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто из мальчиков в какой секции занимается?



Варианты ответа

1. Петя – легкоатлет, Гена – гимнаст, Дима – волейболист, а Вова – баскетболист.
2. Петя – баскетболист, Гена – волейболист, Дима – гимнаст, а Вова – легкоатлет.
3. Петя – легкоатлет, Гена – баскетболист, Дима – гимнаст, а Вова – волейболист.
4. Петя – гимнаст, Гена – легкоатлет, Дима – волейболист, а Вова – баскетболист.

Рис. 3

Результаты тестирования и оценка

Номер вопроса Баллы

{1} {1}

{2} {1}

{3} {1}

Всего баллов {3} { $x \geq$ "отлично"} Оценка



Рис. 4

Вывод: используя возможности компьютерной среды GeoGebra, технология создания тестов в процессе обучения учащихся математике является инновационной.

Библиографический список

1. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования (как выбирать, создавать и использовать тесты для целей в образовании). М.: Интеллект-центр, 2001.

РАВЕНСТВА МЕНЕЛЯ, ЧЕВЫ И ДРУГИЕ РАВЕНСТВА

THE EQUALITIES OF MENELAUS', CHEVY'S AND THE OTHER EQUALITIES

В.К. Гаврилов

V.K. GavriloV

Контур, теоремы Менеля, Чевы.

Предложен вариант расширенной трактовки теоремы Менеля на контуре из отрезков прямых. Для треугольника с прямыми Чевы доказано существование ряда контуров с равенствами аналогичными равенству Чевы.

Counter, Fales', Menelaus', Ceva's theorems.

Upon base of Fales' theorem it is offered the variant of the extended interpretation of Menelaus' theorem on counter from direct lines. For the triangle with the Ceva lines it is proved existence of the row counters with equalities similar to Ceva's equality.

Теорема Чевы для студента-математика – примерно то же самое, что и теорема Пифагора для школьника. В упрощённом виде содержание теоремы Чевы следующее: если прямые, проходящие через вершины треугольника, имеют в треугольнике точку пересечения (прямые Чевы [1, с. 11]), то произведение отношений длин отрезков на сторонах треугольника равно единице. Теорема Чевы хорошо изучена [2] и рассмотрена для применения в школьном курсе геометрии в работе И.Ф. Шарыгина [3]. Варианты доказательств теоремы Чевы приведены в работе [Охман, 2015].

Рассмотрим доказательство теоремы Чевы с помощью теоремы Менеля [4, с. 82; 5], для чего несколько изменим формулировку теоремы последнего.

Обычно доказательство теоремы Менеля выполняют, рассматривая отрезки (рис. 1), образованные сторонами треугольника $A_0C_1C_0$ и прямой B_0B_1 , секущей треугольник и пересекающей продолжение стороны A_0C_1 треугольника в точке B_0 . При таком рассмотрении теорема Менеля имеет следующую формулировку [1, с. 37].

Теорема. Если стороны треугольника $A_0C_1C_0$ (рис. 1) или их продолжения пересекаются прямой B_0B_1 в точках B_0 , O , B_1 , то выполняется равенство Менеля:

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1} \cdot \frac{C_1O}{OC_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1.$$

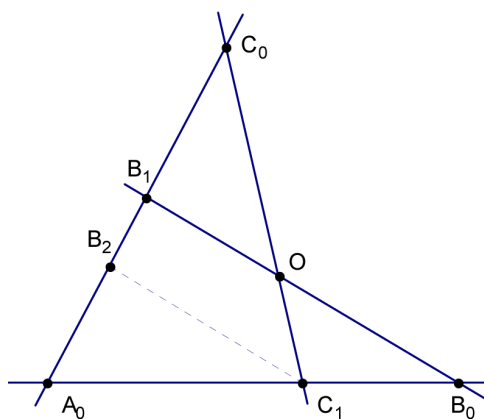
В то же время все отрезки в теореме Менеля, в том числе и стороны треугольника, можно рассматривать в качестве результата пересечения прямых A_0B_0 , A_0C_0 , B_0B_1 , C_0C_1 (рис. 1). При таком рассмотрении предлагается следующая формулировка теоремы Менеля.

Теорема 1. Если прямые A_0B_0 , A_0C_0 , B_0B_1 , C_0C_1 пересекаются, то отрезки между точками пересечения прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице.

Доказательство. По условию замкнутости образовать контур можно только из отрезков, имеющих общие концы. Такими отрезками являются отрезки между точками пересечения прямых A_0B_0 , A_0C_0 , B_0B_1 , C_0C_1 . Минимальное число отрезков разной длины в контуре – три. Тогда число контуров, содержащих отрезки на прямых, согласно формулам комбинаторики, составит: на трёх прямых:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad n=4; \quad m=3; \quad C_6^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 1} = 4;$$

на четырёх прямых – 1.



$$\left(\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\right) \cdot \left(\frac{C_1O}{OC_0}\right) \cdot \left(\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\right) = 1,00$$

$$\left(\frac{B_0A_0}{A_0C_1}\right) \cdot \left(\frac{C_1C_0}{C_0O}\right) \cdot \left(\frac{OB_1}{B_1B_0}\right) = 1,00$$

Рис. 1

Найдём эти контуры.

Параллельно прямой B_0B_1 строим отрезок C_1B_2 [Понарин, 2004, с. 73]. В результате получаем две пары подобных треугольников, для которых, согласно теореме Фалеса [2, с. 17], имеем:

$$\Delta A_0B_0B_1 \sim \Delta A_0C_1B_2; \quad \rightarrow \quad \frac{A_0B_0}{B_0C_1} = \frac{A_0B_1}{B_1B_2}; \quad \frac{A_0B_0}{A_0C_1} = \frac{B_0B_1}{C_1B_2};$$

$$\Delta C_0B_2C_1 \sim \Delta C_0B_1O; \quad \rightarrow \quad \frac{C_1O}{OC_0} = \frac{B_2B_1}{B_1C_0}; \quad \frac{C_1C_0}{C_0O} = \frac{B_2C_1}{B_1O}.$$

Исключив из этих равенств отношения с длинами отрезков B_1B_2 , B_2C_1 , на контуре, содержащем отрезки на прямых A_0B_0 , C_0C_1 , A_0C_0 , и на контуре, содержащем отрезки на прямых A_0B_0 , C_0C_1 , B_0B_1 , соответственно получим:

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1} \cdot \frac{C_1O}{OC_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1; \tag{1}$$

$$\frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OC_0}{C_0C_1} \cdot \frac{C_1A_0}{A_0B_0} = 1. \tag{2}$$

Отметим, что в [2, с. 73] получено одно равенство (1).

Выполнив аналогичные построения для прямой C_0C_1 получим равенства:

$$\frac{A_0C_0}{C_0B_1} \cdot \frac{B_1O}{OB_0} \cdot \frac{B_0C_1}{C_1A_0} = 1; \tag{3}$$

$$\frac{C_0C_1}{C_1O} \cdot \frac{OB_0}{B_0B_1} \cdot \frac{B_1A_0}{A_0C_0} = 1. \tag{4}$$

Умножив (1) на (2) или (3) умножив на (4), получим равенство (5) на контуре из отрезков на четырёх прямых A_0B_0 , A_0C_0 , B_0B_1 , C_0C_1 :

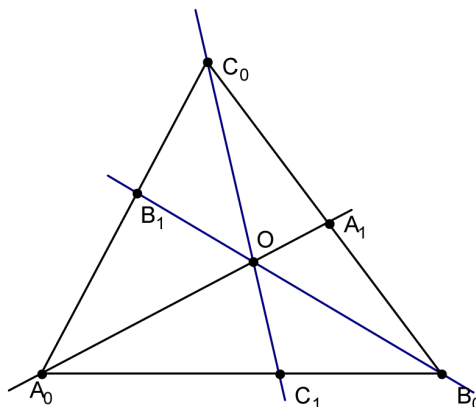
$$(1) \times (2) \quad \rightarrow \quad \frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OC_1}{C_1C_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1. \tag{5}$$

Все контуры из отрезков на прямых A_0B_0 , A_0C_0 , B_0B_1 , C_0C_1 найдены, теорема 1 доказана.

Отметим, что равенства (1) и (3) являются равенством Менелая; равенства (2), (4), (5) – другие равенства.

Приведённые на рис. 1 равенства (1), (2) поясняют формирование контуров из трёх отрезков на четырёх прямых, имеющих точки пересечения. Появление на рис. 1 нулей после единицы не является доказательством и объясняется численной проверкой на компьютере равенств единице.

Ремарка. Ключевым понятием теоремы 1 является понятие «контур». Согласно Интернету, Википедия: «Контур – в общем случае замкнутая линия (на прямой, на поверхности. - Авт.)... Контур в планиметрии – граница плоской фигуры».



$$\left(\frac{A_0C_1}{C_1B_0}\right) \cdot \left(\frac{B_0A_1}{A_1C_0}\right) \cdot \left(\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\right) = 1,00$$

$$\left(\frac{A_0C_1}{C_1B_0}\right) \cdot \left(\frac{B_0B_1}{B_1O}\right) \cdot \left(\frac{OA_1}{A_1A_0}\right) = 1,00$$

Рис. 2

Таким образом, отрезки между точками пересечения четырёх прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице. Всего имеется различных контуров: из отрезков на трёх прямых – 4, на четырёх – 1.

Применим полученные результаты к треугольнику с прямыми Чевы (рис. 2).

В этом треугольнике пара прямых Чевы и прямые, содержащие стороны одного из углов треугольника, соответствуют условиям теоремы 1. В треугольнике $A_0B_0C_0$ для стороны A_0B_0 , согласно теореме Менелая, имеем два равенства:

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1} \cdot \frac{C_1O}{OC_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1;$$

$$\frac{B_0A_0}{A_0C_1} \cdot \frac{C_1O}{OC_0} \cdot \frac{C_0A_1}{A_1B_0} = 1.$$

Следуя [Мендель], делением одного равенства на другое получаем равенство Чевы (6):

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0A_1}{A_1C_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1. \tag{6}$$

Равенство Чевы выполняется на контуре, содержащем стороны треугольника. Равенство единице можно получить и для других контуров, составленных из отрезков на сторонах треугольника и отрезков на прямых Чевы. Всего имеем контуров:

Из отрезков на трёх прямых – 16.

Доказательство. Треугольник с прямыми Чевы содержит шесть пересекающихся прямых. Число комбинаций, содержащих три прямые, согласно формулам комбинаторики, составит:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad n = 6; \quad m = 3; \quad C_6^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 20.$$

Поскольку три прямые по условию замкнутости в контуре не могут иметь одну точку пересечения, нельзя построить контур из трёх прямых в углах треугольника и из трёх прямых Чевы. Тогда общее число $N(3)$ контуров, содержащих отрезки на трёх прямых, составит $N(3) = 20 - 4 = 16$.

В качестве примера найдём контур с отрезками на «чевианах».

Согласно равенству (2) теоремы 1, в треугольнике $A_0B_0C_0$ (рис. 2) для вершин A_0 и B_0 соответственно имеем:

$$\frac{A_0A_1}{A_1O} \cdot \frac{OC_0}{C_0C_1} \cdot \frac{C_1B_0}{A_0B_0} = 1;$$

$$\frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OC_0}{C_0C_1} \cdot \frac{C_1A_0}{A_0B_0} = 1.$$

Поделив эти равенства одно на другое, получим пример контура с отрезками на «чевианах».

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_0} = 1. \quad (7)$$

Отметим, что в треугольнике с прямыми Чевы имеем 6 равенств типа (1), 6 равенств типа (2), 3 равенства типа (7) и одно равенство типа (6): итого 16 равенств на контурах из отрезков на трёх прямых.

Из отрезков на четырёх прямых – 3.

Доказательство. Число комбинаций, содержащих четыре различных прямых, согласно формулам комбинаторики, составит:

$$n = 6; \quad m = 4; \quad C_6^4 = 15.$$

Недопустимую для контура комбинацию прямых получим, прибавляя к недопустимой для контура комбинации из трёх прямых по одной из оставшихся трёх. Тогда общее число $N(4)$ контуров, содержащих отрезки на четырёх прямых, составит:

$$N(4) = 15 - 3 \cdot 4 = 3.$$

Контур из отрезков на четырёх прямых найдём аналогично равенству (5) в теореме 1.

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OC_1}{C_1C_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1;$$

$$\frac{B_0A_1}{A_1C_0} \cdot \frac{C_0C_1}{C_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_0} \cdot \frac{A_0C_1}{C_1B_0} = 1;$$

$$\frac{C_0B_1}{B_1A_0} \cdot \frac{A_0A_1}{A_1O} \cdot \frac{OB_1}{B_1B_0} \cdot \frac{B_0A_1}{A_1C_0} = 1.$$

Из отрезков на пяти прямых – 6.

Доказательство. Число комбинаций, содержащих пять различных прямых, согласно формулам комбинаторики, составит:

$$n = 6; \quad m = 5; \quad C_6^5 = 6.$$

Недопустимую для контура комбинацию прямых получим прибавляя к недопустимой для контура комбинации из трёх прямых по одной комбинации из оставшихся трёх прямых по две. Тогда общее число $N(5)$ контуров, содержащих пять прямых, составит:

$$n = 3; m = 2; C_3^2 = 3; N(5) = 6 - 3 \cdot 4 < 0.$$

Полученный результат показывает, что простого контура из пяти прямых не существует, поскольку в любой комбинации из шести по пять прямых содержатся две комбинации из трёх, недопустимых для контура, прямых. В то же время, перемножив, поделив пары равенств для контуров из четырёх отрезков, получим шесть составных контуров из пяти различных отрезков. Составной контур образован парой простых контуров, содержащих по три отрезка. В составном контуре в равенстве единице отношение отрезков на одной из прямых появляется дважды, например, на прямой A_0B_0 – отношение отрезков A_0C_1 и C_1B_0 :

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OA_1}{A_1A_0} \cdot \frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0A_1}{A_1C_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1.$$

Отметим, что невозможно получить равенство единице на контуре, содержащем отрезки на всех прямых треугольника Чевы, поскольку одновременное появление в равенстве отношений отрезков на «чевианах» исключено по причине пересечения «чевиан» в одной точке.

Таким образом, в треугольнике с прямыми Чевы имеется ряд контуров из отрезков на прямых, содержащих стороны треугольника и отрезки на прямых Чевы, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице. Всего имеется различных контуров: из отрезков на трёх прямых – 16, на четырёх – 3, на пяти – 6.

Библиографический список

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Мин. просвещения РСФСР, 1962.
2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. М.: МЦНМО, 2004. Т. 1.
3. Шарыгин И.Ф. Теоремы Чевы и Менелая. Квант. 1976. № 11.
4. Oxman V., Stupel M., Sigler A. Use of Different Representations of Ceva's Theorem for Development of Geometric Properties of a Triangle // Journal of Mathematical Sciences 2 (2015). 81–87.
5. Мендель В.В. Теоремы Чевы и Менелая. URL: [khpms.khspu.ru/wpcontent / uploads/M-10-1.doc](http://khpms.khspu.ru/wpcontent/uploads/M-10-1.doc)

ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

STUDYING OF LINEAR FUNCTIONS WITH USING ANIMATION CAPABILITIES OF DYNAMIC MATHEMATICAL SOFTWARE GEOGEBRA

Е.Е. Деттерер

Detterer E.E.

Исследовательская деятельность, анимационные возможности среды GeoGebra, линейная функция.

В статье представлен опыт автора по организации исследовательской деятельности школьников при изучении линейной функции с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra.

Research activities, animation features of dynamic mathematical software GeoGebra, linear function.

In this article author presents her experience in the organization of students research activities in studying of linear functions with using animation features of dynamic mathematical software GeoGebra.

Общество нуждается в людях творчески мыслящих, любознательных, активных, умеющих действовать в нестандартных ситуациях, самостоятельно приобретать новые знания и умения, осуществлять свой жизненный выбор. Исследовательская деятельность учащихся направлена на формирование именно таких качеств личности.

Под исследовательской деятельностью учащихся, согласно работам П.И. Пидкасистого, будем понимать совокупность действий поискового характера, ведущая к открытию неизвестных для учащихся фактов, теоретических знаний и способов деятельности. В процессе исследовательской деятельности учащиеся овладевают некоторыми навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, делают определенные выводы.

Анализ этапов исследований, выделяемых разными авторами, позволяет сделать вывод, что обязательными из них являются четыре, которые и образуют основную структуру учебного исследования:

- 1) постановка проблемы;
- 2) выдвижение гипотезы;
- 3) проверка гипотезы;
- 4) вывод.

Формирование основ учебного исследования предполагает последовательное прохождение учеником каждого этапа, на котором учащимися будет осуществляться полноценное выполнение этой деятельности.

Функциональная линия в обучении математике является структурирующей и пронизывает все годы обучения. Она имеет общекультурное, мировоззренческое значение. Систематическое же изучение понятия функции начинается в 7 классе [1] и продолжается до окончания школы.

Поскольку понятие функции является абстрактным и достаточно сложным для восприятия учащимися, то задача учителя состоит в том, чтобы сделать изучение этого учебного материала максимально наглядным и понятным. Одним из путей решения данной задачи является использование компьютерных технологий, что позволяет не только увидеть на экране непрерывное вычерчивание графика функции [3; 4], но и смоделировать само движение, определяемое данной функцией, а также табличное изменение y в зависимости от x . Наилучшим образом для этих целей подходит компьютерная среда GeoGebra [2] с её возможностями анимации.

Приведем пример организации исследовательской работы при изучении темы «Линейная функция и её график».

После сообщения темы урока, его целей и мотивации учебной деятельности, в ходе которой происходит знакомство с линейной функцией, учитель предлагает определить геометрический смысл коэффициентов k и b при построении и исследовании графика линейной функции $y = kx + b$. Ученики садятся за компьютеры и заполняют исследовательскую карту, предложенную учителем. Предполагается работа в группах по 4 человека.



Рис. 1

Задания исследовательской карты.

В среде GeoGebra построить график функции $y = kx + b$ и выяснить зависимость графика от выбора коэффициентов k и b .

1. Кликните инструментом «Ползунок» на выбранную точку Полотна. В меню в качестве имени укажите k , не изменяя границы параметра. На выбранном месте появится изображение ползунка в виде отрезка с точкой. Аналогично постройте ползунок для параметра b .

2. В строку ввода запишите: $f(x) = k * x + b$. После ввода на Полотне появится график функции при установленных значениях параметров. Аналогично постройте график функции $y = kx$.

3. На построенном анимационном рисунке проведите эксперименты и заполните таблицу:

Значение параметра	$k=-4$	$k=-0,5$	$k=0$	$k=0,3$	$k=2$	$k=$	$k=$
Вид графика							
Поведение функции							
Значение параметра	$b= -3$	$b= - 0,2$	$b=0$	$b=0,8$	$b= 4$	$b=$	$b=$
Вид графика							
Поведение функции							

4. Сделайте выводы: как изменяется график функции при изменении (на ползунке) коэффициента b ? Коэффициента k ? Как геометрически охарактеризовать эти коэффициенты?

В результате работы с исследовательской картой учащиеся замечают, что график либо «поднимается в горку» (функция возрастает) либо «спускается с горки» (функция убывает). Здесь же вводятся понятия убывания и возрастания функции. «Горка» тем круче, чем больше $|k|$. При $k = 0$ функция принимает вид $y = b$ и не возрастает и не убывает, она постоянна.

Проще всего выяснить геометрический смысл коэффициента b . Видим, что прямая $y = kx + b$ проходит через точку $B = (0, b)$. Это означает, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению $y = kx + b$. В самом деле, при $x = 0$ получаем $y = b$. Характеризуя геометрически коэффициент b , можно сказать, что прямая $y = kx + b$ отсекает от оси ординат отрезок, равный $|b|$, считая от начала координат. Учащиеся должны сделать вывод о том, что коэффициент b отвечает за сдвиг графика функции $y = kx$ вдоль оси ординат: при $b > 0$ сдвиг происходит вверх на b единиц, а при $b < 0$ сдвиг происходит вниз на $|b|$ единиц.

Для выяснения геометрического смысла коэффициента k учащиеся еще не располагают достаточными знаниями: они еще не знают, что такое тангенс произвольного угла. Вместе с тем при $k > 0$ это возможно. Видим, что прямые $y = kx + b$ и $y = kx$ параллельны и составляют равные углы наклона с положительным лучом оси абсцисс. Этот угол наклона обозначим через α . Для любого значения переменной $x = x_0 > 0$ и соответствующего значения

переменной $y = y_0 > 0$ из равенства $y_0 = kx_0$ получаем $k = \frac{y_0}{x_0}$. Геометрически x_0 и y_0

есть катеты прямоугольного треугольника с острым углом α и k есть отношение противолежащего катета к прилежащему. В этом и состоит геометрический смысл коэффициента $k > 0$. Видим, что это отношение определяет угол наклона прямой к оси абсцисс, отсчитываемый от положительного луча против часовой стрелки. Поэтому k называют угловым коэффициентом.

Геометрический смысл углового коэффициента используют для характеристики наклона автомобильной дороги к горизонтали. Его называют уклоном дороги и измеряют в процентах. Если длина участка дороги по горизонтали равна x_0 метрам, а подъем на этом участке составляет

y_0 метров, то уклон дороги составляет $k = \frac{y_0}{x_0}$ процентов. Таким образом, уклон в 1%

есть отношение 1 м к 100 м.

На автомобильной дороге можно встретить предупреждающий знак крутого подъема (спуска) в виде равностороннего треугольника с вершиной вверх, внутри которого изображена горка подъема (спуска) и над ней стоит 12%. Это означает, что на сто метров горизонтально участка подъем (спуск) составляет 12 м. Сколько это составляет градусов? Анимационный чертеж позволяет обнаружить, что 12% соответствуют 6.84 градуса.

При строительстве скоростной трассы допустимый уклон не должен превышать 40%. На магистральных дорогах, где максимально разрешенная скорость 100 км/час, уклон не должен превышать 50%. Учащимся предлагается вычислить в градусах уклоны в 5%, 20%, 15%, 30%, 40%, 60%.

Таким образом, коэффициент k характеризует угол наклона α прямой к оси абсцисс.

При $k > 0$ имеем $k = \frac{y_0}{x_0}$, то есть отношение катетов прямоугольного треугольника с острым

углом α . Это отношение в математике называют тангенсом угла α и обозначают $tg \alpha$. Следовательно, геометрический смысл коэффициента k выражается равенством $k = tg \alpha$. Можно сообщить, что в десятом классе учащиеся познакомятся с общим определением $tg \alpha$ как отношения второй координаты произвольной точки прямой $y = kx$ к ее первой координате. Благодаря этому геометрический смысл коэффициента $k = tg \alpha$ распространяется и на случай, когда $k \leq 0$.

На следующем уроке целесообразно объяснить физический смысл коэффициентов линейной функции. Работа происходит в том же исследовательском виде с использованием анимационного рисунка 2. На нем моделируется вертикальное равномерное движение шара C по закону $s = vt + b$, где t – время, а s – путь, пройденный за время t , $b \geq 0$.

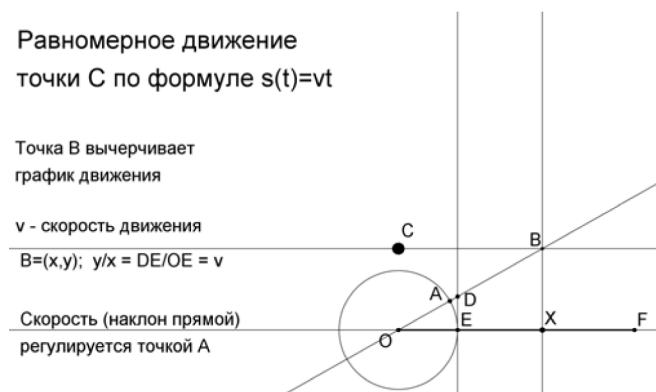


Рис. 2

Одновременно строится график функции $s = vt$ (прямая AO). Из последнего равенства полу-

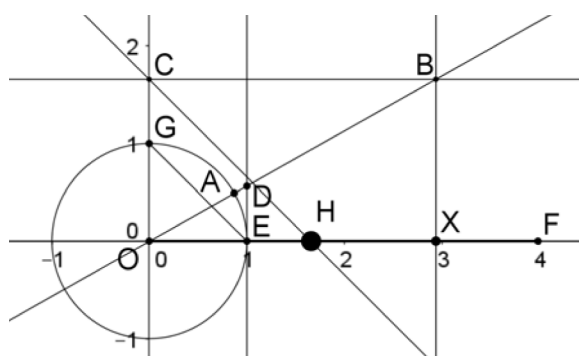


Рис. 3

чаем $v = \frac{s}{t}$ – скорость движения. Изменяя на пол-

зунке скорость v , наблюдаем движение шара с различными скоростями.

При $t = 0$ получаем $s = b$ – расстояние до начала движения.

Вертикальное движение вдоль оси ординат легко преобразовать в горизонтальное движение вдоль оси абсцисс (рис. 3).

Представленный подход при изучении функциональной линии с использованием системы динамической геометрии GeoGebra позволяет:

- сделать изучение сложного материала наглядным и понятным;
- развивает навыки экспериментальной, исследовательской деятельности школьников;
- формирует представления о применении компьютерных технологий в процессе изучения математики и при решении математических задач.

Статья является продолжением тематики, начатой в [2].

Библиографический список

1. Алгебра. 7 класс / под ред. С.А.Теляковского. М.: Просвещение, 2004.
2. Ларин С.В., Деттерер Е.Е. Внесение движения в преподавание алгебры 7 класса с использованием среды GeoGebra // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2013. С. 276.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону. Легион. 2015.
4. Ларин С.В. Компьютерная анимация в алгебре и началах математического анализа: учебное пособие // Электронное издание. КГПУ им. В.П. Астафьева, электронная библиотечная система. 2015.
5. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

COMPUTER ANIMATION IN PREPARATION FOR USE

О.А. Жаркова

O.A. Zharkova

ЕГЭ, среда GeoGebra, задачи с параметрами по тригонометрии.

Использование информационных технологий в процессе преподавания математики позволяет непрерывно совершенствовать как содержание, так и методику преподавания математики. В настоящее время в определенном смысле эталонными являются контрольные задания из ЕГЭ. В статье дано описание созданного анимационного файла в среде GeoGebra для подготовки к ЕГЭ по тригонометрии. Все 36 вариантов заданий взяты из [2] и дополнены решениями. Выбор номера задания осуществляется перемещением точки на ползунке. После самостоятельного решения учащийся может сравнить свое решение с увиденным на компьютерном экране. Кроме того, изготовлен «вариант 0», который позволяет генерировать новые варианты заданий.

USE, Wednesday GeoGebra, the problem with the parameters in trigonometry.

Use of information technology in the teaching of mathematics allows you to continuously improve the content and methods of teaching mathematics. Currently, in a sense, are the reference control tasks from the exam. The article describes the created animation file in GeoGebra environment to prepare for the exam in trigonometry. All 36 variants of tasks are taken from [URL: <http://www.mathege.ru>] and amended decisions. Selecting the job number by moving the point on the slider. After independent decision students can compare your decision with what they saw on the computer screen. Furthermore, made «variant 0», which allows to generate new variants of tasks.

С введением ФГОС изменяются структура и сущность результатов образовательной деятельности, содержание образовательных программ и технологии их реализации, методология, содержание и процедуры оценивания результатов освоения образовательных программ. Повышается значимость формирования условий реализации программ, в том числе создания образовательной инфраструктуры, изменяются требования к ним. «Должна быть спроектирована система управления инновационными процессами, обеспечивающая достижение нового качества образования» [ФГОС, 2012].

Приступая к описанию анимационного файла, в качестве примера приведем вариант 1 из задания 15 по тригонометрии.

Вариант 1

15

а) Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Анализ задания 15-а), всех вариантов

Основная идея решения состоит в преобразовании данного уравнения к виду $(x - u)(y - v) = 0$, либо непосредственном разложении на множители (варианты 1-5), либо сведении данного уравнения к квадратному уравнению вида $ay^2 + by + c = 0$, откуда $y_1 = u$, $y_2 = v$ (в остальных вариантах). Компьютеру поручается решение следующих элементарных задач:

1. Решение квадратного уравнения $ay^2 + by + c = 0$.
2. Решение элементарных уравнений вида $\sin x = u$, $\cos x = u$, $\operatorname{tg} x = u$, $a^x = b$ (по формулам и графически).
3. Решение уравнений вида $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.

В случае когда ответ нельзя записать в виде целого числа, мы получаем его приближенное значение в виде конечной десятичной дроби с регулируемой степенью точности. Вместе с тем ответ приводим в виде точного выражения.

Анализ задания 15-б), всех вариантов

Важная роль отводится графической составляющей решения. Строим единичную окружность. Изображение на ней корней данного уравнения происходит автоматически по выбору варианта и настраиванию параметров a, b, c . Измерение искомым дуг позволяет получить ответ в виде десятичной дроби с выбранной точностью. Выделяем толщиной (и цветом) данный отрезок (дугу на единичной окружности) и видим корни, принадлежащие данному отрезку (дуге). Ответ можно увидеть на графическом изображении.

Анимационно настраиваемое решение задания 15**Вариант 1**

а) Решите уравнение $3 \sin 2x - 4 \cos x + 3 \sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:

$$6 \sin x \cos x - 4 \cos x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

Разделим на 6 и разложим на множители:

$$\begin{aligned} \sin x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{3} &= \cos x \left(\sin x - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{2}{3} \right) = \\ &= \left(\sin x - \frac{2}{3} \right) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sin x - \frac{2}{3} = 0$ или $\cos x + \frac{1}{2} = 0$.

1) $\sin x = \frac{2}{3}$. Тогда $x = \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k$ или $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$. Тогда $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{2\pi}{3}$, $\pi - \arcsin \frac{2}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Схема решения:

1) пользуемся формулой $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; делением на коэффициент при $\sin x \cos x$ приводим уравнение к виду $\sin x \cos x - a \cos x - b \sin x + ab = 0$;

2) преобразуем полученное уравнение к виду $(\sin x - a_1)(\cos x - b_1) = 0$;

3) решаем простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = a_1$, $\cos x = b_1$.

Просматривая задание 15-а) вариантов 1 – 5, убеждаемся, что в каждом из них решается уравнение вида

$$a \sin 2x + b \cos x + c \sin x + d = 0.$$

Первым шагом оно приводится к виду $2a \sin x \cos x + b \cos x + c \sin x + d = 0$. Затем левую часть уравнения раскладываем на множители.

$$\cos x(2a \sin x + b) + c \sin x + d = \cos x(2a \sin x + b) + \frac{c}{2a}(2a \sin x + b) - \frac{b}{2a} + d = 0.$$

Для разложения на множители нужно, чтобы $-\frac{bc}{2a} + d = 0$, откуда $d = \frac{bc}{2a}$. Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$a \sin 2x + b \cos x + c \sin x + \frac{bc}{2a} = 0.$$

Решим это уравнение по указанной выше схеме.

$$2a \sin x \cos x + b \cos x + c \sin x + \frac{bc}{2a} = 0.$$

Разложим на множители:

$$\cos x(2a \sin x + b) + c \sin x + \frac{bc}{2a} = \cos x(2a \sin x + b) + \frac{c}{2a}(2a \sin x + b) =$$

$$(2a \sin x + b)\left(\cos x + \frac{c}{2a}\right) = 0.$$

1) $\sin x = \frac{-b}{2a}$, откуда $x = \arcsin \frac{-b}{2a} + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin \frac{-b}{2a} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = -\frac{c}{2a}$, откуда $x = \pm \arccos \frac{-c}{2a} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \arcsin \frac{-b}{2a} + 2\pi k$, или $x = \pi - \arcsin \frac{-b}{2a} + 2\pi k$, или $x = \pm \arccos \frac{-c}{2a} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ на вопрос б) зависит от конкретных значений параметров a, b, c .

Приведенное выше решение в общем виде позволяет создать анимационный рисунок, который после введения конкретных значений параметров a, b, c даст решение задания 15 любого из вариантов 1–5 и им подобных (см. рис. 1).

Построение рисунка 1

1. Строим ползунок для параметра n и делаем надпись: «Установите номер варианта n ».

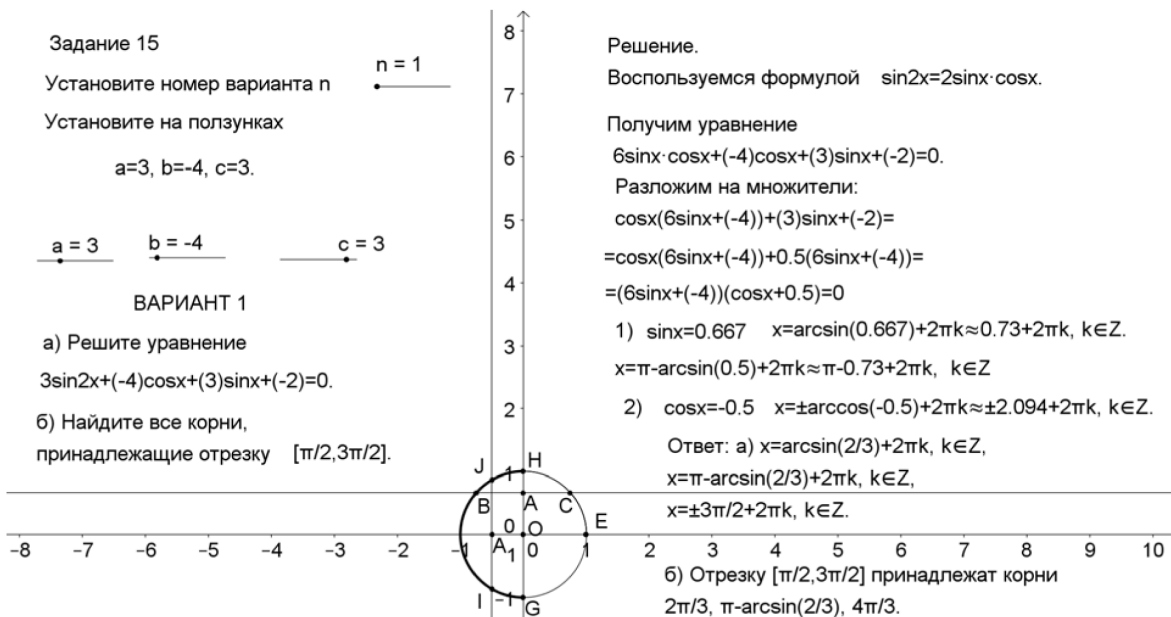


Рис. 1

2. Строим ползунки для параметров a, b, c и делаем надпись: «Установите на ползунках». При выборе варианта $n = 1$ записываем значения параметров этого варианта: « $a = 3, b = -4, c = 3$ ». Устанавливаем условие видимости последней записи: $n = 1$.

3. Для записи конкретного уравнения и его решения вводим вспомогательные числа:

$$d = \frac{b}{2a}, a_1 = 2a, b_1 = \frac{-b}{2a}, c_1 = -\frac{c}{2a}.$$

4. Записываем условие и решение, указывая буквенные значения из Объектов: «Вариант n », n из объектов. Далее делаем надпись:

«а) Решите уравнение $a \sin 2x + b \cos x + c \sin x + d = 0$ », где a, b, c, d печатаем из Объектов. Затем при выбранном значении $n = 1$ вводим надпись: «б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ », и устанавливаем условие видимости $n = 1$. Теперь приводим текст решения, указывая коэффициенты и свободный член из Объектов. Наконец, записываем текст ответа варианта 1 и устанавливаем условие видимости надписи $n = 1$.

При переходе к значению $n = 2$ делаются невидимыми все надписи с условием видимости $n = 1$. Делаем соответствующие надписи в замен исчезнувших с условием видимости $n = 2$. И так до варианта 5 включительно.

Таким образом, для решения задания 15-а) вариантов 1–5 необходимо:

1) знать формулу синуса двойного угла;

2) уметь преобразовывать уравнение $2a \cos x \sin x + b \cos x + c \sin x + \frac{b}{2a} = 0$ к виду $(2a \sin x + b)(\cos x + \frac{c}{2a}) = 0$;

3) решать уравнения вида $\sin x = u, \cos x = v$.

Вариант 0

Используя этот вариант, пользователь может создать свой вариант задания 15, подобный вариантам 1–5, и решить его, сверяя свое решение с решением на живом рисунке. Желательно рассмотреть случаи параметров a, b, c , при которых получаем множители вида $(\sin x - u)(\cos x - v) = 0$, когда u или v принадлежат множеству табличных значений

$M = \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1\}$. На рисунке 2 показан Вариант 0.

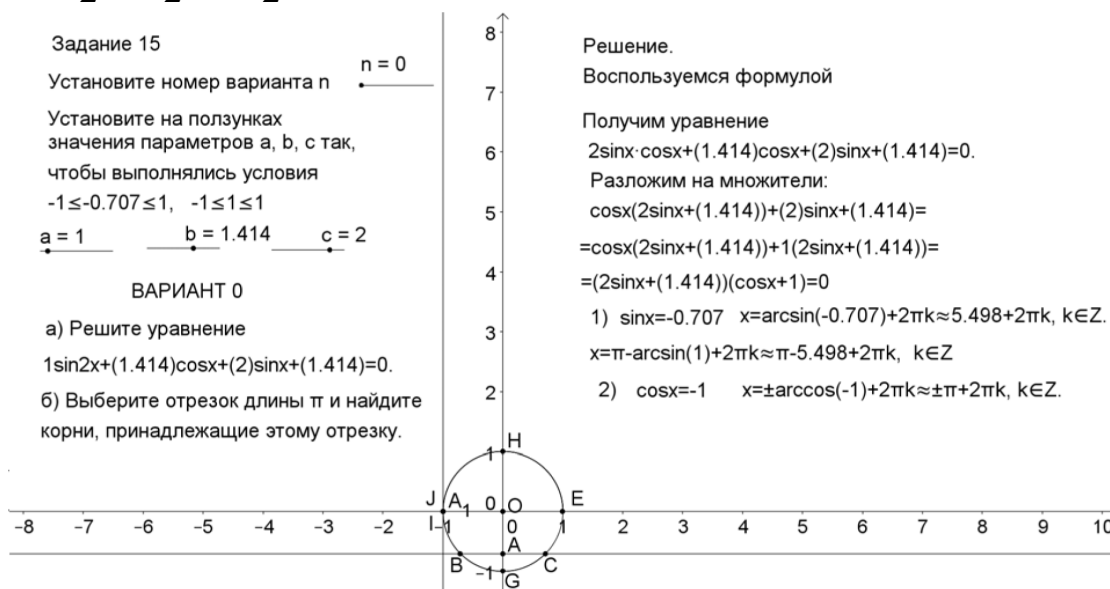


Рис. 2

Выводы

Сравнивая созданный электронный ресурс с имеющейся литературой по подготовке к ЕГЭ, отметим следующие его преимущества.

1. Один живой рисунок заменяет описание решений всех 36 вариантов задания 15 и полностью выполняет функции подготовки к ЕГЭ.

2. Живой рисунок позволяет создавать свои аналогичные варианты задания 15 и решать их, сравнивая с решением, представленным на рисунке. Эти новые возможности могут привлечь более продвинутых школьников.

3. Созданные живые рисунки дают образец для самостоятельного изготовления аналогичного электронного ресурса по решению остальных заданий. Тем самым он является источником организации исследовательских работ школьников.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
2. Математика (ЕГЭ) [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mathege.ru>
3. Зиатдинов А. О возможностях использования интерактивной геометрической среды Geogebra 3.0 в учебном процессе // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы 10-й Международной конференции (СКМП-2009). Смоленск: СмолГУ, 2009. С. 39–40 (PDF, 122 Kb).
4. Зиатдинов Р.А. Геометрическое моделирование и решение задач проективной геометрии в системе GeoGebra // Материалы конференции молодежь и современные информационные технологии: Томский политехнический университет. / Томск, 2010. С. 168–170 (PDF, 10.2 Mb).
5. Мартинович Д., Карадаг З., Макдугалл Д. // Материалы Второй Северо-Американской конференции GeoGebra; Университет Торонто. Канада, 2011. (PDF, 2.18 Mb).
6. URL: <http://www.alexlarin.com/viewtopic.php?f=16&t=4756>
7. URL: <http://tchernouchkine.narod.ru/maple/tutor/le11.htm>

МЕТОДИКА ШАТАЛОВА И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

SHATALOV'S TECHNIQUE AND MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES OF TRAINING OF SCHOOL STUDENTS IN MATHEMATICS

Ю.И. Звирзд

Yu. I. Zvirzd

Методика Шаталова, опорный конспект, информационные технологии, компьютерные средства обучения математике.

В статье описывается значение методики Шаталова для обучения современного школьника. Информационные технологии, основывающиеся на компьютерных средствах, позволяют сделать этот процесс более легким для учителя и увлекательным для ученика.

Shatalov's technique, basic abstract, information technologies, computer tutorials of mathematics.

In article value of a technique of Shatalov for training of the modern school student is described. The information technologies which are based on computer means allow to make this process easier for the teacher and fascinating for the pupil.

На сегодняшний день требования образовательного стандарта и общества связаны со всесторонним развитием личности, подготовленностью учащихся к самостоятельному поиску знаний, обучению, самосовершенствованию в течение всей жизни. Задача учителя – обеспечить выполнение этих требований в условиях классов с детьми разного уровня готовности к восприятию материала. Эти же задачи ставил перед собой В.Ф. Шаталов, разрабатывая свою методику обучения школьников. Многолетний опыт его работы и работы его последователей доказали ее эффективность.

Основа методики Шаталова – это опорные конспекты [1].

Использование на уроках опорных конспектов способствует наилучшему представлению информации, ее усвоению и развитию мышления учащихся.

Работа с опорными конспектами, составление структурно-логических схем способствуют представлению всего объема материала в сжатом виде, настраивают учащихся на вдумчивую и сосредоточенную работу на уроке. У них развиваются память, логическое, аналитическое, пространственное мышление, достигается высокая степень усвоения материала, формируются состояние «могу и умею» и чувство ответственности не только за себя, но и за своих товарищей. Все это, в конечном счете, способствует повышению уровня самооценки учащихся, совершенствованию профессиональных качеств будущих специалистов. Применение опорных конспектов в обучении значительно облегчает труд преподавателя и учащегося, способствует целостному восприятию предмета, развивает умственные способности учащихся, обеспечивает высокое качество знаний.

Считаем, что одно из главных современных умений ученика – это умение кодировать информацию, выстраивать логические цепочки и связи для рассуждения, следовательно, осваивать новые способы деятельности, чего как раз недостаточно в современном образовании, оперирующем огромным объёмом информации. Использование опорных схем на уроках представляется нам важным моментом.

В чём же достоинства применения опорных конспектов в процессе обучения? У каждого человека работают в разной степени все три вида памяти: слуховая, зрительная, двигательная.

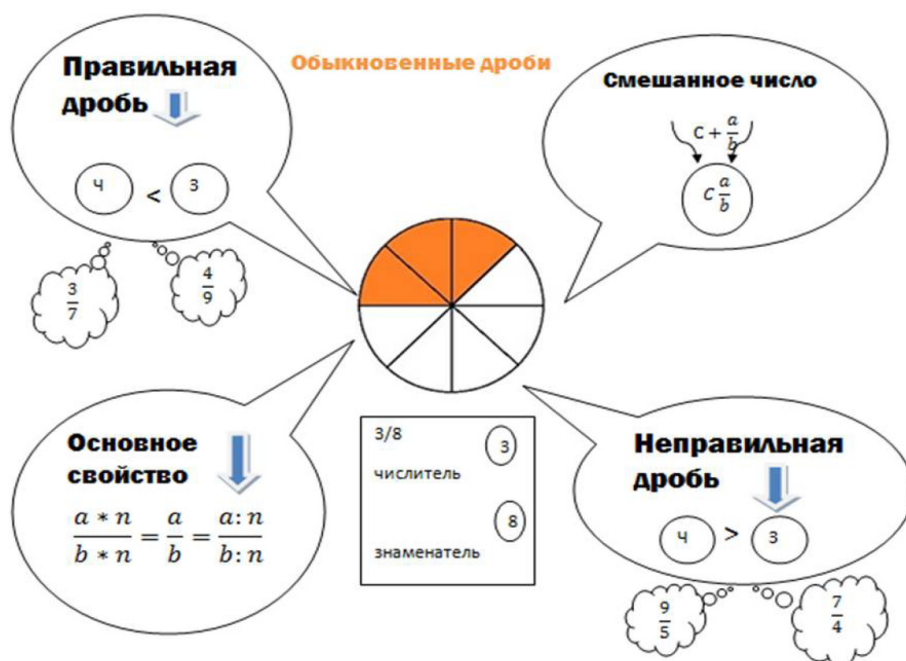
И если в процессе обучения все их использовать целенаправленно, то уровень усвоения нового материала повысится.

При составлении опорных конспектов работа со схемой развивает умение выделять главное в изучаемом материале, способствует развитию логического мышления учащихся, требует возвращения к первоначальной записи и внесения в неё добавления. Систематическая работа с опорными схемами приводит к тому, что на определённом этапе обучения учащиеся уже могут самостоятельно их составлять. При выполнении тренировочных заданий дома и в классе учащиеся, опираясь на схемы, учатся излагать тот или иной материал. Сначала с таким заданием справляются только сильные ученики, затем инициативу проявляют и более слабые.

Применение методики Шаталова на уроках математики для учителя связано с определенными трудностями – требуется дополнительное время на подготовку и реализацию спорных конспектов. Однако с развитием компьютерных технологий этот процесс значительно упрощается. Компьютер позволяет делать схемы яркими, красочными, легко вносить изменения, быстро находить нужный материал. И что очень важно – ученики могут стать полноправными участниками создания опорных конспектов. В силу легкости их создания и внесения изменений их составление возможно учениками и дома, и на уроке.

На этапе освоения материала, когда ученики уже познакомились с основными понятиями и алгоритмами, они с помощью учителя могут подвести итоги изученному: выделить основное, определить главное и второстепенное, связи между составляющими. Если учитель заранее подготовит основные блоки, ученикам остается только их правильно расставить, определить форму, раскрасить, дополнить, перенести в тетрадь. В дальнейшем учитель с помощью проектора данный конспект выводить может на экран по мере необходимости – для закрепления материала, если у учащихся возникли проблемы при выполнении какого-либо задания, для актуализации материала. Технология создания электронных опорных конспектов проста, и учащиеся уже с 5-го класса могут легко ею овладеть. Составление опорных конспектов на компьютере сделает процесс освоения материала более увлекательным для ученика и повысит его заинтересованность в изучении математики. Кроме того, это позволит привлечь к работе учеников, которым обычный процесс запоминания материала дается с трудом. В этой работе от ученика потребуются умение поиска нужной информации, ее обработки, что будет способствовать формированию важной составляющей – способности к самообразованию.

На приведенном ниже рисунке пример созданного с помощью учащихся конспекта по теме «Обыкновенные дроби».



Создание опорных конспектов – это кропотливая работа, но она дает хорошие результаты. Мыслительная деятельность учеников во время объяснения учителем недостаточна – полного осознания материала не происходит. Путь к осознанию лежит через самостоятельную работу над конспектами, разбор готовых конспектов и создание своих собственных. Считаем, что следует больше привлекать учеников к самостоятельной разработке опорных конспектов. Это способствует развитию у них таких навыков работы с текстом, как обобщение, сравнение, систематизация информации.

Библиографический список

1. Шаталов В.Ф. Куда и как исчезли тройки // Издательство «Педагогика», 1980.

СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА НА СНИМКАХ МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ¹

SYSTEM FOR AUTOMATIC SEGMENTATION OF THE HEART'S LEFT VENTRICLE IN MAGNETIC RESONANCE IMAGING

И.А. Иванов

I.A. Ivanov

Левый желудочек, магнитно-резонансная томография, анализ изображений, кластеризация, система поддержки принятия решений, фильтрация, сердце.

В данной работе предложен алгоритм, автоматизирующий процесс выделения левого желудочка (ЛЖ) сердца при проведении анализа снимков магнитно-резонансной томографии (МРТ). Предложенный алгоритм осуществляет выделение ЛЖ, расчет его объема, а также расчет фракции выброса ЛЖ. Разработанный подход был протестирован на базе данных, включающей результаты МРТ исследований 500 пациентов. Согласно результатам экспериментов, среднеквадратичная ошибка расчета объема ЛЖ составила 33,28 мл, фракции выброса – 7,96 %.

Left ventricle, magnetic resonance imaging, image analysis, clustering, decision support system, filtering, heart.

In this work we propose an algorithm to automate the process of heart's left ventricle (LV) segmentation during magnetic resonance imaging (MRI) analysis. The proposed algorithm does the LV segmentation, volume calculation, and LV ejection fraction calculation. The proposed approach has been tested on a dataset containing MRI study results of 500 patients. According to experimental results the root mean square error of LV volume calculation is 33.28 ml, ejection fraction – 7.96 %.

1. Introduction

Heart disease diagnosis is an important part of medical treatment. It helps to identify the illness at early stage and take proper measures to prevent its development. Heart diseases are the major reason of mortality in the world, each year over 2 million people die in Russia only.

In this work we address the problem of automatic calculation of left ventricular (LV) volume. Until now, doctors and medical technicians have been forced to do this calculation by hand, drawing LV contours in magnetic resonance images (MRI). This procedure takes about 20 minutes per patient, so making it automatic would help reduce the time and labor costs significantly, as well as make the calculation more accurate by excluding the human factor.

In medical diagnosis LV volume is calculated across the whole cardiac cycle, i.e. during the contraction and expansion of the heart. By knowing the smallest and the largest volume of the heart during cardiac cycle, which are called the systolic and diastolic volumes, respectively, one can calculate the LV ejection fraction (EF), which is one of the main indicators used in heart disease diagnosis. EF is calculated according to the following formula:

$$EF = \frac{V_D - V_S}{V_D} \times 100\%, \quad (1)$$

where V_D is the diastolic volume, V_S – systolic volume. EF reflects how much blood (in %) is pumped out of the heart at each heartbeat. Normally EF should be around 55-70%. If its value falls higher or lower, there is a risk of various heart diseases.

The main purpose of this article was to review the available approaches to the left ventricle segmentation, and then develop, implement and study the segmentation approach based on a clustering procedure.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Красноярского края в рамках научного проекта № 16-41-243036.

¹ The reported study was funded by RFBR and Government of Krasnoyarsk Territory according to the research project № 16-41-243036.

2. Significant related work

Calculation of left ventricular volume can be done by various methods, including echocardiography [1], radionuclide ventriculography and cardiac computed tomography. However, cardiac MRI has been chosen as a reference standard for evaluating left ventricular ejection fraction (LVEF) and LV volume, since it allows to reproduce the measurements.

In [2] an automated left ventricle segmentation method for functional analysis of short axis MR images is proposed. Apart from LV, their method detects the contours of endocardium, epicardium, papillary muscles and trabeculations. However, the proposed approach has certain limitations. First, it requires manual ROI specification in the process of LV location, so this approach cannot be called completely automatic. Second, it deals with middle sax slices, whereas the real challenge of LV segmentation comes at basal slices, where LV is obscured by the aortic valve, and apex slices, where LV is small and even barely visible.

In [3] the authors propose an approach for automatic LV segmentation and LVEF calculation based on fuzzy logic and dynamic programming. The only necessary human intervention is to highlight the approximate LV centre coordinates at the first processed sax layer (the most basal layer). The experiments were conducted on a dataset that included 65 patients with myocardial infarction (mostly male, 30-79 years old). The obtained results of automatic LV segmentation were compared to the results of experts segmentation. The authors note a good correlation between the results obtained automatically and manually, and also mention that automatic determination of systole time frame allows to reduce systole LV volume calculation errors, as in 50% of cases human experts wrongly choose the systole frame.

In the work [4] used the combination of deep learning techniques and deformable models to enhance the efficiency of the LV segmentation and volume calculation. They used the MICCAI database [5], which includes 45 MRI cases. This dataset includes the hand-annotated LV contours, which makes it easier to check whether an automated approach makes an accurate LV segmentation.

3. Dataset description

The MRI data used in this work was delivered by the National Heart, Lung, and Blood Institute (NHLBI). The dataset includes MRI studies of 500 patients. Each study includes MRI images across the whole cardiac cycle for several short-axis (sax) views.

Usually MRI study includes 10 sax slices, but this number may vary from 1 to 24. For each slice there are 30 images in DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) format [6] that are recorded sequentially in time and comprise the whole cardiac cycle.

Every MR image also has the metadata, which includes the following: patient's sex; patient's age; sax slice thickness; sax slice location; pixel spacing (to scale pixels to mm²). The final goal is to calculate the left ventricular volume in milliliters in systole and diastole phases. For train sample patients true systole and diastole volumes are provided.

4. Methodology

The approach proposed in this article can be divided into three consecutive modules:

Module 1. Locate left ventricle in overall MR image;

Module 2. Identify and calculate LV systolic and diastolic area at each short axis layer;

Module 3. Calculate systolic and diastolic LV volumes.

4.1. Module 1

The aim is to locate LV centre coordinates in overall MR image. This is a challenging task, because there are many other objects in MR images. The idea proposed in this article is based on the fact that the heart is beating, thus LV contour in MR image is changing along the heartbeat time axis (shrinks and expands), while the rest of the image remains relatively still. The first and the last (30th) MR images correspond to possible diastolic state, i.e. LV is expanded the most (Fig. 1A, 1B), while the images in the middle of the heartbeat cycle correspond to systolic state where LV is shrunk the most (Fig. 1C, 1D).

If we subtract systolic LV image from the diastolic one, in the resulting subtracted image all the moving parts are colored white, whereas all static parts are colored black (Fig. 1E, 1F). This procedure is done for all short axis layers. After that we multiply subtracted images from different short axis layers. The motivation behind this is that the left ventricle is located approximately at the same location of MR image at different sax layers. That is why multiplying the subtracted images helps to get rid of the noise, whereas the LV contour becomes roughly outlined with white dots (Fig. 1G). By calculating coordinates of the centre of these pixels we get the possible LV centre coordinates.

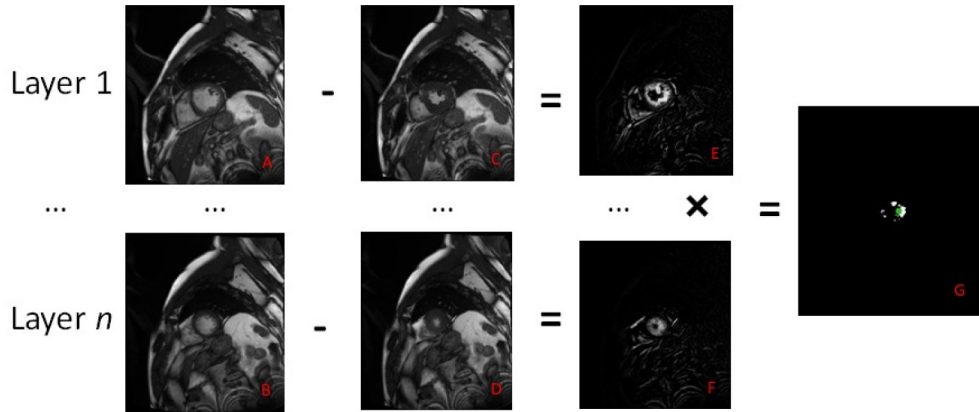


Figure 1. The process of left ventricle centre localization; A, B – short axis view of LV in diastole phase; C, D – short axis view of LV in systole phase; E, F – systole image subtracted from diastole image, all moving parts are highlighted in white; G – subtracted images across several short axis layers are multiplied, all noise is gone, LV centre – mean of white points coordinates

4.2. Module 2

The next step is to identify LV blood area. LV centre coordinates are available from Module 1, so they are mapped to original DICOM images. The fragment of the original MR image that is containing LV is cropped out (Fig. 2C).

In order to calculate the LV blood area, we need to know both the LV centre and its radius. In order to find the radius, the following steps are made. First, we crop out the fragment with LV from the subtracted image (Fig. 2A), which corresponds to the fragment from original image (Fig. 2C). As we can see, the left ventricle in Fig. 2A is the largest blob of white pixels. In order to get rid of the noise, we apply DBSCAN (Density-based spatial clustering of applications with noise) clustering procedure [7] to group the neighboring white pixels to separate clusters (Fig. 2B). The largest cluster that is close to the centre of the image fragment is considered to be the left ventricle.

The standard deviation of dots coordinates of the largest cluster in the subtracted image is used as a radius to search for LV blood area (Fig. 2D, green contour). The blood is depicted in brighter color on MR images, so only bright pixels have to be counted. For that reason we introduce an intensity threshold in order to define which pixels are regarded as bright, and which are dark. In Fig. 2D the LV blood area is outlined by the program (colored red).

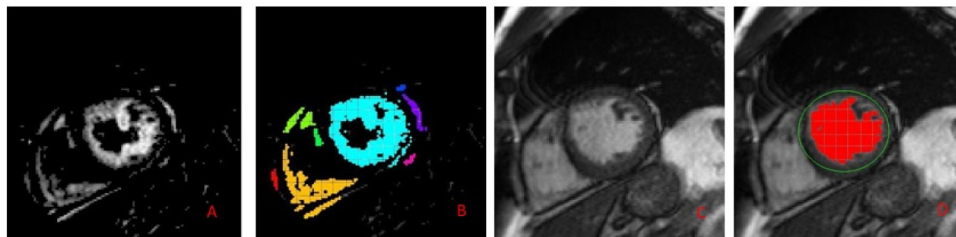


Figure 2. The process of left ventricle blood pixels identification; A – short axis view subtracted image (diastole – systole); B – DBSCAN clustering procedure applied to the subtracted image, the biggest cluster which is closer to the center of the image is considered the LV; C – original MRI image fragment; D – bright pixels that get into the radius of search (green contour) are considered LV blood (colored red)

4.3. Module 3

Finally, when the blood area of the left ventricle is identified at each short axis layer, those areas are scaled to mm² by multiplying to the pixel spacing parameter. The left ventricle volume is calculated by the following formula:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d_i}{1000} \right) \times \frac{S_i + \sqrt{S_i \times S_{i+1}} + S_{i+1}}{3}, \tag{2}$$

where V is the LV volume in ml; d_i is the distance between the neighboring short axis layers in mm (it is calculated through sax slice location parameter from DICOM metadata); S_i – LV blood area at the i -th sax layer; n – number of sax layers. The total LV volume is calculated for every time frame along the heartbeat cycle. The largest volume is considered the diastolic one, the smallest volume – systolic. Ejection fraction is calculated according to formula (1).

5. Experimental results

Ejection fraction was calculated by Eq. (1), thus EF accuracy directly depends on the accuracy of LV volume calculation. That is why, considering both LV volume prediction errors and EF prediction error provides a better picture of overall system efficiency.

In Table 1 you can find results of systolic and diastolic volumes prediction, as well as ejection fraction prediction. The results were averaged across the whole training dataset (500 patients). We provide the results that include root mean square error (RMSE) and mean absolute percentage error (MAPE). As can be seen, an RMSE of end-systolic and end-diastolic volume is ~21.5 ml and ~45 ml, respectively. Taking into account that the average systolic volume across the training dataset is 72 ml, while the average diastolic volume is 166 ml, these results are quite decent.

Table 1

Root mean square error (RMSE) and mean absolute percentage error (MAPE) of LV volume and ejection fraction prediction

	RMSE	MAPE	True mean	True range
Systolic volume (ml)	21.64 ml	23.40 %	71.96 ml	4.6 – 488.6 ml
Diastolic volume (ml)	44.92 ml	20.18 %	165.87 ml	10.5 – 568.6 ml
Ejection fraction (%)	7.96 %	12.05 %	58.45 %	9.4 – 79.7 %

6. Conclusion

In this work we have addressed the problem of left ventricular volume calculation in MR images. We have proposed a rather simple, but efficient algorithm for LV segmentation and volume calculation.

The implemented system has been tested on a large cardiac MRI dataset that includes 500 patients. The obtained results (see Table 1) has provided low errors of LV volume and ejection fraction calculation.

The proposed approach has some drawbacks though. There are several features that can improve the overall efficiency of the algorithm. First, design a procedure to find a short-axis layer at which LV ends and left atrium starts. MRI technicians look for the presence of papillary muscles inside the LV contour, which is an indicator of left ventricle. Developing such a procedure would significantly increase the accuracy of volume calculation, because basal layers provide the biggest room for errors. Second, it is necessary to improve the accuracy of LV segmentation at the apex layers, because LV contour is usually barely visible there, thus causing poor segmentation. Third, some other formulas of LV volume calculation need to be tried.

References

1. Fortuin N.J., Hood W.P., Sherman M.E., Craige, E., 1971. Determination of left ventricular volumes by ultrasound. *Circulation*, 44, pp. 575-584.
2. Lu Y.-L., Connelly K.A., Dick A.J., Wright G.A., Radau P.E., 2013. Automatic functional analysis of left ventricle in cardiac cine MRI. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*, 3(4), pp. 200-209.
3. Lalande A., Salve N., Comte A., Jaulent M.C., Legrand L., Walker P.M., Cottin Y., Wolf J.E., Brunotte F., 2004. Left ventricular ejection fraction calculation from automatically selected and processed diastolic and systolic frames in short-axis cine-MRI. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, 6(4), pp. 817–827.
4. Avendi M.R., Kheradvar A., Jafarkhani H., 2016. A Combined Deep-Learning and Deformable-Model Approach to Fully Automatic Segmentation of the Left Ventricle in Cardiac MRI. *Medical Image Analysis*, 30, pp. 108–119.
5. Radau P., Lu Y., Connelly K., Paul G., Dick A., Wright G., 2009. Evaluation framework for algorithms segmenting short axis cardiac MRI. MIDAS J. Cardiac MR Left Ventricle Segmentation Challenge.
6. Mustra M., Delac K., Grgic M., 2008. Overview of the DICOM standard. 50th International Symposium ELMAR-2008, Zadar, Croatia, pp. 39–44.
7. Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., Xu Xi., 1996. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. *Proc. of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96)*, AAAI Press, pp. 226–231.

ИНТЕГРИРОВАННЫЕ УРОКИ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ СОВРЕМЕННОГО ШКОЛЬНИКА

THE INTEGRATED LESSONS AS AN EFFECTIVE MEANS OF TEACHING THE MODERN STUDENT

Н.Ю. Иршко, В.С. Оберман

N.Y. Irshko, V.S. Oberman

Уроки математики, интегрированные уроки, информационные технологии.

В статье рассматривается проблема организации интегрированных уроков, их значение для обучения и воспитания современного школьника.

Math's classes, the integrated lessons, information technologies.

In this article the problem of the organization of the integrated lessons, their value for training and education of the modern school student is considered.

На данном этапе развития образования перед учителем и учеником все серьезнее встает проблема обработки и передачи информации, так как идет усложнение содержания, рост объема необходимой информации и уменьшение времени, отведенного на ее усвоение. Современные информационные технологии позволяют перейти от традиционной формы ведения урока к форме, позволяющей более эффективно сочетать на одном уроке различные виды знаний, материал разных дисциплин. В нашем понимании интегрированные уроки являются оптимальной формой для современного этапа развития школы. Однако вопрос о том, что такое интегрированный урок, остается противоречивым.

Итак, интегрированный урок – это особый тип урока, который способен объединять в себе обучение одновременно по нескольким дисциплинам при изучении какого-либо понятия или темы. В подобном уроке всегда выделяются: ведущая дисциплина, которая выступает интегратором, и дисциплины вспомогательные, содействующие углублению, расширению, уточнению материала второстепенной дисциплины. Например, можно интегрировать методику обучения разным дисциплинам при сохранении содержания только одного предмета [2, с. 115]. К интегрированным урокам учителя прибегают нечасто и главным образом в следующих случаях:

- при обнаружении дублирования одного и того же материала в учебных программах и учебниках;
- при ограниченном времени на изучение темы и желании воспользоваться готовым содержанием из параллельной дисциплины;
- при изучении межнаучных и обобщённых категорий (движение, время, развитие, величина и др.), законов, принципов, охватывающих разные аспекты человеческой жизни и деятельности;
- при создании проблемной, развивающей методики обучения предмету [5, с. 576].

Виды интегрированных уроков:

Координированные (знания одного предмета основываются на знании другого предмета) – на таких уроках происходит фрагментарное обращение к общей проблематике в различных областях знаний.

Комбинированные – строятся на основе одного организующего предмета, происходит слияние нескольких предметов в один, что дает возможность исследовать одну и ту же проблему с различных позиций.

Проектные – уроки, на которых продумывается рассмотрение проблемы под различными углами зрения с использованием информации из разных областей знаний.

Для того чтобы интегрировать материал дисциплины, надо совершить определенные действия, которые изначально носят творческий характер [4, с. 94]. В ходе этой подготовительной деятельности учитель определяет:

- свои мотивы проведения интегрированного урока и его цель;
- состав интегрирования, т.е. совокупность объединяемых компонентов;
- характер связей между соединяемым материалом;
- структуру (последовательность) расположения материала;
- способы увеличения наглядности учебного материала;
- распределение ролей с учителями интегрируемого предмета;
- критерии оценивания эффективности урока;
- форму записи подготовленного урока.

Преимущества интегрированных уроков:

1. Повышают мотивацию, формируют познавательный интерес, что способствует повышению уровня обученности и воспитанности учащихся.

2. Позволяют систематизировать знания.

3. Способствуют развитию в большей степени, чем обычные уроки, эстетического восприятия, воображения, внимания, памяти, мышления обучающихся (логического, художественно-образного, творческого).

4. Обладая значительной информативной емкостью, способствуют увеличению темпа выполняемых учебных операций, разрешают вовлечь каждого школьника в активную работу на каждой минуте урока и способствуют творческому подходу к выполнению учебного задания [3, с. 150–154].

При организации интегрированного урока учитель планирует, сколько времени отвести математике, русскому языку, литературе, рисованию и др. дисциплинам. Причем предметы чередуются, повторяются, не нарушая целостности сюжета. Форму проведения сюжетных уроков учитель выбирает, учитывая возраст детей, тему сюжета. Это может быть урок-игра, урок-путешествие, урок-конференция и т.д. Сюжетные уроки могут быть различны по типу урока: изучение нового материала, повторение, обобщение.

Интегрированные уроки обычно планируются заранее, ведь необходимо и совпадение тем в учебных программах, и готовность класса к определённому типу урока. Очень часто интегрированные уроки проводятся по темам обобщения и закрепления знаний.

Современная направленность среднего образования тесно связана с компьютеризацией и информатизацией. Поэтому многие уроки нуждаются в интеграции с информатикой [1, с. 48–51]. Математика и языки чаще всего интегрируются с информатикой. Дети закрепляют новые знания с помощью персонального компьютера. Им доставляет большое удовольствие работа с компьютером, и учёба для них становится более увлекательной. Дети могут выполнять на компьютере как обычные задания стандартного урока, так и новые, непривычные для них упражнения. Основная цель такого урока – изучение нового материала (либо закрепление темы) наряду с освоением приёмов работы на компьютере.

Интегрированные уроки бывают целостными и фрагментарными. Интеграцию на весь урок удаётся организовать редко. Они более интересны, т.к. не каждый день на уроке присутствуют два учителя одновременно, помогают решить большее количество задач, применить разные методы и формы обучения. Фрагментарные уроки позволяют рассмотреть небольшой круг вопросов. Интегрированные уроки могут объединить разные учебные дисциплины, которые, на первый взгляд, кажутся несовместимыми. Например, МХК и информатика. На этих уроках формируются следующие компетенции:

- ценностно-смысловые (понимание цели урока, важности изучаемой темы);
- информационные (работа с компьютером, умение самостоятельно подбирать необходимый материал);
- коммуникативные (умение работать в группах, выслушивать, общаться, лояльно относиться к людям с другой точкой зрения).

Библиографический список

1. Бахарева Л.Н. Интеграция учебных занятий в начальной школе на краеведческой основе. // Начальная школа. 1991. № 8. С. 48–51.
2. Болдырев Н.И. и др. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1968. С. 115.
3. Браже Т.Г. Интеграция предметов в современной школе // Литература в школе. 1996. № 5. С. 150–154.
4. Телеева Е.В., Качалова Л.П., Качалов Д.В. Педагогические технологии. Шадринск, 2003.
5. Подласый И.П. Педагогика. Новый курс: учебник для студ. вузов: в 2 кн. Кн. 1. Общие основы. Процесс обучения. М.: ВЛАДОС, 1999. 576 с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЯЗЫКЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

SOLUTION OF PROBLEMS IN THE LANGUAGE GRAPH THEORY IN THE COMPUTER ENVIRONMENT GEOGEBRA

Ю.И. Капач, М.А. Кейв

J.I. Kapach, M.A. Kejv

Компьютерная среда GeoGebra, теория графов, задачи практического контекста.

Рассматривается технология решения задач практического контекста на языке теории графов с использованием динамической среды GeoGebra. В рамках технологии достаточно подробно описывается алгоритм построения интерактивных графовых моделей для решения некоторых прикладных задач теории графов с помощью встроенных команд компьютерной среды GeoGebra. Применение представленных моделей в процессе обучения школьников позволит продемонстрировать приложения предметной области «Математика и информатика».

Computer GeoGebra Wednesday, graph theory, the practical problem of context.

We consider technology solving practical context in the language of graph theory, using GeoGebra dynamic environment. As part of the technology described in detail an algorithm for constructing interactive graph models to address some applications of graph theory with the help of built-in commands GeoGebra computing environment. Application of the models in the learning process students will demonstrate the application domain of “Mathematics and Informatics”.

В Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования обозначены новые требования к метапредметным и предметным результатам освоения основной образовательной программы, среди которых: «умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач»; «умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера...» [3].

Специфика теории графов позволяет вводить ее основные понятия в предметную область общего образования школьников «Математика и информатика», методологически связывая их с практикой, показывая пути возникновения этих понятий при помощи формализации и обобщения различных сторон действительности.

Одной из особенностей теории графов, которая, собственно, и позволяет ставить вопрос о введении ее элементов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрически – в виде простого, удобного в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Теория графов предлагает модели для всякой системы с бинарными отношениями. Если в изучаемом явлении выделить непустое множество каких-то элементов и множество бинарных отношений, заданных на первом множестве, то, как только удастся разумно соотнести вершинам графа интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между ними, полученный граф становится математической моделью изучаемого явления, а свойства графа отражают структурные свойства этого явления [2].

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные и разнообразные задачи практического контекста.

В данной статье представим опыт решения практических задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra.

GeoGebra – свободно распространяемая кроссплатформенная система динамической геометрии, обладающая: расширенным набором инструментов, позволяющих создавать различные чертежи; большим количеством встроенных команд по различным разделам математики; возможностью организации анимации и др. В компьютерной среде GeoGebra чертеж является моделью, которая легко создается и изменяется, при этом оставаясь одним целым.

С помощью встроенных команд «МинимальноеОстовноеДерево» и «Коммивояжер», которые находятся в списке команд раздела «Дискретная математика», можно решать ряд задач практического содержания, создавая интерактивные графовые модели в среде GeoGebra [1].

Рассмотрим примеры решения задач на языке теории графов в компьютерной среде GeoGebra.

Задача 1. Перед вами карта городов «Золотого кольца» с выбранной условно системой координат (рис. 3). Составьте оптимальный замкнутый маршрут (маршрут наименьшей длины, проходящий через все города «Золотого кольца» только один раз) экскурсионного тура из города Москва. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до сотых) наименьшую длину экскурсионного маршрута.



Рис. 1



Рис. 2

На языке теории графов задача сводится к отысканию гамильтонова цикла наименьшей длины в графе с вершинами, соответствующими заданным городам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов:

1. С помощью инструмента «Точка» возле каждого города на карте расставляем условно точки – вершины графа: А, В, С, D, E, F, G, H, I, J, K, L.

2. Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «Коммивояжер» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа: «Коммивояжер[А, В, С, D, E, F, G, H, I, J, K, L]». В результате получаем гамильтонов цикл наименьшей длины (рис. 2).

3. Соединяем отрезками полученный маршрут и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт «Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.

Задача 2. Перед вами карта городов России с выбранной условно системой координат (рис. 3). Составьте оптимальную систему авиарейсов (т. е. из любого города в любой другой можно перелететь единственным авиарейсом наименьшей длины), соединяющих данные города. Вычислите, используя встроенные функции среды GeoGebra, примерную (с точностью до десятых) наименьшую длину установленной системы авиарейсов.



Рис. 3

На языке теории графов задача сводится к отысканию минимального остовного дерева в графе с вершинами, соответствующими заданным городам.

Алгоритм решения данной задачи в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов:

1. С помощью инструмента «Точка» возле каждого города на карте расставляем условно точки – вершины графа: A, B, C, D, E, F, G.

2. Выбираем в списке команд в разделе «Дискретная математика» команду «МинимальноеОстовноеДерево» и вставляем ее в строку ввода, перечисляя через запятую все вершины графа: «МинимальноеОстовноеДерево[A,B,C,D,E,F,G]». В результате получаем минимальное остовное дерево для данного графа (рис. 4).



Рис. 4

3. Соединяем отрезками полученный маршрут авиарейсов и в строке ввода находим сумму длин отрезков. В меню «Настройки» выбираем пункт «Округление» и устанавливаем необходимую точность вычислений, выбирая определенное число разрядов в числе после запятой.

Таким образом, использование компьютерной среды GeoGebra позволяет продемонстрировать на уроках математики или информатики решение задач практического контекста на языке теории графов, что, безусловно, дает возможности для формирования и развития заявленных в новых образовательных стандартах метапредметных и предметных результатов обучения учащихся предметной области «Математика и информатика».

Библиографический список

1. Большакова Н.С. Обучение теории графов с помощью системы динамической геометрии GeoGebra // Применение информационных технологий в образовании: материалы XXV Международной конференции. 25–26 июня 2014 г. М.; Троицк. С. 120–122.
2. Кейв М.А. Дискретная математика для будущего учителя математики: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2009.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, 2010 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

MODELING OF SOLUTIONS OF COMBINATORIAL PROBLEMS IN COMPUTER ENVIRONMENT GEOGEBRA

М.А. Кейв, В.А. Кожуховская

M.A. Kejv, V.A. Kozhukhovskaya

Компьютерное моделирование, компьютерная среда, GeoGebra, комбинаторные задачи.

В статье рассматриваются методические аспекты решения математических задач с использованием возможностей компьютерной среды GeoGebra. Описан авторский прием решения одной из известных комбинаторных задач – задачи о ханойской башне. Проиллюстрирован алгоритм построения анимационного чертежа в среде GeoGebra.

Computer environment, GeoGebra, combinatorial problems, design of solutions to combinatorial problems.

In the article the methodological aspects of solving mathematical problems using the capabilities of a computer environment GeoGebra. Describes the author's decisions one of well-known combinatorial problems – the problem of Hanoi tower. Illustrates the algorithm for constructing the animated drawing in the environment of GeoGebra.

Компьютерное моделирование решения математической задачи предполагает использование специальных компьютерных программ (GeoGebra, «Живая математика» и др.) для создания компьютерной модели математических объектов, процессов и явлений, о которых идет речь в условии задачи. Такая компьютерная модель позволяет: лучше проникнуть в условие задачи; провести наблюдение за математическими объектами; сформулировать гипотезу решения и провести ее экспериментальное доказательство; визуализировать решение задачи с помощью анимации.

Анимационные чертежи (живые рисунки) делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их усвоению. Особенно поучительным является самостоятельное изготовление живого рисунка, предполагающее глубокое проникновение в суть изображаемого. Живые рисунки можно использовать на разных стадиях изучения материала: как готовые наглядные пособия при изучении нового, как источник задач и сопровождения их решений, как инструмент для экспериментирования и проведения научных исследований [1].

В данной статье представим опыт создания анимационных чертежей в компьютерной среде GeoGebra, иллюстрирующих решение некоторых комбинаторных задач.

Главным признаком задач комбинаторного типа является вопрос, который звучит как «Сколько вариантов?» или «Сколькими способами?». Решение комбинаторных задач напрямую зависит от того, понял ли решающий их смысл, сумел ли правильно представить действие или процесс, которые были описаны в задаче.

Компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

В качестве примера рассмотрим алгоритм построения компьютерной модели для решения одной из известных комбинаторных задач – задачи о ханойской башне: «Имеется три стержня и n колец разного размера. Вначале все кольца находятся на одном из трех стержней в порядке убывающего размера, как показано на рис. 1 для четырех колец. Нужно переместить имеющиеся кольца на другой стержень так, чтобы они остались в том же порядке. Этого нужно добиться, соблюдая следующие правила:

- на каждом шаге ровно одно кольцо перемещается с одного стержня на другой;
- кольцо большего размера нельзя помещать на меньшее;
- один из стержней можно использовать в качестве промежуточного.

Покажите, что это всегда можно сделать, и найдите, за какое наименьшее число перекладываний можно переместить k колец: а) $k = 2$; б) $k = 3$; в) $k = 4$ ».

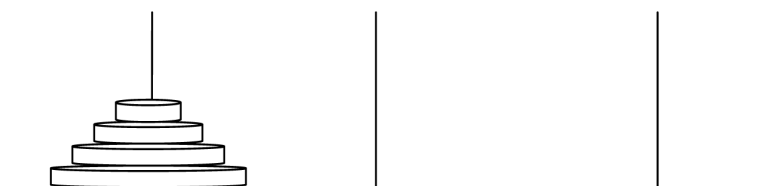


Рис. 1

Алгоритм построения модели для решения данной задачи при $k = 3$ в компьютерной среде GeoGebra состоит из следующих шагов:

1 шаг. С помощью инструментов «Прямая» изображаем три стержня, а с помощью инструмента «Многоугольник» изображаем 3 кольца на одном из стержней. Создаем ползунок с именем n для подсчета числа перекладываний ($n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$) (рис. 2). Правой кнопкой мыши поочередно «кликаем» на каждое кольцо пирамиды и в меню «Свойства» выбираем вкладку «Дополнительно», с помощью которой задаем условия отображения для самого верхнего кольца $n = 0$, для среднего кольца $n = 0$ или $n = 1$, для самого большого кольца $n = 0$ или $n = 1$, или $n = 2$, или $n = 3$.



Рис. 2

2 шаг. Создаем копию верхнего кольца наименьшего размера, помещаем его на один из свободных стержней и устанавливаем для него условие отображения: $n = 1$ или $n = 2$.

3 шаг. Создаем копию среднего кольца, помещаем его на свободный стержень и устанавливаем для него условие отображения: $n = 2$, или $n = 3$, или $n = 4$, или $n = 5$ (рис 3).

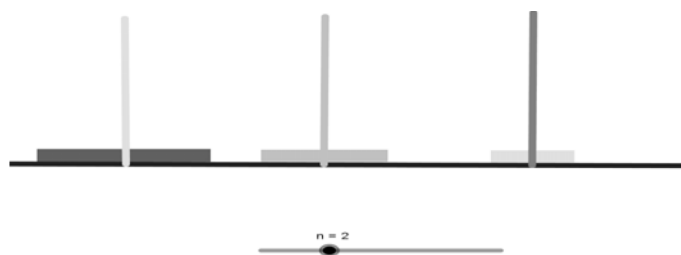


Рис. 3

4 шаг. Создаем ещё одну копию верхнего кольца наименьшего размера, помещаем его на кольцо среднего размера и устанавливаем для него условие отображения: $n = 3$ или $n = 4$.

5 шаг. Создаем копию самого большого кольца, помещаем его на освободившийся стержень и устанавливаем для него условие отображения: $n = 4$, или $n = 5$, или $n = 6$, или $n = 7$ (рис 4).

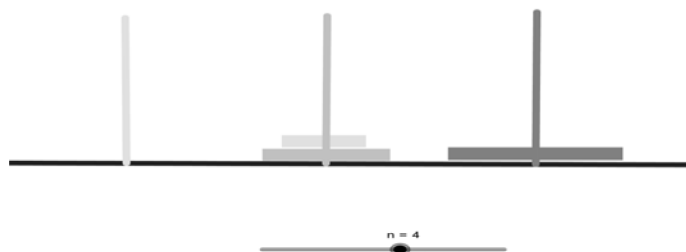


Рис. 4

6 шаг. Повторяем шаги 2, 3 и 4 – перекладываем кольца среднего и наименьшего размера на стержень с наибольшим кольцом, изменяя соответствующие условия отображения для этих объектов (рис. 5). Для ползунка n можно задать анимацию, в результате чего получится анимационный чертеж, иллюстрирующий процесс решения задачи для $k = 3$.



Рис. 5

С дидактической точки зрения довольно поучительным будет задание для учащихся, заключающееся в самостоятельном построении анимационных чертежей для решения данной задачи при $k = 4$.

В процессе построения такой модели для k колец учащиеся могут заметить, что как только удалось переложить кольцо наибольшего размера с одного стержня на другой, задача сводится к уже знакомой задаче о перекладывании $(k-1)$ верхних колец. В результате учащиеся приходят к гипотезе о том, что если наименьшее число перекладываний, за которое можно переложить k колец, обозначить P_k , то оно будет равно сумме следующих чисел: P_{k-1} – наименьшее число перекладываний верхних $(k-1)$ колец с одного стержня на другой; 1 – одно перекладывание самого нижнего большого кольца и P_{k-1} – наименьшее число перекладываний за которое можно снова переложить $(k-1)$ верхних кольца на кольцо наибольшего размера. Приходим к рекуррентному соотношению: $P_k = 2 P_{k-1} + 1$.

Таким образом, компьютерная среда GeoGebra предоставляет возможности для моделирования решений комбинаторных задач.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).

АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA

ANIMATION AND GEOMETRIC MODELING METHOD PROBLEMS OF GRAPH THEORY IN THE ENVIRONMENT OF GEOGEBRA

М.А. Кейв

M.A. Keiv

Анимационно-геометрический метод, компьютерное моделирование, среда GeoGebra, теория графов, задача о трех домах и трех колодцах.

В статье рассматриваются методические аспекты изучения элементов теории графов с использованием возможностей анимационно-геометрического моделирования математических объектов в компьютерной среде GeoGebra. Описана авторская методика решения одной из известных задач теории графов – задачи о трех домах и трех колодцах, решение которой основано на проведении компьютерного эксперимента по укладке полного двудольного графа $K_{3,3}$ на различных поверхностях и в трехмерном евклидовом пространстве.

Animation and geometric method, computer modeling, animation drawing, environment GeoGebra, graph theory, problem of the three houses and three wells.

The article deals with methodical aspects of studying elements of the theory of graphs using the capabilities animation and geometric modeling of mathematical objects in a computing environment GeoGebra. Describe the author's method of solving one of the well-known problems of graph theory – the problem of the three houses and three wells, the solution of which is based on the conduct of the computer experiment on laying a complete bipartite graph $K_{3,3}$ on different surfaces and in three-dimensional Euclidean space.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования задает новые требования к результатам школьного образования, среди которых – «владение опытом построения и использования компьютерно-математических моделей» [2].

Формирование у учащихся опыта построения и использования компьютерно-математических моделей возможно, если в процессе их обучения математике они будут систематически вовлечены в учебную, исследовательскую, проектную деятельность, связанную с компьютерным моделированием математических объектов.

Для того чтобы вовлечь учащихся в подобную деятельность, будущий учитель математики сам должен быть компетентен в этой области. Это означает, что в рамках математической подготовки в вузе студент должен овладевать умениями и навыками компьютерного моделирования математических объектов.

Компьютерное моделирование является важнейшей частью динамической математики. Под динамической математикой мы понимаем часть математических исследований, неотъемлемой составляющей которых являются чертежи с анимацией, участвующие в решении поставленной математической задачи, созданные на экране компьютера в некоторой компьютерной среде [1].

Наиболее ярким представителем компьютерной составляющей динамической математики является компьютерная среда GeoGebra, которая позволяет посредством создания анимационных чертежей визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования при решении разнообразных математических задач и при изучении математических объектов. Особенно поучительным является сам процесс создания анимационного чертежа.

В данной статье представим опыт использования компьютерной среды GeoGebra при обучении студентов – будущих бакалавров педагогического образования элементам теории графов.

Теория графов предлагает модели для всякой системы с бинарными отношениями. Если в изучаемом явлении выделить непустое множество каких-то элементов и множество бинарных отношений, заданных на первом множестве, то, как только удастся разумно соотнести вершинам графа интересующие нас объекты, а ребрам – отношения между ними, полученный граф становится математической моделью изучаемого явления, а свойства графа отражают структурные свойства этого явления.

Простой язык теории графов позволяет решать многочисленные, разнообразные и довольно нетривиальные задачи дискретной математики.

Одной из судьбоносных для развития теории графов является задача о трех домах и трех колодцах: «Имеются три дома и три колодца (рис. 1). Каждый хозяин пользуется любым из трёх колодцев, но не любит встречаться с другими хозяевами. Можно ли проложить непересекающиеся дорожки, соединяющие каждый из домов с каждым колодцем?».

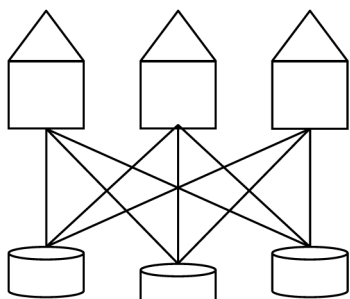


Рис. 1

Если к решению данной задачи применить язык теории графов, а именно: соотнести домам и колодцам вершины графа, дорожкам – ребра графа, то решение задачи сводится к вопросу о существовании плоской укладки двудольного графа $K_{3,3}$.

Во многих случаях не имеет значения, как изобразить граф, поскольку изоморфные графы несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, можно ли нарисовать граф на плоскости или на любой другой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались, то есть чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электросхемы наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

На языке теории графов речь идет в подобных случаях об укладке графа на некоторой поверхности, например, на плоскости или на поверхности сферы или тора. Граф Q укладывается на некоторой поверхности, если его можно нарисовать на этой поверхности так, чтобы ребра графа при этом не пересекались. Граф Q укладывается в заданное пространство E , если существует изоморфизм j графа Q на граф Q' , находящийся в пространстве E , причём все простые кривые, соответствующие рёбрам графа Q (образы ребер графа Q), пересекаются только в инцидентных этим рёбрам вершинах.

С методической точки зрения, при знакомстве студентов с данным разделом теории графов, целесообразно их вовлечь в эксперимент по поиску решения задачи о трех домах и трех колодцах с помощью компьютерной среды GeoGebra.

На первом этапе решения задачи студентам предлагается изобразить диаграмму графа $K_{3,3}$ (рис. 2) в GeoGebra с помощью инструмента «Отражение относительно прямой», построив вершины, симметричные вершинам «Дом₁», «Дом₂», «Дом₃». Изменяя положения этих вершин, получаем новые изображения графа $K_{3,3}$ – изоморфные графы.

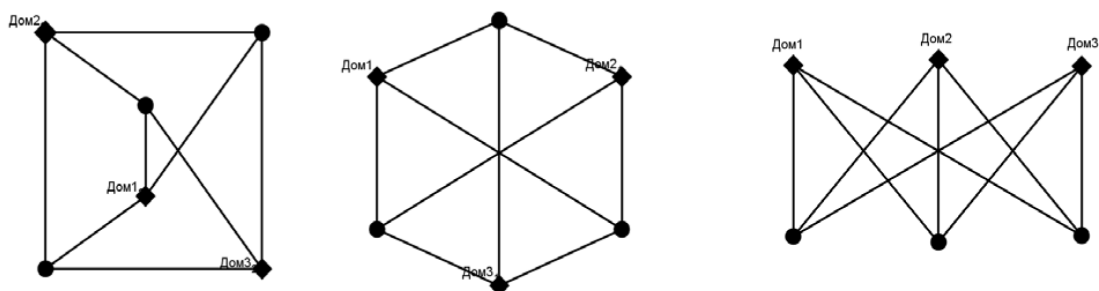


Рис. 2

Студенты в ходе компьютерного эксперимента убеждаются, что все попытки осуществить плоскую укладку графа $K_{3,3}$ неизбежно заканчиваются неудачей. Как правило, легко нарисовать 8 непересекающихся дорожек, но девятая обязательно пересечёт хотя бы одну из этих восьми. Конечно, эти неудачи не случайны. Задача не имеет решения на плоскости.

На втором этапе решения задачи студентам предлагается попробовать уложить граф $K_{3,3}$ на поверхности сферы. И опять все попытки заканчиваются неудачей. В ходе эксперимента студенты убеждаются, что и на поверхности сферы задача не имеет решения (рис. 3).

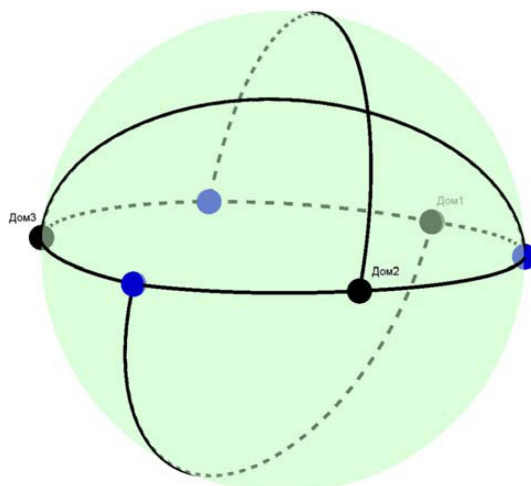


Рис. 3

Проведение эксперимента в среде GeoGebra на первом и втором этапах решения задачи приводит студентов к выводу о необходимости конструирования моста или туннеля, соответствующих девятой дорожке.

На третьем этапе решения задачи предлагаем студентам изобразить в среде GeoGebra укладку графа $K_{3,3}$ в трехмерном пространстве (рис. 4).

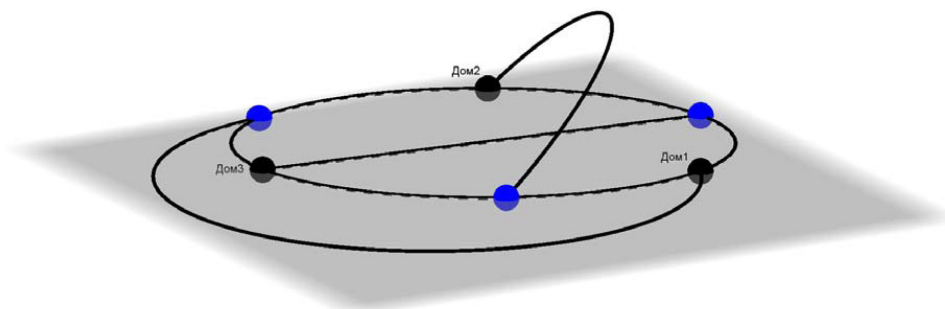


Рис. 4

После проведения описанного выше эксперимента рассматриваем и доказываем утверждение о том, что любой граф укладывается в трёхмерное евклидово пространство.

Опыт обучения студентов элементам теории графов на основе анимационно-геометрического моделирования математических объектов в компьютерной среде GeoGebra свидетельствует об устойчивом повышении результатов обучения и интереса студентов к данному разделу дискретной математики.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) образования, 2012 г.

ИНТЕГРИРОВАННЫЙ УРОК КАК ОСНОВА УСПЕШНОГО УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

THE INTEGRATED LESSON AS BASIS OF SUCCESSFUL ASSIMILATION OF KNOWLEDGE

В.А. Коротынская

V.A. Korotynskaya

Интегрированный урок, нетрадиционный урок, современные технологии, построение графика функции в EXCEL, решение квадратного уравнения в PASCAL.

В данной статье рассматривается проблема организации интегрированного урока в школе. Проведенное исследование позволило сделать вывод, что информатика может быть базой для проведения урока математики. Приведены примеры решения заданий по математике в таких программах, как EXCEL и PASCAL.

The integrated lesson, unconventional lesson, modern technologies, creation of a function graph in EXCEL, the solution of a quadratic equation in PASCAL.

This article discusses the problem of the organization of integrated lesson in school. The conducted research allowed concluding that informatics can be the basis for the lesson mathematics. Examples of the solution of tasks on mathematics in such programs as EXCEL and PASCAL.

Перед современным учителем остро стоит проблема, связанная с подготовкой учащихся к дальнейшей жизни и профессиональной деятельности в высокоразвитой информационной среде, к возможности получения дальнейшего образования с использованием современных информационных технологий обучения. Уроки в школе должны так соответствовать и духу времени, и запросам цифрового поколения, чтобы пробудить интерес к предмету у каждого ученика. На наш взгляд, одно из перспективных направлений теории и методики обучения математике и информатике в школе – это так называемые интегрированные уроки.

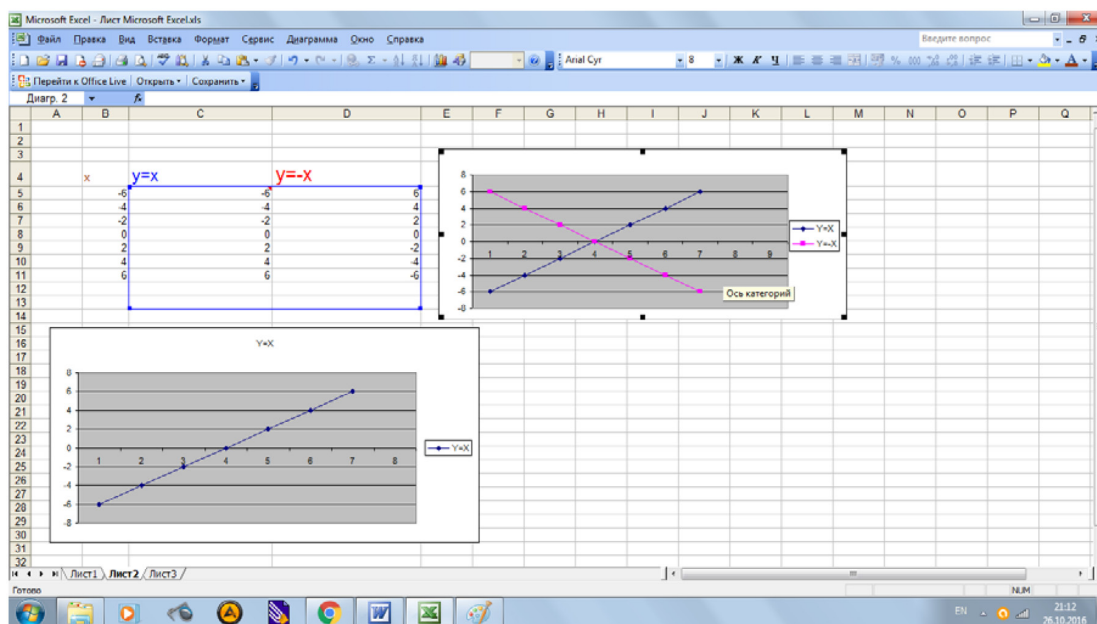
Наиболее органичная интеграция, которую может реализовать учитель математики, в том числе и самостоятельно, – это интеграция информатики и математики. Конечно, такой урок потребует большей подготовки и от учителя и от учащихся, причём нет никакой гарантии, что академического часа окажется достаточно на его проведения. Нам представляется, что такой урок должен быть направлен на изучение нового материала, который с целью мотивации целесообразно представить в более ярком, наглядном виде. Для закрепления материала интегрированный урок вряд ли подойдёт, хотя результативность зависит и от темы урока, и от той позиции, с которой подойдет к данной теме педагог.

Например, изучение функций в 7 классе можно объединить с подходящей темой школьного курса информатики. В качестве программного средства можно использовать EXCEL. Применение электронных таблиц не только позволит облегчить изучение функций, но и сделает этот процесс более наглядным и познавательным. Главное – добиться того, чтобы изучать функции большей части учащихся было интересно. Как следствие, у них должно появиться желание продолжить познание этого важнейшего для математики и практики понятия. Осознание школьником места изучаемого материала в разных областях науки и жизни облегчит его понимание, поможет оценить правильность выбора области определения, области значения, свойств функции, области изменения параметров функции.

Построив график функции в EXCEL, школьник получает возможность, меняя параметр, сразу же увидеть результат. При этом не нужно чертить множество графиков, что отнимает немало времени. Выиграв время на построениях, учитель может направить усилия ученика на отработку свойств функций, решение сопутствующих задач.

Ниже приведен пример функции прямой пропорциональности, построенной в EXCEL. Мы видим, как меняется график. Например, если изначально угловой коэффициент положителен, то

стоит поменять знак коэффициента, как график нашей функции меняет направление. В программе это делается достаточно просто – меняем значение углового коэффициента на противоположное и сразу наблюдаем, как график из 1 и 3 четвертей переместился в 2 и 4 четверти.



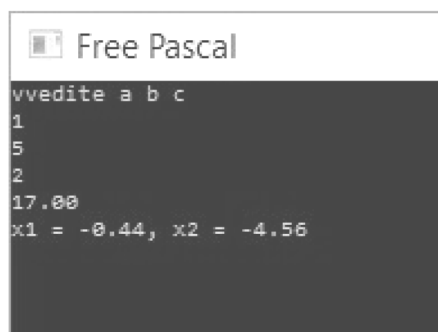
В 9 классе при решении уравнений можно воспользоваться возможностями Pascal, что может облегчить вычисления и укрепить познания учащихся не только в математике, но и информатике. Учащиеся должны быть к этому времени уже знакомы с основными функциями в Pascal. При составлении программы решения уравнения в Pascal ученик должен четко понимать алгоритмы решения основных уравнений, а значит, программирование в данном случае станет стимулом к их лучшему усвоению. Эти две учебные дисциплины хорошо друг друга дополняют и позволяют органично интегрировать материал, что дает возможность, с одной стороны, показать взаимосвязь материала данных дисциплин, с другой – продлить изучение выбранной темы за счет плавного перехода из одной дисциплины в другую, не проводя четких границ.

Ниже показано, как выглядит программа в Pascal и процесс нахождения с ее помощью дискриминанта и корней квадратного уравнения:

```

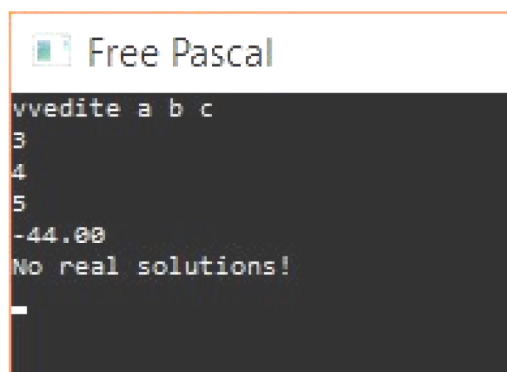
Free Pascal
File Edit Search Run Compile Debug Tools Options W
ex1.pas
program QuadraticEquation;
uses crt;
var a, b, c, d, x1, x2: real;
begin clrscr;
  writeln('введите a b c');
  readln(a, b, c);
  d := b * b - 4 * a * c;
  writeln(d:4:2);
  if d >= 0 then begin
if d <> 0 then begin
  x1 := (-b + sqrt(d)) / 2 * a;
  x2 := (-b - sqrt(d)) / 2 * a;
  writeln('x1 = ', x1:4:2, ', x2 = ', x2:4:2);
end else begin
  x1 := -(b / 2 * a);
  writeln('x = ', x1:4:2);
  end; end
else begin
  writeln('No real solutions!');
end; readkey;
end.
15:52
F1 Help F2 Save F3 Open Alt+F9 Compile F9 Make Alt+F1
    
```

Квадратное уравнение с $x^2+5x+2=0$ имеет следующие корни:



```
Free Pascal
vvedite a b c
1
5
2
17.00
x1 = -0.44, x2 = -4.56
```

Уравнение $3x^2+4x+5=0$ не имеет корней:



```
Free Pascal
vvedite a b c
3
4
5
-44.00
No real solutions!
```

В приведенном случае лучше, чтобы урок информатики шел следом за уроком математики, сразу после изучения новой темы по математике.

При прохождении учебной практики в одной из красноярских школ не раз приходилось слышать от учителей, что такие уроки довольно тяжело проводить. Но такой опыт присутствует, что не может не радовать. Считаем, что стоит больше разрабатывать материала по данной проблеме и апробировать на практике в общеобразовательной школе.

Библиографический список

1. Босова Л.Л. Информатика. 8–9 класс: учебник. М.: Бинوم, 2011.
2. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. Математика. 6 класс. М.: Мнемозина, 2009.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗЫСКАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК, РАВНОУДАЛЕННЫХ ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ И ОКРУЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GEOGEBRA

PROBLEM SOLVING OF THE FINDING THE LOCUS OF POINTS EQUIDISTANT FROM A GIVE POINT AND A CIRCLE WITH USING GEOGEBRA

Г.Д. Кучерин, М.А. Павлова

G. Kucherin, M. Pavlova

GeoGebra, компьютерный эксперимент, расстояние от точки до окружности, геометрическое место точек, метод доказательства от противного.

В статье рассматривается пример решения исследовательской задачи на построение геометрического места точек, равноудаленных от заданной окружности, и некоторой точки плоскости с помощью программы GeoGebra.

GeoGebra, a computer experiment, the distance from a point to an object, the locus of points equidistant from a given circle and a point of the plane, method of proof by contradiction.

The article presents the example of the solving of the research problem about the construct the locus of points equidistant from a given circle and a point of the plane with using Geogebra.

На занятии кружка для учащихся 7–9 классов «Экспериментальная математика» было предложено решить исследовательскую задачу на поиск траектории движения спутника. Математическое описание этой задачи сводилось к следующему: «Найти геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданных на этой плоскости окружности и точки».

В своем предельном выражении (когда радиус окружности равен нулю) эта задача сводится к школьной теореме о геометрическом месте точек, равноудаленных от концов отрезка. Однако это мало помогло в её решении, так как для сравнения расстояний необходимо понимать, что это такое.

В школьном курсе геометрии [1] мы рассматривали лишь расстояния между двумя точками, от точки до прямой, не содержащей эту точку, и расстояние между параллельными прямыми. А что же такое расстояние от точки до окружности?

Для того чтобы осмыслить новое понятие, мы решили обратиться к нашим знаниям физики. В учебнике мы нашли следующее определение: «Расстоянием между пунктами А и В называется длина наименьшего пути (траектории) с началом и концом в этих точках» [3, с. 31].

Чтобы найти путь наименьшей длины от данной точки к окружности, мы решили использовать компьютерный эксперимент в программе GeoGebra. Мы отметили произвольную точку В на окружности, измерили расстояние между точкой В и заданной точкой А. Затем перемещали точку В по окружности. В результате было установлено, что расстояние будет наименьшим, если точка В лежит на прямой, проходящей через центр окружности – точку О и заданную точку А. При определении расстояния мы рассмотрели две принципиально различные ситуации: 1) точка А является точкой круга (О; ОВ) (рис. 1); 2) точка А не является точкой круга (рис. 2).

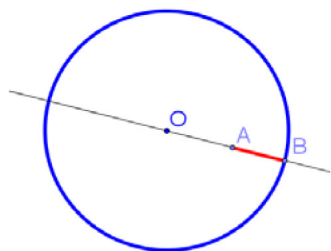


Рис. 1

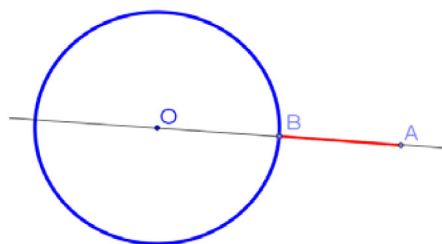


Рис. 2

Опираясь на данные эксперимента, мы определили расстояние от точки до окружности следующим образом: «Расстоянием от окружности с центром в точке O до точки A является отрезок AB , где B – точка пересечения окружности с лучом OA ».

Введение этого определения позволило нам построить точку искомого ГМТ по следующему алгоритму:

1. Отметить произвольную точку B на окружности (O ; R).
2. Построить луч OB (геометрическое место точек, расстояние от которых до окружности измеряется длиной отрезка с концом в точке B).
3. Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB (геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка AB).
4. Отметить точку X как пересечение луча OB с серединным перпендикуляром к отрезку AB (точка искомого геометрического места, рис. 3).

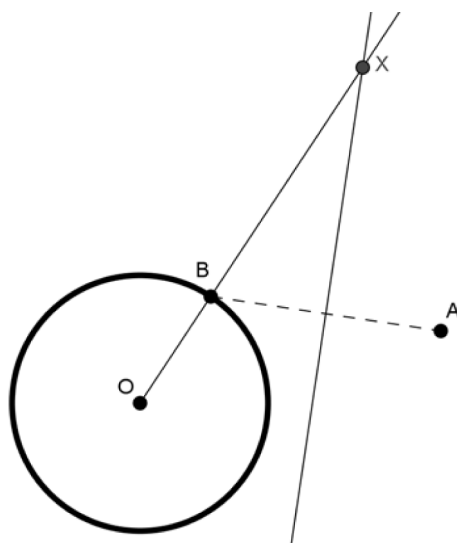


Рис. 5

Для получения изображения самого ГМТ мы использовали инструмент «Локус». Затем стали перемещать точку A , чтобы исследовать зависимость формы ГМТ от взаимного расположения точки и окружности. В результате выделились три принципиально различных случая: 1) точка A вне круга (рис. 4); точка A во внутренней области круга (рис. 5 и 6); 2) точка A на окружности (рис. 7, 8 и 9).

Для того чтобы определить вид полученных кривых, мы отметили четыре дополнительных произвольных точки локуса и воспользовались инструментом «Коника по пяти точкам».

В результате были выдвинуты шесть гипотез:

1. Если точка A не является точкой круга, то искомого ГМТ имеет форму гиперболы (рис. 4).
2. Если точка A является точкой внутренней области круга, то искомого ГМТ имеет форму:
 - 2.1) эллипса, если точка A не совпадает с центром окружности (рис. 5);
 - 2.2) окружности, если точка A совпадает с центром окружности (рис. 6).

3. Если точка A является точкой окружности, то искомое ГМТ имеет форму:
 3.1) гиперболы (рис. 7);
 3.2) эллипса (рис. 8);
 3.3) одна точка – центр окружности (рис. 9).

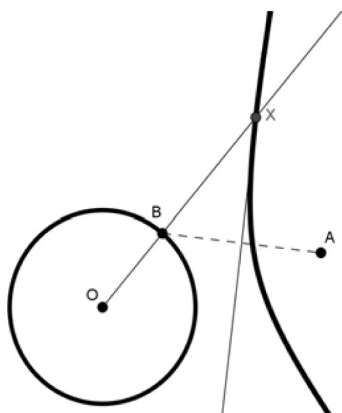


Рис. 4

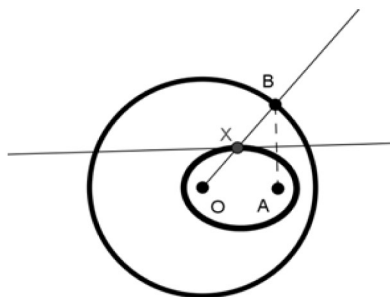


Рис. 5

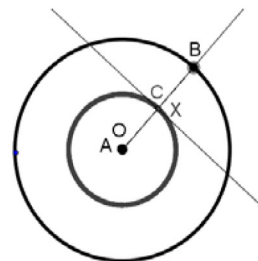


Рис. 6

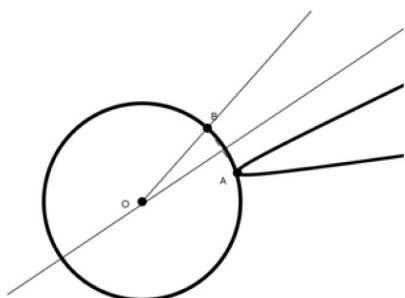


Рис. 7

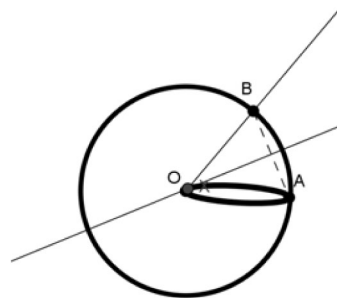


Рис. 8

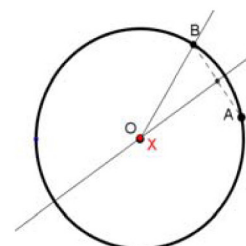


Рис. 9

Для проверки гипотез нами была собрана дополнительная информация о свойствах гиперболы и эллипса. В основу доказательств мы решили положить следующие утверждения:

гипербола – это множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная $2a$, меньшая расстояния $2c$ между этими заданными точками (рис. 10);

эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (рис. 11) [2].

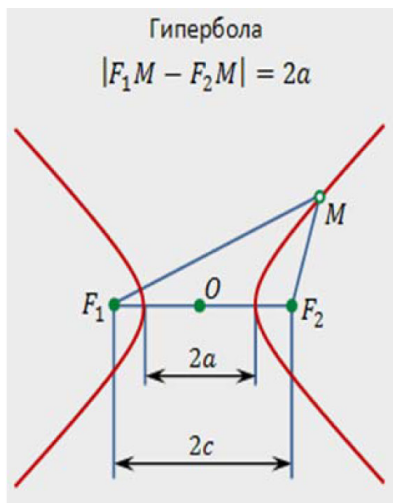


Рис. 10

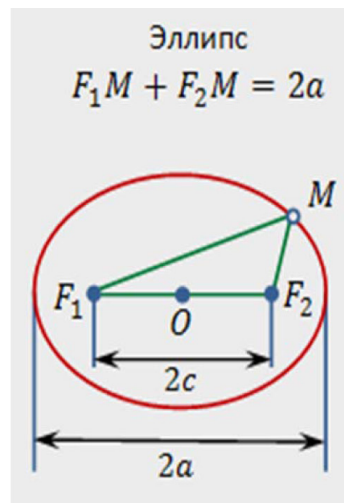


Рис. 11

Предположим, что точки O и A – фокусы, тогда длина отрезка OA – фокальное расстояние гиперболы (эллипса). По построению точки X для случая, когда точка A не является точкой круга с центром в точке O и радиусом R (рис. 4): $|OX - AX| = |(OB + BX) - A| = OB = R = const$, следовательно, ГМТ – гипербола; для случая, когда точка B является внутренней точкой круга (рис. 7): $|OX + AX| = |(OB - XB) + XA| = R = const$, следовательно, ГМТ – эллипс. Если точка A совпадает с центром окружности, то фокальное расстояние эллипса равно нулю, получаем его частный случай – окружность (рис. 6). Таким образом, первые три гипотезы доказаны.

Теперь рассмотрим случай, когда точка A лежит на окружности, значит, расстояние от точки A до окружности равно нулю. Очевидно, что одной из точек искомого ГМТ является центр окружности. Обозначим через X произвольную точку этого ГМТ, отличную от O , а через B – точку окружности, лежащую на луче OX . Предположим, что $A \neq B$. Так как $XB = XA$, то X – лежит на серединном перпендикуляре m к отрезку AB . Поскольку AB является хордой окружности, то m проходит через центр O окружности. Но тогда точки X и O , являясь общими точками прямой m и луча OX , совпадают, что противоречит выбору X . Пусть теперь $A = B$. В этом случае X лежит на луче OA и $XB = XA$, т. е. любая точка луча OA принадлежит искомому ГМТ.

Следовательно, ни одна из трёх гипотез не оказалась верной. В результате проведённого исследования нами было доказано новое утверждение: *множество точек, равноудалённых от окружности с центром O и точки A , лежащей на окружности, представляет собой луч OA* . Причина того, что это утверждение не попало в список гипотез, связана с тем, что наш алгоритм построения ГМТ не позволил программному средству изобразить искомый луч, хотя некоторые «подсказки» GeoGebra делала, и они, по сути, представлены на рисунках 7 и 8. Действительно, при стремлении A к окружности из вне ветвь гиперболы постепенно вырождается в луч с началом в точке A . При стремлении же A к окружности из ее внутренней области эллипс вырождается в отрезок OA . Объединяя луч и отрезок, мы получим искомое ГМТ – луч OA .

Таким образом, в ходе решения задачи о разыскании ГМТ, равноудаленных от данной точки и окружности, мы несколько раз обращались к компьютерным экспериментам в среде GeoGebra. Однако окончательные выводы смогли сделать лишь на основе доказательства, для которого использовали изучаемый в школе «метод от противного».

Библиографический список

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия: учебник для 7–9 классов. М.: Просвещение, 2015.
2. Математический форум Math Help Planet. [Электронный ресурс]. URL: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=giperbola>
3. Перышкин А.В. Физика. 7 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений. стереотип. издание, М.: Дрофа, 2013. 192 с.

АНИМАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA

SIMULATION COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR POLYNOMIALS IN A MEDIUM GEOGEBRA

С.В. Ларин, С.И. Калачева

S.V. Larin, S.I. Kalacheva

Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида, линейная форма наибольшего общего делителя, среда GeoGebra, анимационный рисунок.

Статья посвящена использованию анимационных рисунков в среде GeoGebra для решения задач по теории делимости многочленов. В частности, созданию анимационных рисунков для нахождения пары многочленов, имеющих задуманный наибольший общий делитель и заданную последовательность неполных частных в алгоритме Евклида, а также для нахождения линейной формы наибольшего общего делителя данных многочленов.

The greatest common divisor, Euclidean algorithm, the linear form of the greatest common divisor, GeoGebra Wednesday, animated drawing.

The article is devoted to the use of animated graphics in GeoGebra environment for solving problems in the theory of divisibility of polynomials. In particular, the creation of animated drawings to find the pairs of polynomials having conceived the greatest common divisor and a predetermined sequence of partial quotients in the Euclidean algorithm, as well as for finding the linear form of the greatest common divisor of these polynomials.

В «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» [1] от 24.12.2013 среди выделенных проблем на первом месте стоит проблема мотивационного характера. Эта проблема всегда актуальна и не может иметь однозначного решения. С изменением системы ценностей на каждом витке развития общества приходится искать новое ее решение. В Концепции [1] сказано, что «низкая учебная мотивация школьников и студентов связана с общественной недооценкой значимости математического образования, перегруженностью образовательных программ общего образования, профессионального образования, а также оценочных и методических материалов техническими элементами и устаревшим содержанием, с отсутствием учебных программ, отвечающих потребностям обучающихся и действительному уровню их подготовки». Для решения этой проблемы учителю приходится отходить от обычных форм преподавания, искать нестандартные решения, позволяющие комбинировать на одном уроке различные методы, средства, а иногда и материал различных учебных дисциплин (интеграция дисциплин). В этом отношении компьютерные технологии способны помочь учителю. Например, имея в классе компьютер и проектор, интерактивную доску, учитель может сочетать различные формы организации учебного процесса: тестирование, демонстрацию, поиск нужного материала, решение задач с применением специальных программ таких, как MathCat, MathLab, GeoGebra, Живая математика и другие.

Сказанное связано с требованиями образовательного стандарта к подготовке будущих учителей, к формированию их профессиональных компетенций. Авторы считают, что применение GeoGebra при обучении алгебре студентов педагогического вуза будет способствовать формированию следующих профессиональных компетенций будущих учителей математики: способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2); способность использовать возможности образовательной среды для достижения предметных и метапредметных результатов обучения (ПК-4); готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

Для формирования отмеченных выше компетенций от студента требуется всестороннее понимание места и значимости изучаемого материала. Опыт использования анимационных инструментов, представленный в [3], может быть распространен на практически все алгоритмы вузовского курса алгебры многочленов.

Основу раздела алгебры многочленов курса алгебры составляют:

- теория делимости многочленов (теорема Безу, теорема о делении с остатком, схема Горнера, алгоритм Евклида нахождения НОД);
- представление многочленов в виде произведения неприводимых множителей над различными числовыми полями;
- нахождение корней многочленов;
- многочлены от нескольких переменных.

В работе [3, Ларин С.В.] показано, что в компьютерной среде GeoGebra можно геометрически моделировать сложение и умножение чисел, многочленов, строить графики многочленов. Основываясь на этом, можно также смоделировать деление многочлена на двучлен, а значит решать целый ряд задач с применением схемы Горнера в среде GeoGebra [4].

Продолжением этих идей является представленное ниже анимационное моделирование алгоритма Евклида для нахождения НОД двух чисел или многочленов и нахождение линейной формы НОД. Для чисел этот алгоритм рассматривается в школе. Для многочленов алгоритм Евклида заключается в следующем: на первом этапе многочлен большей степени делим с остатком на многочлен меньшей (или равной) степени; затем на каждом следующем шаге предыдущий делитель делим на остаток. Процесс продолжается до тех пор, пока не получим нулевой остаток. Последний ненулевой остаток в данной цепочке делений и есть НОД данных многочленов.

Заметим, что в среде GeoGebra можно выполнить деление с остатком для чисел и многочленов командами соответственно $d = \text{Деление}[a, b]$ и $d_1 = \text{Деление}[f(x), h(x)]$. В результате компьютер выдает список из двух чисел (соответственно двух многочленов), первый из которых является неполным частным, а второй остатком.

Учитель, подбирая пару многочленов для демонстрации нахождения их НОД с помощью алгоритма Евклида, при решении задачи может столкнуться с нежелательными вычислительными трудностями. Авторами создан в среде GeoGebra инструмент, который позволяет конструировать пары многочленов с задуманным НОД, данным количеством шагов алгоритма Евклида (итераций) и с заданной последовательностью неполных частных. Созданный анимационный инструмент можно применять и для чисел, вводя числа как многочлены нулевой степени. В качестве примера применения созданного анимационного инструмента найдена пара многочленов, для которых $d(x) = 1$, число итераций равно 9 и все неполные частные равны x : $f(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$, $h(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$.

Перейдем к описанию анимационного файла, созданного в среде GeoGebra, для нахождения НОД данных многочленов $f(x)$ и $h(x)$ и его линейной формы (рис. 1-4). Ползунок для числа итераций n изменяется от 1 до 9. Устанавливаем $n = 1$ (рис. 1). Анимационный файл создан для случаев, когда число итераций не превосходит 9, а, значит, степень данного делителя $h(x)$ не должна превосходить 9. Путем дополнительных построений эту границу можно отодвинуть как угодно далеко в пределах возможностей данного компьютера. В нашем случае вводимые многочлены $f(x)$ и $h(x)$ можно увидеть на рисунке 1.

В компьютер введено сигнальное число $r = 1$, которое является неизменным, пока остатки отличны от нуля. Когда получится нулевой остаток, пользователю будет предложено ввести $r = 0$. В программе командой « $d_1 = \text{Деление}[f(x), h(x)]$ » задано деление с остатком первого многочлена на второй. В результате компьютер выдает на экран список из двух многочленов: неполного частного $q_1(x)$ и остатка $r_1(x)$. В нашем случае (рис. 1) $q_1(x) = x$ и оста-

ток $r_1(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$. Поскольку остаток отличен от нуля, то пользователю предлагается ввести (строкой ввода) многочлены $q_1(x)$, $r_1(x)$, и установить на ползунке $n = 2$. Программа вычисляет многочлены $u_1(x) = 1$ и $v_1(x) = -q_1(x)$, без вывода их на экран. Эти многочлены можно найти на панели объектов. Там же можно увидеть проверочный многочлен $p_1(x) = \text{Упростить}[f(x) \cdot u_1(x) + h(x) \cdot v_1(x) - r_1(x)]$. Понятно, что он должен быть нулевым, и если это не так, то произошла ошибка, и нужно проверить правильность выполнения предписаний, указанных на экране.

При $n = 2$ (рис. 2) «история повторяется»: командой « $d_2 = \text{Деление}[h(x), r_1(x)]$ » компьютер выполняет деление с остатком многочлена $h(x)$ на остаток $r_1(x)$, в результате чего на экране появляется список из двух многочленов: неполного частного $q_2(x) = x$ и остатка $r_2(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$, которые пользователю предлагается ввести в компьютер, поскольку остаток $r_2(x) \neq 0$. Кроме того, компьютер вычисляет многочлены $u_2(x) = -q_2(x)$ и $v_2(x) = 1 + q_1(x) \cdot q_2(x)$ без вывода их на экран.

Введен проверочный многочлен $p_2(x) = \text{Упростить}[f(x) \cdot u_2(x) + h(x) \cdot v_2(x) - r_2(x)]$, который можно увидеть на панели объектов, хотя обращение к нему не обязательно.

И так далее, при $n = 3, 4, \dots, 8$ действия аналогичны (см. рис. 2,3). При $n = 9$ получаем остаток, равный нулю, поэтому пользователю предлагается ввести сигнальное число $r = 0$. Для записи ответа предлагается ввести многочлены указанными командами. Включаем кнопку «Ответ» и читаем искомую линейную форму НОД данных многочленов (рис. 4).

Таким образом, действия пользователя сводятся к вводу через строку ввода данных многочленов и появляющихся на экране неполных частных и остатков. Эти действия реализуют алгоритм Евклида, устраняя при этом вычислительные трудности. Это позволяет решить большее количество примеров, «отпугивающих» ранее громоздкими вычислениями.

**НАХОЖДЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ
НОД МНОГОЧЛЕНОВ**

Изменяйте n на ползунке от n=1,
пока не получите остаток, равный 0.

n = 1

Введите многочлены f(x) и h(x), где степень f(x) не меньше степени h(x), а степень h(x) не превосходит 9.

$$f(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x,$$

$$h(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$$

Компьютер выполняет деление с остатком f(x) на h(x) и выдает список

$$d_1 = \{x, x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x\}$$

В этом списке первый многочлен есть неполное частное $q_1(x)$, а второй многочлен есть остаток $r_1(x)$.

Если остаток $r_1(x)$ равен 0, то введите g=0. В противном случае введите $q_1(x)$, $r_1(x)$ командами “ $q_1(x) = \text{Упростить}[\text{<первый многочлен>}]$ ”, “ $r_1(x) = \text{Упростить}[\text{<второй многочлен>}]$ ”.

$$q_1(x) = x,$$

$$r_1(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$$

Установите n=1+1

Рис. 1

Изменяйте n на ползунке от n=1,
пока не получите остаток, равный 0.

n = 2

Компьютер выполняет деление с остатком h(x) на $r_1(x)$ и выдает список многочленов

$$d_2 = \{x, x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1\}$$

В этом списке первый многочлен есть неполное частное $q_2(x)$, а второй многочлен есть остаток $r_2(x)$.

Если остаток $r_2(x)$ равен 0, то введите g=0. В противном случае введите $q_2(x)$, $r_2(x)$ командами “ $q_2(x) = \text{Упростить}[\text{<первый многочлен>}]$ ”, “ $r_2(x) = \text{Упростить}[\text{<второй многочлен>}]$ ”.

$$q_2(x) = x,$$

$$r_2(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$$

Установите n=2+1

Рис. 2

Изменяйте n на ползунке от $n=1$, пока не получите остаток, равный 0.

$n = 8$

Компьютер выполняет деление с остатком многочлена $r_{8-2}(x)$ на многочлен $r_{8-1}(x)$ и выдает список

$d_8 = \{x, 1\}$

В этом списке первый многочлен есть неполное частное $q_8(x)$, а второй многочлен есть остаток $r_8(x)$.

Если остаток $r_8(x)$ равен 0, то введите $r=0$. В противном случае введите $q_8(x)$, $r_8(x)$ командами " $q_8(x)=\text{Упростить}[\text{<первый многочлен>}]$ ", " $r_8(x)=\text{Упростить}[\text{<второй многочлен>}]$ ".

$q_8(x)=x,$
 $r_8(x)=1$

Установите $n=8+1$

Рис. 3

Изменяйте n на ползунке от $n=1$, пока не получите остаток, равный 0.

$n = 9$

Введите команды:
 $u(x)=\text{Упростить}[u_{9-1}(x)], v(x)=\text{Упростить}[v_{9-1}(x)],$
 $d(x)=\text{Упростить}[f(x) \cdot u_{9-1}(x) + h(x) \cdot v_{9-1}(x)]$ и посмотрите ответ.

Ответ:

Линейная форма
 $\text{НОД}(x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x, x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1) =$
 $= f(x) \cdot (x^2 + 1) +$
 $+ h(x) \cdot (-x^3 - 2x) =$
 $= 1$

Для решения следующего примера
 скройте ответ и установите $n=1, r=1$.

Рис. 4

Созданный анимационный аналог алгоритма Евклида, также как и описанный ранее в [4] аналог схемы Горнера, дает возможность сочетать классический подход в обучении студентов этим разделам алгебры многочленов с применением компьютерной среды GeoGebra, в результате чего устраняются вычислительные трудности, а значит появляется возможность решить большее количество примеров на использование подобных алгоритмов. Наибольший обучающий эффект достигается при самостоятельном изготовлении студентами подобных анимационных аналогов алгоритмов, рассматриваемых в алгебре многочленов. Это будет способствовать лучшему формированию отмеченных выше компетенций.

Библиографический список

1. «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» от 24.12.2013 г.
2. Федеральный Государственный образовательный стандарт высшего образования. Уровень высшего образования – бакалавриат. Направление подготовки – 44.03.05. Педагогическое образование, 9.02.2016 г.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. – Ростов-на-Дону, «Легион», 2015 г.
4. Ларин С.В., Калачева С.И. Анимационно-геометрический аналог схемы Горнера// Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании», Красноярск, 2015 г. С. 47-50.

ПРОЕКТИВНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

PROJECTIVE TRIGONOMETRY

С.В. Ларин

S.V. Larin

Тригонометрия, проективная тригонометрия, среда GeoGebra, анимационный рисунок.

Проективная тригонометрия отличается от обычной новой трактовкой ключевого понятия тригонометрии – числовой окружности. Новая проективная числовая окружность получается в результате центрального проектирования числовой прямой на единичную окружность. Введены проективные аналоги основных тригонометрических функций и установлены аналоги основных тригонометрических тождеств. Введено новое сложение действительных чисел, которое связано со сложением дуг единичной окружности.

Trigonometry, projective trigonometry, GeoGebra Wednesday, animated drawing.

Projective trigonometry different from the usual, a new interpretation of the key concepts of trigonometry – numeric circle. New, projective numerical circle obtained by central projection of the number line on the unit circle. Introduced projective analogues basic trigonometric functions and installed analogues basic trigonometric identities. Permission for the new addition of real numbers, which is associated with the addition of the arcs of the unit circle.

Вспомним, как появляется понятие числовой окружности [1]. Мы берем ось абсцисс с изображенными на ней действительными числами (числовую прямую), приставляем ее вертикально в качестве касательной к единичной окружности так, чтобы начало отсчета явилось точкой касания, а затем наматываем числовую прямую на единичную окружность: положительный луч против часовой стрелки, а отрицательный – по часовой стрелке. В результате всякое действительное число «переходит» на окружность и превращает ее в числовую окружность. А если наматывание заменить центральным проектированием вертикально расположенной числовой прямой на единичную окружность из центра проектирования $C = (-1, 0)$? Снова каждое действительное число найдет себе место на единичной окружности, превращая ее в новую числовую окружность, которую целесообразно назвать проективной. В среде GeoGebra [2] изготовим анимационный рисунок для введения этого нового понятия (рис. 1).

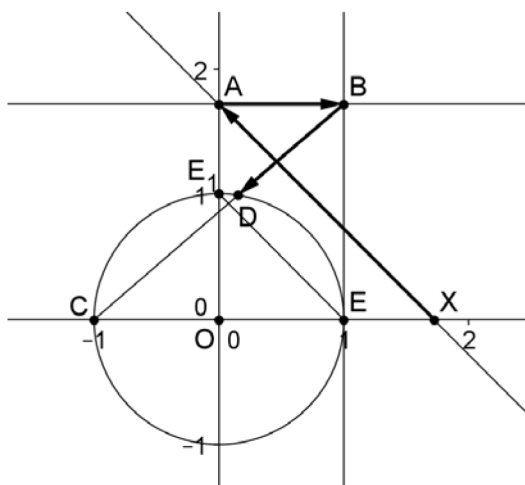


Рис. 1

Путь $X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ задает взаимно однозначное отображение h множества действительных чисел R оси абсцисс на единичную окружность без точки C . Вектор \overline{XA} показывает путь точки X оси абсцисс на ось ординат. В результате этого отображения ось абсцисс преобразуется в ось ординат. Затем вектор \overline{AB} переносит ось ординат на вертикальную касательную BE , которая в результате сама становится числовой прямой. Наконец, вектор \overline{BD} указывает переход точки с вертикальной касательной на окружность в результате центрального проектирования из точки C .

На анимационном рисунке 2 изображена вертикальная касательная к единичной окружности, которую будем рассматривать как числовую прямую, а единичную окружность – как «обыкновенную» числовую окружность с изображенными на ней числами промежутка $(-\pi, \pi]$. Обозначим через t проектирование из точки C вертикальной касательной на единичную окружность. Образ числа $x \in R$ при центральном проектировании t будем обозначать t_x . Для точки $X(x)$ (читается: X с координатой x) на вертикальной касательной образом будет точка $A(t_x)$ (читается: A с координатой t_x). Центральное проектирование t устанавливает взаимно однозначное отображение множества точек вертикальной

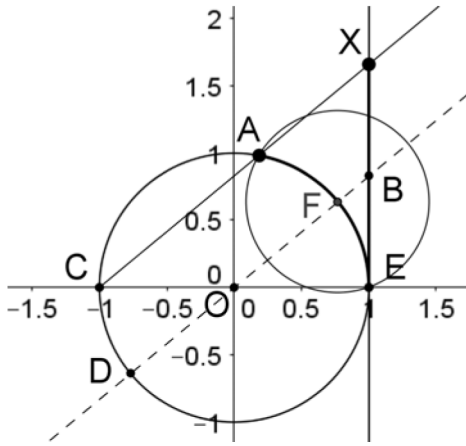


Рис. 2

касательной (а также их координат – множества действительных чисел R) на множество точек числовой окружности (с их координатами – числами промежутка $(-\pi, \pi)$). Единственная точка $C(\pi)$ при этом отображении остается без прообраза. Устраняя этот дефект, присоединим к множеству R символ ∞ (число «бесконечность»), положим по определению $t_\infty = \pi$ и будем считать, что образом «бесконечно удаленной» точки $B_\infty(\infty)$ вертикальной касательной является точка $C(\pi)$ на окружности. Теперь центральное проектирование t является взаимно однозначным отображением множества $R_\infty = R \cup \{\infty\}$ на множество $(-\pi, \pi]$ координат всех точек единичной окружности. Заметим, что, присоединяя к вертикальной касательной

бесконечно удаленную точку B_∞ , мы превращаем ее в «окружность бесконечного радиуса», которая называется проективной прямой. Отправляясь вверх от точки E , мы можем через бесконечно удаленную точку B_∞ прийти снизу в точку E .

Определение 1. Проективной числовой окружностью назовем множество всех точек единичной окружности $\{A(t_x) \mid x \in R_\infty\}$, где каждая точка $A(t_x)$ отождествляется с числом $x \in R_\infty$.

На проективной числовой окружности (рис. 1) точка E изображает число 0, точка E_1 – число 2, а точка C – «бесконечное число» ∞ (вспомним, что $t_\infty = \pi$).

На рисунке 2 по построению имеем: $X = (1, x)$, $B = (1, \frac{x}{2})$, F есть точка пересечения

прямой OB с единичной окружностью. Одновременно она является центром окружности, проходящей через точку E . Эта окружность пересекает единичную окружность в точке A . Видим,

что $EB = \frac{x}{2}$, дуга $EF = \arctg \frac{x}{2}$, а дуга $EA = 2\arctg \frac{x}{2}$. Следовательно, точка A имеет координаты $A = (\cos(2\arctg \frac{x}{2}), \sin(2\arctg \frac{x}{2}))$. Точки $C = (-1, 0)$, A , $X = (1, x)$ лежат

на одной прямой, поскольку проверочное равенство $\frac{x(A) - x(C)}{x(X) - x(C)} = \frac{y(A) - y(C)}{y(X) - y(C)}$ имеет вид

$$\frac{\cos(2\arctg \frac{x}{2}) - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{\sin(2\arctg \frac{x}{2}) - 0}{x - 0}$$

и легко преобразуется в очевидное тождество. Следовательно, дуга $EA = t_x$ и

$$t_x = 2\arctg \frac{x}{2} \tag{1}$$

для любого $x \in R$. Отсюда $x = 2tg \frac{t_x}{2}$. Получили формулы перехода от чисел на вертикальной

касательной к числам на единичной окружности и наоборот.

Чтобы на единичной окружности (рис. 3) к дуге EA прибавить дугу EB , нужно от точки B отложить дугу BD , равную дуге EA , и получить искомую дугу ED . Взяв за основу сложение дуг, определим проективное сложение действительных чисел на проективной прямой по правилу $x \oplus y = z$ тогда и только тогда, когда $t_x + t_y = t_z$. Тогда для любых $x, y \in R$ будет выполняться равенство

$$t_{x \oplus y} = t_x + t_y. \tag{2}$$

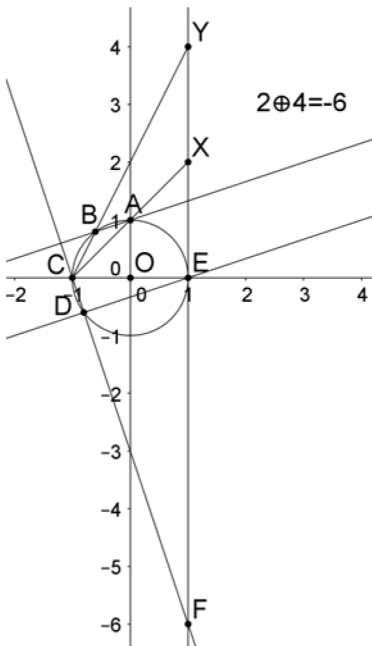


Рис. 3

Отсюда, используя формулу (1), получаем

$$x \oplus y = 2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{2}).$$

Если $xy \neq 4$, то, используя известную формулу «тангенса суммы», получаем $x \oplus y = \frac{4(x+y)}{4-xy}$.

Используя формулу (2), в среде GeoGebra построим анимационный рисунок для нахождения суммы $x \oplus y$.

Построение (рис. 3)

1. Строим точки $O = (0,0)$, $E = (1,0)$, $C = (-1,0)$, единичную окружность.

2. Через точку E проводим вертикальную касательную к единичной окружности и отмечаем на ней точки X и Y . Пусть $X = (1,x)$, $Y = (1,y)$. В нашем случае $x = 2$, $y = 4$.

3. Точки X и Y соединяем отрезками с точкой C и отмечаем точки A и B пересечения отрезков с единичной окружностью. На единичной окружности получаем точки с координатами $A(t_x)$, $B(t_y)$. В нашем случае $A(t_2)$, $B(t_4)$.

4. Строим сумму дуг EA и EB . Для этого проводим прямую AB

и через точку E проводим прямую параллельно AB . Отмечаем точку D пересечения построенной прямой с единичной окружностью. Дуга EAD является искомым суммой дуг EA и EB .

5. Проводим прямую CD и отмечаем точку $F = (1,z)$ пересечения этой прямой с вертикальной касательной. На единичной окружности получаем точку $D(t_z)$. В нашем случае на Панели объектов видим, что $F = (1,-6)$. Следовательно, $z = -6$ и $t_z = t_{-6}$. По построению $t_z = t_x + t_y$, а по формуле (2) $t_x + t_y = t_{x \oplus y}$. Таким образом, $t_z = t_{x \oplus y}$, откуда $z = x \oplus y$

и $2 \oplus 4 = -6$. Это совпадает с непосредственным подсчетом: $2 \oplus 4 = \frac{4(2+4)}{4-2 \cdot 4} = -6$.

меща точки $X = (1,x)$ и $Y = (1,y)$ в новые места, в точке $F = (1,z)$ всегда будем получать результат $x \oplus y = z$. Например, на анимационном рисунке 3 можно увидеть, что $2 \oplus 3 = -10$. Одновременно этот результат можно получить по формуле проективного сложения.

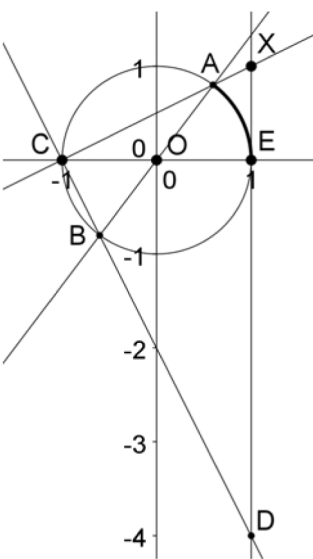


Рис. 4

Распространим операцию проективного сложения \oplus на множество R_∞ так, чтобы сохранилось равенство (2). По (2) имеем: $t_{\infty \oplus \infty} = t_\infty + t_\infty = \pi + \pi = t_0$. Следовательно, целесообразно определить $\infty \oplus \infty = 0$. Далее, $t_{0 \oplus \infty} = t_0 + t_\infty = 0 + t_\infty = t_\infty$. Следовательно, целесообразно определить $0 \oplus \infty = \infty \oplus 0 = \infty$.

Чтобы определить $x \oplus \infty$ для любого $x \in R$, обратимся к рисунку 4. На нем пусть $X = (1,x)$. В прямоугольном треугольнике ΔCDX имеем:

$$CE^2 = EX \cdot ED, \text{ откуда } ED = \frac{CE^2}{EX}.$$

Следовательно, $D = (1, -\frac{4}{x})$. Выделенная дуга равна t_x , а дуга EAB равна $t_{\frac{4}{x}} = t_x + \pi = t_x + t_\infty$. Отсюда по формуле (2) $t_{\frac{4}{x}} = t_{x \oplus \infty}$. Следовательно, целесообразно определить

$$x \oplus \infty = \infty \oplus x = -\frac{4}{x} \text{ для любого } x \in R, x \neq 0.$$

Из свойства ассоциативности сложения дуг вытекает ассоциативность операции проективного сложения \oplus . Используя ассоциативность, найдем сумму $x \oplus y$ в случае, когда $xy = 4$.

Тогда $x \neq 0$, $y = \frac{4}{x}$, и из последней формулы получаем $\infty \oplus x \oplus \frac{4}{x} = -\frac{4}{x} \oplus \frac{4}{x} = 0$, откуда $\infty \oplus \infty \oplus x \oplus \frac{4}{x} = \infty \oplus 0 = \infty$. Поскольку $\infty \oplus \infty = 0$, то $x \oplus \frac{4}{x} = \infty$. Теперь сложение \oplus определено на всем множестве R_∞ и равенство (2) верно для любых $x, y \in R_\infty$.

Из равенства (2) получаем равенство $t_{\underbrace{x \oplus \dots \oplus x}_n} = nt_x$. В дальнейшем запись $x \oplus \dots \oplus x$ будет обозначать сумму n слагаемых при проективном сложении \oplus . Используя формулу (1), получаем $2\text{arctg} \frac{x \oplus \dots \oplus x}{2} = nt_x$, откуда

$$x \oplus \dots \oplus x = 2\text{tg} \left(\frac{n}{2} t_x \right) \tag{3}$$

для любого $x \in R$. Отсюда $\text{tg} \left(n \frac{t_x}{2} \right) = \frac{x \oplus \dots \oplus x}{2}$. Обозначив $\alpha = \frac{t_x}{2}$, по формуле (1) найдем

дим $x = 2\text{tg} \alpha$, и последняя формула приобретает вид $\text{tg}(n\alpha) = \frac{2\text{tg} \alpha \oplus \dots \oplus 2\text{tg} \alpha}{2}$. Используя известные формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного аргумента, получаем формулы синусов и косинусов кратных углов

$$\text{sin}(n\alpha) = \text{SIN} \left(2\text{tg} \frac{\alpha}{2} \oplus \dots \oplus 2\text{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \text{cos}(n\alpha) = \text{COS} \left(2\text{tg} \frac{\alpha}{2} \oplus \dots \oplus 2\text{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Вернемся к рисунку 2. Точка A имеет прямоугольные (декартовы) координаты $A = (\text{cost}_x, \text{sint}_x)$, где t_x есть мера направленной дуги EA на числовой окружности. Используя определения тригонометрических функций «обычной» тригонометрии, введем их проективные аналоги.

Определение 2. Для любого $x \in R$ определим проективные синус, косинус, тангенс и котангенс, полагая соответственно $\text{SIN}x = \text{sint}_x$, $\text{COS}x = \text{cost}_x$, $\text{TG}x = \text{tgt}_x$, $\text{CTG}x = \text{ctgt}_x$.

Другими словами, проективные $\text{COS}x$ и $\text{SIN}x$ вводятся как прямоугольные декартовы координаты точки A . Это определение будем называть геометрическим определением проективных тригонометрических функций.

Из определения получаем: $\text{TG}x = \text{tgt}_x = \frac{\text{sint}_x}{\text{cost}_x} = \frac{\text{SIN}x}{\text{COS}x}$, аналогично $\text{CTG}x = \frac{\text{COS}x}{\text{SIN}x}$.

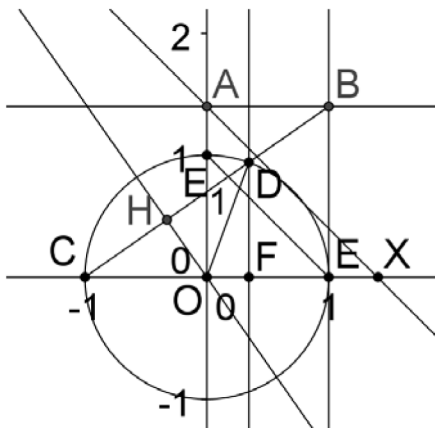


Рис. 5

Для проективных тригонометрических функций выполняется основное тригонометрическое тождество: $\text{SIN}^2(x) + \text{COS}^2(x) = \text{sin}^2(t_x) + \text{cos}^2(t_x) = 1$.

Найдем формулы, выражающие значения новых тригонометрических функций через аргумент x . Для этого на рисунке 1 сделаем дополнительные построения (см. рис. 5).

6. Через точку D проведем вертикальную прямую и отметим точку F пересечения прямой с осью абсцисс.

7. Начало координат O соединим отрезком с точкой D . Из точки O опускаем перпендикуляр на отрезок BC и отмечаем точку H пересечения перпендикуляра с отрезком BC .

В треугольнике $\triangle BCE$ имеем: $BE = x$, $CE = 2$, откуда, $BC = \sqrt{4 + x^2}$. Из подобия $\triangle COH$ и $\triangle CBE$ получаем $\frac{CH}{OC} = \frac{CE}{BC}$, откуда $CH = \frac{OC \cdot CE}{BC} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$ и $CD = 2CH = \frac{4}{\sqrt{4 + x^2}}$. Из подобия $\triangle CDF$ и $\triangle CBE$ получаем $\frac{DF}{DC} = \frac{BE}{BC}$, откуда

$$SIN(x) = \sin t_x = DF = \frac{DC \cdot BE}{BC} = \frac{4x}{4 + x^2}$$

Из треугольника $\triangle ODF$ находим $COS(x) = \cos t_x = OF = \sqrt{1 - DF^2} = \sqrt{1 - \frac{16x^2}{(4 + x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(4 + x^2)^2}} = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$. Перемещениями точки X убеждаемся, что найденные формулы для проективного синуса и проективного косинуса выполняются с учетом знаков. Таким образом,

$$SIN(x) = \frac{4x}{4 + x^2}, \forall x \in R; \tag{4}$$

$$COS(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}, \forall x \in R; \tag{5}$$

$$TG(x) = \frac{4x}{4 - x^2}, \forall x \in R, |x| \neq 2; \tag{6}$$

$$CTG(x) = \frac{4 - x^2}{4x}, \forall x \in R, x \neq 0. \tag{7}$$

Полученные формулы для проективных тригонометрических функций будем называть их алгебраическим определением. Новые тригонометрические функции можно было бы определить напрямую установленными формулами, не прибегая к посредничеству геометрических построений. Удобно использовать оба определения. Формулы (4–7) позволяют построить графики проективных тригонометрических функций в среде GeoGebra с помощью «Строки ввода».

Прямыми вычислениями с использованием формул (1) и (2) легко установить формулу связи между проективным синусом и проективным косинусом: $x(COS(x) + 1) = 2SIN(x)$.

Отсюда $x = \frac{2 \sin t_x}{1 + \cos t_x}$. Таким образом, проективную тригонометрию можно рассматривать как теорию одной функции.

Рассмотрим тригонометрическую форму комплексного числа: $r(\cos x + i \sin x)$, где r – неотрицательное, а x – любое действительное число, $i^2 = -1$. По аналогии определим новую проективную тригонометрическую форму комплексного числа в виде $r(COSx + iSINx)$. Преимуществом проективной тригонометрической формы комплексного числа является ее единственность: если $r(COSx + iSINx) = r_1(COSy + iSINy)$, то $r = r_1$, $x = y$.

Формула умножения комплексных чисел в проективной тригонометрической форме имеет вид:

$$\begin{aligned} r(\cos(x) + i \sin(x)) \cdot r_1(\cos(y) + i \sin(y)) &= \\ = r_1(\cos \frac{4(x+y)}{4-xy} + i \sin \frac{4(x+y)}{4-xy}) &= \\ r_1(\cos(x \oplus y) + i \sin(x \oplus y)) & \end{aligned}$$

для любых $x, y \in R$. Для доказательства формулы достаточно воспользоваться формулами (1) и (2).

В заключение рассмотрим описания основных понятий обычной тригонометрии и проективной тригонометрии.

1. Числовая прямая. Наглядно-геометрическое представление о числовой прямой формируется через ее определение как прямой, на которой отмечено начало отсчета, изображающее число 0, выделено положительное направление и единичная точка, изображающая число 1. В результате каждая точка прямой получает свою координату – действительное число, однозначно характеризующее положение точки на прямой. Отождествляя точку с ее координатой, получаем *числовую прямую*. Ее будем обозначать буквой R , как и множество всех действительных чисел.

2. Числовая окружность. Наглядно-геометрическое представление о числовой окружности мы получаем при наматывании вертикально расположенной касательной (числовой прямой) на единичную окружность. В результате числа числовой прямой «заполняют» единичную окружность, превращая ее в *числовую окружность*.

Для формального описания процедуры наматывания числовой прямой R на единичную окружность определяем отношение эквивалентности \sim на R , полагая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y = 2\pi k$ при некотором целом k . По этому отношению эквивалентности множество всех действительных чисел (точек числовой прямой) распадается на классы эквивалентных чисел (точек). Класс всех чисел, эквивалентных числу $x \in R$, будем обозначать \bar{x} . Таким образом, $\bar{x} = \{x + 2\pi n \mid n \in Z\}$.

Обозначим $\bar{R} = \{\bar{x} \mid x \in R\}$. Это множество является алгебраической моделью числовой окружности. В этом случае всякий класс эквивалентных элементов \bar{x} называют точкой числовой окружности. Эта точка определяет направленную дугу с началом в точке $\bar{0}$. Множество классов эквивалентных элементов можно заменить множеством представителей классов $(-\pi, \pi]$, называя числа этого промежутка точками числовой окружности. В этом случае число $a \in (-\pi, \pi]$ можно рассматривать как направленную дугу с началом в точке $E(0)$ и концом в точке $A(a)$ (рис. 2).

Направленные дуги можно складывать геометрически, пристраивая вторую дугу к первой (см. рис. 3). Алгебраической моделью этого сложения является сложение классов эквивалентных элементов по правилу $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$. Это сложение классов можно заменить сложением представителей классов промежутка $(-\pi, \pi]$, считая по определению для любых $a, b, c \in R$, $a + b = c$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$. Сменяя алгебраический язык на геометрический, говорят, что сумма направленных дуг EA и EB с концами в точках $A(a)$ и $B(b)$ есть направленная дуга EC , где $C(c)$. Так геометрическое представление помогает осмыслить формально-алгебраическую модель. Систему $\langle \bar{R}, + \rangle$ (множество \bar{R} относительно сложения классов эквивалентных чисел) целесообразно назвать *аддитивной числовой окружностью*.

3. Проективная числовая прямая и проективная числовая окружность. Наглядно-геометрическое представление о проективной числовой прямой мы получаем, пополюя вертикальную касательную к единичной окружности (рис. 2) новой так называемой бесконечно уда-

ленной точкой B_∞ , которую считаем изображением числа ∞ . Получаем новое числовое множество $R_\infty = R \cup \{\infty\}$, которое называем *проективной числовой прямой*. С помощью центрального проектирования из точки C (рис. 2) каждая точка X (число x) вертикально расположенной числовой прямой получает свой образ A на единичной окружности. Если точку A (образ произвольной точки X) пометить числом x , то получим *проективную числовую окружность*. Центр проектирования C считаем образом бесконечно удаленной точки B_∞ (числа ∞). Благодаря присоединению точки B_∞ вертикальная касательная (числовая прямая) становится замкнутой «окружностью бесконечного радиуса», «такой же» как числовая окружность, которая алгебраически описывается как совокупность всех классов эквивалентных элементов \overline{R} . Формально оформляя это сходство, определим отображение p проективной прямой R_∞ на числовую окружность \overline{R} по закону $p(x) = t_x$. Рассмотрим множество R_∞ относительно сложения

по формуле $x \oplus y = \frac{4(x+y)}{4-xy}$ для любых $x, y \in R$, $\infty \oplus \infty = 0$ и $a \oplus \infty = \infty + a = \frac{4}{x}$. Рисунок 3 убеждает, что при отображении p образом суммы $x \oplus y$ чисел $x, y \in R_\infty$ является сумма направленных дуг $\overline{t_x} + \overline{t_y}$. Следовательно, $p(x \oplus y) = \overline{t_{x \oplus y}} = \overline{t_x + t_y} = \overline{t_x} + \overline{t_y} = p(x) + p(y)$.

Таким образом, отображение p является изоморфизмом системы $\langle R_\infty, \oplus \rangle$ (проективной числовой окружности относительно сложения \oplus) на систему $\langle \overline{R}, + \rangle$ (аддитивную числовую окружность).

С помощью сложения \oplus аналоги некоторых формул обычной тригонометрии в проективной тригонометрии приобретают «похожий» вид. Например,

$$\begin{aligned} \text{SIN}(x \oplus y) &= \text{SIN}(x)\text{COS}(y) + \text{COS}(x)\text{SIN}(y), \\ \text{COS}(x \oplus y) &= \text{COS}(x)\text{COS}(y) - \text{SIN}(x)\text{SIN}(y). \end{aligned}$$

Можно доказать, что все формулы обычной тригонометрии являются следствием формулы «суммы двух синусов»: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. В проективной тригонометрии эта формула преобразуется к виду

$$\text{SIN}(a \oplus a) + \text{SIN}(b \oplus b) = 2\text{SIN}(a \oplus b) \cdot \text{COS}(a \oplus (-b)).$$

Таким образом, из этой формулы вытекают все формулы проективной тригонометрии.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация на уроках тригонометрии // Актуальные проблемы преподавания математики в школе и вузе. Вып. 25. М., 2015. С. 112–117.
2. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
3. URL: <http://www.geogebra.org/cms/ru/>

АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ В СРЕДЕ «GEOGEBRA»

ANIMATED-GEOMETRIC METHODS SIMULATION OF SIMPLE TRIGONOMETRIC INEQUALITIES IN ENVIRONMENT GEOGEBRA

В.А. Масленкова, М.А. Кейв,
Я.А. Бондарева

V.A. Maslenkova, M.A. Keiv,
Y.A. Bondareva

Простейшие тригонометрические уравнения, среда Geogebra, методы моделирования.

В статье рассматривается наглядный метод решения простейших тригонометрических уравнений с помощью среды «Geogebra», способствующий более фундаментальному освоению данного раздела школьного курса математики.

Simple trigonometric equations, Wednesday «Geogebra», modeling techniques.

The article deals with a clear method for solving simple trigonometric equations with the help of Geogebra environment, contributing to a more fundamental development of this section of school mathematics.

Анимационно-геометрический метод моделирования математических объектов предполагает использование специализированных программ (например, GeoGebra или «Живая математика») для создания компьютерной анимации: непрерывное вычерчивание графиков функций, вычерчивание различных кривых, моделирование разного рода преобразований, изменения формул в зависимости от изменения параметров, моделирование движений по данным функциям и другие.

Анимационные чертежи (живые рисунки) делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их усвоению. Особенно поучительным является самостоятельное изготовление живого рисунка, предполагающее глубокое проникновение в суть изображаемого. Живые рисунки можно использовать на разных стадиях изучения материала: как готовые наглядные пособия при изучении нового, как источник задач и сопровождения их решений, как инструмент для экспериментирования и проведения научных исследований [1].

В данной статье представим опыт создания анимационных чертежей в компьютерной среде GeoGebra, иллюстрирующих решение простейших тригонометрических неравенств на единичной окружности.

Трудности, которые испытывают учащиеся при изучении тригонометрии, непосредственно связаны с использованием единичной окружности как модели, с помощью которой определяют тригонометрические функции и решаются многие задачи тригонометрии. Эти трудности в основном состоят в том, что нужно многое учитывать: направление вращения начального радиуса, определение тригонометрических функций и их свойства, значения тригонометрических функций и др.

На примере решения неравенства $\sin x < a$ рассмотрим алгоритм создания анимационного чертежа в компьютерной среде GeoGebra, иллюстрирующего решение данного неравенства на единичной окружности:

1 шаг. На рабочем поле создаем единичную окружность – окружность с центром в начале координат и радиусом 1; отмечаем на оси ординат точку A , ордината которой меньше 1, но

больше -1 ; строим прямую a_1 , проходящую через точку A , параллельно оси абсцисс; отмечаем точки пересечения прямой a_1 и единичной окружности – X_1 и X_2 (см. рис.1); в строке ввода определяем число $a=y(A)$; единичную окружность выделяем пунктирной линией.

2 шаг. Если $0 < y(A) \leq 1$, то строим дугу с центром в начале координат и проходящую через точки X_1 и X_2 . Выделяем эту дугу сплошной линией для иллюстрации решения неравенства $\sin x < a$. Строим дугу с именем e с центром в начале координат и проходящую через точки $B(1;0)$ и X_1 (на панели объектов e равно длине дуги, синус которой равен a). Все вспомогательные объекты (точки B и дугу e) скрываем.

3 шаг. Создаем надпись с ответом для случая, когда $a \in (0; 1]$, используя объекты a и e : «Ответ: $-\pi - \arcsin(a) + 2\pi k < x < \arcsin(a) + 2\pi k$ или $-\pi - (e) + 2\pi k < x < (e) + 2\pi k$ ». Условие отображения данной надписи задаем условием: $0 < a \leq 1$. При перемещении точки A вдоль оси ординат на промежутке $0 < y(A) \leq 1$ появляется графическое решение на единичной окружности – сплошная черная дуга – и ответ, в котором объекты a и e меняют свои значения в зависимости от ординаты точки A (рис. 1). При желании по сплошной дуге можно запустить точку X с анимацией от точки X_2 к точке X_1 .

4 шаг. Если $-1 < y(A) \leq 0$, то строим дугу с именем f с центром в начале координат и проходящую через точки X_1 и B (на панели объектов f равно длине дуги, синус которой равен a).

5 шаг. Создаем надпись с ответом для случая, когда $a \in (-1; 0]$, используя объекты a и f : «Ответ: $-\pi - \arcsin(a) + 2\pi k < x < \arcsin(a) + 2\pi k$ или $-\pi - (f) + 2\pi k < x < (f) + 2\pi k$ ». Условие отображения данной надписи задаем условием: $-1 < a \leq 0$. При перемещении точки A вдоль оси ординат на промежутке $-1 < y(A) \leq 0$ появляется графическое решение на единичной окружности – сплошная дуга и ответ, в котором объекты a и f меняют свои значения в зависимости от ординаты точки A . (рис. 2).

6 шаг. Повторяя шаг 3 или 5, оформляем ответы для случаев, когда $a > 1$ или $a \leq -1$ (рис. 3–4).

С дидактической точки зрения, довольно поучительным будет задание для учащихся, заключающееся в самостоятельном построении анимационных чертежей для решения неравенств вида: $\sin x > a$; $\sin x \leq a$, $\cos x < a$, $\cos x > a$ и др.

Поскольку путем равносильных преобразований некоторые непростейшие тригонометрические неравенства можно свести к простейшим, то от умений и опыта решения простейших тригонометрических неравенств зависит успех решения большинства более сложных тригонометрических неравенств.

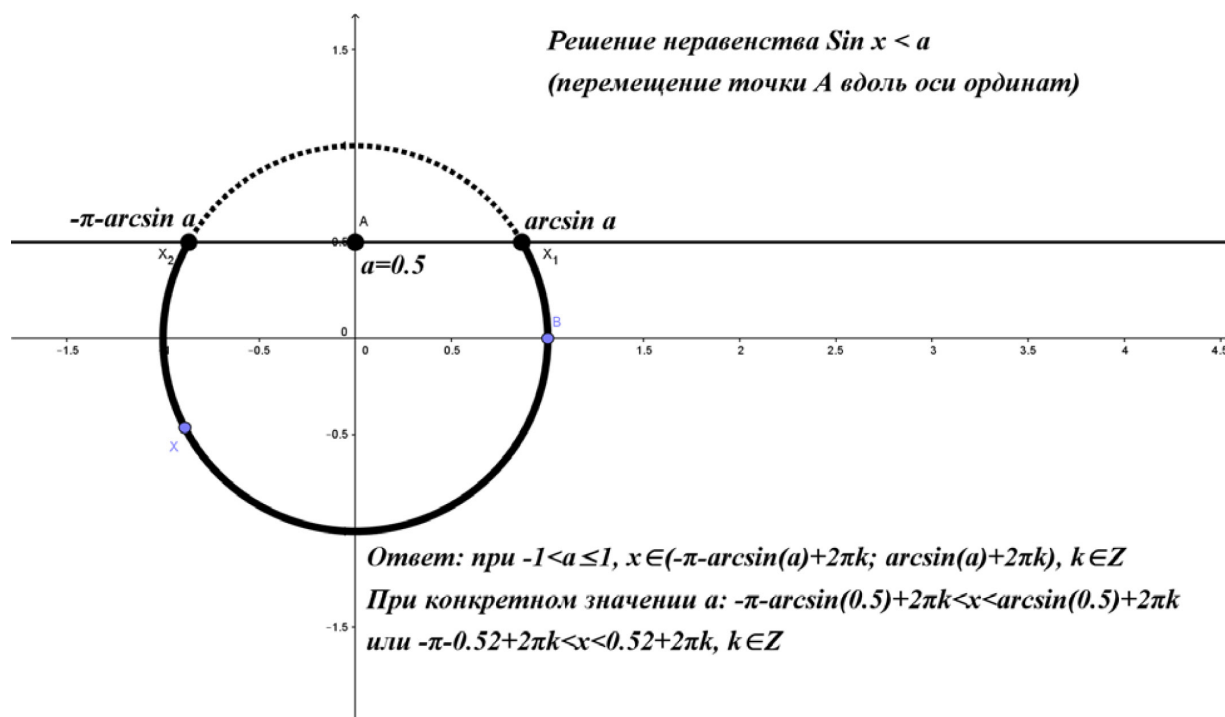


Рис. 1

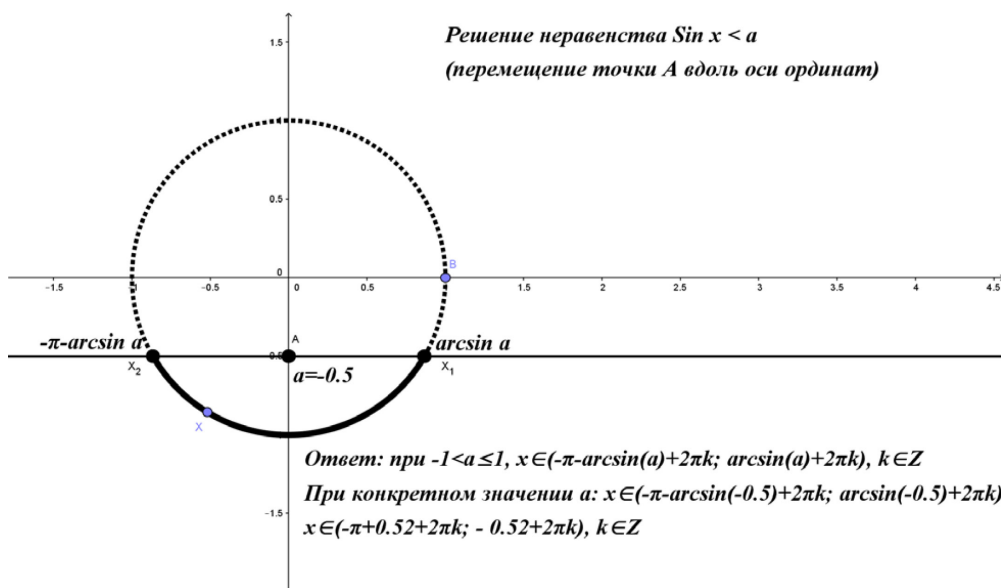


Рис. 2

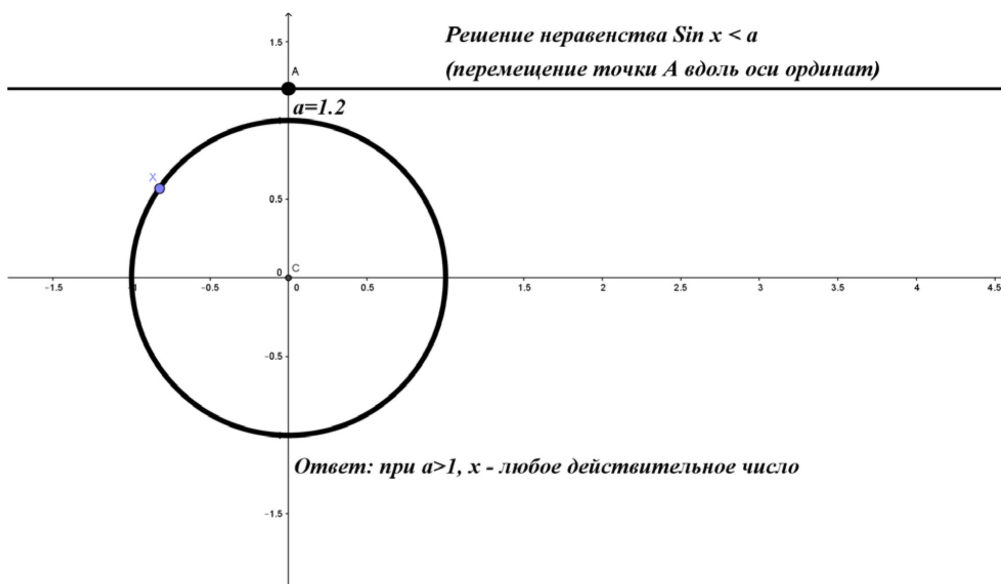


Рис. 3

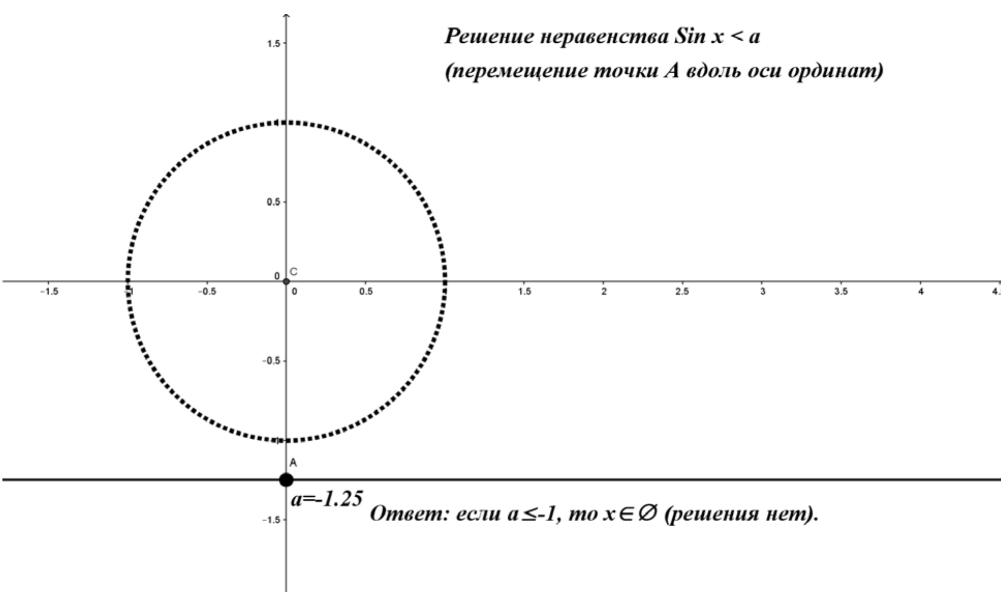


Рис. 4

Таким образом, компьютерно-геометрический метод моделирования решений простейших тригонометрических неравенств в компьютерной среде GeoGebra способствует более фундаментальному освоению данного раздела школьного курса математики.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В 7-8 КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ

USING DYNAMIC GEOMETRY SYSTEMS LIVE MATHEMATICS AT GEOMETRY LESSONS IN 7-8 CLASSES OF HIGH SCHOOL TO IMPROVE STUDENTS« MOTIVATION.

Д.В. Михиенко

D.V. Mikhienko

Система динамической геометрии Живая математика, мотивация учащихся на уроке.

В статье рассматривается мотивация учащихся в средней школе на уроках геометрии через использование динамической системы «Живая математика». Предлагается рассмотреть свойство медиан треугольника.

System of dynamic geometry Living mathematics, the motivation of students on the lesson.

In the article is examined the motivation of students in the secondary school, on the lessons of geometry, through the use of a dynamic system living mathematics. It is proposed to examine the property of the medians of triangle.

«**О**бщеизвестно, что нельзя двигаться вперед с головой, повернутой назад, а потому недопустимо в школе XXI века использовать неэффективные, устаревшие технологии обучения, изматывающие ученика и учителя, требующие больших временных затрат и не гарантирующих качество образования...» (М. Поташник, действительный член Российской академии образования).

Для современного развития школьного образования характерной чертой является непрерывный поиск эффективных форм и методов обучения, путей совершенствования образовательного процесса в целом. В связи с этим повышаются требования, предъявляемые к выпускникам школ, способным грамотно и эффективно действовать в высокоразвитой информационной среде, умеющим адаптироваться в постоянно изменяющихся условиях. Отсюда возникает необходимость повышения качественного уровня обучения, совершенствования методик преподавания школьных предметов.

Обучающие компьютерные программы реализуют одно из наиболее перспективных применений новых информационных технологий в преподавании и изучении математики. Они позволяют иллюстрировать важнейшие понятия курса математики на уровне, обеспечивающем качественные преимущества по сравнению с традиционными методами обучения. Основой является существенное повышение наглядности, активизация познавательной деятельности ученика, сочетание механизмов вербально-логического и образного мышления. С их помощью можно наглядно объяснить теорию, показать практическое ее воплощение в виде обучающей компьютерной программы, что влечет за собой увеличение скорости информационного потока в системе «преподаватель – обучаемый» и существенное повышение прочности усвоения знаний.

По данным исследований, в памяти человека остается 25 % услышанного материала, 33% увиденного, 50 % увиденного и услышанного, 75 % материала, если ученик вовлечен в активные действия в процессе обучения. Компьютер позволяет усилить мотивацию учения путем активного его диалога с учеником, с помощью разнообразной и красочной информации.

Во время использования информационных технологий на занятиях повышается мотивация учения, возрастает эффективность самостоятельной работы, а также стимулируется позна-

вательный интерес учащихся. Компьютер вместе с информационными технологиями открывает новые возможности в области образования, в учебной деятельности и творчестве учащегося. Образование поистине интегрируется в жизнь на всем ее протяжении [1].

На уроках геометрии используется много программ, предоставляющих учащимся среду, в которой можно быстро, точно и красиво выполнять любые построения с помощью элементарных примитивов. К одной из таких динамических систем относится «Живая математика». Программа «Живая математика» позволяет создавать динамические чертежи и презентации, производить необходимые измерения на чертеже и фиксировать результаты. В [2] отмечается, что «Живая математика» представляет собой «систему интерактивного моделирования, исследования и анализа широкого круга задач при изучении геометрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа. Система динамической геометрии предназначена для работы с геометрическими чертежами. Она исключительно проста в освоении, позволяет создавать красочные, легко варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять операции над ними, а также производить все необходимые измерения. Использование динамической системы в преподавании геометрии обеспечивает развитие деятельности учащегося по таким направлениям, как анализ, исследование, построение, доказательство, решение задач, головоломки и даже рисование.

Система динамической геометрии «Живая математика» (часть УМК «Живая математика») становится все более популярной среди учителей математики. Уникальность применения заключается в том, что мы можем использовать эту систему на любом этапе процесса обучения. «Живая математика» позволяет более наглядно и доступно представить учебный материал, даёт возможность продемонстрировать явления или действия, которые в реальности увидеть невозможно, также проводить эксперименты и исследования при решении математических задач, тем самым развивая у учащихся навыки восприятия математических объектов [2].

В результате работы с обучающими программами у школьников активизируется мыслительная деятельность, повышаются мотивация учебной деятельности, качество усвоения знаний.

При работе в рамках «Живой математики» каждая обсуждаемая фигура изображается на экране монитора. При решении задач учащиеся могут выполнять задание на чертеже, приложенном к программе, а могут создавать собственные чертежи и сверять свои построения с образцом. Это, в свою очередь, стимулирует интерес учащегося к изучаемому предмету и повышает его мотивацию к обучению.

Изучение курса геометрии в школе вызывает у учеников некоторые сложности, так как перед ними возникает проблема наглядности. Выполнение чертежей даже простых геометрических фигур, изображенных в тетрадах или на доске, может быть не совсем точным или даже неверным.

«Живая математика» незаменима при изучении свойств геометрических фигур. Рекомендуется проводить лабораторно-практические занятия по геометрии как небольшие исследовательские работы, позволяющие ученику подойти к изучению и усвоению базовых понятий геометрии не через заучивание материала, а путем наглядного опыта. Каждая такая работа может состоять из математической модели явления, свойств, понятий, созданных в динамической системе «Живая математика», и шаблона отчета о проделанной практической работе.

Непосредственно введение нового понятия представляет собой формулировку новой теоремы и ее доказательство. Для доказательства теорем можно использовать альбом готовых динамических чертежей учебно-методического комплекта. К некоторым теоремам необходимо делать свои чертежи и проводить доказательство теорем с их помощью.

Понятие треугольника вводится в среднем звене. Различные его свойства и признаки рассматриваются во многих темах школьного курса геометрии. Без треугольника невозможно обойтись не только в планиметрии и стереометрии. Он крайне востребован такими вузовски-

ми дисциплинами, как высшая математика, линейная алгебра, численные методы, экономика, программирование, физика, теоретическая механика и сопротивление материалов. В школьном курсе с понятием треугольника связаны многие методы, используемые при решении различных геометрических задач.

Можно без преувеличения сказать, что изучаемая в школьном курсе геометрия – это геометрия треугольника. Поэтому формирование геометрических понятий, связанных с треугольником, крайне важно для учащихся. Отметим ещё один мотив изучения треугольника – знание свойств этой простейшей геометрической фигуры создаёт базу для выявления аналогичных свойств более сложных геометрических объектов.

Остановимся более подробно на понятиях «треугольник» и «медиана треугольника». Рассмотрим технологию использования среды «Живая математика» при изучении такого важного свойства, как пересечение всех трёх медиан треугольника в одной точке, делящей каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

С помощью проектора на экран выводится подготовленное учителем в среде «Живая математика» изображение рабочего поля (рис. 1), содержащее формулировку свойства и изображение произвольного треугольника ABC. Для начала необходимо выяснить, что является условием теоремы, а что – ее заключением. Учащиеся записывают в своих тетрадях формулировку теоремы и строят треугольник.



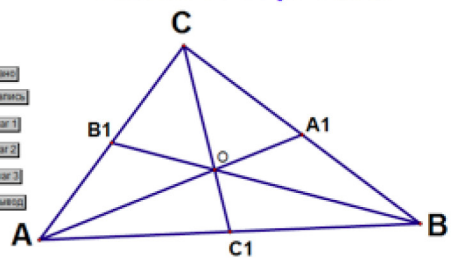
Далее строятся три диагонали треугольника, изображение которых учитель имеет возможность подготовить заранее и «скрыть» с помощью специальной кнопки, которая именуется «дано» и помещается в левой средней части рабочего поля «Живой математики». После нажатия мышкой на эту кнопку появляются изображения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 (рис. 2). Отметим, что в случае когда урок проводится с элементами исследования и эксперимента, целесообразно построить лишь две медианы, допустим AA_1 и BB_1 , предоставив учащимся возможность самостоятельно построить третью медиану и высказать предположение (гипотезу) о том, как она будет расположена по отношению к точке O пересечения двух первых. Естественно, что при таком сценарии урока на рабочем поле формулировка свойства медиан должна отсутствовать и появиться лишь тогда, когда ученики ее сформулируют.

Доказательство теоремы проводится по шагам. При нажатии кнопки «шаг 1» на чертеже появляется средняя линия A_1B_1 треугольника ABC, в тексте доказательства – соответствующая запись (рис. 3).

Используя выведенное ранее свойство параллельности основания и средней линии, отмечаем равные накрест лежащие пары углов $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 4). Для появления этих углов на рабочем поле необходимо нажать на кнопку «шаг 2».

Свойство медиан треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано - во:

Рис. 2

Свойство медиан треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано:
 $\triangle ABC$
 AA_1, BB_1, CC_1 - медианы
 Д - ть : $AO = 2A_1O$ $BO = 2B_1O$

Док - во:
 Проведем среднюю линию A_1B_1 .

Рис. 3

Свойство медиан треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано:
 $\triangle ABC$
 AA_1, BB_1, CC_1 - медианы
 Д - ть : $AO = 2A_1O$ $BO = 2B_1O$

Док - во:
 Проведем среднюю линию A_1B_1 .

$A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$

Рис. 4

Выделим теперь на динамическом чертеже разными цветами треугольники, подобие которых следует из полученных на предыдущем шаге равенств двух пар углов. После нажатия на кнопку «шаг 3» на чертеже подобные треугольники AOB и A_1OB_1 окрасятся соответствующими цветами (рис. 5), в тексте доказательства появится запись.

Последний шаг доказательства (рис. 5) – нахождение отношения 2:1, в котором точка O делит медианы AA_1 и BB_1 (оно равно коэффициенту подобия треугольников AOB и A_1OB_1); нахождение аналогичным способом отношения 2:1, в котором общая точка другой пары медиан AA_1 и CC_1 делит каждую из них; формулировка вывода о том, что O лежит и на медиане CC_1 . Появление этой записи есть результат нажатия кнопки «вывод».

Свойство медиан треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

$A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$
 $AB = 2A_1B_1 \Rightarrow AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$

Дано:

$\triangle ABC$
 AA_1, BB_1, CC_1 - медианы
 Д - ть : $AO = 2A_1O$ $BO = 2B_1O$

Док - во:

Проведем среднюю линию A_1B_1 .

Рис. 5

Подводя итог, отметим, что динамический чертеж делает процесс доказательства теоремы или решения задачи более наглядным. Как следствие, ученики проявляют интерес к исследованию решения. У учителя есть возможность привнести в процесс обучения математике творческую составляющую, исследование, эксперимент и конструирование.

Библиографический список

1. Институт новых технологий. ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА: сборник методических материалов. М: ИНТ, 2008.
2. Безгодова О.С. Формирование и развитие ИКТ-компетентности при использовании образовательной среды «Живая математика» // Теория и практика образования в современном мире: материалы VI Междунар. науч. конф. СПб., 2014.
3. Дубровский В.Н., Поздняков С.Н. Динамическая геометрия в школе // Компьютерные эксперименты в школе. 2008. № 1.
4. Погорелов А.В. Геометрия: учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2000.

«ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ ВЫПОЛНЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

GEOMETER'S SKETCHPAD IN TRAINING OF SCHOOL STUDENTS IN PERFORMANCE OF GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS

Н.О. Никонова

N.O. Nikonova

Живая геометрия, геометрия, геометрические построения, обучение, наглядность.

В статье показывается необходимость применения компьютерных средств, в частности программы «Живая математика», при обучении школьников такой важной части курса геометрии, как построение геометрических чертежей.

Geometer's Sketchpad, geometry, geometric constructions, training, presentation.

In article need of application of computer means, in particular the Live Mathematics programs is shown, when training school students of such important part of a course of geometry as creation of geometrical drawings.

Актуальность работы обусловлена тем, что в наше время большую роль в обучении играют информационные технологии, их использование облегчает учителю внедрение нового ФГОС в учебный процесс, способствует изменению роли учителя и ученика в учебной деятельности. Возникает больше возможностей для организации самостоятельной деятельности учащихся, что формирует благоприятное отношение к учебному процессу. Разумное использование информационных технологий может упростить процесс обучения.

В рамках обычных уроков геометрии большая часть учащихся усваивает материал на уровне не выше среднего. Чаще всего именно эти учащиеся не готовы воспринимать геометрический материал, вследствие чего теряется интерес к предмету. Считаем целесообразным вынести изучение геометрических построений в дополнительные учебные часы (реализовывать как кружок в 7-8 классах).

Для того чтобы сделать учебный процесс интересным и наглядным, на уроке целесообразно использовать компьютерную программу «Живая геометрия», развивающую творческую деятельность учащихся, их абстрактное и логическое мышление.

У обучающихся на уроке разный темп работы, не всем хватает времени на геометрическое построение, не всегда под рукой оказывается инструмент, дети прибегают к построению от руки, что приводит к погрешностям и проблемам с точностью и наглядностью чертежей. Правильно выполненный чертеж в геометрических задачах считается основой верного решения. Однако учащиеся не всегда понимают, как сделать чертеж более наглядным, как его расположить, чтобы он помог в решении задачи. Поиск правильного расположения и правильных размеров может занять достаточно много времени, что замедлит темп урока и не даст охватить необходимый объем заданий, отработать навыки доказательств, решений. Верно выполненный с помощью геометрических инструментов чертеж – важное умение ученика для уроков геометрии, но выработка этого умения в обычной тетради трудоемка, постоянные перечерчивания могут негативно сказаться на настрое ученика и повлиять на его успеваемость. В связи с этим, считаем необходимым дополнить обычные уроки по геометрии занятиями с применением «Живой математики», которые позволили бы развить геометрическое воображение и строить на уроках правильные чертежи к задачам в течение короткого времени.

В программе «Живая геометрия» высокий эстетический уровень оформления чертежа делает изучение математики привлекательным, а решение задач – нетрадиционным. По этой при-

чине «Живую геометрию» активно используют даже слабоуспевающие ученики, обеспечивая себе ситуацию успеха и эмоциональной поддержки, причем не только со стороны учителя, но и со стороны одноклассников. Решение задач на построение в этой программе помогает заинтересовать, привлечь внимание всех учащихся, показать всю красоту геометрии, её важность и значимость.

«Живая геометрия» может использоваться при изучении математики по любым учебникам, в любом классе, позволяя учителю продемонстрировать изучаемый материал. С этой программой можно работать в разных условиях: в классе с компьютером и мультимедиа-проектором, в классе с компьютерной сетью. Компьютер и проектор есть в каждом классе, в связи с чем использовать программу на уроках не составит никакого труда.

Программа лишь предоставляет необходимые средства для создания чертежей пользователем. Используются стандартные геометрические операции, такие как проведение прямой (луча, отрезка) через две точки, построение окружности по заданному центру и точке на окружности (или по заданным центру и радиусу), биссектрисы угла, середины отрезка, проведение перпендикулярных и параллельных прямых, фиксация пересечения прямых, окружностей, прямой и окружности. Имеется хорошо развитая система измерений длин, углов, площадей, периметров, отношений с достаточно большой точностью, которая легко регулируется. Система преобразований позволяет производить над объектами такие операции, как отражение, растяжение, сдвиги, повороты.

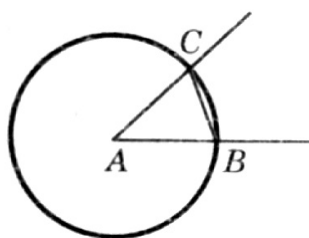
По мере приобретения навыков работы с данной программой деятельность учащегося развивается по следующим направлениям: доказательство, анализ, построение, исследование, решение задач.

Геометрический материал становится для учащихся доступным и понятным. После таких уроков они глубже начинают вникать в суть самого предмета, проявляют интерес к нему. Простая техника измерений элементов геометрических фигур, с которыми работает учащийся, позволяет усваивать соотношения экспериментально, в том числе учащимся с затрудненным восприятием геометрии.

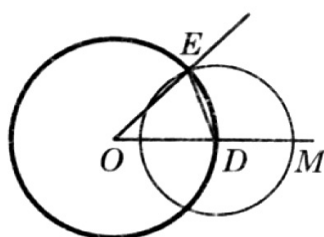
Рассмотрение предложенной ниже задачи позволяет наглядно продемонстрировать преимущества построения в данной программе.

Решение задачи «Постройте биссектрису угла» в среде «Живая геометрия» можно представить следующим образом:

1. Построение угла, равного данному.



a)



б)

2. Построение дополнительной окружности с центром в точке E и радиусом DE .
3. Окружность с центром в точке E и окружность с центром в точке D пересекаются в двух точках.
4. Проведение прямой, проходящей через полученные точки пересечения окружностей (обозначим ее как PN). Заметим, что прямая PN проходит через точку O .
5. Обучающиеся производят измерение углов, образующихся при построении прямой PN .
6. Обучающиеся отвечают на вопрос: «Чем будет являться построенная прямая PN для угла O ?»

При виртуальном способе решения данной конструктивной задачи, в отличие от традиционного способа «вручную», у детей не будут возникать погрешности при измерении градусной меры углов.

Применение программы «Живая геометрия» при изучении задач на построение решает возникающие на уроках проблемы с восприятием чертежей, наглядностью. Внедрение в учебный процесс таких уроков при помощи дополнительных часов оптимизирует учебный процесс, способствует развитию интереса к предмету, формированию абстрактного и логического мышления.

Библиографический список

1. Яшкина М.Л., Локтина Р.В. Применение компьютерных программных средств в преподавании математики // Концепт: научно-методический электронный журнал. 2012. № 7 (июль). URL: <http://www.covenok.ru/koncept/2012/12094.htm>. – Гос.рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.

ПОСТАНОВКА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

STATEMENT OF RESEARCH GEOMETRIC PROBLEMS AND THEIR SOLUTION USING THE DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE

Р.П. Овчинникова

R.P. Ovchinnikova

Школьный курс геометрии, исследовательское обучение, исследовательская задача, система исследовательских задач, интерактивная геометрическая среда.

В статье рассмотрены различные подходы к определению исследовательской задачи в работах ученых-методистов Ю.М. Колягина, Л.М. Фридмана, Д. Пойа и др. Сформулированы правила постановки исследовательских задач школьного курса планиметрии, решение которых будет осуществляться с использованием интерактивной геометрической среды. Показаны отличительные черты формулировок исследовательских задач. Приведены конкретные примеры исследовательских задач.

School course of plane geometry, research training, research task, the system of research tasks, dynamic geometry software.

In this article various approaches to the definition of the research problems in the work of scientists and methodologists Y.M. Kolyagin, L. M. Friedman, D. Pólya, etc. are considered. The result of this research are rules of formulating research problems of the school course of plane geometry, the solution of which involves the use of DGS. The distinctive features of wording research tasks was shown. Specific examples of the research problems are presented.

Согласно требованиям ФГОС среднего (полного) общего образования и примерной образовательной программы основного общего образования по математике [1], предусматривается значительное увеличение активных форм работы, направленных на вовлечение учащихся в математическую деятельность, на обеспечение понимания ими математического материала и развития интеллекта, приобретение практических навыков, умений проводить рассуждения, доказательства, формирование умений проводить эксперименты и исследования. В программе также уделяется внимание использованию компьютеров и информационных технологий для усиления визуальной и экспериментальной составляющих обучения математике.

При исследовательском обучении учебная дисциплина рассматривается как интеллектуальная специфическая деятельность человека, а обучение проходит в форме повторного открытия: ученик познает новые факты, используя теорию научных исследований. Он сам ставит вопросы и ищет на них ответы, выдвигает гипотезы, доказывает и опровергает их. Происходит переход от репродуктивного способа обучения к творческому. Такой переход возможен при участии школьников в учебно-исследовательской деятельности, под которой понимают творческую самостоятельную деятельность школьников, направленную на решение исследовательских задач, в процессе которой происходит развитие личности учащегося, открытие им субъективно нового научного знания и способа деятельности, подготовка учащихся к выполнению самостоятельного исследования.

Исследовательская деятельность с геометрическим содержанием носит преимущественно мыслительный характер, и ее сложность заключается в абстрактности объектов. Сделать изучаемые объекты, сложные для понимания, видимыми и наглядными можно с помощью

динамических моделей, созданных в интерактивных геометрических средах (ИГС), которые позволяют:

- наблюдать процесс изменения объекта;
- выявлять условия существования и «разрушения» объекта, соответствующего понятию;
- показывать параметры объекта, изменяющиеся независимо друг от друга и определяющие изменение других элементов;
- фиксировать результат изменения разными способами.

Все это открывает возможности для проведения математического эксперимента с целью получения ответов на вопросы и для постановки новых вопросов в ходе самого исследования.

В теории и методике обучения математике понятие исследовательской задачи появляется на этапе классификации задач. Л.М. Фридман [10], в зависимости от наличия или отсутствия в курсе математики общих правил и положений, однозначно определяющих последовательность шагов решения задачи, подразделял их на стандартные и нестандартные. Г.А. Балл [3] дал определение «не рутинной (проблемной) задаче» как задаче, решатель которой не обладает соответствующим алгоритмом решения.

Д. Пойа выделил три черты задач научно-исследовательского характера, отличных от обычных задач школьного учебника. По мнению ученого, исследовательская задача должна:

- быть привлекательной для ученика, посильной для решения и может быть сформулирована самими учениками;
- содержать глубокий подтекст: быть связанной с окружающей нас действительностью, другими областями мышления, породить поучительные вопросы, ведущие к новым интересным задачам;
- иметь ответ, который можно угадать с помощью наблюдения, высказать предположение, а затем доказать [9, с. 351].

Определяя математическую задачу, Ю.М. Колягин выделил в ее структуре четыре основных компонента: 1 – начальное состояние (Д), 2 – базис решения (Б), 3 – решение задачи (Р) и 4 – конечное состояние (О) – и предложил классифицировать все задачи по количеству неизвестных компонентов. Такой подход привел его к пониманию исследовательской задачи, в которой «...остаются определенными (известными) лишь целевое указание и, может быть, общее описание некоторой ситуации, ни один из названных компонентов которой неизвестен (или почти не определен)» [6, с. 61]. Задачи, в которых известны все компоненты, названы автором тренировочными упражнениями, не известен один компонент – обучающими, два компонента – поисковыми, три – проблемными. Поскольку данную типологию задач можно рассматривать как схему последовательных этапов исследовательской деятельности, то поисковые и проблемные задачи будем называть задачами исследовательского характера.

Б.А. Викал [4] определяет исследовательские задачи как «...задачи, при решении которых деятельность учащихся полностью или частично не детерминирована» (не определена). Он выделяет два класса исследовательских задач:

- задачи первого класса – «образцы», «рецепты» действий направлены на знакомство с элементами исследовательской деятельности и операциями, их составляющими;
- задачи второго класса направлены на вовлечение учащихся в учебную исследовательскую деятельность, требуют выбора необходимых действий, умения ориентироваться в проблемной ситуации.

Исходя из преемственности курсов математики разных классов, следует предполагать, что задачи первого класса должны присутствовать в учебниках для 5–6 классов, а второго – для 7–11. Однако, как показывает анализ учебников, некоторые учебники для 5–6 классов [5, 2013] содержат в явном виде исследовательские задачи, а учебники планиметрии [2; 8] в основном

содержат задачи тренировочные и обучающие с неизвестным третьим компонентом – решением задачи. В соответствии с требованиями ФГОС в учебниках появились задачи и задания под рубриками:

- «Исследовательские задачи» [2], связанные как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач. Таких задач предложено крайне мало, по 4–5 на каждый класс, и они составлены для учащихся с хорошей математической подготовкой;
- задачи, которые имеют электронную версию [2]. Они представлены в форме апплетов или тестовых заданий и размещены на сайте Единой коллекции Цифровых образовательных ресурсов: <http://school-collection.edu.ru/> и Для работы их нужно найти в каталоге;
- «Дружим с компьютером» [7] – задачи для выполнения в графическом редакторе, целью которых является поиск и освоение инструмента, иллюстрация свойства, поиск способа построения фигуры. Среди графических редакторов авторы называют Paint, CorelDraw, Visio, хотя для проведения исследований и решения задач существуют другие программы – ИГС, среди которых популярны GeoGebra, «Живая математика» и «Математический конструктор».

В сложившейся ситуации учителю самому надо уметь составлять исследовательские задачи или реконструировать задачи, сформулированные в учебнике. Взяв идею классификации задач Ю.М. Колягина в качестве основы постановки исследовательских задач, мы сформулировали правила составления и реконструкции стандартных и обучающих задач в исследовательские и имеющие исследовательский характер:

- преобразовать задачу с закрытым условием в задачу с открытым условием. Например, найти всевозможные данные, по которым можно было бы найти данное следствие (?БРО);
- преобразовать задачу с закрытым заключением в задачу с открытым заключением. Например, найти всевозможные следствия из заданных условий (ДБР?);
- представить доказательство, вычисление, преобразование со скрытой часто встречающейся у учащихся ошибкой. Например, найти ошибку в предложенном решении, доказательстве. Предложить математический софизм (Д?РО);
- подготовить показ решения, анимацию, фрагмент построения, преобразования одного объекта в другой. Спросить, какие есть другие способы построения и преобразования (ДБ??);
- подготовить анимацию, фрагмент исследования, попросить сделать вывод из увиденного (Д?Р?);
- предложить сформулировать гипотезы о способах решения, доказательства; построить объект по его элементам (Д??О);
- удалить часть условия задачи так, чтобы получилась многовариантная задача. Предложить найти все возможные решения. Обобщить данные задачи (?БР?);
- найти задачи (задачу), имеющие одинаковые конструкции. Предложить сконструировать в ИГС инструмент (группу инструментов) для построения данной геометрической конструкции (??РО, ?Б?О);
- построить в ИГС какую-либо геометрическую конструкцию. Дать задание изучить свойства, исследовать данную геометрическую конструкцию (Д???);
- предложить составить задачу (??Р?, ?Б??, ???О):
которую можно решить с использованием данной теоремы, решение которой представлено в виде графа, которую можно решить данным методом, с недостижимым объектом, величину которого надо найти.

Далее мы проиллюстрируем сформулированные выше правила конкретными авторскими и реконструированными задачами по теме «Сумма углов треугольника», для демонстрации или решения которых предполагается использовать ИГС.

1. Найдите величину угла, вершина которого не достижима. Найдите несколько способов решения проблемы.

Данное задание дается учащимся в виде готовой модели, выполненной заранее учителем в ИГС. Выполняется учащимися самостоятельно.

2. Перечислите известные вам теоретические положения, с помощью которых можно доказать теорему о сумме углов треугольника. Сформулируйте гипотезы о способе доказательства теоремы. Докажите гипотезы, используя чертежи (рис. 1).

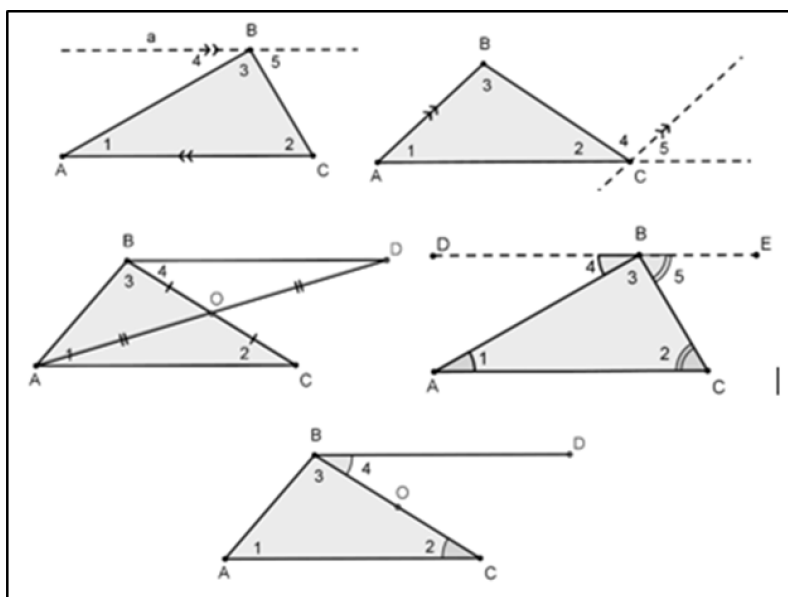


Рис. 1

Чертежи к данной задаче могут быть представлены в виде анимации или динамических чертежей, выполненных в ИГС.

3. Обоснуйте способ доказательства теоремы методом оригами по рисунку 2.

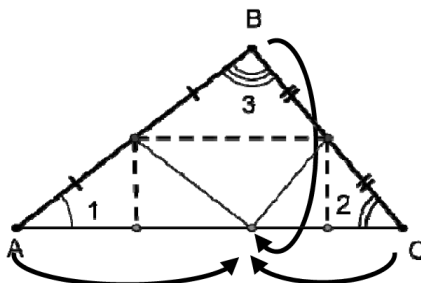


Рис. 2

Условие данной задачи может быть продемонстрировано анимацией, созданной в ИГС.

4. Исследуйте вопрос о том, сколько в треугольнике может быть: а) прямых углов; б) тупых углов; в) острых углов. На основе выполненного исследования выделите виды треугольников и дайте им названия.

5. Используя динамическую модель, исследуйте вопрос о расположении биссектрисы внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника относительно основания. Вывод обоснуйте.

6. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен α° (реконструкция задачи № 228 учебника Атанасяна).

7. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен α° . Найдите углы треугольника (реконструкция задачи № 234 учебника Атанасяна).

8. Используя динамическую модель, исследуйте вопрос о виде треугольника, в котором медиана, проведенная к стороне, равна ее половине. Вывод обоснуйте.

9. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M . Исследуйте зависимость величины угла AMB от угла C . Существует ли треугольник, у которого биссектри-

сы перпендикулярны? Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?

10. Используя динамическую модель, сравните величину внешнего угла равнобедренного треугольника и внутреннего, не смежного с ним. Вывод обоснуйте.

11. Верно ли, что внешний угол равнобедренного треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним?

12. Исследуйте в ИГС с помощью имеющихся в меню инструментов свойства треугольника.

Использование в учебном процессе исследовательских задач, решаемых с использованием ИГС, способствует повышению качества общего образования, уровня геометрического мышления, так как:

– исследования математических объектов с использованием ИГС позволяют учащимся глубже проникнуть в сущность изучаемых свойств объектов за счет изменения формы изучаемых объектов (исследование объектов в динамике), позволяют находить различные закономерности;

– использование вычислительных, графических, визуализационных возможностей ИГС позволяет интенсифицировать этапы исследовательской деятельности по планиметрии, сократить время, отводимое на решение той или иной задачи%

– использование ИГС позволяет более широко применять индивидуализацию и дифференциацию обучения. Для каждого ученика на экране появляется исследовательская задача, уровень сложности которой выбирает сам учащийся. Время на решение поставленной задачи не ограничено, возможно обращение к подсказкам на различных этапах решения задачи.

Библиографический список

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего полного общего образования. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/2194/файл/521/12.05.03-ФГОС.pdf>.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014.
3. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М.: Педагогика, 1990.
4. Викал Б.А. Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики: автореф. дис. ... канд. пед. наук. М., 1977.
5. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс: часть 2. М.: Ювента, 2013.
6. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977.
7. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Геометрия: 7 класс: учебник для уч-ся общеобразоват. организаций. М.: Ветана-Граф, 2015.
8. Погорелов В.А. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014.
9. Пойа Д. Математическое открытие: пер. с англ. М.: Наука, 1970.
10. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. М.: Едиториал УРСС, 2005.

НЕСТАНДАРТНЫЕ УРОКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКОВ

NON-STANDARD LESSONS AS MEANS OF INCREASE OF MOTIVATION OF LEARNING MATHEMATICS STUDENTS

А.Г. Портнягина

A.G. Portnyagina

Мотивация, нетрадиционный урок, формы нетрадиционных уроков, математический бой, урок-экскурсия, творческая деятельность, информационные технологии на уроке математики.

В данной статье рассматривается проблема проведения нетрадиционного урока по математике. Говоря об организации процесса обучения, нельзя забывать о нестандартных формах организации учебно-познавательной деятельности детей на самом уроке. Такой урок хорошо мотивирует учащихся и активизирует их творческий потенциал, тем самым развивая не только математические способности учащихся.

Motivation, non-traditional lesson forms are not traditional lessons, math fight, a lesson-excursion, art, information technology in math class.

This article discusses the problem of the non-traditional math lessons. Speaking about the organization of the learning process, we should not forget about non-standard forms of organization of educational-cognitive activity of children on the lesson. This lesson motivate students and stimulates their creativity, thus developing not only mathematical ability of students.

Основной формой проведения занятий в школе до сих пор остается урок продолжительностью 45 минут.

Урок – динамичная и вариативная основная форма организации учебного процесса, при которой в рамках точно установленного времени учитель занимается с определенным составом учащихся – с классом – по твердому расписанию, используя разнообразные методы и средства обучения для решения поставленных задач образования, развития и воспитания [1].

В зависимости от доминирования тех или иных методов и средств один и тот же урок может иметь нескольких разновидностей. Например, тип урока – объяснение нового материала. Виды: урок-конференция, урок-лекция и т.д. Урок традиционный — урок, который характеризуется порядком, проверенной регламентацией, дисциплиной, исполнительностью учеников, подчиняющихся учителю; точными очертаниями учебного материала, сложившимися традициями и стереотипами [1].

В последнее время приобретают популярность нетрадиционные уроки, которые вызывают большой восторг у учащихся. Они проходят гораздо быстрее и интереснее. У таких уроков есть характерные признаки, которые, на наш взгляд, сразу могут выделить его из общего числа:

- изменение формата урока;
- наличие дополнительного и внепрограммного материала;
- может проводиться в нетрадиционном месте, за рамками кабинета;
- может использоваться видео-, аудиоаппаратура и другие мультимедийные материалы;
- может раскрыть новый творческий потенциал учеников;
- требуется большая предварительная подготовка не только от учителя, но и от класса.

По новым стандартам все уроки должны проходить в творческом отрыве, уходить за рамки традиционного. Но все же не стоит забывать о классических формах проведения урока. Да и не в силах учителя каждый день для каждого класса разрабатывать такие уроки. Однако пе-

риодическое их применение может дать хорошие результаты. Такие занятия хорошо активизируют мыслительную деятельность, развивают творческие идеи и, самое главное, повышают творческую мотивацию учащихся.

Форм проведения творческих уроков очень много, самые популярные из них:

1. Урок-семинар.
2. Урок-игра.
3. Урок-дискуссия.
4. Урок-исследование.
5. Урок-соревнование.
6. Бинарные уроки.

Математика – это предмет, где, несомненно, можно проводить различные формы урока, например, урок-соревнование, который можно проводить как в группах, так и в микро-группах. Математический бой вызывает всегда большие дискуссии при ответе на билет, что ребенку с гуманитарным складом особенно интересно.

Одна из форм проведения урока – игра в лото, когда учащиеся достают бочонок с номером примера или задачи по пройденной теме. Если ученик правильно отвечает на свой вопрос, то закрашивает номер на карточке, а если нет – то бочонок опять возвращается в мешок. Такая игра, если она проходит в группе, часто переходит в дискуссию. Интересно организовать «экскурсию» перед изучением темы «Проценты», чтобы показать, где чаще всего они используются. Экскурсия по банку или магазину, несомненно, заинтересует учеников. Она может быть виртуальной: поиск информации в Интернете (либо совместно с детьми на уроке, либо в качестве домашнего задания ученикам) и демонстрация ее на экране или интерактивной доске). Может быть заранее запланированная лекция в Интернете или через скайп вузовских преподавателей или специалистов-практиков, сталкивающихся с процентами по своей работе; возможно – сетевая игра по типу игры «Монополия», где ученикам придется столкнуться с процентами. Также учитель может договориться о реальной экскурсии в организацию или на предприятие, подобрав предварительно людей, которые смогут квалифицированно ее провести, можно пригласить такого человека непосредственно на урок математики в школу.

Итак, проведение уроков математики по одному шаблону и единообразно может негативно повлиять на мотивацию изучения этого предмета. Считаем, что по каждой теме необходимо подбирать ту форму урока, которая будет наиболее интересна учащимся и одновременно позволит повысить качество усвоения изучаемой темы.

Библиографический список

1. Коджаспирова Г.М., Коджаспиров А.Ю. Педагогический словарь. Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. 448 с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт [Электронный ресурс]. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/543> (дата обращения 31.10.2016).

ДИСТАНЦИОННАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА УЧАЩИХСЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ И ОСОБЕННОСТИ ЕЁ ОРГАНИЗАЦИИ

REMOTELY STOCHASTIC TRAINING HIGH SCHOOL STUDENTS AND PECULIARITIES OF ITS ORGANIZATION

О.Н. Троицкая, А.М. Козыренко

O.N. Troitskaya, A. M. Kozyrenko

Дистанционное обучение, субъективный опыт учащихся, стохастика, виды стохастических задач, интерактивные модели.

В статье описаны возможности, которые может использовать учитель математики при организации дистанционного обучения. Доказан факт отсутствия достаточного количества материалов, позволяющих организовать целенаправленную стохастическую подготовку учащихся. Рассмотрены примеры стохастических задач, требующих знания различных способов их решения. Предложено организовать дистанционную стохастическую подготовку учащихся старшей школы с применением интерактивных моделей, предлагаемых разработчиками творческой компьютерной среды «IC: Математический конструктор».

Distance learning, the subjective experience of learners, stochastic, stochastic types of tasks, interactive model

The article describes the features that can be used by the mathematics teacher in distance learning. Proven fact to the lack of sufficient materials to organize a focused stochastic training of students. The article has some examples of stochastic problems that require knowledge of different ways of solving them. Invited to organize remote stochastic training of high school students using interactive models proposed by the developers of creative computing environment «IC: Mathematical designer».

Процесс информатизации сферы образования предполагает не только изменение уже существующей инфраструктуры образовательного учреждения (укомплектование компьютерной техникой, расширение коммуникационных каналов и т.д.), создание в нем информационно-образовательной среды, но и применение новых средств, методов обучения. Широкое использование на уроках виртуальных лабораторий, пакетов прикладных программ, разработанных специально для нужд школы, тестовых систем позволяет организовать обучение учащихся с учетом современных требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных школ. При этом, как указано в «Законе об образовании РФ», при реализации образовательных программ должны быть использованы дистанционные образовательные технологии.

Сегодня ресурсы Интернета предоставляют учителям широкие возможности для применения в своей работе дистанционных образовательных технологий. Так, например, закрытая информационная система Дневник.ру позволяет учителям за счет интерактивного модуля управления домашними заданиями выдавать их всему классу или отдельным ученикам, копировать задания для разных классов, добавлять к ним файлы и контролировать ход выполнения. На сайте разработчиков описаны такие сервисы дистанционного обучения, как «виртуальные конференции, проведение тестов в электронном виде, обмен комментариями к домашним заданиям, школьные объявления, новости, хранение файлов класса, библиотека и медиатека готовых учебных материалов» [1].

Анализ интернет-источников показал, что существует большое количество сайтов и порталов, направленных на подготовку учащихся выпускных классов к сдаче Единого государственного экзамена по математике. Некоторые из них предоставляют учителям возможность самим разрабатывать материалы по определенным темам и адресовать их учащимся. Например, дистанционная обучающая система для подготовки к экзамену «РЕШУ ЕГЭ» [2] творческого объединения «Центр интеллектуальных инициатив» позволяет учителям использовать предлагаемые разработчиками тесты и создавать свои собственные курсы, обратившись для

этого в соответствующий раздел. Ряд учителей с целью актуализации знаний учащихся, формирования умений и навыков, а также с целью подготовки их к выпускным экзаменам в форме ЕГЭ создают группы на данном сайте в разделе «Учителю», указывают необходимые для выполнения тестовые задания, определяют сроки и затем, используя сервис «классный журнал», получают результаты в форме отметки (по пятибалльной шкале). В случае недостаточного количества заданий рассматриваемой тематики или потребности в заданиях определённого вида, которые отсутствуют на сайте, учитель может сам составить требуемую контрольную или самостоятельную работу. Достоинством сайта является тот факт, что учащийся в случае неверного решения увидит правильный ответ и предлагаемое разработчиками решение. Учитель, перейдя на закладку «Классный журнал», сможет провести анализ полученных за работу баллов и посмотреть ответы учеников. Однако учитель не увидит причину неверного решения, которая может состоять в непонимании учеником условия задания, в незнании или непонимании применяемого теоретического материала, а также в наличии житейских знаний у учеников, которые противоречат научным знаниям.

Ещё одним достаточно популярным сегодня сайтом является сайт <http://testmat.ru>. На нем представлены тесты по различным предметам, в частности по математике, с ответами и решениями. Пользователь имеет возможность выбрать одну из пяти тем (Элементарная математика; Алгебра; Математический анализ; Геометрия; Тригонометрия), а затем начать тестирование. Каждый раз компьютер выбирает случайный вопрос, количество которых не ограничивается. По завершении будут выведены результаты с возможностью возвращения к решенной задаче и просмотра предлагаемого разработчиками решения. И снова можно говорить о том, что сам тестируемый не увидит причину сделанной им ошибки. Он не определит, является ли неверное решение следствием незнания применяемого теоретического материала или же у него есть внутреннее знание, которое мешает ему получать верные результаты. Недостаток данного ресурса состоит в отсутствии прямой ссылки на стохастические задачи, которые вызывают серьёзные трудности у учащихся.

В последнее время достаточно популярно среди учителей математики и информатики стало ведение своих страничек на сайтах школ, в которых они работают. Так, например, на сайте средней школы № 95 г. Архангельска есть вкладка «Дистанционное обучение». Подраздел «Тестирование» содержит тесты по информатике, алгебре и геометрии. Однако, несмотря на открытость данного ресурса, спектр рассматриваемых тем достаточно узок, отсутствует доступность обсуждения выполненных работ, а вероятностные задачи не представлены совсем.

Таким образом, в ходе проводимого исследования было выявлено противоречие между наличием практики использования элементов дистанционного обучения в школе для организации внеурочной работы учащихся по математике и недостаточным количеством материалов, ориентированных на стохастическую подготовку учащихся общеобразовательной школы и позволяющих учитывать их субъектный опыт.

В процессе обучения учащихся методам решения стохастических задач учителя математики сталкиваются с проблемой существования у школьников представлений, зачастую противоречащих научным положениям. Так, например, при решении задач, в которых происходит одновременное бросание двух игральных кубиков и определение вероятности выпадения некоторой суммы, учащиеся выделяют в качестве исходов опыта натуральные числа от 2 до 12. При этом они трактуют исход как явный результат проведенного опыта, а тот факт, что исходы должны быть равновозможны, просто игнорируют. Кроме того, в процессе обсуждения истории возникновения теории вероятностей дети высказывают предположения о том, что чем дольше игрокам не везет в азартной игре, тем больше шансов у них будет получить крупный выигрыш. Таким образом, в своих рассуждениях учащиеся делают ошибку, которую допустил французский математик Даламбер ещё в XVIII веке, решая задачу с подбрасыванием двух монет.

Введение стохастической линии в школьный курс математики привело и к включению в содержание контрольных измерительных материалов Единого государственного экзамена соответ-

ствующих задач. Анализ Интернет-источников, документов, определяющих структуру и содержание КИМ ЕГЭ, демонстрационных вариантов, предлагаемых различными авторами, позволяет говорить о том, что существует несколько видов стохастических задач, требующих знания различных способов их решения. Прежде всего, речь идёт о простейших задачах, направленных на использование классического способа оценки вероятности случайного события.

Пример 1. На столе тарелка, в которой 10 пирожков. Из них 3 пирожка с яблоками, 4 – с изюмом, остальные – с курагой. Оцените вероятность того, что взятый наугад пирожок будет с курагой.

В процессе решения задачи учащиеся определяют опыт со случайным исходом, все равновозможные его исходы и исходы, благоприятные рассматриваемому событию, и вычисляют соответствующую вероятность как отношение числа 3 к 10. Однако задача, представленная в примере 2, несмотря на непосредственное применение классического способа, вызывает у учащихся затруднения.

Пример 2. За круглый стол на 126 стульев в случайном порядке рассаживаются 124 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Основная проблема состоит в создании модели задачной ситуации. В процессе решения необходимо задать дополнительное условие фиксации одной из девочек, тогда как вторая девочка сможет занять любое из оставшихся $126 - 1 = 125$ мест. Иллюстрация рисунком позволяет упростить процесс нахождения числа благоприятных исходов опыта (рис. 1).



Рис. 1.

В материалах КИМ ЕГЭ содержится ряд задач, решение которых требует установления вероятности случайного события определенной очередности, например, выступление на семинаре во второй день научной конференции или во время соревнований на четвертый день их проведения. Учащиеся, интуитивно опираясь на свой житейский опыт, пытаются выделить некую зависимость вероятностей случайных событий и на этом фоне делают ошибки.

Пример 3. Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 45 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день – 18 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

В процессе обсуждения такого рода задач необходимо вывести учеников на три способа их решения, а затем выбрать наиболее оптимальный, с точки зрения школьников. Разбивка исполнителей на пять групп по девять человек в каждой позволяет определить пять равновозможных исходов опыта (рис. 2).

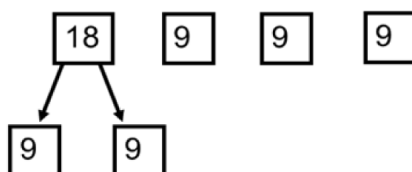


Рис. 2.

Поскольку только в одном случае наступает интересное событие, то учащиеся определяют искомую вероятность как отношение одного к пяти.

В профильных классах учителю предоставляется возможность проиллюстрировать применение комбинаторики к оценке вероятности данного события. Учащиеся вспоминают формулу для нахождения числа всевозможных сочетаний из n различных объектов по m объектов и на её основе решают задачу:

$$P(A) = \frac{C_{44}^{18} \cdot C_{26}^9 \cdot C_{17}^8 \cdot C_9^9}{C_{45}^{18} \cdot C_{27}^9 \cdot C_{18}^9 \cdot C_9^9} = \frac{44!}{18! \cdot 26!} \cdot \frac{26!}{9! \cdot 17!} \cdot \frac{17!}{8! \cdot 9!} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

Однако для большинства школьников будет более близок способ решения, основанный на идее применения корзины, в которую помещены листочки с написанными на них числами 1, 2, 3 и 4, означающими дни проведения конференции. При этом всего таких листочков будет 45, а нужных с числом 3 только девять (рис. 3).

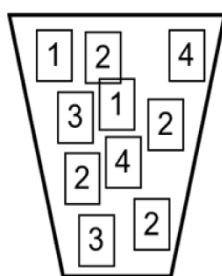


Рис. 3.

Соответствующая вероятность будет вычислена учащимися как отношение числа 9 к числу 45.

При условии организации дистанционной стохастической подготовки учащихся старшей школы учителю будет удобно не только типизировать задачи, но и использовать интерактивные модели, предлагаемые разработчиками творческой компьютерной среды «1С: Математический конструктор» [3]. Версия 6.0 данной среды дополнена возможностью работать со стохастическими моделями. Они содержат описание задачной ситуации, необходимые теоретические сведения, возможные способы решения. Как указано на сайте компании, для запуска моделей не обязательно устанавливать саму программу. Бесплатный МК-плеер позволяет запустить модель и полностью использовать всю ее функциональность. Кроме готовых моделей, данная творческая компьютерная среда содержит инструменты, которые может применить учитель или ученик для моделирования стохастических процессов. Они же дают возможность обработать полученные в ходе наблюдений данные.

Библиографический список

1. Дневник: Возможности [Электронный ресурс]. URL: <https://dnevnik.ru/features#/teachers>. – Загл. с экрана
2. Решу ЕГЭ. Образовательный портал [Электронный ресурс]. URL: <http://reshuege.ru>. – Загл. с экрана
3. Подробнее о «Математическом конструкторе» [Электронный ресурс]. URL: <http://obr.1c.ru/mathkit/about.html>. – Загл. с экрана

ФОРМИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТИВНЫХ УУД НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

THE FORMATION OF THE REGULATORY UUD AT MATHEMATICS LESSONS WITH PRIMENENIMEM COMPUTER TECHNOLOGY

А.С. Фадеева

A.S. Fadeeva

Регулятивные универсальные учебные действия, обучение математике, компьютерные технологии.

В данной статье говорится о возможности применения компьютерных технологий для формирования универсальных учебных действий у школьников на уроках математики. Приводятся несколько примеров, показывающих, как можно применить компьютерные технологии для их формирования.

Regulatory universal educational actions, mathematics education, computer technology.

This article refers to the possibility of the use of computer technology for the formation of universal educational actions of pupils in mathematics. And the use of computer technology for their formation. For some examples showing how to use computer technology for their formation.

Важнейшей задачей современной системы образования, согласно новому Федеральному государственному образовательному стандарту, является формирование универсальных учебных действий (УУД). Овладение учащимися универсальными учебными действиями дает возможность самостоятельного успешного усвоения новых знаний, умений и компетентностей в будущем, включая умение учиться.

Выделяют 4 группы УУД, одна из которых – регулятивные УУД. К ней относятся:

– Целеполагание.

– Планирование.

– Прогнозирование.

– Контроль в форме сличения с заданным эталоном.

– Коррекция.

– Оценка.

– Волевая саморегуляция как способность к мобилизации сил и энергии, способность к волевому усилию.

Все вместе регулятивные УУД призваны обеспечить организацию учащимися своей учебной деятельности.

Структура регулятивных УУД схожа со структурой тайм-менеджмента.

Тайм-менеджмент – управление временем – технология организации времени и повышение эффективности его использования. Включает в себя инструменты и методики планирования времени. Общими в стратегиях тайм-менеджмента и регулятивных УУД являются список задач (“to-do list”), постановка приоритетов и целей.

Детей стоит учить управлять своим временем уже в школе. И первое, с чего стоит начать, – это мотивация. Ребенок должен почувствовать, какую пользу ему принесет это занятие.

Приведем примеры упражнений для формирования регулятивных УУД.

Планировщики. Ежедневное планирование необходимо для повышения производительности и эффективного управления временем. Планировать необходимо на бумаге. С вечера можно подготовить список задач на завтра. Выполненную задачу из списка следует вычеркивать или отмечать специальным значком. Это даст ощущение удовлетворенности своей работой, прибавит энтузиазма и энергии. Вечером подводим итоги и планируем снова.

Календарь на месяц. Купите ребенку красочный перекидной календарь на год. Пусть он висит в его комнате и меняет страницы каждый месяц. Ярким кругом обводим день, когда запланированы важные дела: день рождения друга, посещение театра с классом. Пусть ребенок эмоционально настраивается на предстоящие события и вместе с тем учится ориентироваться во временах года, названиях месяцев.

Обозначить цели – только половина дела, главное — представлять пути их достижения. И этому тоже можно учиться. Помогут упражнения, где необходимо читать рисуночные или написанные планы, действовать по плану самостоятельно, корректировать планы, составлять алгоритмы, искать ошибку в алгоритмах, решать задачи на планирование, рисовать маршруты, составлять план по рассказу и рассказ по плану. Очень важно учить детей устанавливать причинно-следственные связи.

Для диагностики и формирования регулятивных универсальных учебных действий возможны следующие виды заданий:

- «Преднамеренные ошибки».
- Поиск информации в предложенных источниках.
- Взаимоконтроль.
- Диспут.
- «Ищу ошибку».
- Контрольный опрос на определенную проблему.

Пример 1

Правильно прочтите высказывание Н.К. Крупской, записанное без пробелов. Если нужно, поставьте запятую.

Математикаэтоцепьпонятий: выпадетоднозвенышкоинепонятнобудетдальнейшее.

Пример 2

Ученик решил задачу. Найдите ошибку и оформите верное решение.

1. $\triangle CEF = \triangle AED$ (односторонние),

$\triangle CFE = \triangle EAD$ (накрестлежащие при параллельных прямых),

$\triangle AED = \triangle FEC$ (по первому признаку)

2. $CE:DE=AE:FE=DA:CF$

$4:8=10:FE=7:CF$

Ответ: $FC = 3,5$ см, $FE = 5$ см.

Для формирования регулятивных УУД можно также применять информационные технологии обучения. О плюсах информационных технологий говорят уже долгое время. Поэтому возьмем тему «Линейные уравнения» и на ее примере покажем, где и как можно использовать компьютерные технологии в качестве помощника в формировании регулятивных УУД у учащихся.

1. В начале изучения темы можно показать слайд, на котором будут представлены примеры и линейные уравнения, и предложить учащимся их решить. Таким образом ученики сталкиваются с проблемой (не могут решить примеры, в которых содержатся неизвестные). Так мы можем подвести учеников к тому, что они сами сформулируют тему урока, а также будут формироваться такие регулятивные УУД, как целеполагание.

2. Во время изучения темы «Линейные уравнения» в 6 классах даются простейшие уравнения, и технологию их решения можно представить в виде опорного электронного конспекта. Конспект сохраняется учителем в электронном виде и вызывается по необходимости: при решении заданий на этапе запоминания, на этапе актуализации материала, при сравнении алгоритмов, при выборе способа решения и т.д. А ученики во время составления конспекта учатся выделять главное.

3. Большую распространенность получили электронные журналы. С их помощью можно организовать общение между учителем и учениками. В журнал можно ставить не все оценки, а только за контрольные работы по прохождению темы, а во время изучения темы контролиро-

вать умения. В начале темы каждый учащийся получает карточку индивидуальных достижений, в которой отмечает, какие умения он освоил (на его взгляд). Проверая домашнюю работу, учитель сам смотрит, какие умения появились у ученика. Умения, которые он приобрел, отмечает в электронном дневнике знаком «+». Ученик сверяет свою таблицу с таблицей учителя. Таким образом, у учеников исчезает момент «погони» за оценкой и они нацеливаются только на результат. Развиваются такие регулятивные УУД, как самоконтроль и самооценка.

Приведем пример такой индивидуальной карточки для самоконтроля на примере темы «Линейные уравнения»

В учебнике А.Г. Мордковича по математике за 6 класс решению буквенных выражений отведена целая глава (глава № 2), а конкретно решению уравнений – два параграфа (решение уравнений и решение задач на составление уравнений). Приведем пример индивидуальной карточки ученика, в которой он будет отмечать свои умения.

ФИО ученика	
Умения, знания, навыки	«+» – есть, «-» – нет
Раскрывать скобки	
Приводить подобные	
Выражать неизвестную с помощью учителя	
Самостоятельно выражать неизвестные	
Составлять уравнения с помощью учителя	
Самостоятельно составлять уравнения	

В заключение считаем необходимым отметить: виды и формы работы на уроках могут быть разные, а цель одна – это формирование универсальных учебных действий.

Библиографический список

1. Планируемые результаты. Система заданий. Математика. 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы: пособие для учителей общеобразовательных учреждений / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. М.: Просвещение, 2013. 176 с.
2. Е.Ю. Ривкин. Профессиональная деятельность учителя в период перехода на ФГОС основного общего образования. Теория и технологии. Волгоград: Учитель, 2015. 183 с.
3. Технологии развития универсальных учебных действий учащихся в урочной и внеурочной деятельности: учебно-методическое пособие / под общ. ред. С.С. Татарченковой. СПб.: Каро, 2014. 112 с.
4. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Учебник по математике 6 класс. 2009.

ГЕОГЕБРА КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ

GEOGEBRA AS A MEANS OF VIZUALIZING THE PROCESS OF TEACHING ALGEBRA

А.В. Фирер, Н.В. Иванова

A.V. Firer, N.V. Ivanova

GeoGebra, визуализация, обучение алгебре, лабораторная работа, исследование, функция, график функции.
В статье рассматривается применение свободно распространяемого программного обеспечения – системы динамической математики GeoGebra в качестве средства визуализации процесса обучения алгебре. Раскрываются преимущества GeoGebra, позволяющие использовать ее в массовой школе. В качестве одной из эффективных форм обучения алгебре с применением GeoGebra авторы предлагают компьютерные лабораторные работы. На примере лабораторной работы для 7 класса общеобразовательной школы раскрываются структура и содержание лабораторных работ с использованием GeoGebra.

GeoGebra, visualization, training algebra, laboratory work, research, function, the graph of the functions.
The article discusses the use of free software – dynamic mathematics as a means of visualization of the process of teaching algebra. There are some GeoGebra's advantages in the article that allow its use in the mass school. As one of the most effective forms of teaching algebra with the use of GeoGebra, the authors propose some computer laboratory works. On the example of labs for class 7 of secondary school, the authors open the structure and content of laboratory works using GeoGebra.

В контексте ФГОС общего образования возникает необходимость включения систем динамической математики в систему средств обучения, позволяющих достичь двух основных эффектов: визуализации математических объектов и предоставления учащимся возможности экспериментирования с ними.

В настоящее время все большую популярность приобретает программа GeoGebra – свободная образовательная математическая программа, соединяющая в себе геометрию, алгебру и математические исчисления. Программа была написана Маркусом Хохенвартером с использованием языка Java, переведена на 52 языка и в настоящее время активно совершенствуется и обновляется. Последняя доступная версия GeoGebra – 5.0.238.0, которую можно скачать на официальном сайте [2].

Созданная изначально для вузовского курса математики, на сегодняшний день среда GeoGebra охватывает практически все разделы и школьной математики. Все возрастающий интерес учителей математики к применению GeoGebra в обучении можно объяснить рядом преимуществ этой программы:

1. Простой и интуитивно понятный интерфейс программы.
2. Возможность установки программы на множество устройств: компьютеры, планшеты, смартфоны.
3. Является свободно распространяемым программным обеспечением (лицензия нужна только при коммерческом использовании).
4. Возможность работать в онлайн режиме, в том числе поддержка апплетов, встраиваемых на страницу сайта или блога.
5. Широкие исследовательские возможности и средства визуализации объектов исследования.
6. Наличие виртуального сообщества, позволяющего обмениваться опытом и материалами.

Перечисленные возможности программы позволяют органично дополнить традиционные уроки математики современными динамическими средствами когнитивной визуализации.

Одной из эффективных форм организации исследовательской деятельности обучающихся на уроках алгебры с применением GeoGebra являются компьютерные лабораторные работы.

Опыт использования системы GeoGebra показал, что компьютерные лабораторные работы можно проводить начиная с 7 класса общеобразовательной школы. Интерактивные инструменты и дружелюбный интерфейс программы позволяют использовать ее без предварительного обучения.

Мы предлагаем следующую структуру лабораторных работ:

1. Актуализация знаний в виде фронтального опроса.
2. Формулирование цели лабораторной работы.
3. Ход работы (проведение компьютерных экспериментов и заполнение протоколов наблюдений).
4. Формулирование выводов на основе анализа и обобщения наблюдений.
5. Серия заданий на применение сформулированных выводов.
6. Рефлексия.

Приведем фрагмент лабораторной работы для 7 класса.

Тема: «Прямая пропорциональность и ее график».

Цель работы: выяснить геометрический смысл углового коэффициента прямой пропорциональности, совершенствовать навыки в построении и чтении графиков.

Оборудование: ПК, интерактивная доска, протоколы наблюдений.

Первые три задания учащимся предлагается выполнить с помощью GeoGebra.

Интерактивный инструмент «флажок» позволяет учащимся переходить от одной визуальной интерактивной модели к другой без каких-либо трудностей. При этом каждая модель выполняет не столько иллюстративную функцию, сколько познавательную, развивая у учащихся способности к «активному математическому видению».

Задание 1. Выясните, как изменяется угол наклона, образованный графиком прямой пропорциональности с положительным направлением оси x . Для этого:

- откройте файл *Лабораторная работа №1* в GeoGebra;
- поставьте флажок в *Задании 1* (рис.1);
- изменяя с помощью ползунка значение коэффициента k , заполните протокол наблюдений № 1;
- сделайте выводы.

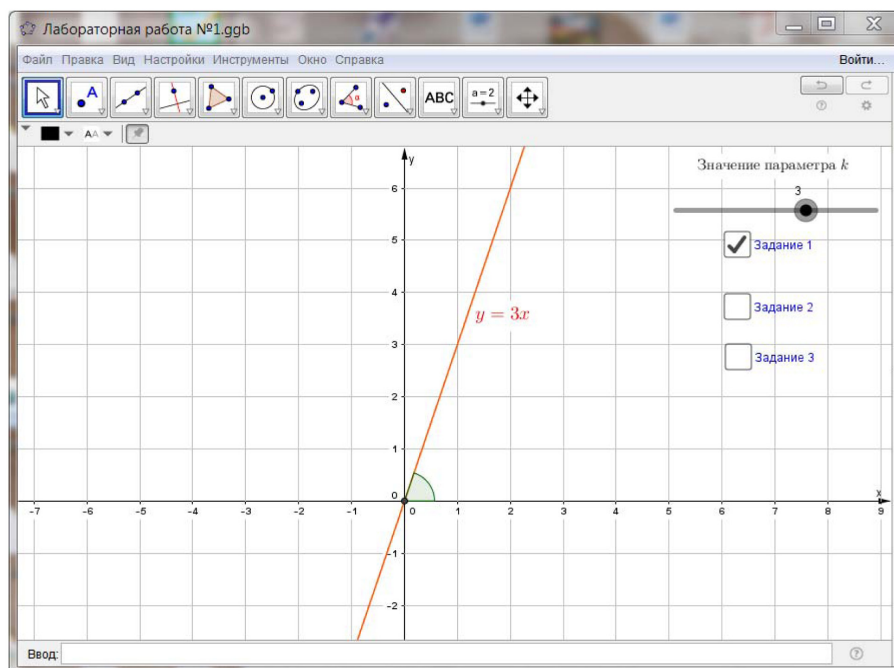


Рис. 1

Задание 2. Выясните, как по графику прямой пропорциональности определить ее угловой коэффициент. Для этого:

- уберите флажок в *Задании 1* и поставьте флажок в *Задании 2* (рис. 2);

- с помощью ползунка измените значение коэффициента k (целое число);
- переместите точки A_1 и A_2 по графику функции так, чтобы их координаты имели целочисленные значения (например, как показано на рисунке 2);
- заполните протокол наблюдений № 2;
- сделайте выводы.

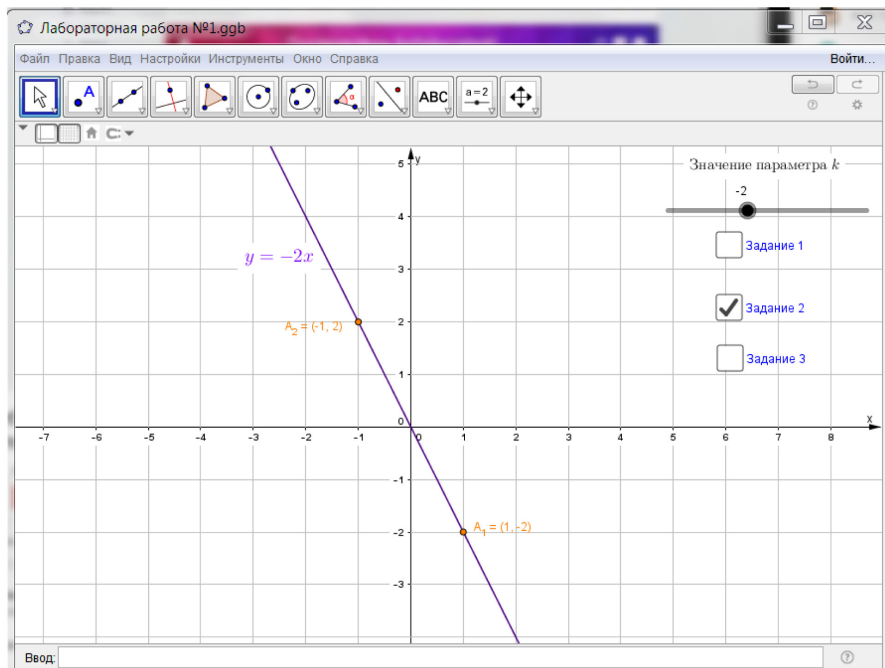


Рис. 2

Задание 3. Уберите флажок в Задании 2 и поставьте флажок в Задании 3 (рис. 3). На экране построены графики прямых пропорциональностей. Для каждой из них в протоколе № 3:

- определите угловой коэффициент k ;
- напишите формулу, задающую соответствующую функцию;
- заполните последние колонки, найдя соответствующие значения y .

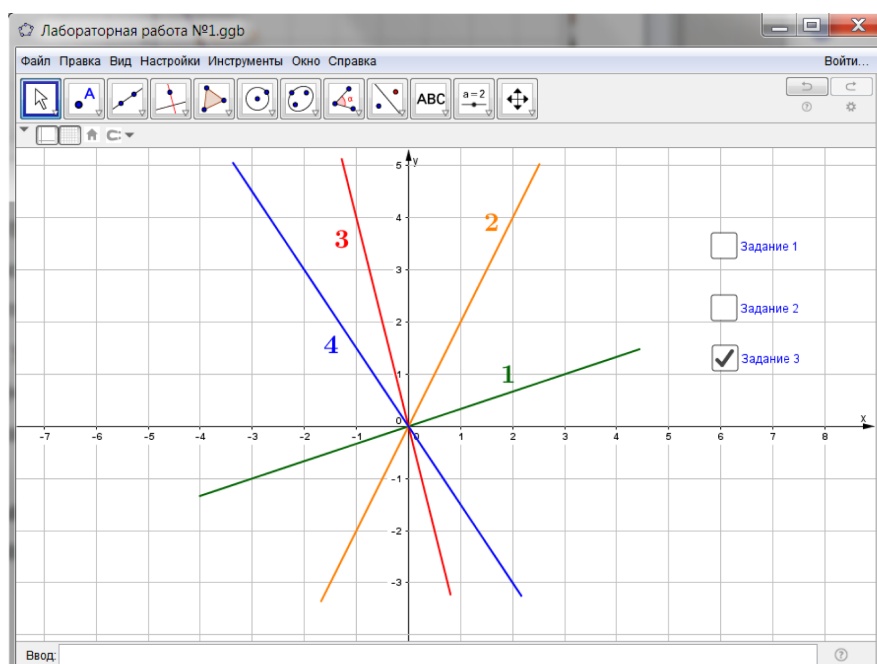


Рис. 3

Каждый протокол представляет собой рабочий лист, содержащий таблицы для регистрации данных наблюдений, пустые строки для сформулированных выводов.

На рисунке 4 представлен протокол для задания 1.

Лабораторно-графическая работа №1
Прямая пропорциональность и ее график

Фамилия Имя _____ Класс _____

Протокол наблюдений №1

Знак коэффициента k	№ наблюдения	Коэффициент k	Уравнение функции	Угол наклона прямой с положительным направлением оси Ox	Четверти, в которых расположен график функции
$k > 0$ положительный	1	$k = 1$	$y = x$	острый	I, III
	2	$k =$			
	3	$k =$			
$k < 0$ отрицательный	4	$k = -1$			
	5	$k =$			
	6	$k =$			

Выводы:

1) Если $k > 0$, то угол наклона, образованный графиком прямой пропорциональности, с положительным направлением оси Ox _____. Прямая расположена в ____ и ____ четвертях (наклонена вправо).

2) Если $k < 0$, то угол наклона, образованный графиком прямой пропорциональности, с положительным направлением оси Ox _____. Прямая расположена в ____ и ____ четвертях (наклонена влево).

Рис. 4

После заполнения протоколов и формулирования выводов учащимся предлагается решить задачи на их применение. Также в каждой лабораторной работе предусмотрены дополнительные задания для сильных учащихся.

Таким образом, система динамической математики GeoGebra может помочь учителю дополнить традиционные средства наглядности, выполняющие в основном иллюстративную функцию, средствами интерактивной визуализации, стимулирующими когнитивную функцию наглядности.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
2. Официальный сайт программы GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geogebra.org> (дата обращения: 20.10.2016).

РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В РАЗВИТИИ СПОСОБНОСТИ УЧАЩИХСЯ К МЫСЛЕННОМУ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЮ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

THE ROLE OF COMPUTER EXPERIMENT IN THE DEVELOPMENT OF THE STUDENTS' ABILITY TO MENTAL EXPERIMENTATION IN TEACHING OF BEGINNINGS OF THE MATHEMATICAL ANALYSIS

Н.И. Фомина

N.I. Fomina

Начала математического анализа, обучение, развитие, мысленный эксперимент, система динамической математики, GeoGebra, компьютерный эксперимент, компьютерный лабораторный практикум.

Одним из перспективных направлений повышения качества математического образования является усиление внимания к экспериментальному подходу в учебном математическом познании. В статье доказывается, что изучение начал математического анализа в школе является уникальной предметной основой для развития способности учащихся к мысленному экспериментированию с абстрактными объектами. На частных примерах автор статьи показывает, что эффективным вспомогательным средством развития этой способности являются компьютерные эксперименты, проводимые с использованием систем динамической математики.

Beginnings of the mathematical analysis, teaching, development, thought experiment, dynamic mathematics systems, GeoGebra, computer experiment, computer laboratory workshop.

One of the promising areas to improve the quality of mathematics education is the increased attention to the experimental approach in the teaching of mathematical knowledge. The article argues that the study of the beginnings of mathematical analysis in the school is a unique objective basis for the development of the ability of students to mental experimentation with abstract objects. In particular examples, the author shows that effective aid the development of this ability are computer experiments conducted using dynamic mathematics systems.

Сегодня перед системой математического образования Концепцией развития математического образования в РФ [1] поставлена задача усиления экспериментального подхода в математическом образовании, поиск рациональных условий его использования при реализации компьютерных сред (систем динамической математики). В частности, в резолюции III всероссийского съезда «Школьное математическое образование» отмечается:

«**Экспериментальный**, исследовательский подход к изучению математики является перспективной мировой тенденцией. Такой подход, за счет повышения мотивации, содействует выбору учащимися продолжения образования в направлениях, требующих повышенного уровня математических знаний. Он особенно эффективен **при использовании компьютерных инструментов и сред**. Целесообразно рекомендовать для включения в примерные основные образовательные программы на всех уровнях образования в части предмета “Математика” использование компьютерных инструментов математической деятельности» [2].

В коллективной монографии [3] решение этой задачи предлагается осуществить через выделение в содержании школьного курса математики содержательно-методологической линии экспериментальной математики. В ней доказывается, что на старшей ступени общего образования содержание этой линии должно быть ориентировано на формирование у учащихся способностей к мысленному экспериментированию.

Данная способность, как свидетельствуют результаты многих методологических и психологических исследований (М.К. Мамардашвили, Л.М. Фридман, Д. Пойа и др.), является важной составляющей математического стиля научного мышления. Она интегрирует в себе воз-

возможности, предоставляемые эмпирическим и абстрактно-теоретическим уровнями познания, и широко используется при проведении правдоподобных рассуждений.

Именно такие рассуждения и лежат в основе изучения начал математического анализа в школе. Ярким примером является концепция А.Г. Мордковича, который утверждает, что «сложное математическое понятие должно постепенно изучаться в учебном процессе: сначала на наглядно-интуитивном уровне, потом на рабочем (описательном) уровне и только после этого можно выходить на формальный уровень» [4, с. 30].

В школьных учебниках алгебры и начал математического анализа применение идеи и методов представлено на описательном уровне.

Пример 1. Фрагмент описательного текста с рисунками 1, 2 из учебника А.Г. Мордковича (базовый уровень) [5, с. 158].

«Дана кривая L (рис. 1), на ней выбрана точка M . Возьмем еще одну точку на этой кривой – точку P . Проведем секущую MP . Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M . Секущая MP будет изменять свое положение (MP , MP_1 , MP_2 и т.д.), она как бы поворачивается вокруг точки M . Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую – предельное положение секущей – называют **касательной к кривой L в точке M** .

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y=x^2$, проведите секущую OP , где O – вершина параболы, P – произвольная точка параболы. Возьмите точку P_1 поближе к O , проведите вторую секущую. Возьмите точку P_2 еще ближе к O , проведите третью секущую и т.д. Вы обнаружите, что предельным положением для построенных секущих будет ось x – это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям)».

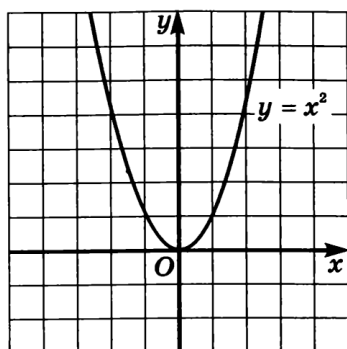


Рис. 1

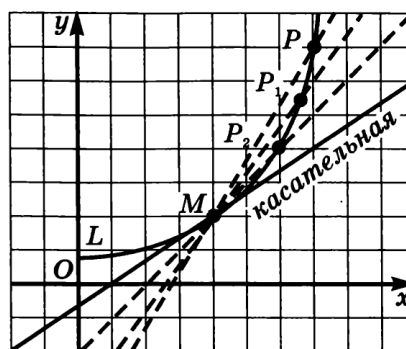


Рис. 2

Приведенный пример показывает, что эти описания апеллируют к способности ученика провести мысленный эксперимент. Это значительно проще, чем восприятие строгих определений или доказательств. Однако, как показывает практика, далеко не все учащиеся обладают этой способностью. В основной школе им приходилось проводить мысленные эксперименты, но основой их выступали статичные математические объекты. Они могли быть представлены чертежом или символической записью. При изучении начал математического анализа необходимо экспериментировать с динамичными объектами, бесконечными процессами, каждому этапу которых соответствует свой статичный образ.

Для развития способности учащихся к проведению таких мысленных экспериментов, на наш взгляд, хороши компьютерные эксперименты с динамическими моделями. Динамическая модель, изменяясь во времени, дает ученику наглядную опору для создания образа бесконечного процесса, тем самым облегчая мысленное экспериментирование.

Пример 2. Задание на экспериментирование с динамической моделью в рамках содержания примера 1.

Исследуйте с помощью GeoGebra характер изменения углового коэффициента h секущей, проходящей через точку M_0 с абсциссой $x_0=1$ к графику функции $y = x^3 - 3x + 4$ в зависимости от абсциссы точки M_1 [6].

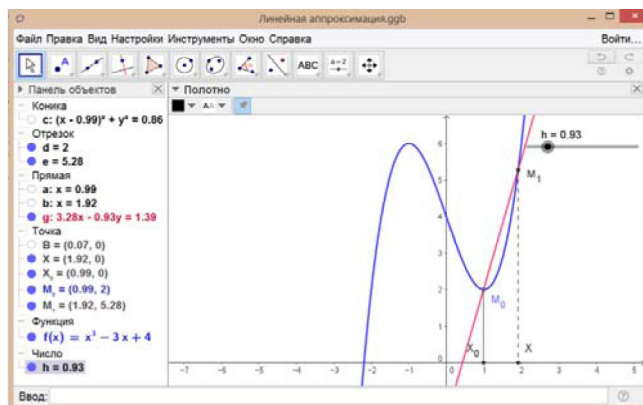


Рис. 3. GeoGebra. Эксперимент с секущей к графику функции

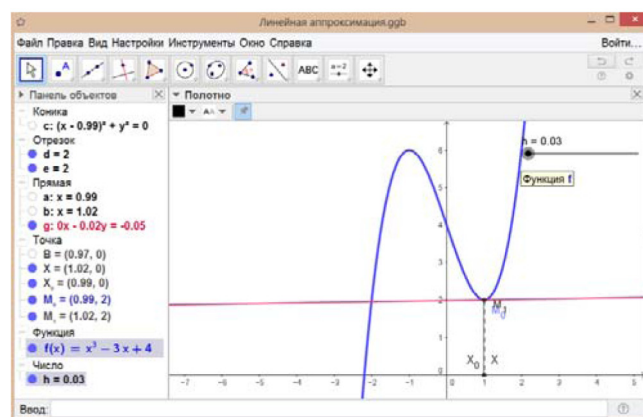


Рис. 4. GeoGebra. Предельное положение секущей к графику функции

Подобные задания по всем темам курса Алгебры и начал анализа объединены нами в компьютерный лабораторный практикум [7]. Это обеспечивает учащимся возможность овладеть мысленным экспериментированием при освоении на наглядно-интуитивном уровне различных идей и методов математического анализа: предельного перехода, метода исчерпывания, метода линеаризации (линейной аппроксимации), метода интерпретации и др.

Библиографический список

1. Концепция развития математического образования в РФ [Электронный ресурс]. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/3894/файл/2730/Концепция> (дата обращения: 31.05.2015).
2. Резолюция III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование». 17–18 ноября 2015г. // г. Новосибирск [Электронный ресурс]. URL: http://www.minobr.nso.ru/sites/minobr.nso.ru/wodby_files/files/imce/rezolyuciya_sezda_0.pdf (дата обращения: 30.06.2016).
3. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов, М.А. Павлова, А.Е. Томилова, Л.В. Форкунова, Л.Н. Удовенко, Н.Н. Новоселова, Н.И. Фомина и др. М.: Издательский дом «Академия естествознания», 2016. 300 с.
4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: методическое пособие для учителя. 10–11 классы. М.: Мнемозина, 2000. 126 с.
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: в 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / 14-е изд., стереотип. М.: Мнемозина, 2013. 400 с.
6. Фомина Н.И. Минипроекты и исследования с использованием GeoGebra при изучении темы «Производная» в школе // Труды XIII международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2015. С. 297–307.
7. Фомина Н.И. Компьютерный лабораторный практикум по алгебре и началам анализа // Материалы сборника IV Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 2015 / Отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2015. С. 115–121.

СЕТЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЧАЩИХСЯ РАЗНЫХ СТРАН ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ В ОБЛАСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ: ОПЫТ И ПЕРСПЕКТИВЫ

INTERNATIONAL STUDENTS' NETWORK FOR RESEARCH PROJECTS IN FIELD OF EXPERIMENTAL MATHEMATICS: THE EXPERIANS: EXPERIENCE AND PROSPECTS

М.В. Шабанова, Р.Ж. Атамуратова,
В.Н. Ненков, М.В. Белоруква

M. Shabanova, R. Atamuratova,
V. Nenkov, M. Belorukova

Исследовательская деятельность учащихся, международное сетевое взаимодействие, системы динамической геометрии, облачные технологии, геометрия, общее образование.

Развитие способности и готовности подрастающего поколения к реализации международных исследовательских проектов является одной из важных образовательных задач, определенных процессами глобализации научно-технического развития. Уровень развития современных информационных и коммуникационных технологий обеспечивает возможность решения этих задач за счет организации удаленного взаимодействия членов проектной группы. В статье описан опыт организации такого взаимодействия учащихся из трех стран – Болгарии, Казахстана и России – при подготовке исследовательского проекта «Геометрический Scrabble в облаках» в рамках подготовки к X международному конкурсу «Математика и проектирование». Исследования проводились в предметной поле экспериментальной математики с использованием систем динамической геометрии и профессиональных пакетов программ. Кроме того, в данной статье анонсируется новый сетевой проект «Пишем математическую энциклопедию сами» для организации взаимодействия учащихся при проведении исследований. Цель анонса – поиск среди ученых-математиков, преподавателей вузов и учителей математики будущих модераторов тематических разделов создаваемой учащимися электронной математической энциклопедии.

Students' research, international network collaboration, dynamical geometry software, cloud services, geometry, secondary education.

The main goal of education in the process of globalization science and technology is developing students' abilities to international collaboration and networking during realization of a research project. Level of development information and communication technologies allows to students interact at a distance. The experience of organizing international collaboration of students in research project was described in this paper. Students from Bulgaria, Kazakhstan and Russia participated in this project. The name of this project is «Geometry Scrabble in cloud». Students formulated and solved of experimental mathematics problems. They used dynamical geometry software and professional programs. They have presented results of the project on X international competition "Mathematics and projecting". Also this paper announces the new network project « We are writing of the mathematical encyclopedia by yourself». The goal of the announcement is recruitment of moderators for development of this encyclopedia.

Сегодня широкое распространение в научном мире получают такие формы совместной работы ученых из разных стран, как международные исследовательские проекты. Они реализуются как на коммерческой основе при грантовой поддержке различных международных и национальных фондов, так и на основе соглашений о сотрудничестве между научными организациями нескольких стран.

Участие в работе международных исследовательских групп требует особой подготовки, которая не ограничивается лишь овладением языка международного научного общения. Важными умениями являются: умение работать в команде, умение работать в условиях территориальной разобщенности с использованием возможностей, предоставляемых современными ин-

формационными и коммуникационными технологиями. Возможности для приобретения этих важных умений предоставляют сетевые международные исследовательские проекты.

Организация таких проектов непростая задача. Нужно:

- определить, какой состав команды будет наиболее работоспособным;
- найти способ мотивации каждого члена команды к максимальной отдаче;
- распределить роли и сферы ответственности между участниками;
- определить правила и способы взаимодействия членов команды друг с другом;
- наметить порядок работы и отчетов о результатах выполнения заданий.

Для решения этих проблем мы решили использовать форму сетевой компьютерной игры с тремя коллективными участниками.

Компьютерную игру мы назвали «Геометрический Scrabble в облаках». Это название должно было подчеркнуть, что исследование будет связано с постановкой и решением геометрических задач, правила игры будут заимствованы из игры в Scrabble (Эрудит), а для организации взаимодействия участников будет использован облачный сервис Google. Выбор Google-диска как места общего хранения и обработки информации был сделан из следующих соображений: этот сервис доступен во всех странах, он включает облачную версию GeoGebra в качестве приложения. Сегодня этот ресурс выглядит следующим образом (рис. 1).

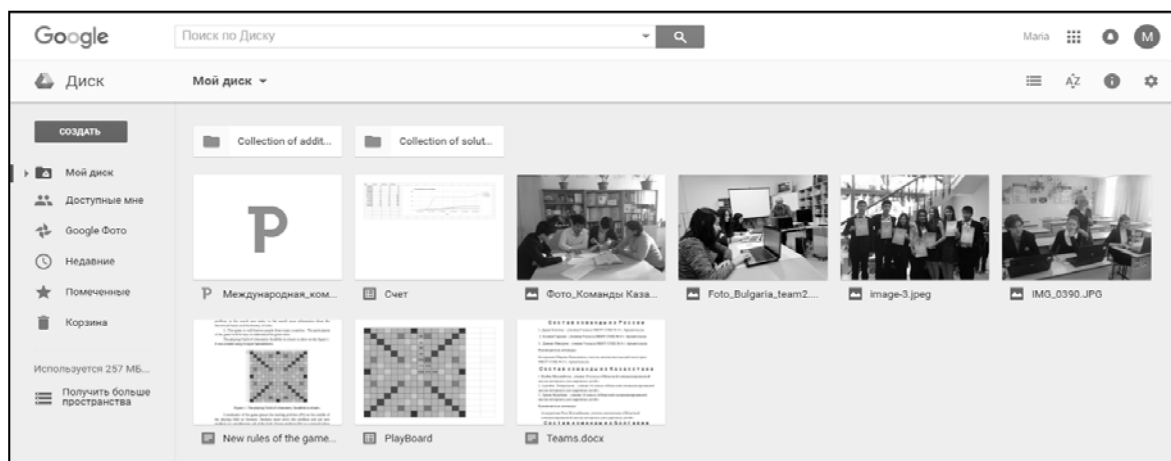


Рис. 1. Облачный ресурс игры «Геометрический Scrabble в облаках»

Создание ресурса началось с построения электронной модели игрового поля Scrabble. Для этой цели использовалась Excel-Google Таблица. Затем были определены правила игры, выполнено описание правил на русском и английском языках и их размещение отдельным файлом на том же диске. Они являются производными от правил игры Scrabble (более известной в России как игра «Эрудит»).

Играют три национальных команды – три коллективных игрока (по три человека в каждой команде). Команда, набравшая за время игры наибольшее количество очков, получает право принять участие в финале международного конкурса «Математика и проектирование» в полном составе. Команда, занявшая второе место, имеет право направить на конкурс двух человек. Третья команда – одного человека.

В определенный день и час координатор игры открывает доступ командам к облачному ресурсу. На игровом поле (в его центральной клетке) он размещает стартовую задачу. Она может быть любой, лишь бы ее условие предоставляло учащимся достаточно возможностей для вариаций.

В качестве стартовой была использована задача: «Отрезок АВ разделен произвольной точкой С на две части (рис. 2). На каждой из этих частей как на стороне построены правильные треугольники АМС и СNB, лежащие в одной полуплоскости. Найдите, какую траекторию при перемещении точки С по отрезку АВ опишет точка Т – точка пересечения биссектрисы угла МСN с отрезком MN».

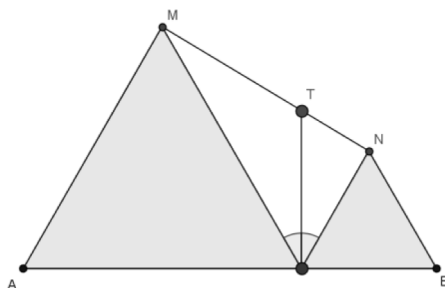


Рис. 2. Стартовая задача (P0)

Участники из Болгарии, Казахстана и России должны были решить ее и поставить на ее основе новую задачу. Характер связи новой задачи со стартовой определял ее позицию на игровом поле: если новая задача изменяет геометрическую конструкцию исходной, то она размещается над стартовой; если представляет собой обобщение исходной – то справа от нее если состоит в поиске особого частного случая стартовой задачи – то слева; если ставит новый вопрос относительно свойств конфигурации – то снизу. Последующие задачи должны быть связаны указанным образом со всеми ранее поставленными. За постановку задачи, ее аналитическое или компьютерное решение, предъявление дополнительной информации историко-научного или прикладного характера команды получали баллы. Цвет поля, на котором размещена задача, как и в игре Scrabble, определял весовое значение полученных баллов.

Динамика накопления баллов командами фиксировалась в специальном файле, также размещенном на облачном сервисе.

В результате участники сетевого проекта смогли составить и решить 17 задач (рис. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	■														
2		■							P17						
3			■						P12						
4				■					P9						
5					■				P10						
6						■			P2	P8	P14				
7									P1	P11	P16				
8									P0	P6	P7	P15			
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															

Рис. 3. Состояние игрового поля в конце игрового периода

Наиболее интересные из поставленных учащимися задач были опубликованы в журнале «Математика и Информатика» Болгарской академии наук в качестве конкурсных задач для читателей журнала. Приведем их здесь.

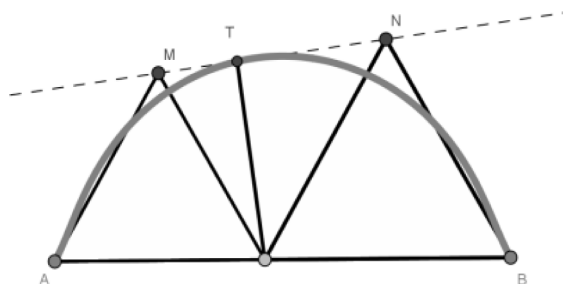


Рис. 4.

1 (задача составлена командой из России, решена командой из Болгарии). На отрезке AB отмечена произвольная точка C. На отрезках AC и CB как на сторонах построены равносторонние треугольники ACM и CBN, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB. Точка T – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую MN. Найдите, какую траекторию опишет точка T при перемещении точки C по прямой AB.

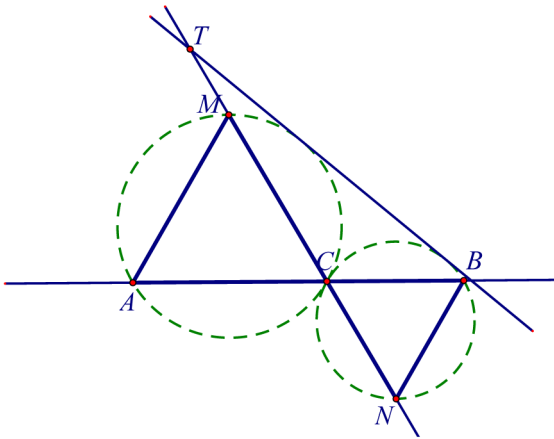


Рис. 5.

2 (задача составлена командой из Казахстана, решена командой из России). Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей как на стороне построены правильные треугольники AMC и CNB , лежащие в разных полуплоскостях. Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T – точка пересечения общей касательной описанных около этих треугольников окружностей с прямой MN (рис. 5).

3 (обобщение стартовой задачи получено и решено командой из Болгарии). Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей как на стороне построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости и имеющие углы при основании AC и BC соответственно α и β . Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T , которая находится на прямой MN и выполнено соотношение $\frac{MT}{NT} = k \cdot \frac{CM}{CN}$, где $k \neq 0$ произвольное действительное число.

Последняя из представленных задач оказалась наиболее трудной, так как вид геометрического места точек оказался не постоянным. Это обнаружилось сразу в ходе компьютерного эксперимента при построении локуса (рис. 6, 7 и 8). Аналитические исследования позволили выделить условия, при которых искомое геометрическое место точек является кривой второго порядка определенного вида.

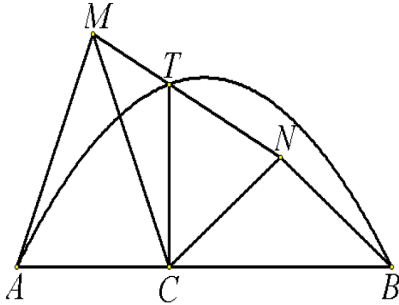


Рис. 6. Парабола, если

$$k = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

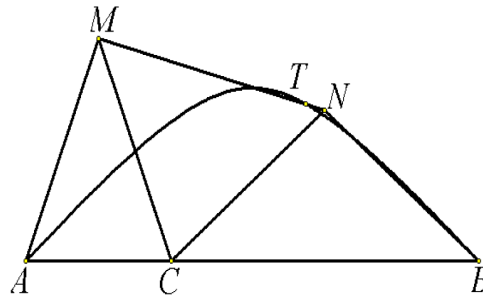


Рис. 7. Гипербола, если

$$k \neq \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ и } k \neq -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

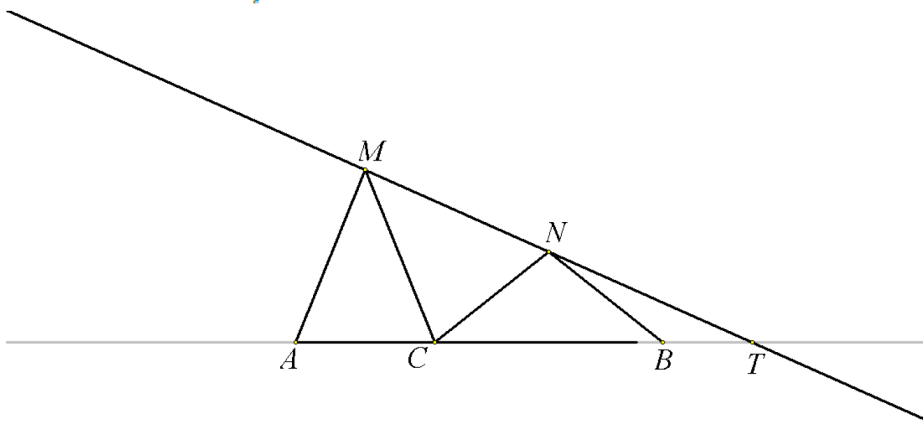


Рис. 8. Двойная прямая, если $k = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

Компьютерные эксперименты проводились с использованием GeoGebra и The Geometer«s Sketchpad. На заключительных этапах возможностей этих программ стало не хватать, тогда учащиеся перешли на использование Maple.

Для аналитического решения поставленных задач учащимся пришлось расширить школьные знания в области аналитической геометрии. Существенно расширить свои знания смогли ученики из Болгарии и Казахстана. Они узнали, что бывают кривые невырожденные и вырожденные. Научились определять различия между ними. Узнали, что такое инвариант и как его получить. В этом им помогали преподаватели – руководители команд. Следует отметить, что сетевое взаимодействие было организовано среди учащихся разных возрастов и различной математической подготовки. Это дало следующий неожиданный эффект. Учащиеся в ходе межгруппового взаимодействия на определенном этапе отказались от соревнования. Младшие участники (ученики 9 класса из России) не могли больше справиться самостоятельно с аналитическим решением поставленных задач. Погрустив немного, занялись экспериментальной проверкой корректности задач и правильности результатов, полученных старшими участниками (из Болгарии, 11 класс и Казахстана, 10 класс).

Интересным с точки зрения взаимодействия был и этап подготовки к совместному докладу на конкурсе «Математика и проектирование». Здесь учащимся необходимо было принять ряд совместных решений для того, чтобы наиболее выигрышно представить результаты работы не каждой группы в отдельности, а международной команды в целом. Какие задачи выбрать? Как представить процесс их решения и полученный результат? Кто какие задачи будет представлять? В каком порядке будут выступать отдельные участники? На каком языке будет проходить защита проекта?

Сегодня эта команда продолжает работу, но уже в рамках сетевого проекта, реализуемого по иному сценарию.

Хотелось озвучить наши планы и в организации третьего проекта, который, по нашему замыслу, сможет вовлечь в исследовательскую деятельность и образовательное взаимодействие неограниченное число участников. Проект называется «Пишем математическую энциклопедию сами». Он заключается в организации взаимодействия ученых-математиков с учителями и школьниками, которое создаст условия для освоения учащимися методологии исследовательской деятельности в стиле экспериментальной математики и не только, повысит ответственность всех участников взаимодействия за результаты исследовательских проектов учащихся, позволит дополнить конкурсную их оценку общественным признанием.

Суть проекта состоит в следующем. Создается интернет-ресурс – платформа для электронной математической энциклопедии. Платформа допускает развитие энциклопедии в трех направлениях: 1) накопление количества тематических коллекций математических результатов («Коллекция плоских кривых», «Коллекция задач сангаку», «Коллекция математических головоломок» и др.); 2) увеличение количества экспонатов каждой коллекции; 3) расширение знания о каждом объекте (задач, приводящих к появлению визуализаций, свойств и т.п.). Стартом развития коллекции является постановка ученым или коллективом ученых перед учащимися задачи исследования с демонстрацией экспоната-образца. Решение поставленной задачи и ее модификация приводят к развитию коллекции в направлении № 3. Постановка новых задач в рамках этой коллекции – к развитию коллекции в направлении № 2. Результаты учащихся принимаются к публикации на сайте энциклопедии только при наличии рецензии специалиста (кандидата или доктора физико-математических наук). Информация о рецензентах публикуется на сайте вместе с результатами. Кроме того, там размещается информация о ближайших конференциях и конкурсах исследовательских работ, где учащиеся могут представить свои результаты. Для дополнительной мотивации предполагается использовать элементы геймофикации.

Опубликованный в коллекции результат будет иметь статус препринта, вынесенного на обсуждение. Сегодня подобная практика уже получила широкое распространение в научном сообществе.

По нашему мнению, такой ресурс позволит существенно повысить не только качество подготовки учащимся своих исследовательских проектов за счет обмена опытом и совместной работы ученых и учащихся, но и создаст прецедент для решения наиболее болезненного вопроса о плагиате или представлении на конкурсы различного уровня реферативных работ.

КАК ПРИБЛИЗИТЬ СТРАНИЦЫ УЧЕБНИКА К РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

HOW TO LINK A COURSE BOOK OF MATH WITH TASKS FROM REAL LIFE

О.И. Смышляева

O.I. Smishlyeva

Практическая направленность уроков, задача, функция, производная, среда GeoGebra, проценты.

В данной статье представляется опыт учителя математики Смышляевой Ольги Ивановны. На двух примерах показывается, как можно решать задачи по теме урока, но брать упражнения не из учебника, а практического содержания, максимально приближая к реальной жизни.

The practical orientation of lessons, a Math task, a function, derivative, Wednesday GeoGebra, a percent.

In this article Smishlyeva Olga Ivanovna presents her experience as the teacher of Mathematics. There are two examples which show how to solve problems based on the topic of the lesson, yet they are taken not from the course book, but from real life.

Хорошее математическое образование и развитие математических способностей необходимо не только тем, кто впоследствии займется научными исследованиями, но и тем, кто станет трудиться в качестве инженеров, экономистов, рабочих, военных специалистов. Математический стиль мышления, умение рассуждать строго необходимы также будущим врачам и юристам, историкам и биологам, агрономам и лингвистам.

Сказанное показывает, как важно добиться того, чтобы математика превратилась в дисциплину интересную и доступную для подавляющего большинства школьников. Умение учиться не приходит само собой, а требует специальной подготовки, серьезных усилий со стороны учащихся и учителей.

Для учителя основное – вызвать интерес учащегося к своему предмету, непрерывно его поддерживать и научить учиться. Нужно показывать не только стройность математики, но также ее связи с другими науками, широту её применений. Школьник должен каждый день получать подкрепление убеждения в том, что математика является не только одной из дисциплин Единого государственного экзамена, но и орудием для последующей работы, для решения многочисленных задач в повседневной жизни. Практическая направленность уроков, исторические экскурсы, деятельностный подход к обучению помогают решить эту задачу.

Например, в 10 классе на завершающем уроке по теме «Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин» мною были предложены учащимся следующие аналоги задач № 46.57, №46.59, 46.48 из учебника «Алгебра и начала математического анализа 10, профильный уровень» (авторы А.Г. Мордковича, Л.О. Денищевой и др.). Учащимся выдается карточка с устным комментарием примерно такого содержания: «Представьте, что прошло лет 10, вы закончили не только школу, но и университет, у вас семья. Вы приобретаете садовый участок, строите баньку. Ведь какое удовольствие провести выходные на природе с семьей, друзьями! Но у молодой семьи скромный бюджет. Мы будем подходить к решению поставленных задач с точки зрения разумной экономии».

Задача 1. В саду нужно выделить участок для детской игровой площадки прямоугольной формы площадью 100 м^2 , огородить забором из штакетника, потратив на это как можно меньше средств.

При обсуждении решения задачи 1 выясняем, что учащиеся понимают под экономией в вопросе огораживания забором участка. Это точно не бракованный штакетник, купленный по низкой цене; играет роль расстояние между штакетинами. Поступают разные предложения,

и наконец кто-нибудь из ребят предлагает рассчитать размеры участка, при которых периметр будет наименьшим при конкретной площади, а раз так – то и штaketника потребуется меньше. Учащиеся сами задают условия оптимизации и решают задачу. «Пусть x м – длина игровой

площадки, тогда $\frac{100}{x}$ м его ширина. Периметр участка равен $2(x + \frac{100}{x})$ м. Рассмотрим функцию $f(x) = 2(x + \frac{100}{x})$ и выясним, при каких x она принимает наименьшее значение». Исследуя функцию

через ее производную, выясняем, что оптимальными размерами игровой площадки будут размеры 10×10 , то есть площадка должна быть квадратной.

Задача 2. В бане нужно установить закрытый бак с квадратным дном, вмещающий 50 литров воды. Стоимость бака зависит от расхода металла. Каков наименьший расход металла?

При обсуждении второй задачи может быстрее появиться предложение о том, что не мешало бы рассчитать размеры бака, при которых площадь поверхности наименьшая, а объем равен 50 литрам. А если есть в классе ученик, увлекающийся физикой, то он может предложить экономичный бак цилиндрической формы из более тонкого металла, который хорошо держит форму, прочность конструкции, но будет легче, а значит, затрат на его изготовление будет меньше.

Задача 3. От ворот садового кооператива до шоссе по кратчайшему пути ведет асфальтированная дорожка в один километр, по которой можно идти со скоростью 5 км/час. Выйдя на прямолинейное шоссе, до автобусной остановки по обочине нужно пройти еще восемьсот метров со скоростью 3 км/час. Но можно пройти по асфальтированной дорожке некоторое расстояние, а затем свернуть с нее и пройти напрямую к остановке по луку с той же скоростью, что и по обочине шоссе. На каком расстоянии от ворот следует сойти с асфальтированной дорожки, чтобы во втором случае затратить наименьшее время?

Эта задача является завершением «садовой» тематики и решает тоже житейский вопрос: «Как рассчитать траекторию движения из сада, чтобы затратить меньше времени на дорогу домой?» Вопрос злободневный на сегодняшний день. По ходу решения задачи обсуждаем, как правильно двигаться вдоль шоссе, если нет пешеходной дорожки. Это будет небольшим воспитательным моментом по формированию культуры поведения на дороге.

Решая эту задачу, целесообразно построить анимационный чертеж, который помог бы экспериментально найти ответ на поставленный вопрос. Построим анимационную модель задачи в среде GeoGebra (см. [2]).

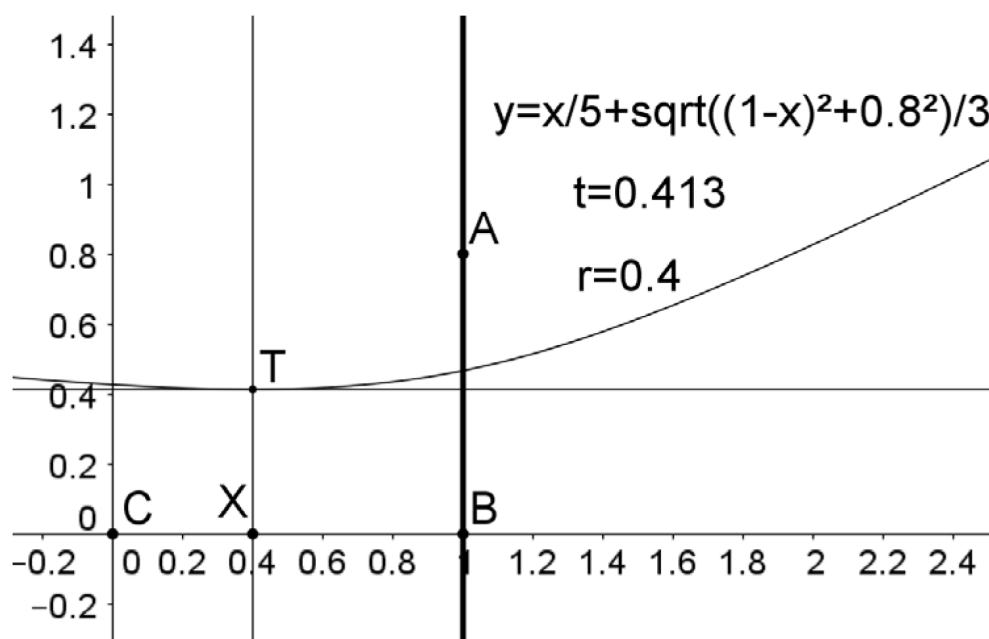


Рис. 1

Построение

1. Строим точки: $C = (0,0)$ (изображает начало пути от садов), $B = (1,0)$ (она изображает пересечение асфальтовой дорожки с шоссе), $A = (1,0.8)$ (изображает автобусную остановку на шоссе AB).

2. Строим отрезок BC и отмечаем на нем точку X – точку схода с асфальтовой дорожки. Строим отрезок XA – путь по лугу.

3. Отмечаем отрезок CX и на Панели объектов видим его длину – искомую величину r . Строим точку $T = (r,t)$ и заставляем ее оставлять след. При анимации точки X точка T будет вычерчивать график зависимости затраченного времени от положения точки схода на луговую дорожку. Для обнаружения наименьшего значения функции строим ее график и касательную в точке T .

Итак, $CB = 1$, $CX = r$, $XB = 1 - r$, $BA = 0.8$. Тогда $XA = \sqrt{(1-r)^2 + 0.8^2}$. Затраченное время на отрезке CX равно $\frac{r}{5}$, а на отрезке XA равно $\frac{\sqrt{(1-r)^2 + 0.64}}{3}$. Общее время равно величине $t = \frac{r}{5} + \frac{\sqrt{(1-r)^2 + 0.64}}{3}$. Вводим эту величину (строкой ввода). Построение закончено.

Делаем надписи: записываем функцию зависимости затраченного времени от абсциссы точки X , затраченное время t и искомое расстояние r .

Включаем анимацию точки X и выключаем ее в тот момент, когда касательная станет параллельна оси абсцисс. В это время затраченное время t будет наименьшим и искомое расстояние r будет найдено. Можно спрятать (сделать невидимыми) график функции, касательную и точку T , а отслеживать время по записи на экране. В нашем случае искомое расстояние и время видим на рис. 1: $r = 0.4$ км, $t = 0.413$ час.

После экспериментального решения задачи приступаем к обычному решению с помощью производной, исследуя функцию $y = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + 0.64}}{3}$. Теперь оно пройдет более осмысленно.

В 2015 году на ЕГЭ была предложена банковская задача, с которой не справились многие даже хорошо подготовленные учащиеся. В наши дни многие люди обращаются в банк, кто-то является вкладчиком, кто-то заемщиком. Поэтому целесообразно начинать знакомить учащихся с решением несложных банковских задач, научить понимать систему работы банков – выдача кредитов, выплата процентных ставок по вкладам (имеем ввиду простейшие расчеты, терминологию) – уже в 9 классе при изучении темы «Геометрическая прогрессия», потому что именно при изучении этой темы появляются первые простейшие банковские задачи. При этом решение практических задач целесообразно сопровождать анимационными чертежами, выполненными с помощью программы GeoGebra, которая наилучшим образом подходит для этих целей.

На одном из последних уроков по теме «Геометрическая прогрессия» учащиеся были ознакомлены с некоторыми банковскими терминами: «вклад», «кредит», «процентная ставка», «пролонгация», «капитализация вклада».

Обучающимся была предложена такая ситуация.

«Мы решили положить в банк 200000 рублей на 1 год. Когда нам могут потребоваться деньги, мы пока не определились. Нас привлекли два вида вклада. Какой вклад принесет нам большую прибыль? Первый вариант: вклад на год под 7,2 % годовых, ежеквартальное начисление прибыли, капитализация процентов, пролонгация. Второй вариант: вклад на 1 месяц под 6,8 % годовых, ежемесячное начисление прибыли, пролонгация, капитализации процентов нет». Обязательно обсуждаем, как ученики понимают «ежемесячное», «ежеквартальное» начисление.

Учащиеся делятся на две группы, и каждая группа ведет расчеты одного из вариантов вклада. Если возникают вопросы, я консультирую. Затем учащиеся представляют свои расчеты (первый вариант дает прибыль 14792 рубля, второй вариант – 13596 рублей).

Рассмотрим другую ситуацию. Нам потребовались деньги через 6 месяцев 10 дней. Есть условие: если вкладчик забирает деньги досрочно, но срок хранения денег более 6 месяцев, то прибыль исчисляется из расчета $\frac{2}{3}$ ставки по вкладу. Выясняем, в каком из вариантов произойдут изменения в форме расчетов и почему (в первом). Когда все разъяснено и понятно, учащиеся выполняют вычисления для второй ситуации. Затем каждая группа представляет свои выкладки (первый вклад дает прибыль 4829 рублей, второй – 6798).

В ходе урока учащиеся получили новую познавательную информацию, «поиграли» в банковских служащих, выяснили, что можно, зная условия вклада, самому рассчитать (хотя бы приблизительно) прибыль и правильно распорядиться своими деньгами.

Математику можно сделать интересной и понятной ученикам и нужной не только, чтобы сдать ЕГЭ, но и применять математические знания в реальной жизни. Необходимо показать учащимся, что математика позволяет строить математические модели реальных ситуаций и процессов.

Библиографический список

1. Мордкович А.Г., Денищевой Л.О. и др. Алгебра и начала математического анализа 10, профильный уровень: учебник и задачник. М.: Мнемозина, 2012.
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015 .
3. Сайт СБ РФ: www.sberbank.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ БЕЗОПАСНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

MATHEMATICAL MODELING IN THE STUDY OF THE SAFETY OF COMPLEX SYSTEM

А.Н. Роголев

A.N. Rogalev

Гарантированные границы, пороговые значения, сложные системы, математические модели, постоянно действующие возмущения.

Для построения гарантированных границ зон опасных состояний и пороговых значений параметров сложных систем, определяющих границы этих зон, в статье применяются математические модели и класс методов гарантированного оценивания множеств решений систем дифференциальных уравнений и множеств значений функционалов, построенных на решениях этих систем. Это применение гарантированных методов для оценивания областей решений рассматривает конечные, постоянно действующие возмущения. В класс подобных задач входят задачи проверки гарантированных условий безопасности и задачи построения множеств достижимости.

Guaranteed borders, thresholds, complex systems, mathematical models, constantly acting perturbations.

Mathematical models and methods of guaranteed estimation of solution sets of systems of differential equations are considered in the article.

These techniques build guaranteed border zones of dangerous states and threshold values of the parameters of complex systems, defining the boundaries of these zones under constantly acting perturbations. The problem of checking of security conditions and the problem of constructing sets of attainability are including in the article.

Введение

Системный анализ и математическое моделирование являются объединением идей и принципов исследования операций и методов теории управления с возможностями современных вычислительных методов [1–4]. Можно считать, что системный анализ и моделирование представляют этап развития этих дисциплин. Эти свойства системного анализа особенно явно проявляются в задаче исследования безопасности и надежности сложных систем. Надежность и безопасность сложных систем связаны с состоянием систем при анализе их функционирования. В зависимости от условий решаемой задачи один и тот же объект может рассматриваться как система, если учитываются внутренние связи его частей, или как элемент, если учитываются существующие либо возможные связи этого объекта с частями другого более сложного объекта. Понятия «система» и «элемент» взаимно заменяют друг друга в том плане, что каждый объект при решении одних задач рассматривается как система, а при решении других задач – как элемент, часть иного объекта (системы).

Система большой сложности имеет определенное множество состояний в некотором межпороговом пространстве состояний, в динамике изменения этих состояний выполняется исследование крайних точек, границ существования системы, при этом отыскиваются безопасные состояния в соответствии с основным законом систем большой сложности. Приближение к пороговым состояниям приводит к нарушению безопасности функционирования и разрушению систем.

Процедуры вычисления показателей надежности и безопасности существенно зависят от стадии жизненного цикла объекта в связи с различным объемом необходимой информации, которая имеется в распоряжении на соответствующей стадии. Сложность объектов (систем), задач, решаемых этими системами, требует эффективной автоматической диагностики функционального состояния систем. Многие технические объекты имеют модульную структуру и обладают конечным числом неисправностей.

Можно характеризовать два направления для анализа безопасности и надежности технических систем и объектов: первое – нахождение показателей аппаратурной надежности и безопасности элементов систем, второе – оценка надежности систем в целом по заданной структуре технической системы и показателям надежности элементов. Диагностика функционального состояния управляемых систем получила название «дифференциальная диагностика» [4]. В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и неисправных систем. Тогда функциональное состояние можно записать в виде системы с прямым управлением [4] или управлением по производным. Пусть все компоненты вектора состояния s возможно разделить на два множества: координаты системы (объекта) y_1, \dots, y_p и координаты управления z_1, \dots, z_q , где $p + q = n$.

Уравнения функционирования системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y, z), y(0, 0) = 0; \\ \frac{dz}{dt} &= g(y, z), g(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Поведение объекта управления задано уравнением $dy/dt = f(y, 0)$, а управляющее свойство – уравнением $dz/dt = g(0, z)$. Такие системы, описывающие движение корабля, начал рассматривать Н. Минорский в работе [4].

При проведении дифференциальной диагностики состояния технических систем можно выделить две самостоятельно решаемые задачи: контроль критерия неисправностей в системе и диагностирование произошедших неисправностей. Критерием наличия неисправностей в системе служит выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри заданной контролируемой поверхности. Возникающие в процессе управления неисправности приводят к тому, что управляющий сигнал формируется неправильно, и во многих случаях управление объектом уже не обеспечивает близости траектории $s(t)$ к некоторой программной траектории $s_{prog}(t)$.

В докладе описывается реализация важной части этого подхода к анализу безопасности и надежности технических систем – построение гарантированных границ множеств решений систем дифференциальных уравнений [5–9].

Пусть имеется управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), u(t)), \quad (1)$$

где векторная функция $f(t, u)$ определена для любых значений t векторной переменной $y(t)$ и любых значений управления u из области определения. Выбор возможных реализаций управляющих воздействий u стеснен ограничениями $u \in Q, t \in [t^0, T]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Для многих задач ограничения на воздействия могут носить только геометрический характер. Это значит, что в каждый момент времени $t \in [t^0, T]$ значение $u(t)$ может быть любым из некоторого выпуклого компактного множества Q .

Задача гарантированного оценивания состоит в определении множества состояний системы (или границ этого множества)

$$Y(t) = \bigcup_{y^0 \in Y^0} y(t, t^0, y^0). \quad (2)$$

Среди математических описаний подобных задач, основанных на оценке множеств достижимости, мы выделим задачи проверки гарантированных условий безопасности и задачи построения «выживающих» траекторий.

Для этого требуется проверить выполнение условий «выживаемости» $y(t) \in N$ при $t_0 \leq t \leq \eta$ и $Y(\eta) \in M$ для любого движения $y(\cdot)$, исходящего из точек области допустимых начальных позиций G^0 и заданных множеств N, M при переборе всех управляющих воздействий, удовлетворяющих ограничению $u \in Q$. Таким образом, предполагается, что неопределенные факторы в математической модели управляемой системы не имеют вероятностного описания, а известны лишь с точностью до множеств, их содержащих. Задача гарантированного оценивания состоит в описании множества решений системы (1) (траекторного пучка) и соответствующих сечений в момент времени t (сечений этого множества)

Алгоритм вычисления гарантированных границ решений состоит из нескольких шагов: реализующих построение символьной формулы решений, оценки области ее возможных значений и оценки глобальной ошибки. На i – м интервале по времени вычисляются векторы решения (всего n различных векторов при $k = 1, 2, \dots, n$)

$$\delta y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial y_k^0} = \frac{\partial \varphi_1(t^k, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)}{\partial y_k^0},$$

....

$$\delta y_n = \frac{\partial y_n}{\partial y_k^0} = \frac{\partial \varphi_n(t^k, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)}{\partial y_k^0}$$

для различных систем уравнений в вариациях первого порядка

$$\frac{d\delta y_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial y_j} \cdot \delta y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Всего систем (3) будет n экземпляров согласно значениям $i = 1, 2, \dots, n$.

Система (3) – это линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами

$\frac{\partial f_i(t, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial y_j}, i = 1, 2, \dots, n$. Постоянные коэффициенты получаются при подстановке в форму-

лы производных вычисленных значений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

На основе полученных значений производных записывается символьная формула решений как функций от начальных данных $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$:

$$s_i(y_1^0, \dots, y_n^0) = \varphi_i(y_{1,num}^0, \dots, y_{n,num}^0) + (y_1^0 - y_{1,num}^0)\delta y_1^0 + (y_2^0 - y_{2,num}^0)\delta y_2^0 + \dots + (y_n^0 - y_{n,num}^0)\delta y_n^0 +$$

$$+ 2(y_1^0 - y_{1,num}^0)(y_2^0 - y_{2,num}^0) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_1^0 \partial y_2^0} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(y_1^0 - y_{1,num}^0)^2 \delta z_1 + (y_2^0 - y_{2,num}^0)^2 \delta z_2 + 2(y_{n-1}^0 - y_{n-1,num}^0)(y_n^0 - y_{n,num}^0) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_{n-1}^0 \partial y_n^0} \right] +$$

$$\dots + (y_n^0 - y_{n,num}^0)^2 \delta z_n +$$

$$+ \dots$$

Приложения

1. Границы множеств решений управляемой системы ОДУ

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_2 + y_4,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_1 + y_3 + u_1,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_2 + 10y_4,$$

$$\frac{dy_4}{dt} = 2y_1 - 2y_3 + u_2,$$

описанной в работе [5], в которой приведены эллипсоиды, аппроксимирующие множества достижимости. На возмущающие силы u_1, u_2 наложено ограничение $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$. Расчеты проводились при $t \in [0, 4]$. Границы областей точных решений отмечены на рис. 1.

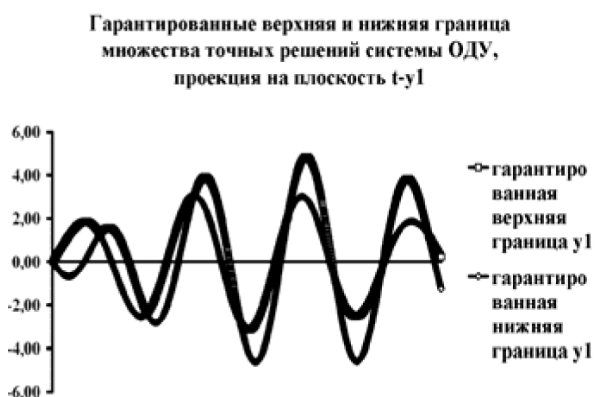


Рис. 1. Границы множеств решений – проекция на плоскость $t - y_1$

2. Области безопасности при противоаварийном управлении. При больших возмущениях в электроэнергетических системах (ЭЭС) возникают электромеханические переходные процессы, характеризующиеся взаимными движениями роторов синхронных машин в системе, существенными изменениями напряжений в узлах и токов в элементах ЭЭС. С электромеханическими переходными процессами связана проблема динамической устойчивости. Если динамическая устойчивость не нарушается, то взаимные движения роторов синхронных машин происходят в некоторой ограниченной области. В случае нарушения динамической устойчивости разности углов, определяющих пространственное положение роторов синхронных машин, неограниченно возрастают. При развитии аварийных ситуаций в сложных ЭЭС имеют место длительные переходные процессы, связанные с отклонениями частот в отдельных частях системы. При исследовании электромеханических переходных процессов система дифференциальных уравнений, описывающих динамику состояний ЭЭС, включает уравнения следующих динамических элементов системы: движения роторов синхронных и асинхронных машин; электромагнитных переходных процессов в обмотках роторов: динамики регуляторов возбуждения и скорости синхронных машин; динамики регуляторов возбуждения и скорости синхронных машин. Вычислялись границы множества решений в простейшей модели энергосистемы: станции – шины бесконечной мощности (рис. 3)

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -16.52(y_2 + 1.134)\sin(y_1 + 1.256) + 2.161\sin 2(y_1 + 1.256) + 16.05,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -0.257y_3 + 0.0674\cos(y_1 + 1.256) + 0.19u + 0.0235538.$$

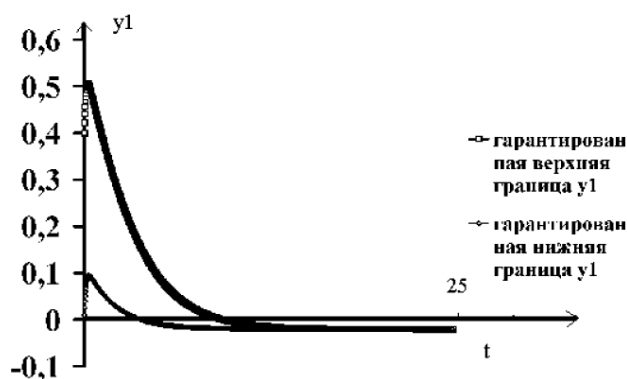


Рис. 2. Границы множеств решений – проекция на плоскость $t - y_1$.

Библиографический список

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. Киев: Наукова Думка, 1985.
2. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задач дифференциальной диагностики // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 775–790.
3. Воробцов С.П. Оценивание опасности полета самолетов в условиях сдвигов пространственного ветра // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 33–45.
4. Minorcsky N. Directional stability of automatical steering bodies // J. Amer. Soc. Naval. Engineers. 1922. V. 34. № 3. P. 113.
5. Рогалев А.Н. Исследование практической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Вычислительные технологии. 2003. Т. 7. Ч. 5. С. 148–150.
6. Рогалев А.Н. Гарантированные оценки и построение множеств достижимости для нелинейных управляемых систем // Вестник СибГАУ. 2010. № 5(31). С. 148–154.
7. Рогалев А.Н. Вычисление гарантированных границ множеств достижимости управляемых систем // Автометрия. 2011. Т. 47. № 3. С. 100–112.
8. Рогалев А.Н. Вопросы реализации гарантированных методов включения выживающих траекторий управляемых систем // Вестник СибГАУ. 2011. № 2(35). С. 54–58.
9. Rogalev A.N. Calculation of Guaranteed Boundaries of Reachable Sets of Controlled Systems // ISSN 8756-6990, Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, Allerton Press. 2011. V. 47. № 3. P. 287–296.

АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СРЕДЫ GEOGEBRA

INTRODUCTION TO THE GEOGEBRA

Е.В. Казакова

E.V. Kazakova

Анимационный чертёж, среда GeoGebra, экранная камера, приложение Bandicam, уроки математики.

В развитие статьи автора [1] для демонстрации анимационных возможностей среды GeoGebra с одновременным использованием экранной камеры создана серия анимационных моделей движений, задаваемых данными функциями. При этом используются идеи, заложенные в книге [2], а также некоторые материалы новой книги С.В. Ларина «Компьютерная анимация на уроках алгебры и начал математического анализа» [3].

Animation Drawing, Wednesday GeoGebra, the camera screen, the application Bandicam, math lessons.

The article describes the author created «Doing Wednesday GeoGebra», is a compact presentation of training material for beginners. The presentation is accompanied by demos. The possibilities of the camera screen.

1 Анимация в тригонометрии. Ключевым понятием тригонометрии является понятие числовой окружности. Созданный для усвоения этого понятия анимационный чертёж демонстрирует процесс наматывания числовой прямой на единичную окружность, превращая ее таким образом в числовую окружность (рис. 1). Наматывание положительного луча происходит по часовой стрелке, а отрицательного луча – по часовой стрелке. Анимационный рисунок 1 демонстрирует процесс наматывания отрезка числовой прямой на единичную окружность. Стрелки показывают путь перемещения точек.

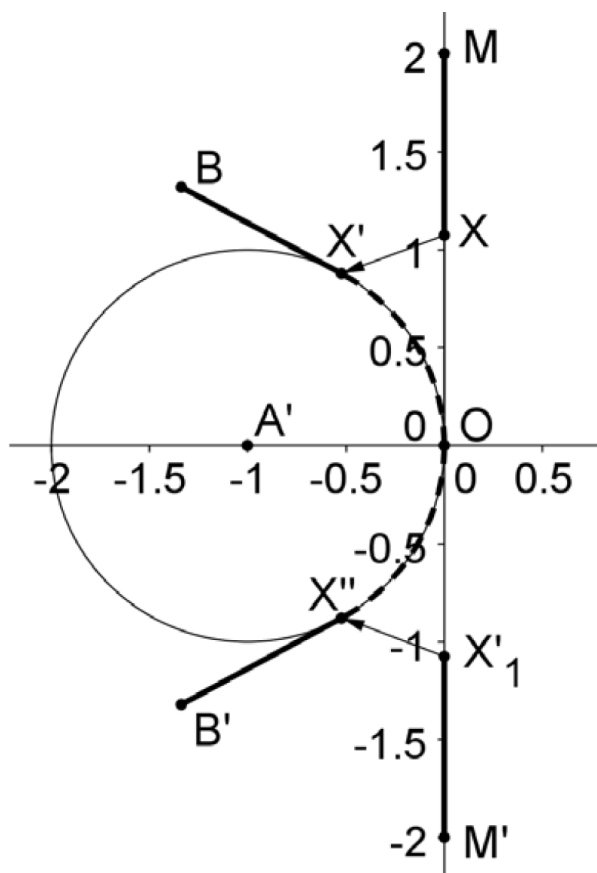


Рис. 1

С использованием процесса наматывания числовой прямой на единичную окружность построен анимационный рисунок вычерчивания синусоиды – графика функции $y = \sin x$ (рис. 2).

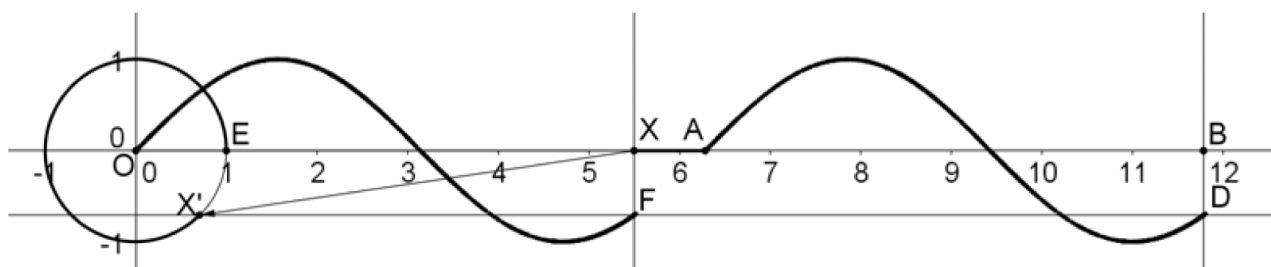


Рис. 2

Наконец, построена модель синусоидального движения (рис. 3).

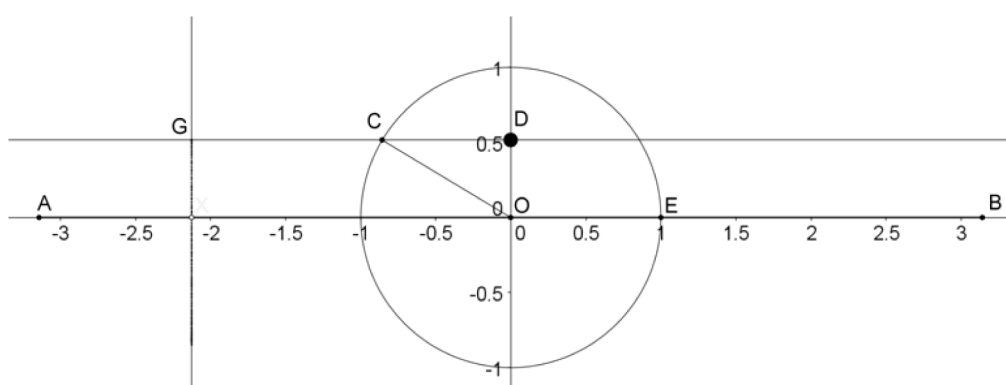


Рис. 3

Демонстрация созданных анимационных рисунков на уроках тригонометрии несомненно повысит интерес учащихся к изучаемому материалу и, как следствие, повысит уровень его усвоения.

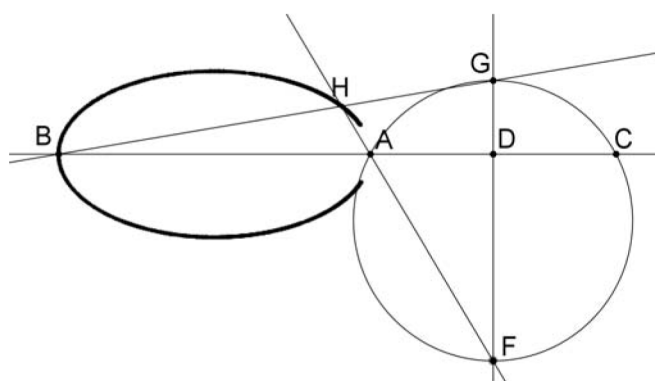


Рис. 4

2. Вычерчивание кривых второго порядка. На анимационном рисунке 4 изображена горизонтальная прямая и на ней точки A, B, C, D . Точка D является серединой отрезка AC . При анимации точки F точка H вычерчивает эллипс, если точка D располагается вне отрезка AB , и вычерчивает гиперболу в противном случае. Математическое объяснение этого наблюдаемого факта является серьезной математической задачей.

3. Возможности экранной камеры. Анимационные возможности среды GeoGebra

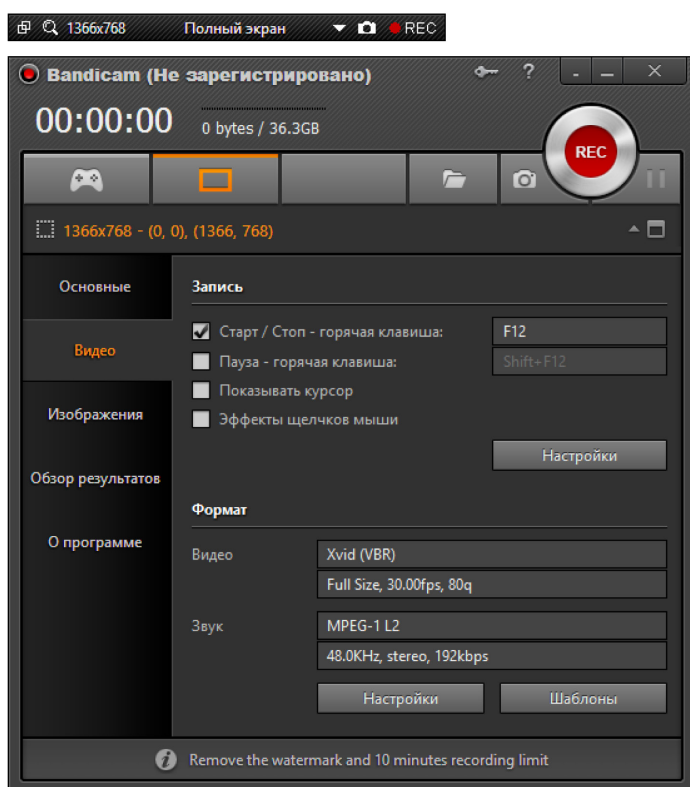
естественно дополнить использованием экранной камеры. Экранные технологии представляют собой подвид информационно-коммуникационных технологий и широко применяются при обучении подрастающего поколения. В образовательном процессе современные экранные технологии в основном реализуются с помощью следующих компонентов: компьютера или ноутбука, проекционной аппаратуры и сенсорного экрана или интерактивной доски.

Vandicam-приложение для захвата скриншотов, видео рабочего стола, игр, динамических сцен, онлайн-трансляций и др. Программа платная, и незарегистрированная версия имеет два ограничения: водяной знак, накладываемый на запись, и 10-минутный лимит съемки.

Присутствуют два основных режима записи: «Окно DirectX/OpenGL» и «Область экрана». В режиме захвата рабочего стола доступна специальная панель со сворачивающейся рамкой, здесь задаются размеры и пропорции видео. Перечень режимов выглядит следующим образом: полноэкранный, окно и фиксированный регион. Дополнительные параметры расположены во вкладке «Видео», секция «Запись»: показ курсора, эффекты и логотип, накладываемый на запись. В настройках записи также можно определить основное и дополнительное устройства для записи звука.

Bandicam сохраняет запись в контейнере AVI. Фактических ограничений на размер нет, разрешение видео может достигать до 2560x1600.

Сохраненные видео и изображения обнаруживаются в секции «Обзор результатов». Для правки можно использовать отдельный редактор Bandicut.



Из дополнительных особенностей можно отметить, что Bandicam также используется для съемки скриншотов в форматах BMP, PNG и JPG.

Экранная камера полезна, в первую очередь, тем, кому нужно быстро и просто записывать различные онлайн-трансляции: передачи, вебинары, переговоры по Скайпу, видео-уроки. Нашей задачей является совместное использование анимационных возможностей компьютерных сред и экранных технологий с целью создания продуктов, которые можно задействовать на уроках математики. Это, несомненно, повысит интерес к математике, внесет в нее движение, позволит приблизить математику к жизни, облегчит понимание. Создание такого дидактического материала затратно по времени. Но это тот случай, когда цель оправдывает средства. Ради достижения понимания математики, оживле-

ния ее, повышения интереса к ней не жаль потраченного времени. Созданный дидактический материал можно тиражировать и предложить к использованию креативному учителю.

Библиографический список

1. Казакова Е.В. Анимационное исследование числовых выражений с параметрами в среде GeoGebra // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием в рамках IV Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития», 18–19.11.2015.
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация на уроках алгебры и начал математического анализа: учебное пособие. ЭОР. КГПУ, электронная библиотечная система. 2016.
4. URL: <http://www.geogebra.org/cms/>
5. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
6. URL: <http://www.slideshare.net/marinmets/geogebra-1962501>
7. URL: <http://matematika88888.blogspot.com/2009/07/geogebra.html>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ «ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

THE USING OF GEOMETER'S SKETCHPAD FOR TASKS ON USE DESARGUES' THEOREM

Е.Е. Деттерер, И.В. Тиличиева

E.E. Detterer, I.V. Tilicheeva

Геометрия, теорема Дезарга, задачи на построение, СДГ «Живая геометрия», сечение многогранника, проективная геометрия, планиметрия, стереометрия.

В статье представлены примеры применения теоремы Дезарга в школьном курсе планиметрии и стереометрии. Рассмотрены способы решения геометрических задач с использованием системы динамической геометрии (СДГ) «Живая геометрия», указаны возможности и преимущества применения данной интерактивной среды.

Geometry, Desargues' theorem, task of building, the Geometer's Sketchpad, polyhedron-section, projective geometry, planimetrics, solid geometry.

This article presents examples of the using of Desargues' Theorem in school courses of planimetrics and solid geometry. Consider solving construction problems using the Geometer's Sketchpad, we describe the features and benefits of this interactive application.

Среди современных школьников геометрия не самый популярный предмет, для многих она сложна и непонятна. Очень многие теоремы и решения задач не проверяются на практике, что не делает обучение субъектным и не побуждает к собственным открытиям и творчеству.

К одному из мировых трендов современного школьного математического образования, позволяющих радикально повлиять на технологию обучения геометрии, алгебре и началам математического анализа в школе, без всякого сомнения, относятся компьютерные программы, предоставляющие возможность осуществлять «динамизацию» объектов, а следовательно, экспериментировать и делать открытия. С этой задачей отлично справляется СДГ «Живая геометрия», которая позволяет не только строить компьютерные модели фигур, проводить измерения и создавать собственные инструменты, но и видоизменять чертёж, перемещать его, сохраняя при этом целостность, свойства и иерархию зависимости элементов чертежа друг от друга.

Проективная геометрия не изучается в школьном курсе математики, однако та ее часть, которая реализуется в геометрических построениях одной линейкой и находит применение в задачах элементарной математики, прекрасно может быть представлена в виде элективного курса в 9 классе. Одной из центральных теорем проективной геометрии является теорема Дезарга, описывающая отношение «принадлежности» между точками и прямыми. Приведем один из вариантов ее формулировки.

Теорема Дезарга (прямая и обратная). *Два трёхсторонника (треугольника) имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.*

Выделяют следующие группы задач:

- задачи на построение;
- задачи на доказательство.

В качестве примера решения задачи на построение с использованием теоремы Дезарга рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Даны две различные параллельные прямые a и b и точка A , не лежащая на них. Через точку A проведите прямую, параллельную данным прямым (использовать только линейку).*

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться модификацией теоремы Дезарга на евклидовой плоскости. А именно: если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке S и две пары соответственных сторон этих треугольников параллельны, то и третья пара сторон лежит на параллельных прямых.

Процесс построения искомой прямой AA_1 можно реализовать с использованием СДГ «Живая геометрия» (рис. 1).

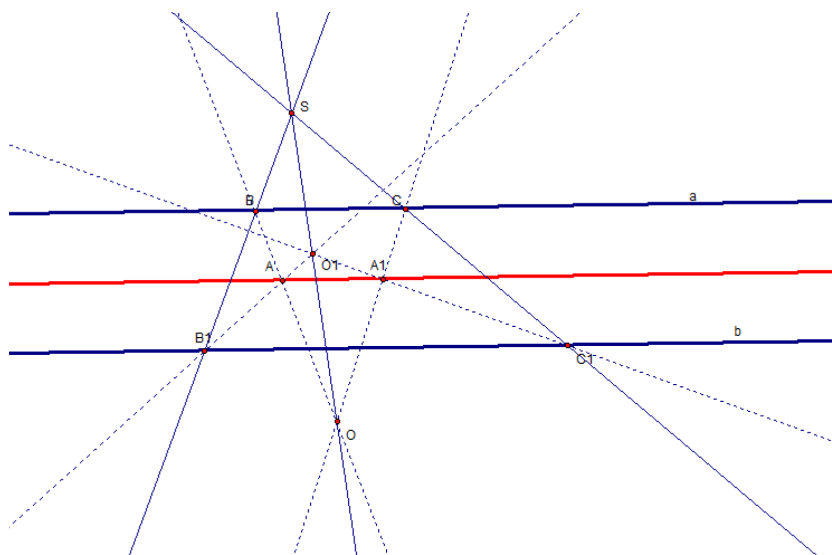


Рис. 1

В качестве примера задачи на доказательство рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Даны треугольник и три параллелограмма, для каждого из которых одна сторона треугольника служит диагональю, а две другие – смежными сторонами. Доказать, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

Таким образом, для данного $\triangle ABC$ требуется доказать, что $AN \cap BP \cap CM = S$, где N, P и M – соответственно вершины параллелограммов. Решение заключается в том, что $\triangle ABC$ и $\triangle NPM$ – дезарговы треугольники. А значит, точки пересечения соответственных прямых: $AB \cap NP = Q$, $BC \cap MP = R$, $AC \cap NM = K$ – лежат на одной несобственной прямой l и по теореме обратной теореме Дезарга $AN \cap BP \cap CM = S$ (рис. 2).

С помощью «Живой геометрии» учащиеся могут убедиться, что ситуация неизменна для любого вида треугольника.

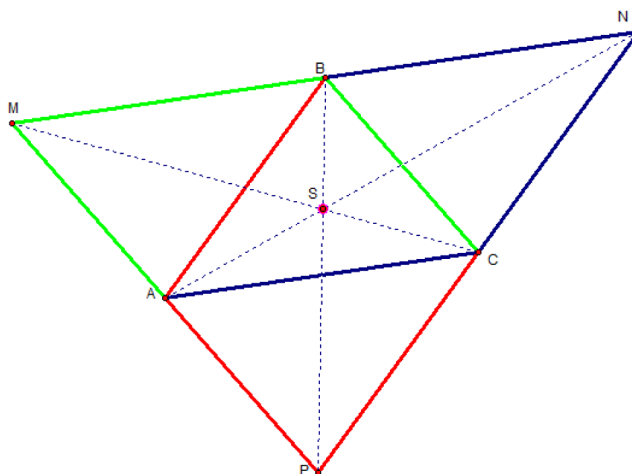


Рис. 2

В «Живой геометрии» можно решать задачи не только из курса планиметрии. Рассмотрим следующую стереометрическую задачу.

Задача 3. Дана пирамида $DABC$, ABC – основание. Постройте сечение пирамиды плоскостью, не параллельной основанию.

Для решения этой задачи необходимо рассмотреть евклидов аналог теоремы Дезарга для случая, когда рассматриваемые треугольники лежат в различных плоскостях.

Процесс построения сечения плоскости можно провести в СДГ «Живая геометрия», обосновывая их соответствующими аксиомами стереометрии или теоремой Дезарга:

1. Построим прямые AB , AC и BC , содержащие рёбра основания ABC данной пирамиды $DABC$ (рис. 3).

2. Проведём произвольную прямую n (будущий основной след секущей плоскости) так, чтобы она пересекала прямые AB , AC и BC . Обозначим точки пересечения прямой n с прямыми AB , AC и BC соответственно G , E и F .

3. Построим произвольную точку K на ребре CD , проведём прямую EK . Последовательно построим точки пересечения $EK \cap DA = J$, $FK \cap DB = I$.

4. ΔIJK – искомое сечение пирамиды $DABC$ (рис. 3).

Почему прямая IJ пересечет прямую n в точке G ? Это следует из прямой теоремы Дезарга.

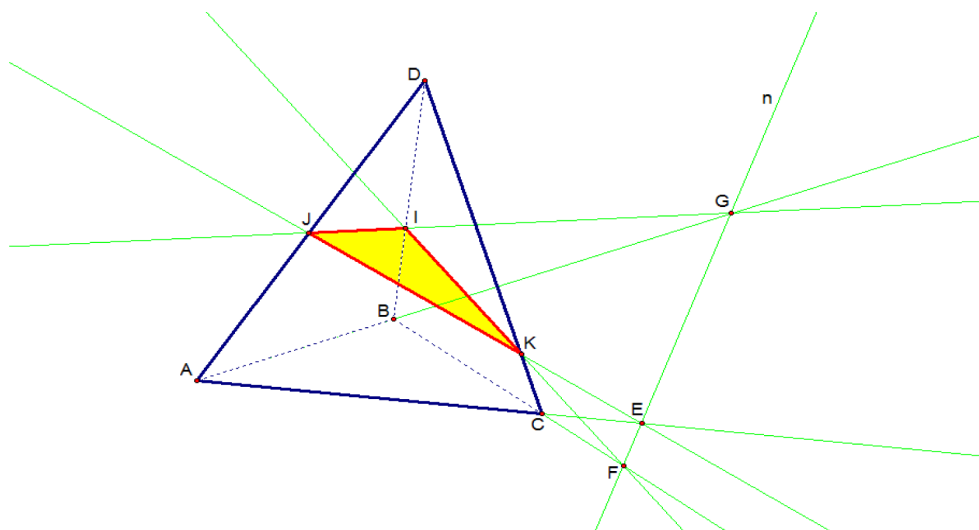


Рис. 3

Благодаря интерактивным возможностям среды «Живая геометрия» можно наглядно продемонстрировать, что данное построение справедливо для любой пирамиды с треугольным основанием и для любых произвольных K и n (Рис. 4).

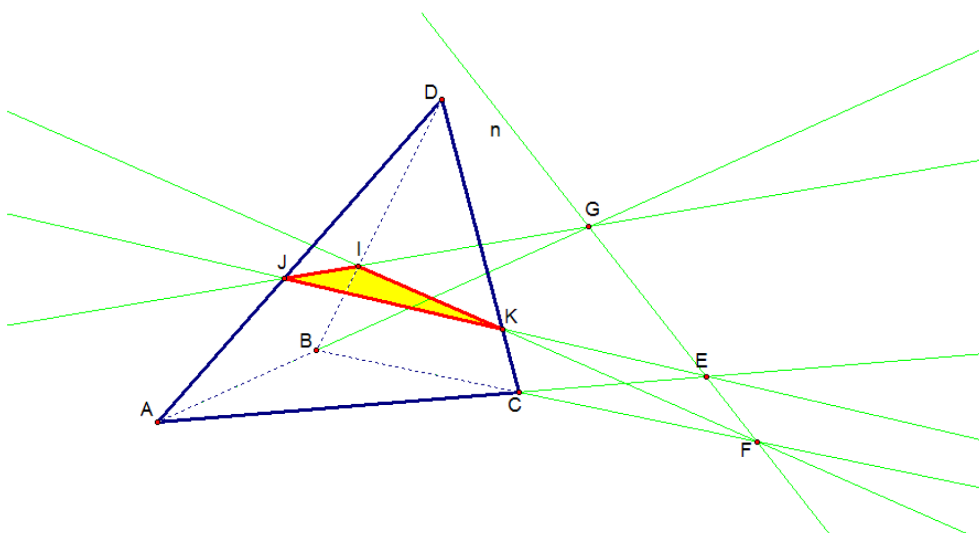


Рис. 4

Таким образом, мы продемонстрировали некоторые возможности программы, которые можно применять к решению задач на построения с использованием СДГ «Живая геометрия». Основными особенностями являются: возможность построения точного чертежа и динамическая интерактивная демонстрация многовариантности этих построений. Достаточно нажать курсор мыши и «потянуть» за ключевые точки, как сразу становится очевидна вся взаимная зависимость объектов чертежа. Это не только привлекает внимание учащихся на уроке, но и развивает пространственное мышление, поднимает мотивацию в обучении.

Библиографический список

1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001. 568 с.
2. Валов С.Ю. Использование электронных образовательных ресурсов в обучении школьников с низкой учебной мотивацией // Проблемы и перспективы образования XXI века. 2016. № 7. С. 70–73.

«ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» КАК СРЕДСТВО САМОКОНТРОЛЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ

THE GEOMETER'S SKETCHPAD AS A MEANS OF SELF-CONTROL IN THE PREPARATION OF PUPILS FOR UNIFIED STATE EXAM

Е.Ю. Чепикова, А.Ф. Жеребцова

E.Y. Chepikova, A.F. Zherebtsova

Геометрическое моделирование, система динамической геометрии, «Живая математика», динамический чертеж, Единый государственный экзамен.

Рассматриваются актуальные вопросы использования систем динамической геометрии при подготовке школьников к решению геометрических задач Единого государственного экзамена по математике. Как школьнику, использующему многочисленные пособия с решениями задач, в том числе и ошибочными, не оказаться на неверном пути? Можно ли в отдельных случаях с помощью компьютера осуществить верификацию алгоритма решения задачи, найденного ответа? В статье на примере рассмотрения одной математической задачи дается положительный ответ на этот вопрос. Предлагается второй способ решения этой задачи, сформулированной в более общем, параметрическом виде.

Geometric modeling, dynamic geometry, Geometer's Sketchpad, dynamic drawing, the unified state exam.

Discusses current issues of the use of dynamic geometry while preparing students to solving geometric problems of the unified state examination in mathematics. As a student, use the numerous benefits of the solutions of problems, including erroneous, not to be on the wrong track? Is it possible in some cases using a computer to carry out the verification of the algorithm of solving the problem, found the answer? The article on the example of processing a mathematical problem is given a positive answer to this question. It is proposed the second method of solving a similar problem, which is formulated in a more General, parametric form.

Следствием перехода российского общества к рыночной экономике и практически одновременно к такой форме итоговой аттестации школьников как Единый государственный экзамен (ЕГЭ) стало появление на книжных прилавках большого числа пособий, ориентированных на подготовку учащихся общеобразовательных учреждений к успешной сдаче экзамена по математике. Стремясь захватить рынок и выпустить как можно больше подобных пособий, не все авторы аккуратно и качественно вычитывают текст, некоторые издательства из соображения экономии не проводят экспертизу пособий. В результате этого отдельные учебные пособия содержат ошибочные решения математических задач, неверные ответы, некорректные чертежи и, увы, опечатки.

Что делать обучающемуся, если интуиция подсказывает ему, что содержащееся в пособии решение или обоснование той или иной геометрической задачи некорректно или ошибочно? Есть возможность обратиться к различным источникам информации, включая цифровые. Однако и там находится множество неверных и неточных сведений.

Молодое поколение XXI века тянется к новым технологиям, каждый школьник хочет соответствовать времени. Рынок образовательных IT-ресурсов предлагает учащимся большое количество обучающих программных средств, в том числе и по математике. Среди последних лидируют так называемые системы динамической геометрии (СДГ), которых в мире насчитывается более 50. СДГ «Живая математика» [2] – это цифровой образовательный ресурс, который сочетает в себе возможности для школьника находиться в интересной для него компьютерной среде и решать математические задачи любой сложности, включая исследовательские задачи и задачи с параметрами. Применение «Живой математики» предоставляет возможность не только сопроводить решение задачи безупречным динамическим чертежом, но и проверить правильность найденного решения.

Проиллюстрируем этот тезис на простом примере, взятом нами из пособия для подготовки школьников [1, с. 85, пример 48(А)].

Пример 1. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине B , $AC = 4$, $BC = 6$. Найдите длину AB .

Автор приводит достаточно подробное решение, основанное на использовании теорем синусов и косинусов. Отметим его основные этапы. По теореме синусов $4/\sin(\angle B) = 6/\sin(\angle A)$. Подставляем в правую часть этого равенства значение $\sin(\angle A)$ равное $\sin(2\angle B) = 2 \cdot \sin(\angle B) \cos(\angle B)$. После простейших тождественных преобразований получаем $\cos(\angle B) = 3/4$.

Обозначим длину искомой стороны AB через x . Используя теорему косинусов, составим квадратное уравнение, которое после упрощения примет следующий вид: $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Это уравнение имеет два положительных действительных корня: 4 и 5. Завершается разбор решения задачи тем, что автор пособия оба корня уравнения считает решением задачи. Комментируя свой выбор, он пишет: «Если $x = 4$, то $AB = 4$ и $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ – равнобедренный и прямоугольный, где $\angle B = \angle C = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$ ».

Такой выбор вызвал у нас сомнения. Ведь косинус угла в сорок пять градусов равен $\sqrt{2}/2$. Это число меньше $3/4$ – значения найденного выше косинуса угла B .

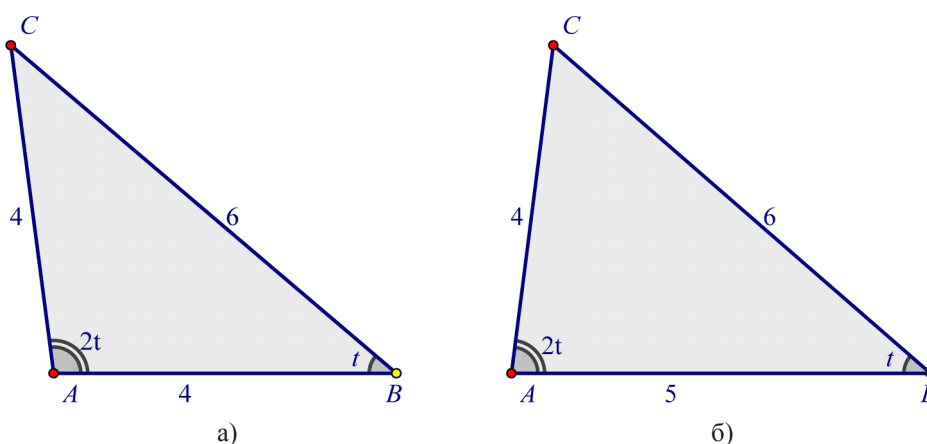


Рис. 1

Чтобы подтвердить свои сомнения, мы воспользовались средой «Живая математика». На рабочем поле этой среды были выполнены все необходимые построения. На рис. 1а представлен слайд, на котором построен треугольник ABC , соответствующий случаю $AB = 4$, на рис. 1б – случаю $AB = 5$. Выведенные с помощью меню «измерения» значения величин углов, представленные в левой части рис. 2 ($2\angle ABC < \angle BAC$), позволили сделать вывод о том, корень $x = 4$ нельзя считать решением задачи. В правой части рис. 2 представлены значения величин углов, соответствующие второму случаю $AB = 5$, который полностью соответствует условию задачи.

$AB = 4$	$\angle ABC = 41,41^\circ$	$AB = 5$	$\angle ABC = 41,41^\circ$
$\angle BAC = 97,18^\circ$	$2 \cdot \angle ABC = 82,82^\circ$	$\angle BAC = 82,82^\circ$	$2 \cdot \angle ABC = 82,82^\circ$

Рис. 2

Отметим, что проблема с выбором корней уравнения не возникла, если бы автор воспользовался теоремой косинуса для выражения квадрата стороны BC через две другие стороны и косинус угла A . Поскольку $\cos(\angle B) = 3/4$, то по известной формуле косинуса двойного аргумента $\cos(\angle A) = 1/8$. В этом случае соответствующее уравнение будет иметь вид: $x^2 - x - 20 = 0$. Единственный положительный корень этого уравнения – $x = 5$.

Чтобы изучить более обстоятельно обсуждаемую задачу, найти иные (не приводящие к квадратному уравнению) способы ее решения, определить ограничения на длины сторон

BC и AC, нами было рассмотрено обобщение примера 1 на случай параметрического задания сторон AC и BC треугольника ABC, предложено визуальное сопровождение решения задачи в среде «Живая математика».

Пример 2. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине B, $AC = b$, $BC = a$. Найдите длину стороны AB.

В новой концепции решения этой задачи мы решили отказаться от использования тригонометрии и обратили свое внимание на те свойства треугольников, которые, во-первых, более геометричны и, во-вторых, не приводят к уравнениям второй степени. Это подобие треугольников и свойство биссектрисы, проведенной из вершины треугольника.

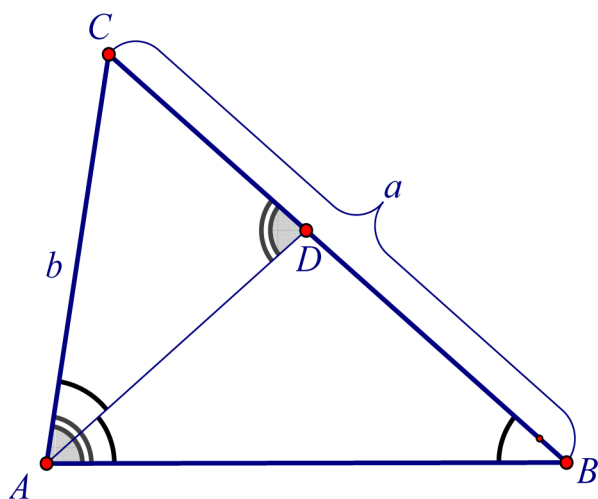


Рис. 3

Если дополнительно построить биссектрису AD угла A (рис. 3), то можно заметить, что треугольники ABC и DAC подобны (угол при вершине C общий, $\angle ABC = \angle DAC$). Отсюда $CD/AC = AC/BC$, следовательно, $CD = b^2/a$. Но тогда $BD = a - CD = (a^2 - b^2)/a$. По свойству биссектрисы AD верно следующее соотношение: $AB/AC = BD/CD$, отсюда $AB = (a^2 - b^2)/b$.

Далее необходимо определить те значения параметров a и b, для которых найденное решение существует. Для этого был проведен компьютерный эксперимент. Построены произвольные отрезки a и b, с помощью меню «измерения» найдены их длины, с помощью графического калькулятора вычислена величина $(a^2 - b^2)/b$,

представляющая собой длину третьей стороны AB, построен соответствующий этой величине отрезок. С помощью виртуальных циркуля и линейки построен по трем сторонам треугольник ABC. Измерены величины углов при вершинах A и B, выведена на рабочее поле таблица, содержащая необходимые для эксперимента длины отрезков и величины углов.

Меняя длины данных отрезков a и b, можно визуальным образом убедиться в том, что если данные параметры перестают удовлетворять условию $b < a < 2b$, то треугольник ABC исчезает (его изображение пропадает с рабочего поля «Живой математики»). Далее полученные в результате проведения эксперимента неравенства обосновываются известными из планиметрии неравенствами треугольника.

На данном примере мы постарались показать возможности применения «Живой математики» для проверки задач. Она наглядно проиллюстрировала недочеты решения, приведенного в учебном пособии. При помощи эксперимента нам удалось подтвердить правильность другого, более общего решения. Наш опыт подсказывает, что система динамической геометрии «Живая математика» может быть использована учащимися в качестве средства самоконтроля при подготовке к экзаменам.

Библиографический список

1. Балаян Э.Н. Математика. Задачи типа С4. Геометрия. Планиметрия. Ростов н/Д: Феникс, 2014. 208 с. : ил. – (Большая перемена).
2. Живая Математика 5.0.: Сборник методических материалов / Г.Б. Шабат, В.М. Чернявский, В.В. Кулагина и др. М.: ИНТ, 2013. 205 с.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛЬНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

DYNAMIC DRAWINGS AS THE MEANS OF THE VISUAL TRACKING OF SOLUTION OF PROBLEMS BY PLANIMETRY OF THE INCREASED LEVEL OF THE COMPLEXITY

В.Р. Майер, О.В. Русина

V.R. Mayer, O.V. Rusina

Динамические чертежи, системы динамической геометрии, «Живая математика», задачи по геометрии повышенного уровня сложности, визуальное сопровождение решения задач.

В статье рассматривается сопровождение решения планиметрических задач повышенной сложности в системе динамической геометрии «Живая математика». Обсуждаются возможности «Живой математики» как виртуальной лаборатории по созданию обучающимися динамических чертежей, позволяющих достичь максимальной визуализации процесса решения задач по планиметрии повышенного уровня сложности. Теоретические положения статьи иллюстрируются на конкретных примерах.

Dynamic drawings, the system of dynamic geometry, living mathematics, task on the geometry of the increased level of complexity, the visual tracking of solution of the problems

In the article is examined tracking the solution of the planimetric problems of the increased complexity in the system of dynamic geometry living mathematics. Are discussed the possibilities of living mathematics as virtual laboratory for the creation by the trainers of the dynamic drawings, which make it possible to reach the maximum visualization of the process of solution of problems by planimetry of the increased level of complexity. The theoretical clauses of article are illustrated in the concrete examples.

При подготовке к всевозможным математическим конкурсам и олимпиадам, к ЕГЭ и ОГЭ по математике наибольшую трудность вызывают геометрические задачи, среди которых «лидируют» планиметрические задачи повышенного уровня сложности. Большинство учащихся, выполняющих профильный уровень ЕГЭ по математике, даже не приступает к решению подобных задач.

Среди планиметрических задач повышенного уровня сложности особняком стоят задачи, условия которых неоднозначно определяют исследуемую фигуру. Не все школьники психологически готовы к их решению. Многих смущает ситуация «неоднозначности». Она нередко провоцирует их на самостоятельное добавление дополнительных условий, которые придают жёсткость фигуре. После этого школьник попадает в собственноручно установленную ловушку, используя незаконно добавленное условие для решения задачи.

Подготовить школьников к тому, что искомым в соответствии с условием задачи свойством может обладать не только одна фигура, как это практически всегда бывает в школьном курсе геометрии, а две, три или даже бесконечное множество, можно с помощью любой системы динамической геометрии (СДГ). Нами в практике обучения красноярских школьников гимназии № 14 и школы № 95 использовалась СДГ «Живая математика», которая представляет собой модификацию «Живой геометрии» – русскоязычной версии популярной обучающей американской программы Geometer's Sketchpad [1].

Рассмотрим задачу [2, с. 26], которая была предложена ученикам девятых классов в 2007 году на первой открытой олимпиаде по геометрии им. проф. С.А. Анищенко для учащихся 8–11 классов Красноярского края.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна d .

Многие девятиклассники построили чертёж, на котором прямоугольный треугольник имел не только заданную сумму d катетов, но и вполне конкретные острые углы, в частности 45° и 45° , 30° и 60° . Практически все они нашли искомое расстояние, но не получили за это решение максимальное количество баллов.

Построим в «Живой математике» динамический чертёж, или, как его ещё называют, чертёж-иллюстрацию [3, с. 48] – наиболее востребованный в практике обучения математике вариант применения систем динамической геометрии. Преимущества, которые даёт такой чертёж, «состоят в простоте выполнения геометрических построений, сравнимой с рисованием на бумаге от руки, аккуратностью и широкими оформительскими возможностями, присутствующими компьютерным графическим редакторам, возможностью редактирования, отличающей векторные редакторы, но главное – возможностью изменять начальные данные конструкции при сохранении алгоритма построения и, следовательно, геометрического смысла итоговой конфигурации» [3, с. 48].

На рабочем поле изобразим отрезок, обозначим его d (рис. 1), поместим на этот отрезок точку (ползунок), которая будет отделять один катет от другого. Обозначим соответствующие отрезки a и b . Построим два взаимно перпендикулярных луча с вершиной в точке C , на одном луче отложим отрезок BC равный a , на втором – отрезок AC равный b . Спрячем вспомогательные построения, изобразим прямоугольный треугольник ABC . На гипотенузе этого треугольника как на стороне построим квадрат $ABDE$, изобразим точку O пересечения диагоналей квадрата, найдем расстояние OC от вершины C до центра O квадрата, выведем эту величину на рабочее поле.

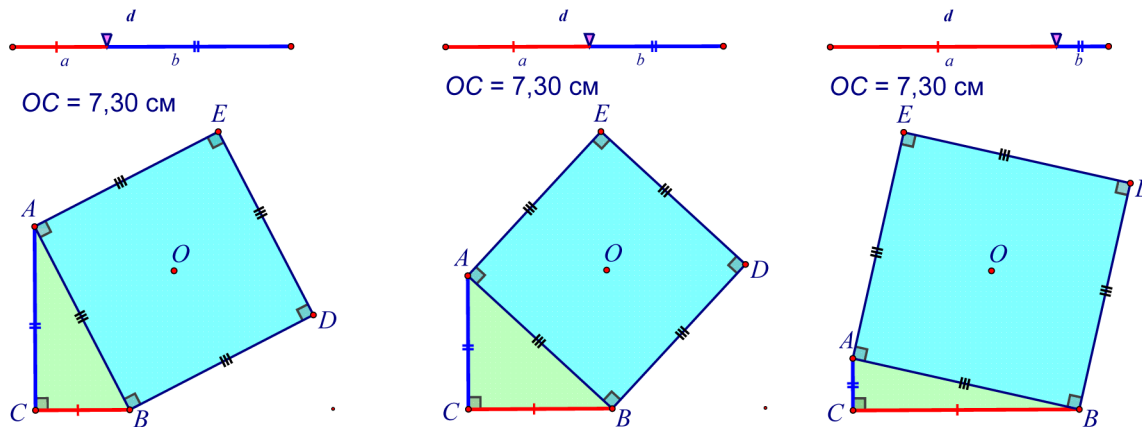


Рис. 1

Перемещая ползунок, учащийся визуально убеждается в том, что точка O не меняет своего положения, соответственно, расстояние OC остаётся неизменным. На рис. 1 изображено 3 стоп-кадра этого перемещения. Продолжая эксперимент, изменим длину отрезка d , лишь только в этом случае изменится и расстояние OC .

После установления факта независимости расстояния OC от выбора длин катетов треугольника становится понятно, что при решении этой задачи можно использовать лишь только то, что сумма углов треугольника ABC при вершинах A и B равна 90° , а сумма катетов AC и BC равна d .

Если воспользоваться идеей одного из способов доказательства теоремы Пифагора, а именно – построить лучи CA и CB , провести через D перпендикуляр DK к BC , через E – перпендикуляр ME к AC (рис. 2), то несложно доказать, что четырёхугольник $CKLM$ (L – общая точка прямых KD и ME) – квадрат со стороной d и центром в точке O . Но тогда $CO = d\sqrt{2}/2$.

«Живая математика» предоставляет возможность оценить степень достоверности полученного ответа. Для этого найдем длину отрезка d , затем воспользуемся встроенным в эту среду графическим калькулятором и выведем на экран значение выражения $d\sqrt{2}/2$. Сравним это значение с расстоянием OC . Выведем на экран соответствующую таблицу (рис. 2) и убедимся в том, что последние два столбца совпадают при любом положении точки-ползунка на отрезке d .

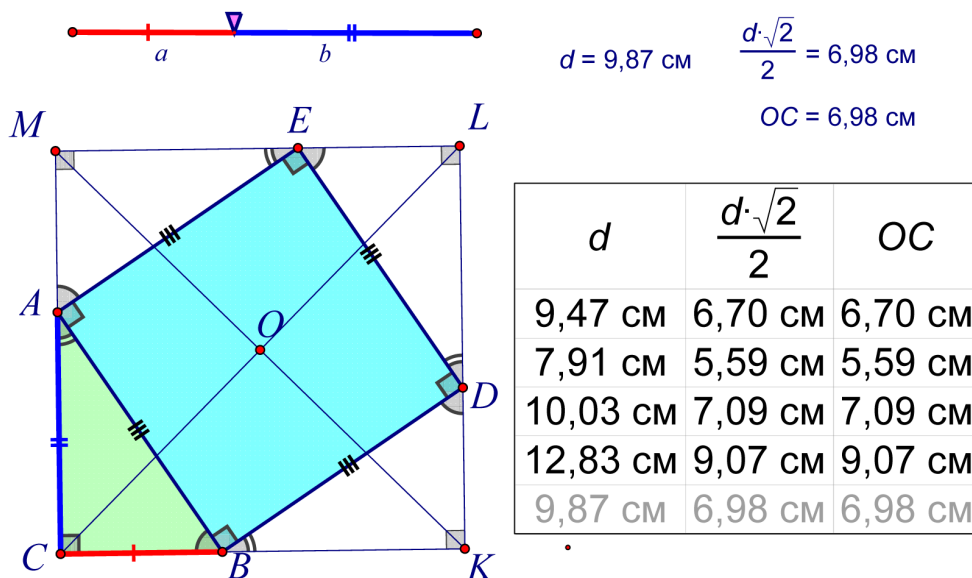


Рис. 2

Продemonстрируем ещё одну возможность «Живой математики», которая позволяет установить некорректность формулировки геометрической задачи, если таковая имеется. В качестве примера рассмотрим задачу, которая обсуждалась на одном из майских 2016 года вебинаров издательства «Легион». Тема вебинара [4] – «Окружность в планиметрических задачах повышенного уровня ОГЭ и ЕГЭ». По словам С.Ю. Калабухова, ведущего вебинара, эта задача взята им из банка задач по подготовке к ОГЭ, ее формулировка и решение приведены в одном из пособий издательства.

Задача 2. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и D , MB и CD – касательные к первой и второй окружностям, B и C – точки на окружностях. $CD=10$, MB в два раза больше CD . Найдите MC , если периметр $MBDC$ равен 45.

Ведущий, используя подготовленную им презентацию, продемонстрировал решение этой задачи, которое опиралось на следующее свойство касательной и хорды: угол между касательной и хордой, проведенной из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой. Дважды используя это свойство, было доказано подобие треугольников MDC и DBM , составлены отношения соответствующих сторон, с помощью которых получалось линейное уравнение относительно неизвестного $x = MC$. Все рассуждения были логичны, поэтому ответ $x = 3$ не вызывал никаких сомнений.

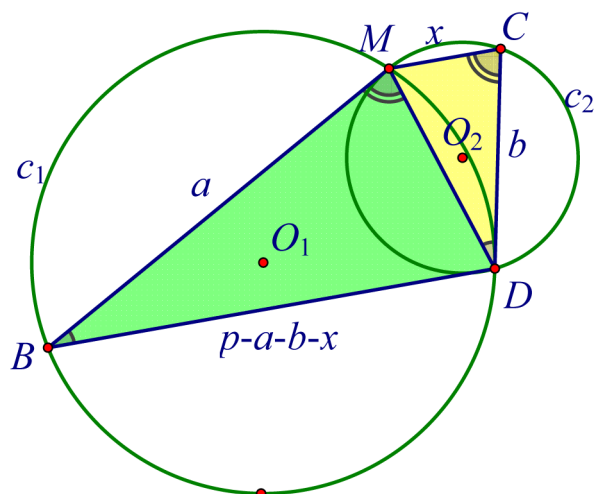


Рис. 3

Для создания динамического чертежа-иллюстрации задачи, соответствующей задаче 2, нами на рабочем поле среды «Живая математика» были построены (рис. 3): 1) произвольная окружность c_1 с центром O_1 ; 2) произвольная хорда MB окружности c_1 ; 3) перпендикуляр m к хорде MB ,

проходящий через точку M; 4) окружность c_2 с центром O_2 на прямой m , содержащая точку M; 5) вторая точка D пересечения окружностей c_1 и c_2 ; 6) хорда CD окружности c_2 , перпендикулярная O_1D .

Затем были скрыты дополнительные построения (прямая m , радиус O_1D) и введены обозначения $MB = a$, $CD = b$, $MC = x$, $P_{MBDC} = p$.

В результате этих построений на рабочем поле возникает чертёж, удовлетворяющий всем условиям задачи 2, за исключением метрических условий, т. е. требований к длинам отрезков BM , CD и периметру четырёхугольника $MBDC$. Проводя необходимые выкладки, получаем следующую формулу для вычисления искомого отрезка $MC = x$:

$$x = \frac{b^2(p - a - b)}{a^2 + b^2}. \quad (*)$$

Как и в предыдущей задаче, можно оценить степень достоверности найденного решения. Для этого выведем на рабочее поле таблицу (рис. 4), в которой первые три столбца будут представлять собой различные значения параметров a , b и p , четвертый столбец – значения искомой величины, подсчитанные в соответствии с формулой (*), пятый столбец – реальные длины отрезка x . Как видно из таблицы сомнений в верности найденной формулы быть не должно.

a	b	p	$\frac{b^2 \cdot (p - a - b)}{a^2 + b^2}$	x
10,48 см	5,24 см	29,20 см	2,69 см	2,69 см
10,48 см	7,56 см	33,37 см	5,24 см	5,24 см
9,44 см	9,99 см	39,14 см	10,42 см	10,42 см
9,44 см	5,01 см	28,55 см	3,10 см	3,10 см
9,44 см	7,21 см	33,39 см	6,18 см	6,18 см

Рис. 4

В соответствии с условием задачи нас больше должно интересовать наличие конфигурации для следующих значений параметров: $a = 20$, $b = 10$, $p = 45$. Если подставить эти значения в формулу (*), то мы получим $x = 3$. Перемещая мышкой центры O_1 и O_2 окружностей и точку B (рис. 3), мы попытались подобрать такое их положение, чтобы значения параметров a , b и p оказались как можно близки к данной по условию задачи тройке чисел 20, 10 и 45. Все попытки оказались безуспешными.

Осталось идти прямой дорогой, а именно – построить произвольные отрезки a , b и p ($a + b < p$) и выполнить неочевидные построения виртуальными циркулем и линейкой для создания конфигурации, удовлетворяющей всем условиям задачи 2. Построения становятся более очевидными, если заметить равенство углов $\angle CMD$ и $\angle MDB$ (рис. 3). Это влечет за собой параллельность прямых MC и BD , т. е. четырёхугольник $MBDC$ – трапеция. Создадим собственный инструмент «Трапеция», позволяющий по четырем отрезкам a , b , c и d построить трапецию с основаниями c и d ($c > d$) и боковыми сторонами a и b . Как известно, трапеция – фигура жёсткая, и ее построение сводится к построению треугольника со сторонами $|c - d|$, a и b , который затем достраивается до искомой трапеции. Построим на рабочем поле отрезки $a = 20$, $b = 10$, $c = 12$, $d = 3$, воспользуемся инструментом «Трапеция». Кликанье мышью по построенным отрезкам не приводит к появлению на экране искомой фигуры. И это понятно. Ведь для заданных параметров не выполняется неравенство треугольника $|a - b| < |c - d| < a + b$, поскольку $a - b = 10$, $a + c - d = 9$. Следовательно, формулировка задачи 2 с теми числовыми значениями, которые в ней указаны, является некорректной.

Попытки подобрать «красивые» (т. е. целые и не нарушающие корректность задачи) значения для параметров a , b и p не привели к успеху. Как оказалось, далеко не для каждой трапеции $MBDC$ ($MC \parallel BD$) описанные около треугольников MBD и CBD окружности касаются прямых CD и BM соответственно. Более того, касание окружностей с прямыми нельзя гарантировать даже в том случае, если основания трапеции построить по заданным отрезкам a , b и p в соответствии с формулой (*).

Таким образом, применение СДГ «Живая математика» при решении планиметрических задач повышенной сложности предоставляет учащемуся возможность, во-первых, с помощью динамического чертежа-иллюстрации максимально визуализировать процесс решения задачи и, во-вторых, с помощью анимационных и вычислительных возможностей «Живой математики» осуществить достаточно надежный самоконтроль.

Библиографический список

1. Шабат Г.Б., Дубровский В.Н. и др. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
2. Абдулкин В.В., Майер В.Р. и др. Сборник олимпиадных задач по геометрии для учащихся 8–11 классов / Краснояр. гос. пед. ун-т им В.П. Астафьева. Красноярск, 2011. 204 с.
3. Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 3. С. 47–56.
4. URL: http://legionr.ru/projects/webinars/?SECTION_ID=95 – архив вебинаров издательства «Легион».

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

COMPUTER ANIMATION IN THE STUDY QUADRATIC FUNCTIONS

С.В. Ларин, Т.В. Апакина, С.В. Чилбак-оол

S.V. Larin, T.V. Apakina, S.V. Chilbak-ool

Квадратичная функция, пять точек параболы, среда GeoGebra, анимационный рисунок.

С использованием анимации на уроках математики вносится движение в преподавание, что влечет за собой не только повышение интереса к этому традиционно трудному предмету, но и способствует пониманию и более прочному усвоению изучаемого материала. На примере изучения квадратичной функции демонстрируются анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra.

The quadratic function, the five points of the parabola, GeoGebra Wednesday, animated drawing.

With the use of animation in math class movement entered into teaching, which entails not only an increase in interest in this traditionally difficult subject, but also promotes understanding and a stronger absorption of the material being studied. For example, the study of quadratic functions are displayed animation capabilities GeoGebra computing environment.

Анимация на уроках математики представляет собой новое явление в преподавании. Оно связано с бурным развитием информационных технологий. Теперь уже трудно представить нашу жизнь без телевидения, мобильного телефона, видеосвязи. Продукты компьютерных технологий легко и естественно входят в нашу повседневную жизнь. Точно так же естественно новые информационные технологии входят в преподавание математики потому, что они предоставляют новые возможности.

С использованием компьютерных технологий появляется возможность показать график функции не в виде статичной картинке, а в виде «непрерывного» вычерчивания, когда можно в любой момент остановить анимацию и обсудить увиденное, а затем продолжить вычерчивание. Появляется возможность построить модель движения, задаваемого данной функцией. Эта новинка порой связывает воедино математику, физику и информатику. Новые информационные технологии вносят движение в преподавание математики.

Сам процесс создания «живого» рисунка позволяет ученику лучше понять и усвоить изучаемый математический факт.

Трудно ли обучиться созданию «живых» рисунков в среде GeoGebra? Образно говоря, эта программа представляет собой мастерскую по изготовлению «живых» рисунков заранее подготовленными инструментами, среди которых основными являются циркуль и линейка. Знания программирования здесь не требуется. Нужно лишь по мере работы запоминать, где лежит (под какой кнопкой скрывается) нужный инструмент. Подробнее познакомиться с использованием этой среды на уроках математики можно, например, по учебному пособию [1].

Возрастают возможности экспериментирования в математике. Эксперимент всегда был одним из эффективных источников новых математических знаний. Но лишь теперь экспериментирование получило столь мощную технологическую базу. Появилась возможность не только проводить вычислительные эксперименты, но и моделировать движения, задаваемые функциями, представлять наглядно математические знания, оживлять рисунки школьного учебника по математике. Возрастает наглядность не только в геометрии, что естественно, но также в алгебре и математическом анализе.

Постепенно уходит в прошлое образ учителя у классной доски с неизменным кусочком мела в одной руке и тряпкой в другой. На смену приходят другие атрибуты – компьютер и интерактивная доска.

Воздавая должное экспериментированию, необходимо «чисто математически» каждый раз обосновывать результаты компьютерного экспериментирования, увиденное на компьютерном экране. Цель обучения математике остается прежней: научить правильно рассуждать, приводя неопровержимые аргументы в обосновании математического утверждения от «дано» к тому, что «надо доказать». Само понятие истинности утверждения связывается с наличием доказательства как цепочки выводов исходя из совокупности данных.

С другой стороны, возможности компьютерной анимации являются порой незаменимым инструментом чувственно-наглядного восприятия математического понятия или утверждения. «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать» строго дедуктивные рассуждения.

Продемонстрируем на конкретных примерах эффективность использования «живых» рисунков при изучении квадратичной функции.

Квадратичной называется функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Для выяснения зависимости графика квадратичной функции от коэффициентов используем ползунки.

Построение

1. Строим ползунки для параметров a, b, c . На рис. 1 установлено: $a = 2, b = 3, c = -2$.

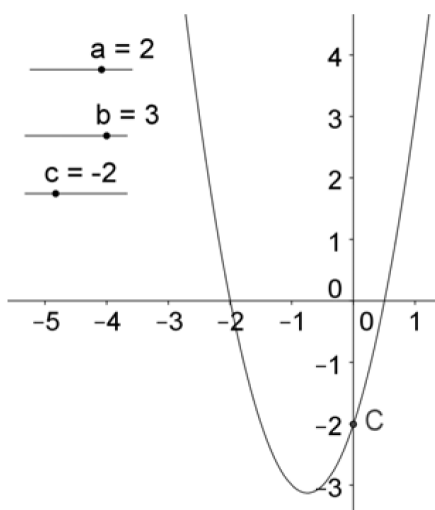


Рис. 1

2. В строку ввода записываем: $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

После ввода на Полотне появляется график функции при установленных значениях параметров.

С помощью созданного «живого» рисунка 1 можно продемонстрировать частные случаи:

1. $a = 1, b = 0, c = 0$.

2. $a = -1, b = 0, c = 0$.

3. Случай $f(x) = ax^2$. Чтобы увидеть изменение графика многочлена от изменения коэффициента a , включаем анимацию точки на первом ползунке. Для этого кликнем правой кнопкой мыши на эту точку и выберем команду «Анимировать». Наблюдаем изгибание ветвей параболы.

4. Случай $a = 0$, когда парабола превращается в прямую $f(x) = bx + c$.

5. Подмечаем геометрический смысл коэффициента c : график параболы пересекает ось ординат в точке $C = (0, c)$.

При произвольном c включаем анимацию точки на втором или третьем ползунке. Видим, что парабола совершает сложное движение. Чтобы разложить эти движения на простые составляющие, преобразуем квадратный трехчлен, выделяя полный квадрат:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c =$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4a - b^2}{4a} = a(x + u)^2 + v,$$

где $u = \frac{b}{2a}, v = \frac{4a - b^2}{4a}$. Таким образом, $f(x) = a(x + u)^2 + v$.

Чтобы выяснить зависимость изменения графика многочлена $f(x)$ от изменения коэффициентов a, u, v , создадим анимационный чертеж, используя ползунки (рис. 2).

На первой паре рисунка 2 выясняется зависимость параболы при изменении коэффициента a от 1 до 5. На рисунке 2 a видим, что отрезок AH растягивается в $a = 3$ раза и превращается в отрезок BH . Следовательно, парабола $y = x^2$ преобразуется к параболе $y = ax^2$

растяжением плоскости от оси абсцисс с коэффициентом растяжения, равным числу $a = 3$. При $a = 5$, то есть при растяжении плоскости от оси абсцисс в 5 раз, парабола $y = x^2$ преобразуется в параболу $y = 5x^2$ (рис. 2 б).

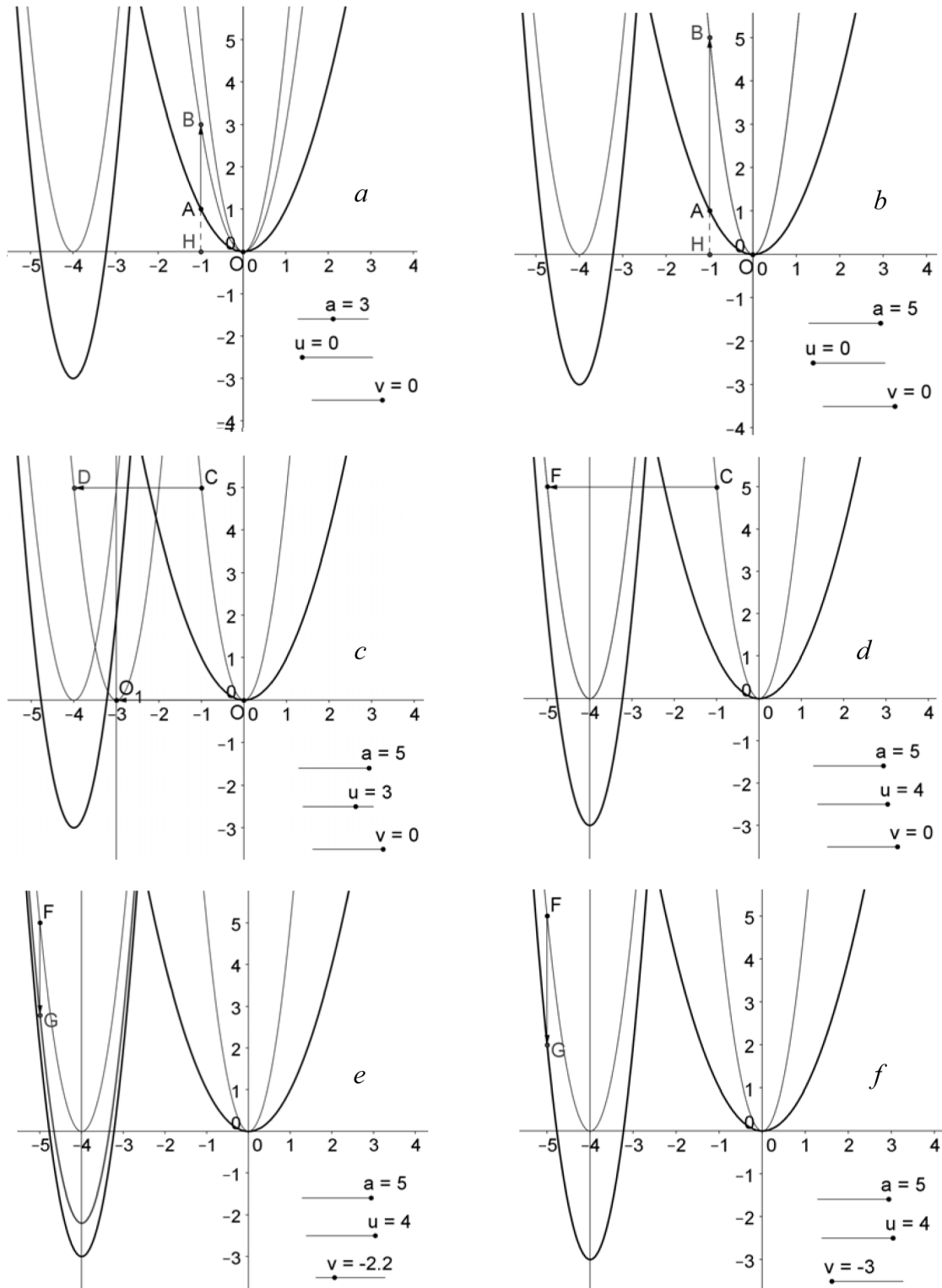


Рис. 2

При $a = \frac{1}{2}$ наблюдаем сжатие плоскости, а вместе с ней и параболы, к оси абсцисс в 2 раза. При $a = -1$ видим преобразование отражения плоскости относительно оси абсцисс.

При $a = -\frac{1}{2}$ происходит сжатие плоскости к оси абсцисс в 2 раза и отражение от оси абсцисс.

Все это можно наблюдать, передвигая точку на первом ползунке.

На следующей паре рисунка 2 (*c-d*) происходит преобразование параболы $y = 5x^2$ к параболе $y = 5(x+4)^2$ при изменении параметра u от 0 до 4. При $u = 3$ видим, что произвольная точка $C = (x, 5x^2)$, лежащая на параболе $y = 5x^2$, преобразуется в точку $D = (x-3, 5x^2)$, лежащую на параболе $y = 5(x+3)^2$.

Следовательно, преобразование плоскости, при котором парабола $y = 5x^2$ преобразуется в параболу $y = 5(x+3)^2$, можно записать так: $(x, y) \rightarrow (x-3, y)$. В этом преобразовании мы узнаем параллельный перенос на вектор $(-3, 0) = OO_1$. Таким образом, парабола $y = ax^2$ преобразуется в параболу $y = a(x+u)^2$ при параллельном переносе вдоль оси абсцисс на вектор $(-u, 0)$. Можно включить анимацию точки на втором ползунке и наблюдать изменения параболы.

На последней паре рисунка 2 (*e-f*) парабола $y = 5(x+4)^2$ преобразуется в параболу $y = 5(x+4)^2 - 3$ при изменении параметра v от 0 до -3 (убывание параметра). На рисунке 2 *e* произвольная точка F параболы $y = 5(x+4)^2$ преобразуется в точку G параболы $y = 5(x+4)^2 - 2.2$. Это преобразование можно записать в виде $F = (x, 5(x+4)^2) \rightarrow (x, 5(x+4)^2 - 2.2)$. Оно является следствием преобразования плоскости, при котором произвольная точка (x, y) преобразуется в точку $(x, y - 2.2)$. В этом преобразовании мы узнаем параллельный перенос плоскости вдоль оси ординат вниз на вектор $(0, -2.2)$. Таким образом, в общем случае при изменении параметра v парабола $y = a(x+u)^2$ преобразуется в параболу $y = a(x+u)^2 + v$ параллельным переносом вдоль оси ординат на вектор $(0, v)$.

Итак, преобразование графика функции $y = x^2$ в график функции $y = a(x+u)^2 + v$ происходит следующим образом: при изменении параметра a плоскость, на которой изображена парабола $y = x^2$, «растягивается» от оси абсцисс с коэффициентом растяжения a и получается парабола $y = ax^2$. Затем при изменении параметра u плоскость сдвигается вдоль оси абсцисс на вектор $(-u, 0)$, в результате чего относительно неизменной системы координат мы получаем параболу $y = a(x+u)^2$. Наконец, при изменении коэффициента v происходит параллельный перенос плоскости вдоль оси ординат на вектор $(0, v)$, в результате чего относительно неизменной системы координат мы получаем параболу $y = a(x+u)^2 + v$.

Подметим, как можно построить пять точек параболы, заданной уравнением $y = ax^2 + bx + c = (ax+b)x + c$. Поскольку эта парабола получается из параболы $y = (ax+b)x$ путем параллельного переноса последней вдоль оси ординат на вектор $(0, c)$, то достаточно подметить построение пяти точек параболы $y = (ax+b)x$. Для этого рассмотрим рисунок 3.

Перечислим искомые 5 точек параболы $y = (ax+b)x$ (рис. 3), их построения приведены на рисунке 3 *a*. При этом прямую $y = ax + b$ будем называть «данной» прямой.

Первая точка – точка пересечения «данной» прямой с вертикалью, проведенной через точку $E = (1, 0)$.

Вторая точка – начало координат: очевидно, парабола $y = (ax+b)x$ проходит через эту точку.

Третья точка – точка G' , симметричная точке G пересечения «данной» прямой с вертикалью, проведенной через точку $E_1 = (0, 1)$.

Четвертая есть точка H пересечения «данной» прямой с осью абсцисс.

Пятая точка – вершина параболы M . Для ее построения находим середину I отрезка OH и проводим через нее вертикаль – ось параболы. Отмечаем точку J пересечения вертикали с «данной» прямой. Видим, что искомая вершина M есть результат умножения точки J на точку I . Для выполнения умножения проекцию точки J на ось ординат обозначим K . Со-

единим ее отрезком с точкой E и через точку H проводим прямую параллельно построенному отрезку KE . Отмечаем точку L пересечения построенной прямой с осью ординат. Наконец, через точку L проводим горизонталь и отмечаем искомую точку M пересечения горизонтали с осью параболы.

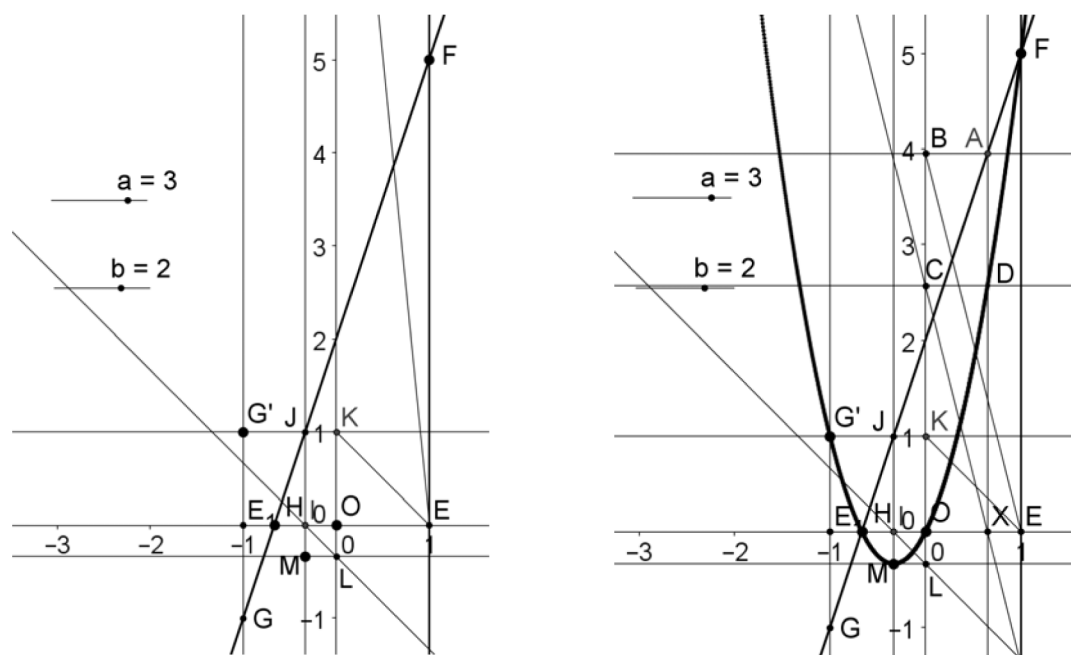


Рис. 3

Замечаем, что точку G' можно получить, если через точку J пересечения оси параболы с «данной» прямой провести горизонталь и отметить точку пересечения горизонтали с вертикалью, проведенной через точку $E_1 = (0,1)$.

Алгоритм построения параболы $y = ax^2 + bx + c = (ax + b)x + c$.

1. Строим прямую $y = ax + b$.

2. Строим описанные выше 5 точек параболы $y = (ax + b)x$ и плавно соединяем построенные точки (на экране компьютера в среде GeoGebra можно воспользоваться инструментом «коника по пяти точкам»).

3. Передвигаем построенную параболу вдоль оси ординат на вектор $(0,c)$.

Анимационно-геометрическую наглядность можно использовать почти на каждом уроке по математике. Цель успешного овладения программным материалом по математике учениками вполне оправдывает труд учителя. Для ученика же само создание «живого» рисунка очень поучительно, ибо предполагает глубокое проникновение в моделируемый математический факт. Кроме того, анимационно-геометрическое моделирование является источником тем для организации самостоятельных исследований школьников.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
2. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
3. URL: <http://www.geogebra.org/cms/ru/>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БРИАНШОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРАКТИВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

APPLYING BRIANCHON'S THEOREM IN SOLUTION GEOMETRY TASK WITH USING THE DYNAMIC MATHEMATICAL SOFTWARE GEOGEBRA

М.С. Тиличев, И.В. Тиличева

M.S. Tilicheev, I.V. Tilicheeva

Геометрия, теорема Брианшона, динамическая математика, GeoGebra, планиметрия, стереометрия, решение задач.

В данной статье рассмотрен пример решения задачи по геометрии на применение теоремы Брианшона с использованием интерактивной математической среды GeoGebra.

Geometry, Brianchon's theorem, dynamic mathematics, GeoGebra, planimetrics, solid geometry, task solution.

In this article author describe an example of solution geometry task about Brianchon's theorem with using of dynamic mathematical software GeoGebra.

Классическая проективная плоскость, возникшая из евклидовой плоскости присоединением к последней несобственных точек и прямой, содержит целый букет изящных утверждений об инцидентности точек и прямых, которые с успехом можно использовать при решении задач элементарной математики [1, с. 434–454].

Одним из таких утверждений является классическая теорема проективной геометрии, доказанная Брианшоном.

Теорема Брианшона. *Если шестиугольник $ABCDEF$ описан около овальной линии второго порядка, то прямые AD , BE и CF , проходящие через его противоположные вершины, инцидентны одной точке, которая называется точкой Брианшона.*

Пятиугольник $ABCDE$, описанный около овальной линии второго порядка, можно рассматривать как шестиугольник $ABCDEF$, в котором две соседние стороны AF и FE совпадают, а их общая вершина F превращается в точку касания стороны AE с овальной линией. В этом случае сформулированная выше теорема также справедлива (ее иногда называют предельной теоремой Брианшона для пятиугольника), причем точка Брианшона будет являться общей точкой диагоналей AD и BE и прямой, проходящей через вершину C и точку касания стороны AE .

Можно сформулировать предельные теоремы Брианшона для четырехугольника и треугольника. Для теоремы Брианшона и ее предельных случаев справедливы и обратные теоремы. Каждая из этих теорем может с успехом применяться при решении задач элементарной математики. Правда, в этом случае теоремы лучше переформулировать, заменив, в частности, овальную линию второго порядка на окружность, а прямые, проходящие через противоположные вершины, – на диагонали. Сформулируем евклидовый вариант предельной теоремы Брианшона для четырехугольника.

Предельная теорема Брианшона. *Если четырехугольник описан около окружности, то общая точка его диагоналей принадлежит отрезку, соединяющему точки касания противоположных сторон.*

В школе решением задач на применение классических теорем проективной геометрии, их следствий и предельных случаев можно заниматься в рамках элективного курса. Причем в профильных классах применение той или иной теоремы можно предварить ее доказательством средствами элементарной геометрии. В качестве компьютерного сопровождения элективно-

го курса подойдёт любая интерактивная математическая среда. Мы предлагаем использовать среду GeoGebra [2]. Она достаточно проста в использовании, и, как показала наша практика, школьники быстро осваивают интерфейс и инструментарий программы.

Применение этой среды продемонстрируем на следующей задаче.

Задача. Четырёхугольник $ABCD$ – описанный, E, F, P и Q – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что:

- а) точки пересечения AF и CE, AP и CQ лежат на BD ;
- б) диагонали четырёхугольников $ABCD$ и $EFPQ$ пересекаются в одной и той же точке.

По условию задачи нам дан четырёхугольник $ABCD$ и вписанная в него окружность. Поскольку не в любой четырёхугольник можно вписать окружность, то начнём наше построение с окружности, около которой опишем произвольный четырёхугольник.

Приведём алгоритм построения динамического чертежа-иллюстрации:

1. Построим произвольную окружность, используя инструмент «Окружность по центру и точке».
 2. Отметим на окружности 4 произвольные точки E, F, P и Q .
 3. Построим к этим точкам касательные, используя инструмент «Касательная».
 4. Отметим точки пересечения касательных так, чтобы $E \in AB, F \in BC, P \in CD$ и $Q \in DA$
- Таким образом, мы получили чертёж, полностью удовлетворяющий нашему условию (рис. 1).

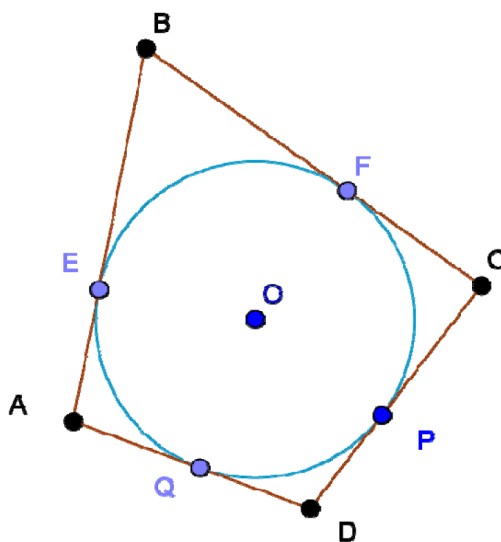


Рис. 1. Чертёж к условию задачи

Перейдём к решению первой части задачи. Для этого построим прямые AF и CE и отметим точки их пересечения и прямые AP и CQ и отметим точки их пересечения.

1. Построим прямые AF и CE , используя инструмент «Прямая по двум точкам».
2. Обозначим точку пересечения как $G. G=AF \cap CE$.
3. Построим прямые AP и CQ , используя инструмент «Прямая по двум точкам»
4. Обозначим точку пересечения как $H. H=AP \cap CQ$.
5. Проведём прямую BD .

Готовый чертёж представлен на рисунке 2, где хорошо видно, что точки G и H лежат на прямой BD .

Справедливость данного факта следует из предельной теоремы Бриансона для четырёхугольника. Для обоснования можно воспользоваться и самой теоремой Бриансона. Для этого рассмотрим два шестиугольника $AEBFCD$ и $ABCPDQ$, в которых некоторые смежные стороны совпадают.

В шестиугольнике $AEBFCD$, по теореме Бриансона, диагонали AF, CE и BD пересекаются в одной точке. У нас это будет точка G . Тогда $G \in BD$.

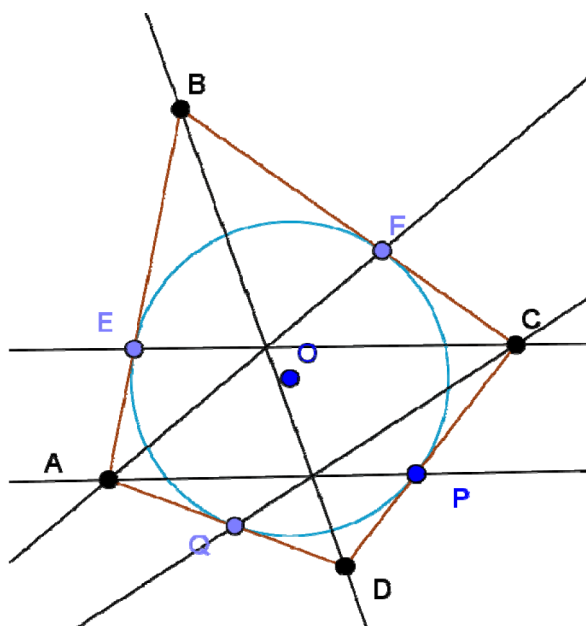


Рис. 2. Решение первой части

Аналогично для шестиугольника ABCPDQ с диагоналями AP, CQ и BD. Получим, что точка $H \in BD$. Следовательно, точки G и H лежат на одной прямой DB. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим вторую часть задачи. Для этого спрячем все построенные нами диагонали и изобразим четырёхугольник EFPQ и диагонали.

1. Используя инструмент «Многоугольник», построим четырёхугольник EFPQ.
2. Используя инструмент «Отрезок», построим все диагонали наших четырёхугольников. При данном построении мы должны получить чертёж, аналогичный рисунку 3.

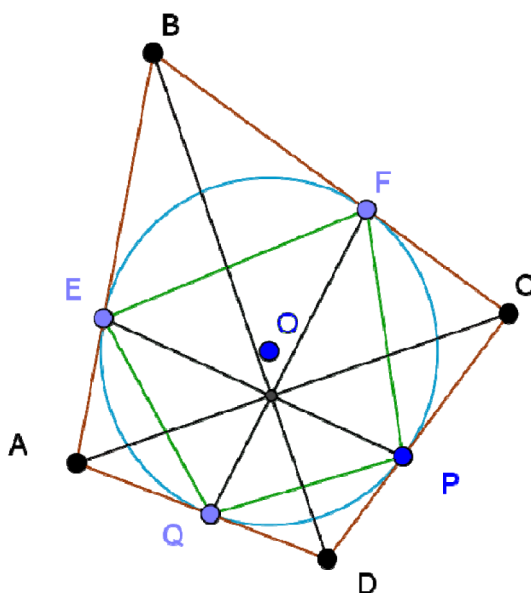


Рис. 3. Решение второй части

Доказательство данной задачи будет аналогично предыдущему.

Рассмотрим два шестиугольника AЕВСРD и АВFCРQ. Аналогично рассуждаем, что некоторые стороны в наших шестиугольниках совпали. Для первого шестиугольника мы получим, что диагонали AC, DB и EP, по теореме Бриансона, пересекаются в одной точке. Для второго шестиугольника мы получим, что диагонали AC, DB и FQ, по теореме Бриансона, пересекаются в одной точке. Поскольку AC и DB пересекаются в одной точке, а EP и FQ пересекают-

ся с этими двумя прямыми, каждая из них в одной точке, то получаем, что диагонали EP и FQ пересекаются в одной точке.

Вторая часть задачи довольно интересно смотрится при построении в пространстве, чертёж (рис. 3) может являться проекцией двух пирамид, в основании которых лежат четырёхугольники с вершиной в одной точке, при этом основание одной пирамиды является описанным около окружности, а основание второй – вписанным в данную окружность (рис. 4).

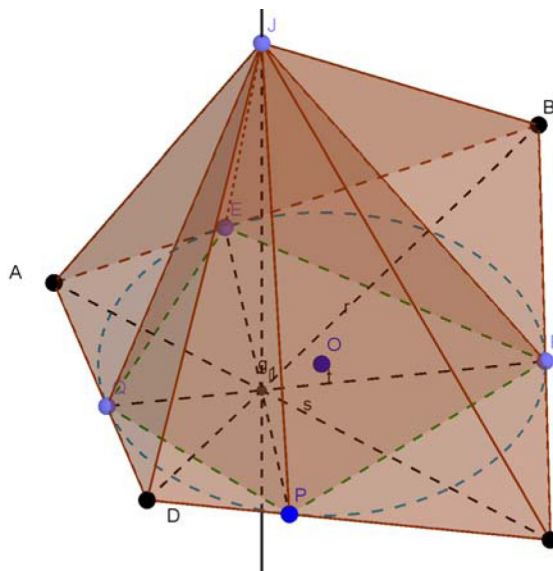


Рис. 4. Пространственная модель-иллюстрация второй части задачи

С помощью интерактивных возможностей среды GeoGebra ученики могут самостоятельно поэкспериментировать над чертежами, изменяя положения ключевых точек, и, вращая чертёж, подробно рассмотреть все детали построения. Благодаря всем динамическим возможностям программы работа над задачей не ограничивается просто построением и доказательством, её можно продолжить исследованием общих и частных случаев решения, например для треугольников.

Библиографический список

1. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. 516 с.
2. URL: <http://www.geogebra.org/cms/ru/>

О РАЗБИЕНИЯХ ИКОСАЭДРА НА ТЕЛА С ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ

ON TILINGS THE ICOSAHEDRON ON THE BODY WITH PARQUET FACES

Е.С. Отмахова, А.В. Тимофеев

E.S. Otmakhova, A.V. Timofeenko

Паркетный многоугольник, группа симметрий, фиктивная вершина, несоставной многогранник, усечённая пирамида, правильная пирамида, архимедово тело.

Сформулированы вопросы, ответ на которые позволит обобщить теорему о всевозможных выпуклых соединениях тел M_3 , M_{3a} , M_{19a} , M_{19b} . Даны три варианта движения к этим ответам. Описан красноярский опыт привлечения учащихся к исследованию многогранников.

Parquet polygon, symmetry group, fictitious vertex, noncomposite polyhedron, truncated pyramid, regular-faced pyramid, archimedean body.

Formulated questions, the answers to which will enable us to generalize Theorem about all kinds of connections M_3 , M_{3a} , M_{19a} and M_{19b} convex bodies. Given three variants of movement to these answers. Described Krasnoyarsk experience in attracting students to the study of polyhedram is described.

В 2015 году было найдено каждое выпуклое соединение тел M_3 , M_{3a} (рис. 1), M_{19a} (рис. 2), M_{19b} (рис. 3).

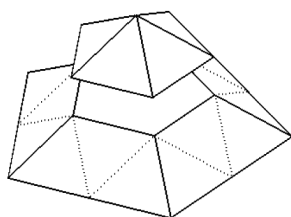


Рис. 1. Усеченная пирамида M_{3a} под пирамидой M_3

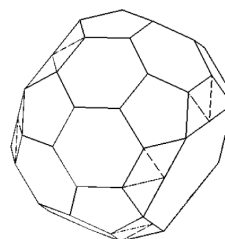


Рис. 2. Многогранник M_{19a}

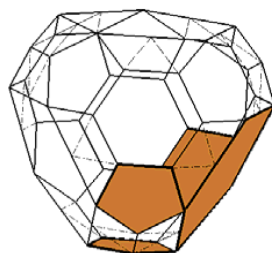


Рис. 3. Многогранник M_{19b} с фундаментальными пятиугольными гранями

при условии, что любые два его ребра либо равны, либо одно вдвое короче другого. Если последнее требование ослабить, оставляя возможные длины ребер равными единице, двойке или тройке, то среди соединяемых тел появится икосаэдр. Его можно получить, присоединяя к телу Q_{61} (рис. 4)

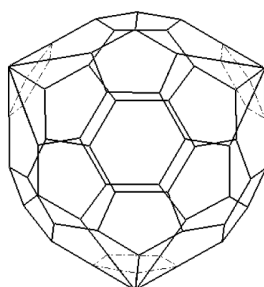


Рис. 4. Многогранник Q_{61}

девять правильных пирамид M_3 . Дальнейшие соединения икосаэдра и тел с паркетными гранями нарушат выпуклость соединений. С другой стороны, тело M_{19a} рассекается плоскостью на два многогранника с паркетными гранями. Если сечением служит правильный десятиугольник с рёбрами длины три, то он делит тело M_{19a} на два равных многогранника, длины ребер которых принимают значения: один, два, три, четыре. Эти многогранники в работе [1] получили обозначение M_{19c} (рис. 5).

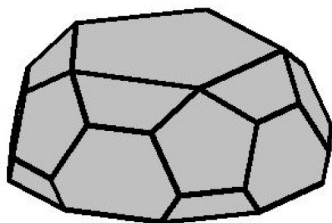


Рис. 5. Многогранник M_{19c}

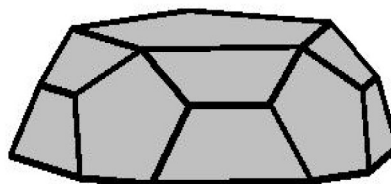


Рис. 6. Многогранник M_{19d}

Если же равноугольный десятиугольник сечения не является равносторонним, то среди всех таких десятиугольников выбираем тот, рёбра которого либо равны, либо вдвое отличаются по длине. Тело M_{19a} имеет два таких сечения. Оба эти десятиугольника служат параллельными гранями С-антипризмы CA_5 (рис. 7). С-антипризма и В-антипризма как сечения антипризмы появились в работе [6].



Рис. 7. С-антипризма CA_5

В теле M_{19a} к этим граням присоединены одинаковые многогранники, получившие обозначение M_{19d} (рис. 6) [1]. Такому разбиению тела M_{19a} соответствует деление икосаэдра на антипризму и две пятиугольные пирамиды.

Таким образом, обобщение теоремы о соединениях тел M_3 , M_{3a} , M_{19a} , M_{19b} встречает два естественных ограничения, которые не позволят увести от проблемы классификации типов выпуклых многогранников с паркетными гранями. Первое заключается в том, что вместо тела M_{19a} берется его часть, отсеченная по правильному десятиугольнику, а к усеченной пирамиде M_{3a} добавляются однотипные ей усеченные пирамиды, параллельные рёбра трапеций которых относятся как 1:2, 2:3, 3:4. Обозначим их $^{1/2}M_{3a}$, $^{2/3}M_{3a}$, $^{3/4}M_{3a}$ (рис. 8).

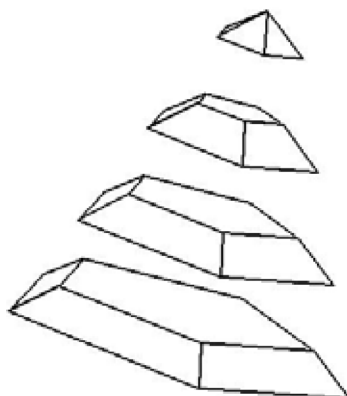


Рис. 8. Многогранники $^{1/2}M_{3a}$, $^{2/3}M_{3a}$, $^{3/4}M_{3a}$ под пирамидой M_3

В этом случае длины ребер принимают целые значения от одного до четырех. Второе ограничение возникает при отказе от правильности многоугольников, из которых составлены грани. Оно описано выше и приводит к ребрам длин один, два или три. Приходим к следующим задачам.

1. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, M_{3a}^{1/2}, M_{3a}^{2/3}, M_{3a}^{3/4}, M_{19a}, M_{19b}, M_{19c}$ с условием, что длины ребер принимают целые значения от одного до четырех.

2. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19d}, CA_5$ с условием, что длины ребер принимают целые значения от одного до трех.

Существует несколько подходов к решению сформулированных задач.

Первый, чисто теоретический, описан в работах [3; 8], где указанные выше тела $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b}$ служат входными данными процесса нахождения всех их выпуклых соединений с дополнительным ограничением на длину ребра каждого соединения. Процесс распадается на шесть шагов. Они видны из формулировки основной теоремы:

Выпуклый многогранник с ребрами, длины которых либо равны, либо одно вдвое короче другого, составлен из тел

$$M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b} \tag{1}$$

с таким же условием на длины ребер, тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел $Q_{i,j}$ которое расположено в списке (i) на месте j, причём число i тел списка (1), на которые разбивается многогранник $Q_{i,j}$ минимально, $i=2,3,4,5,6$:

$$\begin{aligned} &M_3 + M_3, M_3 + M_{3a}, M_3 + M_{19a}, M_3 + M_{19b}, M_3 + M'_{19b}, \\ &M_3 + M''_{19b}, M_{3a} + M_{3a}, M_{3a} + M_{19a}, M_{3a} + M_{19b}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &Q_{2,2} + M_{3a}, Q_{2,2} + M_{19a}, Q_{2,2} + M_{19b}, Q_{2,3} + M_3, Q_{2,3} + M'_3, \\ &Q_{2,3} + M''_3, Q_{2,3} + M_{3a}, Q_{2,3} + M'_{3a}, Q_{2,4} + M_3, Q_{2,4} + M'_3, \\ &Q_{2,4} + M''_3, Q_{2,4} + M_{3a}, Q_{2,5} + M_3, Q_{2,5} + M'_3, Q_{2,5} + M_{3a}, \\ &Q_{2,5} + M'_{3a}, Q_{2,8} + M_3, Q_{2,8} + M_{3a}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &Q_{3,1} + M_3, Q_{3,2} + M_3, Q_{3,2} + M_{3a}, Q_{3,3} + M_3, Q_{3,3} + M'_3, \\ &Q_{3,3} + M''_3, Q_{3,4} + M_3, Q_{3,4} + M_{3a}, Q_{3,5} + M_{3a}, Q_{3,5} + M'_{3a}, \\ &Q_{3,6} + M_{3a}, Q_{3,9} + M_3, Q_{3,9} + M_{3a}, Q_{3,9} + M'_{3a}, Q_{3,10} + M_{3a}, \\ &Q_{3,11} + M_{3a}, Q_{3,11} + M'_{3a}, Q_{3,11} + M''_{3a}, Q_{3,13} + M_3, Q_{3,13} + M'_3, \\ &Q_{3,13} + M_{3a}, Q_{3,13} + M'_{3a}, Q_{3,14} + M_3; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &Q_{4,2} + M_3, Q_{4,2} + M_{3a}, Q_{4,3} + M_3, Q_{4,4} + M_3, \\ &Q_{4,7} + M_{3a}, Q_{4,7} + M'_{3a}, Q_{4,12} + M_{3a}, Q_{4,12} + M'_{3a}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$Q_{5,1} + M_{3a}. \tag{6}$$

«Живые» модели большинства многогранников теоремы находятся в приложении к работе [3] в виде файла для системы компьютерной алгебры Maple14 (и выше). Этот способ доказательства может быть реализован одним человеком, построившим алгебраические и компьютерные модели многогранников.

В отличие от первого способа доказательства, который можно назвать линейным, второму можно дать название параллельный. Действительно, шаг i начинается с того, что многогранник $Q_{i-1,1}$ и каждый многогранник списка (i-1) соединяется с каждым многогранником списка (1). Затем все многогранники списка (i-2) соединяются с каждым многогранником списка (2). Таким образом, процесс нахождения многогранников, составленных из i тел списка (1), можно получить (i-1)/2 исследователям: первый соединяет каждое (i-1)-составное тело с каждым

1-составным многогранником, второй – $(i-2)$ -составное тело с 2-составным, ... , причем число $(i-1)/2$ округляется. Например, процесс нахождения всех 6-составных многогранников теоремы распределяется на троих исследователей, как и процесс нахождения всех 7-составных тел. После того как трое предоставят свои списки, необходимо из второго списка удалить все тела первого списка, а из третьего удалить все тела первых двух списков. В результате исследователи получают полный список многогранников теоремы и завершают её доказательство.

Добавляя к алгебраическим и компьютерным моделям материализованные модели многогранников, приходим к третьему способу доказательства. Необходимо отметить, что при переходе от алгебраических моделей, координаты вершин которых вычисляются без округлений, к моделям материализованным в нашем и во многих других случаях мы не теряем строгости рассуждения. Действительно, получая, например, развернутый угол при соединении пятиугольными гранями тел M_{3a} и M_{19a} , мы делаем вывод о его величине не из вида материализованной модели, а из выполненных ранее вычислений и наблюдений. Преимущество последнего способа доказательства заключается в эффективности привлечения практически всех заинтересованных (даже без математической подготовки) лиц к созданию доказательства теоремы.

Все три способа доказательства применялись 2015-2016 годах. Мотивация авторов к этим исследованиям отражена в их статье [4; 7]. Теорема доказана первым способом в прошлом году [3]. Если вместо входных данных (1) поместить правильные пирамиды M_1 , M_2 , M_3 с трех, четырех и пятиугольными основаниями соответственно, то получим незавершенный пока процесс построения новых выпуклых многогранников с паркетными гранями и ребрами либо равными, либо вдвое отличающимися по длине. В 2016 году стало ясно, что этот процесс завершится на 513 шаге. Опубликована теорема, содержащая все такие тела, каждое из которых составлено не более чем из 14 правильных пирамид [5]. Список таких 15-составных тел анонсирован в работе [2]. Первый и четвертый авторы работы [5] учатся в 149 красноярской школе и находили все 14-составные тела третьим способом. Они изготовили все тела, составленные не более чем из 13 правильных пирамид, и на моделях показали, что существует ровно шесть составленных из 14 правильных пирамид выпуклых многогранников с ребрами длины один или два. Участники вебинара «Группы и правильные многогранники» создание картонных, бумажных и трубчатых моделей многогранников вынесли на одноименную площадку фестивалей науки, в которых принял участие или организовал интерактивный музей науки «Ньютон-Парк» (<http://newton-park.net>). На фотографии (http://newton-park.net/sites/default/files/1_0.jpg) участники площадки получают приз за наибольшее число голосов в интернет-голосовании на фестивале «Нулевое сентября» 2016 года. На этих фестивалях площадку посетили сотни людей. В частности, первый и четвертый авторы работы [5] начали свои исследования составленных из правильных пирамид тел с посещения фестиваля «Нулевое сентября» 2015 года, а 25-27 ноября 2016 года уже сами представляли свои результаты на фестивале «Наука 0+» (<http://www.krasnoyarsk.festivalnauki.ru/>). Второй способ применялся в 2015-2016 учебном году на математическом отделении ИМФИ КГПУ им. В. П. Астафьева. Второй из авторов и Е.С. Окладникова распараллелили процесс нахождения всех выпуклых с ребрами один или два многогранников, составленных из 16 и 17 правильных пирамид с единичными ребрами [1].

Второй способ должен проявить себя при решении сформулированных выше двух задач. Действительно, входные данные процесса соединения тел состоят не из трёх, как в работах [2; 5] или четырёх, как в работе [3], многогранников, а из семи в первой и пяти многогранников – во второй задаче. Кроме того, ослаблено условие на соединение входных многогранников: длина ребра соединения может принимать не только два, а ещё три или четыре значения. Рабочая гипотеза предполагает, что решение этих двух задач приведет к нахождению всех комбинаторных типов выпуклых тел с паркетными гранями, каждое из которых составлено из многогранников, однотипных телам M_3 , M_{3a} , M_{19a} , M_{19b} , M_{19c} , M_{19d} , CA_5 . Этот факт заметно приблизил бы нас к нахождению всех комбинаторных типов выпуклых многогранников с паркетными гранями.

В работе над гипотезой авторы особо надеются на плодотворное сотрудничество с учащимися Краевой школы дистанционного образования (<http://krascdo2.wixsite.com/krascdo>). По крайней мере, такое впечатление осталось от первого посещения ими территории «Ньютон-Парка» 6 октября 2016 года. Пришедшие на встречу ученики 5–10 классов остались в восторге от возможности прикоснуться к реальной научной работе. За час каждому из них удалось собрать рёберные модели многогранников и почувствовать, что они смогут собрать новые модели, в том числе модели тех многогранников, которые сегодня человечеству неизвестны.

Результаты работы доложены вебинару «Группы и правильные многогранники» 1 декабря 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках научного проекта №16-41-240670.

Библиографический список

1. Окладникова Е.С. К теореме о классификации типов выпуклых многогранников с паркетными гранями: выступление на вебинаре «Группы и правильные многогранники», 8 июня 2016. URL: <http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra>
2. Окладникова Е.С., Тимофеев А.В. К теореме о типах выпуклых многогранников с паркетными гранями // Дискретная математика и ее приложения имени академика О.Б. Лупанова: материалы XII Международного семинара (Москва, МГУ, 20-25 июня 2016) / под ред. О.М. Касим-Заде. М.: Изд-во мех.-математического факультета, 2016, С. 362–365.
3. Отмахова Е.С. Построение выпуклых соединений многогранников с паркетными гранями: магистерская диссертация. Красноярск, 2015. URL: <http://elib.kspu.ru/document/13772>
4. Отмахова Е.С., Тимофеев А.В. Этапы и способы организации коллективной работы над научной проблемой: видеолекция. Красноярск, 2015 г. Регистрац.свидетельство № 41337. Номер гос.регистрации 0321502701. URL: <http://elib.kspu.ru/document/13817>
5. Полтанов Е.В., Судак Д.Н., Тимофеев А.В., Якушева А.В. О выпуклых соединениях правильных пирамид. Proceedings of the 47th International Youth School-conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016 URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1662/top3.pdf>
6. Прякин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. М.; Л.: Наука, 1974. С. 111–112.
7. Тимофеев А.В., Отмахова Е.С. Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и студентов // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2015. № 3 (33). С. 79–82.
8. Тимофеев А.В., Отмахова Е.С. О выпуклых телах с паркетными гранями, Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвящённой юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых, и молодёжной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 330–331. URL: http://kpfu.ru/portal/docs/F1397737406/Proceedings_fpaag_2016.pdf

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ-ИЛЛЮСТРАЦИЙ МОДЕЛИ КЭЛИ-КЛЕЙНА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В КУРСЕ «ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ»

APPLICATION OF COMPUTER DRAWING- ILLUSTRATIONS OF THE MODEL OF CAYLEY-KLEIN LOBACHEVSKY'S PLANES IN THE COURSE OF THE BASE OF THE GEOMETRY

В.Р. Майер, Т.В. Апакина,
Е.О. Манченкова

V.R. Mayer, T.V. Apakina,
E.O. Manchenkova

Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, чертежи-иллюстрации, курс оснований геометрии, системы динамической геометрии, «Живая математика».

В статье рассматривается технология применения системы динамической геометрии «Живая математика» при обучении студентов бакалавриата – будущих учителей математики и информатики основам геометрии. При обосновании непротиворечивости системы аксиом плоскости Лобачевского предлагается использовать динамические чертежи-иллюстрации модели Кэли-Клейна этой плоскости. Самостоятельное создание обучающимися GSP-файлов таких чертежей способствует повышению качества усвоения этого раздела курса геометрии в педагогическом вузе.

Model of Cayley-Klein the plane of Lobachevsky, drawing- illustration, the course of the basis of geometry, system of dynamic geometry, living mathematics.

In the article is examined the technology of the application of a system of dynamic geometry living mathematics with the instruction of the students of bakalavriata – of the future teachers of mathematics and information theory to the bases of geometry. With the substantiation of the consistency of the system of the axioms of Lobachevsky«s plane it is proposed to use dynamic drawing- illustrations of the model of Cayley-Klein this plane. Independent creation by the trainers of the GSP- files of such drawings contributes to an improvement in the quality of mastering this division of the course of geometry in pedagogical Institute.

«**О**снования геометрии» играет важную роль в геометрической подготовке бакалавров – будущих учителей математики и информатики. Обучение умению аргументировать факты геометрических теорий, используя для этого аксиомы и ранее доказанные утверждения, цепочки логически корректных положений, является одной из задач курса [1]. Далеко не во всех разделах «Оснований геометрии» удаётся создать дидактически комфортную обстановку для студента, способствующую формированию соответствующего умения. Особенно это актуально при обучении разделу «Геометрия Лобачевского». Большинство необычных свойств фигур и понятий этой теории, таких, например, как равенство треугольников по трём углам, отсутствие прямоугольников, непостоянство суммы углов треугольников и целый ряд других, многими студентами не воспринимаются как реально существующие. И это при том, что каждое такое утверждение анализируется и доказывается преподавателем.

Обоснование планиметрии Лобачевского с помощью построения ее модели Кэли-Клейна представляет собой ещё одно испытание для студента. Почему, взяв произвольный отрезок внутри круга и откладывая его на луче с началом внутри круга сколько угодно раз, мы не выйдем за пределы круга? Те статические чертежи, которыми преподаватель традиционно сопровождает доказательство свойств модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, далеко не всегда способствуют их усвоению, а в отдельных случаях даже вызывают обратную реакцию: сомнение в справедливости этих свойств.

Наш опыт использования в курсе геометрии среды «Живая математика» [2] позволяет утверждать, что применение этого программного средства при обучении такой достаточно абстрактной

теме курса, как «Обоснование непротиворечивости геометрии Лобачевского», способствует более качественному усвоению темы. Нами разработана и внедрена в учебный процесс технология самостоятельного создания обучающимися динамических чертежей-иллюстраций модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Продемонстрируем этот тезис на конкретных примерах.

Модель любой новой теории строится на базе известной теории, непротиворечивость которой не вызывает сомнения. В качестве такой теории для плоскости Лобачевского английский математик Артур Кэли и немецкий математик Феликс Клейн выбрали евклидову плоскость. На евклидовой плоскости возьмём окружность (абсолют), любая внутренняя точка абсолюта будет представлять собой точку модели Кэли-Клейна, любая открытая хорда абсолюта – прямую модели. Принадлежность точек и прямых понимается в евклидовом смысле.

На рабочем поле среды «Живая математика» построим произвольную окружность-абсолют, выберем внутри неё две точки А и В, построим прямую, проходящую через них, найдем общие точки С и D прямой АВ с абсолютом, спрячем прямую и построим отрезок CD. Этот открытый отрезок и будет представлять собой прямую АВ, которую иногда называют гиперболической прямой. Поскольку точки С и D не принадлежат прямой АВ, условимся не окрашивать их (на рисунке 1 они залиты белым цветом). Гиперболическую прямую для удобства будем иногда обозначать точками, которые являются концами соответствующей хорды, т. е. $AB = CD$.

Перемещая с помощью мыши точки А и В прямой АВ, можно продемонстрировать многообразие прямых модели.

На рисунке 1 представлены изображения отрезка EF, луча GH, треугольника KLM, четырёхугольника и окружности, наглядно продемонстрировано выполнение аксиомы Лобачевского: через точку S, не принадлежащую прямой АВ, проходит более одной прямой, не пересекающей прямую АВ (например, DP и UV). Рисунок 1 иллюстрирует наличие единственной прямой QC, проходящей через S и параллельной АВ в направлении от А к В, а также единственной прямой PD, проходящей через S и параллельной АВ в противоположном направлении от В к А. Кроме пар параллельных прямых на рисунке представлены пары пересекающихся прямых (например, UV и XY) и сверхпараллельных прямых (например, UV и DC).

Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского

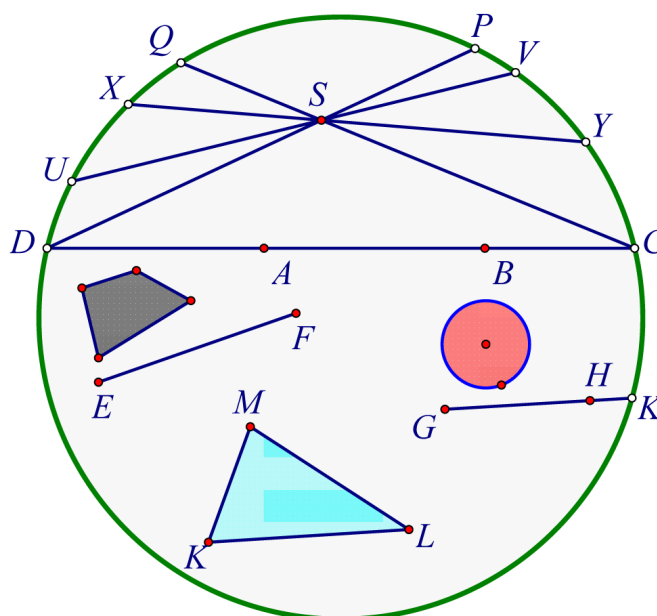


Рис. 1

Для определения луча, отрезка и ряда других понятий плоскости Лобачевского использовалось отношение порядка для троек точек в евклидовом смысле. По этой причине проверка аксиом группы порядка, как и аксиомы Лобачевского, не вызывает трудности. Ясно, что опре-

деление расстояния между точками в евклидовом смысле нам не подойдёт: при откладывании на любом луче (например, GH) отрезка равного данному (например, EF), мы можем выйти за пределы абсолюта.

Для определения расстояния между точками A и B рассмотрим сложное отношение четырёх точек (AB, CD), которое равно отношению простых отношений (AB,C)/(AB,D), где точки C и D принадлежат окружности, причем B лежит между A и C, A – между D и B (рис. 1). Это понятие заимствовано из проективной геометрии, изучение его проходило в предыдущем семестре. Поскольку пара A, B не разделяет пару C, D, то каждое из простых отношений больше нуля, а следовательно, больше нуля и сложное отношение. Определим теперь расстояние между точками AB как натуральный логарифм сложного отношения точек: $AB = \ln(AB, CD)$. Условимся называть его гиперболическим расстоянием. Создадим собственный инструмент «Гиперболическое расстояние», который позволяет для точек A и B найти расстояние между ними в смысле приведенного выше определения и вывести значение AB на экран.

Проведем разведочные эксперименты на предмет использования гиперболического расстояния в качестве измерения длин отрезков на нашей модели. Прежде всего проверим независимость гиперболического расстояния от порядка, в котором выбираются точки A и B. Для этого выведем на экран гиперболические расстояния AB и BA и убедимся в том, что $AB = BA$ при любых перемещениях этих точек.

Поместим на отрезок AB произвольную точку W, измерим гиперболические расстояния AW, WB и AB. Используя вычислительные возможности «Живой математики», найдём сумму $AW + WB$, составим таблицу (рис. 2), из которой можно предположить, что введенное измерение отрезков аддитивно. Аналогично иллюстрируется и справедливость неравенства треугольника.

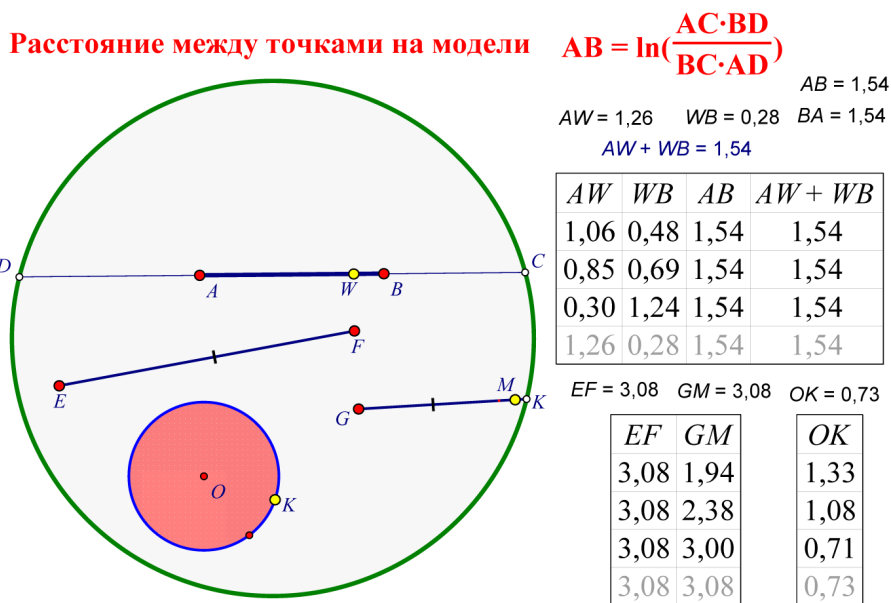


Рис. 2

А удастся ли при таком измерении отрезков найти на луче GK точку, находящуюся на расстоянии EF от начала луча G. Измерим гиперболическую длину отрезка EF и выведем полученное значение на рабочее поле (рис. 2). Поместим на луч GK точку M, измерим GM и начнём перемещать M по лучу в сторону K, выборочно включая соответствующие расстояния GM в таблицу. Оказалось, что при приближении M к абсолюту гиперболические расстояния GM становятся сколь угодно большими. Удастся подобрать такое положение точки M, что $GM = EF$ (на рис. 2 это расстояние равно 3,08).

Интересны результаты эксперимента с окружностью, которые на первый взгляд должны поставить под сомнение корректность определения расстояния между точками. Поместим на окружность с центром в точке O произвольную точку K и измерим OK. Соответствующее

число выведем на экран и начнем перемещать точку К по окружности, занося соответствующие значения ОК в таблицу (рис. 2), состоящую из одного столбца. Большинство этих значения оказались разными. Это означает, что либо точка, равноудаленная от всех точек окружности, не совпадает с евклидовым центром окружности, либо такой точки не существует вообще.

Отметим, что после разведочного эксперимента проводится строгое доказательство всех обнаруженных свойств гиперболического расстояния.

Зададим теперь движение модели так, чтобы оно сохраняло гиперболические расстояния между точками. Для этого пополним плоскость, содержащую абсолют, бесконечно удалёнными точками и бесконечно удалённой прямой, т. е. превратим нашу плоскость в проективную. Осевую симметрию относительно прямой АВ модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского зададим как гомологию проективной плоскости с осью АВ, центром гомологии S, являющимся полюсом прямой АВ относительно абсолюта, и любой парой соответственных точек U и V, лежащих на абсолюте и коллинеарных с точкой S.

Осевая симметрия модели Кэли-Клейна

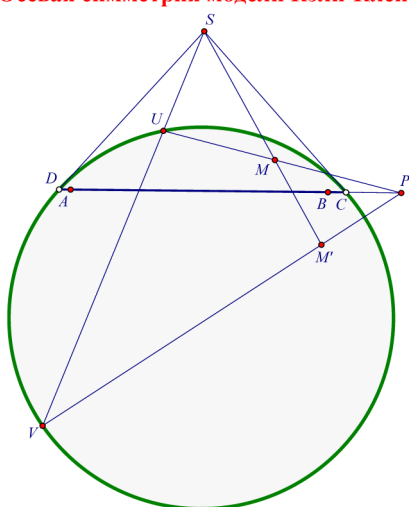


Рис. 3

Создадим в среде «Живая математика» соответствующий чертёж-иллюстрацию. Для этого выполним следующие построения: 1) проведём касательные к абсолюту в точках D и C (рис. 3); 2) найдем общую точку S построенных касательных; 3) выберем точку U на абсолюте и найдем вторую точку V пересечения луча SU с абсолютом; 4) выберем произвольную внутреннюю точку M абсолюта и построим прямую SM; 5) найдём общую точку P прямых АВ (ось гомологии) и UM; 6) построим общую точку M' прямых VP и SM. Подсветим сначала точку M, затем M' и зададим собственное преобразование «Гиперболическая осевая симметрия».

Спрячем все дополнительные построения, оставив только прямую АВ. Изобразим произвольный отрезок EF и построим его образ E'F' с помощью инструмента «Гиперболическая осевая симметрия». Измерим гиперболические расстояния между концами отрезков EF и E'F', выведем полученные числовые значения на экран, создадим таблицу из двух столбцов, содержащих гиперболические расстояния EF и E'F' (рис. 4). Совпадение чисел в каждой строке таблицы позволяет надеяться на успешное доказательство этого свойства в общем виде.

Осевая симметрия модели Кэли-Клейна

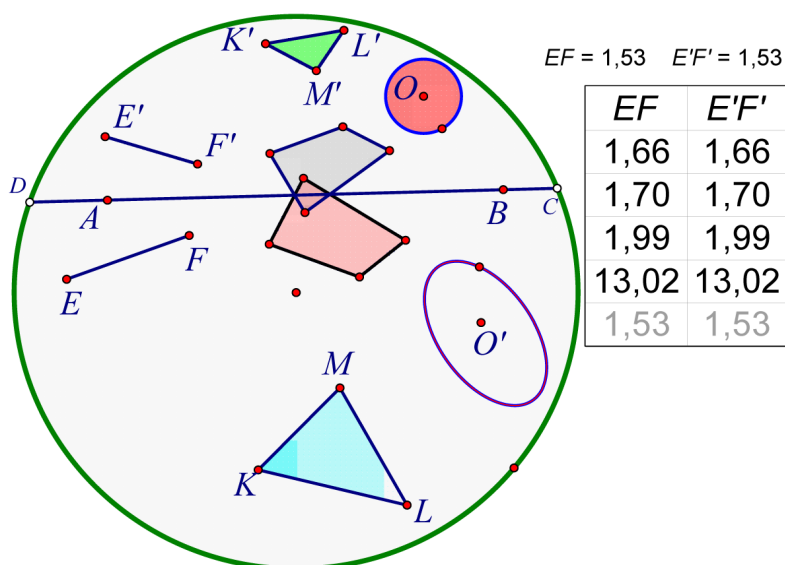


Рис. 4

Дополнительно к отрезку EF построим во внутренней области абсолюта треугольник, четырёхугольник и окружность, найдём их образы с помощью гиперболической осевой симметрии относительно АВ. Отметим, что образами многоугольников оказались многоугольники с тем же числом вершин, а образом окружности – эллипс (рис. 4).

Движения модели Кэли-Клейна

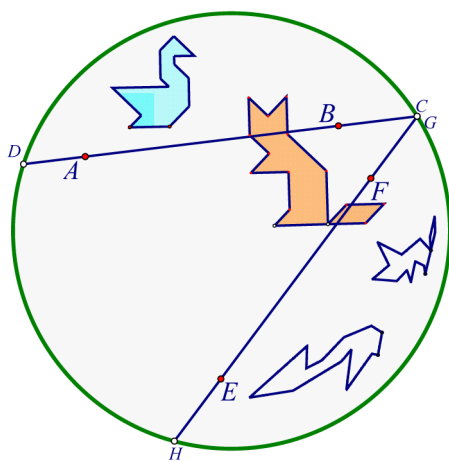


Рис. 5

Определим гиперболическое движение как композицию не более трёх гиперболических осевых симметрий. Для иллюстрации действия композиции двух осевых симметрий на той или иной фигуре зададим ещё одну осевую симметрию, например, относительно прямой EF (рис. 5). Рассмотрим произвольную точку М внутри абсолюта и построим сначала ее образ М' под действием первой симметрии, затем образ М'' точки М' под действием второй симметрии. Подсветим точки М и М'' и зададим собственное преобразование «Композиция двух гиперболических осевых симметрий». На рисунке представлены образы фигурок лебедя и лисы под действием гиперболического движения – композиции гиперболических осевых симметрий относительно параллельных прямых АВ и EF.

Для определения гиперболической величины данного угла отобразим подходящей осевой симметрией вершину этого угла на точку, являющуюся центром окружности-абсолюта. Евклидову величину угла, представляющего собой образ данного угла под действие выбранной осевой симметрии, и будем считать гиперболической мерой

Величина угла на модели Кэли-Клейна. Иллюстрация индивидуальных заданий

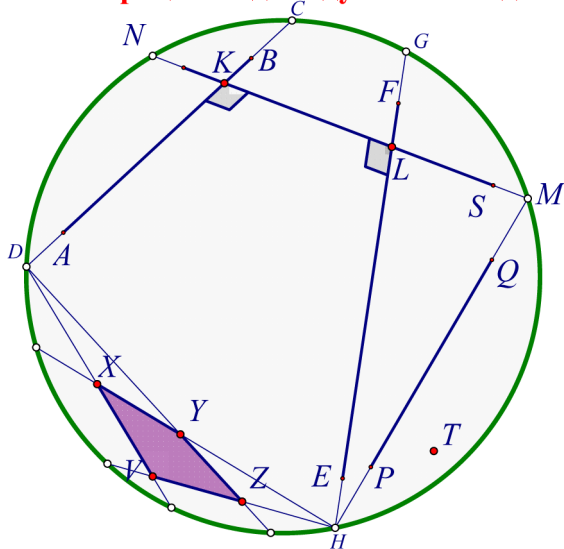


Рис. 6

данного угла. Доказывается корректность этого определения. Затем студенты самостоятельно создают чертежи-иллюстрации, визуализирующие решения индивидуальных самостоятельных заданий в виде задач планиметрии Лобачевского с использованием модели Кэли-Клейна.

На рисунке 6 представлен один из таких чертежей, на котором построен общий перпендикуляр KL к расходящимся прямым АВ и EF (задача 1), для произвольного угла ELS построена прямая PQ, параллельная его сторонам (задача 2). Доказано, что не через каждую точку (например, точку Т) внутри угла ELS можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла (задача 3), построен параллелограмм XYZV (задача 4).

Подводя итог, отметим, что использование при обучении основам геометрии среды «Живая математика» позволяет повысить качество обучения этой дисциплине, подготовить студентов

– будущих учителей математики к эффективному использованию в своей будущей профессиональной деятельности систем динамической геометрии, к получению конкретного опыта обучения математике в стиле экспериментальной математики.

Библиографический список

1. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч. 3. Основания геометрии: учебное пособие / 2-е изд., до- раб. и доп. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2009. 121 с.
2. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – буду- щих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. 516 с.

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЖИВОЙ МАТЕМАТИКИ

LABORATORY- PRACTICAL OCCUPATIONS ON THE GEOMETRY IN THE BASIC SCHOOL WITH THE USE OF LIVING MATHEMATICS

А.М. Погорелова, В.Р. Майер

A.M. Pogorelova, V.R. Mayer

Лабораторные работы, системы динамической геометрии, «Живая математика», эксперимент, исследование. В статье представлен опыт проведения лабораторно-практических занятий по геометрии в основной школе. Разработана система лабораторных работ, проведение которых предполагается на базе системы динамической геометрии «Живая математика». Подробно рассмотрены организация и технология лабораторно-практического занятия по одной из тем курса геометрии в 8 классе.

Laboratory works, the system of dynamic geometry, living mathematics, experiment, a study.

In the article the experience of conducting laboratory- practical occupations on the geometry in the basic school is represented. Is developed the system of the laboratory works, whose conducting is assumed on the base of the system of dynamic geometry living mathematics. Organization and technology of laboratory- practical occupation on one of the themes of the course of geometry in the class is in detail 8 examined.

Одной из форм организации исследовательской деятельности является лабораторная работа. В процессе ее выполнения у учащихся рождаются истина, новое знание, понимание математических законов на практике. Использование лабораторных работ на уроках математики позволяет повысить интерес учащихся к ней, предоставляет возможность ученикам оказаться в роли исследователя и экспериментатора.

Обучение школьников основным способам формирования математических понятий и утверждений – одна из важнейших задач школьного математического образования. Проведение лабораторных работ с использованием такой виртуальной математической лаборатории, как система динамической геометрии (СДГ), без всякого сомнения, направлено на решение этой задачи. В этой связи особо отметим тот факт, что каждая такая лабораторная работа, как правило, выполняется небольшим коллективом, состоящим из нескольких учеников.

Коллективный разум позволяет экономить учебное время на формировании тех понятий и умений, которые необходимы для выполнения лабораторного задания. В группе идёт интенсивный обмен знаниями, впечатлениями и наблюдениями, т. е. тот процесс, который в первом приближении можно назвать самообразованием. В идеале (к сожалению, это происходит не всегда) внутри группы должны происходить обсуждение условий задачи, выработка алгоритма действий, совместное создание исследуемого электронного чертежа, подбор параметров исследования, анализ таблицы с результатами эксперимента. Тот ученик, кстати, не обязательно самый сильный, который по итогам разведочного эксперимента с динамическим чертежом не только заметит искомую закономерность, но и увидит геометрическую причину ее возникновения, испытывает большой эмоциональный подъём, делится своей догадкой с остальными, помогает осмыслить и понять её всей группе. В свою очередь, учитель имеет возможность осуществить дифференцированный и индивидуальный подход к учащимся, учитывая их темп работы. При выполнении лабораторной работы школьники учатся решать конкретную практическую задачу, опираясь на имеющиеся у них математические знания и жизненный опыт. Помимо образовательной цели, лабо-

рабочая работа играет большую роль в достижении воспитательных и развивающих целей. Важно, чтобы каждый ученик осмысленно относился к тому, что он делает. Этого можно достичь в результате деятельности в рамках лабораторно-практического занятия. В процессе этой деятельности школьник не только применяет полученные знания, но и учится самостоятельно выполнять задания, ответственно относиться к работе, усваивать отдельные фрагменты изучаемой темы.

Таким образом, использование лабораторных работ при обучении математике поможет достичь следующих целей:

- образовательные: усвоение математических знаний, формирование практических умений и навыков, усвоение принципов действия и навыков использования различных счетных, измерительных и чертежных инструментов, совершенствование знаний учащихся и обучение их самостоятельному применению этих знаний, обучение решению практико-ориентированных задач;

- воспитательные: формирование аккуратности и ответственности за свою деятельность, активизация учебной деятельности исследовательского характера;

- развивающие: развитие наблюдательности, умения выдвигать и проверять гипотезы и предположения, опровергать ошибочные обобщения и суждения, развитие способности учащихся работать в коллективе, а также интереса к изучаемому предмету.

Применение лабораторных работ, систематическое включение их в учебную работу школьников для повышения научно-теоретического уровня, для усиления творческого характера процесса обучения математике помогает улучшить качество математических знаний, является средством формирования прочных конструктивных, измерительных и вычислительных умений и навыков.

Анализ литературы по дидактике и методике преподавания математики позволяет видеть многоаспектность такого понятия, как лабораторная работа. Лабораторная работа может выступать в качестве метода, формы и средства обучения. Проведение лабораторных работ включает в себя следующие методические приемы:

- 1) постановку темы занятий и определение задач лабораторной работы;
- 2) определение порядка лабораторной работы или отдельных ее этапов;
- 3) непосредственное выполнение лабораторной работы учащимися и контроль учителя за ходом занятий и соблюдением техники безопасности;
- 4) подведение итогов лабораторной работы и формулирование основных выводов.

Как было отмечено выше, важно правильно организовать работу учеников. Всякая лабораторная работа по математике содержит в себе определенные этапы совместных действий учителя и ученика, самостоятельную или групповую деятельность учащихся. Поэтому необходимо грамотно подготовить лабораторно-практическое занятие, а затем провести его. Авторы учебных пособий по математике выделяют следующие этапы подготовки и проведения лабораторной работы:

- подготовительный этап (учитель готовит инструкции, раздаточный материал, инструменты и т.п.);

- обсуждение учителем задания с группой, ответы на вопросы ее членов;
- самостоятельное коллективное исполнение задания посредством чтения, практической деятельности, распределение частных заданий между участниками рабочей группы;
- консультации учителя в процессе обучения;
- обсуждение и оценка полученных результатов членами рабочей группы;
- письменный или устный отчет учащихся о выполнении задания.

Нами на базе СДГ «Живая математика» разработана система лабораторных работ для 8 класса (табл. 1).

Таблица 1

Тема	Лабораторные работы
Четырехугольники	– Сумма углов n -угольника – Свойства параллелограмма – Свойства трапеции
Площадь	– Равносоставленные и равновеликие фигуры – Определение вида треугольника – Сумма квадратов сторон параллелограмма
Подобные треугольники	– Отношение площадей подобных треугольников – Средняя линия треугольника
Окружность	– Касательная к окружности – Центральные углы – Вписанные углы

Отметим, что «Живая математика» имеет великолепные возможности для того, чтобы качественно и эффективно провести каждую из отмеченных в таблице лабораторных работ. Современный интерфейс, конструктивные, вычислительные и анимационные возможности среды позволяют учащимся за короткое время построить необходимый чертёж-иллюстрацию, использовать его для нахождения искомого свойства или закономерности.

Как и в [1], лабораторную работу структурно представим следующим образом: 1) установочное собеседование, формирование групп; 2) формулировка темы и цели работы; 3) выбор СДГ в качестве виртуальной лаборатории; 4) актуализация возможностей выбранной СДГ, необходимых для выполнения работы; 5) перечисление основных этапов выполнения работы; 6) подведение итогов работы; 7) завершающая беседа.

Рассмотрим в качестве примера проведение в 8 классе лабораторной работы по теме «Сумма углов n -угольника».

На *установочном собеседовании* актуализируются знания учеников о сумме углов треугольника (7 класс), включая набросок схемы соответствующего доказательства, обсуждается важность этого свойства как в теории, так и на практике (приводится 1-2 простых примера). Поскольку многоугольники не исчерпываются треугольниками, не менее важно уметь находить сумму углов четырёхугольников, пятиугольников и т.д. Предлагается с помощью системы динамической геометрии вывести общую формулу для вычисления суммы углов в произвольном n -угольнике. Класс разбивается на группы по 4-5 человек, каждой группе предоставляется персональный компьютер (ноутбук), распределяются обязанности.

Учитель сообщает *тему лабораторной работы* (соответствующий текст проектируется на экран), формулирует ее *цель*: вывод формулы для вычисления суммы углов n -угольника.

Каждая группа *выбирает* ту систему динамической геометрии, которая устраивает большую часть коллектива, как правило, это «Живая геометрия», «Живая математика» или GeoGebra. Наиболее предпочтительный исход – выбор единой СДГ, с которой ученики лучше всего знакомы. Система должна быть установлена как на ноутбуках, так и на учительском компьютере. В данной лабораторной работе рассмотрено использование системы динамической геометрии «Живая математика».

Далее учитель на своем компьютере *актуализирует возможности СДГ, необходимые для выполнения работы*. В частности, в рассматриваемой лабораторной работе потребуется строить многоугольники, окрашивать их, обозначать вершины, пользоваться маркером, измерять величины углов, находить их суммы, составлять таблицы для подтверждения или опровержения той или иной гипотезы. Учитель в режиме непосредственной работы с программой в течение 4-5 минут напоминает группам о том, какие команды и опции системы позволяют реализовать эти возможности.

Затем учитель предлагает следующие *этапы проведения лабораторной работы* (соответствующая информация выводится на экран).

Этап 1. Открыть рабочее поле среды «Живая математика» и на первой странице построить динамический чертёж-иллюстрацию выпуклого четырёхугольника. Обозначить четырёхугольник, допустим, ABCD, отметить углы цветным маркером, найти градусные меры углов, вычислить сумму углов, составить соответствующую таблицу (рис. 1). Изменяя с помощью мыши расположения вершин четырёхугольника, заполнить таблицу для четырёх-пяти типов четырёхугольника. Вывести на экран результат эксперимента. Сформулировать гипотезы о том, какой вид имеет искомая формула для произвольного n, проверив ее для случая n = 4. На рисунке 1 приведены возможные варианты этой формулы:

$$S_n = 90^\circ n, S_n = 180^\circ(n-2), S_n = 360^\circ(n-3). \quad (1)$$

Сумма углов выпуклого n-угольника

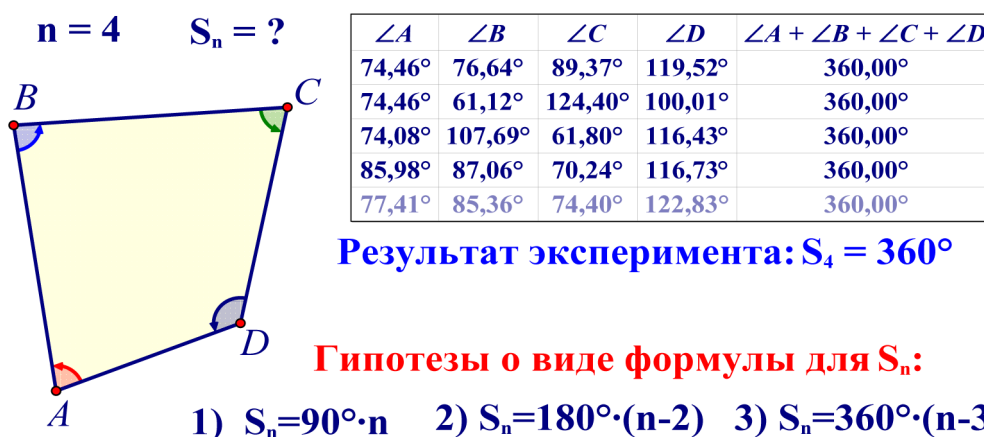


Рис. 1

Этап 2. Создать вторую страницу, скопировав для этого на новую страницу содержание первой страницы. Удалить со второй страницы отрезок AD и таблицу. Заменить текст n=4 на текст n=5, достроить четырёхугольник до пятиугольника ABCDE (рис. 2). Выполнить необходимые обозначения и измерения, вывести на экран сумму углов пятиугольника. Изменяя положение вершин пятиугольника, заполнить таблицу, необходимую для констатации результатов эксперимента. Вывести на экран результат эксперимента. Выяснить, какие из гипотез получают своё подтверждение.

Несложно проверить, что первая и третья гипотезы не удовлетворяют результату эксперимента, полученным на втором этапе проведения лабораторной работы.

Сумма углов выпуклого n-угольника

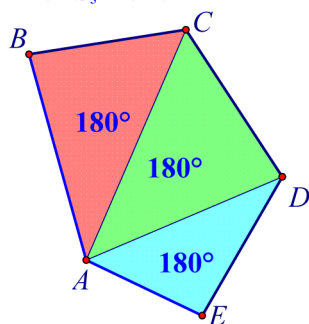


Рис. 2

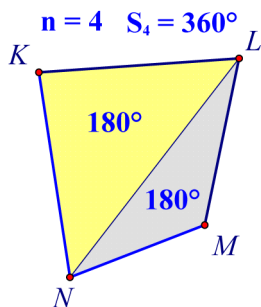
Этап 3. Создать третью страницу, представляющую собой копию второй. Удалить с этой страницы всё, кроме заголовка, динамического чертежа и той гипотезы о сумме углов многоугольника, которая была подтверждена на втором этапе. Скопировать на эту страницу динамический чертёж четырёхугольника с первой страницы. Попытаться найти сумму углов четырёхугольника и пятиугольника без применения формулы, справедливость которой мы пока не установили, а также без применения вычислительных возможностей «Живой математики». Разрешается использовать только ранее доказанные утверждения, например теорему о сумме углов треугольника, делать дополнительные построения, например, проводить диагонали.

Сумма углов выпуклого n-угольника

$n = 5 \quad S_5 = 540^\circ \quad S_n = 180^\circ \cdot (n-2)$



$S_5 = 180^\circ \cdot (5-2) = 360^\circ$



$S_4 = 180^\circ \cdot (4-2) = 360^\circ$

Рис. 3

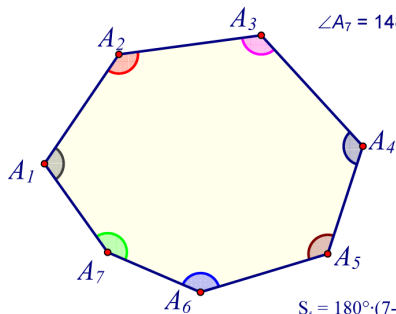
После серии наводящих вопросов на третьей странице среды «Живая математика» должно появиться изображение, близкое к тому, что представлено на рисунке 3. Делается вывод о том, что сумма углов выпуклых четырёхугольника и пятиугольника всегда равна 360° и 540° , соответственно, т. е. формула $S_n = 180^\circ(n-2)$ в случае $n = 4$ и $n = 5$ верна.

Используя идею доказательства для частных случаев, учитель с помощью класса на своем компьютере демонстрирует динамический чертёж и проводит строгое доказательство для произвольного n .

Этап 4. Создать четвёртую страницу, построить на ней изображение n -угольника (не обязательно выпуклого) для достаточно большого n , найти в нём сумму углов. На рисунке 2 приведены примеры вычисления суммы углов в выпуклом 7-угольнике и не выпуклом 13-угольнике.

Сумма углов выпуклого 7-угольника

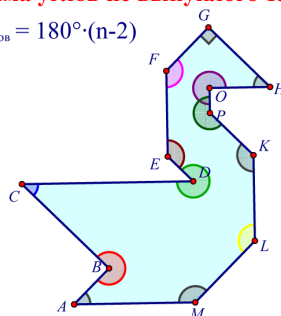
$\angle A_1 = 110,39^\circ \quad \angle A_2 = 131,85^\circ \quad \angle A_3 = 124,74^\circ$
 $\angle A_4 = 119,53^\circ \quad \angle A_5 = 124,85^\circ \quad \angle A_6 = 139,88^\circ$
 $\angle A_7 = 148,76^\circ$



$S_7 = 180^\circ \cdot (7-2) = 900^\circ$
 $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 + \angle A_7 = 900,00^\circ$

Сумма углов не выпуклого 13-угольника

$\sum_{\text{углов}} = 180^\circ \cdot (n-2)$



$\angle A = 45,00^\circ$
 $\angle B = 270,00^\circ$
 $\angle C = 45,00^\circ$
 $\angle D = 315,00^\circ$
 $\angle E = 135,00^\circ$
 $\angle F = 135,00^\circ$
 $\angle G = 90,00^\circ$
 $\angle H = 45,00^\circ$
 $\angle O = 270,00^\circ$
 $\angle P = 225,00^\circ$
 $\angle K = 135,00^\circ$
 $\angle L = 135,00^\circ$
 $\angle M = 135,00^\circ$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle O + \angle P + \angle K + \angle L + \angle M = 1980,00^\circ$
 $\sum_{\text{углов}} = 180^\circ \cdot (13-2) = 180^\circ \cdot 11 = 1980^\circ$

Рис. 4

Подводя итог лабораторной работе, необходимо акцентировать внимание учеников на том, что никакой эксперимент и никакое число опытов не являются основанием утверждать, что то или иное утверждение или та или иная формула будут справедливы. Для их обоснования необходимо провести доказательство. Можно предложить ученикам найти другой способ доказательства выведенной формулы, попытаться ее обобщить на случай не выпуклого многоугольника.

Библиографический список

1. Фомина Н.И. Компьютерный лабораторный практикум по алгебре и началам математического анализа // Сб. трудов IV Всероссийской научно-методической конференции «ИТвМиМО». Красноярск, 18–19 ноября 2015. Красноярск, 2015. – С. 115–121.

О ТИПАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ПАРКЕТНЫМИ ГРЯНЯМИ

ABOUT THE TYPES OF CONVEX POLYHEDRA WITH PARQUET FACES

Е.С. Окладникова, А.В. Тимофеев

E.S. Okladnikova, A.V. Timofeenko

Паркетный многоугольник, m-правильногранник, несоставной правильногранник, тип вершины, тип многоугольника, тип многогранника.

На язык алгебраических моделей переведено понятие «комбинаторный тип многогранника». Доказано, что кроме семи многогранников каждый несоставной правильногранник с единичными рёбрами является несоставным 0-правильногранником, и описано строение исключений.

Parquet polygon, m-Regular-Hedron, non-composite Regular-Hedron, vertex type, type of polygon, polyhedron type.
In the language of algebraic models translated the concept of combinatorial type of the polyhedron. It is proved that in addition to the seven polyhedrons, each non-composite privilegiant with unit edges is a non-composite 0-profilirovannyh and describes the structure of the exceptions.

Правильногранником называется многогранник, грани которого правильные или составлены из правильных многоугольников так, что вершины этих многоугольников служат и вершинами многогранника. С точностью до подобия известны все выпуклые правильногранники [1; 2]. Кроме правильных ещё пять паркетных многоугольников служат гранями некоторых правильногранников (см. электронный атлас <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>). Напомним, выпуклый многоугольник называется *паркетным*, если он может быть составлен из конечного числа равноугольных многоугольников [3]. Вершины и рёбра этих многоугольников, не совпадающие с вершинами и рёбрами составленного из них паркетного многоугольника, называются фиктивными. Кроме четырех бесконечных серий, существует конечное число типов выпуклых многогранников с паркетными гранями. Настоящая работа нацелена на решение проблемы: «Каковы все типы выпуклых многогранников с паркетными гранями?»

В публикации [3] отмечается, что, кроме четырёх бесконечных серий, существует лишь конечное число типов выпуклых многогранников с паркетными гранями и найти их можно по схеме, которая привела в работе [4] к нахождению всех выпуклых тел с правильными гранями. Теоремы 1 и 2 дают представление, насколько увеличивается объём вычислений при поиске тел с паркетными гранями в сравнении с правильногранными телами.

В работе [4] выпуклые правильногранные многогранники, нерассекаемые никакой плоскостью по рёбрам на правильногранные части, названы простыми. Если же таким свойством обладает выпуклый правильногранник, то его называют *несоставным*. Согласно публикациям [4; 5; 6], существуют только следующие несоставные тела:

$$P_3, P_4, \dots; A_4, A_5, \dots; M_1, M_2, \dots, M_{28}, Q_1, Q_2, \dots, Q_6. \quad (1)$$

Первыми в этом списке расположены бесконечные серии призм и антипризм. За ними следуют правильногранные пирамиды M_1, M_2, M_3 с трёх-, четырёх- и пятиугольными основаниями соответственно и другие тела, которые называют сегодня многогранниками Залгаллера, Иванова и Пряхина.

Соединением одинаковыми гранями из несоставных тел можно получить каждый выпуклый правильногранник. В отличие от выпуклых правильногранников, каждому типу которых соответствует единственный с точностью до подобия многогранник, типу выпуклого тела с паркетными гранями соответствует, как правило, бесконечное множество попарно неподоб-

ных многогранников. Такие тела встречаются и в следующей доказанной на вэбинаре «Группы и правильные многогранники» (<http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra>) теореме.

Теорема 1. *Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из не более пятнадцати правильных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел*

- 1) $M_1, M_2, M_3;$
- 2) $M_1+M_1, M_1+M_2, M_2+M_2, M_3+M_3;$
- 3) ${}^\circ S_{2,2}+M_1, S_{2,2}+M_2, {}^\circ S_{2,2}+M_2';$
- 4) ${}^\circ S_{3,1}+M_2, {}^\circ S_{3,1}+M_2', S_{3,2}+M_1, S_{2,2}+S_{2,2}, S_{2,2}+S_{2,2}', {}^\circ S_{2,2}+S_{2,2}'';$
- 5) ${}^\circ S_{4,1}+M_1, {}^\circ S_{4,4}+M_2;$
- 6) ${}^\circ S_{5,1}+M_1, {}^\circ S_{5,2}+M_1, {}^\circ S_{5,2}+M_2, {}^\circ S_{3,1}+S_{3,1}, {}^\circ S_{3,1}+S_{3,3};$
- 7) ${}^\circ S_{6,2}+M_1, {}^\circ S_{6,5}+M_2, S_{4,6}+S_{3,1};$
- 8) ${}^\circ S_{7,1}+M_1, {}^\circ S_{7,2}+M_1, S_{7,3}+M_2, {}^\circ S_{6,2}+S_{2,2}, {}^\circ S_{6,5}+S_{2,2}, {}^\circ S_{5,1}+S_{3,1};$
- 9) ${}^\circ S_{8,3}+M_2, {}^\circ S_{6,5}+S_{3,1}, {}^\circ S_{6,5}+S_{3,3};$
- 10) ${}^\circ S_{9,1}+M_1, {}^\circ S_{9,1}+M_2, {}^\circ S_{9,3}+M_2, {}^\circ S_{8,3}+S_{2,2}, {}^\circ S_{5,1}+S_{5,1};$
- 11) ${}^\circ S_{10,1}+M_2, {}^\circ S_{10,4}+M_2, {}^\circ S_{10,5}+M_1;$
- 12) ${}^\circ S_{11,2}+M_1, {}^\circ S_{11,3}+M_1, S_{9,1}+S_{3,1}, {}^\circ S_{9,1}+S_{3,1}', {}^\circ S_{9,3}+S_{3,1};$
- 13) ${}^\circ S_{12,3}+M_2, {}^\circ S_{12,4}+M_1, {}^\circ S_{10,4}+S_{3,1};$
- 14) ${}^\circ S_{13,1}+M_1, {}^\circ S_{13,1}+M_2, {}^\circ S_{13,3}+M_2, {}^\circ S_{12,3}+S_{2,2}, S_{7,3}+S_{7,3}, S_{7,3}+S_{7,3}';$
- 15) ${}^\circ S_{14,1}+M_2, S_{14,5}+M_2, S_{14,6}+M_2, S_{12,4}+S_{3,3}, {}^\circ S_{12,5}+S_{3,3};$

причём многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j-м месте, штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел, кружком помечены тела с фиктивными вершинами.

Типом вершины многогранника и, в частности, многоугольника называется упорядоченный набор чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, k \in \{1, 3, 4, 5\}$, равных величинам плоских углов граней, встречающихся в данной вершине при обходе вокруг вершины от её плоского угла к смежному её плоскому углу, затем к смежному со вторым углом третьему плоскому углу вершины. Если $k > 3$, то необходимо перейти к четвёртому и, быть может, пятому плоскому углу вершины. Поскольку подобные многогранники мы не различаем, относя к подобию и несобственное (по другой терминологии второго рода) преобразование, меняющее с фиксированным коэффициентом расстояние между точками и их образами, то к одному типу относятся все типы, полученные из данного, циклической перестановкой его чисел, обратной перестановкой и их произведениями. Если на множестве всех типов вершин, равных данному типу, ввести лексикографический порядок, т. е. как при записи натурального числа арабскими цифрами, то наиболее употребительной будет запись наименьшего типа.

Вершине паркетного многоугольника соответствует плоский угол такой, как у правильного n -угольника. Поэтому такому углу в типе паркетного n -угольника вместо его величины $\frac{n-2}{2n}\pi$ будем записывать n .

Типом многоугольника называется упорядоченный набор типов его вершин, соответствующий расположению вершин при обходе по границе многоугольника. Из всех записей одного типа многоугольника наиболее употребительную выбираем так, как делали это для типа вершины. Типы паркетных многоугольников давно известны: если паркетный многоугольник можно сложить из двух и более равноугольных многоугольников, то его тип можно найти в [3, 8]. Из 23 типов паркетных многоугольников только (3, 3, 6, 6) (трапеция) и (3, 6, 3, 6) (ромб), а также (6, 12², 6, 12⁶) и (6, 12⁴, 6, 12⁴) отличаются лишь перестановками чисел.

Типом многогранника называется алгебраическая модель, носителем ν которой служит упорядоченный набор типов вершин, а каждое множество отношений f состоит из упорядо-

ченных наборов f_t номеров вершин грани, где буквой t обозначен тип грани f_t . Рассмотрим типы простейших многогранников.

Четырёхугольная пирамида

$$M_2 = \left(\{ (3^4), (3^2, 4), (3^2, 4), (3^2, 4), (3^2, 4) \}, f \right),$$

$$f = \left([1, 2, 3]_{(3^3)}, [1, 3, 4]_{(3^3)}, [1, 4, 5]_{(3^3)}, [1, 5, 2]_{(3^3)}, [2, 5, 4, 3]_{(4^4)} \right).$$

Нарощенная четырёхугольная пирамида

$$P_{2,22} = \left(\{ (3^3), (3, 6^2), (3^2, 4), (3, 6, 4), (3, 4, 6), (3^2, 4) \}, f \right),$$

$$f = \left([2, 6, 3]_{(3^3)}, [1, 4, 5]_{(3^3)}, [1, 2, 3, 4]_{(3, 6, 3, 6)}, [1, 5, 6, 2]_{(3, 6, 3, 6)}, [3, 6, 5, 4]_{(4^4)} \right).$$

Следующими определениями зложим в название многогранника с паркетными гранями составленность последних из правильных многоугольников и максимальную разность длин его рёбер.

Определение 1, [7]. Пусть m – целое неотрицательное число. Выпуклый многогранник называется m -правильногранником, когда выполняются следующие условия: 1) грани составлены из правильных многоугольников, стороны которых измеряются натуральными числами; 2) максимальная длина ребра равна $m+1$; 3) у любого подобного многогранника с коэффициентом подобия меньшим единицы существует ребро ненатуральной длины или существует грань, которую нельзя составить из правильных многоугольников с целыми рёбрами.

Каждый выпуклый правильногранник является 0-правильногранником. Примерами 0-правильногранников, не являющихся правильногранниками, служат призмы, в основаниях которых лежат паркетные многоугольники типов

$$(4, 12^2, 4, 12, 6, 12); (6^2, 12^2, 6^2, 12^2), (6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2), (6, 12^4, 6, 12^4)$$

(рис. 13 работы [7]), а боковыми гранями являются квадраты.

Определение 2, [7]. Пусть m_0 – целое неотрицательное число. Выпуклый m_0 -правильногранник называется *составным*, если некоторая плоскость делит его на m_1 -правильногранник и m_2 -правильногранник для некоторых целых неотрицательных чисел m_1, m_2 . В противном случае m_0 -правильногранник называется *несоставным*.

От доказанной в работе [7] теоремы 1 расположенная ниже теорема 2 отличается более развёрнутой формулировкой, которая показывает, что из семи её многогранников пять разбиваются на правильногранные пирамиды с единичными рёбрами. Все выпуклые с рёбрами длины 1 или 2 соединения не более 15 таких пирамид расположены выше в теореме 1.

Теорема 2. *Кроме семи многогранников каждый несоставной правильногранник с единичными рёбрами является несоставным 0-правильногранником. Исключения можно представить следующими соединениями m -правильногранников, $m = 0, 1$:*

- 1) призма $\Pi_6 = 6\Pi_3$;
- 2) трёхскатный купол $M_4 = 4M_1 + 3M_2$;
- 3) усечённый тетраэдр $M_{10} = 7M_1 + 8M_2$;
- 4) усечённый октаэдр $M_{16} = 32M_1 + 32M_2$;
- 5) усечённый икосаэдр $M_{19} = 2M_{3a} + M_{19a} = 3M_{3a} + M_{19b}$, где M_{3a} – усечённая по средним линиям боковых граней пятиугольная пирамида с правильным пятиугольником со сторонами длины два в основании, M_{19a} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} параллельными плоскостями двух тел M_{3a} , M_{19b} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} тремя плоскостями тел M_{3a} ;
- 6) наклонная призма (многогранник Иванова) $Q_1 = 6M_1 + 6M_2$;
- 7) многогранник Иванова $Q_2 = 16M_1 + 16M_2$.

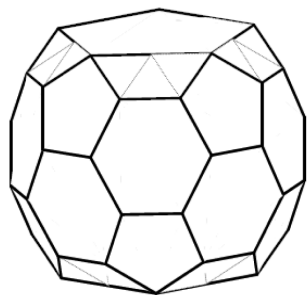


Рис. 1. Проекция поверхности

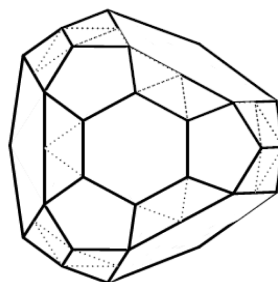


Рис. 2. Проекция поверхности тела M_{19a} тела M_{19b}

Доказательство. Поскольку каждое тело списка (1) является несоставным, рёбра его единичные, то каждое пересечение такого тела с плоскостью, проходящей по рёбрам, является неправильным многоугольником и не может быть паркетным многоугольником без фиктивных вершин. Выяснив, что паркетным такой многоугольник быть не может, переходим к сечениям плоскостью, которая проходит по внутренним точкам грани. Поскольку рёбра этой грани единичные, то число её сторон равно шести. Таким образом, кандидатами на исключения теоремы являются следующие несоставные правильнoгрaнники с 6-угольными гранями: $\Pi_6, A_6, M_4, M_{16}, M_{17}, M_{18}, M_{19}, M_{20}, Q_1, Q_2, Q_5, Q_6$.

Нетрудно увидеть, что сечение любой плоскостью тел $A_6, M_{17}, M_{18}, Q_5, Q_6$ не делит каждое из них на m -правильногрaнники. Существование указанных теоремой 2 разбиений оставшихся тел следует из построения описанных в ней исключений. Обратимся к каждому из них.

Шестиугольная призма Π_6 . Согласно формуле $\Pi_6 = (\Pi_3 + P_{2,2}) + (\Pi_3 + P_{2,2}), P_{2,2} = \Pi_3 + \Pi_3$, соединением по прямоугольным граням две призмы с трапециями типа $(3^2, 6^2)$ в основаниях и получим призму Π_6 .

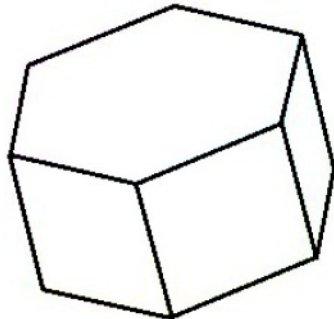


Рис. 3. Шестиугольная призма Π_6

Трёхскатный купол M_4 составлен из семи правильнoгрaнных пирамид по следующей схеме: $M_4 = (P_{2,22} + M_1) + (P_{2,22} + P_{2,22}) = 4M_1 + 3M_2 = S_{7,3}$, где $P_{2,22} = M_1 + M_2$ – соединение тетраэдра M_1 и квадратной пирамиды M_2 боковыми гранями (Е. Г. Абубакирова).

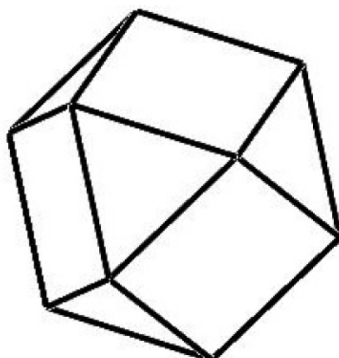


Рис. 4. Трёхскатный купол M_4

Усечённый тетраэдр M_{10} . Из 15 правильных пирамид составлен усечённый тетраэдр $M_{10} = (M_1 + (M_2 + M_2) + M_1) + M_1 + ((M_2 + M_4 + M_2) + M \square_2) = 7 M \square_1 + 8 M_2 = S_{15,4}$, (Е.Г. Абубакирова).

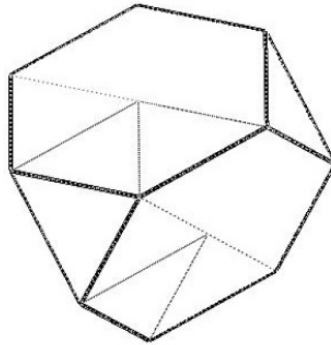


Рис. 5. Усечённый тетраэдр M_{10}

Усечённый октаэдр M_{16} с квадратом, двумя шестиугольниками в каждой вершине и с единичными рёбрами составлен из 64 правильных пирамид:

$M_{16} = M_{16a} + 2 M_{2a}$, где $M_{16a} = 2 \left((S_{8,3} + S_{2,2}) + S_{3,1} \right) + \left(\left((S_{8,3} + M_2) + S_{3,1} \right) + S_{2,2} \right) + S_{6,2}$, $S_{2,2} = M_1 + M_2$, $S_{3,1} = S_{2,2} + M_1$, $S_{3,3} = S_{2,2} + M_2$, $S_{6,2} = \left((S_{2,2} + S_{2,2}) + M_2 \right) + M_1$, $S_{8,3} = \left((S_{2,2} + S_{2,2}) + S_{3,1} \right) + M_2$, $M_{2a} = (S_{3,1} + S_{3,3}) + S_{3,3}$ – усечённая по средним линиям боковых граней четырёхугольная пирамида с квадратом со сторонами длины два в основании, $M_{16a} = 24M_1 + 22M_2$ 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{16} параллельными плоскостями двух тел M_{2a} .

Усечённый икосаэдр $M_{19} = 2 M_{3a} + M_{19a} = 3 M_{3a} + M_{19b}$, где M_{3a} – усечённая по средним линиям боковых граней пятиугольная пирамида с правильным пятиугольником со сторонами длины два в основании, M_{19a} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} параллельными плоскостями двух тел M_{3a} , M_{19b} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} трёх тел M_{3a} .

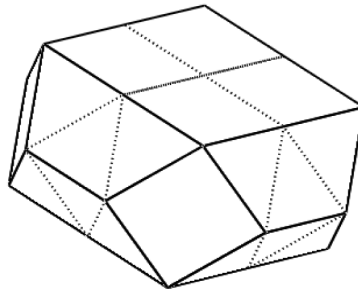


Рис. 6. Проекция видимых граней тела M_{16a}

Разбиение многогранника Иванова Q_1 на правильные пирамиды

Предложение 1. Для многогранников Q_1 , M_1 и M_2 с одинаковыми рёбрами справедливо равенство

$$Q_1 = 2 \left(\left((M_1 + M_2) + M_1 \right) + \left((M_1 + M_2) + M_2 \right) \right), \quad (2)$$

где скобки указывают на порядок соединений одинаковыми гранями, а число 2 говорит, что соединены два стоящих за ним многогранника.

Доказательство. Возьмем правильный тетраэдр. Разобьём рёбра пирамиды пополам. Получим новые шесть точек, находящихся в серединах ребер тетраэдра. Соединив их, получим в каждой грани по три её средние линии. Отсекая по этим линиям четыре тетраэдра, заметим, что остался восьмигранник с правильными треугольными гранями и четырьмя рёбрами в каждой вершине, то есть октаэдр. Поскольку октаэдр составлен из двух пирамид M_2 и отсечены были пирамиды M_1 , то справедлива.

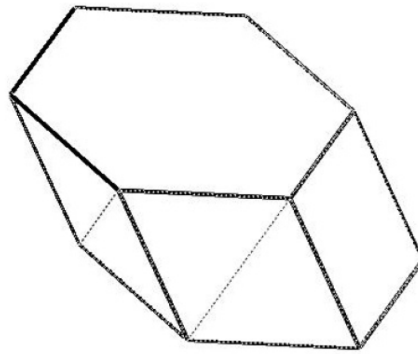


Рис. 7. Наклонная призма Q_1

Лемма. Сумма двугранных углов между смежными гранями тела M_1 и треугольными смежными гранями тела M_2 равна π .

Рассмотрим многогранники $(M_1 + M_2) + M_1$ и $(M_1 + M_2) + M_2$, получившие в теореме 1 обозначения $S_{3,1}$ и $S_{3,3}$ соответственно.

Многогранник $S_{3,3}$ получен соединением трёх правильных пирамид: одной пирамиды M_1 и двух пирамид M_2 целыми гранями. Это утверждение записывается формулой $(M_1 + M_2) + M_2$. Из леммы следует, что условные рёбра многогранников $S_{3,1}$ и $S_{3,3}$ действительно соединяют расположенные в одной плоскости треугольники и квадраты.

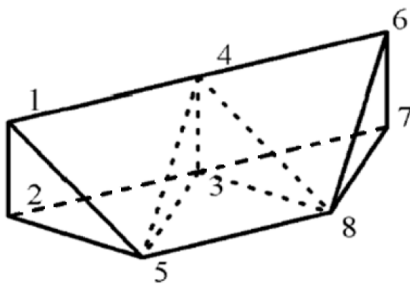


Рис. 8. $S_{3,3}$

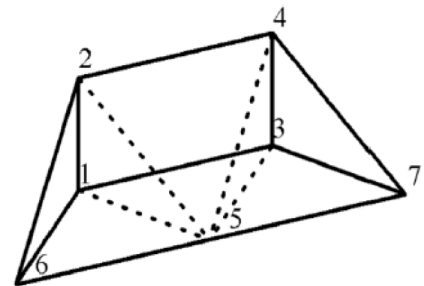


Рис. 9. $S_{3,1}$

Если соединять тела $S_{3,1}$ и $S_{3,3}$ трапециями, то каждое их общее боковое ребро является ребром двугранного угла, равного сумме двугранного угла тетраэдра и угла между смежными боковыми гранями четырехугольной пирамиды. Поэтому, согласно лемме, два названных ребра трапеции становятся условными, то есть они будут соединять находящиеся в одной плоскости треугольники. Получим 6-составное тело $S_{6,3}$. Поскольку его трапециевидные грани параллельны и смежны с одной прямоугольной гранью, то одно из соединений тел $S_{6,3}$ по прямоугольным граням и будет многогранником Q_1 . Предложение 1 доказано.

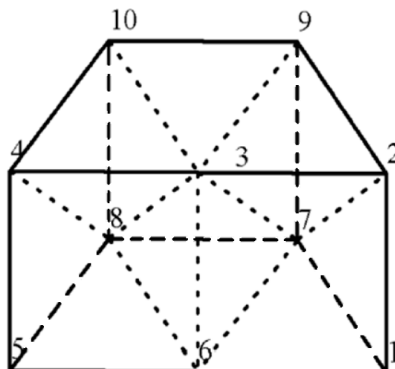


Рис. 10. Многогранник $S_{6,3}$

Разбиение правильногранника Иванова Q_2 на правильногранные пирамиды

Предложение 2. Соединение пирамид M_1 и M_2 по схеме $2((Q_1+M_2)+((M_1+M_2)+M_1))$, где $Q_1=2(((M_1+M_2)+M_1)+((M_1+M_2)+M_2))$, приводит к многограннику Иванова Q_2 .

Доказательство. Предложение 1 содержит равенство (2). Там выяснено, почему соединение пирамид M_1 и M_2 одинаковыми гранями ведёт к появлению ромбических граней у призмы M_1+M_2 . Поэтому в соединении Q_1+M_2 ромбическая грань тела Q_1 и смежная с ней треугольная грань пирамиды M_2 попадают в одну плоскость и образуют трапецию. По той же причине шестиугольная грань призмы Q_1 продолжается треугольником до пятиугольника с двумя смежными рёбрами длины 2.

Присоединим трапециевидными гранями к многограннику Q_1+M_2 многогранник $S_{3,1}, S_{3,1}=(M_1+M_2)+M_1$. В соединении $Q_1+M_2+S_{3,1}$ треугольная грань тела Q_1+M_2 и треугольная грань тела $S_{3,1}$ попадают в одну плоскость и образуют ромб. Также при соединении тетраэдра из $S_{3,1}$ и четырёхугольной пирамиды из Q_1 треугольная грань тела $S_{3,1}$ и ромбическая грань тела Q_1+M_2 попадают в одну плоскость и образуют трапецию. Четырёхугольная грань тела $S_{3,1}$, шестиугольная грань тела Q_1 и получившаяся ромбическая грань образуют трёхгранный угол многогранника Q_2 . Четырёхугольная грань тела $S_{3,1}$, шестиугольная грань тела Q_1 и получившаяся трапециевидная грань также образуют трёхгранный угол многогранника Q_2 . С помощью соединения $Q_1+M_2+S_{3,1}$ получаем половину многогранника Q_2 . Отразив тело $Q_1+M_2+S_{3,1}$ поворотом вокруг оси, содержащей самую длинную диагональ равноугольного шестиугольника многогранника $Q_1+M_2+S_{3,1}$, получаем многогранник Иванова Q_2 . Предложение 2 доказано.

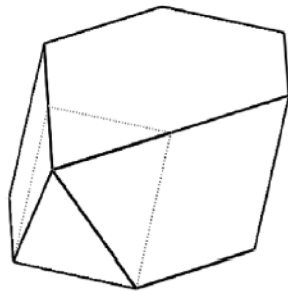


Рис. 11. Q_1+M_2

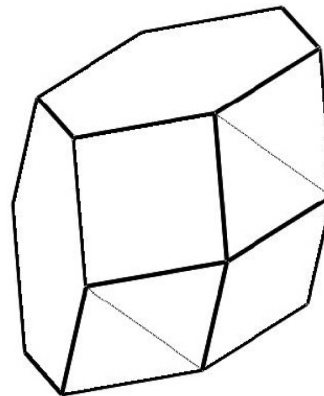


Рис. 12. Многогранник Q_2

Теорема 2 доказана. Её следствием является

Теорема 3. Если выпуклый правильногранник никакой плоскостью не пересекается на правильногранники, но существует плоскость, делящая его на многогранники с правильными или составленными из правильных многоугольниками гранями, то он составлен из правильногранных пирамид тогда и только тогда, когда является одним из пяти тел: трёхскатный купол M_4 , усечённый тетраэдр M_{10} , усечённый октаэдр M_{16} , наклонная призма Q_1 , двенадцатигранник Иванова Q_2 .

Авторы благодарят за полезные обсуждения участников V Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития» (Красноярск, КГПУ им. В.П. Астафьева, 16-17 ноября 2016 г.) и XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения имени академика О.Б. Лупанова» (Москва, МГУ, 20-25 июня 2016 г.).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках научного проекта №16-41-240670.

Библиографический список

1. Тимофеенко А.В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. Т. VI. Вып. 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова / Под ред. И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. М.: Издательство Моск. ун-та, 2011. С. 155–170.
2. Гурин А.М., Залгаллер В.А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Труды Математического Общества Санкт-Петербурга. 2008. Т. 14. С. 215–294.
3. Пряхин Ю.А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 111–112.
4. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5–218.
5. Иванов Б.А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Украинский геометрический сборник. 1971. Т. 10. С. 20–34.
6. Пряхин Ю.А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Украинский геометрический сборник. 1973. Т. 14. С. 83–88.
7. Тимофеенко А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 2. С. 118–126.
8. Тимофеенко А.В., Табинова О.А. О классификации паркетных многоугольников // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1(23). С. 216–219.

ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИИ УЧЕБНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ УЧАЩИМИСЯ

POSSIBLE SYSTEMS OF DYNAMIC GEOMETRY IN ORGANIZING AND CONDUCTING EDUCATIONAL RESEARCHES STUDENTS

И.Н. Фиряго

I.N. Firyago

Исследовательская деятельность, программная среда Живая математика, исследовательская задача.

Преподавание геометрии потенциально содержит в себе богатейшие возможности для реализации различного рода исследований, практической направленности обучения математике, формирования интеллектуальной сферы личности ребёнка. В статье представлен авторский опыт обучения школьников решению исследовательских задач по геометрии в среде Живая математика, оказания помощи школьникам в овладении ими необходимыми компетенциями в рассматриваемой предметной области.

Research activities, software environment Live Mathematics, the research task.

Teaching geometry potentially contains the richest opportunities for the realization of various studies, practical orientation of teaching mathematics, the formation of intellectual sphere of the child's personality. In the article is the author's experience of the instruction of schoolboys in the solution of research tasks on geometry on Wednesday living mathematics, rendering aid to schoolboys in the mastery by them the necessary scopes in subject the area in question.

Анализ современной ситуации математического образования в школе показывает весьма слабую учебную мотивацию школьников и, как следствие, невысокий уровень усвоения знаний по математике, что подтверждают результаты ЕГЭ и ОГЭ по математике. В основе этого лежит множество причин, в частности, оторванность содержания математического образования от жизни, подмена обучения “натаскиванием” на экзамен, снижение творческой составляющей в познании математических фактов и законов, а также целый ряд других. Всё это вынуждает учителя искать новые подходы, направленные на создание подходящих условий популяризации и развития творческого потенциала обучения учащихся математике. Анализ научно-методической литературы и наш собственный опыт обучения школьников геометрии позволяют утверждать, что одним из таких подходов является использование в образовательной практике так называемых систем динамической геометрии, в частности среды Живая математика.

Предлагается один из путей повышения эффективности учебной деятельности в основной школе – включение учащихся в исследовательскую деятельность. Исследовательские работы могут быть построены таким образом, что в них будут востребованы практически любые способности учащихся, реализованы личные пристрастия к тому или иному виду деятельности (мотив – цель – средства – действия – результат).

В традиционной практике исследовательский метод не всегда находит свою реализацию. В большинстве случаев к исследовательской деятельности привлекаются только отдельные ученики, достигшие определённых успехов в освоении математики. При этом основная масса учащихся остаётся вне этого процесса. Возникает противоречие между необходимостью развития исследовательских навыков каждого школьника и сложившейся практикой обучения.

Школьный курс геометрии относится к тем дисциплинам, при обучении которым отмеченное противоречие заявляет о себе во многих темах и разделах. Несмотря на логичность и внешнюю привлекательность, геометрия относится, по мнению учеников, к наиболее сложной школьной дисциплине. В рейтингах популярности дисциплин она занимает одну из последних строчек. Отметим некоторые причины такой ситуации: отсутствие универсальных ал-

горитмов решения задач по геометрии; необходимость доказывать неочевидным способом очевидные утверждения; чрезмерное увлечение аксиоматическим методом; недостаточное внимание педагогов к реализации исследовательской составляющей процесса обучения геометрии.

Мы считаем, что опыт исследовательской деятельности в процессе обучения геометрии можно успешно формировать через решение задач в среде Живая математика. Причём для этого не требуется никаких специальных задачников или пособий, вполне подойдут школьные учебники и задачники по геометрии. В психолого-педагогической литературе встречаются термины: поисковая задача, творческая задача, исследовательская задача и познавательная задача. В определении каждого термина присутствует исследовательская составляющая, в отдельных – рекомендация учащемуся самостоятельно сформулировать проблему.

Задачи исследовательского характера и исследовательские задачи легко можно получить из задач, предлагаемых учебником. К задачам исследовательского характера отнесем задачи на *выявление и формулировку определенных закономерностей*, задачи, предполагающие *самостоятельную формулировку вопроса* по данному условию, задачи на существование того или иного математического объекта. Таким образом, задача №1 п 110 «Теорема косинусов» учебника геометрии 7-9 класс [Погорелов, стр.17, 2014], где по трем сторонам требуется найти углы треугольника, приобретает исследовательский характер, если убрать вопрос и предложить ученикам *отыскать все, что возможно*. Так на основе наблюдений, анализа учащиеся выявляют связи и отношения между элементами задачи и на основе синтеза формулируют проблемы и строят гипотезы. Простая задача превращается в задачу одного урока: по трем сторонам можно найти: углы треугольника, высоты, биссектрисы, медианы, радиусы вписанной и описанной окружностей. С помощью динамической модели треугольника можно проиллюстрировать связь между длинами сторон и величинами противоположных углов треугольника, его вид. Для этого требуется лишь среда Живая математика и динамическая модель треугольника (рис. 1) в этой среде.

п.110 "Теорема косинусов" №1.

Стороны треугольника а, в, сВ.

Найдите: а) углы треугольника;

б) высоты

в) медианы

г) биссектрисы

$m \overline{AC} = 13,09$ см

$m \overline{BA} = 12,64$ см

$m \overline{BC} = 7,40$ см

Как изменяется сторона АВ
треугольника, если угол С
возрастает, а длины сторон
АС и ВС не
меняются? $\angle ACB$

$m \angle BCA = 69,98^\circ$

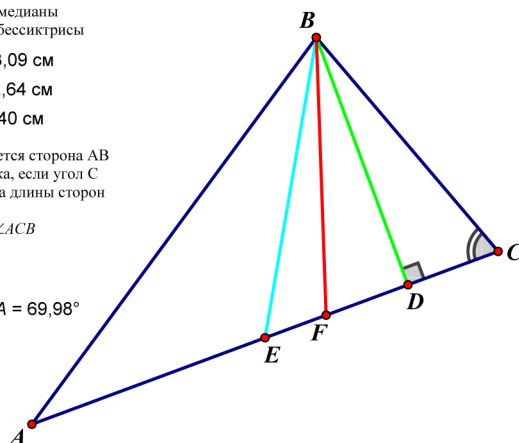


Рис. 1

Проиллюстрируем особенности применения системы динамической геометрии Живая математика при решении следующих типов исследовательских задач. Прежде всего, это *задачи с избыточными и недостающими данными с целью создания новой проблемы*. Подобные задачи формируют такой вид исследовательской деятельности, как выдвижение гипотез, позволяют выявить у учащихся умения устанавливать связи и отношения между элементами задачи, необходимые для ее решения, выделять главное и существенное в задаче, находить нужные данные. Например, анализируя условие задачи: «Даны две окружности. Радиус одной из них равен 3 см, расстояние между их центрами 10 см. Пересекутся ли эти окружности?», учащиеся приходят к выводу, что дать точный ответ на вопрос задачи нельзя, так как необходимо знать

радиус второй окружности. Но задачу можно предложить в дальнейшем к решению, рассмотрев все возможные случаи, связанные со вторым радиусом, и таким образом решить вопрос о взаимном расположении двух окружностей на плоскости рис. 2.

$$BA = 3,00 \text{ см}$$

$$AC = 3,09 \text{ см}$$

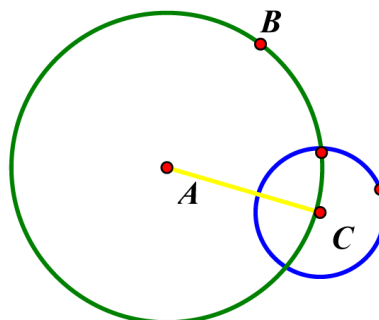
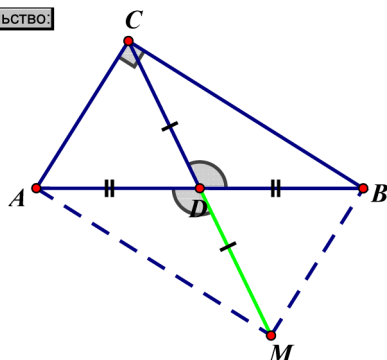


Рис. 2

Опыт в решении таких задач позволяет предложить учащимся работу, которую они выполнят вполне осознанно. В следующих задачах необходимо дополнить условие недостающими данными, чтобы решение каждой задачи было единственным: 1) построить равнобедренный треугольник по данному его основанию; 2) построить прямоугольный треугольник по данному ему катету и т.п. Изменяя условия задачи различным образом, можно получить много интересных и необычных задач, рассмотрев обратную, противоположную, расширенную.

Приведем пример задачи, которая связана с обращением ее условий: **«Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине»**. В этой простой задаче фактически сформулирован необходимый признак прямоугольных

Доказательство:



1. Сформулируйте обратную задачу. Проверьте правильность.
2. Сформулируйте новое определение прямоугольных треугольников

Рис. 3

треугольников. Но является ли он их достаточным признаком? Сформулируем обратное утверждение: «Если в треугольнике медиана, проведенная к большей стороне, равна ее половине, то этот треугольник прямоугольный», – оно является истинным (рис. 3).

Итак, получено основное характеристическое свойство прямоугольных треугольников, и можно дать еще одно его определение: «Треугольник называется прямоугольным, если у него существует медиана, равная половине стороны, к которой она проведена».

Геометрия потенциально содержит в себе богатейшие возможности для реализации различного рода исследований, практической направленности обучения математике, формирования интеллектуальной сферы личности ребёнка и т.д. Но для этого необходимо кардинально

поменять отношение школьников к геометрии, сделав её более привлекательной для них. В сложившейся ситуации исследовательские и проектные работы могут помочь формированию более высокого уровня мотивации школьников и овладению ими необходимыми компетенциями в рассматриваемой предметной области.

Библиографический список

1. Гусев В.А. Как помочь ученику полюбить математику? М.: Авангард, 1994. Ч. 1.
2. Баврин И.И., Матросов В.Л., Токмазов Г.В. Формирование исследовательской деятельности в процессе решения задач динамического характера. Обучающая программа: учебное пособие. М.: МПГУ, 2000.
3. Погорелов А. В. Геометрия. 7–9 класс: учебник. М.: Просвещение, 2009.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АПАКИНА Татьяна Витальевна – старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: atawit@mail.ru

АТАМУРАТОВА Роза Жолдыбаевна – учитель математики Областной специализированной школы-интерната для одаренных детей с углубленным изучением различных предметов, Актау, Казахстан

БЕЛОРУКОВА Марина Васильевна – учитель математики МБОУ «Средняя школа № 8», Архангельск, Россия

БОНДАРЕВА Яна Алексеевна – студент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: star47@bk.ru

ГАВРИЛОВ Владимир Константинович – кандидат физико-математических наук, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: gavrilov1009@mail.ru,

ДЕТТЕРЕР Екатерина Евгеньевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева, учитель математики и информатики МБОУ № 10 им. Ю.А. Овчинникова; e-mail: detterer.e@gmail.com

ЖАРКОВА Ольга Анатольевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ СОШ №10; e-mail: olga030791@mail.ru

ЖЕРЕБЦОВА Анастасия Фёдоровна – студентка II курса КГПУ им. В.П. Астафьева, профиль «Математика и информатика»; e-mail: stenka1997@gmail.com

ЗВИРЗД Юлия Игоревна – студент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: Zvirzd.yuli@mail.ru

ИВАНОВ Илья Андреевич – аспирант СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнёва; e-mail: ilyaiv92@gmail.com

ИВАНОВА Наталья Викторовна – учитель математики, МБОУ «СОШ № 9», г. Лесосибирск; e-mail: frolovanv@inbox.ru

ИРШКО Надежда Юрьевна – студент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: Nirshko@mail.ru

КАЗАКОВА Елена Валерьевна – студентка, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: boom12345boom@mail.ru

КАЛАЧЁВА Светлана Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: kalacheva_s@mail.ru

КАПАЧ Юлия Игоревна – студентка, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева им. В.П. Астафьева; e-mail: juliajulia.1993@mail.ru

КЕЙВ Мария Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: mkejv@yandex.ru

КОЖУХОВСКАЯ Валентина Анатольевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики Балахтинской СОШ №1; e-mail: kozhukhovskaya93@mail.ru

КОЗЫРЕНКО Анна Михайловна – учитель математики и информатики, МБОУ СОШ № 21, г. Северодвинск, e-mail: akozyrenkogr11@gmail.com

КОРОТЫНСКАЯ Виктория Александровна – бакалавр, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: vkorotynskaya@mail.ru

КУЧЕРИН Георгий Дмитриевич – ученик 8 класса ГБНОУ АО «Архангельский государственный лицей»; e-mail: gera.kusherin@yandex.ru

ЛАРИН Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: larin_serg@mail.ru

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАНЧЕНКОВА Елена Олеговна – учитель математики Гимназии № 15, г. Красноярск, магистр КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: Elena_m1609@mail.ru

МАСЛЕНКОВА Валентина Александровна – студент КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: alfupupkin@mail.ru

МИХИЕНКО Дарья Викторовна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики, МБОУ СШ № 134; e-mail: mixienko.darya@mail.ru

НЕНКОВ Веселин Ненков – доцент Технического колледжа, Ловеч, Болгария

НИКОНОВА Наталья Олеговна – Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, студент, e-mail: nikonovanat@mail.ru

ОБЕРМАН Виктория Сергеевна – студент Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: oberman1994@mail.ru

ОВЧИННИКОВА Раиса Петровна – доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

ОКЛАДНИКОВА Евгения Сергеевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики и информатики муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения «Березовская средняя общеобразовательная школа № 4» Берёзовского района Красноярского края; e-mail: evgenij757575@mail.ru

ОТМАХОВА Елена Сергеевна – магистр КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики краевого бюджетного образовательного учреждения школа дистанционного образования; e-mail: nasait123@mail.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – аспирант кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, САФУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: m.pavlova@narfu.ru

ПОГОРЕЛОВА Анна Михайловна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева, учитель математики школы № 139; e-mail: anette24@mail.ru

ПОРНЯГИНА Александра Геннадьевна – бакалавр, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: portnyaginaag24@mail.ru

РОГАЛЕВ А.Н. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИВМ СО РАН, г. Красноярск; e-mail: rogalov@icm.krasn.ru

РУСИНА Ольга Викторовна – учитель математики МБОУ СОШ № 95, г. Красноярск, магистр КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: rusina_olga@mail.ru

СМЫШЛЯЕВА Ольга Ивановна – учитель МАОУ «Гимназия № 13 «Академ»»; e-mail: Smysl210lga@mail.ru.

ТИЛИЧЕЕВА Ирина Валентиновна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель информатики МБОУ № 10 им. Ю.А. Овчинникова; e-mail: tilicheeva@gmail.com

ТИЛИЧЕЕВ Михаил Сергеевич – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mstilicheev@mail.ru

ТИМОФЕЕНКО Алексей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: a.v.timofeenko62@mail.ru

ТРОИЦКАЯ Ольга Николаевна – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: o.troitskaya@narfu.ru

ФАДЕЕВА Анна Сергеевна – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: anna.angelohec@mail.ru

ИВАНОВА Наталья Викторовна – учитель математики МБОУ «СОШ №9» г. Лесосибирска; e-mail: frolovanv@inbox.ru

ФИРЕР Анна Владимировна – ст. преподаватель ЛПИ филиал СФУ; аспирант ОмГПУ; e-mail: fivr@yandex.ru

ФИРЯГО Ирина Николаевна – магистрант КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ СШ №134; e-mail: prediv@mail.ru

ФОМИНА Наталья Ивановна – аспирант кафедры экспериментальной математики и информационных технологий Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова; учитель математики МБОУ МО «Город Архангельск» Гимназия № 21; e-mail: fominss1968@mail.ru

ЧЕПИКОВА Елена Юрьевна – студентка II курса КГПУ им. В.П. Астафьева, профиль «Математика и информатика»; e-mail: chepikova.krsk@gmail.com

ЧИЛБАК-ОЛ Сайдыс Васильевна – аспирант КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: ya.saydis@yandex.ru

ШАБАНОВА Мария Валерьевна – заведующая кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова; Архангельск, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

Я.А. Бондарева, В.А. Масленкова, М.А. Кейв О ТЕХНОЛОГИИ СОЗДАНИЯ ТЕСТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA.....	4
В.К.Гаврилов РАВЕНСТВА МЕНЕЛАЯ, ЧЕВЫ И ДРУГИЕ РАВЕНСТВА.....	8
Е.Е. Детгерер ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA.....	13
О.А. Жаркова КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ.....	17
Ю.И. Звирзд МЕТОДИКА ШАТАЛОВА И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ	22
И.А. Иванов СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА НА СНИМКАХ МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ	25
Н.Ю. Иршко, В.С.Оберман ИНТЕГРИРОВАННЫЕ УРОКИ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ СОВРЕМЕННОГО ШКОЛЬНИКА	30
Ю.И. Капач, М.А. Кейв РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЯЗЫКЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA.....	33
М.А.Кейв, В.А. Кожуховская МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA.....	37
М.А. Кейв АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA.....	40
В.А.Коротынская ИНТЕГРИРОВАННЫЙ УРОК, КАК ОСНОВА УСПЕШНОГО УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ	43
Г.Д. Кучерин, М.А. Павлова РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗЫСКАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК, РАВНОУДАЛЕННЫХ ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ И ОКРУЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GEOGEBGA	46
С.В. Ларин, С.И. Калачева АНИМАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA.....	50
С.В. Ларин ПРОЕКТИВНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ	54
В.А. Масленкова, М.А. Кейв, Я.А. Бондарева АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ В СРЕДЕ «GEOGEBRA»	61
Д.В. Михиенко ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В 7-8 КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ	65
Н.О. Никонова ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ ВЫПОЛНЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ.....	70
Р.П. Овчинникова ПОСТАНОВКА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ	73

А.Г. Поршнягина НЕСТАНДАРТНЫЕ УРОКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКОВ	78
О.Н. Троицкая, А.М. Козыренко ДИСТАНЦИОННАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА УЧАЩИХСЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ И ОСОБЕННОСТИ ЕЁ ОРГАНИЗАЦИИ	80
А.С. Фадеева ФОРМИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТИВНЫХ УУД НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ.....	84
А.В. Фирер, Н.В. Иванова GEOGEBRA КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ	87
Н.И. Фомина РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В РАЗВИТИИ СПОСОБНОСТИ УЧАЩИХСЯ К МЫСЛЕННОМУ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЮ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	91
М.В. Шабанова, Р.Ж. Атамуратова, В.Н. Ненков, М.В. Белорукова СЕТЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЧАЩИХСЯ РАЗНЫХ СТРАН ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ В ОБЛАСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ: ОПЫТ И ПЕРСПЕКТИВЫ.....	94
О.И.Смышляева КАК ПРИБЛИЗИТЬ СТРАНИЦЫ УЧЕБНИКА К РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ	99
А.Н. Рогалев МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ БЕЗОПАСНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ.....	103
Е.В. Казакова АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СРЕДЫ GEOGEBRA.....	108
Е.Е. Дегтерер, И.В. Тиличиева РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ЖИВАЯ ГЕОМЕТРИЯ	111
Е.Ю. Чепикова, А.Ф. Жеребцова ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА КАК СРЕДСТВО САМОКОНТРОЛЯ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ.....	115
О.В. Русина, В.Р. Майер ДИНАМИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛЬНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ.....	118
С.В. Ларин, Т.В. Апакина, С.В. Чилбак-оол КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ	123
М.С. Тиличиев, И.В. Тиличиева РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БРИАНШОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРАКТИВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA.....	128
Е.С. Отмахова, А.В. Тимофеев О РАЗБИЕНИИХ ИКОСАЭДРА НА ТЕЛА С ПАРКЕТНЫМИ ГРЯНЯМИ.....	132
В.Р. Майер, Т.В. Апакина, Е.О. Манченкова ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ-ИЛЛЮСТРАЦИЙ МОДЕЛИ КЭЛИ-КЛЕЙНА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В КУРСЕ ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ	137
А.М. Погорелова, В.Р. Майер ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЖИВОЙ МАТЕМАТИКИ.....	142
Е.С. Окладникова, А.В. Тимофеев О ТИПАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ПАРКЕТНЫМИ ГРЯНЯМИ.....	147
И.Н. Фиряго ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИИ УЧЕБНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ УЧАЩИМИСЯ	155
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	158

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы V Всероссийской научно-методической конференции
с международным участием

Красноярск, 16–17 ноября 2016 г.

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подписано в печать 08.12.16. Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 20,25. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ № 12-РИО-002

Отпечатано в типографии «Литера-принт»,
т. 295-03-40