МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет/филиал математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)

Выпускающая(ие) кафедра(ы) математического анализа и методики обучения математике в вузе
(полное наименование кафедры)

Тетерина Жанна Сергеевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема **ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОФИЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

Направление подготовки/специальность 44.03.05 Педагогическое образование
(код направления подготовки/код специальности)

Профиль Математика, Информатика
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина
«25.05» 2016 г. ________
(дата, подпись)

Руководитель
канд.пед. наук, доцент Шашкина М.Б.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)
«24.05» 2016 г. ________
(дата, подпись)

Дата защиты 30.06.2016

Обучающийся Тетерина Ж.С.
(фамилия, инициалы)
«23.05» 2016 г. ________
(дата, подпись)

Оценка ________
(прописью)

Красноярск
2016

Оглавление

Введение

Развитие математики во все времена определялось двумя движущими силами. Одна – «внешняя сила» – связана с потребностями человеческой практики, понимаемой не в узко утилитарном смысле, но широко как совокупность умственной и физической деятельности людей. Другая – «внутренняя сила» – вытекает из необходимости систематизации и обобщения накопленного материала, приведения его в порядок в соответствии с канонами математики. Эти силы проецируют два направления в математике, которые условно можно назвать «прикладным» и «теоретическим».

Пренебрежение прикладной стороной математики может привести к отрыву теории от практики, к возникновению псевдотеорий, единственной положительной чертой которых является их логическая непротиворечивость. Не менее опасно пренебрежение теоретической стороной математики, утилитарный подход к науке, ведущий к забвению фундаментальных исследований и, в конечном итоге, вредящий практике. Единство математики проявляется во взаимопроникновении прикладного и теоретического направлений, в их взаимном обогащении и влиянии.

Человечество ценит математику за ее прикладное значение, за общность и универсальность ее методов, за действенные прогнозы при изучении природы и общества. Наибольшее значение для решения практических задач из различных сфер человеческой деятельности имеет именно теоретическое математическое знание, выступающее в качестве метода научного познания действительности.

Математическое образование всегда создает в умах учащихся некоторую картину состояния и развития математики. Важно, чтобы эта картина соответствовала реальности, отражала на доступном для учащихся уровне действительные взаимосвязи математики с окружающим миром.

Современная педагогика видит три цели математического образования. Первая – общеобразовательная. Без математики невозможно освоить ряд других дисциплин, нельзя продолжить образование в вузе по многим специальностям / направлениям. Кроме того, ядро математического знания давно стало общечеловеческой культурной ценностью. Вторая цель – прикладная. Школьник, как правило, еще не знает, чем он будет заниматься, поэтому у учителя остается одна реальная возможность – научить детей принципам математического моделирования реальных процессов. Третья цель – воспитательная. Математика развивает логическое, пространственное и алгоритмическое мышление; формирует такие качества, как трудолюбие, настойчивость, усидчивость; учит ценить красоту мысли и т.д. Но еще важнее другое: математика – это мировоззрение. Человек, владеющий математическими методами исследования, иначе подходит к жизненным проблемам, иначе смотрит на мир.

Прикладная направленность обучения математике связана со всеми тремя названными целями: общеобразовательной (легче учить другие предметы), прикладной (будущий специалист еще в школе получает необходимые навыки прикладного математического исследования), воспитательной (мир един, и именно в содружестве с другими науками математика формирует у ребенка основы научной картины мира).

В государственных образовательных стандартах описаны следующие требования к прикладной направленности формируемых математических действий выпускников: использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа.

Однако, по результатам ЕГЭ 2015 года, результаты выполнения заданий, проверяющих умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, в РФ составляет 44 %, в Красноярском крае – 35,44 %.

В Международной программе по оценке образовательных достижений учащихся при проверке математической грамотности PISA в основном предлагаются не учебные, а практические ситуации, характерные для повседневной жизни. По последним опубликованным результатам исследования PISA 2012 г. Россия занимает 34 место по уровню математической грамотности, это ниже среднего балла по странам ОЭСР (организации экономического сотрудничества и развития). Итак, результаты ЕГЭ и PISA свидетельствуют о том, что российские учащиеся зачастую не умеют применять полученные математические знания и умения в заданиях практического характера, имеющих реальную жизненную основу.

В разное время проблемой прикладной направленности обучения математике занимались как математики, так и методисты: С.С. Варданян, Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев, Н.А. Терешин, Ю.Ф. Фоминых и другие. В своих работах они предлагают различные трактовки понятий: прикладная направленность, практическая направленность. В трактовке Н.А. Терешина под прикладной направленностью к обучению математике понимается ориентация содержания и методов обучения на применение математики для решения задач, возникающих вне математики. Интересные задачи и методические соображения можно найти у Е.С. Дубинчука, М.М. Лимана, И.А. Рейнгарда, Б.А. Шкарина и др. Но, как правило, в учебно-методической литературе, используемой в школьной практике, мало прикладных задач.

Российское образование в настоящий момент акцентируется на развитии обучающихся, на личностно ориентированном обучении, гармонизации и гуманизации образовательного процесса. Наша задача – не только дать учащимся математические знания, но и сформировать у них коммуникативные, познавательные и регулятивные универсальные учебные действия, способствующие становлению и самореализации личности. Использование межпредметных связей является одним их условий реализации прикладной направленности обучения. Объект математики – весь мир, и его изучают все остальные науки. Межпредметные связи повышают научность обучения, его доступность.

Выпускник школы должен владеть интегративными способами деятельности, навыками самостоятельного критического мышления, умениями воспринимать альтернативные точки зрения, высказывания обоснованных аргументов "за" и "против" каждой из них, умением использовать получаемую информацию и применять ее на практике. Для этого необходимо организовать процесс обучения математике таким образом, чтобы реализовать межпредметные связи с другими дисциплинами, продемонстрировать прикладное значение математических методов. Широкие возможности для этого представляет тема «Производная», изучаемая в старших классах.

Школе необходимы конкретные методические разработки по усилению практико-ориентированной составляющей обучения математике, построенных на основе использования современных приемов, методов и технологий. В связи с этим мы выделяем ***проблему*** поиска методик и технологий обучения математике, ориентированных на ее прикладную направленность.

Объектом исследования является процесс профильного обучения математике в 10–11 классах.

Предметом исследования является методика использования прикладных задач на применение производной в процессе профильного обучения математике.

Цель исследования – разработать и апробировать методику использования прикладных задач на применение производной в процессе профильного обучения математике.

В основу нашего исследования положена ***гипотеза:*** решение задач прикладного характера на применение производной будет способствовать повышению качества математической подготовки учащихся, формированию метапреметных и личностных образовательных результатов.

Для реализации поставленной цели и проверке гипотезы исследования решались следующие ***задачи:***

1) провести дидактический анализ темы «Производная» и раскрыть прикладную направленность данной темы;

2) разработать учебно-тематическое планирование курса по выбору «Производная вокруг нас» и его содержание для учащихся 10–11 классов;

3) разработать интегрированные уроки по теме «Производная»;

4) осуществить апробацию курса и сделать выводы о достижении гипотезы исследования.

Для решения поставленных задач применялись следующие ***методы исследования:*** теоретический анализ психолого-педагогической и методической литературы; наблюдение; эксперимент.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка.

Во ***Введении*** обоснована актуальность исследования, сформулирована его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи; раскрыта практическая значимость, охарактеризованы методы исследования.

В ***первой главе*** охарактеризованы особенности обучения математике в условиях введения ФГОС и профилизации в нашей стране и за рубежом, на основе проведенного анализа психолого-педагогической и методической литературы описана роль прикладных задач в школьном курсе математики, охарактеризовано прикладное значение темы «Производная».

Во ***второй главе*** подобран комплекс прикладных задач, программа и содержание курса по выбору, методические разработки фрагментов уроков математики с использованием прикладных задач по теме «Производная», а также экспериментальная проверка эффективности данных разработок; проведен анализ полученных результатов.

В ***Заключении*** подведены итоги работы, обозначены перспективы дальнейшего исследования.

В ***Приложениях*** представлены: дифференцированная самостоятельная работа, теоретический материал по экономике (к интегрированному уроку).

ГЛАВА 1. Тема «Производная» и ее прикладное значение

§ 1. Профильное обучение математике на современном этапе

Динамично развивающемуся обществу требуются специалисты нового типа, готовые успешно работать в различных сферах. Особую ценность приобретают умения самостоятельно решать проблемы, совместно действовать в команде, способность правильно ставить цели и эффективно их достигать, идти на риск, инициативность, стремление к повышению уровня образования и др. Наряду с этим от человека требуются такие качества, как личная ответственность, обязательность, коммуникабельность.

Современные выпускники школы слабо ориентируются в возможных направлениях продолжения своего образования. Реальным выходом из сложившегося положения является внесение серьезных изменений в работу школ по ориентированию старшеклассников в направлениях будущей профессиональной деятельности.

Старшая ступень общеобразовательной средней школы, занимая ключевое место в современном образовании, во многом определяет возможности систем профессионального образования и качество профессиональной деятельности молодых людей. Старшая ступень представляет собой особое образовательное пространство, в рамках которого происходит социальное, профессиональное и гражданское самоопределение личности. От того, с каких гражданских и нравственных позиций молодой человек совершает свой образовательный и профессиональный выбор, зависит получение обществом квалифицированного специалиста-профессионала.

Система профильного образования – наиболее эффективная форма организации процесса обучения старшеклассников, соответствующая государственным и общественным интересам и интересам личности, адекватная особенностям юношеского возраста и мировым тенденциям в сфере образования.

Рассмотрим историю профильного обучения в России. Российская школа давно предпринимала попытки дифференцировать обучение учащихся. Ниже в таблице 1 представлены основные этапы истории профильного обучения в России [Смирнова, 2000].

Таблица 1

История профильного обучения

Период	Результат профилизации
До середины XVII в.	Проведена дифференциация учащихся по следующим направлением: мужское или женское, церковное или светское, сословное.
1764 г	Возникло большое количество разнообразных учебных заведений: женские гимназии, мужские гимназии, кадетские корпуса, реальные училища, коммерческие училища и епархиальные училища.

Продолжение табл. 1

1849 г	Введена бифуркация (раздвоение) курса мужских гимназий после 3-го класса. Производилось это в соответствии с желанием учащихся продолжать образование в университете, тогда они еще изучали иностранные языки, либо предполагавшие иди на службу – изучали курс русского законодательства и дополнительную математику.
1864 г.	Начались попытки создания профильных классов и школ с углубленным изучением отдельных предметов.
1870-е гг.	Разделение по специальностям. В 5–6 классах реальных училищ существовали два отделения – основное и коммерческое, а в дополнении семилетки три отделения: 1) общее – преимущественно для подготовки учащихся для поступления в высшие учебные заведения; 2) механико-техническое; 3) химико-техническое.
1888 г.	Реорганизованы: механико-техническое и химико-техническое отделения были упразднены, и сами училища превращены в средние общеобразовательные учебные заведения, дававшие учащимся по математике, физике и естествознанию значительно больший объем знаний, чем классические гимназии.
1900 г.	По инициативе министерства народного просвещения была создана специальная комиссия по разработке новых планов и программ для учебных заведений различного профиля. Были разработаны планы 6 типов.
1915–1916 гг.	В процессе подготовки реформы образования, осуществлявшейся под руководством Министра просвещения П.Н. Игнатьева, идея профильного обучения претерпела изменения. По предложенной структуре 4–7 классы гимназии разделялись на три ветви: новогуманитарную, гуманитарно-классическую, реальную. Но в связи с отставкой министра, реформа не была проведена.
сентябрь 1918 г.	Разработано Положение о единой трудовой школе, предусматривающее профилизацию содержания обучения на старшей ступени школы. В старших классах средней школы выделялись три направления: гуманитарное, естественно-математическое и техническое.
июль 1924 г.	По школам II ступени (8–9 кл.) отмечается целевая установка на подготовку массового, полноценного, квалифицированного, сознательного работника определенной области труда при обеспечении условий для возможного поступления в вуз. Действовали профуклоны
1926 г.	Специальные уклоны были проведены в 1135 школах, обучалось107314 учащихся и распределение их было по 27 уклонам.
1934 г.	ЦК ВКП(б) и Совет Народных комиссаров СССР принимают постановление «О структуре начальной и средней школы в СССР», предусматривающее единый учебный план и единые учебные программы.
1957 г.	Академия педагогических наук выступила инициатором проведения эксперимента, в котором предполагалось провести дифференциацию по трем направлениям: физико-математическому и техническому; биолого-агрономическому; социально-экономическому и гуманитарному.

Окончание табл. 1

1958 г.	На заседании АПН профессор Н.К. Гончаров выступил с докладом «О введении фуркации в старших классах средней школы» и предложил организовать дифференцированное обучение старшеклассников.
1966 г.	Введены две формы дифференциации содержания образования по интересам школьников: факультативные занятия в 8–10 классах и школы (классы) с углубленным изучением предметов.
1984 г.	Принят документ для общеобразовательной школы – «Об основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы». Средняя школа стала одиннадцатилетней. Для старшеклассников (10–11 классы) предполагалось 3 направления: 1) 10–11 классы общеобразовательной школы; 2) средние профессионально-технические училища; 3) средние специальные учебные заведения.
февраль 1988 г.	Пленум ЦК КПСС, посвященный вопросам образования, выдвинул комплекс мер по обновлению школы. Был принят тезис о необходимости дифференцированного обучения, направленного на развитие индивидуальных особенностей учащихся.
1992 г	Закон Российской Федерации «Об образовании», закрепивший вариативность и многообразие типов и видов образовательных учреждений и образовательных программ.
1996 г.	Закон, «О высшем и послевузовском профессиональном образовании». Для своего времени этот документ считался весьма прогрессивными: образовательные учреждения получили свободу, избавились от «штампованных» советских программ.
2002 г.	Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования.
29.12.2012	Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" "направленность (профиль) образования – ориентация образовательной программы на конкретные области знания и (или) виды деятельности, определяющая ее предметно-тематическое содержание, преобладающие виды учебной деятельности обучающегося и требования к результатам освоения образовательной программы".

Таким образом, введение различных форм дифференциации в учебный процесс отечественной школы, в том числе и профильного обучения, сопровождалось периодическими подъемами и спадами интереса к нему со стороны работников образования различного уровня.

Рассмотрим зарубежный опыт профильного обучения. Реформы образования происходят сейчас в большинстве развитых стран мира. При этом особое место в них отводится проблеме профильной дифференциации обучения.

В большинстве стран Европы (Франция, Голландия, Шотландия, Англия, Швеция, Финляндия, Норвегия, Дания и др.) все учащиеся до 6-го года обучения в основной общеобразовательной школе формально получают одинаковую подготовку. К 7-му году обучения ученик должен определиться в выборе своего дальнейшего пути. Каждому ученику предлагаются два варианта продолжения образования в основной школе: «академический», который в дальнейшем открывает путь к высшему образованию и «профессиональный», в котором обучаются по упрощенному учебному плану, содержащему преимущественно прикладные и профильные дисциплины[Балыхин и др., 2010].

В США профильное обучение существует в течение последних 2–3 лет обучения в школе. Учащиеся могут выбрать три варианта профиля: академический, общий и профессиональный, в котором дается предпрофессиональная подготовка. Вариативность образовательных услуг в них осуществляется за счет расширения спектра различных учебных курсов по выбору. При этом прежде всего, учитываются запросы и пожелания родителей, планирующих профиль для своих детей [Балыхин и др., 2010].

Анализ зарубежного опыта позволяет выделить следующие общие для всех изученных стран черты организации обучения на старшей ступени общего образования:

1. Общее образование на старшей ступени во всех развитых странах является профильным.

2. Как правило, профильное обучение охватывает три, реже два последних года обучения в школе.

3. Доля учащихся, продолжающих обучение в профильной школе, неуклонно возрастает во всех странах и составляет в настоящее время не менее 70%.

4. Количество направлений дифференциации, которые можно считать аналогами профилей, невелико. Например, два в англоязычных странах (академический и неакадемический), три во Франции (естественнонаучный, филологический, социально-экономический) и три в Германии (“язык – литература – искусство”, “социальные науки”, “математика – точные науки – технология”).

5. Организация профильной подготовки различается по способу формирования индивидуального учебного плана обучающегося: от достаточно жестко фиксированного перечня обязательных учебных курсов (Франция, Германия) до возможности набора из множества курсов, предлагаемых за весь период обучения (Англия, Шотландия, США и др.). Как правило, школьники должны выбрать не менее 15 и не более 25 учебных курсов, продолжительностью до одного семестра.

6. Количество обязательных учебных предметов (курсов) на старшей ступени по сравнению с основной существенно меньше. Среди них присутствуют в обязательном порядке естественные науки, иностранные языки, математика, родная словесность, физическая культура.

8. Дипломы (свидетельства) об окончании старшей (профильной школы) обычно дают право прямого зачисления в высшие учебные заведения за некоторыми исключениями, например, во Франции прием в медицинские и военные вузы проходит на основе вступительных экзаменов [Костина, 2016].

Согласно «Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года», одним из целевых ориентиров развития системы образования является: предоставление возможностей всем обучающимся старших классов осваивать индивидуальные образовательные программы, в том числе профильное обучение и профессиональную подготовку. В соответствии с этой концепцией был подготовлен проект «Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования», который широко обсуждался педагогической общественностью. Он был в целом поддержан органами управления образованием субъектов РФ, доработан по замечаниям и предложениям Федерального координационного совета по общему образованию Всероссийского совещания руководителей органов управления образованием и руководителей учреждений повышения квалификации работников образования.

В этом документе определены основные позиции, касающиеся профильного обучения.

Профильное обучение – средство дифференциации и индивидуализации обучения, когда за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитываются интересы, склонности и способности учащихся, создаются условия для образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования [Концепция профильного обучения …, 2002].

Профильная школа − институциональная форма реализации этой цели, естественно форма основная, но не единственная.

Профильное обучение направлено на реализацию личностно ориентированного учебного процесса. При этом существенно расширяются возможности выстраивания учеником собственной, индивидуальной образовательной траектории. Переход к профильному обучению, преследует, таким образом, следующие основные цели:

- обеспечить углубленное изучение отдельных дисциплин программы полного общего образования;

- создать условия для значительной дифференциации содержания обучения старшеклассников, с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ;

- способствовать установлению равного доступа к полноценному образованию разным категориям обучающихся в соответствии с их индивидуальными склонностями и потребностями;

- расширить возможности социализации учащихся, обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, в том числе более эффективно подготовить выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования [Концепция профильного обучения…, 2002].

Основными направлениями профилизации являются следующие: естественно-математическое; социально-экономическое; гуманитарное; технологическое (специализация – информационные технологии).Возможно существование универсального профиля.

Существует несколько видов учебных курсов профильного обучения.

Базовые общеобразовательные курсы – курсы, обязательные для всех учащихся во всех профилях обучения. Предлагается следующий набор обязательных общеобразовательных курсов: математика, история, русский и иностранные языки, физическая культура, а также интегрированные курсы обществоведения для естественно-математического, технологического профилей, естествознания – для гуманитарного, социально-экономического профилей.

Профильные курсы – курсы повышенного уровня (фактически углубленные курсы для старшей ступени школы), определяющие направленность каждого конкретного профиля обучения. Например, физика, химия, биология – профильные курсы в естественнонаучном профиле; литература, русский и иностранные языки – в филологическом профиле; история, право, экономика и др. – в социально-экономическом профиле и т.д. По базовым общеобразовательным и основным профильным курсам проводятся единые государственные экзамены (ЕГЭ).

Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана и выполняют две функции. Одни из них могут «поддерживать» изучение основных профильных курсов на заданном профильным стандартом уровне. Например, элективный курс «Математическая статистика» поддерживает изучение профильного курса экономики. Другие элективные курсы служат для внутрипрофильной специализации обучения и для построения индивидуальных образовательных траекторий. Например, курсы «Информационный бизнес» или «Основы менеджмента» и др. в социально-гуманитарном профиле; курсы «Химические технологии», «Экология» и др. в естественнонаучном профиле. Число элективных курсов, предлагаемых в составе профиля, должно быть избыточно по сравнению с числом курсов, которые обязан выбрать учащийся. По элективным курсам ЕГЭ не проводится.

Существует несколько моделей организации профильного обучения.

1) *Модель внутришкольной профилизации*. Отдельная школа может быть однопрофильной (реализовывать только один из избранных ею профилей), или организовать на старшей ступени несколько профилей, т.е. быть многопрофильной. Возможен

вариант, когда школа в целом не ориентирована на конкретные (один или несколько) фиксированные профили, но за счет значительного увеличения числа курсов по выбору представляет школьникам – в том числе, в форме многообразных учебных межклассных групп – в полной мере осуществлять свои индивидуальные профильные образовательные программы, включая в них те или иные профильные и элективные курсы.

2) *Модель сетевой организации профильного обучения*. В подобной модели профильное обучение учащихся конкретной школы осуществляется за счет целенаправленного и организованного привлечения образовательных ресурсов иных образовательных учреждений.

Оно может строиться в двух основных вариантах.

Первый связан с объединением нескольких школ вокруг наиболее сильной школы, обладающей достаточным материальным и кадровым потенциалом, которая для группы школ выполняет роль «ресурсного центра». В этом случае каждая из школ данной группы обеспечивает в полном объеме базовые общеобразовательные курсы и ту часть профильного обучения (профильные и элективные курсы), которую она способна реализовать в рамках своих возможностей. Остальную профильную подготовку берет на себя «ресурсный центр».

Второй вариант основан на кооперации школы с иными образовательными учреждениями и образовательными ресурсами – учреждений дополнительного, высшего, среднего и начального профессионального образования. В этом случае учащимся предоставляется право выбора получения профильного образования либо в собственной школе, либо в кооперированных с ней образовательных структурах (дистанционные курсы, заочные школы, Малые Академии при вузах, учреждения системы НПО/СПО и др.).

Предложенный подход не исключает также возможности деятельности и дальнейшего развития, во-первых, универсальных (непрофильных) школ и классов, не ориентированных на профильное обучение и, во-вторых, различного рода специализированных образовательных учреждений (хореографические, музыкальные, художественные, спортивные школы, школы-интернаты при крупных вузах и др.) [Концепция профильного обучения…, 2002].

В национальной образовательной инициативе "Наша новая школа "РФ от 4 февраля 2010 г. № Пр-271 говорится, что старшеклассникам нужно предоставить возможность обучения в заочных, очно-заочных и дистанционных школах, позволяющих им независимо от места проживания осваивать программы профильной подготовки.

В соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования на старшей ступени произошло революционное нововведение − это сокращение количества предметов в старших классах в 2 раза (с 18–21 предмета до 10–12).

В новом стандарте предложено оставить для старшеклассников шесть предметных областей, из которых они выберут до семи нужных предметов. Предусмотрены три обязательных предмета: физкультура, ОБЖ и «Россия в мире».

Каждый из выбранных предметов будет иметь три уровня изучения: интегрированный (первая ступень), базовый (вторая ступень) и профильный. Предполагается, что на профильный уровень будет отведено пять часов в неделю, а на базовый и интегрированный уровни — соответственно по три часа. Таким образом, в учебном плане для старшеклассников будет три профильных предмета, три обязательных и три базовых или интегрированного уровня и в учебном плане будет 33 часа в неделю. Это означает, что вместо 18–21 предметов, как сегодня, останется не более десяти предметов, благодаря чему удастся избежать огромного количества избыточных знаний и повторов. Будут и индивидуальные проекты школьников [Андрющенко, 2011].

Однако следует заметить, что есть некоторые проблемы по введению профильного обучения. Можно сказать, что профильное обучение сегодня «зависло» между провозглашенными целями и практикой. И одна из проблем – учебно-методическое обеспечение нового содержания.

Для большинства школ обеспечение учебной литературой и другими ресурсами, если они и будут созданы в массовом порядке, остается неосуществимым. Во-первых, отсутствие финансирования – во многих школах старшеклассникам приходится приобретать учебники за собственный счет. Во-вторых, учителя, особенно с большим стажем работы, привыкли к конкретному учебно-методическому комплекту.

Профильное обучение вызвало в педагогическом сообществе еще один давний спор. Перегружены ли наши дети? Физиологи и психологи утверждают: да перегружены. Но педагоги-практики, соглашаясь с этим утверждением, отмечают, что некоторые не только успевают в школе, но умудряются заниматься и чем-то дополнительно: ходят на курсы, к репетиторам, посещают секции, серьезно занимаются самообразованием.

Другой важной проблемой остается выбор профессионального учебного заведения. Далеко не все школьники к 8–9 классу знают, какую специализацию они хотели бы получить, поэтому часто выбор профиля происходит случайно. После окончания школы выпускник может осознать неправильность своего выбора, а поступить в вуз другого профиля ему будет сложно. Может возникнуть и такая ситуация, когда ученик выбрал профильный класс, где хотел бы обучаться, а его туда не берут в силу тех или иных причин. Бывают и такие ситуации, что в данном образовательном учреждении нет такого набора профильных предметов, который требуется конкретному учащемуся.

Еще одна проблема, новый учебный план профильного образования предусматривает отказ от фундаментальности как принципа российского образования. В нем сокращаются часы на некоторые предметы (география), разные предметы объединяются в одну образовательную область (естествознание для гуманитарного профиля) – физика, химия, биология. Упрощается программа по математике для гуманитариев.

Следующей проблемой профильного обучения можно выделить квалификацию действующих педагогических кадров. К сожалению, эта проблема решается с некоторыми трудностями. Основная причина – отсутствие финансирования и специалистов-практиков в области профильного обучения. Далеко не все регионы России могут обеспечить массовую переподготовку одновременно несколько тысяч учителей.

Внутри математического образования возникли существенные противоречия, которые не позволяют достичь ожидаемого результата, это:

− доминирование в преподавании математики коллективных и фронтальных форм обучения, несоответствующих ярко выраженной индивидуальности в освоении и применении математических знаний;

− неадекватность традиционно сложившихся приемов учебной математической деятельности индивидуальным возможностям учащихся;

− профильное изучение математики, в частности углубленное изучение, предполагающее удовлетворение самых разных специальных способностей учащихся.

Одной из проблем профильного обучения является несоответствие форм и методов обучения. Рассмотрим, почему это происходит, и каким образом лучше организовать обучение в профильной школе.

Согласно современным подходам, при профильном обучении нужна такая организация учебного процесса, при которой ученик сам определяет уровень изучения предмета, форму, самостоятельно организовывает свою деятельность в процессе изучения нового материала. Учитель должен мотивировать, выступать организатором, координатором, а ученик – сам добывать знания, которые ему необходимы. Только так материал будет усвоен прочно и осознанно.

Перевод обучения на субъект-субъектную основу требует такой педагогической технологии, которая бы обеспечила ученику развитие его мотивационной сферы, интеллекта, самостоятельности, коллективизма, склонностей, умений осуществлять самоуправление учебно-познавательной деятельностью. Поэтому перед школьной практикой встала проблема поиска технологии обучения, позволяющей практически решить эту задачу. Одной из таких технологий как раз и является модульное обучение.

Сущность модульного обучения состоит в том, что ученик полностью самостоятельно (или с определенной дозой помощи) достигает конкретных целей учебно-познавательной деятельности в процессе работы с модулем. Модуль − фрагмент образовательной программы или учебной дисциплины, характеризующийся структурно-содержательной завершенностью и относительной самостоятельностью [Третьяков, 2001].

Таким образом, модуль выступает средством модульного обучения, т.к. в него входят: целевой план действий, банк информации, методическое руководство по достижению дидактических целей. Модуль может выступать как программа обучения, индивидуализированная по содержанию, методам учения, уровню самостоятельности, темпу учебно-познавательной деятельности ученика.

Модульное обучение дополняет традиционное. Его специфика состоит в том, что ученик достигает поставленных целей, в процессе работы с модулем с определенной помощью учителя, одноклассников, основной акцент делается на самостоятельное овладение материалом.

Выделим особенности модульного обучения.

1) Все содержание материала расправляется по законченным блокам. Для каждого блока формулируются дидактическая цель, в которой содержится указание на объем изучаемого материала, уровень усвоения (ученик может выбрать, какой уровень ему необходим).Каждому ученику учитель предоставляет советы в письменной форме, где найти нужный материал, с чего нужно начать и т.д.

2) Отношения становятся партнерскими. Учитель и учащиеся достигают вместе поставленных целей. Учитель выступает не в роли наставника, а в роли партнера.

3) Обучение строится на приоритете самостоятельной работы, благодаря этому ученик учится самостоятельно планировать и контролировать свою деятельность. Работа учителя сводится к координированию действий ученика.

4) У учителя отводится больше времени на индивидуальные консультации.

При разработке учителем модульной программы следует опираться на принципы модульного обучения:1) *целевого назначения* (модули подразделяются на три типа: познавательные, операционные, смешанные); 2) *сочетания комплексных интегрированных и частных дидактических целей*; 3) *обратной связи*(т.к. управление все равно невозможно без контроля).

Учитель при построении программы модульного обучения должен придерживаться следующей последовательности действий.

1. Выделить основные научные идеи курса.

2. Разделить учебное содержание вокруг этих идей в определенные блоки.

3. Сформулировать комплексную дидактическую цель (КДЦ).

4.Из комплексной дидактической цели выделить интегрируемые дидактические цели (ИДЦ).

5. Интегрируемые дидактические цели разделить на частные дидактические цели (ЧДЦ).

6. На основе ЧДЦ выделить учебные элементы [Юцявичене, 1989].

Получается дерево целей (рис. 1).

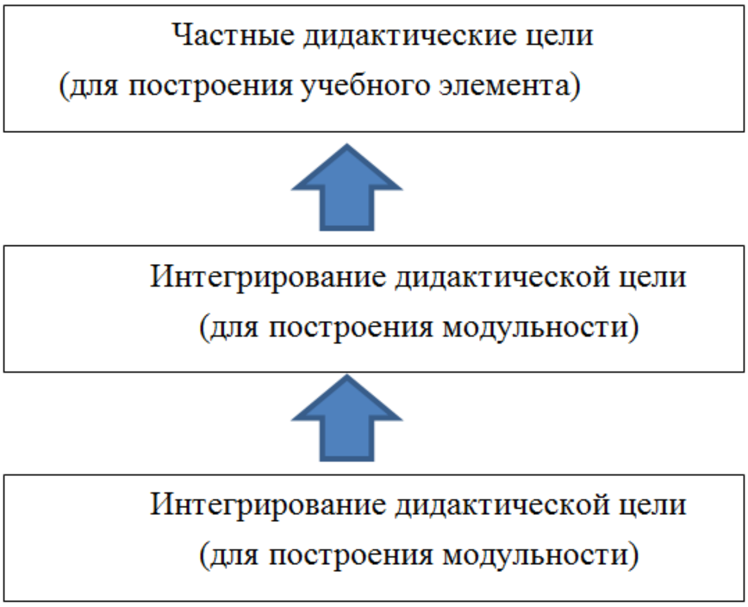

Рис. 1. Дерево целей модульного обучения

При организации модульного обучения рекомендуется придерживаться следующих правил: 1) перед каждым модулем проводить входной контроль; 2) в процессе изучения модуля: текущий и промежуточный контроль(чаще самоконтроль, взаимоконтроль); 3) рубежный контроль после завершения модуля; 4) итоговый контроль по всем модулям.

Необходимо, чтобы учитель побуждал учащихся к рассуждениям, поиску, догадкам и осуществлял поддержку. Модульное обучение при таком напряжённом труде ученика, сложной предварительной работы учителя, является эффективным дополнением традиционным методам обучения.

При модульном обучении каждый ученик включается в активную и эффективную учебно-познавательную деятельность, работает с дифференцированной по содержанию и объёму программой. У учащихся развивается самостоятельность, коллективизм, они сами реализуются и это способствует мотивации учения. Каждый ученик осваивает программу на минимальном уровне, но при желании он может достичь максимального уровня.

Деятельность учителя в учебном процессе меняется. Теперь его деятельность направлена не на объяснение нового материала, а на управление деятельностью учащихся. Сейчас учитель должен наиболее грамотно выделить интегральные дидактические цели потому, что именно от поставленных целей зависит содержание и результат обучения. Продумывание целей деятельности учащихся, определение программы их деятельности, предвидение возможных затруднений, чёткое определение форм и методов учения требует от учителя лучше знать своих учеников. Учитель благодаря этому будет профессионально расти.

В связи с новыми технологиями обучения изменились требования к базисному учебному плану. Теперь необходимо:

1) указать перечень обязательных образовательных областей с их возможным наполнением и минимальным обязательным количеством часов на каждую область каждой ступени образования;

2) установить предельно допустимую учебную нагрузку детей в день, включая всю домашнюю и самостоятельную работу школьников, исходя из трудозатрат разных видов деятельности;

3) сделать соотношение между разными видами деятельности в следующем отношении: 60–80% аудиторные часы; 10–20% внеаудиторные часы и 10% общеполезная деятельность и приобретение социального опыта.

Изложенные выше идеи используются на всех уроках, в том числе и на уроке математики.

Мы выделили следующие проблемы профильного обучения математике.

1. Небольшой выбор учебно-методического обеспечения для разных профилей.
2. Недостаточный уровень практико-ориентированности содержания.
3. Разная математическая подготовка учащихся.
4. Неосознанность выбора профиля некоторыми учащимися.

Таким образом, в российских школах существует профильное обучение в 10–11 классах и предпрофильная подготовка в 8–9 классах. Нормативные документы в области профильного обучения не обновлялись с 2002 г. Недавно приняты ФГОС среднего (полного) общего образования, которые вступят в силу в 2020 г. Безусловно, существование профильного обучения является одной из тенденций мирового и европейского образования, однако, существует ряд организационных, дидактических и методических проблем. В частности, профильное обучение математике, не имеет достаточного уровня практико-ориентированности.

Старшая школа сейчас обучается по стандартам, принятым в 2004 г. и при организации профильного обучения руководствуется Концепцией профильного обучения 2002 г. Эти нормативные документы будут действовать до 2020 года, но многие школы начинают вводить некоторые новшества из новых стандартов (ФГОС СПОО).

В новых стандартах ФГОС СПОО говорится об изучении предметов на базовом и углубленном уровне. Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоением основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету [Федеральный государственный стандарт…, 2013].Также отметим, что в новых стандартах ФГОС СПОО отсутствует термин элективный курс, место которых теперь заняли курсы по выбору.

§ 2. Дидактический анализ темы «Производная» на базовом и профильном уровне

Говоря о необходимости усиления практико-ориентированности математического образования на старшей ступени обучения, мы остановились на теме «Производная», которая изучается крупным блоком в 10 (или 11) классе в зависимости от особенностей учебной программы. Данная тема, как отмечают многие математики и методисты, имеет большой потенциал в преодолении разрыва между формализмом математических знаний и прикладным значением науки.

Рассмотрим особенности содержания темы «Производная» на базовом и профильном уровне. Проанализируем примерную программу по математике, составленную на основе федерального компонента государственного стандарта среднего (полного) общего образования на базовом и профильном уровне. Примерная программа конкретизирует содержание предметных тем образовательного стандарта и дает примерное распределение учебных часов по разделам курса.

Ниже на основе примерной программы составлена сравнительная таблица содержания темы на базовом и профильном уровнях (табл. 2).

Таблица 2

Сравнительная таблица содержания темы «Производная» на базовом и профильном уровнях

	Базовый уровень	Профильный уровень
Количество часов	29	35–42
Основные понятия	*Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.* Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма. *Понятие о непрерывности функции.* Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. *Производные обратной функции и композиции данной функции с линейной.*	Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма. *Теоремы о пределах последовательностей. Переход к пределам в неравенствах.* Понятие о непрерывности функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. *Понятие о пределе функции в точке. Поведение функций на бесконечности. Асимптоты.* Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения и частного. Производные основных элементарных функций. *Производные сложной и обратной функций.* Вторая производная. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Использование производных при решении уравнений и неравенств, при решении текстовых, физических и геометрических задач, нахождении наибольших и наименьших значений.

Окончание табл. 2

Требования к уровню подготовки учащихся	В результате изучения математики на базовом уровне ученик должен • вычислять производные *и первообразные* элементарных функций, используя справочные материалы; • исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов *и простейших рациональных функций* с использованием аппарата математического анализа; использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: • решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения;	В результате изучения математики на профильном уровне в старшей школе ученик должен: Уметь • находить сумму бесконечно убывающей геометрический прогрессии; • вычислять производные и первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления производных и первообразных, используя справочные материалы; • исследовать функции и строить их графики с помощью производной; • решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции; • решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке; • вычислять площадь криволинейной трапеции; Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: • решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа.

На основе данных таблицы 2 мы можем сделать вывод, о том, что на базовом уровне вообще не требуется применение производной при решении прикладных задач.

В школьных учебниках существуют различные подходы к изложению темы «Производная». Рассмотрим варианты изложения этой темы в учебниках для классов с углубленным изучением математики и учебниках для общеобразовательных школ.

Были рассмотрены учебники следующих авторов: Ш.А. Алимов, А.Н. Колмогоров, А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин.

В изложении темы «Производная» в учебниках алгебры и начал анализа для учащихся старших классов базового уровня под редакцией Ш.А. Алимова, А.Н. Колмогорова, А.Г. Мордковича имеются общие моменты: изложение темы дается на наглядно-интуитивном уровне, на котором создается материальный образ математического объекта, дается формальное определение производной.

А также имеются различия: в учебнике А.Н. Колмогорова нет понятия предела, оно интерпретируется понятием «стремится». В комплекте под редакцией А.Г. Мордковича понятие предела дается на наглядно-интуитивном уровне перед изучением понятия производной. В учебнике Ш.А. Алимова при изложении темы «Производная» используется понятие предела, которое формулируется после определения производной, но подробно не рассматривается, формируется оно на интуитивной основе.

В изложении темы «Производная» в учебных комплектах под редакцией А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина для учащихся старших классов с углубленным изучением математики имеются общие моменты. Изложение темы ведется в основном на наглядно-интуитивном уровне, определение производной дается после изучения предела; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных; вторая производная и производные высших порядков; вычисление приближенных значений величин; применение производной для нахождения максимального и минимального, наименьшего и наибольшего значений, определения промежутков монотонности функции; для исследования функций и построения их графиков.

Также имеются различия: в комплекте под редакцией А.Г. Мордковича вторая производная не используется для нахождения промежутков выпуклости функции, не формулируется теорема Лагранжа, зато производная применяется для доказательства тождеств и неравенств с помощью исследования на монотонность. В учебнике С.М. Никольского формулируются теоремы Ролля и Лагранжа для нахождения промежутков выпуклости функции, рассматриваются особенности экстремума функции с единственной критической точкой, а также вывод формулы и ряда Тейлора. В учебнике под редакцией Н.Я. Виленкина формулируется теорема Лагранжа, рассматривается бином Ньютона, а также его приложения для приближенных вычислений, изучается тема о приближенном решении уравнений методом хорд и касательных с использованием теоремы Лагранжа, рассматривается дифференциальное уравнение процессов органического изменения.

Основные принципы изучения темы «Производная» в этих учебниках практически схожи, но различия все равно существуют и по большей степени в приложении производной.

В учебниках Ш.А. Алимова, А.Н. Колмогорова, А.Г. Мордковича для общеобразовательных школ понятие производной дается либо без понятия предела, либо с этим понятием, только без его строгого определения. В общеобразовательных учебниках не изучаются производные обратных тригонометрических функций, а также многие приложения.

В учебниках под редакцией А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина для классов с углубленным изучением математики понятие производной дается через понятие предела с предварительным и подробным его изучением. Подробно рассматриваются различные приложения производной.

В основном весь материал алгебры и начал анализа выстроен по схеме «серпантина», и от стиля изложения материала программы зависит успех вообще всего обучения, он же определяет методику изучения темы.

Обратим внимание на то, что обе системы построения учебных курсов обладают рядом определенных недостатков.

При построении элементов математического анализа, как правило, в действующих учебниках под редакцией Ш.А. Алимова, А.Н. Колмогорова, А.Г. Мордковича сначала учат правилам дифференцирования функций, а потом применению производной к исследованию функций и решению сюжетных задач. В учебниках А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина при изложении математического анализа сначала рассматриваются только целые рациональные функции (многочлены), и на их примере показываются возможности математического анализа, и только после этого изучаются правила дифференцирования других функций, но уже сразу с практическими приложениями, что позволяет достичь перманентности и доступности изучения школьниками основ одномерного анализа.

Итоги анализа показывают, что введение понятия производной предваряется знакомством со средней и мгновенной скоростями движения, с тангенсом угла наклона касательной, что приводит к понятию разностного отношения. Определение производной дается как предел разностного отношения. Понятие предела изучается ранее. При нахождении производных простейших функций пользуются наглядными представлениями. Представлен достаточный по объему дополнительный и углубленный материал, что позволяет учащимся более широко и глубоко овладеть знаниями.

Рассмотрим, какие умения по данной теме проверяются в процессе государственной итоговой аттестации (ЕГЭ) на базовом и профильном уровнях. Для этого проведем анализ спецификации и кодификатора.

Ниже приведена таблица из кодификатора требований (умений), проверяемые заданиями экзаменационной работы.

Таблица 3

Кодификатор требований (умений), проверяемых заданиями экзаменационной работы

Код раз-дела	Код контроли-руемого требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменацион-ной работы
1		Уметь выполнять вычисления и преобразования
	1.1	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма
	1.2	Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
	1.3	Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции
2		Уметь решать уравнения и неравенства
	2.1	Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
	2.2	Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
	2.3	Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы
3		Уметь выполнять действия с функциями
	3.1	Определять значение функции по значению аргумента при
		различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
	3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
	3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции

Окончание табл. 3

4		Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами
	4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
	4.2	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); ис-
	4.3	Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами
5		Уметь строить и исследовать простейшие математические модели
	5.1	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
	5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические за-
	5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения
	5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий
6		Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни
	6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
	6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
	6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально- экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Ниже приведена выдержка из кодификатора элементов содержания, проверяемые на ЕГЭ по теме «Производная» (табл. 4).

Таблица 4

Выдержка из кодификатора элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена

Код раздела	Код Контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
4		Начала математического анализа
4.1		Производная
	4.1.1	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
	4.1.2	Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком
	4.1.3	Уравнение касательной к графику функции
	4.1.4	Производные суммы, разности, произведения, частного
	4.1.5	Производные основных элементарных функций
	4.1.6	Вторая производная и её физический смысл
4.2		Исследование функций
	4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
	4.2.2	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально- экономических, задачах

Рассмотрим распределение заданий экзаменационной работы на базовом и профильном уровнях, согласно спецификации (табл. 5).

Таблица 5

Распределение заданий экзаменационной работы

Уровень	Количество заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за выполнение заданий данного раздела содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 20 – базовый уровень; 32 – профильный уровень
Базовый	1	1	5
Профильный	2	2	6,3

Как видно из таблицы 4, в ЕГЭ профильного уровня всего 2 задания по теме «Производная».

Рассмотрим выдержки из спецификации ЕГЭ профильного и базового уровней (табл. 6–7).

Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.

Таблица 6

Фрагмент обобщенного плана варианта КИМ ЕГЭ 2016 года по математике профильного уровня

Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований (умений) (по КТ)	Коды проверяемых элементов содержания (по КЭС)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне, в минутах
Уметь выполнять действия с функциями	3.1-3.3	4.1-4.3	Б	1	5
Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	П	1	10

Таблица 7

Фрагмент обобщенного плана варианта КИМ ЕГЭ 2016 года по математике базового уровня

Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания обучающимся, изучавшим математику на базовом уровнем(в минутах)
Уметь выполнять действия с функциями	3.3, 6.2, 6.3	4.1.1	Б	1	8

Видим, что на базовом уровне по теме «Производная» проверяется только понятие о производной функции, геометрический смысл производной. А в ЕГЭ профильного уровня проверяются все элементы содержания темы «Производная».

Приведем несколько прототипов заданий из ЕГЭ профильного уровня на использование производной.

1. На рисунке 2 изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, ..., x_9$. Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ укажите количество этих точек.

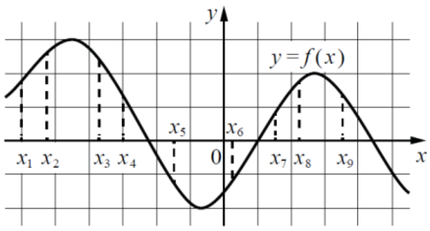

Рис. 2. Пример задания из ЕГЭ, профильный уровень

2. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.
3. На рисунке 3 изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.

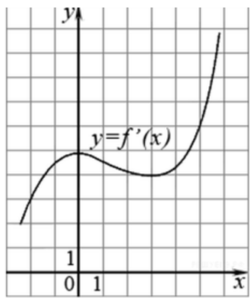

Рис. 3 Пример задания из ЕГЭ, профильный уровень

Одно из требований уровню подготовки выпускников согласно таблице 3: решать прикладные задачи, в том числе социально- экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Заметим, что в рассматриваемых комплектах содержится лишь небольшое количество практико-ориентированных или прикладных задач на использование производной. В основном, круг этих задач связан с нахождение оптимального (наибольшего или наименьшего) значения некоторой геометрической или физической величины. В то время, существует большое количество задач на использование производной прикладного характера из области экономики, биологии, химии и т.д., которые существенно бы могли обогатить содержание темы «Производная» как на базовом, так и на профильном уровнях.

В связи с этим вспоминается доклад одного и крупнейших математиков современности В.И. Арнольда «Жесткие и мягкие математические модели » (сентябрь 1997 г.). По мнению ученого, основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций, а для этого они должны владеть математически языком, описывающим эти модели [Арнольд, 2004].

Прикладные задачи могут быть использованы с разной дидактической целью, они могут заинтересовать или мотивировать, развивать умственную деятельность, объяснять соотношение между математикой и другими дисциплинами.

Решение прикладной задачи тогда эффективно, когда учащиеся встречались с описываемой ситуацией в реальной действительности: в быту, на экскурсии, при изучении других предметов. Эффективным средством является широкое использование наглядности: фотографий, слайдов, плакатов, рисунков и т.д.

Прикладная задача повышает интерес учащихся к самому предмету, поскольку для подавляющего большинства ценность математического образования состоит в ее практических возможностях.

Важным средством достижения прикладной и практической направленности обучения математике служит планомерное развитие у школьников наиболее ценных для повседневной деятельности навыков выполнения вычислений и измерений, построения и чтения графиков, составления и применения таблиц, пользование справочной литературой.

В заключении хочется отметить, что существует противоречие в требованиях к уровню подготовки выпускников, проверяемых на ЕГЭ содержанием учебных пособий. На едином государственном экзамене проверяется умение решать прикладные задачи, в том числе социально- экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения, а в рассматриваемых комплектах содержится лишь небольшое количество практико-ориентированных или прикладных задач. Рассмотрим прикладную направленность темы «Производная», с целью решения данной проблемы.

§ 3. Прикладная направленность темы «Производная»

Школьный предмет «Математика», к сожалению, не пользуется популярностью у многих учащихся. В значительной степени повышению интереса к математике способствует рассмотрение на уроках, так называемых прикладных задач, поскольку для подавляющего большинства учащихся ценность математического образования состоит в ее практических возможностях. «Было бы хорошо по возможности, – отмечает академик С.Л. Соболев, – раскрывать математические правила и законы на специально подобранных задачах из жизни» [Соболев, 1984, с.16].

«Задачи прикладного характера, – считает известный математик и педагог В.Г. Болтянский, – имеют в общеобразовательной школе важное значение прежде всего для воспитания интереса к математике. На примере хорошо составленных задач прикладного содержания учащиеся будут убеждаться в значении математики для различных сфер человеческой деятельности, в ее пользе и необходимости для практической работы, увидят широту возможных приложений математики, поймут ее роль в современной культуре» [Болтянский, 1982, с. 40].

О естественной тяге учащихся к прикладным задачам впечатляюще рассказывает писатель Т. Семушкин в повести «Чукотка».

«Услышав условие задачи, школьники непременно спрашивали:

– Когда и где это было?

И когда выяснялось, что этого факта в действительности не было, они говорили:

Эта задача, которую ты нам даешь, лживая задача, и решать мы ее не будем»[Семушкин, 1941].

Таким образом, учащиеся и, надеюсь, учителя хотят обкатывать математику на «живом жирафе», а не только на нарисованном в виде стерильных задач из школьных учебников.

В таком авторитетном документе, как «Рекомендация международной конференции ООН по народному образованию, относящаяся к преподаванию математики в средних школах», говорится о необходимости «пробуждать и поддерживать интерес учащихся, как к самой математике, так и к ее приложениям» [XIX Международная конференция…, 1956].

Позволим себе еще одну очень выразительную цитату Г. Фройденталя: «Обычная точка зрения учителя математики: «Я преподаю математику, которую я знаю; применения не моего ума дело; все, что мне о них известно, непонятно с точки зрения математики, нечетко, да и не может быть выражено четко, не укладывается в логическую схему математики». Нет этого и в учебнике, по которому работает учитель математики. Впрочем, среди всех «аргументов», вследствие которых математика преподается изолированно, можно понять лишь один — некомпетентность. Учитель математики не знает, как применяется математика. На него нельзя обижаться: он этого не изучал» [Фройденталь, 1982].

Само понятие прикладной задачи (производственной задачи, задачи с практическим содержанием) не имеет однозначного определения. Существует обширная методическая литература по этому вопросу, различные авторы высказывают различные требования к прикладным задачам. Особенно глубоким нам кажется замечание американского педагога-математика Х.О. Поллака о том, что «условия прикладных задач требуют честной и подлинной связи с реальностью, но фактически эти связи часто оказываются ложными»[Поллак, 1971].

Существует масса задачников, обещающих прикладные задачи. Отдельные неплохие задачи и интересные методические соображения можно найти у Е.С. Дубинчука, М.М. Лимана, И.А. Рейнгарда, Б.А. Шкарина и др. Но большинство авторов предлагают откровенно псевдопроизводственные (или тривиальные в математическом отношении) методические фантазии. Интересные критические замечания по данному вопросу высказывает JI.М. Рутман: «К каждому слову задачи, к каждому числу, приведенному в ней, составители обязаны относиться очень серьезно. В задаче все должно соответствовать реальности»[Рутман, 1988].Рутман также вполне правомерно критикует конкретные задачи из различных учебных пособий, в частности, такую задачу Н.А. Терешина: «Сколько из листа оцинкованного железа прямоугольной формы размером 150 х 100 см^2 можно сделать бидонов с крышками, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда длиной 20 см, шириной 10 см и высотой 30 см, если расход на швы составляет 4% всей площади листа?». Вводя естественное для практики предположение, что развертка бидона (без крышки) должна быть цельным куском, JI.М. Рутман показывает, что ответ Н.А. Терешина к данной задаче (6 бидонов) неправильный. На это замечание автор (в письме в редакцию) возражает, что можно выкраивать отдельно развертку боковой поверхности бидона (прямоугольник 60 х 30), дно и крышку (прямоугольник 20 х 10). И при такой трактовке условия задачи получается 6 бидонов. С точки зрения чистой геометрии эти доводы вполне состоятельны. Но суть спора, на наш взгляд, совсем не в этом. Л.М. Рутман прав не столько в своих геометрических исследованиях задачи, сколько в своем утверждении, «что решить задачу не представляется возможным». Чтобы задача стала математически корректной, из ее условия необходимо выбросить весь искусственный налет практичности, оставив ее чисто геометрическую суть. В таком случае она может выглядеть, например, так: «Для скольких параллелепипедов с размерами 20 х 10 х 30 (см) можно вырезать грани из прямоугольного листа размерами 100 х 150 (см)?» [Терешин, 1974].

Совершенно неправ Н.А. Терешин, утверждая в своем ответе на критику, что прикладные задачи мы должны решать, «совершенно не заботясь о том, какая техника и технология будут использованы в производстве». Совсем наоборот! Если рассматриваемая задача на самом деле встречается на практике (что весьма сомнительно), а не придумана автором, то прямое назначение такого бидона может определять и особенности технологии изготовления, что скажется и при решении (и сделает задачу корректной!). Автору задачи следовало бы указать источник ее сюжета, пояснить, почему на швы уходит именно 4% материала, сказать, для чего и где изготовляются столь экзотические бидоны. Тем более что в известном словаре С.И. Ожегова утверждается, что бидон непременно имеет цилиндрическую форму.

Итак, спор явно не о геометрических нюансах. Он о том, что же такое практическая задача. И вероятно, необходимо еще и еще раз высказать важную мысль о том, что настоящие практические задачи должны черпаться из реальной действительности.

В споре между Л.М. Рутманом и Н.А. Терешиным фигурирует и еще одна задача. В ней требуется найти глубину колодца с известным основанием по массе вынутой земли (в тоннах) и ее плотности (в г/см^3). Спор идет о единицах измерения. Критика Л.М. Рутмана несколько туманна. Главное возражение здесь, на наш взгляд, в том, что нельзя в одной и той же практической (в учебной можно) задаче оперировать тоннами и граммами. Не имеет здравого смысла ни в какой реальной ситуации что-то определять с точностью до грамма, если главные параметры найдены с точностью до тонны. К тому же может ли извлеченный из колодца грунт быть настолько однородным, чтобы его плотность можно было найти с такой точностью?

Но дело не только в этом. В реальной действительности никто не станет столь надуманным, столь неестественным способом определять глубину колодца. Скорее поступят наоборот – измерят глубину, а с ее помощью найдут объем вынутого грунта.

Рассмотренные задачи – выразительные примеры псевдопрактических задач.

Будем считать прикладными такие задачи, которые возникают в реальной практике людей различных профессий и решаются путем их математизации, т.е. путем перехода к надлежаще подобранным математическим моделям. Все «хорошо составленные», «честно и подлинно связанные с реальностью» прикладные задачи должны, на наш взгляд, удовлетворять следующим требованиям:

− производственная реальность сюжета.

− математическая существенность сюжета.

− естественность вопроса задачи.

− математическая содержательность.

− терминологический лаконизм.

Прикладные задачи, на наш взгляд, относятся к классу контекстных заданий на математическую компетентность, но значительно уже этого класса в силу жесткого первого требования.

Пренебрежение первыми тремя требованиями породило в существующей методической литературе обилие задач, в которых связь с производством чисто внешняя, вопросы носят искусственный и надуманный характер, далекий от вопросов, возникающих в реальной жизни. Такие «псевдопроизводственные» задачи не просто бесполезно крадут учебное время, но и формируют у учащихся скептическое отношение к математическим методам.

Трудность практического осуществления четвертого требования выражается на практике в том, что многие из так называемых практических задач опираются лишь на самые элементарные арифметические знания. Почти исключительно такими задачами изобилует, например, не тонкая книга М.Р. Беньяминова.

Пренебрежение пятым требованием приводит к тому, что на уроке математики не остается самой математики, задача не вызывает интереса у учащихся, не доходит до их сознания. Такого рода задачи в методической литературе пренебрежительно и справедливо называют «шпиндельной математикой».

Проанализируем, к примеру, задачи, предлагавшиеся в одной из сельских школ на математическом вечере «Математика и сельское хозяйство» (конспект вечера опубликован в журнале «Математика в школе»). Вполне качественной можно признать следующую задачу: «Подсолнечник сеют квадратно-гнездовым способом так, что на каждое гнездо приходится площадь 70 х 70 $см^2$, а в гнезде помещается 5 зерен. Сколько килограммов зерна надо высеять на 5 га, если в кг примерно 8500 зерен?» Она удовлетворяет всем нашим требованиям, кроме четвертого, что вряд ли делает ее приемлемой для математического вечера.

Рассмотрим другую задачу: «Определите длину пути, на котором уменьшится на 27% количество зерна в ящике сеялки Т-9 с шириной захвата 4,2 м, если в ящик вмещается 280 кг зерна, а норма высева 180 кг на 1 га». Эта задача удовлетворяет всем сформулированным выше условиям, кроме второго, поскольку трудно представить себе практическую ценность ответа на вопрос задачи (почему именно 27% ?). Эту задачу можно связать с выбором места заправки сеялки, если вместо загадочных 27% рассмотреть допустимую степень опорожнения ящика, т. е. 85%.

Яркой псевдопроизводственной среди рассматриваемых задач является такая: «На посев свеклы отвели поле в виде прямоугольника. Через некоторое время длину прямоугольника увеличили на 40%, а ширину уменьшили на 10%. На сколько процентов изменилась посевная площадь свеклы?». Свекла в этой задаче выступает формальным фоном, не выполняется первое условие.

Мы не утверждаем, что подобные задачи вообще нельзя использовать в учебной работе. Их решать можно, но не следует при этом думать, что мы рассматриваем прикладные задачи, и надеяться на свойственный лишь настоящим прикладным задачам воспитательный эффект.

Прикладные задачи встречаются и в школьных учебниках. Например, в учебнике «Геометрия. 10–11» Л. С. Атанасяна и др. (издание 2000 г.) есть вполне удачные задачи (711, 722 и 763) и явно псевдопрактические (задачи 713 про стаканчик мороженого и 715 про клумбу надуманной формы). Значительно больше хороших прикладных задач в учебнике тех же авторов «Геометрия. 7–9».

Есть и такие задачи, которые взяты из реальной производственной практики, но подаются в сомнительной редакции. К ним относятся три задачи из § 23 учебника геометрии А. В. Погорелова (издание 2001 г.) – про кучу щебня (№ 7), про стог сена (№ 11) и объем соснового бревна (№ 16). Это интересные задачи, и мы ниже проанализируем их. Отметим лишь, что объем стога сена в учебнике требуется найти по размерам, которые на практике получить невозможно и никто никогда не получает, причем последнее обстоятельство хорошо известно сельским школьникам. К тому же предложенная модель стога для практики слишком груба и никогда не используется.

Хорошие практические задачи составить трудно. «Очень важно понять, – пишет в уже цитированной выше работе Х.О. Поллак, – что составление «правильных» задач – это творческая деятельность, во многом похожая на открытие в математике». Это хорошее поле деятельности для творчески мыслящего учителя [Поллак, 1971].

Поиски содержательных применений математики в специальной технической литературе вызывают большие трудности. Объясняется это тем, что математические фрагменты в такой литературе по своему стилю существенно отличаются от учебных или научных книг по математике.

Методикой решения прикладных задач, отработанной в курсах математики, в технической литературе порой пренебрегают. При этом допускается нечеткость в использовании математического аппарата, что порой приводит к ошибкам.

В специальной литературе получил распространение своеобразный математический жаргон, который затрудняет восприятие. Например, нередко встречаются бессмысленные с точки зрения математики выражения: равенство нулю уравнения, минимизируем функцию, площадь фигуры ограничена линиями, объем между поверхностями, решим выражение, решим интеграл и т.д. Все это говорит о недостаточной математической компетентности многих авторов технических книг.

Считается, что математику применять не только полезно, но и модно. Поэтому нередко встречается излишнее и неоправданное увлечение ею. Например, в одной книге с помощью довольно красивых математических выкладок (неизвестно для чего!) находится минимальный радиус катка, обеспечивающий защемление круглого(?!) комка земли. Полученное соотношение сразу же забыто, а содержательная информация о размерах катков дана без всяких комментариев. При чтении подобных фрагментов вспоминается популярная книга Я. Хургина «Ну и что?» (М., 1967), в которой говорится, что применяя математику, следует своевременно ставить вопросы: «Ну и что? На какой вопрос вы хотите ответить? Какую задачу вы хотите решить?».

Распространено и противоположное явление, когда упускают совершенно естественные и необходимые в логическом отношении случаи математизации специальных ситуаций, что приводит к нечеткости и незавершенности изложения. Например, во многих книгах по эксплуатации машинно-тракторного парка и проектированию автомобильных дорог встречается понятие «средняя дальность ездки». Определения этого понятия нам не удалось найти ни в одной книге даже посредством обращения к авторам, оперировавшим этим понятием. Оно употребляется либо без всяких определений, либо с невразумительным пояснением, а потому соответствующие формулы приводятся без выводов. Вместе с тем корректное определение легко сформулировать, если привлечь аппарат интегрального исчисления.

Не редки ситуации, когда задача настоящая, прикладная, но она неверно решается. Такие казусы встречаются не только в учебной, но и в научной практике. Например, известный писатель Сергей Залыгин, обсуждая один из «проектов поворота рек», пишет, что математики «обнаружили в этой методике грубейшие ошибки и прямую подгонку».

Обучение школьников поиску ответов к задачам, возникающим на практике, требует особой методики, которая пока еще используется в школе редко и непоследовательно. Видимо, по этой причине реальные задачи прикладного характера вызывают растерянность даже у тех школьников, которые хорошо усвоили материал школьных учебников. «Как недостаточно знать устройство велосипеда, чтобы уметь на нем кататься, а надо еще особо учиться ездить, – писал еще Я.И. Перельман, – так одно знание геометрических отношений не дает умения ими пользоваться в реальной обстановке, если не было упражнения в их применении»[Перельман, 2008].

Тема «Производная» занимает центральное место в курсе алгебры и начал анализа. Изучение данной темы весьма актуально, так как оно имеет большое образовательное значение, ведь с нее начинается изучение элементов математического анализа, а это дает новые методы решения математических, физических и геометрических задач.

Рассмотрим, когда и в связи с чем возникла тема «Производная». Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности. Они встречались у Евклида. Ряд таких задач был решен Архимедом, разработавшим способ проведения касательной, примененный им к спирали, но применимый для других кривых. Основное понятие дифференциального исчисления – понятие производной – возникло в XVII в. В связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики. Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем на основе двух задач: 1) о построении касательной к произвольной линии; 2) о нахождении скорости при произвольном законе движения. Еще раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тартальи (около 1500–1557 гг.) – здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда. В XVII веке на основе учения Г. Галилея о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у Декарта, французского математика Роберваля, английского ученого Л. Грегори. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.

Изучение производных позволяет установить межпредметные связи математики со многими предметами, изучаемыми в школе. Почти во всех существующих учебниках математики преобладает техническая составляющая изложения материала, теория уходит на второй план, выпадают приложения к физике, химии, экономике, биологии, географии. В период перехода России к рыночным отношениям существенно изменяется спектр приложений математики. Новый период требует качественного повышения экономической и технической грамотности населения, поэтому актуальным в наши дни независимо от того, какую будущую профессию выберут старшеклассники, является использование экономических и технических знаний в процессе преподавания математики на примере темы «Применение производной при решении задач».

Производная находит широкое применение в физике для нахождения скорости по известной функции координаты от времени, ускорения по известной функции скорости от времени; для нахождения наибольших и наименьших величин.

Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т.д.).

В самых различных производственных ситуациях возникает необходимость найти оптимальное решение. Незаменимым «инструментом» исключительной силы и точности в таких ситуациях является производная. Как отмечает группа математиков, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки, «тристолетия постоянного употребления производной еще не совсем притупили это ни с чем несравнимое орудие». Производная вступает в дело на заключительном этапе решения, когда практическая задача сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции на некотором числовом промежутке.

Дифференциальное исчисление – широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? В какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления. В экономике очень часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т. д. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких аргументов. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.

Интерполяцией называется приближенное вычисление значений функции по нескольким данным ее значениям. Интерполяция широко используется в картографии, геологии, экономике и других науках. Применение дифференциала позволяет осуществить приближенные вычисления, а также проводить оценку погрешностей.

Выводы по главе 1

В данной главе была кратко охарактеризована история профильного обучения в России. Были выделены особенности и проблемы профильного обучения на современном этапе. Проанализировав литературу, мы пришли к выводу, что в школьных учебниках существуют различные подходы к изложению темы «Производная». Представлен достаточный по объему дополнительный и углубленный материал, что позволяет учащимся более широко и глубоко овладеть знаниями по данной теме.

Рассмотрев особенности профильного обучения математике, требования к качеству математической подготовки, обозначенные в федеральных образовательных стандартах, элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ, мы пришли к выводу, что использование прикладных задач в процессе обучения математике позволит реализовать ряд важных дидактических моментов. Прежде всего, усилить учебную мотивацию учащихся за счет демонстрации в процессе выполнения практико-ориентированных и интегрированных задач универсальности математических моделей и математического языка, связи математики с реальной жизнью и другими отраслями знания. Также разнообразить учебную деятельность учащихся, формировать у них универсальные учебные действия на конкретном предметном материале. И, наконец, развивать у учащихся внутреннюю мотивацию и положительное отношение к предмету.

ГЛАВА 2. Методика работы с прикладными задачами по теме «Производная»

§ 1. Комплекс прикладных задач по теме «Производная»

В связи с внедрением в методику математики идеи математических компетенций повышается интерес к задачам с практическим содержанием, которые появились даже на ЕГЭ и стали называться контекстными задачами. Это, в свою очередь, актуализирует поиск негромоздких и содержательных в математическом отношении прикладных задач, под которыми мы понимаем контекстные задачи из реальной практики.

В данном разделе приводятся 35задачина применение производной. В задачах используется профессиональная лексика, даны необходимые определения и справочный материал.

Производная в посылке

Приведем 4 задачи, составленные на основе правил почтовой связи, которые, оказывается, строго регламентируют форму и размер посылок. Две из этих задач почти традиционны для школьной практики, две другие приводят к исследованию функции от двух переменных, что, однако, можно свести к последовательному исследованию функций от одного переменного. При изложении мы будем опираться на высказанные в статье соображения о методике постановки, прикладных математических задач. Ответы приводятся с округлением до целых.

1. *Каким может быть наибольший объем бандероли в форме рулона?*

Решение. В правилах почтовой связи указано, что у бандероли в форме рулона «сумма ее длины и двойного диаметра» не должна быть больше 104 см, а любое измерение должно находиться в пределах от 10 до 90 см. Так как рулон достаточно близок к форме цилиндра, то мы приходим к отысканию цилиндра наибольшего объема среди цилиндров, диаметр основания (d) и высота (h) которых принадлежат отрезку [10; 90], а $h + 2d \le 104/$

Пусть x– радиус основания цилиндра. Ясно, что в случае наибольшего объема бандероль будет иметь наибольшие возможные габариты, т.е. будет выполняться соотношение h + 4x = 104. В таком случае объем цилиндра

$$V = \pi h x^2 = 4\pi\left(26x^3 - x^3\right),\quad 5 \le x \le 45.$$

Найдем производную: $V' = 4\pi x(52 - 3x)$. На отрезке [5; 45] она обращается в нуль в точке $x_0 = \frac{52}{3}$ – и при переходе через нее меняет знак с плюса на минус. Это означает, что при таком значении x функция V достигает наибольшего значения на рассматриваемом отрезке, причем $V_{\max} = 4\pi \dfrac{2704 \cdot 26}{9 \cdot 3} \approx 32721 \quad (см^3)$.

2. *Каким может быть наибольший объем бандероли в форме коробки?*

<u>Решение</u>. В правилах почтовой связи находим, что сумма длины, ширины и толщины такой бандероли не должна выходить за 90 см, каждое измерение не должно превосходить 60 см, а длина и ширина не могут быть меньше 148 и 105 миллиметров соответственно.

Задача сводится к отысканию параллелепипеда наибольшего объема среди параллелепипедов (назовем их подходящими), измерения *x, y, z* которых (в миллиметрах) удовлетворяют условиям:

$$x + y + z = 900, \quad 148 \le x \le 600,$$
$$105 \le y \le 600, \quad z \le 600$$

Рассмотрим вначале подходящие параллелепипеды с фиксированной высотой h. В этом случае $z = h$ (константа),

$$y = 900h - x, \quad V = h(900 - h - x)x,$$
$$148 \le x \le 600.$$

С помощью производной легко находим, что наибольший объем будет при $x = \frac{1}{2}(900 - h)$. Так как в таком случае $y = x$, то получается параллелепипед с квадратным основанием.

Рассмотрим теперь подходящие параллелепипеды с квадратным основанием ($y = x$). В этом случае

$$z = 900 - 2x, \quad V = x^2(900 - 2x),$$
$$148 \le x \le 600$$

С помощью производной находим, что наибольший объем будет при x=300.

Итак, наибольшей по объему будет кубическая бандероль с ребром 30 см. Ее объем 27 000 см^3.

3. *Какой наибольший объем может иметь международная посылка в форме рулона?*

Справка. В правилах почтовой связи сказано, что любое измерение международной посылки не должно быть больше 105 и меньше 11 см, а «сумма длины и периметра наибольшего поперечного сечения не более 200 см», предельная масса 20 кг.

<u>Решение</u>. Задача сводится к отысканию цилиндра наибольшего объема среди цилиндров, радиус основания (x) и высота (h) которых (в сантиметрах) удовлетворяют условиям: $11 \le 2x \le 105, 11 \le h \le 105, \ 2\pi x + h \le 200$ Задача приводит к исследова-

нию функции $V=\pi x^2(200-2\pi x)$ на промежутке $\left[\frac{11}{2};\frac{105}{2}\right]$. С помощью производной находим, что наибольшее значение достигается при $x=\frac{200}{3\pi}$ и оно равно примерно 94 314 *см*^{3} .

4. *Можно ли послать международной посылкой в форме коробки 5 кг пенопласта?*

Решение. Сначала найдем максимально возможный объем такой посылки. Пусть z — ее длина, x и y — другие измерения (в сантиметрах), V — объем. Тогда периметр ее поперечного сечения $2x + 2y$,$V= xyz$, где согласно приведенной выше справке $2x+2y+z\le 200$, $11\le x\le 105$. Рассуждая так же, как и при решении задачи 2, получим, что наибольший объем достигается при $x=y=\frac{100}{3}$, $z=\frac{200}{3}$ и приблизительно равен 74 074 *см*^{3}=0,074 *м*^{3}.

С помощью справочников или интернета находим, что плотность самого тяжелого пенопласта 45 *кг/м*^{3} Значит (поскольку 0,074 *м*^{3} 45 *кг/м*^{3} = 3,3 *кг*), в международную посылку в форме коробки нельзя загрузить и 4 *кг* пенопласта.

Похимичим

Рассмотрим несколько задач из книги по химической технике.

5. *Требуется найти концентрацию кислорода в газовой смеси, содержащей азот, при которой реакция окисления азота будет идти с максимальной скоростью.*

Решение. Как известно из курса химии, скорость реакции выражается формулой

$$v=kx(100-x)^2,\quad 0<x<100,$$

где x — концентрация кислорода (в процентах от объема), k — некоторая константа. Найдем производную:

$$v'=k(100-x)(100-3x).$$

Видим, что имеется единственная критическая точка $x_0=\frac{100}{3}$ на интервале (0; 100). При переходе через x_0 производная меняет знак с плюса на минус. Согласно правилу 2, функция v достигает в точке x_0 наибольшего на рассматриваемом интервале значения. Искомая концентрация 33,3%.

6. *Какой сектор нужно вырезать из круга (см. рис. 5), чтобы из оставшейся части получился конический фильтр наибольшей вместимости?*

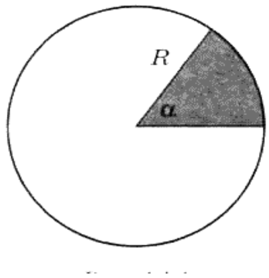

Рис. 4. Сектор круга

Решение. Пусть α — угол, определяющий сектор, $x = 2\pi - \alpha$, r— радиус основания, h — его высота, V— объем. Тогда

$$2\pi r = Rx, \quad r = \frac{Rx}{2\pi}, \quad h = \sqrt{R^2 - r^2},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$
$$(0 < x < 2\pi).$$

Исследуем функцию

$$f(x) = \left(\frac{24\pi^2}{R^2}\right)^2 V^2(x) = x^4(4\pi^2 - x^2).$$

Найдем производную:

$$f'(x) = 2x^3(8\pi^2 - 3x^2) = \frac{2}{3}x^3\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}} + x\right)\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}} - x\right).$$

Видим, что у нас одна критическая точка

$$x_0 = \pi\sqrt{\frac{8}{3}},$$

При переходе через которую, производная меняет знак с плюса на минус. По правилу 2 функция f достигает здесь наибольшего значения. То же будет и с функцией V.

Ответ: $\alpha = 66^0$.

Среди долин

7. *Водопойные желоба для коров в полевых условиях иногда делают из трех одинаковых досок (рис. 5). Под каким углом а следует сбивать доски, чтобы получить желоб наибольшей вместимости?*

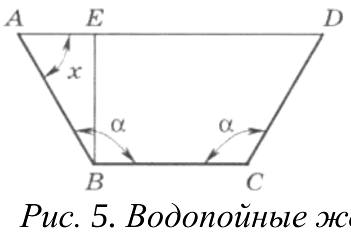

Рис. 5. Водопойные желоба

Решение. Наибольшую вместимость будет иметь желоб с наибольшим поперечным сечением. Поперечное сечение — равнобедренная трапеция. Если ширина досок а (AB = BC = CD = a),то площадь трапеции

$$S(x) = a^2(1+\cos x)\sin x \quad \left(0 < x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Найдем производную функции S:

$$S'(x) = a^2(1+\cos x)(2\cos x - 1).$$

Замечаем, что на рассматриваемом промежутке производная существует и обращается в нуль только при $x = \frac{\pi}{3}$, причем слева от этой точки производная положительна, а справа отрицательна. Значит, согласно правилу 2, функция V достигает при $x = \frac{\pi}{3}$ наибольшего значения на рассматриваемом промежутке. Зная оптимальное значение x, найдем искомое значение α .

Ответ: 120°.

8. Снижения затрат энергии на пахоту прицепным плугом можно в определенной степени достичь правильным выбором направления силы тяги плуга в продольно-вертикальной плоскости. Такое снижение будет наибольшим в том случае, когда направление силы тяги совпадает с направлением (будем называть его оптимальным) наименьшей по модулю силы (приложенной к плугу), достаточной для того, чтобы сдвинуть стоящий на земле плуг, преодолевая силу трения. Найти оптимальное направление силы тяги прицепного плуга, считая, что коэффициент трения стали о почву $\mu = 0{,}5$.

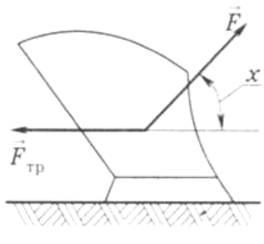

Рис. 6. Прицепной плуг

Решение. Пусть к плугу (рис. 7) приложена сила тяги $\vec{F}$, образующая с горизонтальной плоскостью угол x. Из курса физики известно, что

$$\left|\vec{F}_{тр}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|,$$

где $\vec{F}_{тр.}$ — сила трения, а $\vec{N}$ — сила давления плуга на почву, причем $\left|\vec{N}\right| = \left|m\vec{g}\right| - \left|\vec{F}\right| \cdot \sin x.$

Сила $\vec{F}$ сдвинет плуг, если модуль ее горизонтальной составляющей будет больше $\left|\vec{F}_{mp}\right|$, т. е. если будет выполняться соотношение

$$\left|\vec{F}\right|\cos x-\delta=\mu\left(\left|m\vec{g}\right|-\left|\vec{F}\right|\sin x\right),$$

где $\delta>0$. Отсюда находим, что

$$\left|\vec{F}\right|=\frac{\mu\left|m\vec{g}\right|+\delta}{\cos x+\mu\sin x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Модуль силы $\vec{F}$ будет наименьшим при таком *x* из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ при котором знаменатель $f(x)=\cos x+\mu\sin x$ примет наибольшее значение. Найдем производную функции *f*:

$$f'(x)=(\mu-tgx)\cos x.$$

Замечаем, что производная обращается в нуль только в одной точке $x_0=arctg\mu$ из рассматриваемого промежутка, причем производная слева от точки x_0 положительна, а справа отрицательна. Значит, функция *f* достигает наибольшего, а $\left|\vec{F}\right|$ наименьшего значения при

$$x_0=arctgx\mu=arctg\frac{1}{2}\approx 26^0 30'.$$

Заметим, что конструкция прицепа тракторного плуга не позволяет обеспечить оптимальное направление силы тяги (под углом 26°30'), но все же на практике рекомендуется по возможности приближаться к этому направлению.

<u>В лесу родилась елочка</u>

Очищенный от сучьев ствол спиленного дерева (хлыст) лесозаготовители делят по длине на части (кряжи или бревна). Эта операция называется раскряжевкой хлыстов. В дальнейшем из качественных бревен на лесопильных рамах с помощью продольного пиления (распиловки) получают брусы и доски. От того, насколько рационально проводится раскрой (раскряжевка и распиловка), зависит экономичность использования древесины. Оптимальный раскрой древесины — довольно сложная задача, зависящая не только от качества сырья, но также и от требований заказчиков пиломатериалов и от установленных стандартов.

9. *При определении длины бревен, на которые следует распилить хлыст, существенную роль играет величина так называемого сбега (утоньшения от комля к вершине), определяемая отношением вершинного диаметра бревна к комлевому. При этом исходят из положения о том, что бревна должны иметь наибольший «цилиндрический объем», т. е. объем цилиндра, вписанного в бревно (основанием цилиндра*

служит вершинный торец бревна), должен быть как можно большим. Естественность этого требования понятна — ведь выпиливаемые из бревна доски должны иметь прямоугольную форму. Доказать, что из всех бревен, которые можно отпилить от хлыста, наибольший «цилиндрический объем» будет иметь бревно с величиной сбега $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

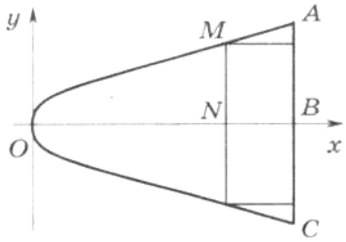

Рис 7. Осевое сечение хлыста

Решение. Рассмотрим рисунок 7, на котором изображены осевое сечение хлыста и система координат. В различных расчетах полагают, что продольное сечение хлыста ограничено параболой. Значит, линия AO — часть параболы $x = py^2$, где p — некоторый коэффициент. Отпилим от хлыста бревно распилом по прямой *MN*. Обозначив величину сбега отпиленного бревна через *t*, а комлевой радиус бревна через R, получим

$$MN = tR, \quad OB = pR^2, \quad ON = pt^2R^2$$

а значит, «цилиндрический объем» отпиленного бревна

$$V = \pi \cdot MN^2 \cdot NB = \pi p R^4 \left(t^2 - t^4\right),$$
$$0 < t < 1$$

С помощью производной легко находим, что функция *V* на промежутке (0; 1) достигает наибольшего значения при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. *Край боковой доски, полученной в результате распиловки бревна по линиям AB и CD (рис. 8, где штриховой линией изображен верхний торец бревна), по своей форме близок к параболе. На сколько следует укорачивать такую доску, чтобы выпиливаемая из оставшейся части прямоугольная доска (см. рис. 6) имела наибольшую площадь?*

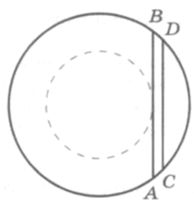

Рис. 8. Распиливание бревна на доски

Решение. Уравнение линии ОА: $y = p\sqrt{x}$. Пусть длина доски l. Отпилим от доски часть длиной $ON = x$. Тогда из оставшейся части выпиливается прямоугольная доска длиной (1 — x) и шириной $2MN = 2p\sqrt{x}$. Ее площадь

$$S(x) = 2p(l - x)\sqrt{x}, \quad (0 < x < 1).$$

Дальнейшее решение ясно.

Ответ: доску следует укорачивать на $\frac{1}{3}$ ее длины.

11. *На лесопильных рамах (они предназначены для продольного пиления) бревна часто распиливают на квадратный брус и четыре доски (рис. 9) с максимально возможной площадью поперечного сечения. Какой толщины доски получатся при такой распиловке из бревна диаметром d?*

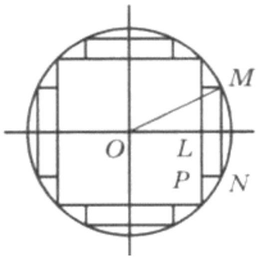

Рис. 9. Распиливание бревна на брус и доски

Решение. Пусть $PN = x$.

$$OL = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \quad MN = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}} + x\right)^2},$$

а значит, площадь поперечного сечения доски

$$S = 2x\sqrt{\frac{r^2}{2} - r\sqrt{2}\cdot x - x^2} - r\sqrt{2}\cdot x - x^2;$$

$$0 < x < a, \quad a = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$$

Исследуем на отрезке [0, a] функцию

$$f(x) = \left(\frac{S}{2}\right)^2 = \frac{r^2x^2}{2} - r\sqrt{2}x^3 - x^4.$$

Найдем производную:

$$f'(x) = -x\left(4x^2 + 3r\sqrt{2}x - r^2\right) = -x\varphi(x)$$

У функции $\varphi(x)$ один положительный корень

$$x_0 = \frac{\left(\sqrt{17} - 3\right)\sqrt{2}}{8}r \approx 0{,}1985 \cdot r < a.$$

Значит x_0 — критическая точка функции φ на отрезке [0; a]. Так как

$$f(x_0)=\frac{x_0^2\left(7-\sqrt{17}\right)}{16}>0, \quad f(0)=f(a)=0,$$

то в точке x_0 функция f принимает наибольшее на отрезке [0; a], а значит (см. правило 3), и на интервале (0; a) значение. В силу того, что на этом интервале $f(x) > 0$, а квадратичная функция на $(0; +\infty)$ возрастает, то и функция S в точке x_0 достигает наибольшего значения. Значит, искомая толщина доски около $0{,}2 \cdot r$ или $0{,}1 \cdot d$

Найденное соотношение важно для практики. Оно позволяет до распиловки определить, будут ли полученные доски отвечать установленным стандартам, т. е. приемлем ли для данного бревна такой раскрой. При положительном ответе на первый вопрос предварительное знание толщины досок еще необходимо и для подходящей установки пил.

Дальнейшее исследование проходит примерно на том же уровне вычислительной сложности.

Мы рассмотрели некоторые изолированные друг от друга задачи рационального раскроя древесины. Проблемы оптимального раскроя, учитывающие целый комплекс различных факторов, требуют для своего решения привлечения более глубоких, чем это изучается в школе, методов математического анализа, а также линейного программирования и теории вероятностей.

Что нам стоит дом построить

12. При монтаже зданий небольшой высоты широко используются автомобильные краны. Для правильного выбора крана необходимо знать многие исходные данные о сооружаемом объекте. В частности, габаритные данные объекта позволяют заранее определить требуемую длину стрелы крана.

Вывести формулу для определения длины стрелы автомобильного крана, с помощью которого можно построить здание высотой H и шириной 2l с плоской крышей.

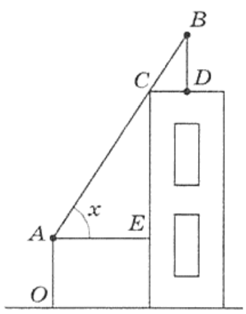

Рис. 10. Автомобильный кран

Решение. Так как автомобильный кран может перемещаться вокруг всего здания, то крюк крана достанет до любой точки здания, если достанет (рис. 10) до середины крыши (имеется в виду середина по ширине).

Рассмотрим кран, который, находясь в точке *O*, подает деталь на середину крыши. Пусть угол наклона стрелы при этом составляет *x*. Тогда

$$BC = \frac{CD}{\cos x} = \frac{l}{\cos x},$$

$$AC = \frac{CE}{\sin x} = \frac{H-h}{\sin},$$

где $h = AO$ — высота подвеса стрелы крана. В таком случае длина стрелы крана

$$L = \frac{H-h}{\sin x} + \frac{l}{\cos x}.$$

Из последней формулы видно, что для совершения указанной работы краном, установленным в другой точке (ближе к зданию или дальше от него), потребуется кран с другой длиной стрелы, поскольку при таком перемещении меняется угол x. Определим наивыгоднейшее место установки крана, т. е. такое место, с которого заданная работа может быть выполнена краном с наименьшей длиной стрелы. Для этого, очевидно, достаточно определить, при каком *x* из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция *L* принимает наименьшее значение. Найдем производную:

$$L'(x) = \frac{l\cos x}{\sin^2 x}\left(tg^3 x - \frac{H-h}{l}\right).$$

Теперь легко обнаружить, что функция *L* достигает наименьшего значения при

$$x = actg\sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}.$$

Найдя из этой формулы значение *x* и подставив его в формулу для *L*, мы и получим наименьшее возможное значение длины стрелы.

13. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которой должна быть сделана из стекла, а остальные из обычного материала. Высота комнаты должна равняться 4 м, а площадь 80 м^2. Известно, что 1 м^2 стеклянной стены стоит 75 рублей, а обычного материала 50 рублей. Какими должны быть размеры комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей?

Решение:

1 этап. Моделирование.

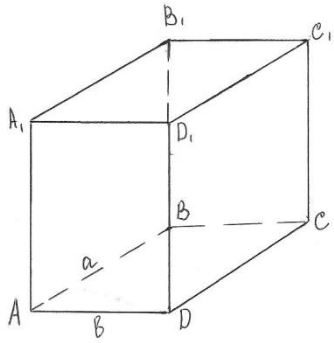

Рис. 11. Схема комнаты

1. $S_{ABCD} = a \cdot b = 80(м^2)$.
2. $S_{AA_1B_1B} = a \cdot h = 4 \cdot a(м^2)$.
3. $S_{AA_1D_1D} = b \cdot h = 4b(м^2)$.
4. $S_{BB_1C_1C} = b \cdot h = 4b(м^2)$.
5. Найдём стоимость стены AA_1B_1B:

$P_{AA_1B_1B} = 75 \cdot 4a = 300a$.

6. Найдём стоимость стен AA_1D_1D и BB_1C_1C:

$P_{AA_1D_1D} = 50 \cdot b \cdot 8 = 400b$.

7. Найдём стоимость стены DD_1C_1C:

$P_{DD_1C_1C} = 50 \cdot 4a = 200a$.

8. Общая стоимость всех стен:

$$P_1 = 300a + 400b + 200a = 500a + 400b; \quad a \in \left(0; \frac{80}{b}\right]. \qquad (3)$$

Математическая задача: исследовать функцию (3) на наименьшее значение на заданном промежутке.

2 этап. Решение внутри математической модели.

1. $P' = 500a + 400b; \quad a \in \left(0; \frac{80}{b}\right]; \quad b = \frac{80}{a}$.

$P' = 500a + \frac{3200}{a}; \quad a > 0$.

2. $P' = 500 - \frac{3200}{a^2}; \quad P' = 0; \quad 500 - \frac{3200}{a^2} = 0; \quad a > 0$.
3. $500a^2 - 3200 = 0; \quad a^2 = 64; \quad a_1 = 8; \quad a_2 = -8$.

$a = -8$ не подходит по условию задачи.

4. $P_{наим}$ при $a = 8$.

3 этап. Критическое осмысление полученного результата.

Ширина стеклянной стены должна быть равна 8 м, а обычной – 10 м. При таких размерах общая стоимость всех стен окажется наименьшей и равной 8000 рублей.

Ой, канава, ты канава...

С помощью теоретических расчетов и эксперимента установлено, что из всех каналов с заданным живым сечением наибольшей пропускной способностью и одновременно наименьшей фильтрацией отличаются каналы с наименьшим смоченным периметром. Про такие каналы говорят, что они имеют гидравлически наивыгоднейший профиль.

Площадь F поперечного сечения канала (мы рассматриваем для простоты каналы, целиком заполненные водой) называют его живым сечением, а длину P границы такого сечения называют смоченным периметром канала. Каналы стремятся сооружать так, чтобы они имели гидравлически наивыгоднейший профиль.

В мелиоративной практике часто сооружаются каналы или лотки с поперечным сечением в форме прямоугольника, треугольника, трапеции и сегмента круга. Поэтому представляет интерес расчет гидравлически наивыгоднейшего профиля для каналов такой формы.

14. Сечение канала – равнобедренная трапеция (рис. 12) с углом откоса таким, что ctg a = m. При каком отношении ширины дна к глубине канал имеет гидравлически наивыгоднейший профиль?

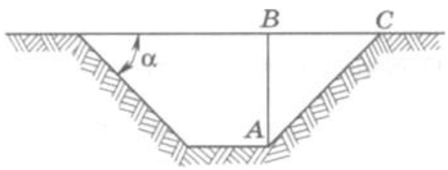

Рис. 12. Сечение канала

Решение. Пусть ширина дна канала b, его глубина h, а живое сечение F. Тогда $BC=h\,ctg\,a = mh$, $AC = h\sqrt{1+m^2}$. Значит,

$$F = bh + mh^2,\ P = b + 2h\sqrt{1+m^2}\ .$$

Из выражения для F получаем

$$b = \frac{F - mh^2}{h}.$$

а значит,

$$P(h) = \frac{F}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} \quad (h > 0).$$

С помощью производной находим, что функция P достигает наименьшего значения на промежутке $(0; +\infty)$ при

$$h_0 = \sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2} - m}}$$

Искомое соотношение:

$$\frac{b}{h_0} = \frac{F}{h_0^2} - m = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right).$$

Замечание. На уроке можно рассмотреть задачу попроще, положив *a*=45°.

15. Оросительный канал имеет форму равнобокой трапеции, боковые стороны которой раны меньшему основанию (см. рис. 13). При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь максимальную площадь?

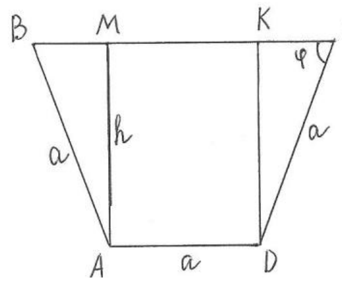

Рис.13.Оросительный канал

<u>*Решение:*</u>

1 этап. Моделирование.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM.

$AM = h = a \cdot \sin\varphi$, $BM = a \cdot \cos\varphi$.

$BM = CK = a \cdot \cos\varphi$.

$$BC = a + 2a \cdot \cos\varphi.$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AM = \frac{a+a+2a\cdot\cos\varphi}{2} \cdot a \cdot \sin\varphi = \frac{2a+2a\cdot\cos\varphi}{2} \cdot a \cdot \sin\varphi =$$

$$= \left(a \cdot (1+\cos\varphi)\right) \cdot a \cdot \sin\varphi = a^2 \cdot \sin\varphi \cdot (1+\cos\varphi).$$

Мы получили $F(\varphi) = a^2 \cdot \sin\varphi \cdot (1+\cos\varphi)$. (2)

Математическая задача: исследовать функцию (2) на наибольшее значение.

2 этап. Решение внутри математической модели.

$$F'(\varphi) = a^2 \cdot \left(\cos\varphi \cdot (1+\cos\varphi)\right) + \sin\varphi \cdot (-\sin\varphi) = a^2 \cdot \left(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= a^2 \cdot \left(\cos\varphi + \cos^2\varphi + \cos^2\varphi - 1\right) = a^2 \cdot \left(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1\right).$$

$$F'(\varphi) = a^2 \cdot \left(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1\right);$$

$$2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0; \quad \cos\varphi = \frac{-1+3}{4}.$$

Так как φ – острый угол, то $\cos\varphi = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$; $\varphi = 60^0$.

3 этап. Критическое осмысление полученного результата.

Сечение оросительного канала будет иметь максимальную площадь при угле наклона боковых стен 60^o.

<u>Бежит ручей, течет ручей</u>

Как известно из курса физики, механическая энергия единицы массы воды, протекающей в единицу времени через живое сечение потока, вычисляется по формуле

$$E = gh + \frac{v^2}{2} = gh + \frac{Q^2}{2F^2},$$

где g — ускорение свободного падения, h — глубина, v — скорость потока, Q — количество воды, протекающей через поперечное сечение потока в единицу времени (расход воды), F — живое сечение потока ($Q = Fv$).

Один и тот же расход Q в зависимости от условий движения (уклон, шероховатость) может протекать в данном поперечном сечении открытого русла с различной скоростью и, следовательно, с различной глубиной. Глубина потока h_0, при которой его энергия $E(h)$ для заданного расхода Q достигает наименьшего значения, называется критической глубиной. Определение критической глубины необходимо для оценки состояния потока (при $h < h_0$ оно бурное, при $h > h_0$ спокойное), а также для выполнения ряда гидравлических расчетов.

Найдем критические глубины потоков для некоторых встречающихся на практике каналов.

16. Найти критическую глубину канала прямоугольного сечения шириной b с расходом воды Q.

<u>Решение.</u> Пусть глубина канала h. Тогда его живое сечение $F=bh$, а механическая энергия

$$E(h) = gh + \frac{Q^2}{2b^2h^2}.$$

Требуется узнать, при каком значении переменной h ($h > 0$) функция

E(h) принимает наименьшее значение. Имеем

$$E'(h) = g - \frac{Q^2}{b^2h^3}; \quad E'(h) = 0 \Leftrightarrow h = h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}.$$

Замечаем, что $E'(h) < 0$ при $h < h_0$ и $E'(h) > 0$ при $h > h_0$. Значит, в точке h_0 функция $E(h)$ достигает наименьшего значения.

Ответ: $h_0 = 0{,}47\sqrt[3]{\left(\frac{Q}{b}\right)^2}$.

Эх, дороги...

При проектировании дорог часто возникает необходимость соединить подъездным путем тот или иной объект с автомагистралью. Различные экономические соображения в таких случаях обычно показывают, что подъездной путь должен пойти не перпендикулярно к магистрали, а под некоторым острым углом, называемым углом примыкания подъездного пути к магистрали.

17. Фермерское хозяйство С (рис. 14) расположено в 50 км от райцентра А и в 30 км от магистрали, проходящей через райцентр. Под каким углом к магистрали следует провести подъездной путь из С, чтобы стоимость перевозок груза из С в А и из А в С была наименьшей, если известно, что перевозка по магистрали будет обходиться в два раза дешевле, чем по подъездному пути?

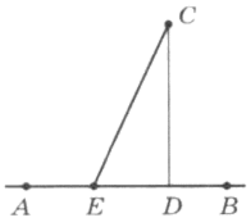

Рис. 14. Схема дорог к фермерскому хозяйству

Решение. Пусть $DE = x$. Тогда

$$CE = \sqrt{900 + x^2}, \quad AE = AD - x = 40 - x.$$

Обозначив стоимость перевозки 1 т груза на 1 км по магистрали через p, найдем стоимость перевозки 1 т груза от A до C (или в обратном направлении):

$$T(x) = p(40 - x) + 2p\sqrt{900 + x^2}, \quad 0 \le x \le 40.$$

Требуется найти наименьшее значение функции T на отрезке [0; 40]. Найдем производную:

$$T'(x) = -p + \frac{2px}{\sqrt{900 + x^2}}$$

Замечаем, что на рассматриваемом отрезке у функции T одна критическая точка $x_0 = 10\sqrt{3}$,причем

$$T(x_0) = \left(40 + 30\sqrt{3}\right)p,$$
$$T(0) = T(40) = 100p.$$

Значит, в точке x_0 функция принимает наименьшее значение. Теперь легко найти угол примыкания:

$$tg\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \alpha = 60^0.$$

18. Три пункта А, В, Сне лежат на одной прямой причем величина угла АВС равна 60^0. Одновременно из точки А выходит автомобиль, а из В– поезд. Автомобиль движется к В со скоростью 80 км/ч, поезд – к пункту С со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движении) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшей, если АВ=200.

Решение:

1 этап. Моделирование.

1. Пусть в момент времени t автомобиль находится в точке E, а поезд – в точке K. Т.к. автомобиль может пройти расстояние от A до B за 200:80=2,5 (ч), то $t \in [0;2,5]$.

2. По теореме косинусов

KE^2=(200-80t)^2+ (50t)^2 – 2 · 50t · (200-80t) ·cos60=

=12900 t^2- 42000t + 40000. (1)

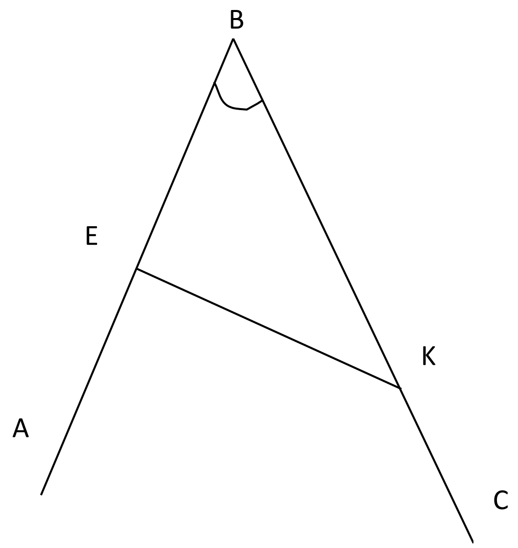

Рис. 15. Схема дорог

Математическая задача: исследовать функцию (1) на наименьшее значение на заданном отрезке.

2 этап. Решение внутри математической модели.

Таким образом, квадрат расстояния между автомобилем и поездом есть квадратичная функция с положительным коэффициентом при t^2 . Эта функция достигает наименьшего значения на всей числовой прямой при

$$t = \frac{42000}{2 \cdot 12900} = \frac{70}{43}$$

В этой же точке достигается наименьшее значение этой функции и на отрезке [0;2,5] (т.к. 70/43 лежит на этом отрезке).

3 этап. Критическое осмысление полученного результата.

Итак, в момент времени 70/43 ч расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB*=200 км.

Ответ: 70/43 ч.

19. Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости x км/ч при движении на четвертой передачи приблизительно описывается функцией

$f(x) = 0{,}0017x^2 0{,}18x + 10{,}2;\quad x > 30$ При какой скорости расход горючего будет наименьший? Найдите этот расход.

<u>Решение:</u> Исследуем расход горючего с помощью производной: f′(x)=0,0034x-0,18.Тогда f′(x)=0 при x≈53. Определим знак второй производной в критической точке: f′′(x)=0,0034>0, следовательно, расход горючего при скорости 53 *км/ч* будет наименьшим. f(53)≈5,43 л.

20. Буровая вышка расположена в поле в 9км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь пункта?

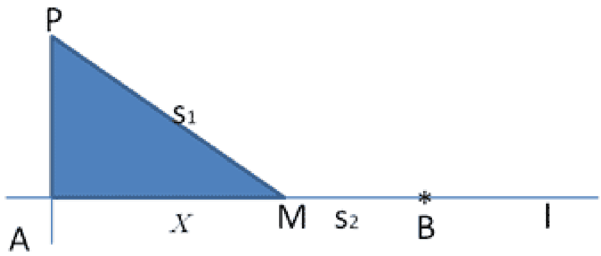

Рис. 16. Схема дорог

Следующим этапом работы является составление мысленной модели задачи в виде схематического рисунка к задаче, и вводятся условные обозначения: *P – буровая вышка; B – населенный пункт, l – шоссе, PMB – маршрут следования курьера.*

Установите, какие величины будут постоянными, а какие –переменными?

Постоянные величины – PA, AB, $v_п$, $v_ш$. Переменные величины – AM, MB, PM. Исследуемая величина – время, за которое курьеру надо доехать до нужного пункта.

Чему равны постоянные величины:

$$PA = 9\ км,\ AB = 15\ км,\quad v_п = 8\ км/ч,\quad v_ш = 10\ км/ч$$

На этапе математического моделирования выбираем параметр (*x*), через который выражаем интересующую нас величину как *t(x):*

1. Пусть *x* – расстояние *AM*, $0 \le x \le 15$

2. Знание, какой теоремы нам потребуется, чтобы из прямоугольного треугольника выразить РМ? *(Теорема Пифагора).* Из прямоугольного треугольника *PAM* выражаем:

$$S_1 = PM = \sqrt{AM^2 + PA^2} = \sqrt{x^2 + 9^2}; \quad S_2 = MB = 15 - x.$$

3. Согласно условию, получаем: путь S_1 (по полю), который курьер проходит со скоростью $v_n = 8\,км/ч$, а путь S_2 (по шоссе) – со скоростью $v_ш = 10\,км/ч$.

4. Вспомните формулу нахождения пути (расстояния) из курса физики и из этой формулы выразите время $t = \frac{S}{v}$. Значит, курьер проезжает на велосипеде по полю путь S_1 за время $t_1 = \frac{\sqrt{x^2+81}}{8}$; а на велосипеде по шоссе путь S_2 за время $t_2 = \frac{15-x}{10}$. Тогда время, затраченное на путь S_1 и S_2,: $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+81}}{8} + \frac{15-x}{10}$.

По условию задачи, средствами анализа ищем наименьшие значение функции на отрезке [0;15]. Выполняем решение задачи внутри математической модели, применяя умения решать уравнения, использовать формулы дифференцирования и находить критические точки и наибольшие или наименьшие значение функции на заданном промежутке.

2. Находим производную функции:

$$t'(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+81}}\cdot 2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{10}$$

3. Находим критические точки $t'(x) = 0$;

$$\frac{x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{10} = 0;\ 5x = 4\cdot\sqrt{x^2+81};\ 25x^2 = 16\cdot\left(x^2+81\right);\ x_1 = 12; \quad x_2 = -12$$

Делаем вывод:

Точку x_2 проверять не будем, т.к. она не принадлежит промежутку [0;15].

Находим значение функции в точках $x = 0$, $x = 12$, $x = 15$;

$$t(0) = 2\frac{5}{8} \approx 2{,}63$$

$t(15) \approx 2{,}9$; $t(12) \approx 2{,}18$ функция $t(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = 12$

15 – 12 = 3 км

21. Для того чтобы водитель на повороте видел дорогу на безопасном расстоянии s (оно определяется длиной тормозного пути), у внутренней стороны поворота (рис. 17), должна быть полоса (зона видимости), свободная от всяких препятствий для просмотра. Определите ширину зоны видимости вдоль поворота радиуса R.

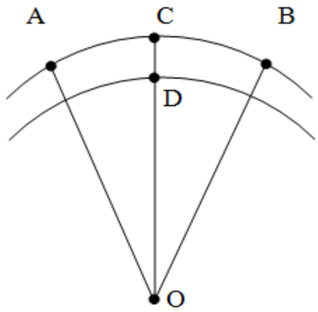

Рис. 17. Зона видимости при повороте дороги

Решение. Пусть автомобиль находится в точке A, а точка B такова, что длина дуги AB равна s. Требуется найти стрелку сегмента f = CD. Если радианная мера угла AOB равна α, то $s = R\alpha$,а значит:

$$\alpha = \frac{s}{R},\ f(s) = OC - OD = R \cdot \left(1 - \cos\frac{s}{2R}\right) = 2R \cdot \sin^2\frac{s}{4R}.$$

Воспользовавшись формулой (4), получаем: $f = \dfrac{s^2}{8R}$. Данная формула и применяется на практике.

Ответ: $\dfrac{s^2}{8R}$.

И кризис нас коснулся…

22. Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса 1931 г. решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач, поставленных перед Германом, была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Итак, $S(x) = \dfrac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения $S(x)$ на $(0;+\infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную $S'(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2}\right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для нахождения критических точек решим уравнение $S'(x) = 0$.

Корень уравнения: $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

При, $x < 0 < \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ $S'(x) < 0$ а при $x > \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ $S'(x) > 0$

Следовательно, в точке $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ $S(x)$ имеет минимум.

Таблица 11

Полученные значения функции и производной

	$\left(0;\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\infty\right)$
$S'(x)$	$-$	0	+
$S(x)$	Возр.	min	Убыв.

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем *V*, будет наименьшей при. $h = 2x = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой.

Полезно обратить внимание ребят на то, что в нашей стране выпускаются ежегодно сотни миллионов банок консервов в жестяной упаковке. Экономия 1% жести на изготовление каждой банки позволит за счет сэкономленного материала дополнительно изготовить несколько миллионов новых банок. Вместе с тем промышленность нередко выпускает консервы в жестяной таре, не обеспечивая наименьший расход материала на изготовление банки. Это обусловлено рядом причин: стремлением минимизации отходов при изготовлении банок, соображениями торговой эстетики. Возможностями транспортировки и т.д.

«Много ли человеку земли нужно»

23. Фрагмент рассказа Л.Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно» о крестьянине Пахоме, покупавшем землю у башкир.

- А цена какая будет? – говорит Пахом.

- Цена у нас одна: 1000 рублей за день.

Не понял Пахом.

- Какая же это мера – день? Сколько в ней десятин будет?

- Мы этого, – говорит, - не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь за день , то твое, а цена 1000 рублей.

Удивился Пахом.

- Да ведь это, - говорит, - в день обойти земли много будет.

Засмеялся старшина.

- Вся твоя, - говорит. – Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

Фигура, которая получилась у Пахома, изображена на рисунке.

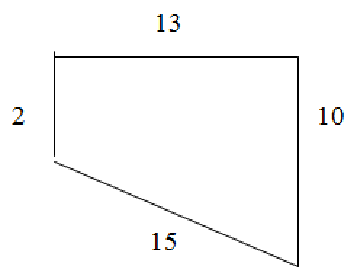

Рис. 18. Участок

Обежал он за день, например, прямоугольную трапецию периметром 40 км. С площадью S = 78 *км²*.

Проверим, наибольшую ли площадь при этом получил бы Пахом (с учетом того, что участки обычно имеют форму прямоугольника)?

P = 40 *км*. а – первая сторона, 20 – а – вторая сторона.

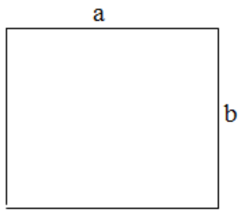

Рис. 19. Прямоугольник

$S = a(20 - a) = -a^2 + 20a.$

$S' = -2a + 20 = 0,\ a = -10.$

$S'' = -2 < 0$

Следовательно, наибольший четырехугольник – квадрат, т.е. наибольшая площадь – 100 *м²*.

Можно сделать вывод, что пахом вполне мог получить земли больше с меньшими усилиями.

8 марта

24. Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 X 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Решение.

Обозначим через х длину стороны вырезаемого квадрата. Легко видеть, что $0 < x < 25$.

Объем при этом у коробки:

$V = x(80 - x) \cdot (50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$

$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$

$x_1 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3},\ x_2 = 10$

x_1 - посторонний корень по смыслу задачи.

$x_2 = 10$ – единственное решение – высота, 80 – 20 = 60 – длина, 50 – 20 = 30 – ширина.

V = 10·60 30 = 18000(*см³*).

Сани, довезите меня сами

25. Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен к.

<u>Решение</u>: Разложим силу Fна горизонтальную и вертикальную составляющие. Сила нормального движения саней и вертикальной составляющей силы *F:N=P-Fsinα*, поэтому сила трения

$F_{тр}$*=kN=k(P-Fsinα).* Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил:

Fx=Fmp, то есть *Fcosα=k (P-Fsinα).* Далее находим силу как функцию угла *α:*

F(α)= kP/(ksinα+cosα). *F'(α)=kP(sinα-kcosα)/(ksinα+cosα)*2. Тогда *F'(α)=0* при*k=tgα.*

Определим знак второй производной в этой точке…

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения, нужно тянуть сани за короткую веревку. Если же коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной.

<u>Ох уж эта медицина</u>

26. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшения температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что X обозначает дозу назначенного лекарства, У – функция степени реакции. У=f(x)=x^2*(a-x) ,где а – некоторая положительная постоянная. При каком значении X реакция максимальна?*

<u>Решение:</u> $0 < x < a$. Значит $f'(x) = 2ax - 3xa.$. Тогда $f'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}a$. В этой точке $f''\left(\frac{2}{3}a\right) = -2a < 0$, то $x = \frac{2}{3}a$ - тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

Точки перегиба важны в биохимии, так как они определяют условия, при которых некоторая величина, например скорость процесса, наиболее (или наименее) чувствительна к каким-либо воздействиям.

<u>Экосистема</u>

27. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону P(t)=1000 + $\frac{100t}{100+t^2}$*, где t – время в часах. Найдите максимальный размер этой популяции.*

<u>Решение</u>. $D(P) = R$

$$P'(t) = \frac{100(100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100(100+t^2-2t^2)}{(100+t^2)^2} = \frac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

$$P'(t) = 0;\ 100 - t^2 = 0;\ t = \pm 10;\ P(10) = 1000 + \frac{1000}{200} = 1005.$$

Ответ: через 10 часов популяция достигнет максимального размера 1005 бактерий.

28. За последние 10 лет численность грызунов в городе Н выросла в 5 рази достигла 1 миллиона особей: по одной крысе на каждого жителя. За год одна пара крыс способна воспроизвести 50 штук себе подобных. По словам эпидемиологов, крысы являются переносчиками многих болезней – чумы, бешенства, энцефалита. Составьте задачу по приведенным данным и решите её.

Физика

29. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R.

Решение. Пусть сопротивление одного x, другого – y. Сопротивление всей цепи при параллельном соединении r, тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}$$

Отсюда $x+y=R$, $y=R-x$.

Имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{R-x}=\frac{1}{r};\quad \frac{R-x+x}{x(R-x)}=\frac{1}{r};\quad r=\frac{x(R-x)}{R}$$

Сопротивление r-является функцией от x, x принадлежит [0;R]

$$F(x)=\frac{x(R-x)}{R}=\frac{1}{R}(xR-x^2)$$

(Далее решаем самостоятельно с последующей проверкой)

$$D(f)=R;\quad f'(x)=\frac{1}{R}(R-2x);\quad f'(x)=0,\ x=\frac{R}{2};\quad f(0)=0,\ f(R)=0,\ f\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{R}{4}$$

при $x=\frac{R}{2}$ сопротивление всей цепи при параллельном соединении будет наибольшим.

Ответ: сопротивления должны быть одинаковыми.

Приближенные и «неправильные» формулы

Известная приближенная формула

$$f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h\left(f'(x_0)\neq 0\right), \tag{1}$$

где h близко к нулю, является источниками многих приближенных формул, применяемых на практике.

Справка: Для измерения радиусаR большого цилиндра используется накладной прибор – *наездник*, который представляет собой тележку с подвижным вертикальным стержнем l, фиксированная точка A которого (индикатор) при расположении наездника на горизонтальной прямой a находится в положении точки B – на одном уровне с центрами колесиков наездника, а при нахождении на окружности ω (перпендикулярное сечение цилиндра) приподнимается на некоторую величину h. $R=\frac{l^2}{2h}+\frac{h}{2}-r$

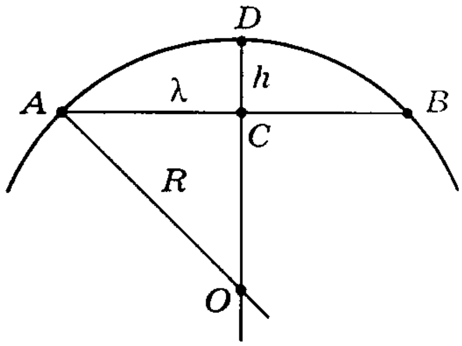

Рис. 20. Рельсовая нить

30. С помощью наездника не столько измеряют диаметр цилиндра, сколько находят возможное отклонение величины диаметра от номинального. Вывести соответствующую формулу.

Решение. Пусть номинальное значение диаметра данного цилиндра соответствует значению x_0 индикатора наездника. Требуется найти

$$\Delta D=f(x_0+h)-f(x_0),$$

где (в справке)

$$D=f(x)=\frac{l^2}{x}+x-d\ .$$

Поскольку h, то можно воспользоваться формулой (1). Получим

$$\Delta D=f'(x_0)h=\left(1-\frac{l^2}{x_0^2}\right)h,$$

где $h=x-x_0$, $x-$фактическое показание индикатора, x_0- номинальное показание.

31. При топографических съемках окрестности точки A(см рис. 21) вместо истинного расстояния между точками земной поверхности A и B принимают расстояние lмежду их проекциями на касательную к земному шару плоскость (A – точка касания) и вводят поправку Δl на кривизну Земли. Записать формулу для Δl.

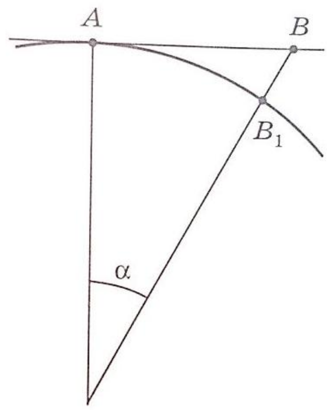

Рис. 21. Топографические съемки окрестности

Решение. Если $AB = x$, то

$$\Delta l = f(x) = x - R\,arctg\,\frac{x}{R}.$$

Так как $f'(0) = 0$, то формулой (1) воспользоваться нельзя. Но в некоторых школьных учебниках дается обобщение этой формулы:

$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0)$ [Башмаков, 1999].

В нашем случае при $x_0 = 0, h = l$ эта формула дает такой результат:

$$\Delta l = \frac{l^3}{3R^2},$$

что и используется на практике.

Задачи по экономике

32. *Объём продукции и, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией* $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$*, где t – время, ч; причём* $1 \le t \le 8$. *Необходимо вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.*

Решение:

Производительность труда $z(t)$ выражается формулой $z(t) = u'(t)$. Тогда

$$z(t) = u'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$$

Производительность труда через 1 ч после начала работы

$$z(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5 \text{ (у.е.)}$$

Производительность труда за 1 ч до окончания работы

$$z(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5 \text{ (у.е.)}$$

Скорость изменения производительности труда $z'(t) = -5t + 15$

Значит, $z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$, $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$

33. Затраты на производство продукции объёма x задаются функцией $C(x)=x^2+5x=4$. *Производитель реализует продукцию по цене 25 ден.ед. Найдите максимальную прибыль П и соответствующий объём продукции x.*

Решение: Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой надо найти. Прибыль равна разности между выручкой *U* и затратами *C*.

П=$U-C$

Находим соответствующую функцию, зависящую от *x*. Реализовав продукцию объёма *x* по цене 25 ден.ед., предприниматель имеет выручку, $U=25x$. При этом затраты составят $C(x)$. Значит,

$$П=U-C=25x-(x^2+5x+4)=-x^2+20x-4$$

Определяем (по смыслу задачи) область определения функции. По смыслу задачи объём продукции *x* может принимать любое положительное значение, т.е.

$$x\in(0,+\infty)$$

Формулируем математическую задачу. Найти наибольшее значение функции: $П(x)=-x^2+20x-4$ при $x\in(0,+\infty)$

Функцию аргумента *x* исследуем на экстремум на найденном промежутке $П'(x)=-2x+20$; $П'(x)=0,\quad -2x+20=0$, следовательно, стационарная точка функции $x=10$.

Производная меняет свой знак при переходе через эту точку с «+» на «–», значит $x=10$ – точка максимума.

$$П_{\max}=П(10)=-10^2+20\cdot10-4=96$$

Максимальная прибыль, равная 96 ден.ед., достигается при объёме производства 10 у.е.

34. Функция спроса: $q=\dfrac{p+8}{p+2}$. *Функция предложения: S = p + 0,5. Здесь p (руб) – цена товара, q(шт.) – количество покупаемого товара; S(шт.) – количество предлагаемого на продажу товара в единицах времени. Найти: а) равновесную цену: q= S; б) эластичность спроса и предложения для этой цены.*

Решение: а) $\dfrac{p+8}{p+2}=p+0{,}5\Rightarrow p=2$ руб.

б) $E_p(q)=\dfrac{p(p+2)}{p+8}\cdot\dfrac{1\cdot(p+2)-1\cdot(p+8)}{(p+2)^2}=-\dfrac{6p}{(p+2)(p+8)}$;

$E_{p=2}(q)=-0{,}3$; $\left|E_{p=2}(q)\right|<1\Rightarrow$ неэластична

$$E_p(s)=\frac{p}{p+0{,}5}\Rightarrow E_{p=2}(s)=0{,}8;\ \left|E_{p=2}(s)\right|<1\Rightarrow$$ неэластична.

Следовательно изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. При увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

35. Функция спроса y *от цены* x *продукта имеет вид* $y=10-x$. *Найти коэффициент эластичности спроса при цене товара* $x=2$ *единицы.*

<u>Решение.</u> Коэффициент эластичности спроса равен

$$E_x(y)=\frac{x}{y};\ y'=\frac{x}{10-x}(-1)=-\frac{x}{10-x}.$$

При $x=2$ получаем $E_{x=2}(y)=-\dfrac{2}{10-2}=0{,}25$, т.е. при повышении цены на 1% спрос на товар уменьшится на 0,25%. Так как $\left|E_{x=2}(y)\right|<1$, то спрос при цене $x=2$ единицы не эластичен.

§ 2. Содержание курса по выбору

Качество математической подготовки учащихся в последние годы значительно снизилось. Об этом свидетельствуют как результаты ЕГЭ, так и итоги международных исследований (PISA, TIMSS) [Тюменева и др., 2015]. Одной из причин создавшейся ситуации являются проблемы мотивационного характера, связанные с отношением к содержанию школьного курса математики, которое, в определенной степени устарело и носит излишне формальный характер. Математика, к сожалению, не является любимым предметом у многих учащихся, которые не видят ее практического значения, считают скучной и не современной.

Хотя прикладные задачи так важны для воспитания школьников, развития интереса к предмету, в учебниках по математике предлагаются к решению очень мало задач такого типа. И если и предлагаются, то они в основном однотипны и скучны.

Для решения данной проблемы мы разработали интегрированный курс по выбору «Производная вокруг нас». В данном курсе представлены прикладные задачи дифференциального исчисления. Основная методическая идея – интеграция темы «Производная» с другими школьными дисциплинами для восполнения разрыва между математическим содержанием и его приложениями в физике, химии, экономике, биологии.

Решение прикладных задач выполняет ряд дидактических функций в процессе обучения математике.

1) *Вводно-мотивационная.* Важнейшим средством для формирования у учащихся глубокого интереса к предстоящей учебно-познавательной деятельности является постановка перед ними каких-то проблемных задач.

2) *Иллюстративная и конкретизирующая.* В процессе изучения математики учащиеся знакомятся с различными обобщёнными и абстрактными понятиями. Для того чтобы учащиеся осознали сущность и смысл этих понятий, необходимо конкретизировать их достаточным числом примеров. В качестве иллюстраций и конкретизаций целесообразно использовать разнообразные сюжетные задачи.

3) *Функция применения и использования математических закономерностей.* Для того чтобы изучаемые в школьном курсе математики закономерности были прочно усвоены учащимися, чтобы они поняли их практическую значимость, можно использовать систему прикладных задач, решая которые учащиеся глубже овладеют изучаемыми математическими закономерностями, убедятся в их практической значимости.

4) *Функция формирования предметных действий.* В школьном курсе математики учащиеся должны приобрести ряд специальных математических умений и навыков; вычислительных умений и навыков – письменных и устных, умений и навыков измерения простейших величин, сравнения их между собой, процентных вычислений, геометрических построений и т.д. Все эти умения и навыки формируются не только в решении специальных примеров, но, главным образом, в процессе решения простейших сюжетных задач.

5) *Функция формирования метапредметных действий.* Кроме формирования специальных математических действий, в процессе обучения математике необходимо формировать, расширять и укреплять общеучебные умения осуществлять поиск, анализ и обработку информации, планировать и организовывать свою деятельность, правильно и аккуратно оформлять свои записи и выполнение письменных заданий, осуществлять самоконтроль и самооценку своей учебной работы и др. Решение специально подобранной системы сюжетных задач может способствовать формированию всех этих действий.

6) *Контрольно-оценочная.* Осуществление внешнего контроля за уровнем овладения учащимися изучаемым учебным материалом и оценка их успеваемости невозможны без использования системы сюжетных задач, самостоятельное решение которых учащимся наглядно и верно демонстрирует уровень овладения ими изученного учебного материала.

7) *Функция воспитания характера и воли учащихся***.** Решение сюжетных задач, особенно сложных, требует от учащихся настойчивости, последовательных и аргументированных рассуждений, сосредоточенности волевых качеств – собранности,

для преодоления возникающих в процессе решения трудностей, смелости, не боязни неудач, умения извлекать из неудач и успехов необходимые полезные выводы и много других качеств характера и воли учащихся. Все эти качества воспитываются и развиваются в процессе самостоятельного решения сюжетных задач, когда у учащихся имеется известная свобода как в выборе самих задач, так и свобода во времени, отведенного на решение задач. Поэтому следует давать учащимся достаточное время для решения каждой задачи, позволять учащимся, которые не смогли решить задачу на уроке, решить эту задачу дома. А домашние задания (по крайней мере, их часть) давать учащимся на длительное время, с тем чтобы у них была свобода во времени для поиска решения задач.

8) *Функция развития творческого мышления и воображения*. В математике существуют так называемые «задачи на смекалку и сообразительность», не требующие для своего решения каких-то особых математических приемов. Необязательное решение таких задач может способствовать развитию у учащихся творческой интуиции и инициативы, развитого воображения, догадки. Такие сюжетные задачи можно давать учащимся для самостоятельного решения на дом на длительный срок. Очень полезно для этого проведение математических олимпиад и других видов соревнований. Решение подобных задач важно для математически одаренных детей, для развития их познавательного интереса и математических способностей [Фридман, 2002].

Таким образом, теоретический и практический материал данного курса будет способствовать формированию познавательного интереса и мотивации к математике, развитию творческих способностей учащихся, развивать предметные и метапредметные учебные действия; даст дополнительные возможности подготовки к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

В основу курса по выбору положен системно-деятельностный подход. Общеизвестно, что вне деятельности в педагогике невозможно решить ни одной задачи обучения, воспитания и развития.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования методологической основой Стандарта является системно-деятельностный подход, который обеспечивает:

− формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию;

− проектирование и конструирование развивающей образовательной среды образовательного учреждения;

− активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;

– построение образовательного процесса с учетом индивидуальных, возрастных, психологических, физиологических особенностей и здоровья обучающихся [Федеральный государственный образовательный стандарт…, 2012].

Системно-деятельностный подход ориентирован не столько на усвоение знаний, сколько на формирование навыков и умений, развитие творческой деятельности. Именно этот подход позволяет избежать разрыва между теоретическими знаниями и применением их на практике.

Системно-деятельностный аспект обучения выводит в центр рассмотрения homoagens – человека действующего.

Под системно-деятельностным подходом понимают такой способ организации учебно-познавательной деятельности учащихся, при котором они являются не пассивными «приемниками» информации, а сами активно участвуют в учебном процессе. Необходимо, чтобы учащийся сам активно учился. Задача учителя – подобрать необходимую технологию обучения, руководствуясь при этом поставленными целями. Деятельность учителя при этом меняется: он является не «транслятором» знаний, а организует деятельность совместно с учащимся.

Системно-деятельностный подход отвечает необходимым требованиям к технологиям обучения, реализующим современные образовательные цели:

- обеспечивает включение детей в деятельность;
- создает благоприятные условия для разно-уровневого обучения и практической реализации всех дидактических принципов системно-деятельностного подхода;
- обеспечивает прохождение всех необходимых этапов усвоения понятий, что позволяет существенно увеличить прочность знаний.
- создавать условия, чтобы дети сами добывали знания в процессе познавательной, исследовательской деятельности, в работе над заданиями,
- учение выступает как сотрудничество – совместная работа учителя и учеников в ходе овладения знаниями и решения проблем, в связи с этим меняются задачи педагогической деятельности учителя.

Системно-деятельностный подход порождает много различных способов организации процесса обучения.

Ставя перед учителем новые задачи, системно-деятельностный подход дает большой стимул для развития творческого потенциала в разных сферах деятельности учителя: будь то форма урока или мероприятия, будь то планирование всего учебного материала или конкретных этапов урока, применение новых методик и технологий в учебном и воспитательном процессе или переосмысливание старых классических методик.

В особой степени реализации этого подхода способствует использование проектной деятельности. Основная идея данной технологии – создать условия для активной совместной учебной деятельности учащихся в разных учебных ситуациях, в которых каждый отвечает не только за результат своей работы, но, что особенно важно, за результат всей работы.

Проектная деятельность предполагает использование проблемных, исследовательских, поисковых методов, ориентированных четко на реальный практический результат, значимый для ученика, с одной стороны, а с другой, разработку проблемы целостно с учетом различных факторов и условий ее решения и реализации результатов.

Метод проектов нашел широкое распространение и приобрел большую популярность в силу рационального сочетания теоретических знаний и их практического применения для решения конкретных проблем окружающей действительности в совместной деятельности школьников. Все что я познаю, я знаю, для чего это мне надо и где и как я могу эти знания применить, - вот основной тезис современного понимания проектной деятельности, который и привлекает многие образовательные системы, стремящиеся найти разумный баланс между академическими знаниями и прагматическими умениями.

В курсе по выбору метод проектов может использоваться в рамках программного материала практически по любой теме, поскольку отбор тематики проводится с учетом практической значимости для учащихся.

Как уже отмечалось, в основе проектов лежит какая-либо проблема. Чтобы ее решить, учащимся требуется не только знание теоретического материала по теме, но и владение большим объемом разнообразных предметных связей, необходимых и достаточных для решения данной проблемы. Кроме того, школьники должны владеть определенными интеллектуальными, творческими и коммуникативными умениями.

К первым можно отнести умение работать с информацией, с текстом, делать обобщения, анализ, выводы и т.п. Формирование названных умений является задачами обучения различным видам речевой деятельности. К творческим умениям психологи относят прежде всего умение генерировать идеи, затем умение находить несколько вариантов решения проблемы; умение прогнозировать последствия того или иного решения.

К коммуникативным умениям относятся умения вести дискуссию, отстаивать свою точку зрения, умения находить компромисс, лаконично излагать свою мысль.

Таким образом, для грамотного использования метода проектов требуется значительная подготовка, которая осуществляется в целостной системе обучения в школе, предмет же иностранный язык вносит свою существенную лепту в данный учебный процесс и в общее развитие ребенка.

Психологами было доказано, что совместная деятельность самих учащихся, учителя и школьников является исходной формой индивидуальной учебной деятельности, а равноправное взаимодействие со сверстниками обусловливает овладение такими действиями, как целеполагание, планирование, контроль и оценка, без которых невозможно учение.

Итак, проект представляет собой самостоятельно планируемую учащимися работу, в которой речевое общение органично вплетается в интеллектуально-эмоциональный контекст другой деятельности (игры, анкетирования, выпуска журнала и т.п.).

Таким образом, он позволяет реализовать межпредметные связи в обучении, расширить «узкое пространство» общения в классной комнате, осуществить широкую опору на практические виды деятельности, типичные для обучаемых каждой возрастной группы.

Во-вторых, работа над проектом – творческий процесс. Учащиеся самостоятельно или под руководством учителя занимаются поиском разрешения проблемы, личностно-значимой для них. Это требует от учащегося самостоятельного переноса знаний, навыков и умений в новый контекст их использования. Следовательно, у школьников развивается креативная компетенция как показатель коммуникативного владения курсом по выбору.

В-третьих, в ходе выполнения проекта ученик активен, он проявляет творческий интерес и не является пассивным исполнителем воли учителя.

Проектная работа позволяет исключить формальный характер изучения учащимися языка (по принципу «надо знать») и активизирует их взаимодействие для достижения практического результата обучения языку,

В-четвертых, проект в принципиальном плане меняет функциональные обязанности ученика и учителя. Первый активно участвует в выборе, организации и конструировании содержания обучения иностранным языкам и конкретного урока; второй – выступает в роли консультанта, помощника, участника игры.

Можно выделить следующие типы проектов:

- исследовательские проекты
- творческие проекты
- ролево-игровые проекты
- информационные проекты
- практико-ориентированные проекты

Новизна данного курса состоит в интеграции работы над выработкой определенного стиля математического мышления над развитием интуиции, воображением, сообразительности и других качеств, лежащих в основе творческого процесса, над внедрением информационных технологий в развитие математической грамотности над пониманием красоты и изящества математических рассуждений.

Оригинальность программы состоит в том, что на основе развития интереса к математике, создаются условия для творческой мыслительной активности детей.

Преемственность реализации задач прикладной направленности позволяет выполнять заказ общества на подготовку личности, личности не только владеющей знаниями, представлениями о применении этих знаний, но и умеющей эти знания применять в различных областях деятельности, при решении практических задач, как учебных, так и жизненных проблем.

Таким образом, преемственность реализации курса «прикладные задачи с использованием производной в профильном обучении математике» является одним из путей осуществления системно-деятельностного подхода в обучении.

Практическая направленность курса связана с раскрытием значимости математики, ее методов в деятельности человека для познания им окружающего мира, для применения полученных знаний, умения на практике. Кроме того, осуществление этой направленности позволяет решать проблему мотивации, целеполагания, так как показ значимости изучаемого материала привлекает внимание учеников к содержанию занятия, помогает понять не только социальную ценность материала, но и ценность «для себя». Однако, перенасыщенность содержания школьных учебников теоретическими заданиями и недостаточное количество часов, мизерное количество часов прикладного характера, показывающие связь с теорией и ее практического применения в жизни, в будущих профессиях, далеко не способствуют их реализации. Поэтому был осуществлен выбор в пользу данного курса, где демонстрируется связь математики с другими науками, с жизнью.

В технологии организации занятий преобладают исследовательские методы, систематизация материала.

<u>Цель:</u> создание целостного представления о теме, углубление ирасширение математических знаний по теме, формирование прикладных математических компетенций.

<u>Задачи курса по выбору:</u>

– развитие самостоятельной деятельности учащихся на основе выполнения проектов и исследовательской работы;

– расширение предметных знаний по теме «Производная» базового и профильного курса математики;

– развитие умения интегрировать знания из различных областей наук;

– включение учащихся школы в процесс самообразования и саморазвития;

– повышение интереса к изучению математики.

Формы и методы работы:

– проблемно-модульное обучение (урок-лекция, урок-семинар, игровые формы и др.);

– рейтинговая система контроля и оценки учебных достижений;

– дифференцированное и интегрированное обучение.

Формы контроля: тестирование(входное, промежуточное, итоговое), взаимоконтроль, самоконтроль, зачет, дифференцированная самостоятельная работа, тестирование, игровые. Итоговой формой контроля является проект по задаче, которую учащиеся должны сами придумать и представить в виде макета.

Планируемые результаты:

Личностные результаты предполагают сформированность:

–способности к самопознанию, саморазвитию и самоопределению;

–личностных ценностно-смысловых ориентиров и установок, системы значимых социальных и межличностных отношений, личностных, регулятивных, познавательных, коммуникативных универсальных учебных действий, способности их использования в учебной, познавательной и социальной практике;

– умений самостоятельного планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построения индивидуального образовательного маршрута;

– умений решения задач общекультурного, личностного и познавательного развития обучающихся;

–ответственного отношения к учению, готовность и способность обучающихся к самореализации и самообразованию на основе развитой мотивации учебной деятельности и личностного смысла изучения математики, заинтересованность в приобретении и расширении математических знаний и способов действий, осознанность построения индивидуальной образовательной траектории;

–целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики.

– логического мышления: критичности (умение распознавать логически некорректные высказывания), креативности (собственная аргументация, опровержения, постановка задач, формулировка проблем, исследовательский проект и др.).

Предметные результаты предполагают:

– актуализировать понятие производной функции и её физического смысла, сформировать начальные умения находить производные элементарных функций на основе определения производной.

– актуализировать умение владения правилами дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, вынесения постоянного множителя за знак производной, вычислять производные различных функций;

– актуализировать умение овладения понятием геометрического смысла производной, записывать уравнение касательной к графику функции в заданной точке;

– актуализировать умение применять достаточное условие возрастания и убывания к нахождению промежутков монотонности функции. Использовать понятия точек экстремума функции, стационарных и критических точек. Находить точки экстремума функции;

– сформированность умения использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах;

– сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

– сформированность навыков участия в различных формах организации учебно-исследовательской и проектной деятельности (творческие конкурсы, научные общества и другие формы)

Метапредметные:

– умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

– умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

– владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

– умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;

– владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

– сформированность к осознанному выбору дальнейшего образования и профессиональной деятельности.

– сформированность способности самостоятельно ставить цели учебной и исследовательской деятельности, планировать, осуществлять, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения;

– сформированность умения самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

– сформированность умения находить необходимую информацию в различных источниках (в справочниках, литературе, Интернете), представлять информацию в различной форме (словесной, табличной, графической, символической), обрабатывать, хранить и передавать информацию в соответствии с познавательными или коммуникативными задачами;

– сформированность владения приемами умственных действий: определения понятий, обобщения, установления аналогий, классификации на основе самостоятельного выбора оснований и критериев, установления родовидовых и причинно-следственных связей, построения умозаключений индуктивного, дедуктивного характера или по аналогии;

– сформированность умения организовывать совместную учебную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции, взаимодействовать в группе, выдвигать гипотезы, находить решение проблемы, разрешать конфликты на основе согласования позиции и учета интересов, аргументировать и отстаивать свое мнение.

Ниже приведен модульный план курса по выбору (табл. 12).

Таблица 12

Модульный план курса по выбору «Производная вокруг нас»

№ п/п	Модуль	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения занятия	Форма контроля
1.	Модуль 1. Входной модуль	Введение. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной.	1	Лекция-беседа	Входное тестирование.
2.		Таблица производных. Понятие дифференциала. Правила дифференцирования. Правила нахождения экстремума.	1	Лекция. Практикум	Решение задач.
3.		Таблица производных. Понятие дифференциала. Правила дифференцирования. Правила нахождения экстремума.	1	Игра	Игра
4.	Модуль 2. Производная в биологии и экономике	Понятие текстовой и прикладной задачи. Решение задач по биологии с использованием производной.	2	Урок-практикум	Решение задач
5.				Практическая групповая работа	Самостоятельная групповая работа
6.		Решение задач по экономике с использованием производной.	2	Урок-практикум	Решение задач
7.				Урок-практикум	Решение задач
8.	Модуль 3. Производная в физике и химии.	Решение задач по физике с использованием производной.	2	Практическая работа	Решение задач
9.				Урок-практикум, работа в мини группах	Решение задач
10.		Решение задач по химии с использованием производной.	1	Урок-практикум	Решение задач
11.	Модуль 4. Производная в реальных жизненных ситуациях	Производная в жизни	3	Практическая работа	Решение задач
12.				Практическая работа	Решение задач
13.				Урок-практикум	Дифференцированная проверочная работа

Окончание табл. 12

14.	Модуль 5. Производная в ЕГЭ	Классификация задач из ЕГЭ	1	Практическая работа	Входное тестирование
15		Решение задач из ЕГЭ	1	Практикум по решению задач	Решение задач из ЕГЭ
16		Решение задач из ЕГЭ	1	Групповая работа.	Решение задач. Итоговый тест.
17.	Модуль 6. Итоговый модуль	Подведение итогов курса Защита проектов	1	Выполнение зачетной работы	Защита проектов

Содержание программы

Занятие 1. Введение. Цели и задачи курса. Предъявление требований к зачетной работе. Понятие производной. Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Задачи на физический и химический смысл производной.

Занятия 2–3. Таблица производных. Понятие дифференциала. Правила дифференцирования. Задачи на нахождение производной. Применение дифференциала к приближенным значениям. Задачи на нахождение приближенного значения.

Занятия 4–5. Правила нахождения экстремума. Понятие текстовой и прикладной задачи. Алгоритм решения текстовой задачи. Решение задач по биологии с использованием производной. Данные занятия будут подготавливаться и проводится совместно с учителем биологии.

Занятия 6–7. Решение задач по экономике с использованием производной. Данные занятия будут подготавливаться и проводится совместно с учителем экономики.

Занятия 8–9. Решение задач по физике с использованием производной. Данные занятия будут готовиться и проводиться совместно с учителем физики.

Занятия 10. Решение задач по химии с использованием производной. Данные занятия будут готовиться и проводиться совместно с учителем химии.

Занятие 11–13. Производная в жизни. На данный модуль предполагается пригласить родителей, которому в своей профессии при расчетах необходимо применять производную, например при строительстве дорог. В случае возможности пригласить инженеров с заводов, фабрик.

Занятие 14. Проведение классификации задач из ЕГЭ. Разбор типичных ошибок.

Занятие 15–16. Решение задач из ЕГЭ.

Занятие17. Подведение итогов курса. Защита проектов учащихся.

§ 3. Методические рекомендации по использованию прикладных задач в процессе изучения математики учащимися профильных классов

В качестве методического обеспечения курса нами разработан комплект ресурсов для работы над проектами учащихся. В который входят: презентация для учителя, презентация для учащихся, визитка для учителя, брошюра для учащихся с целью рекламы курса, темы проектов, пример проекта, критерии оценивания проекта, планирование для работы с проектами. Ознакомится с этими разработками и их подробным описанием учителя могут на сайте, который также прилагается. В случае пропуска учащимся урока предлагается материал для самостоятельного изучения темы. Также предлагаются для данного курса кроссворд, входной тест, итоговый тест.

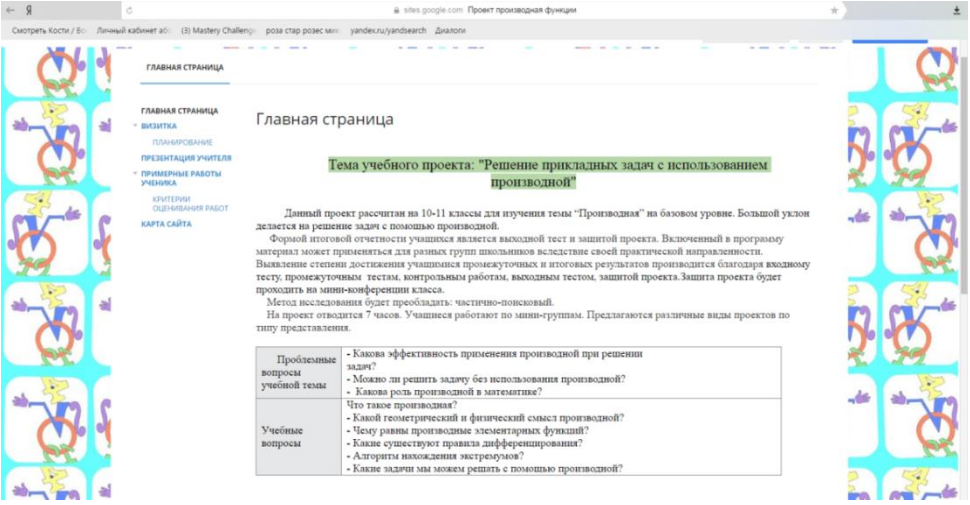

Рис. 22. Сайт, разработанный к курсу по выбору

Кроссворд для учащихся разработан в среде LearningApps.org. Данная среда позволяет заинтересовать учащихся при работе на данном курсе. Эта среда позволяет заполнять кроссворд дома, если учащихся пропустил занятие.

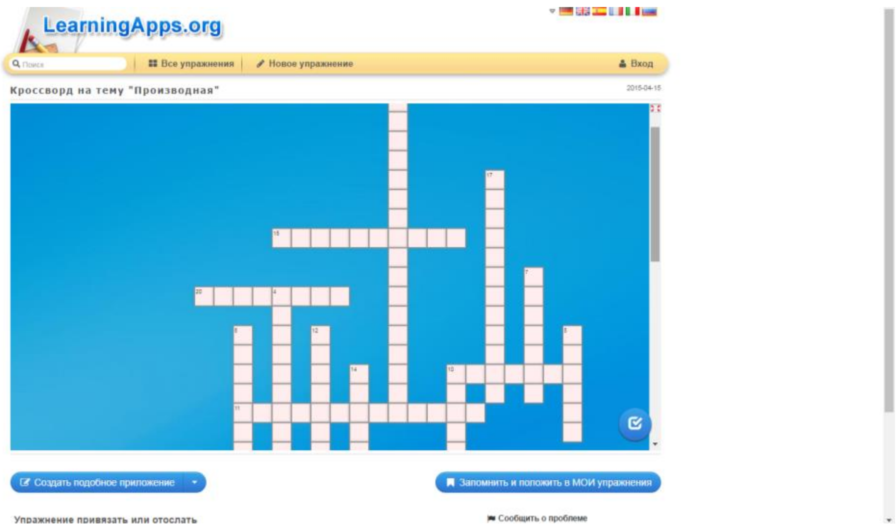

Рис. 23. Кроссворд для учащихся

Входное тестирование позволяет проверить начальный уровень знаний и умений по нахождению производной функции. Кроссворд выполнен в среде google. Учителю приходит на почту уведомление о прохождении кроссворда учащимся. Данная среда позволяет учителю увидеть на диаграмме процентное соотношение выполнения каждого из задания, что позволяет быстрее и качественнее провести анализ выполненных работ.

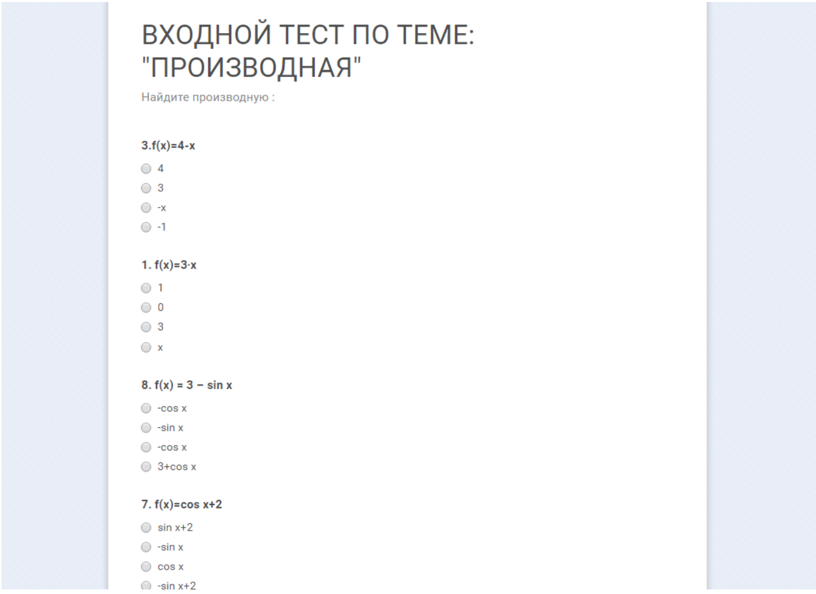

Рис. 24. Входной тест по теме: «Производная»

Итоговое тестирование позволяет проверить уровень знаний и умений после изучения темы. В этот тест включены задания из ЕГЭ. Кроссворд выполнен в среде google.

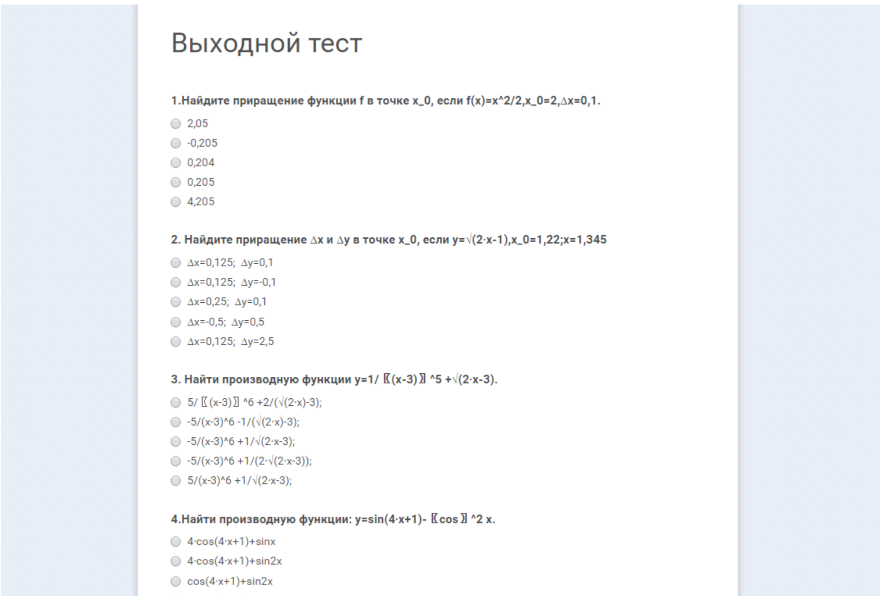

Рис. 25. Итоговый тест по теме: «Производная»

Ниже представлены несколько фрагментов уроков разработанные к данному курсу.

Фрагмент урока к занятию 3

ЗВЕЗДНЫЙ ЧАС ПРОИЗВОДНОЙ

Цели для учащихся:

Повторить определение производной, ее геометрический и физический смысл, правила вычисления производных, техники дифференцирования.

Цели для преподавателя:

1. Основная игровая цель (результат) – выявление лидера по усвоению этого материала.

2. Стимулирование стремления к творчеству, к познанию нового, выходящего за рамки программы.

Предварительная работа:

1.Отбор участников игры из числа тех, кто хорошо усвоил эту тему.

2.Организация группы поддержки, члены которой будут дополнять ответы участников более подробным и интересным материалом.

3. Выбор двух помощников, которые будут контролировать ответы участников и наглядно показывать все их результаты.

Правила игры.

Игра по типу телевизионной игры «Звездный час», за каждый правильный ответ участник получает «звездочку».

Игра проводится в 3 этапа:1,2 – отборочный; 3 – полуфинал; 4 – финал. После 1 этапа остается 5 участников. После 2 – четыре, после 3 – два. Финал.

Ход игры

1 этап

Ведущий:

Раздел математики, в котором изучается производная и ее применение к исследованию функций, называется дифференциальным исчислением. Этот раздел в нашем курсе лежит в основах математического анализа. Значение математического анализа определяется тем, что именно его средствами строятся математические модели, описывающие движения, текущие процессы, непрерывные изменения состояний и производят операции над этими моделями. Мы в нашем курсе рассматриваем и решаем посильные задачи. О некоторых из них будет идти сегодня речь. С помощью дифференциального исчисления был решен целый ряд задач теоретической механики, физики, астрономии.

Говорят, что математикам присуща дерзость ума, они не любят, когда им о чем-нибудь рассказывают, они хотят дойти до всего сами.

Сегодня еще раз предоставляется возможность тем, кто еще не совсем понял материал этой темы, разобраться в ее основных вопросах. А тем, кто хорошо усвоил, -

показать свои знания, будучи участниками игры. Так дерзайте, играйте и выигрывайте!

Вопрос 1.Любое понятие в математике имеет четкое определение.

Какая из записей точно соответствует по определению производной?

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x)}{h}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x)}{h}$

3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x)}{h-x}$

Ответ: 3)

Ведущий. За дополнительную звездочку один из участников расшифровывает эту запись.

Вопрос 2. Производная и дифференциальное исчисление неразрывны. Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности. О каких ученых здесь можно упомянуть?

1) Евклид; 2) Архимед; 3) Ньютон; 4) Коши; 5) Лейбниц; 6) Лагранж;

На доске портреты этих ученых.

Ответ: 1) Евклид, VI книга «Начал»: из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольший размер имеет тот, основание которого равно половине основания треугольника. 2) Архимед – разработал способ проведения касательной, применимой к спирали.

За дополнительную звезду можно сказать, что еще знают про этих ученых?

Вопрос 3. Основное понятие дифференциального исчисления – понятие производной.

Кто из этих ученых ввел термин «производная»?

Ответ: Лагранж

За дополнительную звезду можно добавить – из какой он страны?

Вопрос 4. Дифференциальное исчисление возникло вXVII веке, в связи с необходимостью решать задачи из физики, механики, математики.

Кто явился создателем дифференциального исчисления их этих ученых?

Ответ: Ньютон, Лейбниц

За дополнительную звезду можно сказать, что еще знают про этих ученых?

Вопрос 5. Производная имеет физический смысл.

- В каком из перечисленных случаев можно говорить о физическом смысле производной?

$1.v_{мг} = S'(t)$; $2.v_{ср} = S'(t)$; 3. $S(t) = v'(t)$; $4.S_{мг} = v'(t)$

Ответ: 1

Вопрос 6. Производная также имеет геометрический смысл.

В каком из случаев дана полная информация о геометрическом смысле производной?

1) $k_{кас} = tg\alpha$ 2) $k_{кас} = tg\alpha = f(x_0)$

3) $k_{кас} = f(x_0)$ 4) $tg\alpha = f(x_0)$

Ответ: 2

За дополнительную звезду прочитать словами

Вопрос 7**.** Здесь составлено уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Вам необходимо проверить − все ли здесь выполнено правильно, если есть ошибка, то указать – с какой строчки пошло неверное решение?

1. $y(x_0) = 3^3 - 2\cdot 3 = 9 - 6 = 3$
2. $y'(x_0) = 2x - 2$
3. $y'(x_0) = y(3) = 2\cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$
4. $y = 3 + 4(x+3) = 3 + 4x + 12 = 4x + 15$
5. Ответ: $y = 4x + 15$

Ответ: 4

После 1 этапа выбывает из игры тот, кто дальше находится от линии финиша и у кого меньше звезд.

<u>II этап</u>

Приготовить листочки и ручки.

1. Бросается два раза кубик, на котором написаны буквы: П, Т, А, Г, М,Л.

На выпавшую букву участники и зрители составляют слова, связанные с математикой (существительные в единственном числе, им. падеже). Время 1 мин.

2. Выбирается самое длинное слово, составленное участниками. У зрителей выясняется, есть ли слово с большим количеством букв? Если есть, то пригласить на «сцену», если нет, то вызвать с таким количеством букв, как и у участников. Знакомство с вышедшим. Если выйдет несколько человек, то они угадывают приготовленный приз, задавая вопросы, на которые можно отвечать только «да» или «нет».

3. Среди участников выбирается тот, у которого составлено больше слов. Если количество слов совпадает, то открывать «ящики» с призами идет тот, у кого больше звезд.

Если и звезды совпадают, то тот – у кого длиннее слово. За открытие «ящика» звезду теряют.

4. За самое меньшее количество слов – выходят из игры, если количество слов совпадает, то выходит тот, у кого меньше звезд, короче слова. Участники, которые покидают игру получают памятный приз.

<u>III этап</u>

Ведущий. Если дана функция f(x), то ее производная f'(x) тоже функция.

На уроках мы находили производные функций, заданных формулами.

Знание производных этих функций необходимо при решении более сложных задач.

Проверим, насколько хорошо вы знаете производные этих функций.

Участники получают 4 кубика, на которых написаны формулы функции, и

1-й кубик	2-й кубик	3-й кубик	4-й кубик
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	e^x
$0{,}5x^4$	$-2x^6$	$5x^{-3}$	$-0{,}2^{-5}$
$7\ln x$	$6\ln x$	$\frac{x}{7}$	$8\ln x$
3^4	$3e^x$	x	$0{,}5^2$
$4\sqrt{x}$	$8\sqrt{x}$	$6\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{x}{4}$	$\frac{6}{x}$	-5^3	$10x$

называют их производные. За правильный ответ – звезда.

Итог III этапа – отбор участников в финал.

<u>Финал</u>

Правила нахождения производных составляют технику дифференцирования. Наибольшую сложность представляют задания на нахождение производной сложной функции.

<u>Задание финала.</u> Из набора символов составить как можно больше сложных функций и ответить, чему равна производная сложной функции соперника, учесть, что каждый символ используется один раз, в степень переменную не ставить 2; sin; x; $\sqrt{x}$

После проведения игры победитель награждается дипломом, а участники – сертификатами.

Дополнительные задания для болельщиков:

1. составить как можно больше слов, используя буквы слова «ПРОИЗВОДНАЯ»;
2. написать стихотворение про производную;
3. придумать загадку про производную.

Фрагмент урока к занятию 4

Тема урока: решение прикладных задач по биологии.

Цели:

Личностные: формирование умения обрабатывать информацию; способствовать развитию мыслительных процессов: учащиеся анализируют видео; формирование умения формулировать задачу; развитие памяти, аналитического и логического мышления.

Метапредметные: формирование умения планировать результат своей деятельности и оценивать процесс и результат своей учебной деятельности

Предметные: актуализация умений находить производную функции, актуализация умений находить наибольшие и наименьшие значения на промежутке; формирование умения использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах по биологии.

Планируемые результаты:

Личностные УУД: умение формулировать прикладную задачу на основе увиденного опыта, умение аккуратно и грамотно оформлять записи в тетрадь при решении задач; умение по критериям отличать прикладную задачу от псевдопрактических, умения решать прикладные задачи; умение рационально использовать рабочее время, адекватной самооценки.

Познавательные УУД: развить мировоззрение у учащихся за счет расширения представлений о решении прикладных задач, развить интерес у учащихся к предмету, за счет проведения параллели с жизнью посредством включения прикладных задач.

Регулятивные УУД: развить грамотную и логически выстроенную речь, как устную, так и письменную; развить мыслительную, а также творческую деятельность, посредством решения задач по данной теме.

Коммуникативные УУД: развить чувство ответственности, активности и дисциплинированности; умение выслушивать чужое мнение и адекватно реагировать на допущенные ошибки и замечания.

Комментарии к уроку

Урок проводится в кабинете с мультимедийным оборудованием. В начале урока учащимся показывается видео, например, о вымирании или развитии какой-либо популяции. Учитель биологии задает вопросы по видео, комментирует его. Затем учащимся даются дополнительные сведения к видео, например закон развития какой-либо популяции. И они составляют вместе с учителем математики математическую модель по просмотренному видео и дополнительным сведениям. Задача, составленная учащимися, решается совместно с учителем математики.

Может получиться, например, следующая задача:

В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону P(t)=1000 + $\frac{100t}{100+t^2}$*, где t – время в часах. Найдите максимальный размер этой популяции.*

Решение. $D(P)=R$

$$P'(t)=\frac{100(100+t^2)-100t\cdot 2t}{(100+t^2)^2}=\frac{100(100+t^2-2t^2)}{(100+t^2)^2}=\frac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

$$P'(t)=0;\ 100-t^2=0;\ t=\pm 10;\ P(10)=1000+\frac{1000}{200}=1005.$$

Ответ: через 10 часов популяция достигнет максимального размера 1005 бактерий.

Фрагмент урока к занятию № 6

Тема урока: решение прикладных задач по экономике.

Цели:

Личностные: формирование умения обрабатывать информацию; способствовать развитию мыслительных процессов: учащиеся анализируют данные компаний; формирование умения формулировать задачу; развитие памяти, аналитического и логического мышления.

Метапредметные: формирование умения планировать результат своей деятельности и оценивать процесс и результат своей учебной деятельности

Предметные: актуализация умений находить производную функции, актуализация умений находить наибольшие и наименьшие значения на промежутке; формирование умения использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах по экономике.

Планируемые результаты:

Личностные УУД: умение формулировать прикладную задачу на основе увиденного опыта, умение аккуратно и грамотно оформлять записи в тетрадь при решении задач; умение по критериям отличать прикладную задачу от псевдопрактических, умение решать прикладные задачи; способствовать умение рационально использовать рабочее время, адекватной самооценки.

Познавательные УУД: развить мировоззрение у учащихся за счет расширения представлений о решении прикладных задач, развить интерес у учащихся к предмету, за счет проведения параллели с жизнью посредством включения прикладных задач.

Регулятивные УУД: развить грамотную и логически выстроенную речь, как устную, так и письменную; развить мыслительную, а также творческую деятельность, посредством решения задач по данной теме.

Коммуникативные УУД: при индивидуальной работе, развить чувство ответственности, активности и дисциплинированности; умение выслушивать чужое мнение и адекватно реагировать на допущенные ошибки и замечания.

Комментарии к уроку

В начале урока учитель экономики совместно с учащимися проводит актуализацию знаний. Повторяются следующие понятия: производительность труда, предельные затраты, предельный доход, эластичность спроса q относительно цены p. Учитель экономики обращает внимание, где используется производная. Затем на парту раздается теоретический материал по данным темам (см. Приложение 1) и данные компаний о производительности труда, предельных затраты, предельный доход, эластичность спроса q относительно цены p. На основе этих данных учащиеся придумают задачи, которые решаются с помощью производной. Выбираются несколько задач и решаются совместно с учителем математики.

Учащимися могут быть составлены следующие задачи:

1. *Затраты на производство теннисных мячей объёма x задаются функцией* $C(x) = x^2 + 5x = 4$. *Производитель реализует продукцию по цене 25 ден.ед. Найдите максимальную прибыль П и соответствующий объём продукции x.*

Решение: Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой надо найти. Прибыль равна разности между выручкой *U* и затратами *C*.

$П=U-C$

Находим соответствующую функцию, зависящую от *x*. Реализовав продукцию объёма *x* по цене 25 ден.ед., предприниматель имеет выручку, $U = 25x$. При этом затраты составят $C(x)$. Значит,

$$П = U - C = 25x - (x^2 + 5x + 4) = -x^2 + 20x - 4$$

Определяем (по смыслу задачи) область определения функции. По смыслу задачи объём продукции *x* может принимать любое положительное значение, т.е.

$$x \in (0, +\infty)$$

Формулируем математическую задачу. Найти наибольшее значение функции: $П(x) = -x^2 + 20x - 4$ при $x \in (0, +\infty)$

Функцию аргумента *x* исследуем на экстремум на найденном промежутке $П'(x) = -2x + 20$; $П'(x) = 0$, $-2x + 20 = 0$, следовательно, стационарная точка функции $x = 10$.

Производная меняет свой знак при переходе через эту точку с «+» на «–», значит $x = 10$ – точка максимума.

$$П_{max} = П(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 - 4 = 96$$

Максимальная прибыль, равная 96 ден.ед., достигается при объёме производства 10 у.е.

2. *Объём посуды, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией* $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, *где* t *– врем ч; причём* $1 \le t \le 8$. *Необходимо вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.*

Решение:

Производительность труда $z(t)$выражается формулой $z(t) = u'(t)$. Тогда

$$z(t) = u'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$$

Производительность труда через 1 ч после начала работы

$$z(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5 \text{(у.е.)}$$

Производительность труда за 1 ч до окончания работы

$$z(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5 \text{(у.е.)}$$

Скорость изменения производительности труда $z'(t) = -5t + 15$

Значит, $z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$, $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$

Фрагмент урока к занятию 8

Тема урока: решение прикладных задач по физике.

Цели:

Личностные: формирование умения работать в группе, обрабатывать информацию; способствовать развитию мыслительных процессов: сравнение способа решения физической задачи математическим путем; формирование умения формулировать задачу по опыту; развитие памяти, аналитического и логического мышления.

Метапредметные: формирование умения планировать результат своей деятельности и оценивать процесс и результат своей учебной деятельности

Предметные: актуализация умений находить производную функции, актуализация умений находить наибольшие и наименьшие значения на промежутке; формирование умения использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах по физике.

Планируемые результаты:

Личностные УУД: умение формулировать прикладную задачу на основе увиденного опыта, умение аккуратно и грамотно оформлять записи в тетрадь при решении задач; умение по критериям отличать прикладную задачу от псевдопрактических, умение решать прикладные задачи; умение рационально использовать рабочее время, адекватной самооценки.

Познавательные УУД: развить мировоззрения у учащихся за счет расширения представлений о решении прикладных задач, развить интерес у учащихся к предмету, за счет проведения параллели с жизнью посредством включения прикладных задач.

Регулятивные УУД: развить грамотную и логически выстроенную речь, как устную, так и письменную; развить мыслительную, а также творческую деятельность, посредством решения задач по данной теме.

Коммуникативные УУД: при индивидуальной работе, развить чувство ответственности, активности и дисциплинированности; умение выслушивать чужое мнение и адекватно реагировать на допущенные ошибки и замечания.

Комментарии к уроку

Урок проводится в кабинете физики. В начале урока проводится опыт учителем физики, на основе которого составляется оптимизационная задача с помощью наводящих вопросов совместно с учащимися, затем с учителем математики дети решают задачу. Опыт, задача и наводящие вопросы обсуждаются и формулируются учителем математики и физики совместно, и зависят от оборудования кабинета физики и материла пройденного учащимися. В зависимости от сложности опыта и времени, потраченного на него, могут быть сформулированы более 1 задачи совместно с учащимися на один опыт или одна задача формулируется вместе с учащимися, а остальные предлагаются учителем. Ниже представлен пример опыта и задачи, которая может быть составлена на основе опыта.

Ход урока

Название лабораторной работы: исследование последовательного и параллельного соединениям проводников.

На каждой парте комплект лабораторного оборудования

Задание:

1) собрать цепь последовательного соединения двух электрических ламп и измерить силу тока и напряжение участка цепи с потребителями;

2) рассчитать по данным эксперимента общее сопротивление участка цепи;

3) собрать цепь параллельного соединения двух электрических ламп и измерить силу тока и напряжение участка цепи с потребителями;

4) рассчитать по данным эксперимента общее сопротивление участка цепи;

5) записать, полученные данные.

Учитель физики задает вопросы по проделанному опыту, спрашивает определения и формулы, которые использованы в опыте.

После проведения опыта может быть составлена следующая задача, которая решается с учителем математики.

Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R.

Решение. Пусть сопротивление одного x, другого – y. Сопротивление всей цепи при параллельном соединении r, тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}$$

Отсюда $x + y=R$, $y=R-x$.

Имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{R-x}=\frac{1}{r}; \quad \frac{R-x+x}{x(R-x)}=\frac{1}{r}; \quad r=\frac{x(R-x)}{R}$$

Сопротивление r является функцией от x, x принадлежит [0;R]

$$F(x)=\frac{x(R-x)}{R}=\frac{1}{R}(xR-x^2)$$

(Далее решаем самостоятельно с последующей проверкой)

$$D(f)=R; \quad f'(x)=\frac{1}{R}(R-2x); \quad f'(x)=0,\ x=\frac{R}{2}; \quad f(0)=0,\ f(R)=0,\ f\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{R}{4}$$

при $x=\frac{R}{2}$ сопротивление всей цепи при параллельном соединении будет наибольшим.

Ответ: сопротивления должны быть одинаковыми.

Фрагмент урока к занятию 10

Тема урока: решение прикладных задач по химии.

Цели:

Личностные: формирование умения обрабатывать информацию; способствовать развитию мыслительных процессов: учащиеся анализируют опыт; формирование умения формулировать задачу; развитие памяти, аналитического и логического мышления.

Метапредметные: формирование умения планировать результат своей деятельности и оценивать процесс и результат своей учебной деятельности

Предметные: актуализация умений находить производную функции, актуализация умений находить наибольшие и наименьшие значения на промежутке; формирование умения использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах по химии.

Планируемые результаты:

Личностные УУД: умение формулировать прикладную задачу на основе увиденного опыта, умение аккуратно и грамотно оформлять записи в тетрадь при решении задач; умение по критериям отличать прикладную задачу от псевдопрактических, умение решать прикладные задачи; умение рационально использовать рабочее время, адекватной самооценки.

Познавательные УУД: развить мировоззрения у учащихся за счет расширения представлений о решении прикладных задач, развить интереса у учащихся к предмету, за счет проведения параллели с жизнью посредством включения прикладных задач.

Регулятивные УУД: развить грамотную и логически выстроенную речь, как устную, так и письменную; развить мыслительную, а также творческую деятельность, посредством решения задач по данной теме.

Коммуникативные УУД: при индивидуальной работе, развить чувство ответственности, активности и дисциплинированности; умение выслушивать чужое мнение и адекватно реагировать на допущенные ошибки и замечания.

Комментарии к уроку

Урок проводится в кабинете химии. В начале урока проводится опыт учителем химии, на основе которого составляется оптимизационная задача с помощью наводящих вопросов совместно с учащимися, затем с учителем математики дети решают задачу. Опыт, задача и наводящие вопросы обсуждаются и формулируются учителем математики и химии совместно, и зависят от оборудования кабинета химии и материла пройденного учащимися. В зависимости от сложности опыта и времени, потраченного на него, могут быть сформулированы более 1 задачи совместно с учащимися на один опыт или одна задача формулируется вместе с учащимися, а остальные предлагаются учителем. Ниже представлен пример опыта и задачи, которая может быть составлена на основе опыта.

Ниже представлен пример опыта и составленной задачи.

Учитель химии показывает опыт на выделение кислорода.

Требуется найти концентрацию кислорода в газовой смеси, содержащей азот, при которой реакция окисления азота будет идти с максимальной скоростью.

Решение. Как известно из курса химии, скорость реакции выражается формулой

$$v = kx(100 - x)^2, \quad 0 < x < 100,$$

где x — концентрация кислорода (в процентах от объема), k — некоторая константа. Найдем производную:

$$v' = k(100 - x)(100 - 3x).$$

Видим, что имеется единственная критическая точка $x_0 = \frac{100}{3}$ на интервале

(0; 100). При переходе через x_0 производная меняет знак с плюса на минус. Согласно правилу 2, функция v достигает в точке x_0 наибольшего на рассматриваемом интервале значения. Искомая концентрация 33,3%.

Опытно-экспериментальная часть исследования проводилась на базе МАОУ гимназия № 13 города Красноярска в 10 «З» классе.

Для проверки своей гипотезы мы спланировали эксперимент.

В классе 17 учащихся, из них 16 человек участвовало в эксперименте. Цель эксперимента заключалась в том, чтобы выяснить, как будет способствовать повышению качества математической подготовки учащихся, формированию метапреметных и личностных образовательных результатов решение задач прикладного характера на применение производной в рамках курса по выбору.

Формирование метапреметных и личностных образовательных результатов оценивалось в ходе выполнения учащимися проектов. Эксперты (учителя) оценивали результаты проектов по критериям, в результате получилась экспертная оценка сформированности личностных и метапредметных результатов обучения. В ходе оценивания работ эксперты отметили высоких уровень следующих личностных и метапредметных результатов:

− умений самостоятельного планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построения индивидуального образовательного маршрута;

−ответственного отношения к учению, готовность и способность обучающихся к самореализации и самообразованию на основе развитой мотивации учебной деятельности и личностного смысла изучения математики, заинтересованность в приобретении и расширении математических знаний и способов действий, осознанность построения индивидуальной образовательной траектории;

− логического мышления: критичности (умение распознавать логически некорректные высказывания), креативности (собственная аргументация, опровержения, постановка задач, формулировка проблем, исследовательский проект и др.).

− умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

− умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

− владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

− готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

− умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;

− умения находить необходимую информацию в различных источниках (в справочниках, литературе, Интернете), представлять информацию в различной форме (словесной, табличной, графической, символической), обрабатывать, хранить и передавать информацию в соответствии с познавательными или коммуникативными задачами;

− умения организовывать совместную учебную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции, взаимодействовать в группе, выдвигать гипотезы, находить решение проблемы, разрешать конфликты на основе согласования позиции и учета интересов, аргументировать и отстаивать свое мнение.

У большинства учащихся был низкий уровень следующих компетенций:

− владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

− способности самостоятельно ставить цели учебной и исследовательской деятельности, планировать, осуществлять, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения;

− умения самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

Повышение качества математической подготовки учащихся измерялось с помощью дифференцированной самостоятельной работы (см. Приложение 2). Данную дифференцированную самостоятельную работу писали 17 человек золотого класса. 3

человека выбрали работу 1 уровня (на оценку 3), 6 человек выбрали работу 2 уровня (на оценку 4), 8 человек выбрали работу 3 уровня (на оценку 5). Результаты работ представлены на рис. 26.

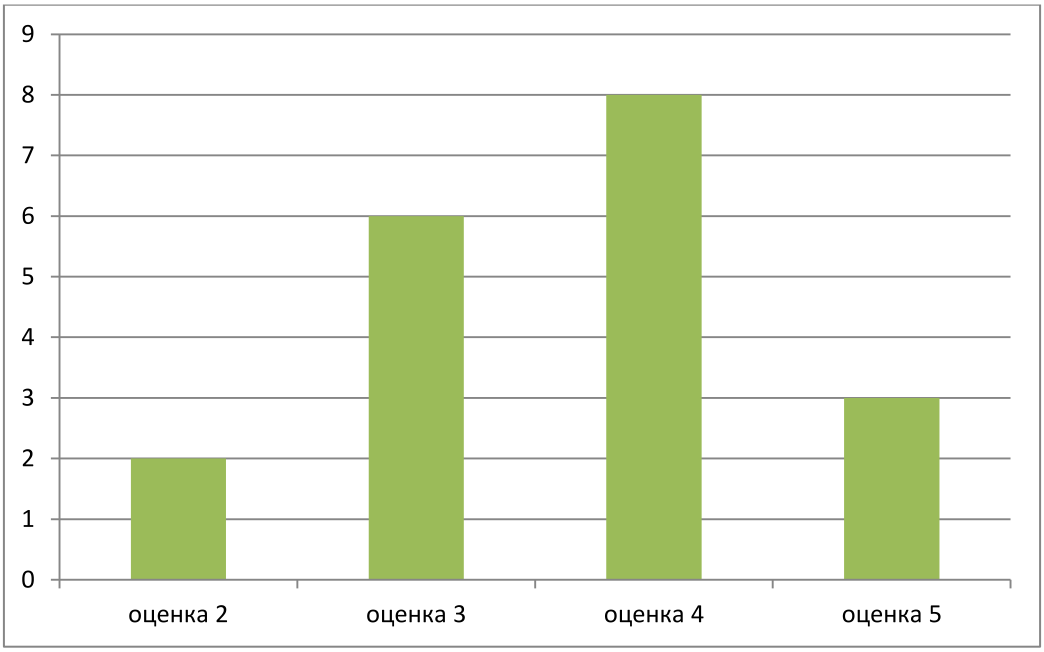

Рис. 26. Результаты дифференцированной самостоятельной работы

В ходе проведенного анализа самостоятельной работы были выделены следующие ошибки:

− ошибка в выделение оптимизированной величины;

− ошибка в составление зависимой функции;

− ошибка в нахождении производной функции;

− арифметические ошибки.

После проверки самостоятельной работы для каждого учащегося, с отметкой ниже 5, была составлена карточка, с целью устранить проблемы в данном материале.

Для того чтобы выяснить, повысит ли интерес к математике решение прикладных задач, был проведен эксперимент. Данный эксперимент проводился в три этапа:

1) Определение первоначального отношения к предмету.

2) Проведение 5 занятий по решению прикладных задач.

3) Определение отношения к предмету после проведения экспериментальной работы.

На первом этапе в целях определения первоначального отношения к предмету был проведен анонимный опрос.

1. Что изучает математика?
2. В каких дисциплинах используется математика?
3. Нравится ли вам математика?
4. Нужен ли вам в дальнейшей жизни, по вашему мнению, предмет математи-

ка?

5. Где пригодится математика?

Нас интересовали ответы на 2–5 вопросы, и мы провели анализ опроса респондентов. На второй вопрос 67 % учащихся ответили: «физика», 29 % ответили – «физика, экономика» и 4% респондентов ответили: «физика, экономика, химия».

На третий вопрос 31% учащихся ответили – «да» и 69% ответили, что им предмет математика не нравится.

На 4 вопрос получились следующие результаты: 79% ответили – да нужен, 21% – нет.

На 5 вопрос 63 % ответили – в институте, 3% - на ЕГЭ, 4% - в жизни; 6% - в выбранной профессии, 24% – нигде.

Анализируя, полученные данные мы сделали вывод, что большинство учащихся не видят прикладного значения математики и считают, что этот предмет пригодится им только в институте.

При проведении 2 этапа нашего эксперимента, мы подобрали задачи из химии, физики, экономике и биологии, а также задачи из жизни. После проведения 1 занятия мы попросили учащихся найти по 3 задачи использования математики в жизни, в разных профессиях. И предложили подготовить доклад на дополнительную оценку: использование математики в профессиях.

Затем мы провели повторный опрос. И получили следующие результаты:

2 вопрос 100 % учащихся ответили: «физика, экономика, химия, биология».

3 вопрос 42% учащихся ответили – «да» и 58% –«нет».

4 вопрос получились следующие результаты: 79% ответили – «да, нужен», 21% –«нет».

На 5 вопрос 55 % ответили – «в институте», 3% –«на ЕГЭ», 13% –«в жизни»; 17% –«в выбранной профессии», 11 % –«нигде не понадобится».

Из полученных результатов можно сделать вывод, что при применении практико-ориентированных задач на уроках математики у учащихся повышается интерес к предмету, повышается качество математической подготовки учащихся, формируются метапреметные и личностные образовательные результаты.

Выводы по главе 2

Нами был сформирован комплекс прикладных задач по теме производная. Разработано содержание курса по выбору и комплекс методических разработок (фрагменты уроков, кроссворд, тесты, материал для работы над проектами) для учителя.

Экспериментальная часть исследования показала, что у учащихся повысился уровень математической подготовки, применение интегрированных уроков способствует формированию не только предметных, но также личностных и метапредметных образовательных результатов.

Заключение

Проанализировав современное состояние школьного математического образования, мы пришли к выводу, что содержание учебных пособий не вполне соответствует требованиям ФГОС. В стандартах обозначено требование к математической подготовке выпускников: уметь решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения. Однако в учебных пособиях задачи данного типа отсутствуют или же они однотипны и не интересны. Мною были рассмотрены прикладные задачи с использованием производной для профильного уровня изучения математики.

Использование прикладных задач в процессе обучения математике позволит решить ряд важных дидактических задач. Прежде всего, усилить учебную мотивацию учащихся за счет демонстрации в процессе выполнения практико-ориентированных и интегрированных задач универсальности математических моделей и математического языка, связи математики с реальной жизнью и другими отраслями знания. Также разнообразить учебную деятельность учащихся, формировать у них универсальные учебные действия на конкретном предметном материале. И, наконец, развивать у учащихся положительное отношение к предмету.

Мы разработали программу и содержание курса по выбору для учащихся профильных классов. Содержание курса разбито по модулям, которые могут комбинироваться по желанию учителя. В рамках курса предусмотрены интегрированные уроки. В качестве информационный поддержки курса разработан сайт, входной тест, итоговый тест, кроссворд. Также нами подобран комплекс прикладных задач с использованием производной. В задачах используется профессиональная лексика, даны необходимые определения и справочный материал. Данные задачи могут быть использованы на уроках математического анализа, при изучении темы: «Решение прикладных задач с использованием производной».

При использовании прикладных задач на занятиях был сделан вывод о том, что уровень математической подготовки школьников возрос, также увеличился уровень мотивации учащихся.

Проведенное нами исследование и полученные результаты позволяют утверждать, что поставленная цель и задачи выпускной квалификационной работы были достигнуты. Гипотеза была подтверждена частично; для более полного подтверждения необходимо продолжить дальнейшую экспериментальную работу. Использовать прикладные задачи на уроках математики необходимо и целесообразно.

Перспективы дальнейшего исследования данной проблемы видится в разработке учебно-методического обеспечения курса по выбору, в том числе на основе использования цифровых образовательных ресурсов и компьютерных сред.

Библиографический список

1. XIX Международная конференция по народному образованию 1956 Рекомендация «Обучение математике в средней школе» [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.ru/conc/olddocs/1968-unesco.htm(дата обращения 08.06.2016).
2. Анализ результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) в 2014-2015 учебном году [Электронный ресурс]. URL: http://surwiki.admsurgut.ru/wiki/images/4/49/Эгэ_математика_профильный.pdf(дата обращения 07.06.2016).
3. Андрющенко Н. Н. ФГОС-II — основа модернизации российского образования. [Электронный ресурс] URL: http://knmc.kubannet.ru/node/976(дата обращения: 26.05.2016).
4. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. [Электронный ресурс] URL: http://optlas.ifmo.ru/docs/Математика/Арнольд%20В.И/Арнольд%20В.И.%20%20Жесткие%20и%20мягкие%20математические%20модели.pdf (дата обращения: 12.05.2016).
5. Багачук А.В., Шашкина М.Б. Основы организации математической исследовательской деятельности учащихся: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014.
6. Багачук А.В., Шашкина М.Б. Профильное исследование. Математика в жизни: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2015.
7. Багачук А.В., Шашкина М.Б. Введение в научную деятельность студентов: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2013 [Электронный ресурс]. URL: http://elib.kspu.ru/document/8055 (дата обращения 01.10.2015).
8. Балыхин Г.А., Бердашкевич, А.П. Володина Н.Б., Исаев С.Н., Комаров С.А. Самарин К.А., Сафаралиева С.Г. О Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования // Аналитический вестник. 2010 № 14 [Электронный ресурс] URL: http://iam.duma.gov.ru/node/8/4564/15674 (дата обращения: 19.05.2016).
9. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. М., 1999.
10. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе.1982. №2. С. 40–43.
11. Болтянский В.Г., Пашкова Л.М. Проблема политехнизации курса математики. // Математика в школе, 1985, №5. С. 6–8.
12. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М.: Просвещение, 1992. – 335 с.: ил.

13. Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. М.: Просвещение, 2010. с. 422.
14. Виленкин Н.Я. и др. Математический анализ. Введение в анализ. М.: Просвещение, 2009. с. 348.
15. Володарский В.Е. Физические задачи на уроках математики // Математика в школе. 1976. № 4. С. 18–26.
16. Гельфанд М.Б., Берман В.П. Упражнения межпредметного характера к теме «Производная» // Математика в школе. 1979. №2. С. 24–31.
17. Давыдов Н.А. и др. Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение, 2009.
18. Дорофеев Г.В. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. 1980. №5. С. 28–30.
19. Дорофеев Г.В., Кузнецов Л.В., Седова Е.А. Алгебра и начала анализа. 10 класс. М.: Дрофа, 2012. 267 с.
20. Иванова Е.О., Осмоловская И.М., Шалыгина И.В. Содержание образования: культурологический подход//Педагогика.2005.№1.С. 13–19.
21. Киселева А.П. Алгебра. 8-10 класс. В 2 ч. Ч.2. учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Физматлит, 2005. 248 с.: ил.
22. Колягин М.Ю., Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математике // Математика в школе. 1985. №6. С. 27–32.
23. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2010. 336 с.
24. Колягин Ю.М. Профильное обучение: проблемы и перспективы// Газета «Математика». 2005. № 8. С. 17–21.
25. Концепция профильного обучения 2002 г [Электронный ресурс] URL: http://www.mccme.ru/edu/oficios/standarty/profil.doc (дата обращения: 19.05.2016).
26. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: минобрнауки.рф/документы/3894 (дата обращения 20.05.2016).
27. Костина О.В. Из опыта организации профильного обучения в России и за рубежом.[Электронный ресурс] URL:http://io2.nios.ru/old/releases.php?num=06&div=03&art=01 (дата обращения: 22.01.2016).
28. Кузнецов А.А., Пинский А.А., Рыжаков М.В., Филатова Л.О. Профильное обучение. Ответы на вопросы (для общеобразовательных учреждений). М.: Русский журнал, 2004.

29. Математика ЕГЭ (открытый банк заданий).[Электронный ресурс]. URL: http://down.ctege.info/ege/2014/book/matem/matem2014koryanovB8.pdf (дата обращения: 13.05.2014).
30. Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся (2012 г.) [Электронный ресурс]. URL: http://www.centeroko.ru/pisa12/pisa12_pub.htm(дата обращения 07.06.2016).
31. Монахов В.М., Фирстов В.Е. Условие и факторы формирования концепции модернизации российского образования // Педагогика.2014. №1. С. 24–36.
32. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2007. 287 с.: ил.
33. Мышкин А.Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа // Математика в школе. 1990. №6. С. 7–11.
34. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение,2009.464 с.: ил.
35. Основные понятия педагогики высшей школы, глоссарий, 2004 г. [Электронный ресурс]. URL: http://didacts.ru/dictionary/1004 (дата обращения 1.05.2016).
36. Отчет о результатах методического анализа результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) в Красноярском крае в 2015 году [Электронный ресурс]. URL: http://cok.cross-edu.ru/wp-content/uploads/2015/08/Отчёт-ЕГЭ_математика_профильная_2015.pdf (дата обращения 07.06.2016).
37. Перельман Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе. 2008ю № 3.
38. Петров В.А. Производная в посылке // Математика в школе. 2010. № 4. С. 36–38.
39. Поллак Х.О. Как мы можем научить приложениям математики? // Математика в школе. 1971. № 2.
40. Примеры решения задач с производными. [Электронный ресурс]. URL: http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/derivative.php (дата обращения: 13.05.2014).
41. Профильное обучение: вопросы и ответы // Математика. 2006. №14.С.2–9.
42. Распоряжение Правительства РФ №2506-р от 24 декабря 2013 г. «Концепция развития математического образования в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. URL: минобрнауки.pdf (дата обращение: 24.03.2016).
43. Рутман Л.М. Проверим практикой // Математика в школе. 1988. № 5.С. 14.
44. Рушель Р.О попытках введения профильной дифференциации в русской школе в XIX–начале XX века // Математика. 2006. №14.С.16–18.
45. Рыб К.А., Бодряков Н.О. Физические задачи на экстремум функции // Математика

в школе. 1993. № 3. С. 15–20.

46. Семушкин Т.З. Чукотка [Электронный ресурс] URL: http://detectivebooks.ru/book/6531136/?page=25 (дата обращения 11.06.2016).
47. Смирнова И.М. Исторические аспекты дифференциации обучения // Математика. 2000. № 44.С.1–8.
48. Соболев С.Л. Судить по конечному результату // Математика в школе. 1984. №1. С. 15–19.
49. Соболев С.Л. Судить по конечному результату // Математика в школе. 1984. № 1. С. 15–19.
50. Терешин Н.А. Сборник задач по математике для средних сельских профтехучилищ. М., 1974.
51. Тетерина Ж.С. Интегрированный элективный курс «Производная вокруг нас» в профильном обучении математике // Современные технологии и инновации в педагогической системе образования. 2016.С. 35–41.
52. Тетерина Ж.С. Организация модульного обучения математике в профильной школе // Материалы конференции «Молодежь и наука XXI века». 2015. С. 147–152.
53. Тетерина Ж.С. Проблемы реализации профильного обучения математике// // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. № 9. Часть 1. Материалы международной научно-практической конференции «Молодежный форум: технические и математические науки», г. Воронеж, 9–12 ноября 2015 г. С. 356–360.
54. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 2010.
55. Третьяков П.И., Сенновский И.Б. Технология модульного обучения в школе: Практико-ориентированная монография. М.: Новая школа, 2001. 352с.
56. Тюменева Ю.А., Александрова Е.И., Шашкина М.Б. Почему для российских школьников некоторые задания PISA оказываются труднее, чем для их зарубежных сверстников: экспериментальное исследование // Психология обучения. 2015. № 7. С. 5–23.
57. Федеральные государственные стандарты основного общего образования (начального, основного, среднего) [Электронный ресурс]. минобрнауки.рф/документы/543 (дата обращения 20.05.2016).
58. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]. URL: http://ivo.garant.ru/#/document/57501923:0(дата обращения 07.06.2016).

59. Федеральный закон об образовании в Российской Федерации от 29.12.2012 № 273-ФЗ [Электронный ресурс]. URL: минобрнауки.рф/документы/2974 (дата обращения 20.05.2016).
60. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. Учебн. пос. для учителей и студентов педвузов и колледжей. М.: Школьная Пресса, 2002. 208 с.
61. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача // М., 1982. Ч.1.
62. Шашкина М.Б., Багачук А.В. Педагогическое исследование: учебное пособие. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014 [Электронный ресурс]. URL: http://elib.kspu.ru/document/12257(дата обращения 20.05.2016).
63. Шашкина М.Б., Табинова О.А. О качестве математической подготовки в школе и вузе // Математика в школе. 2014. №4. Электронное приложение. №1.
64. Элективные курсы. Некоторые вопросы [Электронный ресурс]. URL: http://noz.myl.ru/metodika/2013/lisakovskai.doc (дата обращения 23.03.2016).
65. Юцявичене П. Теория и практика модульного обучения. Каунас: Швиеса, 1989, 272с.
66. Якименко, М.Ш., Шашкина, М.Б. О профильном и базовом уровнях изучения математики в школе // Математика в школе. 2014. № 8. Электронное приложение № 2.
67. Яковлев Б.П., Гейнц Л.В. Сущность и задачи профильного обучения и предпрофильной подготовки в современной системе образования// Современные наукоемкие технологии. 2008.№6. С. 86–88.
68. OECD (2013), PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

Приложения

Приложение 1

Теоретический материал к занятиям № 6,7

Производительность труда.

Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая объём произведённой продукции *u* за время *t*. Тогда за время $\Delta t = t_1 - t_0$ величина произведённой продукции составит

$$\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

Средняя производительность труда – это отношение количества произведённой продукции к затраченному времени, т.е.

$$z_{cp} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Производительностью труда в момент времени t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp}. при $\Delta t \to 0$:

$$z(t) = u'(t)$$

Предельные затраты.

Пусть *q* – объём произведённой продукции, *C* – её себестоимость (или издержки), зависящая от *q*, т.е. $C = f(q)$.

Средние затраты на единицу продукции (средняя себестоимость) определяются по формуле

$$C_{cp} = \frac{C}{q} = \frac{f(q)}{q}$$

Найдём ΔC – приращение затрат на производство, связанное с увеличением объёма произведённой продукции на величину Δq :

$$\Delta C = \Delta f = f(q + \Delta q) - f(q)$$

Отношение $\Delta C_{cp} = \dfrac{\Delta C}{\Delta q}$ есть *среднее приращение затрат на производство,* т.е. приращение затрат на единицу произведённой продукции. Тогда, если существует

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = C'(q)$$

То $C'(q)$ называют *предельными затратами на производство* (себестоимостью). В экономических исследованиях предельные издержки называют *маржинальными* и обозначают через *MC*, т.е.

$$MC = C'(q)$$

Предельный доход.

Пусть функция $R(q)$ отражает зависимость дохода *R* от объёма продукции *q*. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут к формуле

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q)$$

Величина $R'(q)$ определяет *предельный доход*, который называют *маржинальным* и обозначают через *MC*, т.е.

$$MR = R'(q)$$

Эластичностью функции (с точки зрения математики) $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при $\Delta x \to 0$.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'_x$$

$$\boxed{E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x}$$

Экономический смысл эластичности функции в том, что она выражает приближённый процентный прирост значения функции при приращении аргумента на 1%.

Свойства эластичности:

1. Эластичность – безразмерная величина, т.е. её значение не зависит от единиц измерения величин x и y.

2. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций.

$$Ex(u \cdot v) = Ex(u) + Ex(v).$$

3. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций.

$$Ex\left(\frac{u}{v}\right) = Ex(u) - Ex(v).$$

Эластичность спроса *q* относительно цены *p*.

Пусть спрос зависит от цены по закону $q = q(p)$. Функция $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'$ показывает, как изменится спрос на данный товар, если цена изменится на 1%. Так как обычно $q' < 0$, т.е. с увеличением цены спрос падает, то $E_p(q)$ берут со знаком «–», т.е. $E_p(q) = -\frac{p}{q} \cdot q'$.

Если $|E_x(y)| > 1,$ то говорят, что спрос эластичен; если $|E_x(y)| < 1,$ то не эластичен; если же $|E_x(y)| = 1,$ то спрос нейтрален.

Перекрестная эластичность спроса по цене характеризует относительное изменение величины спроса на один товар или услуги при изменении цены на другие (замещающие или дополняющие) на один процент.

$$Ep_j(q_i) = \frac{dq_i}{q_i} : \frac{dp_i}{p_j} = \frac{p_j dq_i}{q_i dp_j}$$

Положительный знак в (10) свидетельствует о замещаемости, а отрицательный – о дополняемости.

Эластичность спроса *q* относительно дохода *r*.

Пусть $q = q(r)$ – закон зависимости спроса от дохода. Тогда $E_r(q) = \frac{r}{q} q'$ есть эластичность спроса относительно дохода, она показывает, как изменится спрос на данный товар, если доход изменится на 1%.

Аналогично можно определить **эластичность предложения *s* относительно цены *p* или дохода *r*:**

$$E_p(s) = \frac{p}{s} s' \quad \text{и} \quad E_r(s) = \frac{r}{s} s'$$

Ценовая эластичность ресурсов.

$$E_p(t) = \frac{p}{t} \cdot t'_p$$

Характеризует относительное изменение величины спроса на какой-либо ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (зарплаты) на один процент.

Эластичность замещения одного ресурса другим

$$E_{R_j}(R_i) = \frac{dR_i}{R_i} : \frac{dR_j}{R_j} = \frac{R_j dR_i}{R_i dR_j}$$

Характеризует необходимое изменение величины одного ресурса (капитала) при изменении количества другого ресурса (труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не сократился.

Приложение 2

Дифференцированная самостоятельная работа

1 уровень

1. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которой должна быть сделана из стекла, а остальные из обычного материала. Высота комнаты должна равняться 4 м, а площадь 80 м^2. Известно, что 1 м^2 стеклянной стены стоит 75 рублей, а обычного материала 50 рублей. Какими должны быть размеры комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей?

2. Каким может быть наибольший объем бандероли в форме рулона?

Справка. В правилах почтовой связи указано, что у бандероли в форме рулона «сумма ее длины и двойного диаметра» не должна быть больше 104 см, а любое измерение должно находиться в пределах от 10 до 90 см.

2 уровень

1. *Какой наибольший объем может иметь международная посылка в форме рулона?*

Справка. В правилах почтовой связи сказано, что любое измерение международной посылки не должно быть больше 105 и меньше 11 см, а «сумма длины и периметра наибольшего поперечного сечения не более 200 см», предельная масса 20 кг.

2. *Водопойные желоба для коров в полевых условиях иногда делают из трех одинаковых досок (рис. № 6). Под каким углом a следует сбивать доски, чтобы получить желоб наибольшей вместимости?*

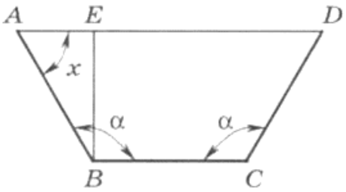

Рис. 6. Водопойные желоба

3 уровень

1. *Можно ли послать международной посылкой в форме коробки 5 кг пенопласта?*

Справка. В правилах почтовой связи находим, что сумма длины, ширины и толщины такой бандероли не должна выходить за 90 см, каждое измерение не должно превосходить 60 см, а длина и ширина не могут быть меньше 148 и 105 миллиметров соответственно.

2. *Сечение канала — равнобедренная трапеция (рис. № 13) с углом откоса a таким, что ctg a = m. При каком отношении ширины дна к глубине канал имеет гидравлически наивыгоднейший профиль?*

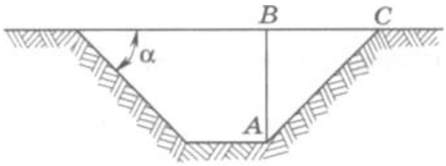

Рис. 13. Сечение канала