МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет/филиал Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)
Выпускающая(ие) кафедра(ы) Алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Кожуховская Валентина Анатольевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ «КОМБИНАТОРИКА» В ПРОЦЕССЕ ПРЕДПРОФИЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Направление подготовки/специальность 44.03.05 Педагогическое образование
(код направления подготовки/код специальности)
Профиль «Математика» и «Информатика»
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав.кафедрой профессор кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания Майер В.Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
____
(дата, подпись)

Руководитель
к.п.н, доцент, Кейв М.А.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

Дата защиты ____________________________
(дата, подпись)
Обучающийся Кожуховская В.А.
(фамилия, инициалы)
Оценка_______________________________
(прописью)

Красноярск
2016

Оглавление

Введение

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями, которые имеют множество решений и исходов, но люди об этом не задумываются. Например, многие любят играть в интеллектуальные и азартные игры, и, конечно, выигрывать. Можно ли научиться рассчитывать, составлять планы ведения игры и способы предугадывания планов противника? На все эти вопросы может ответить такая наука как комбинаторика.

Введение элементов комбинаторики и теории вероятностей в содержание школьного математического образования является одним из важнейших аспектов модернизации содержания образования, так как роль этих знаний в современном мире повышает возможности практической ориентации учащихся. Знакомство школьников с данным материалом способствует принятию нестандартных решений, помогает творчески мыслить, хорошо ориентироваться в обычных житейских ситуациях и производственной деятельности. Необходимость формирования комбинаторно-вероятностного мышления обусловлена тем, что учащиеся должны научиться извлекать, анализировать и обрабатывать порой противоречивую информацию и оценивать степень риска. Изучение данного раздела позволит учащимся продолжить развитие логического мышления, поможет сориентироваться в выборе профессии и при поступлении в ВУЗ. Данная тема включена на ГИА в 9 классе и ЕГЭ в 11 классе.

За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития. Элементы комбинаторики и теории вероятности используются при решении транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования. Так же комбинаторика находит приложения во многих областях науки: в биологии, где она применяется для изучения состава белков и ДНК, в химии, механике сложных сооружений и т.д.

Но, к сожалению, теме «Комбинаторика и теория вероятностей» отводится несправедливо мало учебного времени, а следовательно, как показывает практика, существуют школьники, на разных ступенях обучения, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением, не способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и не готовы применять эти знания и опыт на практике.

Цель исследования: повышение уровня сформированности у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика» в процессе предпрофильного обучения математике.

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся 8-9 классов в рамках предпрофильной подготовки.

Предмет исследования: дидактические условия, способствующие повышению уровня сформированности у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика».

Задачи исследования:

1) Рассмотреть и проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.

2) Описать роль, место и значение элементов комбинаторики в школьном курсе математики в рамках предпрофильной подготовки школьников.

3) Охарактеризовать понятие «математическая компетентность» и разработать содержательно-диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика».

4) Разработать диагностический инструментарий для проведения педагогических измерений и провести констатирующий этап педагогического эксперимента.

5) Выделить дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 8-9 классов основ математической

компетентности в области «Комбинаторика» в рамках их предпрофильной подготовки.

6) Разработать специальную методику обучения учащихся 8-9 классов по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».

7) Провести констатирующий, формирующий и заключительный этапы педагогического эксперимента.

Глава 1. Теоретические основания для формирования у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика»

1.1. Элементы комбинаторики в школьном курсе математики 8-9 классов

Вопрос о модернизации школьного математического образования в отечественной школе был поставлен еще в начале 60-х годов выдающимися математиками Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоровым, А.Я. Хинчиным. Обращаясь к широкому кругу читателей – математиков, педагогов и методистов, - Б.В. Гнеденко писал: «Сейчас крайне назрела потребность введение в школьное обучение элементов теории вероятностей… В этом нуждаются и методологическое воспитание школьников, и последующая практическая деятельность их, и межпредметные связи» [34].

Раздел математики*: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»* (стохастическая линия) в школьный курс введен совсем недавно.

В 2002-2003 учебном году тему «Элементы статистики» ввели в курс алгебры 7 класса, она была рассчитана на 4 часа, и предлагалось ее изучать в конце учебного года за счет уроков повторения.

Повсеместное преподавание в основной школе элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей началось с 2003-2004 учебного года. Изучение данного курса осуществляется в соответствии с письмом Министерства образования российской Федерации от 23.09.2003 г. «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы».

Основными содержательно-методическими линиями школьного курса математики 5-9 классов являются следующие:

– Числовая линия;

– Функциональная линия;

– Уравнения и неравенства;

– Планиметрия;

– Стохастическая линия: элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики и логики.

Согласно ФГОС основного общего образования (5-9 классов) требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

1) формирование представлений о математике, как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений;

7) формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследование построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач;

8) овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах [29].

Согласно ФГОС основного общего образования, утвержденному в 2010 году, обязательный минимум содержания образовательной программы по математике в рамках раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» включает следующие темы [29]:

- Понятие о случайном опыте и случайном событии.
- Частота случайного события.
- Статистический подход к понятию вероятности.

- Вероятности противоположных событий.
- Достоверные и невозможные события.
- Равновозможность событий.
- Классическое определение вероятности.
- Решение комбинаторных задач перебором вариантов.
- Комбинаторное правило умножения.
- Перестановки и факториал.

В результате изучения данного раздела математики ученик должен уметь:

- находить относительную частоту и вероятность случайного события;
- решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций.

В последние годы появились школьные учебники, учебные пособия как для основной, так и для старшей школы, в которые включена отдельным разделов тема «Элементы комбинаторики и теории вероятности». В частности, среди учебников и учебных пособий для средней школы (8-9 классы), содержащих комбинаторно-вероятностно-статистический материал, можно отметить учебники:

- Дорофеев Г.В. «Алгебра, 8»;
- Никольский С.М. и др. «Алгебра, 8»;
- Муравин Г.К., Муравин К.С., Муравина О.В. «Алгебра, 8»;
- Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Алгебра, 9» (повышенный уровень);
- Зубарева И.И., Мордкович А.Г. «Алгебра, 9» (базовый уровень);
- Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра, 9»;
- Дорофеев Г.В. «Алгебра, 9»;
- Виленкин Н.Я. «Алгебра, 9».

Проведя сравнительный анализ этих учебников, можно сделать следующий вывод:

В 8 классе изучают, что такое множество (элемент множества, подмножество, диаграммы Эйлера). Какие операции выполняются над множествами. Знакомятся с комбинаторикой: перебор вариантов, правило суммы, правило произведения. Решают комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правил суммы и произведения.

В 9 классе знакомятся с такими понятиями как: перестановки, размещения, сочетания, вероятность случайных событий.

К сожалению, в настоящий момент нет ни одного учебника, который бы в полной мере отражал идеи стохастической линии школьного курса математики.

В данном исследовании остановимся на рассмотрении примерной программы по математике для раздела «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» для учебника: Мордкович А.Г. Данный раздел вводится уже в 5 и 6 классах. В 5 классе изучаются темы: Достоверные, невозможные и случайные события; Комбинаторные задачи. В 6 классе встречаются такие темы, как: Первое знакомство с понятием «Вероятность»; Первое знакомство с подсчетом вероятности. К сожалению, в 7 и 8 классах Мордкович А.Г. умалчивает о данной теме и в следующий раз раздел «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» встречается только в 9 классе. Рассмотрим примерную программу по математике для раздела «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» учебника: Мордкович А.Г. Алгебра (базовый уровень). 9 класс. — М.: Мнемозина.

Базовый уровень (9 класс).

Элементы комбинаторики и теории вероятностей (12 часов) (Таблица 1) [19].

Комбинаторные задачи. Статистика - дизайн информации. Простейшие вероятностные задачи. Экспериментальные данные и вероятности событий.

3 часа в неделю

Таблица 1

Изучаемый материал	*Количество часов*
Глава 5. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности.	12
Комбинаторные задачи	3
Статистика – дизайн информации	3
Простейшие вероятностные задачи	3
Экспериментальные данные и вероятности событий.	2
Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности»	1

Контрольная работа (базовый уровень, 9 класс)(Таблица 2)

Вариант1

Таблица 2

1. Сколькими способами можно разместить 5 различных книг на полке?
2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 7, 9?
3. Из 10 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
4. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 17 человек – в банке, 23 – в фирме и 19 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

1.2. Основы математической компетентности учащихся 8-9 классов в области «Комбинаторика»: структурные элементы, показатели и уровни сформированности

К моменту окончания 9 класса учащиеся, получающие среднее общее образование, должны обладать определенными компетенциями, которые представлены в Образовательном стандарте основного общего образования. Что же собой представляет понятие «компетенция»?

И. А. Зимняя считает, что компетенция – это интегративное качество человека, включающее в себя не только знания, умения и навыки, но и способность [13].

Совокупность компетенций, наличие знаний и опыта, необходимых для эффективной деятельности в заданной предметной области, называют компетентностью. Но в нашем случае ведущим понятием является «математическая компетентность».

Существуют различные точки зрения в определении математической компетентности. Б.В. Гнеденко в определении математической компетентности, по сути, описывает результат математической подготовки, цель которой заключается в формировании умений видеть, осознавать и оценивать различные проблемы, конструктивно разрешать их в соответствии со своими ценностными ориентирами, рассматривать любую трудность как стимул к дальнейшему развитию [7]. Л.Д. Кудрявцев утверждает, что математическая компетентность представляет собой интегративное личностное качество, основанное на совокупности фундаментальных математических знаний, практических умений и навыков, свидетельствующих о готовности и способности учащегося осуществлять учебную деятельность [18]. К сожалению, нет строго, единого определения понятия «математическая компетенция», но в нашем исследовании мы будем придерживаться определения Л.Д. Кудрявцева.

Быть компетентным означает мобилизовать полученные знания и опыт, обладать критическим мышлением, владеть методом решения проблем в зависимости от конкретной ситуации деятельности. Уровень компетентности индивида определяется не только по тому, что он знает, но и по тому, как он относится к этим знаниям, как их оценивает, принимает или не принимает их [17].

Современная психологическая и педагогическая наука выделяет следующие компоненты компетентности: когнитивный, праксиологический (деятельностный), аксиологический (ценностный) [12;13].

В работах Шкериной Л.В. [31;32;33] предложен подход к структурированию компетенций. На основе этого подхода нами разработана обобщенная модель содержательной структуры математической компетентности учащихся 8-9 кл. в области «Комбинаторика» и охарактеризован каждый ее компонент (Таблица 3).

Таблица 3

Структурно-содержательная модель математической компетентности учащихся 8-9 классов в области «Комбинаторика»

Аспект компетенции	Элемент компетенции	Характеристика элемента компетенции (основы компетентности)
Когнитивный	Знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция	- Знание основных понятий комбинаторики, а именно: понятий размещения, сочетания, перестановки; - Знание понятий множества, элемента множества.
	Знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции	- Знание правила суммы и правила произведения, метода перебора вариантов; - Знание формул для нахождения числа сочетаний,

		размещений, перестановок.
Праксиологический	Умения, навыки и способы деятельности в сфере компетенции	- уметь правильно применять формулы и правила при решении комбинаторных задач; - уметь распознавать какого типа задача, и каким способом она может быть решена.
	Минимально необходимый опыт деятельности в сфере компетенции	- Опыт решения разнообразных комбинаторных задач
Аксиологический	Отношение к деятельности в сфере компетенции (появление интереса, ориентированность на получение результата; понимание значения деятельности и ее результата)	Понимание важности изучения комбинаторики, применение комбинаторных знаний для решения прикладных задач в жизни.

Данная таблица показывает, какими основами математической компетентности в области «Комбинаторика» должны обладать учащиеся, получившие основное общее образование.

Для формирования и диагностики уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 8-9 классов в области «Комбинаторика» необходимо выделить и охарактеризовать уровни ее сформированности.

Опираясь на исследование А. А. Виландеберк и Н. Л. Шубиной [3], выделим три уровня сформированности математической компетентности: низкий, средний, высокий. Конкретизируем критерии сформированности математической компетентности у учащихся 8-9 классов в области «Комбинаторика» с помощью показателей для каждого уровня и представим их в виде таблицы 4.

Таблица 4

Уровни сформированности основ математической компетентности у учащихся 8-9 классов в области «Комбинаторика»

Уровни математической компетенции	Показатели сформированности
Низкий	Знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
	Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие.
	Понимание необходимости изучения комбинаторики, но при этом отсутствует проявление интереса к комбинаторным задачам.
Средний	Знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
	Решение задач, которые знакомы учащимся. Содержание задачи подсказывает, какие правила и методы необходимо применить.

	Понимание важности изучения комбинаторики, освоения способов и методов решения комбинаторных задач, проявление интереса к комбинаторным задачам.
Высокий	Знание понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
	Решение не только известных задач, но и задач, в которых необходимо проявить творчество, уметь размышлять, строить самостоятельно алгоритм действий, уметь объяснять решение задачи.
	Понимание важности изучения комбинаторики, освоение разнообразных (наиболее эффективных) способов действий. Проявление намерений к использованию комбинаторных знаний для решения прикладных задач.

1.3. Дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика» в рамках предпрофильной подготовки

Эффективность процесса формирования у учащихся математической компетентности определяют дидактические условия. В.С. Егорина утверждает, что дидактические условия - обстоятельства обучения, которые являются результатом отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения, способствующих эффективному решению поставленных задач [11].

На средней ступени образовательного процесса реализуется так называемое *предпрофильное обучение*. Суть предпрофильной подготовки – создать образовательное пространство, способствующее самоопределению учащегося 9 класса. Основной задачей предпрофильной подготовки в 9 классе является комплексная работа с учащимися по обоснованному и жизненно важному выбору дальнейшего пути обучения. Основной целью предпрофильного обучения учащихся 8-9 классов является их самоопределение в выборе профиля для обучения в 10–11-х классах или для дальнейшего получения профессии. Таким образом, исходя из Концепции профильного обучения, предпрофильное обучение должно сформировать у школьников:

- умение непредвзято оценивать свои возможности и способности к продолжению получения образования по различным профилям;
- умение осмысленно осуществлять выбор профиля, который будет соответствовать склонностям, индивидуальным особенностями и интересам;
- готовность нести ответственность за сделанный выбор;
- высокий уровень мотивации на обучение по выбранному профилю.

Задачи предпрофильной подготовки:

– раскрытие способностей, интересов и склонностей школьников и формирование прикладного опыта в различных сферах когнитивной и профессиональной деятельности с учетом выбора профиля обучения в старшей школе;
– предоставление психолого-педагогической помощи в получении школьниками представлений о жизненных, социальных ценностях;
–формирование и развитие ключевых компетенций, способствующих успешности в будущей профессиональной деятельности;
– формирование самостоятельности и осознанности при выборе дальнейшего направления образования, пути получения профессии.

На этапе предпрофильного обучения такую возможность предоставляют *курсы по выбору*.

Они помогут учащимся реально оценить свои возможности. Такие курсы подразделяются на три основных вида: *предметные, межпредметные и ориентационные курсы*.

Предметные курсы являются пропедевтическими по отношению к будущим профильным предметам, они помогают выпускнику основной школы сделать осознанный и успешный выбор профиля. Их содержание и форма должны быть направлены на расширение знаний ученика по тому или иному учебному предмету [25].

Межпредметные курсы выходят за рамки традиционных учебных предметов и знакомят школьников с комплексными проблемами и задачами, требующими синтеза знаний по ряду предметов, и способами их решения в различных профессиональных сферах [25].

Ориентационные курсы способствуют самоопределению ученика относительно профиля обучения в старшей школе, а в конечном итоге – профессии. Они на практике знакомят со спецификой типичных видов деятельности, соответствующих наиболее распространенным профессиям [25].

В соответствии с ФГОС основного общего образования изучение курсов по выбору обучающихся должно обеспечить:

– удовлетворение индивидуальных запросов обучающихся;

– развитие личности обучающихся, их познавательных интересов, интеллектуальной и ценностно-смысловой сферы;

– развитие навыков самообразования и самопроектирования;

– углубление, расширение и систематизацию знаний в выбранной области научного знания или вида деятельности;

– совершенствование имеющегося и приобретение нового опыта познавательной деятельности, профессионального самоопределения обучающихся.

Посещение предпрофильных курсов способствует самоопределению учащихся, помогает при выборе профиля в старшей школе. Учитывая свои желания, каждый учащийся может пройти курсы по выбору, которые соответствуют разным профилям.

В большинстве случаев, курсы по выбору – это авторские курсы, которые разрабатываются отдельными педагогами, в том числе с использованием инновационных технологий обучения. Программы элективных курсов должны проходить рецензирование и лицензирование, а поэтому, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Программа курса по выбору, должна:

− соответствовать требованиям ФГОС общего образования;

− иметь прикладную направленность;

− обладать логикой построения и подачи учебного материала;

− быть организованной и связной по содержанию;

− быть реалистичной по времени и затраченным ресурсам;

− содержать активные методы обучения, которые позволят учащимся осознанно и объективно сделать выбор для продолжения образования;

− обладать определенной степенью новизны.

Согласно требованиям ФГОС среднего (полного) общего образования, программы отдельных учебных предметов, курсов должны содержать:

1) пояснительную записку, в которой конкретизируются общие цели среднего (полного) общего образования с учётом специфики учебного предмета;

2) общую характеристику учебного предмета, курса;

3) описание места учебного предмета, курса в учебном плане;

4) личностные, метапредметные и предметные результаты освоения конкретного учебного предмета, курса;

5) содержание учебного предмета, курса;

6) планируемые результаты изучения учебного предмета, курса;

7) тематическое планирование с определением основных видов учебной деятельности обучающихся;

8) описание учебно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса [29].

При разработке программы курса по выбору, автор – разработчик, прежде всего, должен ответить на несколько важных вопросов:

1. Каково назначение данного курса? На достижение каких общеобразовательных результатов предпрофильной подготовки данный курс направлен? Какую пользу получат учащиеся при посещении данного курса?

2. На каком содержательном материале и через какие формы работы возможно наиболее полно реализовать задачи предпрофильной подготовки? (помочь ученику сориентироваться в выборе профиля, восполнить пробелы его предыдущей подготовки, показать типичные для данного профиля виды деятельности, дать возможность ученику проявить себя и добиться успеха).

3. Чем содержание курса будет отличаться от базового предмета?

4. Какими учебными и вспомогательными материалами обеспечен данный курс? (фонд библиотеки, хрестоматии, сборники, дидактические материалы и т.п.).

5. Какие виды деятельности учащихся возможны и целесообразны в рамках данного курса? Какова доля самостоятельности ученика в изучении данного курса, в чем он может проявить инициативу и самореализоваться? Какие технологии обучения наиболее целесообразны для реализации курса? (Например, учебные практики, проектная деятельность, исследовательская деятельность, творческие работы, интерактивные технологии, модульная технология, информационные технологии и др.).

6. Как или с помощью чего будет фиксироваться динамика учебных достижений и интереса к курсу, к профилю? Какие критерии и средства оценки, позволят оценить успехи учащихся в изучении данного курса?

(анкетирование на первом и последнем занятии; собеседование в процессе работы после выполнения каждого вида обязательных работ; наблюдение за активностью на занятиях; анализ работ учащихся; тестирование; рейтинговая оценка; портфолио и др.).

7. Чем может завершиться для ученика изучение курса, какова форма отчетности? (итоговая контрольная работа; презентация проекта; доклад; научно-исследовательская работа; реферат; эссе и др.).

После того, как учитель ответит на все эти вопросы, он будет готов к составлению пояснительной записки к программе курса.

Примерная структура программы включает в себя несколько компонентов:

1. Титульный лист.
2. Пояснительная записка (аннотация).
3. Учебно-тематический план.
4. Содержание курса по темам.
5. Учебно-методическое обеспечение.

Каждый из компонентов программы курса играет важную роль, но особую роль играет выбор названия курса.

Название курса по выбору должно быть интересным, заманчивым. Оно должно быть не похоже на название школьных предметов, но в то же время, глядя на него, учащиеся сразу должны понимать, чем они будут заниматься на занятиях.

Пояснительная записка включает в себя: сведения об актуальности курса – роль, место и значение курса в системе предпрофильного обучения; указание типа курса по выбору; продолжительность по времени и количество часов в неделю; формулировка целей и задач курса с учетом типа курса и его функций; сведения о методах и формах организации занятий; критерии оценивания учащихся при изучении данного курса.

Учебно-тематическое планирование, как правило, оформляется в виде таблицы (Таблица 5), с указанием наименований основных модулей, тем и разделов, теоретических и практических часов, ожидаемых образовательных результатов, предполагаемой деятельностью учащихся и возможными формами контроля.

Таблица 5

Учебно-тематическое планирование курса по выбору

п/п	Наименование модулей, тем, разделов	Кол-во часов	Образовательные цели	Вид деятельности учащихся	Формы контроля

В содержании курса по выбору необходимо указать основные дидактические единицы учебной информации, способы и методы, а также типы задач, которые будут предложены, участникам курса. При проектировании программы курса необходимо учесть, что содержание курса должно: знакомить учащихся со способами деятельности; включать оригинальный материал, не дублировать содержание предметов обязательных для изучения; помогать учащимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы; ранее недоступный для изучения материал должен стать открытым для обсуждения; модульное построение содержания, поскольку возможны переходы учащихся с курса на курс.

Учебно-методическое обеспечение курса представляет собой некую взаимосвязь учебно-методических ресурсов, который может быть полезен как учащимся, изучающим курс, так и педагогу, реализующему его. В него могут входить:

- методические рекомендации (список литературы и методические рекомендации для учащегося, список литературы и методические указания педагогу по реализации программы, глоссарий и другая полезная информация);
- учебные ресурсы (учебные пособия, справочники, энциклопедии, электронные образовательные ресурсы: электронные учебники, сайты, электронные издания, Интернет-ресурсы и др.);

– фонд оценочных средств (диагностические карты, карты рейтинга, модель портфолио, тесты, контрольные вопросы, темы проектов и заданий и др.).

В приложениях к программе может содержаться материал, дополняющий учебно-методическое обеспечение: тексты информационных материалов для лекций, семинаров, самостоятельной работы учеников; каталог заданий для самостоятельной работы и методические рекомендации по их выполнению; индивидуальные и дифференцированные задания, в том числе задания в тестовой форме; программы учебных практик и методические рекомендации по их проведению; тематика исследовательских работ и проектов; программы выполнения проектной и исследовательской деятельности, методические рекомендации по ее организации; образцы проектных и исследовательских работ и др.

В основе новых образовательных стандартов лежат системно-деятельностный и компетентностный подходы. Под содержанием обучения целесообразно понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач из жизни [15].

Таким образом, при проектировании нового содержания обучения для курса по выбору необходимо в нем выделять три блока: когнитивный, праксиологический (деятельностный) и аксиологический (ценностный) (Таблица 6).

Таблица 6

Основные содержательные блоки содержания профильного обучения

Когнитивный блок	
Предметные знания	Знать, что…
Праксиологический блок	
Процедурные знания	Знать, как…

Аксиологический блок	
Ценностно-смысловые знания	Знать, зачем и почему…

Когнитивный блок включает в себя знания по предмету (методология, научные основы, основные законы, положения, теоретические конструкты, их свойства и признаки), межпредметные знания (соотношения между знаниями определенных дисциплин и их обусловленность и детерминированность), исторические и автобиографические сведения, освещающие судьбы научных идей через судьбы их творцов и др.

Праксиологический блок содержания помимо традиционных задач и упражнений состоит из комплекса задач открытого типа – когда необходимо в ходе собственных открытий приходить к новому знанию, задач и заданий практической и творческой направленности, обеспечивающих проекцию ценностей знаний и отношений к ним в деятельность и поведение учеников.

Аксиологический блок содержания состоит из комплекса сведений о ценности предметных знаний, задач и заданий, которые представляют собой модель учебной ситуации – «погружаясь» в неё, учащийся учится выявлять ценностные аспекты изучаемого материала для себя и для своей будущей профессиональной деятельности. Задачи и задания такого рода ориентированы на потребности и интересы личности, на проявление рефлексии, критического мышления, осуществления оценочной деятельности, и выбора ценностей.

При обучении математике большая часть времени отводится решению задач.

Термин «задача» используется в жизни и науке очень широко. Под задачей А.Н. Леонтьев понимает ситуацию, которая включает всебя и цель, и условия, в которых о на должна быть достигнута.

Основными компонентами задачи являются:

1. *условие* – это начальное состояние (данные элементы, свойства и связи между ними);

2. *заключение* – требование, цель, конечное состояние (результат решения – неизвестные элементы, свойства и связи между ними);

3. *базис решения* – теоретические основы решения (обоснование решения);

4. *решение* («*ответ»)* – преобразование условия задачи для нахождения требуемого.

По величине проблемности задачи делят на (по Ю.М. Колягину):

– стандартные (известны все компоненты задачи);

– обучающие (неизвестен один из четырех компонентов, как правило, решение);

– поисковые (неизвестны два из четырех – база решения и само решение);

– проблемные (неизвестны три из четырех – определена только цель, комплекс необходимых условий, путей и средств, достаточных для достижения этой цели, человек устанавливает самостоятельно) [16].

Стандартные и обучающие задачи условно можно назвать закрытыми задачами, а задачи поисковые и проблемные – открытыми. В школьной практике в основном рассматриваются задачи закрытого типа, как средство отработки и закрепления школьниками программного материала. Однако известно, что в жизни им придется решать задачи открытого типа. Нет такой области человеческой деятельности, в которой не было бы открытых задач. В технике, в науке, в быту, в искусстве, в отношениях людей. Школа учит решать закрытые задачи. Жизнь требует решения открытых задач. Таким образом, при обучении математике в школьном курсе необходимо сочетать задачи открытого и закрытого типа.

Условие открытой задачи необходимо построить так, чтобы задача была интересна, понятна и максимально вовлекала ребят в творческую познавательную деятельность. Для достижения этого необходимо, чтобы открытые задачи удовлетворяли ряду требований [6;19]:

1. *Наличие смыслового контекста*. Наличие смыслового контекста в задании связано с тем, как воспринимает это задание учащийся: как значимое, имеющее для него самого ценность или как незначимое, неценное. Наличие смыслового контекста связано с такими личностными проявлениями ученика, как возникновение намерения к решению, придание смысла решению задачи, оценка процесса и результата решения, взятие на себя ответственности за полученный результат и др.

2. *Проблемность*. Наличие противоречия между содержанием задания и имеющимся у учащегося опытом.

3. *Неопределенность*. Неопределенность задания может выражаться в таких характеристиках, как открытость условия и многовариантность решения. Открытость условия означает отсутствие критериев правильности действий ученика или возможность ученика самостоятельно открыть какой-либо факт, правило и т. д. Многовариантность решения представляется особенно значимой, так как задания, имеющие несколько вариантов решения, обладают большей открытостью, чем задания с единственным решением. Наибольшей степенью открытости обладают такие задания, ответы на которые могут быть уникальными у каждого ученика.

4. *Доступность*. Для учителя возможность решения задания имеет принципиальное значение. Если учащийся не сможет решить предлагаемые задания, то о поддержке становления творческой деятельности не может быть и речи. К тому же неудачи в решении заданий отрицательно влияют на внутреннюю мотивацию деятельности.

5. *Связь с курсом математики*. Задание должно способствовать расширению математических знаний, получаемых в рамках школьной программы.

6. *Интегративность*. Интегративность задания определяет связь содержания с различными отраслями науки, производства и искусства.

Достижению поставленных учебных целей способствует правильный выбор методов и форм обучения.

Под методами обучения понимают *способы совместной деятельности педагога и учащихся, направленные на достижение ими образовательных целей* [2].

В настоящий момент, учителю предоставлен богатый арсенал методов обучения. Учителю необходимо рационально использовать в учебном процессе эти методы обучения для наилучшего достижения поставленной образовательной цели. Поскольку результат обучения в решающей мере зависит от направленности и внутренней активности обучаемых, то именно вид деятельности, степень самостоятельности, проявление творческих способностей и должны служить важным критерием выбора методов. Следовательно, при реализации обучения целесообразно применять активные методы обучения.

Активные методы обучения – это методы, стимулирующие познавательную деятельность обучающихся [23].

Процесс обучения в современной школе все более ориентируется на коллективное обучение, публичное обсуждение проблем, активное взаимодействие и сотрудничество учителей и учащихся, обмен мнениями между ними. Реализовать это все помогают новые инновационные методы и формы обучения.

Инновационные методы и формы организации обучения – методы и организационные формы обучения, способствующие повышению качества обучения на основе использования современных достижений науки и информационных технологий в образовании. Приведем примеры некоторых инновационных методов и форм обучения:

- проблемно-ориентированные методы и формы организации обучения;

- проектно-ориентированные методы и формы организации обучения;
- имитационные (игровые) методы и формы организации обучения;
- информационно-коммуникационные технологии обучения;
- научно-исследовательская работа учащихся.

В образовательных стандартах нового поколения акцент сделан на формирование у обучающихся опыта проектной и учебно-исследовательской деятельности, проведения наблюдений и экспериментов. В каждом из данных видов деятельности присутствуют те или иные элементы научно-исследовательской деятельности, в которую учащиеся могут быть вовлечены как в ходе урока, так и в ходе домашней работы посредством специальных заданий и проектов.

Глава 2. Методика формирования у учащихся 8-9 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика» в рамках предпрофильной подготовки

2.1. Программа курса по выбору «Комбинаторика для школьников»

Пояснительная записка

Данный курс по выбору обучающихся посвящен комбинаторике. Комбинаторные и вероятностно-статистические представления стали неотъемлемой составляющей функциональной грамотности человека, они играют важную роль в самых разных областях его практической деятельности.

Курс по выбору «Комбинаторика для школьников» для учащихся 8-9 классов в рамках предпрофильной подготовки ориентирован на формирование у учащихся основ математической компетентности в области «Комбинаторика». На данный курс отводится 16 часов, занятия проводятся 1 раз в неделю (см. Приложение А. Конспекты занятий курса по выбору).

Целью данного курса является формирование у учащихся основ математической компетентности в области «Комбинаторика».

В процессе изучения данного курса решаются следующие задачи:

- Получение знаний об основных элементах комбинаторики и теории вероятностей;
- Формирование умений решать прикладные задачи, связанные с конкретной жизненной ситуацией;
- Умение определять связь комбинаторики и теории вероятностей с практическими потребностями.

После изучения элективного курса «Комбинаторика для школьников» учащиеся должны:

1. Знать основные понятия комбинаторики и теории вероятностей.

2. Уметь находить количество комбинаций, используя комбинаторные формулы.

3. Уметь вычислять вероятность события, используя специальные формулы.

4. Видеть в конкретных жизненных проблемах задачи, которые можно решить, используя знания по комбинаторике.

Учебно-тематическое планирование курса по выбору

№ п/п	Наименование модулей, тем, разделов	Кол-во часов	Образовательные цели	Вид деятельности учащихся	Формы контроля
1	Множества и картежи	1	Введение понятия множества и картежа, расширение знаний о множествах, введение основных свойств множеств и рассмотрение примеров множеств.	Фронтальная работа, работа в парах	-
2	История возникновения и развития Элементов Комбинаторики.	1	Расширение знаний о математике, знакомство с новым разделом математики – «Комбинаторика», изучение истории развития комбинаторики.	Фронтальная работа, круглый стол	Оценивание докладов учащихся, оценивание активности учащихся во время обсуждения докладов.
3	Элементы комбинаторики	1	Введение строгого определения понятия «Комбинаторика», знакомство учащихся с историей появления комбинаторики, рассмотрение сфер, в которых применяется комбинаторика, рассмотрение элементарных комбинаторных задач, которые решаются с	Фронтальная работа, самостоятельная работа	Самостоятельная работа

			помощью перебора различных вариантов и с помощью составления дерева вариантов.		
4	Правило суммы	1	Введение правила суммы, решение прикладных задач, используя правило суммы	Фронтальная работа, самостоятельная работа	Самостоятельная работа
5	Правило произведения	1	Введение правила произведения, решение прикладных задач с использованием правила произведения	Фронтальная работа, самостоятельная работа	Самостоятельная работа
6	Решение комбинаторных задач на правило суммы и произведения.	1	Систематизация и обобщение знаний по темам: «Правило суммы» и «Правило произведения». Решение комбинаторных задач, используя правило суммы и правило произведения.	Фронтальная работа, самостоятельная работа	Самостоятельная работа
7	Понятие факториала	1	Введение понятия факториала, решение заданий с использованием факториала	Фронтальная работа, самостоятельная работа и работа в парах.	Самостоятельная работа
8	Перестановка без повторений	1	Введение понятия перестановки элементов, введение формулы для нахождения количества перестановок, формирование умений находить количество перестановок без повторений по формуле. Первичная отработка умений и навыков по новой теме.	Фронтальная работа.	-
9	Решение комбинаторных задач по теме «Перестановка	1	Систематизация и закрепление знаний и практических умений у учащихся по данной	Работа в мини – группах, самостояте	Самостоятельная работа.

	без повторения»		теме.	льная работа.	
10	Размещения без повторений	1	Введение понятия размещения объектов, введение формулы для нахождения количества размещений объектов, первичное закрепление знаний и умений по данной теме.	Фронтальная работа, работа в парах.	-
11	Решение комбинаторных задач по теме «Размещения без повторений»	1	Систематизация и закрепление знаний и практических умений у учащихся по данной теме.	Работа в мини-группах, самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Самостоятельная работа.
12	Сочетания без повторения	1	Введение понятия сочетания элементов, введение формулы нахождения числа сочетаний элементов, первичное закрепление умений и навыков по данной теме	Фронтальная работа	-
13	Решение комбинаторных задач по теме «Сочетания без повторения»	1	Систематизация и закрепление знаний и практических умений у учащихся по данной теме.	Работа в парах.	Самостоятельная работа в парах.
14	Элементы теории вероятностей	1	Введение понятия теория вероятностей, формирование у учащихся знаний об истории появления теории вероятностей, формирование знаний о достоверных, невозможных и случайных событиях, введение алгоритма нахождения вероятности случайного события, первичное закрепление умений и	Фронтальная работа, самостоятельная работа с самопроверкой по эталону, самостоятельная работа.	Самостоятельная работа.

			навыков по данной теме.		
15	Подготовка к итоговой контрольной работе.	1	Выявление и устранение пробелов при выполнении заданий по следующим темам: правило произведения, понятие факториала, перестановка без повторений, размещения без повторений, сочетания без повторений, элементы теории вероятностей.	Фронтальная работа.	-
16	Итоговая контрольная работа	1	Контроль знаний по всем изученным темам.	Индивидуальная работа.	Контрольная работа.

Содержание курса по выбору «Комбинаторика для школьников»

Тема 1. Множества и картежи *(1 час)*. Множества. Картеж. Основные свойства множеств. Примеры множеств.

Тема 2. История возникновения и развития Элементов Комбинаторики *(1 час)*. История появления комбинаторики. История развития комбинаторики. Доклады на тему «История возникновения и развития Элементов Комбинаторики»

Тема 3. Элементы комбинаторики *(1 час)*. Характеристика понятия «Комбинаторика». Сведения о приложениях комбинаторики. Решение элементарных комбинаторных задач методом перебора вариантов. Решение элементарных комбинаторных задач с помощью составления дерева вариантов. Самостоятельная работа по теме «Элементы комбинаторики».

Тема 4. Правило суммы и правило произведения *(3 часа)*. Формулировка и иллюстрация на примерах комбинаторных правил суммы и произведения. Решение комбинаторных задач, используя правило суммы и правило произведения. Самостоятельная работа по теме «Правило суммы и правило произведения».

Тема 5. Понятие факториала*(1 час)*. Введение понятия факториал. Решение заданий с использованием факториала. Самостоятельная работа по теме «Понятие факториала».

Тема 6. Перестановка без повторений *(2 часа)*. Введение понятия перестановки элементов. Формулы для нахождения количества перестановок. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества перестановок элементов. Самостоятельная работа по теме «Перестановка без повторений».

Тема 7. Размещения без повторений *(2 часа)*. Введение понятия размещения объектов. Формулы для нахождения количества размещений. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества размещений объектов. Самостоятельная работа по теме «Размещения без повторений».

Тема 8. Сочетания без повторений *(2 часа)*. Введение понятия сочетания элементов. Формулы для нахождения количества сочетаний. Решение комбинаторных задач, используя формулу нахождения количества сочетаний элементов. Самостоятельная работа по теме «Сочетания без повторений».

Тема 9. Элементы теории вероятностей *(1 час)*. Введение понятия теория вероятностей. История появления теории вероятностей. Достоверные события. Невозможные события. Случайные события. Алгоритм нахождения вероятности случайного события. Самостоятельная работа по теме «Элементы теории вероятностей».

Тема 10. Подготовка и написание контрольной работы *(2 часа).* Обобщение, систематизация и актуализация основных понятий комбинаторики, а именно: правило суммы, правило произведения; перестановки, размещения, сочетания; алгоритм нахождения вероятности случайного события. Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».

Учебно-методические обеспечение

Для учебно-методического обеспечения курса по выбору нами разработано примерное содержание электронного учебного пособия по комбинаторике для учащихся 7-9 классов (см. Приложение Б).

Электронный учебник состоит из таких параграфов, как «Множества и картежи», «Элементы комбинаторики», «Правило суммы и правило произведения в комбинаторике», «Перестановка в комбинаторике», «Размещение в комбинаторике», «Сочетания в комбинаторике», «Элементы теории вероятностей в ОГЭ».

В первом параграфе вводятся определения множества и картежа. Представлены различные примеры их описания. Так же имеются задания для самостоятельной работы.

Во втором параграфе рассказывается, что такое комбинаторика, для чего нам необходимо знать основы комбинаторики, и где в повседневной жизни мы можем воспользоваться этими знаниями. Приведены примеры подсчета всевозможных вариантов с подробным решением. В данном параграфе рассказывается о методе систематического перебора и о том, в чем же заключается этот метод, и рассматривается задача, которую можно решить данным методом с подробным решением. В конце параграфа приводится ряд задач для самостоятельного решения.

В третьем параграфе внимание уделяется правилам суммы и произведения. Прежде чем ввести правило суммы, приводится в пример задача, при решении которой мы плавно приходим к правилу суммы. Далее формулируется само правило и вводится теорема, связанная с этим правилом, и следствия из теоремы. Так же приводится ряд задач с подробным решением.

Таким же способом, как правило суммы, вводится правило произведения. Дана теорема и следствие из этой теоремы. В конце параграфа даны задачи для самостоятельной работы учащихся.

В четвертом параграфе «Перестановка в комбинаторике» вводится понятие факториала, а затем приводится пример с решением. Далее вводится понятие перестановки из n элементов и формула, которая позволяет находить количество перестановок. Так же дана теорема по данной теме и ряд примеров с подробным решением. В конце параграфа предлагаются задачи для самостоятельного решения.

В следующем параграфе рассказывается о размещении в комбинаторике, на основе просмотренного примера вводится понятие размещения. Вводится формула размещения. Приводится так же ряд примеров с подробным решением. И в конце параграфа представлены задачи для самостоятельного решения.

В параграфе «Сочетания в комбинаторике» вводится понятие сочетания. Перед тем, как дать определение сочетания рассматривается пример и его решение. Далее на основе этого примера вводится понятие сочетания. Рассматриваются различные задачи с подробным решением. В конце параграфа приведен ряд заданий для самостоятельной работы.

В последнем параграфе «Элементы теории вероятностей в ОГЭ» сначала вводится история появления теории вероятностей, далее вводится классическое определение вероятности события и алгоритм нахождения вероятности какого-либо события. Затем приведены примеры заданий, при решении которых используются новые знания. В конце параграфа имеется ряд заданий для самостоятельной работы.

В данном пособии перестановки, сочетания, размещения рассматриваются без повторений.

В учебнике представлен весь учебный материал по теме Комбинаторика из учебников Петерсона, Алимова, Никольского, Мордковича, Виленкина и Макарычева с 7 по 9 класс.

Так же, в электронном пособии представлен ряд примеров с подробным разобранным решением, чтобы облегчить учащимся самостоятельное изучение материала по данной теме.

Практическая часть содержит в себе задачи из разных жизненных ситуаций, которые хотя бы в какой-нибудь мере будут ориентировать учащихся, выявлять их интересы и возможно помогут определиться с выбором будущей профессии.

Данное пособие рекомендуется для самостоятельного изучения материала. Для учащихся, которым интересна комбинаторика и которые хотят изучить ее более детально. Такое пособие можно использовать на Элективных курсах. Подборка заданий позволит закрепить каждый изученный материал, позволит рассмотреть его со всех сторон. Пособие отлично подходит для учащихся, которые не могут сидеть за простыми книжками, а электронный ресурс может их привлечь и заинтересовать.

2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

В педагогическом эксперименте принимали участие учащиеся 9-го класса. Констатирующий этап эксперимента проводился на базе средней общеобразовательной школы №150 г. Красноярска. Для диагностики был разработан специальный набор заданий базового уровня сложности. Учащимся был предложен контрольный срез, состоящий из пяти вопросов. Первый и последний вопросы позволяют оценить, знают ли учащиеся что такое комбинаторика, что она изучает и для чего она нужна. Помимо этих вопросов учащимся предложены были 3 задачи: первая задача на правило перебора различных комбинаций, вторая задача – на применение правила произведения и третья задача на теорию вероятностей из демоверсии ГИА за 2016 год.

Приведем пример контрольного среза:

Ф.И.О.____

1. Что изучает комбинаторика? ____

2. Три друга, Антон, Борис и Виктор, приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов похода на футбол?

3. В магазине продаются футболок семь разных видов и шорт четыре разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку одной футболки и одних шорт?

4. На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с яблоками. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с яблоками.

5. Как вы думаете, для чего нужна комбинаторика? ____________________________________

На первый вопрос контрольного среза дали верный ответ лишь 1% и столько же учащихся правильно ответили на последний вопрос, со второй задачей справилось 39% от общего количество учащихся 9 кл., с задачей номер 3 справилось всего 20% учащихся, с задачей номер 4 справилось тоже 20% учащихся. Все пять заданий выполнили правильно всего лишь 29% и 1% учащихся, которые вообще не справились ни с одним заданием.

На основе результатов тестирования, анкетирования, наблюдения и экспертной оценки учащихся, мы определили уровень сформированности основ математической компетентности:

40% учащихся - низкий уровень;

31% учащихся - средний уровень;

29% учащихся – высокий уровень (Рис. 1).

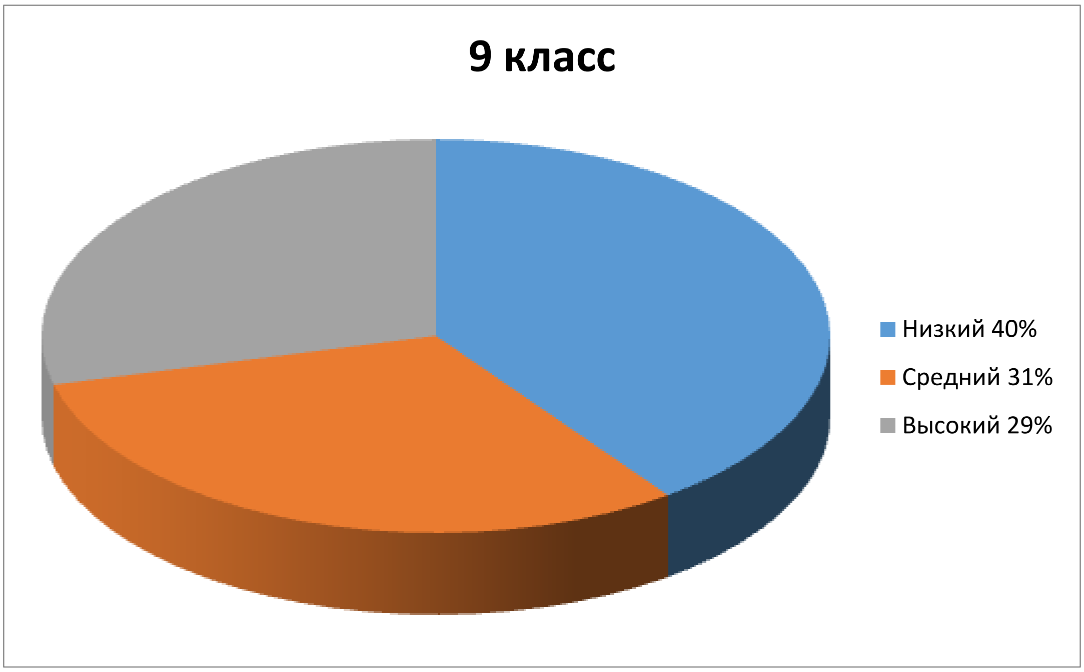


Рис. 1 Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 9 кл. по теме «Комбинаторика и теория вероятностей».

Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что есть школьники, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением, не способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и не готовы применять эти знания и опыт на практике.

Формирующий этап эксперимента проводился также на базе средней общеобразовательной школы №150 г. Красноярска. В рамках этого этапа был реализован курс по выбору «Комбинаторика для школьников» (Приложение А). В ходе чего, нами было отмечено, что у большинства учащихся присутствует повышенный интерес к комбинаторике, многие из них проявили инициативу, самостоятельность при решении комбинаторных задач.

По итогам формирующего этапа эксперимента, нами снова была проведена оценка и измерение уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся. Для диагностики был использован тот же набор заданий, что и для констатирующего этапа эксперимента.

С первым вопросом справились все учащиеся, с последним вопросом справилось 70% учащихся, со второй задачей справилось 74% от общего количество учащихся 9 кл., с задачей номер 3 справилось 96% учащихся, с задачей номер 4 справилось тоже 89% учащихся. Все пять заданий выполнили правильно всего 48% учащихся, и нет ни одного учащегося, который вообще не справились ни с одним заданием.

На основе результатов тестирования, анкетирования и экспертной оценки учащихся, мы определили уровень сформированности основ математической компетентности:

11% учащихся - низкий уровень;

41% учащихся - средний уровень;

48% учащихся – высокий уровень (Рис. 2).

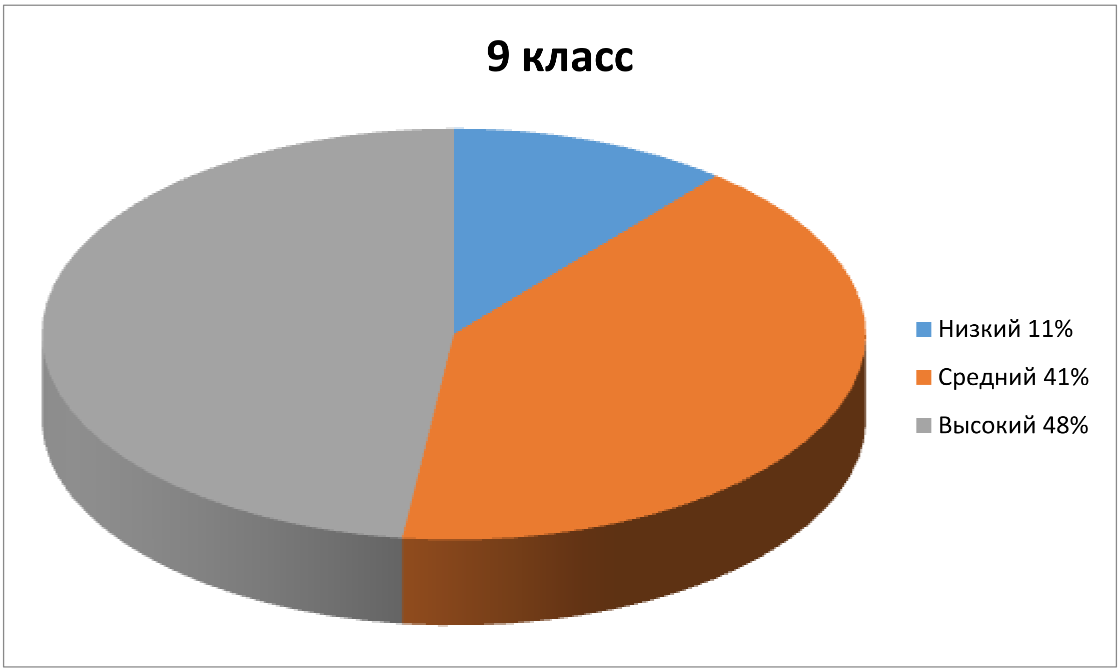


Рис. 2 Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 9 класса по теме «Комбинаторика и теория вероятностей».

Полученные результаты заключительного этапа эксперимента показали, что многие школьники обладают комбинаторным мышлением, способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и готовы применять эти знания и опыт на практике.

Заключение

В ходе исследования было проанализировано множество учебников по математике 7-9 классов и установлено, что в рамках школьной программы учащимся предоставлено очень мало информации по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей», у некоторых авторов данная тема совсем отсутствует. Для реализации исследовательской работы был разработан диагностический инструментарий для проведения педагогических измерений и проведен констатирующий этап педагогического эксперимента. Именно на данном этапе и была выявлена проблема низкого уровня сформированности у учащихся основ математической компетентности в области «Комбинаторика». В качестве средства для ликвидации данной проблемы, был разработан авторский курс по выбору для учащихся 8-9 классов «Комбинаторика для школьников» в рамках предпрофильной подготовки и специальный электронный учебник для сопровождения процесса обучения учащихся комбинаторике. Итоговая диагностическая работа показала, что значительно вырос уровень знания предмета, изменилось отношение учащихся к комбинаторике и теории вероятностей. Учащиеся осознали значимость данного раздела математики.

Библиографический список

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра. 7 класс. - 2011
2. Беспалько В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения. - М.: Издательство ИРПО МО РФ, 1995. – 336 с.
3. Виландеберк А. А ., Шубина Н. Л. Новые технологии оценки результатов обучения: Методическое пособие для преподавателей. СПб.: Изд-во HUGE, 2008. 168 с.
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика.- М.: ФИМА, МЦНМО,2006.
5. Виленкин Н.Я. и др. Алгебра для 9 класса. - 1996
6. Гин А.А. Открытые задачи – инструмент новой педагогики // Журнал руководителя управления образованием, №8 (43), 2014.
7. Гнеденко Б.В. математической образование в вузах / Б.В. Гнеденко. - М., 1981. - С. 6.
8. Демонстрационная версия ОГЭ 2016 года.
9. Дорофеев Г.В. Алгебра. 8 класс.
10. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9класс.
11. Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Брянск, 2001.
12. Зеер Э., Сыманюк Э. Компетентностный подход к модернизации профессионального образования // Высшее образование в России. 2005. № 4.
13. Зимняя И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. №5. С. 34-42.
14. Зубарева И.И., Мордкович А.Г.. Математика 9 класс – 2008
15. Кейв М.А. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие / М.А. Кейв. г. Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015г.
16. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть II., 1977
17. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года // Бюллетень Минобразования. 2002. № 2

18. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Наука, 1977. - 65 с.

19. Лебедева С. В. Конструирование открытых заданий как средства развития интеллектуально-творческой деятельности учащихся при обучении математике. - URL: ftp://lib.herzen.spb.ru/text/ lebedeva_10_31_197_202.pdf.

20. Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г, Нешков К.И, Суворова С.Б_2009 -271с

21. Муравин Г.К., Муравин К.С., Муравина О.В. Алгебра. 8 класс.

22. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра. 8 класс. – 2006.

23. Педагогика: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В.А. Сластенин и др. – М., 2010.

24. Петерсон Л.Г. и др. Математика. Учебник для 7 кл. в 3-х частях. – 2011-216 с.

25. Предпрофильная подготовка школьников С.В. КРИВЫХ, д.п.н., Петербургская Академия педагогического образования

26. Примерная образовательная программа. 2015.

27. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре к УМК Мордковича А.Г. 9 класс, 2014.-285с.

28. Теория комбинаторики [Электронный ресурс]. URL: http://www.studfiles.ru/preview/1043389 (Дата обращения 12.01.2016)

29. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2010.

30. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160с.

31. Шкерина Л.В. Новыне стандарты – новое содержание и технологии обучения математике будущего учителя: проблемы и перспективы // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014. №3(29). С. 12-22.

32. Шкерина Л.В., Багачук А.В., Кейв М.А., Шашкина М.Б. Теоретические основы и технологии измерения и оценивания профессиональных компетенций студентов – будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013.–312 с.

33. Шкерина Л.В. Методика выявления и оценивания уровня сформированности профессиональных компетенций студентов - будущих учителей математики: учебное пособие. - Красноярск: РИО КГПУ, 2015

34. Элементы комбинаторики в школьном курсе математики [Электронный ресурс]. URL: http://student.zoomru.ru/pedagog/jelementy-kombinatoriki-v-shkolnom-kurse/298116.3510419.s1.html (Дата обращения 20.01.2016)

Приложение А.

Конспекты занятий элективного курса «Комбинаторика для школьников»

Занятие 1. Множества и картежи

Цели: Введение понятий множества и картежа, расширение знаний об числовых множествах, формирование знаний об основных операциях над множествами, рассмотрение примеров множеств развитие умений приводить примеры множеств.

Структура занятия:

1. Постановка темы и целей урока (5 мин)
2. Актуализация знаний (5 мин)
3. Введение нового материала (15 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учитель сообщает темы и цели урока. Далее производит небольшой фронтальный опрос. В процессе опроса учитель спрашивает:

- *Что такое множество?*
- *Как могут отличаться множества по числу элементов?*

Далее вводится определение множества.

Определение: Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества принято обозначать прописными буквами, а элементы множеств строчными буквами. Элементы множеств при записи заключаются в фигурные скобки.

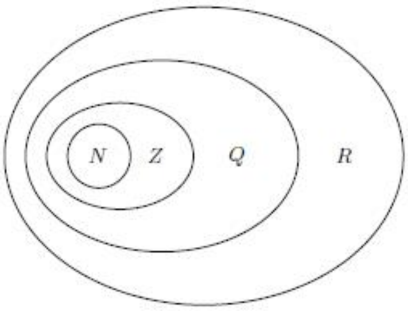
Например, если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ - принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Основные числовые множества

	$\{1,2,3,...,n\}$ Множество всех натуральных чисел
	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3,...\}$ Множество целых чисел. Множество целых чисел включает в себя множество натуральных.
	Множество рациональных чисел.

	Кроме целых чисел имеются ещё и дроби. Дробь — это выражение вида p/q, где p — целое число, q — натуральное. Десятичные дроби также можно записать в виде p/q. Например: 0,25 = 25/100 = 1/4. Целые числа также можно записать в виде p/q. Например, в виде дроби со знаменателем "один": 2 = 2/1. Таким образом любое рациональное число можно записать десятичной дробью — конечно или бесконечной периодической.
	Множество всех вещественных чисел. Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби. К ним относятся: ▪ число π — отношение длины окружности к её диаметру; ▪ число e — названное в честь Эйлера и др.; Вместе два множества (рациональных и иррациональных чисел) — образуют множество действительных (или вещественных) чисел.



В том случае, если множество не содержит ни одного элемента, то такое множество принято называть пустым и записывают его - Ø.

Далее учитель просит привести примеры множеств, которые встречаются в реальной жизни.

Примеры ответов учащихся:

1. Множество людей. Группа детей одного класса – элементами служат учащиеся именно данного класса. Множество берез в лесу.

2. Совокупность всех классов некоторой школы – элементами являются именно группы детей, образующих каждый их этих классов.

3. Множество натуральных чисел. Натуральные числа – числа от 1 до бесконечности.

4. Множество треугольников – любой треугольник является элементом этого класса.

5. Знаки препинания, буквы алфавита, цифры для записи чисел

6. М={Иванов, Петров, Сидоров…} – множество спортсменов

7. Множество письменных принадлежностей.

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Далее учитель знакомит учащихся с основными операциями над множествами.

Операции над множествами

Два множества А и В равны (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример: Если А={1,2,3,4}, В={3,1,4,2} то А=В.

Объединением (суммой) множеств А и В называется множество А ∪ В, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Пример: Если А={1,2,4}, В={3,4,5,6}, то А ∪ В = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

Пример: Если А={1,2,4}, В={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}

Разностью двух множеств А и В называют такое множество, в которое входят все элементы из множества А, не принадлежащие множеству В.

Пример: Если А={1,2,3,4}, В={3,4,5}, то АВ = {1,2}

На следующем этапе урока, учащиеся закрепляют полученные новые знания, выполняя задания. Первое задание учащиеся выполняют все вместе, дальше работают в парах и производят самопроверку с доской.

Задание 1. Какое множество является пересечением множеств А={2, 5, 3, 14} и В={0,6,6,2,14}

Решение. Множество С={2,14}

Задание 2. Какое множество является объединением множеств А={4,45,87} и В={3,5,0}

Решение: С={4,45,87,3,5,0} - объединение множеств А={4,45,87} и В={3,5,0}

Задание 3. Множество А={3,57,24,9,0}, множество В={57,0,7}. Чему равна разность множеств А и В?

Решение: С={3,24,9}

Далее учителем вводятся основные свойства операций над множествами.

Свойства операций над множествами

Свойства перестановочности

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Сочетательное свойство

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

При записи (задании) множеств, часто интересуют не только из каких элементов состоит множество, но и последовательность их появления (записи). В этом случае идет речь об *упорядоченных множествах*. Так, например, при определении положения точки на плоскости или пространстве указывается упорядоченная пара чисел на плоскости и упорядоченная тройка чисел в пространстве. Перестановка координат влечет за собой задание других точек.

Кортеж – это упорядоченное множество элементов.

Длина кортежа – есть количество элементов в нем.

Картежи *равны*, если на одинаковых местах (номерах) у них находятся одинаковые элементы.

Элементы кортежа записываются в угловых или в круглых скобках.

Соединение нескольких кортежей - это тоже кортеж, который состоит из элементов, записанных строго в той последовательности, в которой объединяются кортежи. Длина такого кортежа равна сумме длин всех соединяемых кортежей. Если число элементов кортежа можно предоставить в виде суммы n - слагаемых, то такой кортеж можно разбить на n кортежей. Длина каждого n–го кортежа равна величине соответствующего слагаемого.

Задание. Приведите примеры кортежей.

Учащиеся все вместе отвечают на вопрос учителя.

Примеры ответов учащихся: Примером кортежей может служить любой алфавит. Это алфавит любого разговорного языка. Множество цифр, используемых при записи чисел – так же алфавит и др.

Занятие 2. История возникновения и развития Элементов Комбинаторики.

Цель: формирование знаний у учащихся об истории возникновения и развития комбинаторики.

Урок проводится в форме круглого стола. Учащиеся представляют доклады по следующим темам:

- «Комбинаторика в древний период»

- «Комбинаторика в средние века»

- «Роль комбинаторики в современном мире»

Занятие 3. Элементы комбинаторики

Цель: Введение определения комбинаторики, формирование знаний об областях применения комбинаторики в жизни, решение элементарных комбинаторных задач, формирование умений у учащихся решать задачи прикладного характера методом перебора всевозможных вариантов и с помощью построения дерева возможных вариантов.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учитель задает учащимся простую жизненную ситуацию:

- Представьте, что после посещения футбольного матча вам удается узнать номер телефона вашего кумира, придя домой решаете ему набрать и поговорить. Но вдруг набирая, номер не можете вспомнить последнюю цифру телефона. Что вы будете делать?

Примерный ответ учащихся: - перебирать все возможные цифры от 0 до 9.

- Как еще можно назвать этот перебор цифр?

Примерный ответ учащихся: - перебор всех возможных комбинаций.

- Сегодня на уроке мы будем решать задачи, где используются всевозможные комбинации.

Далее в виде небольшой лекции учитель проводит не большой экскурс в историю комбинаторики.

Историческая справка:

В старинных русских сказаниях повествуется, как богатырь, доехав до распутья, читает на камне: «Вперёд поедешь – голову сложишь, направо поедешь – меча лишишься”. А дальше уже говорится, как он выходит из этого положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Эти пути и варианты складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, именуемый комбинаторикой, занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из этих комбинаций выбрать наилучшую.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Вопросы комбинаторики ставились и решались с незапамятных времён и во многих странах, таких как Греция, Египет, Индия, Китай и т. д. Но серьёзный толчок создания комбинаторики как науки связан с играми, точнее с развлекательными играми.

В XVII веке гражданин Франции Шевалье де Марэ любил изобретать различные игры, играя в которые, получал очень интересные результаты. Например, однажды он придумал такую игру. Бросает 4 кости: выигрывает, если на одной есть шестёрка. Но с ним очень быстро перестали играть, так как он слишком часто выигрывал.

В другой раз он придумал такую игру. Бросает две кости несколько раз: выигрывает, если хотя бы раз выпало две шестёрки. Учитывая результаты первой игры, он решил, что следует бросать 24 раза. Однако вскоре он сам бросил играть, так как стал часто проигрывать. Такой исход дела его очень удивил, и Шевалье де Марэ решил написать двум крупнейшим математикам Франции того времени Блезу Паскалю и Пьеру Ферма с вопросом, как можно объяснить эти удачи и неудачи в игре, а также как правильно делать ставки в таких или аналогичных играх.

Решая эту задачу, Б. Паскаль и П. Ферма разработали начало двух ветвей математики: *комбинаторики и теории вероятностей*.

Впоследствии этими науками занимались многие великие математики тех времён. В 1666 году Готфрид Вильгельм Лейбниц в возрасте 20 лет опубликовал работу «Диссертация о комбинаторном искусстве», где впервые вставил слово «комбинаторный» .В 1713 году Якоб Бернулли публикует «Искусство предположения», где вводит понятия числа сочетаний, находит формулы для суммы 1-х степеней натуральных чисел.

Использование комбинаторики в настоящее время очень разнообразно. Одно из них - шифровка и дешифровка текстов. Шифр появился ещё в средние века. Английский математик Уоллис расшифровывал послания французов. Расшифровкой древнеегипетских иероглифов занимался Шампольон.

В биологии комбинаторика служит для подсчёта количества клеточных структур ДНК и РНК, в физике - для описания свойств кристаллов. Комбинаторика используется в генной инженерии, физике, химии. Отдельную ветвь комбинаторики можно отнести к использованию её в создании искусственного интеллекта.

На следующем этапе урока учитель предлагает рассмотреть следующие задачи:

Задача 1: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение: Составим схему рассуждений.

Первая цифра **2** **4**

Вторая цифра **0** **4** **0** **2**

Третья цифра **4** **0** **2** **0**

204, 240, 402,420 – 4 числа.

Способы решения таких задач перебором возможных вариантов используются при наличии нескольких решений. При записи возможных вариантов, их схемы изображаются, как дерево с разветвленными ветвями, которое так и называется «дерево возможных вариантов».

Рассматривают другие задачи.

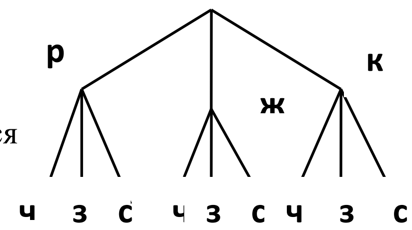
Задача 2. На завтрак в школьной столовой любой ученик может выбрать булочку, ватрушку, кекс или сочник, а запить их он может соком, чаем или компотом. Сколько вариантов завтрака предлагается в школьной столовой?

Решение. Собираем все варианты в таблицу.

	Булочка (Б)	**Ватрушка (В)**	**Пирожок (П)**
Сок (С)	С Б	С В	С П
Чай (Ч)	Ч Б	Ч В	Ч П

В таблице 2 строки и 3 столбца, которые образуют 6 клеток. Так как выбор еды и напитка происходит независимо, то в каждой клетке стоит один из возможных вариантов завтрака. Значит, всего вариантов столько, сколько клеток в таблице, то есть 6.

Задача 3. У Тани есть розовая, желтая, красная кофта и черная, зеленая, синяя юбки. Сколько различных нарядов можно составить из них?



Решение: Составим дерево возможных вариантов.

При этом возможные варианты, объекты в нем записываются кодом. При записи объектов кодом используются буквы или цифры. Сколько ветвей у дерева в схеме, столько решений у задачи.

РЧ, РЗ, РС; ЖЧ, ЖЗ, ЖС; КЧ, КЗ, КС.

Задача 4. У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста. Как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?

Решение:

1. 50 рублей, 100 рублей, 50 рублей, 100 рублей;
2. 50 рублей, 50 рублей, 100 рублей, 100 рублей.

Задача для самостоятельной работы:

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Решение:Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа. Пусть на первом месте стоит цифра 1. На втором месте может быть записана любая из цифр 3, 5, 7. Запишем, например, на втором месте цифру 3. Тогда в качестве третьей цифры можно взять 5 или 7. Получим два числа 135 или 137. Если на втором месте записать цифру 5, то в качестве третьей цифры можно взять цифру 3 или 7. В этом случае получим числа 153 и 157. Если же, наконец, на втором месте записать цифру 7, то получим числа 173 и 175.

Итак, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Таких чисел шесть:

135, 137, 153, 157, 173, 175.

Аналогичным способом можно составить числа, которые начинаются с цифры 3, с цифры 5, с цифры 7. Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых по шесть чисел:

135, 137, 153, 157, 173, 175,

315, 317, 351, 357, 371, 375,

513, 517, 531, 537, 571, 573,

713, 715, 731, 735, 751, 753.

Таким образом, из цифр 1, 3, 5, 7 можно составить 24 трехзначных числа, в записи которых цифры не повторяются.

Занятие 4. Правило суммы

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение правила суммы для решения прикладных задач, формирование практических навыков решения комбинаторных заданий, используя правило суммы.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Пример: Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой – 40 различных книг (и не таких, как на первой полке), то сколькими способами можно выбрать одну книгу из стоящих на этих полках?

Решение: Из стоящих на этих полках книг, выбрать одну книгу можно 30+40=70 способами.

Обобщением этого примера является следующее утверждение, которое называется *правилом суммы*.

Далее учитель формулирует правило суммы.

Если элемент *a* можно выбрать *m* способами, а элемент *b*-*n* способами, причем любой выбор элемента *a* отличен от любого выбора элемента *b*, то выбор «*a* или *b*» можно сделать m+n способами.

Теорема. **Если пересечение конечных множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:**

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A)+n(B).} \qquad \textbf{(1)}$$

Следствие. Если конечные множества $A_1, A_2, \dots, A_k$ попарно не пересекаются, то имеет место равенство

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k). \qquad (2)$$

После введения нового материала, учитель предлагает применить новые знаний при решении заданий.

Пример 1: При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 – на пост бортинженера и 25 – на пост космонавта – исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур или командира, или бортинженера, или космонавта – исследователя?

Решение: Обозначим множество кандидатов на пост командира корабля через А, множество кандидатов на пост бортинженера через В и множество кандидатов на пост инженера-исследователя через С. Тогда по условию

$n(A)=10$, $n(B)=20$, $n(C)=25$.

Кроме того, $A \cap B =$ Ш, $A \cap C =$ Ш, $B \cap C=$Ш.

По формуле (2) имеем:

$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)=55$ способов.

Пример 2: Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: Обозначим множество тем по алгебре через А, множество тем по геометрии через В. Тогда по условию $n(A)=17$, $n(B)=13$. Так как по условию необходимо выбрать только одну тему для практической работы, то возпользуемся правилом суммы : $17+13 = 30$ способов.

Пример 3: Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет из спортлото или автомотолотереи?

Решение: Обозначим множество билетов денежно вещевой лотереи через А, множество билетов спорт лото через В и множество билетов автомотолотереи через С. Тогда по условию $n(A)=5$, $n(B)=6$, $n(C)=10$. Так как по условию необходимо выбрать один билет из спортлото или автомотолотереи, то воспользуемся правилом суммы: $6+10=16$ способ выбора одного билета.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. В вазе 6 яблок, 5 груш и 4 сливы. Сколько вариантов выбора одного плода?

Решение: $6 + 5 + 4 = 15$

Ответ: 15 вариантов.

Задание 2. Сколько существует вариантов покупки одной розы, если продают 3 алые, 2 алые и 4 жёлтые розы?

Решение: $3 + 2 + 4 = 9$

Ответ: ***9*** вариантов.

Занятие 5.Правило произведения

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение правила произведения для решения прикладных задач, формирование практических навыков решения комбинаторных заданий, используя правило произведения.

Структура занятия:

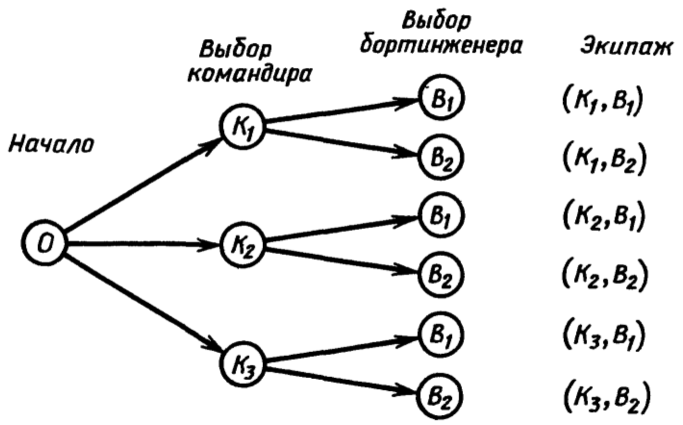
1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учитель, в качестве актуализации знаний, предлагает учащимся рассмотреть следующую задачу:

Задача: Пусть существует три кандидата K_1, K_2, K_3 на место командира корабля и два кандидата B_1 и B_2 на место бортинженера. Сколькими способами можно сформировать экипаж корабля, состоящий из командира и бортинженера?

Решение: Командира корабля можно выбрать тремя способами. После выбора командира еще двумя способами можно выбрать бортинженера, поэтому общее число способов, которыми можно составить экипаж, находится произведением $3 \cdot 2 = 6$. Графическая иллюстрация этого решения приведена на рисунке.



Схему, построенную на рисунке, называют *деревом*. Исходную точку обозначим О. Двигаясь всевозможными путями из точки О к правым крайним вершинам, мы получим 6 способов, которыми можно составить экипаж корабля. Все они перечислены в правом столбце.

Обобщением этого примера является следующее утверждение, называемое *правилом произведения*.

Пусть множество A состоит из элементов (a_1, a_2,…,a_m) и множество B-из элементов (b_1, b_2,…,b_k). Пусть из множества A выбирается любой из его m элементов и независимо от него из множества B выбирается любой из его k элементов. Выбранные элементы образуют пару (a_i, b_j), где $a_i \in A$, $b_j \in B$. Множество этих пар можно записать в виде следующей таблицы:

(a_1, b_1), (a_1, b_2),…,(a_1,b_k),

(a_2, b_1), (a_2, b_2),…,(a_2,b_k),

…………………………..

(a_m, b_1), (a_m, b_2), … , (a_m, b_k).

Общее число N всевозможных пар равно $m \cdot k$, т.е. $N=n(A)\cdot n(B)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. **Если множества A и B конечны, то число N всевозможных пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:**

$$N=n(A)\cdot n(B).$$

С помощью метода математической индукции теорема обобщается на любое конечное число множеств.

Следствие. Если имеется k конечных множеств A_1, A_2, … , A_k, то число N всевозможных наборов (a_1, a_2, …, a_k), где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … , $a_k \in A_k$, равно

$$N=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot \ldots \cdot n(A_k).$$

Так же правило произведения можно сформулировать иначе:

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n\cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Или

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Для отработки знаний и умений по новой теме, учащимся предоставлен ряд заданий прикладного характера.

Пример 1. Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

Решение: Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада (n=3). Оля может поступить аналогично (m=3). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить

$n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$ различными способами.

Пример 2. В коридоре три лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения, включая случай, когда все лампочки не горят?

Решение: Первая лампочка может или гореть, или не гореть, т.е. имеется два возможных исхода. Но то же самое относится ко второй и к третьей лампочке. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет независимо друг от друга. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов освещения $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

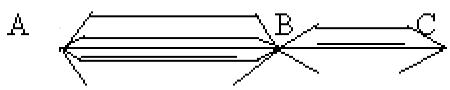
Пример 3. В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение: Ответ оказывается неожиданно большим: почти два года! Объясним его. Для удобства рассуждений пронумеруем стулья №1, №2, №3, №4, №5, №6 и будем считать, что члены семьи (бабушка, дедушка, мама, папа, дочь, сын) занимают места по очереди. Нас интересует, сколько всего существует различных способов рассаживания.

Предположим, что первой садится бабушка. У нее имеется шесть вариантов выбора стула. Вторым садится дедушка и независимо выбирает стул из пяти оставшихся. Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из четырех стульев. У папы будет уже три варианта, у дочки – два, ну а сын сядет на единственный незанятый стул. По правилу умножения получаем, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов рассаживания, а 720 дней – это и есть почти два года.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С ведут три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?



Решение: $5 \cdot 3 = 15$

Ответ: 15 путей.

Задание 2. Сколькими способами можно составить пару из одной гласной и одной согласной букв слова «платок»?

Решение: гласные: а, о – 2 шт.

согласные: п, л, т, к – 4 шт.

$2 \cdot 4 = 8$

Ответ: 8 способами.

Задание 3. Сколько танцевальных пар можно составить из 8 юношей и 6 девушек?

Решение: 6 • 8 = 48

Ответ: 48 пар.

Занятие 6. Решение комбинаторных задач на правило суммы и произведения.

Цель: выявление и устранение пробелов при решении комбинаторных заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учащиеся вместе с учителем вспоминаю в чем заключается правило суммы и правило произведения. Далее учитель формулирует тему и цель урока. После этого решают ряд заданий, предложенных учителем.

Пример 1: У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?

Решение: Так как из общего числа подруг необходимо выбрать две, то по правилу произведения $2 \cdot 5 = 10$.

Пример 2. В шахматном турнире учавствуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

Решение: 1-2,1-3,1-4,1-5,1-6,1-7,1-8,1-9 каждый может играть по 8 партий, тогда 9*8=72, но мы должны учесть, что партии, где игроки, так скажем, перемешиваются местами (1-2, и 2-1) не надо считать, тогда получим 72: 2=36 способов.

Пример 3: Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк, шесть камзолов, три шляпы, две пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?

Решение: $5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ карнавальных костюмов.

Задание: **(**Выполняется в парах**)** Придумать прикладную задачу, которая решается с помощью правила суммы или правила произведения. (1-3 пары представляют задачу перед классом, остальные сдают свои работы учителю).

Тест-контроль для самостоятельной работы:

Класс	**ФИО ученика**	**Кол-во баллов**

Вариант №1

1.В школьном буфете продаётся 5 видов пирожков с различными начинками. Ученик хочет купить два пирожка с различной начинкой. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: ____

2.Из цифр 1,3, 5 составили двузначные числа, используя в записи числа каждую из них не более одного раза. Поставьте в соответствие столбцу (правому) верное утверждение из левого столбца.

1) 13 А. Наибольшее из возможных чисел

2) 15

3) 31 Б. Наименьшее из возможных чисел

4) 35

5) 51 В. Не является двузначным числом

6) 53

7) 55

8) 3

А	Б	В

Ответ:

3. Сколькими способами можно назначить двух дежурных из 27 учеников?

Ответ: ____

Тест-контроль

Класс	**ФИО ученика**	**Кол-во баллов**

Вариант №2

1.В кафе предлагают 7 видов пирожных и 3 вида соков. Сколькими способами посетитель может сделать заказ из одного пирожного и одного сока. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: ____

2.Из цифр 2, 4, 8 составили двузначные числа, используя в записи числа каждую из них не более одного раза. Поставьте в соответствие столбцу (правому) верное утверждение из левого столбца.

1) 22 А. Наибольшее из возможных чисел

2) 24

3) 28 Б. Наименьшее из возможных чисел

4) 42

5) 48 В. Не является двузначным числом

6) 82

7) 84

8) 4

А	Б	В

Ответ:

3. При встрече 10 мальчиков обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Ответ: ____

Занятие 7. Понятие факториала

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение понятия факториала, умение применять понятие факториала при решении заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учитель спрашивает, сталкивался ли кто-нибудь из учащихся когда-либо с таким понятием, как факториал? Что такое факториал?

После этого учитель объявляет тему и цель урока. Далее вводит новый материал.

Определение: Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначают n! (читают «эн факториал»):

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Например, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, …

1! Считается равным 1: $1!=1$.

Значения факториалов чисел от 1 до 10:

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5040
3	6	8	40320
4	24	9	362880
5	120	10	3628800

Пример 1: Вычислите:

А) 6!

Решение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Б) 6!-5!

Решение: 720-120=600

В) $\frac{10!}{5!}$

Реншение: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1} = 30240$

Г) $\frac{11!}{5! \cdot 6!}$

Решение: $\frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11}{1} = 462$

Две буквы a и b можно переставить двумя способами:

ab, ba.

Для трех букв a, b, c можно записать шесть перестановок:

abc, acb, bca, bac, cab, cba.

На первом месте мы поставили букву a и к ней приписали две перестановки из остальных букв b и c. Потом на первом месте мы поставили букву b и к ней приписали две перестановки из букв a и c. Наконец, на первом месте мы поставили букву c и к ней приписали две перестановки из букв a и b. Всего получилось $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Пример 2. Сколько трехсловных предложений можно составить из трех слов: сегодня, дождь, идет?

Решение: Искомое число равно числу перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Задача для ссамостоятельной работы:

В волейбольной команде 6 человек, а на площадке 6 позиций (номеров) для их расстановки. Сколькими способами команда может расположиться на площадке?

Решение: у первого игрока команды есть 6 мест для выбора, у второго-5, у третьего – 4, у четвертого – 3, у пятого - 2, у шестого – 1. Следовательно, на площадке можно расположиться $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=6!=720$ вариантами.

Занятие 8. Перестановки без повторений

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение понятия перестановки, введения формулы для нахождения количества перестановок, умение применять формулу нахождения количества перестановок объектов при решении заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминают, что называет факториалом и приводят примеры, в которых необходимо вычислить факториал. После этого учитель объявляет тему и цели урока.

Определение: **Перестановкой** из n элементов называют какое-либо расположение этих элементов в ряд.

Количество перестановок из n элементов принято обозначать P_n(перестановка по-французски permutation).

Справедлива формула

$$P_n = n!$$

Чаще всего эту запись формулируют следующим образом: «*Число всех перестановок множества из n элементов равно n!*».

Теорема. **n различных элементов можно расставить по-одному на n различных мест ровно n! способами**.

Для n = 1, 2, 3 она уже проверена нами. Чтобы получить ее для n = 4, рассуждаем так. Составим четыре ряда перестановок для цифр 1, 2, 3, 4. В первый ряд поставим все перестановки, начинающиеся с 1:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432.

Таких перестановок 6 = 3!, т.е. столько, сколько раз можно переставить цифры 2, 3, 4, стоящие после цифры 1.

Но на первое место можно поставить любую из четырех цифр, и в каждом таком случае получится 6 перестановок, т.е. всего перестановок

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$$

Можно доказать, что $P_n=n!$ для любого натурального n.

После ввеения нового материала учащиеся приступают к выполнению заданий.

Пример 1. Сколько перестановок можно получить из букв, составляющих слово «апельсин»?

Решение: Речь идет о вычислении P_8. По формуле имеем:

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Ответ: 40 320.

Из этих комбинаций только одна является осмысленным словом русского языка, все остальные – бессмысленный набор букв!

Пример 2. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Значит, существует 40 320 способов расстановки участниц забега на восьми беговых дорожках.

Ответ: 40 320.

Пример 3. Имеется десять различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно рассавить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение. Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо рассматривать не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$.

Получаем $P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280.$

Ответ: 17 280.

Занятие 9. Решение комбинаторных задач по теме «Перестановки без повторения»

Цель: систематизация и обобщение знаний, выявление и устранение пробелов по данной теме.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учащиеся вспоминают, что такое перестановка в комбинаторике и какую формулу надо использовать для того, чтобы найти количество перестановок.

Первую половину урока учащиеся работают в мини - группах.

Задание 1.Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

Решение: P_7=7!=1·2·3·4·5·6·7=5 040

Задание 2.Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8 , но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

Решение: P_3=3!=1·2·3=6

Задание 3. В расписании на понедельник шесть уроков: русский язык, алгебра, геометрия, биология, история, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Решение: Всего шесть уроков ,из них два урока математики должны стоять рядом. "Склеиваем" два элемента (алгебра (А) и геометрия (Г) сначала в порядке АГ, затем в порядке ГА. При каждом варианте "склеивания" получаем P5= 5!=120вариантов расписания. Общее число способов составить расписание равно 120(Г) + 120(А) = 240.

Задание 4.Собрание сочинений Д. Лондона состоит из 7 томов. Сколькими способами можно разместить эти тома на книжной полке?

Решение: P_7=7!=1·2·3·4·5·6·7=5 040

Задание 5.Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихов, так, чтобы сборники стихов стояли рядом в произвольном порядке?

Решение: $P_7 \cdot P_5$=7!·5!=5 040·120=604 800

Задачи для самостоятельной работы:

Задача 1. Найдите число способов расстановки 8 ладьей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.

Решение: Каждый искомый способ задается перестановкой 8 чисел1,2, … 8. Эти числа указывают номера горизонталей занятых полей на первой, второй, …, восьмых вертикалей. Значит, таких перестановок 8!. Таким образом, ладьи можно расставить 8!=40 320 способами.

Задача 2. Сколькими способами можно представлять друг с другом цифры 1, 2, 3, 4?

Решение: P4=4! =24.

Задача 3. За столом пять мест. Сколькими способами можно расставить пятерых гостей?

Решение: P5=5! =120

Занятие 10. Размещения без повторения

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение понятия размещения, введения формулы для нахождения числа размещений, умение применять формулу нахождения числа размещений объектов при решении заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

При решении различных задач возникает вопрос о том, сколькими способами можно выбрать k объектов из множества, содержащего n таких объектов, причем k объектов должны выбираться в определенном порядке. Другими словами, сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов?

Пусть имеется 4 шара и 3 пустые ячейки. Обозначим шары буквами a, b, c, d. в каждую ячейку можно поместить по-одному шару из этого набора. Если мы поместим шар a в первую ячейку, шар b во вторую ячейку, а шар c в тертью ячейку, то получим одну из возможных упорядоченных троек шаров:

a	*b*	*c*

Выбирая по-разному шары для первой, второй и третьей ячеек, будем получать различные упорядоченные тройки шаров, например:

a	*c*	*b*

b	*a*	*c*

d	*c*	*b*

Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют *размещением* из четырех элементов по три.

Пример 1. В конкурсе принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии?

Решение: Существует 20 способов выбора одного кандидата на первую премию. Далее имеется 19 кандидатов, одному из которых присуждают вторую премию. Наконец, одному из 18 оставшихся кандидатов присуждают третью премию. Согласно правилу произведения для этого существует $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способов.

Определение: ***Размещениями*** **из n объектов по k называют любой выбор k объектов, взятых в определенном порядке из n объектов. Число размещений из n объектов по k обозначают** A_n^k.

Формула для числа A_n^k получается обобщением результата, полученного в примере 1.

Действительно, существует n способов выбора первого объекта. После того как он выбран, остается (n-1) способ для выбора второго объекта. После выбора первого и второго объектов остается (n-2) способа для выбора третьего объекта, и вообще после выбора объектов от первого до (k-1) – го остается (n-k+1) способ для выбора k-го объекта. По правилу произведения имеем:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \qquad (1)$$

Формула (1) и дает решение поставленной вначале задачи: выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \text{ способами.}$$

Пример 2. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?

Решение: Искомые команды будут отличаться между собой или учащимися, или их порядком, который указывает, на какую олимпиаду пойдет ученик. Поэтому искомое число равно числу размещений из 30 по 4 и по формуле (1) получаем

$$A_{30}^4 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657720$$

Это значит, что существует 657 720 способов выбора команды.

Пример 3. Сколько двухбуквенных комбинаций, не содержащих повторений букв, можно составить из 32 букв русского алфавита?

Решение: Как и в предыдущем случае, мы рассматриваем размещения из 32 букв по 2, по формуле (1) имеем:

$A_{32}^{2} = 32 \cdot 31 = 992$ двухбуквенные комбинации.

Следующие две задачи учащиеся решают в парах.

Пример 4. Учащиеся 2 класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

Решение: Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо набором предметов, либо порядком их следования. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 9 элементов по 4. Имеем $A_{9}^{4} = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$

Итак, мы нашли, что расписание можно составить 3024 способами.

Пример 5. Сколько трехзначных чисел (без повторений цифр в записи числа) можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение: Если среди семи цифр нет нуля, то число трехзначных чисел (без повторений цифр), которые можно составить из этих цифр, равно числу размещений из 7 элементов по 3. Однако среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 надо исключить те, у которых первым элементом является цифра 0. Их число равно числу размещений из 6 элементов по 2.

Значит, искомое число трехзначных чисел равно $A_{7}^{3} - A_{6}^{2}$

Получаем $A_{7}^{3} - A_{6}^{2} = \frac{7!}{4!} - \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 - 5 \cdot 6 = 180$

Из данных цифр можно составить 180 трехзначных чисел (без повторений цифр).

Занятие 11. Решение комбинаторных задач по теме «Размещения без повторения»

Цель: систематизация и обобщение знаний, выявление и устранение пробелов по данной теме.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)

2. Постановка темы и целей урока (2 мин)

3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (25 мин)

4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учащиеся работают в парах.

Задание 1.Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

Решение: $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$ способа

Задание 2.На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Решение: $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ способов

Задание 3.Сколькими способами тренер может определить, кто из 12 спортсменок, готовых к участию в эстафете 4×100 м, побежит на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение: $A_{12}^4 = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880$ способов

Задание 4.Учащиеся 9-го класса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

Решение: $A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200$

За данный урок учащиеся получат 2 оотметки, одну за работу парах, вторую за самостоятельную работу.

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Из 30 студентов класса надо выбрать хозяйку класса, старосту и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360$ способами

Задание 2. В конкурсе песен «Галерея звезд» участвуют 15 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места?

Решение: $A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$ способами

Задание 3. Пять разных предметов раздают 8 людям, причем может случиться так, что некоторые получат по несколько предметов. Сколькими способами может быть произведен раздел?

Решение: $A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720$ способов

Занятие №12. Сочетания без повторения

Цель: расширений знаний о комбинаторике, введение понятия сочетания, введения формулы для нахождения числа сочетаний, умение применять формулу нахождения числа сочетаний объектов при решении заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминаю, что было изучено на прошлых уроках. Далее учитель озвучивает тему и цель урока и переходит к введению нового материала.

Определение: **Сочитанием** из n элементов по k называют любую группу из k элементов, составленную из данных n элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают через C_n^k (по первой букве французского слова *combination* – сочетание).

Всякое размещение по k элементов можно рассматривать как сочетание. Разница заключается в том, что если в размещении переставить местами эелементы, то получится другое размещение, но сочетание не зависит от порядка входящих в него элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

После того, как учащиеся ознакомились с новой темой, учитель предлагает ряд заданий на первичное закрепление изученного материала.

Пример 1. Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Решение: Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, безразличен, то число различных случаев составить команду равно:

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

Пример 2: Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. какова вероятность того, что все взятые карты тузы?

Решение: Так как порядок, в котором будут взяты тузы, безразличен, то число всех равновозможных случев взять 4 карты равно:

$$C_{36}^4 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!} = 58905.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1}{58905}$.

Пример 3. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Решение: прежде всего, детали считаются различными – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы. В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей. Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{11! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{24} = 1365$$

способами можно взять 4 детали из ящика.

Занятие 13. Решение комбинаторных задач по теме «Сочетания без повторения»

Цель: систематизация и обобщение знаний, выявление и устранение пробелов по данной теме.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Весь урок учащиеся работают самостоятельно, учитель работает в режиме консультации. В конце урока учащиеся сдают свои работы учителю.

Пример 1.Вычислите:

А) C_4^3;

Решение: $C_4^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} = 4$

Б) C_6^2;

Решение: $C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 5 \cdot 3 = 15$

В) C_8^6.

Решение: $C_8^6 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 4 = 28$

Пример 2. Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санатории?

Решение: $C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 5 \cdot 3 = 15$

Пример 3. Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

Решение: $C_6^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$. Искомая вероятность $\frac{1}{20}$

Пример 4. Иванов и Степанов входят в группу из семи студентов, имеющих одинаковые шансы получить один из двух различных призов. Какова вероятность того, что Иванов и Степанов получат призы?

Решение: $C_7^2 = \frac{6 \cdot 7}{2!} = 3 \cdot 7 = 21$. Искомая вероятность $\frac{1}{21}$

Пример 5. Из перетасованной колоды, состоящей из 36 карт, наугад взяты 4 карты. Какова вероятность того, что в эту четверку попадут 4 туза (в любом порядке)?

Решение: $C_{36}^4 = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{4!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 6}{4} = 1943865$. Искомая вероятность $\frac{1}{1943865}$

Занятие 14. Элементы теории вероятности

Цель: расширений знаний о математике, введение понятия вероятности события, рассмотрение истории появления и развития теории вероятностей, формирование знаний об достоверных, невозможных и случайных событиях, введения алгоритма нахождения вероятности какого-либо события, формирование умений находить вероятность события.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)

2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Наша жизнь во многом состоит из случайностей. Существует такая наука «Теория вероятностей». Пользуясь ее языком, можно описать многие явления и ситуации.

Еще в первобытные времена вождь понимал, что у десятка охотников «вероятность» поймать добычу больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Математику многие любят за точность дважды два всегда четыре, сумма четных чисел четна, площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон и т. д. В любой задаче, которую вы решали, у всех получается один и тот же ответ – нужно только не делать ошибок в решении.

Реальная жизнь не так проста и однозначна. Исходы многих явлений заранее предсказать невозможно. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадет подброшенная вверх монета, когда в следующем году выпадет первый снег или сколько человек в городе в течение ближайшего часа захотят позвонить по телефону. Такие непредсказуемые явления называются ***случайными***.

Однако случай тоже имеет свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных явлений. Если подбросить монету 1000 раз, то «орел» выпадет приблизительно в половине случаев, чего нельзя сказать о двух или даже десяти бросаниях. «Приблизительно» не означает половину. Это, как правило, может быть так, а может и не быть. Закон вообще ничего не утверждает наверняка, но дает определенную степень уверенности в том, что некоторое случайное событие произойдет. Такие закономерности изучает специальный раздел математики – ***Теория вероятностей***. С ее помощью можно с большей степенью уверенности (но все равно не наверняка) предсказать и дату выпадения первого снега, и количество телефонных звонков.

Теория вероятностей неразрывно связана с нашей повседневной жизнью. Это дает нам замечательную возможность установить многие вероятностные законы опытным путем, многократно повторяя случайные эксперименты. Материалами для этих экспериментов чаще всего будут обыкновенная монета, игральный кубик, набор домино, нарды, рулетка или даже колода карт. Каждый из этих предметов так или иначе связан с играми. Дело в том, что случай здесь предстает в наиболее частом виде. И первые вероятностные задачи были связаны с оценкой шансов игроков на выигрыш.

Современная теория вероятностей ушла от азартных игр, но их реквизит по-прежнему остается наиболее простым и надежным источником случая. Поупражнявшись с рулеткой и кубиком, вы научитесь вычислять вероятность случайных событий в реальных жизненных ситуациях, что позволит вам оценивать свои шансы на успех, проверять гипотезы, принимать оптимальные решения не только в играх и лотереях.

Решая вероятностные задачи, будьте очень внимательны, старайтесь обосновывать каждый свой шаг, ибо никакая другая область математики не содержит такое количество парадоксов. Как теория вероятностей. И, пожалуй, главное объяснение этому - ее связь с реальным миром, в котором мы живем.

Во многих играх используют кубик, у которого на каждой грани отмечено различное количество точек от 1 до 6. Играющий бросает кубик, смотрит, сколько точек выпало (на той грани, которая располагается сверху), и делает соответствующее число ходов:1,2,3,4,5, или 6. Бросание кубика можно считать опытом, экспериментом, испытанием, а полученный результат – событием. Людям обычно очень интересно угадывать наступление того или иного события, предсказывать его исход. Какие предсказания они могут сделать, когда бросают игральный кубик? **Первое предсказание:** выпадет одна из цифр 1,2,3,4,5, или 6.Как вы думаете, предсказанное событие наступит или нет? Конечно, обязательно наступит. Событие, которое в данном опыте обязательно наступит, называют ***достоверным событием.***

Определение: Достоверным называют событие, которое в данных условиях обязательно произойдет)

Второе предсказание: выпадет цифра 7. Как вы думаете, предсказанное событие наступит или нет? Конечно не наступит, это просто невозможно. Событие, которое в данном опыте наступить не может, называют ***невозможным событием.***

Определение: Невозможным называют событие, которое в данных условиях произойти не может.)

Третье предсказание: выпадет цифра 1. Как вы думаете, предсказанное событие наступи или нет? На этот вопрос мы с полной уверенностью ответить не в состоянии, поскольку предсказанное событие может наступить, а может и не наступить. Событие, которое в данном опыте может наступить, а может и не наступить, называют ***случайным событием.***

Определение: Случайным называется событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти.

Задание: охарактеризуйте события, о которых идет речь в приведенных ниже заданиях. Как достоверные, невозможные или случайные.

1. Подбрасываем монету. Появился герб. (случайное)
2. Охотник стрелял в волка и попал. (случайное)
3. Школьник каждый вечер выходит на прогулку. Во время прогулки, в понедельник, он встретил трех знакомых. (случайное)
4. Проведем мысленно следующий эксперимент: стакан с водой перевернем вверх дном. Если этот эксперимент проводить не в космосе, а дома или в классе, то вода выльется. (достоверное)
5. Произведено три выстрела по мишени. Произошло пять попаданий (невозможное)
6. Бросаем камень вверх. Камень остается висеть в воздухе. (невозможное)
7. Буквы слова «антагонизм» наугад переставляем. Получится слово «анахроизм». (невозможное)

Задание: Петя и толя сравнивают свои дни рождения. Событие состоит в следующем:

а) их дни рождения не совпадают; (случайное)

б) их дни рождения совпадают; (случайное)

в) Петя родился 29 февраля, а Толя – 30 февраля; (невозможное)

г) дни рождения обоих приходятся на праздники – Новый год (1 января) и День независимости России (12 июня). (случайное)

Проверь себя. (математический диктант)

1)Укажите, какие из следующих событий невозможные, какие – достоверные, какие – случайные:

- Футбольный матч «Спартак» - «Динамо» закончится вничью. (случайное)
- Вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее (достоверное)
- В полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце. (невозможное)
- Завтра будет контрольная по математике. (случайное)

- 30 февраля будет дождь. (невозможное)
- Вас изберут президентом США. (невозможное)
- Вас изберут президентом России. (случайное)

Наблюдая за игрой в кости, Блез Паскаль высказал идею измерения степени уверенности в выигрыше некоторым числом. Паскаль рассуждал, что, когда игрок бросает игральную кость, он не знает, какое число очков выпадет. Но он знает, что каждое из чисел – 1,2,3,4,5,6 имеет одинаковую долю успеха в своем появлении. Появление же одного из этих чисел в каждом испытании – событие достоверное.

Если принять возможность наступления достоверного события за 1, то вероятность появления, например, 6 равна $\frac{1}{6}$.

Если буквой А обозначить событие «выпало 6 очков» при одном бросании игральной кости, то вероятность события А обозначают Р(А) и записывают $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{6}$.

Определение: Классическое определение вероятности:

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу исходов этого испытания

$$\mathrm{P(A)} = \frac{N(A)}{N}$$

Далее учитель дает учащимся схему нахождения вероятности, схему в печатном виде отдает каждому на руки.

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует:

1) Найти число N всех возможных исходов данного испытания;

2) найти количество N(A) тех исходов испытания, в которых наступает событие А;

3) Найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события А.

Устное решение задач:

Задание 1. В игральной колоде 36 карт. Какова вероятность, что случайно выбранная карта окажется:

а). туз пик; $(\frac{1}{36})$

б). король.$(\frac{4}{36} = \frac{1}{9})$

Задание 2. Бросают монету 1 раз. Какова вероятность, что выпадет орел? $(\frac{1}{2})$

Задание 3. При подбрасывании игрального кубика, отмечается число очков на верхней грани. Какова вероятность того, что выпадет 5 очков? $(\frac{5}{6})$

Далее учащиеся по одному выходят к доске и оформляют решение, объясняя его, остальные записывают решение в тетради.

Задание 4. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется делящимся на 5?

Решение: всего от 1 до 30 - 6 чисел, которые делятся на 5. $P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

Задание 5. Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обоих кубиках выпало одинаковое число очков.

Решение: всего количество исходов равно 6*6=36, количество благоприятных исходов равно 6 – (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6). Следовательно, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Задание 6. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее — получить в сумме 7 или 8?

Решение: обозначим события: А — “выпало 7 очков”, В — “выпало 8 очков”. Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов, а событию В — 5 исходов (см. табл. 1, рис. 1). Всех равновозможных элементарных исходов — 36, что видно из той же таблицы. Значит:

$$P(A) = \frac{6}{36},\ P(B) = \frac{5}{36}.$$

Итак, $P(A) > P(B)$, т. е. получить в сумме 7 очков — более вероятное событие, чем получить в сумме 8 очков.

Задание 8. В среднем из каждых 80 поступивших в продажу аккумуляторов 68 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

Решение: Заряженных поступает 68, следовательно, не заряженных – 12,

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{12}{80}=0,15$$

Задания для самостоятельной работы:

Задание1. Телевизор у Светы сломался и показывает только один случайный канал. Света включает телевизор. В это время по четырем каналам из двадцати показывают кинокомедии. Найдите вероятность того, что Света попадет на канал, где комедия не идет.

Решение: $P(A)=\frac{16}{20}=0,8$

Задание 2. Максим с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе тридцать кабинок, из них 3 – синие, 15 – зеленые, остальные – красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в красной кабинке.

Решение: $P(A)=\frac{12}{30}=0,4$

Задание 3. На экзамене 30 билетов, Ваня не выучил 14. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.

Решение: $P(A)=\frac{16}{30}=0,5(3)$

Задание 5. В партии из 1000 компьютеров оказалось 5 бракованных. Какова вероятность купить исправный компьютер?

Решение: $P(A)=\frac{995}{1000}=0,995$

Занятие 15. Подготовка к итоговой контрольной работе.

Цель: систематизация и обобщение знаний по всем пройденным темам, подготовка к контрольной работе.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминают все основные определения и формулы: решение комбинаторных заданий перебором вариантов, правило суммы и произведения, понятие размещения и формулы для вычисления числа размещений, понятие перестановки и формулы для вычисления количества перестановок, понятие сочетания и формула для нахождения числа сочетаний объектов, повторения определения вероятности события и алгоритма вычисления вероятности.

Задание 1. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на полке?

Решение: $P_7=7!=5\ 040$

Задание 2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?

Решение: $A_5^3 - A_4^2 = 3\cdot4\cdot5-3\cdot4=60-12=48$ чисел

Задание 3. Из 15 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: $C_{15}^2=\frac{14\cdot15}{2!}=7\cdot15=105$ способа.

Задание 4. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 14 человек – в банке, 29 – в фирме и 14– в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

Решение: Всего выпускников – 57, работает в фирме – 29, следовательно, $P(A)=\frac{29}{57}$

Занятие 16. Итоговая контрольная работа

Цель: контроль знаний учащихся.

Структура занятия:

1. Постановка целей урока (2 мин)
2. Написание контрольной работы: (40 мин)

Ход занятия:

Контрольная работа (базовый уровень, 9 класс)

Вариант1

1. Сколькими способами можно разместить 5 различных книг на полке?
2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 7, 9?
3. Из 10 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
4. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 17 человек – в банке, 23 – в фирме и 19 – в налоговой инспекции. Найдите

вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

Вариант 2

1. Сколькими способами можно разместить 6 различных книг на полке?
2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 8?
3. Из 8 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
4. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 19 человек – в банке, 31 – в фирме и 15 - в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

Решение:

Вариант 1

1. 5·4·3·2·1= 120 способов
2. $A_6^3 - A_5^2 = 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 120 - 20 = 100$
3. $C_{10}^2 = \frac{9 \cdot 10}{2!} = 9 \cdot 5 = 45$
4. $P(A) = \frac{23}{59}$

Вариант 2

1. 6·5·4·3·2·1=720
2. $A_5^3 - A_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 60 - 12 = 48$
3. $C_8^2 = \frac{7 \cdot 8}{2!} = 7 \cdot 4 = 28$
4. $P(A) = \frac{19}{65}$

Приложение Б

Содержание электронного учебника по комбинаторике «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» представлено на компакт-диске