

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.В.П.АСТАФЬЕВА
(КГПУ им.В.П.Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)
Выпускающая кафедра Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Карелина Елена Александровна
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема ФОРМИРОВАНИЕ У ШКОЛЬНИКОВ ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
КОМПЕТЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ «КОМБИНАТОРИКА» В ПРОЦЕССЕ
ПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

Направление 050100.62 Педагогическое образование, профили «Математика» и
подготовки «Информатика»
(код направления подготовки)

Профиль «Математика» и «Информатика»
(наименование профиля для бакалавриата)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав.кафедрой Майер В.Р.
(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

(дата, подпись)

Руководитель, к.п.н, доцент, М.А. Кейв

(ученая степень, ученое звание, фамилия, инициалы)

Дата защиты _____
Обучающийся Карелина Е.А.

(фамилия, инициалы)

Оценка _____
(дата, подпись)
(прописью)

Красноярск
2016

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1.Теоретические основания для формирования у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика».....	6
1.1.Элементы комбинаторики в школьном курсе математики 10-11 кл....	6
1.2.Основы математической компетентности учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика»: структурные элементы, показатели и уровни сформированности	14
1.3.Дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика».....	21
Глава 2. Формирование основ математической компетентности у учащихся 10-11 классов в области «Комбинаторика».....	33
2.1.Программа курса по выбору «Комбинаторить в жизни часто приходится».....	33
2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты.....	40
Заключение	45
Библиографический список	46
Приложение 1	50
Приложение 2	75

Введение

О необходимости изучения в школе элементов комбинаторики говорили многие педагоги еще очень давно. Приведем цитату более чем столетней давности: «Приходилось слышать, что теория сочетаний и бином Ньютона предлагаются иногда как отделы, которые можно было бы сократить. Соглашаясь на другие сокращения, выскажусь решительно против сокращения теории сочетаний. Теория эта по особенному значению своему принадлежит к таким отделам, преподавание которых в гимназии следует непременно сохранить и поставить в лучшие условия. Теория сочетаний представляет средство для одной из важнейших способностей ума – способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому...» – писал П.А. Некрасов профессор Московского учебного округа в 1899 г. [Щербатых, 2008].

С 2003-2004 учебного года началось повсеместное преподавание в основной школе элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Изучение данного курса осуществляется в соответствии с письмом Министерства образования российской Федерации от 23.09.2003 г. «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы».

Основная цель изучения комбинаторики в школьном курсе математики – это формирование так называемого комбинаторного мышления у учащихся, позволяющее ему разумно организовать перебор ограниченного числа данных, подсчитать все возможные комбинации элементов, составленных по определенному правилу.

Без минимальной вероятностно-статистической грамотности трудно адекватно воспринимать социальную, политическую, экономическую информацию и принимать на ее основе обоснованные решения. Практически вся математика основана на комбинаторно-логических задачах. Кроме того, в современном образовании физика, химия, биология, весь комплекс социально-экономических наук реализуются на вероятностно-статистической

базе. При изучении комбинаторики обогащаются представления учащихся о современной картине мира и методах его исследования.

В настоящее время в образовательный стандарт по математике включены основы комбинаторики и решение комбинаторных задач [Федеральный компонент, 2004]. Считается необходимым формирование у выпускника математической компетентности в области комбинаторики, так как комбинаторное мышление, оказывается полезным при работе в различных областях.

Настало время, когда элементы комбинаторики и теории вероятности в обязательном порядке выносятся на итоговый контроль (ОГЭ в 9 классе и ЕГЭ в 11 классе).

Однако наблюдения за реальной практикой обучения школьников математике показывают, что есть школьники, на разных ступенях обучения, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением, не способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и не готовы применять эти знания и опыт на практике. Эту проблему усугубляет и то, что элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей не так давно стали обязательной составляющей школьного курса математики и поиск наиболее результативных технологий формирования у учащихся основ математической компетенции в области «Комбинаторика» на сегодня остается одной из актуальных проблем школьного математического образования.

Цель исследования: повышение уровня сформированности у учащихся 10-11 классов основ математической компетенции в области «Комбинаторика» в процессе их профильного обучения математике.

Объект исследования: процесс обучения учащихся 10-11 классов математике в рамках профильной школы.

Предмет исследования: дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетенции в области «Комбинаторика».

Задачи исследования:

1) Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.

2) Описать роль, место и значение элементов комбинаторики в школьном курсе математики в рамках профильного обучения школьников.

3) Охарактеризовать понятие «математическая компетентность» и разработать содержательно-диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности у учащихся 10-11 классов основ математической компетенции в области «Комбинаторика».

4) Выделить дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетенции в области «Комбинаторика» в рамках профильного обучения и на их основе разработать курс по выбору для старшеклассников по теме «Элементы комбинаторики» и апробировать его на практике.

5) Провести педагогический эксперимент по формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетенции в области «Комбинаторика», проанализировать и описать его результаты.

Глава 1. Теоретические основания для формирования у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика»

1.1. Элементы комбинаторики в школьном курсе математики 10-11 кл

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (стохастика) присутствовали в образовательных программах школ России XIX – начала XX вв.

Одним из мотивирующих факторов введения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в среднюю школу является их связь с реальной жизнью. Именно поэтому практическая направленность обучения должна служить ориентиром при построении стохастической линии в общеобразовательной школе.

История обучения школьников элементам стохастики показывает, что первоначально практическая направленность в обучении стохастики стояла во главе угла, затем стали выделяться чисто теоретические аспекты этой дисциплины (учебник В.Я. Буняковского и др.). В утверждённых программах по математике 1914 г. указаны лишь чисто математические понятия стохастической составляющей в старшей школе.

Исторический опыт указал на существенную трудность, возникшую в результате введения стохастической составляющей в школьное обучение, – несбалансированное отражение её профессионально-прикладного потенциала. Содержание материала раздела стохастики было оторвано от реальной жизни, поэтому многие учителя были за его изъятие из школьной программы. Элементы комбинаторики исчезли из школьных образовательных программ в 1960 г.

Впоследствии, реформой 80-х годов, элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики вошли в программы профильных классов, в частности физико-математического и естественнонаучного, а также в факультативный курс изучения математики.

В 2004 г. утверждаются федеральный компонент базисного учебного плана и примерные учебные планы для средней школы. Впоследствии

утверждаются новые федеральные государственные образовательные стандарты начального общего, среднего общего и среднего (полного) общего образования. Отличительной особенностью этих стандартов является включение в школьные программы содержательной линии – «Анализ данных», предполагающей изучение элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. Согласно этим стандартам, новая линия пронизывает содержание математического материала на уровнях основной и средней (полной) школ. Изучение комбинаторики, теории вероятностей и статистики начинается с 5 класса и заканчивается в 11 классе.

Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) нового поколения определяют новое содержание обучения. Особенностью, принципиально отличающей ФГОС среднего (полного) общего образования (10-11 кл.), от ФГОС основного общего образования (5-9 кл.) является то, что он двухуровневый (базовый и углубленный уровни). Стандарт предполагает освоение непрофильных предметов на первом уровне стандарта (базовом), профильных – на втором уровне (углубленном).

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на базовом уровне ориентированы на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоением основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету.

Предметные результаты освоения интегрированных учебных предметов ориентированы на формирование целостных представлений о

мире и общей культуры обучающихся путем освоения систематических научных знаний и способов действий на метапредметной основе.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать возможность дальнейшего успешного профессионального обучения или профессиональной деятельности [Федеральный государственный, 2012].

Согласно федеральному компоненту государственных образовательных стандартов, утвержденному в 2004 году, обязательный минимум содержания образовательной программы по математике в рамках раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» включает следующие темы:

– на базовом уровне:

Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события. Решение практических задач с применением вероятностных методов.

В результате изучения данного раздела математики на базовом уровне ученик должен уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков; анализа информации статистического характера.
- на профильном уровне:
- Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.
- Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.
- Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события.

В результате изучения данного раздела математики на профильном уровне ученик должен уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул, треугольника Паскаля; вычислять коэффициенты бинома Ньютона по формуле и с использованием треугольника Паскаля;
- вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов (простейшие случаи);
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков; для анализа информации статистического характера.

В последние годы появились новые школьные учебники, учебные пособия как для основной, так и для старшей школы. В частности, среди

учебников и учебных пособий для старшей школы (10-11 классы), содержащих комбинаторно-вероятностно-статистический материал, можно отметить учебники:

– С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина «Алгебра и начала математического анализа, 10»;

– М.И. Башмакова «Алгебра и начала анализа, 11»;

– А.Г. Мордковича, И.М. Смирновой «Математика, 11»;

– «Алгебра и начала математического анализа, 11» под редакцией А.Б. Жижченко;

– «Алгебра и начала анализа, 11» под редакцией Ю.М. Колягина;

– «Алгебра и математический анализ, 11» под редакцией Н.Я. Виленкина для классов физико-математического профиля;

– пособие для учителя «Вероятность и статистика. 10-11 классы. Планирование и практикум» И.Л. Бродского и О.С. Мешавкиной и др.

Проведя сравнительно-сопоставительный анализ этих учебников и пособия, можно сделать ряд выводов:

1. авторы каждого учебника и пособия начинают изложение стохастической линии с «нуля», либо весь материал подчинён повторению ранее изученного в основной школе (А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова), что говорит об отсутствии преемственности между основной и старшей ступенями общеобразовательной школы;

2. для каждого учебника характерна незавершённость стохастической линии, выраженная отсутствием статистической составляющей (за исключением учебника под редакцией Н.Я. Виленкина и пособия И.Л. Бродского и О.С. Мешавкиной);

3. в каждом учебнике преобладает классический, формальный подход в изложении теоретического материала в ущерб естественному подходу, базирующемуся на частотном определении вероятности;

4. нет единого взгляда на изложение тех или иных стохастических фактов, общего содержательного наполнения;

5. излагаемый материал оторван от реальной жизни.

Можно констатировать, что в настоящий момент нет ни одного учебника, который бы в полной мере отражал идеи стохастической линии школьного курса математики.

[В данном исследовании остановимся на рассмотрении примерной программы по математике для раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» следующих авторов:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10-11 классы. — М.: Мнемозина.
2. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). 10 класс. — М.: Мнемозина.
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). 11 класс. — М.: Мнемозина.]

[Базовый уровень (11 класс)]

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (11 ч)

Статистическая обработка данных. Простейшие вероятностные задачи. Сочетания и размещения. Формула Бинома Ньютона. Случайные события и их вероятности.

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава V. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	
Статистическая обработка данных	2
Простейшие вероятностные задачи	2
Сочетания и размещения.	2
Формула Бинома Ньютона	2
Случайные события и их вероятности.	2
<i>Контрольная работа</i>	1

Контрольная работа (базовый уровень, 11 класс)

Вариант 1.

1. В клубе 25 спортсменов. Сколькими способами из них можно составить команду из четырех человек для участия в четырехэтапной эстафете с учетом порядка пробега этапов?

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 при условии, что каждая цифра может содержаться в записи числа лишь один раз?

3. Решите уравнение $A_{n-1}^2 - \tilde{N}_x^1 = 98$.

4. Напишите разложение степени бинома $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$

5. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность извлечь при этом карты одинаковой масти?

6. На прямой взяты 6 точек, а на параллельной ей прямой – 7 точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются данные точки?

Профильный уровень (10 класс)

Комбинаторика и вероятность

Правило умножения. Перестановки и факториал. Выбор нескольких элементов. Сочетания и размещения. Бином Ньютона. Случайные события и их вероятности.

Профильный уровень (11 класс)

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Вероятность и геометрия. Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Статистические методы обработки информации. Гауссова кривая. Закон больших чисел.

I вариант – 4 часа в неделю,

II вариант – 5 часов в неделю,

III вариант – 6 часов в неделю

Изучаемый материал

Кол-во часов

Вариант

I II III

10 класс. Глава 8. Комбинаторика и вероятность

§ 47. Правило умножения. Перестановки и факториал. Комбинаторные задачи 2 3 4

§ 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты. 2 3 4

§ 49. Случайные события и вероятности	3	3	5
<i>Контрольная работа</i>	-	1	1
11 класс. Глава 5. Комбинаторика и вероятность			
§ 22. Вероятность и геометрия.	2	2	3
§ 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами.	3	4	4
§ 24. Статистические методы обработки информации.	2	3	3
§ 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел	2	2	3

Контрольная работа (профильный уровень, 10 класс)

Вариант 1

1. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?
2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что каждая цифра может содержаться в записи числа лишь нечетное число раз?
3. Решите уравнение $x^2 + 2x = 9$.
4. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность извлечь при этом 2 туза?
5. На прямой взяты 8 точек, а на параллельной ей прямой – 5 точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются данные точки?
6. В разложении бинома $\left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена. Найдите член, не зависящий от x .

Контрольная работа (профильный уровень, 11 класс)

Вариант 1

Внутри равнобедренного прямоугольника случайным образом выбрана точка. Какова вероятность того, что она расположена ближе к вершине прямого угла, чем к вершинам двух его острых углов?]

1.2. Основы математической компетентности учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика»: структурные элементы, показатели и уровни сформированности

Новой парадигмой отечественного образования заявлен компетентностный подход, главная идея которого – усилить практическую ориентацию образования, выйти из ограничений «зуновского» образовательного пространства. Произошла смена парадигмы результатов образования от знаний, умений и навыков (ЗУНов) к более полному, личностно и социально интегрированному результату, который в ближайшей и отдаленной перспективе будет полезен выпускникам в ходе практического освоения новых видов деятельности. Важнейшей стратегической задачей образования явился переход от парадигмы преподавания (передачи информации) к парадигме научения (передаче компетенций – потенциала к действию).

«Портрет выпускника школы» в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования представлен следующими характеристиками:

- любящий свой край и свою Родину, уважающий свой народ, его культуру и духовные традиции;
- осознающий и принимающий традиционные ценности семьи, российского гражданского общества, многонационального российского народа, человечества, осознающий свою сопричастность судьбе Отечества;
- креативный и критически мыслящий, активно и целенаправленно познающий мир, осознающий ценность образования и науки, труда и творчества для человека и общества;
- владеющий основами научных методов познания окружающего мира;
- мотивированный на творчество и инновационную деятельность;

- готовый к сотрудничеству, способный осуществлять учебно-исследовательскую, проектную и информационно-познавательную деятельность;
- осознающий себя личностью, социально активный, уважающий закон и правопорядок, осознающий ответственность перед семьёй, обществом, государством, человечеством;
- уважающий мнение других людей, умеющий вести конструктивный диалог, достигать взаимопонимания и успешно взаимодействовать;
- осознанно выполняющий и пропагандирующий правила здорового, безопасного и экологически целесообразного образа жизни;
- подготовленный к осознанному выбору профессии, понимающий значение профессиональной деятельности для человека и общества;
- мотивированный на образование и самообразование в течение всей своей жизни [Федеральный государственный, 2012].

Очевидно, что узкопредметный подход к образованию сегодня будет недостаточен для формирования указанных выше качеств «нового выпускника». Поэтому требуется обновленный, современный взгляд на деятельность по обучению, направленную на решение триединой задачи для каждого обучающегося: учиться «быть»; учиться «знать»; учиться «делать».

В.П. Колесов проводит классификацию компетенций, приобретаемых учащимися в ходе обучения. Задаче «учиться быть» отвечают *личностные компетенции* и компетенции межличностного общения; задаче «учиться знать» – общие *знаниевые компетенции*; задаче «учиться делать» – общие *деятельностные компетенции* [Колесов, 2006].

Компетентностный подход – это совокупность общих принципов определения целей образования, отбора содержания образования, организации образовательного процесса и оценки образовательных результатов. К числу таких принципов относятся следующие положения:

- смысл образования заключается в развитии у обучаемых способности самостоятельно решать проблемы в различных сферах и видах

деятельности на основе использования социального опыта, элементом которого является и собственный опыт учащегося;

- содержание образования представляет собой дидактически адаптированный социальный опыт решения познавательных, мировоззренческих, нравственных, политических и иных проблем;

- смысл организации образовательного процесса заключается в создании условий для формирования у обучаемых опыта самостоятельного решения познавательных, коммуникативных, организационных, нравственных и иных проблем, составляющих содержание образования;

- оценка образовательных результатов основывается на анализе уровней образованности, достигнутых учащимися на определенном этапе обучения [Лебедев, 2004].

Многие педагоги подчеркивают, что компетентностный подход – это подход, акцентирующий внимание на результате образования, причем в качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в различных проблемных ситуациях [Иванов, Митрофанов, Соколова, 2003, с. 13].

В работах отечественных ученых педагогов и психологов к настоящему времени представлены разные подходы к определению понятий «и процессов и необходимых, чтобы качественно продуктивно действовать компетентность» и «компетенция» [Волкова, 2005; Зимняя, 2006; Иванов, 2007; Ларионова, 2005; Хасан, 2003; Хуторской, 2003 и др.].

Представляет интерес точка зрения А.В. Хуторского, который компетенцию трактует как совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определенному кругу предметов по отношению к ним. А «компетентность» – как владение, обладание человеком соответствующей компетенцией, включающей его личностное отношение к ней и предмету деятельности [Хуторской, 2003, с. 59].

С точки зрения Дж. Равена компетентность – это специфическая способность, необходимая для эффективного выполнения конкретного действия в конкретной предметной области и включающая узкоспециальные знания, особого рода предметные навыки, способы мышления, а также понимание ответственности за свои действия [Равен, 2002, с. 17].

Б.И. Хасан подчеркивает, что компетенции – это цели (поставленные перед человеком), а компетентности – это результаты [Хасан, 2003].

Под компетенцией С.Е.Шишов и И.Г. Агапов понимают общую способность и готовность личности к деятельности, основанные на знаниях и опыте, которые приобретены, благодаря обучению, ориентированные на самостоятельное участие личности в учебно-познавательном процессе, а также направленные на ее успешное включение в трудовую деятельность [Шишов и Агапов, 2001].

Быть компетентным означает мобилизовать полученные знания и опыт, обладать критическим мышлением, владеть методом решения проблем в зависимости от конкретной ситуации деятельности. Уровень компетентности индивида определяется не только по тому, что он знает, но и по тому, как он относится к этим знаниям, как их оценивает, принимает или не принимает их [Концепция модернизации, 2002].

Современная психологическая и педагогическая наука выделяет следующие компоненты компетентности: когнитивный, праксиологический (деятельностный), аксиологический (ценностный) [Зеер, 2005; Зимняя, 2003; Шкерина, 2015 и др.).

В работах Шкериной Л.В. [Шкерина, 2013, 2014, 2015] предложен подход к структурированию компетенций, на основе которого предложена обобщенная модель (Таблица 1) содержательной структуры феномена «компетенция» и охарактеризован каждый ее компонент.

Таблица 1

Обобщенная модель содержательной структуры компетенции

Компонент	Элемент	Характеристика
-----------	---------	----------------

Компетенции	Компетенции	элемента компетенции
Когнитивный	знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция	
	знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции	
Праксиологический	умения, навыки и способы деятельности в сфере компетенции	
Аксиологический	отношение к деятельности в сфере компетенции (проявление интереса, ориентированность на получение результата, понимание значения деятельности и ее результата)	

Компетентностный подход как парадигма образования на современном этапе несет в себе большой потенциал в реализации новых требований личности, общества и государства к качеству образования, представленных в основных государственных документах по его реформированию.

Под математической компетентностью, вслед за Н. Г. Ходыревой, мы будем понимать интегральное свойство личности, выражающееся в наличии глубоких и прочных знаний по математике, в умении применять имеющиеся знания в новой ситуации, способности достигать значимых результатов и качества в математической деятельности [Ходырева, 2004]. Другими словами, математическая компетентность предполагает наличие высокого уровня знаний и опыта самостоятельной деятельности на основе этих знаний.

Способность достигать значимых результатов в математической деятельности определяется наличием системы знаний и умений, мотивов и опыта осуществления деятельности, а также ценностных ориентаций в области математики.

На основе предложенного Л.В. Шкериной подхода к структурированию компетенций (Таблица 1), в структуре математической компетентности выделим три основных компонента: когнитивный, праксиологический и

аксиологический. Определим содержание выделенных компонентов математической компетентности учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика» в виде структурно-содержательной модели (Таблица 2).

Таблица 2

Структурно-содержательная модель математической компетентности учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика»

Компонент компетенции	Элемент компетенции	Характеристика элемента компетенции
Когнитивный	Знания в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция	- Знания основных понятий комбинаторики, а именно: понятий размещения, сочетания, перестановки (без повторения, а также с повторением) .
	Знания в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции	-Знание основных правил комбинаторики: правило произведения, правило суммы; - Знание информационных средств познания и особенности их использования; - Знание формул для нахождения числа сочетаний, размещений, перестановок (без повторения, а также с повторением).
Праксиологический	Умения, навыки и способы деятельности в сфере компетенции	- уметь применять формулы комбинаторики для решения задач; - уметь распознавать какого типа задача и каким способом она может быть решена; - уметь выделять наиболее важную информацию; - уметь распознавать проблему, находить пути решения этой проблемы и уметь действовать согласно составленному плану; - способность к самооцениванию; - уметь выстраивать логически обоснованную систему аргументации на основе имеющейся системы научных знаний; -уметь критически воспринимать и сравнивать различные точки зрения, иметь опыт работы в группе.

Аксиологический	Отношение к деятельности в сфере компетенции (проявление интереса, ориентированность на получение результата, понимание значения деятельности и ее результата)	Понимание важности изучения комбинаторики, применение комбинаторных знаний для решения прикладных задач.
-----------------	--	--

Для формирования и диагностики уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика» необходимо выделить и охарактеризовать уровни ее сформированности.

Основываясь на исследовании А. А. Виландеберк и Н. Л. Шубиной [Виландеберк, Шубина, 2008], выделим три уровня сформированности математической компетентности: низкий, средний, высокий. Конкретизируем критерии сформированности математической компетентности у учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика» с помощью показателей для каждого уровня и представим их в виде таблицы 3.

Таблица 3

Уровни сформированности основ математической компетенции у учащихся 10-11 кл. в области «Комбинаторика»

Уровни математической компетенции	Показатели сформированности
Низкий	Знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики».
	Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие.
	Применять знания при решение прикладных задач.
Средний	Знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики».
	Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие. Уметь решать прикладные задачи.
	Решение задач, которые знакомы учащимся. Содержание задачи подсказывает, какие правила и методы необходимо применить.
Высокий	Знание понятий, методов и правил, которые необходимы при решении заданий по теме «Элементы комбинаторики».

	Решение не только известных задач, но и задач, в которых необходимо проявить творчество, уметь размышлять, строить самостоятельно алгоритм действий, уметь объяснять решение задачи.
	Понимать важность изучения комбинаторики. Уметь применять комбинаторные знания для решения прикладных задач в жизни.

1.3. Дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика»

Под дидактическими условиями, вслед за Егориной В.С., будем понимать «обстоятельства обучения, которые являются результатом отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения, способствующих эффективному решению поставленных задач» [Егорина, 2001].

В данном параграфе выделим и охарактеризуем некоторые дидактические условия, способствующие формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика» в процессе профильного обучения, такие как:

- содержание обучения, построенное в соответствии с принципами компетентностного подхода;
- курс по выбору «Комбинаторика в жизни часто приходится», реализующий указанное выше содержание и инновационные технологии обучения.

На старшей ступени общего образования (10-11 кл.) реализуется профильное обучение – средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и

намерениями в отношении продолжения образования [Концепция профильного, 2002].

Согласно ФГОС среднего общего образования изучение дополнительных учебных предметов, курсов по выбору обучающихся должно обеспечить:

- удовлетворение индивидуальных запросов обучающихся;
- общеобразовательную, общекультурную составляющую при получении среднего общего образования;
- развитие личности обучающихся, их познавательных интересов, интеллектуальной и ценностно-смысловой сферы;
- развитие навыков самообразования и самопроектирования;
- углубление, расширение и систематизацию знаний в выбранной области научного знания или вида деятельности;
- совершенствование имеющегося и приобретение нового опыта познавательной деятельности, профессионального самоопределения обучающихся.

Типологию курсов по выбору определяет специфика образовательных задач, на решение которых они направлены. В связи с этим, в практике профильного обучения можно выделить следующие типы курсов по выбору:

- предметно-ориентированные, направленные на формирование у учащихся предметных компетенций;
- межпредметные курсы, направленные на развитие у учащихся основ метапредметных компетенций;
- внепредметные курсы, способствующие развитию у учащихся специфических личностных качеств и удовлетворению их познавательных интересов в различных областях деятельности человека.

Программа курса по выбору, должна:

- соответствовать концептуальным положениям профильного обучения и требованиям ФГОС общего образования;

- иметь практическую направленность;
- обладать логикой построения и подачи учебного материала;
- быть хорошо структурированной и связной по содержанию;
- быть реалистичной по времени и затраченным ресурсам;
- предполагать активные методы обучения, дающие учащимся осознанно и объективно сделать выбор для продолжения образования;
- иметь определенную степень новизны;
- обладать некоторой степенью обобщенности содержания, что позволяет развивать общеучебные и предметные умения и навыки.

В данном параграфе остановимся на рассмотрении технологии проектирования программы курса по выбору.

Примерная структура программы включает в себя несколько компонентов: титульный лист, пояснительная записка (аннотация), учебно-тематический план, содержание курса по темам, учебно-методическое обеспечение.

В проектировании программы курса по выбору каждый из данных компонентов играет важную роль. Особенно креативно автору – разработчику нужно подойти к выбору названия курса.

Название курса должно быть привлекательным. Оно должно, с одной стороны не быть похожим на школьное, а с другой стороны показывать то, чем ученики, посещающие его, будут заниматься [Кейв, 2015].

Пояснительная записка включает в себя: сведения об актуальности курса – роль, место и значение курса в системе профильного обучения; указание типа курса по выбору; продолжительность по времени и количество часов в неделю; формулировка целей и задач курса с учетом типа курса и его функций; сведения о методах и формах организации занятий курса по выбору (виды деятельности, предлагаемые учащимся); критерии, позволяющие оценить успехи учащихся в изучении данного курса; возможные социальные пробы и ожидаемый результат.

Учебно-тематическое планирование, как правило, оформляется в виде таблицы (таблица 4), с указанием наименований основных модулей, тем и разделов, теоретических и практических часов, ожидаемых образовательных результатов, предполагаемой деятельностью учащихся и возможными формами контроля.

Таблица 4

Учебно-тематическое планирование курса по выбору

№ п/п	Наименование модулей, тем, разделов	Кол-во часов	Образовательные цели	Вид деятельности учащихся	Формы контроля

В содержании курса по выбору необходимо указать основные дидактические единицы учебной информации, способы и методы, а также типы задач, которые будут предложены, участникам курса. При проектировании программы курса необходимо учесть, что содержание курса должно: знакомить учащихся со способами деятельности; включать оригинальный материал, не дублировать содержание предметов обязательных для изучения; помогать учащимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы; ранее недоступный для изучения материал должен стать открытым для обсуждения; модульное построение содержания, поскольку возможны переходы учащихся с курса на курс.

Учебно-методическое обеспечение курса представляет собой некий кластер учебно-методических ресурсов, который может быть полезен как учащимся, изучающим курс, так и педагогу, реализующему его.

В приложениях к программе может содержаться материал дополняющий учебно-методическое обеспечение: тексты информационных материалов для лекций, семинаров, самостоятельной работы учеников; каталог заданий для самостоятельной работы и методические рекомендации

по их выполнению; индивидуальные и дифференцированные задания, в том числе задания в тестовой форме; программы учебных практик и методические рекомендации по их проведению; тематика исследовательских работ и проектов; программы выполнения проектной и исследовательской деятельности, методические рекомендации по ее организации; образцы проектных и исследовательских работ и др.

Поскольку методологической основой новых образовательных стандартов являются системно-деятельностный и компетентностные подходы, одним из ключевых тезисов которых является тезис о том, что единственный путь, ведущий к знанию – это деятельность. Поэтому *под содержанием обучения целесообразно понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач из жизни* [Кейв, 2015].

Исходя из этих позиций при проектировании нового содержания обучения для курса по выбору необходимо в нем выделять три блока: когнитивный, праксиологический (деятельностный) и аксиологический (ценностный) (Таблица 5).

Таблица 5

Основные содержательные блоки содержания профильного обучения

<i>Когнитивный блок</i>	
Предметные знания	Знать, что...
<i>Праксиологический блок</i>	
Процедурные знания	Знать, как...
<i>Аксиологический блок</i>	
Ценностно-смысловые знания	Знать, зачем и почему...

Когнитивный блок содержания обучения включает в себя предметные знания – знания в области предметных дисциплин учебного плана (методология, научные основы, основные законы, положения, теоретические конструкты, их свойства и признаки), межпредметные знания (соотношения

между знаниями определенных дисциплин и их обусловленность и детерминированность), исторические и автобиографические сведения, освещающие судьбы научных идей через судьбы их творцов и др.

Праксиологический блок содержания помимо традиционных задач и упражнений состоит из комплекса задач открытого типа – когда необходимо в ходе собственных открытий приходиться к новому знанию, задач и заданий практической и творческой направленности, обеспечивающих проекцию ценностей знаний и отношений к ним в деятельность и поведение учеников.

Аксиологический блок содержания состоит из комплекса сведений о ценности предметных знаний, задач и заданий, которые представляют собой модель учебной ситуации – «погружаясь» в неё, учащийся учится выявлять ценностные аспекты изучаемого материала для себя и для своей будущей профессиональной деятельности.

Из выше сказанного следует, что при проектировании нового содержания профильного обучения особое внимание следует уделить комплексу задач, как основному его компоненту.

При обучении математике большая часть времени отводится решению задач.

Термин «задача» используется в жизни и науке очень широко. Под задачей понимают:

– цель, данную в определённых условиях (А.Н. Леонтьев): «Задача предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели. Решение задачи означает нахождение этого средства» [Педагогика, 1983].

– ситуацию, включающую цель и условия для ее достижения. Задача как модель проблемной ситуации, выраженная с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка, элементом которой является субъект, осознавший затруднение в своей деятельности [Фридман, 1983].

– систему – множество элементов, на котором определено заранее заданное отношение. Это отношение выражает функциональную зависимость между величинами входящими в условие и требование задачи, а реализовано на предметной области задачи. Под предметной областью задачи понимают класс фиксированных объектов, о которых идет речь в задаче [Колягин, 1977].

Таким образом, в задаче выделяют следующие *основные компоненты*:

1. *условие* – это начальное состояние (данные элементы, свойства и связи между ними);
2. *заключение* – требование, цель, конечное состояние (результат решения – неизвестные элементы, свойства и связи между ними);
3. *базис решения* – теоретические основы решения (обоснование решения);
4. *решение («ответ»)* – преобразование условия задачи для нахождения требуемого.

По величине проблемности задачи делят на (по Ю.М. Колягину):

- стандартные (известны все компоненты задачи);
- обучающие (неизвестен один из четырех компонентов, как правило, решение);
- поисковые (неизвестны два из четырех – база решения и само решение);
- проблемные (неизвестны три из четырех – определена только цель, комплекс необходимых условий, путей и средств, достаточных для достижения этой цели, человек устанавливает самостоятельно) [Колягин, 1977].

Стандартные и обучающие задачи условно можно назвать закрытыми задачами, а задачи поисковые и проблемные – открытыми.

Задачи, открытого и закрытого типов:

Задача 1.

В классе в четверг необходимо поставить в расписание следующие предметы: информатику, алгебру, историю, физику, биологию, литературу.

Информатику ставят первым и последним уроками с учетом того, что класс разбит на две группы, из которых одна приходит на первый, а другая на последний урок. Остальные предметы расставляются в произвольном порядке. Сколькими способами можно составить на этот день?

Решение.

Информатику ставим двумя способами: 1-й урок 1-я гр, , 7-й урок 2-я группа и наоборот.

Количество перестановок из пяти предметов $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

И на каждую перестановку 2 варианта урока информатики. $2 \cdot 120 = 240$

Ответ: 240

Задача 2. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать капитана команды для математических соревнований и его заместителя?

Решение.

1-й способ: на роль капитана может быть выбран любой из 30 учащихся, а его заместитель — любой из 29 оставшихся учеников. Таким образом, получаем $30 \cdot 29 = 870$ способов.

2-й способ: порядок важен, тогда по формуле числа размещений имеем

$$A_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870$$

способов.

Ответ: 870.

В массовой школьной практике в основном рассматриваются задачи закрытого типа как средство отработки и закрепления школьниками программного материала. Однако известно, что в жизни им придется решать задачи открытого типа. Нет такой области человеческой деятельности, в которой не было бы открытых задач. В технике, в науке, в быту, в искусстве, в отношениях людей. Школа учит решать закрытые задачи. Жизнь требует решения открытых задач. В этот зазор между реальностью школы и

требованием жизни проваливаются усилия учителей и мотивация школьников.

При выборе методов и форм организации профильного обучения необходимо учитывать концептуальные положения профильного обучения и требования ФГОС среднего (полного) общего образования к условиям реализации основной образовательной программы.

Содержание, методы, приемы, технологии современного образовательного процесса должны быть направлены на раскрытие и использование субъективного опыта каждого ученика и подчинены становлению личностно значимых способов познания через организацию целостной учебной деятельности. Усвоение учебных знаний, таким образом, из цели превращается в средство саморазвития ученика с учетом его жизненных ценностей и реальных индивидуальных возможностей.

Методы и формы обучения в профильной школе должны, наряду со знаниями, способствовать усвоению способов деятельности.

Под методами обучения понимают способы совместной деятельности педагога и учащихся, направленные на достижение ими образовательных целей [Беспалько, 1995].

Сегодня, педагогическая наука и практика предлагают учителю богатый арсенал методов обучения. Творческая деятельность учителя состоит в рациональном использовании в учебном процессе методов обучения, обеспечивающих наилучшее достижение поставленной образовательной цели. Поскольку результат профильного обучения в решающей мере зависит от направленности и внутренней активности обучаемых, характера их деятельности, то именно характер деятельности, степень самостоятельности, проявление творческих способностей и должны служить важным критерием выбора методов. Следовательно, при реализации профильного обучения целесообразно применять активные методы обучения.

Активные методы обучения – это методы, стимулирующие познавательную деятельность обучающихся [Педагогика, 2010].

Классификацию методов по характеру (степени самостоятельности и творчества) деятельности обучаемых предложили И.Я. Лернер и М.Н. Скаткин. Ими выделены пять методов обучения, причём в каждом из последующих степень активности и самостоятельности в деятельности обучаемых нарастает: объяснительно-иллюстративный метод; репродуктивный метод; метод проблемного изложения; частично-поисковый или эвристический метод; исследовательский метод [Лернер и Скаткин, 1965].

Урок был и остается основным элементом образовательного процесса, но в системе профильного обучения существенно меняются его функция, форма организации. Поскольку среди основных концептуальных идей профильного обучения заявлены идеи образовательной ориентации на вузовское обучение и социализации обучающихся, то целесообразно создавать педагогические ситуации общения на уроке, позволяющих каждому ученику проявлять инициативу, самостоятельность, избирательность в способах работы; создание обстановки для естественного самовыражения и социализации школьников; включение в образовательный процесс учебных занятий в формате вузовских организационных форм (обзорные и установочные лекции, лабораторные и лабораторно-практические занятия, семинары, собеседования, дискуссии, зачеты, коллоквиумы и др.).

Инновационные методы и формы организации обучения – методы и организационные формы обучения, способствующие повышению качества обучения на основе использования современных достижений науки и информационных технологий в образовании. В рамках данного параграфа укажем некоторые из них:

- проблемно-ориентированные методы и формы организации профильного обучения;
- проектно-ориентированные методы и формы организации профильного обучения;

- имитационные (игровые) методы и формы организации профильного обучения;
- информационно-коммуникационные технологии обучения;
- научно-исследовательская работа учащихся.

В образовательных стандартах нового поколения акцент сделан на формирование у обучающихся опыта проектной и учебно-исследовательской деятельности, проведения наблюдений и экспериментов. В каждом из данных видов деятельности присутствуют те или иные элементы научно-исследовательской деятельности, в которую учащиеся могут быть вовлечены как в ходе урока, так и в ходе домашней работы посредством специальных заданий и проектов.

В ФГОС среднего (полного) общего образования одной из особых форм организации такой деятельности обучающихся (учебное исследование или учебный проект) является, так называемый, индивидуальный проект.

Индивидуальный проект выполняется обучающимся самостоятельно под руководством учителя (тьютора) по выбранной теме в рамках одного или нескольких изучаемых учебных предметов, курсов в любой избранной области деятельности (познавательной, практической, учебно-исследовательской, социальной, художественно-творческой, иной).

Результаты выполнения индивидуального проекта должны отражать:

- сформированность навыков коммуникативной, учебно-исследовательской деятельности, критического мышления;
- способность к инновационной, аналитической, творческой, интеллектуальной деятельности;
- сформированность навыков проектной деятельности, а также самостоятельного применения приобретенных знаний и способов действий при решении различных задач, используя знания одного или нескольких учебных предметов или предметных областей;

– способность постановки цели и формулирования гипотезы исследования, планирования работы, отбора и интерпретации необходимой информации, структурирования аргументации результатов исследования на основе собранных данных, презентации результатов.]

Индивидуальный проект выполняется обучающимся в течение одного или двух лет в рамках учебного времени, специально отведенного учебным планом, и должен быть представлен в виде завершеного учебного исследования или разработанного проекта: информационного, творческого, социального, прикладного, инновационного, конструкторского, инженерного [Федеральный государственный, 2012].

Глава 2. Формирование основ математической компетентности у учащихся 10-11 классов в области «Комбинаторика»

2.1. Программа курса по выбору «Комбинаторить в жизни часто приходится»

Комбинаторика — ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, казалось, долгое время лежали вне основного русла развития математики и ее приложений. На протяжении двух с половиной столетий основную роль в изучении природы играл математический анализ. Положение коренным образом изменилось после создания быстродействующих вычислительных машин, компьютеров. С их помощью стало возможным делать переборы, ранее требовавшие сотен и тысяч лет. В эпоху расцвета дискретной математики изменилась и роль древнейшей области дискретной математики — комбинаторики.

Курс по выбору “Комбинаторить в жизни часто приходится” выполняет одну из главных функций современного образования: показывает связь теоретической математики с жизнью. Учащиеся узнают об очевидной универсальности вероятностно-статистических законов, которые широко применяются в современной химии, физике, биологии, социально-экономических науках, военном деле и т. д.

Курс ориентирован на развитие у школьников 11 класса умений решать жизненные задачи: выбор наилучшего из возможных вариантов, оценка степени риска, шансов на успех и др. Кроме того, он рассчитан на развитие самостоятельности, умения работать в команде, толерантности, реализации межпредметных компетенций.

Данный курс предназначен для широкого круга учащихся вне зависимости от выбранного профиля обучения, так как способствует

повышению навыков соотнесения вероятного и достоверного, справедливости и несправедливости в играх и других реальных жизненных ситуациях.

Общий объем курса составляет 16 часов, занятия проводятся 1 раз в неделю.

Цели и задачи изучения элементов комбинаторики в школе:

- формирование специального типа мышления — комбинаторного;
- формирование у учащихся видов деятельности, связанных с перебором и подсчетом числа конфигураций элементов, удовлетворяющих определенным условиям;
- привитие профессионального интереса к занятиям комбинаторики как науки.
- получение знаний о комбинаторике и основных элементах теории вероятностей;
- овладение умениями решать задачи, связанные с конкретной жизненной ситуацией.

Формы организации занятий:

- лекция с элементами беседы;
- семинар-практикум по решению задач.

Разнообразный дидактический материал предоставляет возможность эффективного дифференцированного подхода к ученикам различного уровня подготовки: степень трудности заданий колеблется от простых до более сложных. А применение мультимедийных презентаций с историческим и теоретическим материалом дает возможность сделать каждое занятие предельно заполненным, увлекательным и нужным для учеников разной категории подготовленности.

Формы контроля:

- самостоятельная работа (решение задач);
- контрольная работа (решение задач).

Учебно-тематическое планирование элективного курса

№ п/п	Наименование модулей, тем, разделов	Кол-во часов	Образовательные цели	Вид деятельности учащихся	Формы контроля
1	Для чего нужна комбинаторика. Исторические комбинаторные задачи.	1	Показать и рассказать важность и значимость комбинаторики в жизни. Представить исторические задачи по комбинаторике. Введение строго определения понятия «Комбинаторика»	Фронтальная работа	-
2	Понятие факториала. Решение заданий с использованием факториала.	1	Введение понятия факториала, решение заданий с использованием факториала	Фронтальная работа.	-
3	Правило суммы. Правило произведения	1	Введение правила суммы и правила произведения.	Фронтальная работа, самостоятельная работа.	-
4	Решение комбинаторных задач на правило суммы и произведения	1	Решение прикладных задач, используя правило суммы и правило произведения.	Фронтальная работа, самостоятельная работа.	-
5	Перестановки без повторений	1	Введение понятия перестановки элементов, введение формулы нахождения количества перестановок, формирование умений находить количество перестановок без повторений по формуле. Первичная отработка умений и навыков по новой теме.	Фронтальная работа	-
6	Размещения без повторений	1	Введение понятия размещения объектов, введение формулы для нахождения количества размещений объекта, первичное закрепление знаний и умений по данной теме.	Фронтальная работа	-
7	Сочетания без повторений	1	Введение понятия сочетания элементов, введение формулы нахождения числа сочетаний элементов, первичное закрепление умений и навыков по данной теме	Фронтальная работа	-
8-9	Решение	2	Систематизация и закрепление	Работа в	Самостояте

	комбинаторных задач по темам «Перестановки и без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений»		знаний и практических умений у учащихся по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений»	группах, самостоятельная работа	льная работа
10	Перестановки с повторением	1	Формирование умений находить количество перестановок с повторением по формуле. Первичная отработка умений и навыков по новой теме.	Фронтальная работа	-
11	Размещение с повторением	1	Формирование умений находить количество размещений с повторением по формуле. Первичная отработка умений и навыков по новой теме.	Фронтальная работа	-
12	Сочетание с повторением	1	Формирование умений находить число сочетаний с повторением по формуле. Первичная отработка умений и навыков по новой теме.	Фронтальная работа	-
13-14	Решение комбинаторных задач по темам «Перестановки и без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений»	2	Систематизация и закрепление знаний и практических умений у учащихся по данным темам.	Работа в парах, самостоятельная работа	Самостоятельная работа
15	Подготовка к итоговой контрольной работе.	1	Выявление и устранение пробелов при выполнении заданий по следующим темам: понятие факториала, правило суммы, правило произведения, перестановки без повторений, размещения без повторения, сочетания без повторений, перестановки с повторением, размещения с повторением, сочетания с повторением.	Фронтальная работа	-
16	Итоговая	1	Контроль знаний по всем	Индивидуаль	Контрольная

	контрольная работа.		изученным темам.	ная работа.	я работа.
--	---------------------	--	------------------	-------------	-----------

Методическая разработка занятий, представлена в приложение 1.

Краткое содержание программы курса по выбору:

Занятие 1. Для чего нужна комбинаторика. Исторические комбинаторные задачи.

Определение комбинаторики. История комбинаторики. Важность и значимость комбинаторики в жизни.

Занятие 2. Понятие факториала. Решение заданий с использованием факториала.

Определение «Факториал числа». Введение формулы факториала. Решение заданий с использованием факториала.

Занятие 3. Правило суммы. Правило произведения.

Введение правила суммы и правила произведения. Правило суммы на языке теории множеств. Правило произведения на языке теории множеств. Решения задач с помощью применения правила суммы и правила произведения.

Занятие 4. Решение комбинаторных задач на правила суммы и произведения.

Решения задач с помощью применения правила суммы и правила произведения.

Занятие 5. Перестановки без повторений.

Введение понятия перестановки, введение формулы для нахождения количества перестановок без повторения.

Занятие 6. Размещения без повторений.

Введение понятия размещения, введение формулы для нахождения числа размещений без повторения.

Занятие 7. Сочетания без повторений.

Введение понятия сочетания, введение формулы для нахождения числа сочетаний без повторения.

Занятие 8-9. Решение комбинаторных задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Решения задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Занятие 10. Перестановки с повторением.

Введение понятия перестановки с повторением, введение формулы для нахождения количества перестановок с повторением.

Занятие 11. Размещение с повторением.

Введение понятия размещения с повторением, введение формулы для нахождения числа размещений с повторением.

Занятие 12. Сочетание с повторением.

Введение понятия сочетания с повторением, введение формулы для нахождения числа сочетаний с повторением.

Занятие 13 – 14. Решение комбинаторных задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Решения задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Занятие 15. Подготовка к итоговой контрольной работе.

Решение комбинаторных заданий перебором вариантов, правило суммы и произведения, понятие размещения и формулы для вычисления числа размещений, понятие перестановки и формулы для вычисления количества перестановок, понятие сочетания и формула для нахождения числа сочетаний объектов.

Занятие 16. Итоговая контрольная работа.

Решение комбинаторных заданий перебором вариантов, правило суммы и произведения, понятие размещения и формулы для вычисления числа размещений, понятие перестановки и формулы для вычисления количества перестановок, понятие сочетания и формула для нахождения числа сочетаний объектов.

В школьном курсе математики теме комбинаторика отводится несправедливо мало учебного времени. В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки.

Изучив учебники с 10-11 классов, я сделала выводы, что информация для учащихся представлена частично. Для того что бы владеть все информацией по комбинаторике, нужно рассмотреть множество литературы.

Для того, чтобы объединить весь учебный материал я решила создать электронного учебного пособия по комбинаторике для учащихся 10-11 классов.

Разработанный электронный учебник по комбинаторике (см. приложение 2) относится к разделу математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Он является своеобразным средством обучения, позволяющий самостоятельно освоить курс комбинаторики. Учебник соединяет в себе свойства обычного учебника, справочника и задачника. Хотелось бы, чтобы он стал помощником на время изучения курса комбинаторики.

Материал учебного пособия разделен на пять основных параграфов:

1. история комбинаторики;
2. теория множеств;
3. правила комбинаторики;
4. основные комбинаторные конфигурации;
5. комбинаторика в различных областях жизнедеятельности человека.

В конце учебника приведено несколько вариантов теста по комбинаторике для самостоятельного решения. Подробный разбор теоретического материала, а также решение и комментарии к задачам позволят всем желающим использовать пособие для самостоятельного изучения предмета. Теоретический материал в пособии излагается в простой и доступной форме, в виде монолога-рассуждения. Такой материал прост для прочтения и понимания. Задачи из данного пособия очень редко встречаются

в школьном курсе математике. Но зато им отдают предпочтение на вступительных экзаменах, а также на различных олимпиадах, викторинах и конкурсах, поэтому умение решать данные задачи поможет школьнику прекрасно подготовиться к нетривиальным формам проверки знаний.

Материал из пособия может с успехом использовать преподаватель на внеклассных занятиях, факультативах, спецкурсах, а способ изложения темы в пособии может оказаться полезным ему при объяснении темы. В пособии приведено большое количество информации, которая поможет хорошо освоить не только теоретический материал, но и практический. В пособии приведены также сведения из истории комбинаторики, которые необходимы для более полного понимания темы, её плавного усвоения и закрепления.

Электронный учебник может быть использован учителями не только профильных классов, но и учителями средних школ, учениками, а также студентами при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по методике преподавания математики.

Электронный учебник имеет преимущества перед обычными учебниками:

- 1.режим интерактивности (позволяет учащимся самостоятельно контролировать скорость изучения учебного материала);
- 2.возможность регулярной корректировки учебника по мере появления новых данных;
- 3.быстрый поиск необходимой информации.

Электронное учебно-методическое пособие (электронный учебник) позволяет обучать учащихся разных уровней усвоения материала.

2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

В эксперименте принимали участие учащиеся 11-го класса. Констатирующий этап эксперимента проводился на базе средней общеобразовательной школы № 150 г. Красноярска. Для диагностики был разработан специальный набор заданий базового уровня сложности.

Учащимся был предложен следующий контрольный срез, состоящий из шести вопросов. Первый, второй и седьмой вопросы позволяют оценить, знают ли учащиеся что такое комбинаторика, что она изучает и для чего она нужна. Кроме этих трех вопросов, учащимся было предложено решить 3 задачи: первая задача на применение формулы нахождения числа сочетаний, вторая задача – на применение формулы по вычислению числа сочетаний и факториал числа, а третья задача на применение формулы для нахождения количества размещений.

Ф.И.О.

-
1. Что изучает комбинаторика? _____
 2. Назовите основные правила комбинаторики? _____
 3. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность извлечь при этом карты одинаковой масти? _____

4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 при условии, что каждая цифра может содержаться в записи числа лишь один раз?

5. В клубе 25 спортсменов. Сколькими способами из них можно составить команду из четырех человек для участия в четырехэтапной эстафете с учетом порядка пробега этапов?

6. Как вы думаете, для чего нужна комбинаторика? _____

В эксперименте приняло 14 учащихся 11 класса.

На констатирующем этапе, с первым вопросом справилось 36% и столько же учащихся справилось с шестым вопросом. Со вторым заданием справилось 22% учащихся. Задачу под номером три, решило 7% от общего количества учащихся 11 класса. С задачей под номером четыре справилось 28%, а с задачей под номером 5 – 7% учащихся.

Со всеми заданиями справился только 1% учащихся, 28% учащихся, которые вообще не справились ни с одним заданием (см. рис 1).

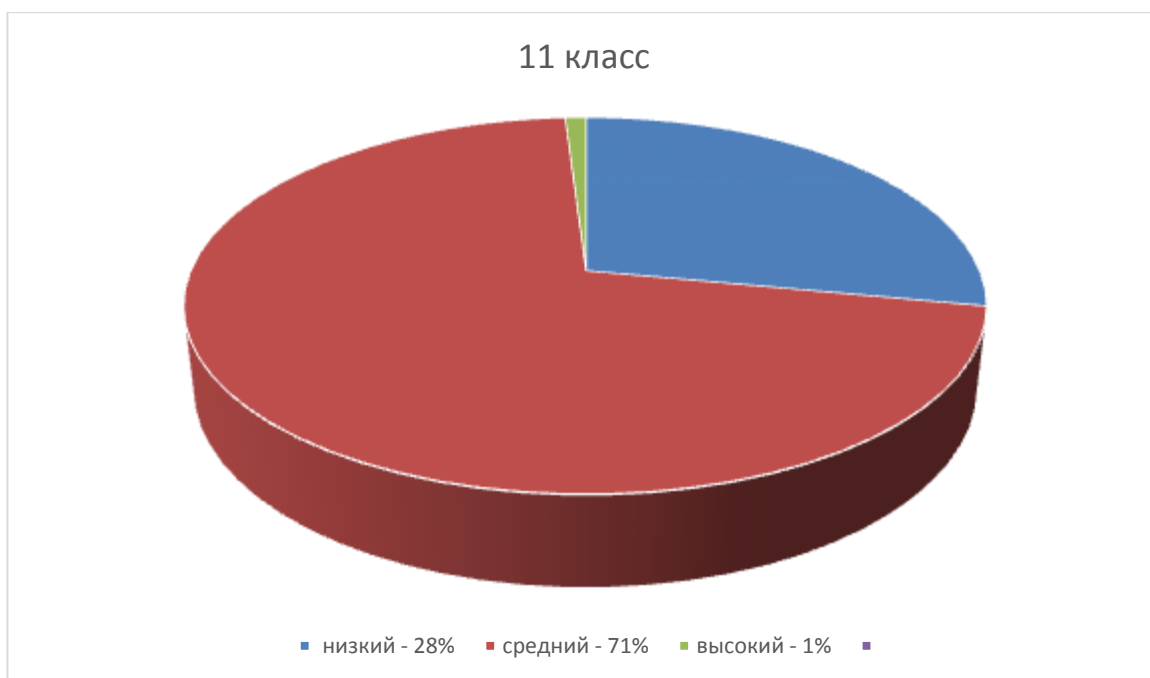


Рис 1. Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 11 класса по теме «Комбинаторика», на констатирующем этапе.

Полученные результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что есть школьники, которые совсем не обладают комбинаторным мышлением и не способны решать комбинаторные задачи.

На базе школы №150 города Красноярск, проходил педагогический эксперимент по формированию основ математической компетентности у учащихся 10-11 классов в области «Комбинаторика». В течение с 15.02.2016 по 20.04.2016 в 11 классе, были проведены занятия курса по выбору «Комбинаторить в жизни часто приходится».

Заключительный этап эксперимента также проводился на базе средней общеобразовательной школы №150 города Красноярск. Для диагностики использовали тот же набор заданий, что и для констатирующего этапа эксперимента:

Ф.И.О.

1. Что изучает комбинаторика? _____

2. Назовите основные правила комбинаторики? _____

3. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность извлечь при этом карты одинаковой масти? _____

4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 при условии, что каждая цифра может содержаться в записи числа лишь один раз?

5. В клубе 25 спортсменов. Сколькими способами из них можно составить команду из четырех человек для участия в четырехэтапной эстафете с учетом порядка пробега этапов?

6. Как вы думаете, для чего нужна комбинаторика? _____

С первым вопросом справилось 86% и столько же учащихся справилось с шестым вопросом. Со вторым заданием справилось 92% учащихся. Задачу под номером три, решило 50% от общего количества учащихся 11 класса. С задачей под номером четыре справилось 43%, а с задачей под номером 5 – 64% учащихся.

Со всеми заданиями справился 43% учащихся и не было учащихся, которые вообще не справились ни с одним заданием (см. рис 2)

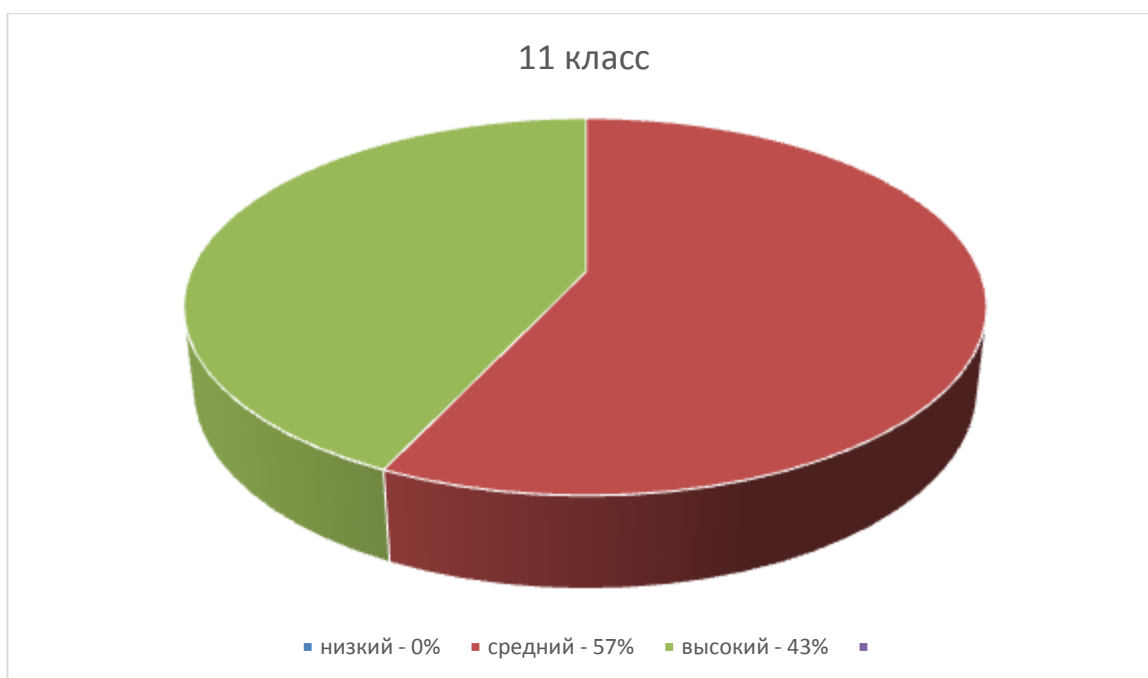


Рис. 2. Диаграмма уровня сформированности основ математической компетентности у учащихся 11 класса по теме «Комбинаторика» на заключительном этапе.

Полученные результаты заключительного этапа эксперимента показали, что все школьники обладают комбинаторным мышлением, способны уверенно решать простые комбинаторные задачи и готовы применять эти знания и опыт на практике.

Заключение

Анализ специальной литературы по теме исследования, позволил нам охарактеризовать понятие «математической компетенции», под которым мы понимаем интегральное свойство личности, выражающееся в наличии глубоких и прочных знаний по математике, в умении применять имеющиеся знания в новой ситуации, способности достигать значимых результатов и качества в математической деятельности. В структуре математической компетентности, условно можно выделить, по мнению многих специалистов, следующие компоненты: аксиологический, праксиологический, когнитивный. Учитывая эту структуру, мы охарактеризовали основы математической компетентности, учащихся в области «Комбинаторика». Охарактеризовали уровни сформированности основ математической компетентности у учащихся 10-11 классов в области «комбинаторика». Выделили и описали дидактические условия формирования основ математической компетентности в области «Комбинаторика» у учащихся 10-11 классов, такие как: специальный комплекс задач и заданий для учащихся по теме «Комбинаторика», активные методы обучения, специальный курс по

выбору. В работе представлена методическая разработка курса по выбору. Разработан электронный учебник в поддержку курса по выбору «Комбинаторика в жизни часто приходится», в рамках которого достаточно подробно, популярно представлено основное содержание курса. На базе школы №150 города Красноярск, был проведен эксперимент по формированию у учащихся 10-11 классов основ математической компетентности в области «Комбинаторика». Результаты эксперимента, показали положительную динамику: у многих учащихся, уровень сформированности основ математической компетентности в области «Комбинаторика» повысился. Это свидетельствует о том, что разработанная нами методика, способствует формированию у школьников основ математической компетентности в области «Комбинаторика» в процессе их профильной подготовки.

Библиографический список

- 1) Беспалько, В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения. - М.: Издательство ИРПО МО РФ, 1995. – 336 с.
- 2) Виландеберк А. А., Шубина Н. Л. Новые технологии оценки результатов обучения: Методическое пособие для преподавателей. СПб.: Изд-во HUGE, 2008. 168 с.
- 3) Волкова О.Е. Компетентностный подход при проектировании образовательных программ // Высшее образование в России. – 2005. – № 4.– С. 34 – 36.
- 4) Гин А.А. Открытые задачи – инструмент новой педагогики // Журнал руководителя управления образованием, №8 (43), 2014.
- 5) Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Брянск, 2001.

- 6) Зеер Э., Сыманюк Э. Компетентностный подход к модернизации профессионального образования // Высшее образование в России. 2005. № 4.
- 7) Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата современного образования // *Высшее образование сегодня*. 2003. №5. С. 34-42.
- 8) Зимняя И.А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования? (Теоретико-методологический аспект) // *Высшее образование сегодня*. 2006. № 8. С. 21 – 26.
- 9) Иванов Д.А., Митрофанов К.Г., Соколова О.В. Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий. – М.: АПК и ПРО, 2003. – 101 с.
- 10) Иванов Д.И. Компетентности и компетентностный подход в современном образовании / Библиотечка «Первого сентября», серия «Воспитание. Образование. Педагогика». – Вып. 6 (12). – М.: Чистые пруды, 2007. – 32 с.
- 11) Кейв М.А. Дискретная математика для будущего учителя: учебное пособие / М.А. Кейв. г. Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2009г.
- 12) Кейв М.А. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие / М.А. Кейв. г. Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015г.
- 13) Колесов В. П. О классификации компетенций// *Высшее образование сегодня*. - 2006. - N 2. - С. 20-22.
- 14) Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть II., 1977
- 15) Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года // Бюллетень Минобразования. 2002. № 2

- 16) Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. Утвержденная приказом Минобразования России от 18 июля 2002 г. № 2783.
- 17) Ларионова О. Компетентность – основа контекстного обучения // Высшее образование в России. 2005. № 10. – с. 118 – 122.
- 18) Лебедева С. В. Конструирование открытых заданий как средства развития интеллектуально-творческой деятельности учащихся при обучении математике. - URL: ftp://lib.herzen.spb.ru/text/lebedeva_10_31_197_202.pdf.
- 19) Лебедев О.Е. Компетентностный подход в образовании // Школьные технологии. 2004. №5. С. 5-12.
- 20) Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10-11 классы. — М.: Мнемозина.
- 21) Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). 10 класс. — М.: Мнемозина.
- 22) Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). 11 класс. — М.: Мнемозина.
- 23) Педагогика (под редакцией Ю. К. Бабанского). - М.: "Просвещение", 1983.
- 24) Равен Дж. Компетентность в современном обществе: выявление
- 25) Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. 2012.
- 26) Федеральный компонент государственных образовательных стандартов общего образования. 2004.
- 27) Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160с.
- 28) Хасан Б.И. Границы компетенций: педагогическое вменение и возрастные притязания // Педагогика развития: ключевые компетентности и их становление. – Красноярск, 2003. – С. 24 –27.

- 29) Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно ориентированной парадигмы образования // Народное образование. 2003. № 2. С. 58 – 64.
- 30) Хуторской А.В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения. Гл. 111, параграф 5. Ключевые компетенции. М.: Изд-во МГУ, 2003.
- 31) Хуторской А. В. Методика личностно-ориентированного обучения. Как обучать всех по-разному? - М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2005. - С. 106.
- 32) Шишов С.Е., Агапов И.Г. Компетентный подход к образованию как необходимость // Мир образования – образование в мире. – 2001. – № 4. – С. 8 – 19.
- 33) Шкерина Л.В. Новые стандарты – новое содержание и технологии обучения математике будущего учителя: проблемы и перспективы // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014. №3(29). С. 12-22.
- 34) Шкерина Л.В., Багачук А.В., Кейв М.А., Шашкина М.Б. Теоретические основы и технологии измерения и оценивания профессиональных компетенций студентов – будущих учителей математики: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2013.–312 с.
- 35) Шкерина Л.В. Методика выявления и оценивания уровня сформированности профессиональных компетенций студентов - будущих учителей математики: учебное пособие. - Красноярск: РИО КГПУ, 2015
- 36) Щербатых С.В. «П.А. Некрасов - математик, педагог, философ, «современник» // Математика в школе – 2008 – № 2. С. 78-80.

Приложение 1

Занятие 1. Для чего нужна комбинаторика. Исторические комбинаторные задачи.

Цели: формирование знаний у учащихся в области комбинаторики, введение определения комбинаторики, формирование знаний об областях применения комбинаторики в жизни.

Ход занятия: Урок проводится в виде беседы.

В начале урока учитель рассказывает учащимся о Комбинаторике, затем представляет несколько исторических задач по комбинаторике. Далее, рассказывает для чего нужна комбинаторика, ее важность и значимость в жизни. Затем, в ходе беседы, обсуждают что такое комбинаторика и ее значимость. Введение определения комбинаторики

Занятие 2. Понятие факториала. Решение заданий с использованием факториала.

Цели: расширений знаний о комбинаторике, введение понятия факториала, умение применять понятие факториала при решении заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

В начале урока, учитель вместе с учащимися вспоминают, изучали ли они раньше такое понятие, как факториал, и что это такое?

Учитель говорит тему и цель урока.

Введение нового материала:

Факториал числа — это произведение натуральных чисел от 1 до самого числа (включая данное число). Обозначается факториал восклицательным знаком «!».

Примеры:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Факториал определён только для натуральных чисел и нуля.

Факториал нуля и единицы это 1.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Термин факториал ввел в 1800 году французский математик Аргобаст Луи Франсуа Антуан.

Обозначение $n!$ придумал чуть позже немецкий математик Кристиан Крамп в 1808 году.

Интересные факториалы проверьте сами:

$$145 = 1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145$$

$$40\ 585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

Вычислить:

1. $7!$

Решение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

2. $6! - 2!$

Решение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 120 - 2 = 118$

3. $15! - 13!$

Решение: $14 \cdot 15 = 210$

4. $5! + 4!$

Решение: $5! + 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 24 = 144$

5. $(7! - 5!)/4!$

Решение: $(7! - 5!)/4! = (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!)/4! = (5 \cdot 4! \cdot (42 - 1))/4! = 5 \cdot 41 = 205$

6. $\frac{10!}{5!}$

Решение: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1} = 30240$

7. Сколькими различными способами можно составить список учеников, если в нём должно быть 25 различных учеников?

Решение: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 25 = 25!$

Занятие 3. Правило суммы. Правило произведения.

Цели: расширение знаний о комбинаторике, введение правила суммы и правила произведения для решения прикладных задач, формирование практических навыков решения комбинаторных заданий, используя правило суммы и произведения.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)

5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Учитель объявляет тему и цель урока.

Введение нового материала:

Введение правила суммы.

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор "либо A , либо B " можно сделать $(m+n)$ способами.

При использовании правила суммы в такой формулировке нужно следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B . Если такие совпадения есть, то правило суммы утрачивает силу и получается лишь $m+n-k$ способов выбора, где k - число совпадений.

Введение правила умножения.

Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить mn способами.

Правило произведения можно наглядно представить с помощью следующей таблицы:

$(A_1, B_{11}),$	\dots	(A_1, B_{1n})
$(A_2, B_{21}),$	$\dots,$	(A_2, B_{2n})
\dots		
$(A_i, B_{i1}),$	$\dots,$	(A_i, B_{in})
\dots		
$(A_m, B_{m1}),$	$\dots,$	$(A_m, B_{mn}).$

Здесь через A_1, \dots, A_m обозначены m способов выбора объекта A , а через B_{i1}, \dots, B_{in} обозначены n способов выбора объекта B , если объект A выбран i -ым способом. Эта таблица содержит все способы выбора пары (A, B) и состоит из mn элементов.

Если способы выбора объекта B не зависят от того, как выбран объект A , то вместо предыдущей таблицы получаем более простую таблицу:

$$\begin{aligned} &(A_1, B_1), \quad \dots \quad (A_1, B_1) \\ &(A_2, B_2), \quad \dots, \quad (A_2, B_2) \\ &\dots \\ &(A_m, B_m), \quad \dots, \quad (A_m, B_m). \end{aligned}$$

Правило суммы на языке теории множеств:

Если пересечение конечных множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B .

Правило произведения на языке теории множеств:

Если множества A и B конечны, то число N всевозможных пар (a, b) , a принадлежит A , b принадлежит B , равно произведению чисел элементов этих множеств.

Пример решения задачи с помощью применения правила суммы:

Задача 1. В вазе 6 яблок, 5 груш и 4 сливы. Сколько вариантов выбора одного плода?

Решение: $6 + 5 + 4 = 15$

Ответ: 15 вариантов.

Пример решения задачи с помощью применения правила произведения:

Задача 1. Сколькими способами можно составить трёхцветный флаг из трех горизонтальных полос, если имеется материя 5 различных цветов?

Решение: Для верхней полосы флага существуют все 5 способов выбора цвета. Если цвет верхней полосы выбран, то это ограничивает число вариантов выбора цвета средней полосы – их остаётся 4. После выбора цветов верхней и средней полос остаётся лишь 3 способа выбрать цвет нижней полосы. Тогда $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ответ: 60 способов.

Занятие 4. Решение комбинаторных задач на правило суммы и произведения.

Цели: выявление и устранение пробелов при решении комбинаторных заданий.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вначале урока учащиеся вместе с учителем вспоминаю в чем заключается правило суммы и правило произведения. Далее учитель формулирует тему и цель урока. После этого решают ряд заданий, предложенных учителем.

Задача 1. Сколько существует вариантов покупки одной розы, если продают 3 алые, 2 алые и 4 жёлтые розы?

Решение: $3 + 2 + 4 = 9$

Ответ: 9 вариантов.

Задача 2. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: $A=17, B=13$

По правилу суммы $A \cup B=17+13=30$

Ответ: 30 способов.

Задача 3. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, что бы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

Решение.

Предположим, что платье Аня уже выбрала. К этому платью она может надеть любую из трёх пар туфель. Таким образом, существует 3 набора «платье-туфли», содержащих фиксированное платье. Поскольку платьев имеется 4, то $4*3=12$

Ответ: 12 вариантов.

Задача 4. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: Имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно $12 \cdot 3 = 36$ вариантов переплета.

Ответ: 36 вариантов.

Занятие 5. Перестановки без повторений.

Цели: введение понятия перестановки, введение формулы для нахождения количества перестановок без повторения.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Учитель говорит тему и цель урока.

Введение нового материала:

Перестановки без повторений - различные упорядочивания данного n -множества, отличающиеся друг от друга лишь порядком входящих в них элементов.

Обозначение: P_n (от фр. "permutation" - перестановка)

При составлении размещений без повторений из n элементов по k получались расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют *перестановками из n элементов, или n -перестановками*.

Можно также сказать, что перестановками из n элементов называют всевозможные n -расстановки, каждая из которых содержит все эти элементы по одному разу и которые отличаются друг от друга лишь порядком элементов. Формула для P_n сразу получается из формулы для числа размещений без повторений. А именно

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$$

Задача 1. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Требуется найти число перестановок с повторениями на множестве из 8 букв, среди которых:

буква К повторяется 2 раза;

буква О повторяется 3 раза;

буква Л повторяется 2 раза

буква А повторяется 1 раз.

Таким образом,
$$P_8(2,3,2,1) = \frac{8!}{2!3!2!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 1680$$

Ответ: 1680 перестановок.

Задача 2: шесть человек могут в разном порядке сесть за круглый стол, сколько существует способов разместить эти шесть человек за столом?

Решение: т.к. все люди различны и их комбинации различаются только порядком следования, то мы имеем перестановки без повторений. Определим их число:

$$P(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720

Занятие 6. Размещения без повторений.

Цели: введение понятия размещения, введение формулы для нахождения числа размещений без повторения.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)

2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Учитель объявляет тему и цель урока, затем идет введение нового материала.

Размещения без повторений из n элементов по m - упорядоченные m -множества, состоящие из элементов n - множества.

Обозначение: A_n^k (от фр. "arangement" - размещения)

Общий вид задач:

Имеется n различных предметов. Сколько из них можно составить расстановок?

При этом две расстановки считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Такие расстановки называют *размещениями без повторений*. При составлении k -размещений без повторений из n предметов нужно сделать k выборов. На первом шагу можно выбрать любой из имеющихся n предметов. Если этот выбор уже сделан, то на втором шагу приходится выбирать из оставшихся $n-1$ предметов - ведь повторный выбор сделать уже нельзя. Точно так же на третьем шагу для выбора остается лишь $(n-2)$ свободных предметов, на четвертом - $n-3$ предметов... на k -ом шагу $(n-k+1)$ предметов. Поэтому по правилу произведения получаем, что число k -размещений без повторения из n предметов выражается следующим образом

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам по одному в вагон?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть только один человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещений без повторений:

$$A_9^7 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181440$$

Ответ: 181440 способов.

Задача 2: расписание одного дня состоит из двух пар. Определить число вариантов расписания при выборе из пяти дисциплин, если не может быть одинаковых пар.

Решение: имеем размещения без повторений из пяти элементов по два, из число: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$

Ответ: 20 вариантов.

Занятие 7. Сочетания без повторений.

Цели: введение понятия сочетания, введение формулы для нахождения числа сочетаний без повторения.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Учитель говорит тему и цель урока.

Введение нового материала, затем одна задача решается при помощи учителя, а вторая самостоятельно (сверяют с эталоном).

K -сочетания из n элементов - всевозможные k -расстановки, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком.

Обозначение: C_n^k (от фр. "combinaison" - сочетания)

Формула для числа сочетаний легко получается из формулы для числа размещений. Действительно, если составить сначала все k -сочетания из n элементов, а потом переставить входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все k -размещения из n элементов, причем каждое только по одному разу. Но из каждого k -сочетания

можно сделать $k!$ перестановок, а число этих сочетаний равно C_n^k

Значит, справедлива формула

$$k!C_n^k = A_n^k$$

Из этой формулы находим, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Заметим, что выведенная формула совпадает с формулой для числа перестановок из k элементов одного типа и $(n-k)$ элементов второго типа:

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Иначе $C_n^k = P(k, n-k)$.

Число сочетаний из n элементов по k можно найти по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Числа C_n^k часто называют *биномиальными коэффициентами*.

Задача 1. Сколько существует всего исходов, если из колоды вынимают две карты одновременно?

Решение. Порядок не важен, значит:

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{34!2!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34!}{34! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 35 = 630.$$

Ответ: 630 исходов.

Задача 2. В шахматном турнире участвует 7 человек; сколько партий будет сыграно, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна партия?

Решение: имеем сочетания без повторений из 7 элементов по 2; их число: $C_7^2 = \frac{A_7^2}{P_2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

Ответ: 21 партия.

Занятие 8-9. Решение комбинаторных задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Цели: систематизация и обобщение знаний, выявление и устранение пробелов по данной теме.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (65 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия: Учитель говорит цель урока, затем делит учащихся на группы и дает список заданий, которые они должны решить, затем объясняют решение задач у доски.

Задача 1. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать капитана команды для математических соревнований и его заместителя?

Решение:

$$A_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870$$

Ответ: 870 способов.

Задача 2. Сколько всего исходов, если друг за другом из колоды вынимают две карты, не возвращая карту обратно (выбор без возвращения)?

Решение:

$$A_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)!} = \frac{36!}{34!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34!}{34!} = 1260.$$

Ответ: 1260 исходов.

Задача 3. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова АБАКАН?

Решение. Требуется найти число перестановок на множестве из 6 элементов, среди которых три элемента одинаковы:

$$P_6(3) = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 120$$

Ответ: 120 перестановок.

Задача 4. Сколько различных 4-буквенных слов можно составить из символов 0,0,a,b?

Решение. Другими словами, требуется найти число перестановок с повторениями на 4 элементах выборки, в которой два элемента одинаковы:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Ответ: 12 перестановок.

Задача 5. В чемпионате по футболу 7 команд. Каждая команда играла с каждой один раз. Сколько всего было игр?

Решение. Порядок выбора не имеет значения, т.е. если выбраны две команды, то неважно, какая из них первая, а какая — вторая:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!2} = 21.$$

Ответ: 21 игра.

Задача 6. У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

Решение. Тут все просто: есть $n = 6$ сортов, из которых надо выбрать $k = 3$ сорта. Число сочетаний можно найти по формуле:

$$C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots = 20.$$

Ответ: 20 способов.

Занятие 10. Перестановки с повторением.

Цели: введение понятия перестановки с повторением, введение формулы для нахождения количества перестановок с повторением.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вспоминают определение и формулу для нахождения числа перестановок без повторения. Объявление темы и цели урока.

Введение нового материала:

Ранее переставлялись предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок-некоторые перестановки совпадают друг с другом. В этом случае речь идет о перестановках с повторениями.

Перестановки с повторениями

Перестановкой с повторениями состава (k_1, \dots, k_m) из букв (a_1, \dots, a_m) называют любой кортеж длины $k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ в который буква a_1 входит k_1 раз, ..., буква a_m - k_m раз.

Обозначение: $P(k_1, \dots, k_m)$ (от фр. "permutation" - перестановка)

Общий вид задач:

Имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, ..., n_k элементов k -го типа?

Число элементов в каждой перестановке равно $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Поэтому если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получается меньшее число перестановок. Действительно, возьмем, например, перестановку в которой сначала вписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы k -го типа. Элементы первого типа можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же не меняют $n_2!$ перестановок элементов второго типа, ..., $n_k!$ перестановок элементов k -го типа.

Перестановки элементов первого типа, второго типа, и т.д. можно делать независимо друг от друга. Поэтому (по правилу произведения) элементы перестановки можно переставлять друг с другом $n_1!n_2! \dots n_k!$ способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому множество всех $n!$ перестановок распадается на части, состоящие из $n_1!n_2! \dots n_k!$ одинаковых перестановок каждая. Значит число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно $\bar{P}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Итак, число перестановок с повторениями можно подсчитать по следующей формуле:

$$\bar{P}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Задача 1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение. Здесь у нас одна буква «м», четыре буквы «и», три буквы «с» и одна буква «п», а всего 9 букв. Значит, по формуле перестановок с повторениями число перестановок равно

$$P(4, 3, 1, 1) = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = 2520$$

Ответ: 2520 перестановок.

Задача 2. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД, МАТЕМАТИКА.

Решение: имеем перестановки с повторениями.

А) ДЕД $n=3, k=2, n_1=2, n_2=1$

$$P_3(2, 1) = 3! / (2! \cdot 1!) = 6 / 2 = 3;$$

Б) МАТЕМАТИКА $n=10, k=6, n_1=2, n_2=3, n_3=2, n_4=n_5=n_6=1$

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = 10! / (2! \cdot 3! \cdot 2!) = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 = 134\,400.$$

Занятие 11. Размещение с повторением.

Цели: введение понятия размещение с повторением, введение формулы для нахождения числа размещений с повторением.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вспоминают определение и формулу для нахождения числа размещений без повторения. Объявление темы и цели урока.

Введение нового материала:

Размещения с повторениями - кортежи длины k , составленные из элементов m -множества.

Обозначение: \bar{A}_n^k (от фр. "arangement" - размещения)

Общий вид задач:

Даны предметы, относящиеся к n различным видам. Из них составляют всевозможные расстановки по k предметов в каждой - k -расстановки. При этом в расстановки могут входить и предметы одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. Нужно найти общее число таких расстановок.

Расстановки указанного типа называются k -размещениями с повторениями из элементов n видов. Число всех таких расстановок можно

найти по формуле $\bar{A}_m^k = m^k$

Задача 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из 9 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Решение. Цифры в числах могут повторяться, и число зависит от порядка цифр в его записи. Значит, это размещения с повторениями, т.е. кортежи. Их число $\bar{A}_9^4 = 9^4 = 6561$

Ответ: 6561 число.

Задача 2. Сколько двухзначных номеров можно составить из 10 цифр?

Решение: имеем размещения с повторениями из 10 элементов по 4, их число: $\bar{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$

Ответ: 100.

Занятие 12. Сочетание с повторением.

Цели: введение понятия сочетание с повторением, введение формулы для нахождения числа сочетаний с повторением.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)

2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Введение нового материала (10 мин)
4. Выполнение заданий на закрепление новой темы (15 мин)
5. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Вспоминают определение и формулу для нахождения числа сочетаний без повторения. Объявление темы и цели урока.

Введение нового материала:

Сочетания с повторениями из m элементов по k - различные составы кортежей длины k из элементов m -множества.

Обозначение: \bar{C}_m^k (от фр. "combinaison" - сочетания)

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k можно найти по следующей формуле

$$\bar{C}_m^k = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$$

Общий вид задач:

Имеются предметы n различных типов. Сколько k -комбинаций можно составить из них, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации

Свойства сочетаний:

Числа обладают целым рядом свойств. Эти свойства можно доказать по-разному. В некоторых случаях удобнее всего прямо воспользоваться

формулой $\bar{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (*)

Часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений: подсчитываем число комбинаций некоторого вида и разбиваем эти комбинации на классы без общих элементов. После этого находим,

сколько комбинаций входит в каждый класс. Складывая полученные числа, снова получаем число всех комбинаций данного вида. Это и дает искомое соотношение.

$$1. \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad (1)$$

Доказательство:

Это соотношение сразу вытекает из формулы (1). Ведь если заменить в формуле k на $n-k$, то $(n-k)$ заменится на $n-(n-k)=k$ и в результате множители, стоящие в знаменателе, поменяются местами. Но равенство (2) можно доказать и не прибегая к явному виду числа сочетаний. Если выбрать из n различных элементов некоторое k -сочетание, то останется дополнительное сочетание из $(n-k)$ элементов, а дополнительным к полученному $(n-k)$ -сочетанию является исходное k -сочетание. Таким образом, k -сочетания и $(n-k)$ сочетания образуют взаимно-дополнительные пары, потому число этих сочетаний одно и то же. Значит, $C_n^k = C_n^{n-k}$ (2).

$$2. \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (2)$$

Доказательство:

Для доказательства этого равенства составим k -сочетания из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ и разобьем их на два класса. В первый из них войдут сочетания, содержащие элемент a_n , а во второй - сочетания, не содержащие этого элемента. Если из любого сочетания первого класса откинуть элемент a_n , то останется $(k-1)$ сочетание, составленное из элементов a_1, \dots, a_{n-1} . Число этих сочетаний равно C_{n-1}^{k-1} . Поэтому в первый класс входит C_{n-1}^{k-1} комбинаций. Сочетания второго класса являются k -сочетаниями

из $(n-1)$ элемента a_1, \dots, a_{n-1} . Поэтому их число равно C_k^{n-1} . Поскольку любое k -сочетание из элементов a_1, \dots, a_n принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно C_k^{n-1} , то приходим к равенству (2).

$$3. C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (3)$$

Доказательство:

Напомним, что 2^n - это число всех n -размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьем эти размещения на классы, отнеся в k -й класс те, в которые входят k элементов первого типа и $(n-k)$ элементов второго типа. Размещения k -го класса - это не что иное, как всевозможные перестановки из k элементов первого типа $(n-k)$ элементов второго типа.

Известно, что число таких перестановок равно $P(k, n-k)$, а $P(k, n-k) = C_n^k$

. Значит, общее число размещений всех классов равно $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$

. С другой стороны, это же число равно 2^n . Тем самым доказано соотношение (3).

$$4. C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m \quad (4)$$

Доказательство:

Рассмотрим m -сочетания с повторениями, составленные из элементов $(n+1)$ типов, например $(n+1)$ букв a, b, c, \dots, x . Число таких сочетаний равно $C_{n+1}^m = C_{n+m}^m$. Разобьем все эти сочетания на классы, отнеся к k -му классу сочетания, в которые k раз входит буква a . Остальные $(m-k)$ мест могут быть заняты оставшимися буквами b, c, \dots, x число которых равно n . Поэтому в k -ый класс входит столько сочетаний, с повторениями, сколько можно составить

$(m-k)$ сочетаний с повторениями из элементов n типов, т.е. $C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Значит общее число всех сочетаний равно $C_{n+m-1}^m + C_{n+m-1}^{m-1} + \dots + C_n^1 + C_{n-1}^0$. С другой стороны это число равно C_{n+m}^m . Таким образом равенство (4) доказано.

$$5. C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1} \quad (5)$$

Доказательство:

Заменяя в (4) n на $(n+1)$ и m на $(m+1)$, используя (2), получим искомое равенство.

Частными случаями формулы (5) при $n=1,2,3$ являются

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + m(m+1)(m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$$

Занятие 13 – 14. Решение комбинаторных задач по темам «Перестановки без повторений, размещение без повторений, сочетание без повторений».

Цели: систематизация и обобщение знаний, выявление и устранение пробелов по данной теме.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (65 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

Учитель говорит цель урока. Учащиеся работают в парах, если что то не понятно, помогают друг другу, затем идет взаимопроверка (сверяют по эталону)

Задача 1. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “математика”?

Решение. Буква “а” входит 3 раза ($K_1 = 3$), буква “м” – 2 раза ($K_2 = 2$), “т” – 2 раза ($K_3 = 2$), буквы “е”, “к”, “и” входят по одному разу, отсюда $K_4 = K_5 = 1$.

$$C_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200.$$

Ответ: 151200 слов

Задача 2. Сколько чисел, больших 3000000, можно составить из цифр 3, 2, 2, 1, 1, 1, 0.

Решение. На первом месте обязательно должна стоять тройка. Оставшиеся 6 цифр образуют перестановку, в которой повторяются $n_1 = 2$ двойки; $n_2 = 3$ единицы и $n_3 = 1$ ноль. Всего таких перестановок

$$P_{2,3,1} = \frac{6!}{2!3!} = 60.$$

Ответ: 60 чисел.

Задача 3. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть несколько человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:

$$\overline{A_9^7} = 9^7$$

Ответ: 4782969 способов.

Задача 4. На флоте иногда применяют семафр флажками. Каждой букве при этом соответствует определенное положение флажков. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Однако при передаче некоторых букв (б, д, х, ю, я) оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение?

Решение: ответ на этот вопрос дает формула для размещений с повторениями. Дело в том, что различных положений каждого флажка пять - вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Так как используют всего два флажка, то общее число основных положений равно. При этом еще надо отбросить положение, когда оба флажка направлены вниз - оно служит для разделения слов. Всего получаем 24 комбинации, а этого недостаточно для передачи всех букв русского алфавита. Поэтому для некоторых букв и пришлось направить оба флажка в одну сторону.

Ответ: 24

Занятие 15. Подготовка к итоговой контрольной работе.

Цели: обобщение и систематизация знаний по всем пройденным темам, подготовка к контрольной работе.

Структура занятия:

1. Актуализация (5 мин)
2. Постановка темы и целей урока (2 мин)
3. Выполнение заданий на закрепление новой темы (25 мин)
4. Подведение итогов урока (5 мин)

Ход занятия:

На этапе актуализации знаний, учащиеся вспоминают все основные определения и формулы: решение комбинаторных заданий перебором вариантов, правило суммы и произведения, понятие размещения и формулы для вычисления числа размещений, понятие перестановки и формулы для вычисления количества перестановок, понятие сочетания и формула для

нахождения числа сочетаний объектов, повторения определения вероятности события и алгоритма вычисления вероятности.

Задача 1. Сколькими способами можно расставить 3 различные книги на книжной полке?

Решение:

abc acb

bac bca

cab cba

Ответ:6

Задача 2. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

Ответ: 40320

Задача 3. У нас имеется 5 книг, что у нас всего одна полка, и что на ней вмещается лишь 3 книги. Сколькими способами можно расставить на полке 3 книги?

Решение: Выбираем одну из 5-ти книг и ставим на первое место на полке. Это мы можем сделать 5-ю способами. Теперь на полке осталось два места и у нас осталось 4 книги. Вторую книгу мы можем выбрать 4-мя способами и поставить рядом с одной из 5-ти возможных первых. Таких пар может быть 5·4. Осталось 3 книги и одно место. Одну книгу из 3-ёх можно выбрать 3-мя способами и поставить рядом с одной из возможных 5·4 пар. Получится 5·4·3 разнообразных троек. Значит всего способов разместить 3 книги из 5-ти $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ответ: 60.

Задача 4. Учащиеся второго класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?

Решение: $A_{94} = 9!/5! = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$

Ответ: 3024

Задача 5. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение: $C_7^2=21$

Ответ: 21

Занятие 16. Итоговая контрольная работа.

Цели: Контроль знаний учащихся.

Структура занятия:

1. Постановка целей урока (2 мин)
2. Написание контрольной работы (40 мин)

Ход занятия:

Контрольная работа:

1 вариант

1. Сколькими способами из числа 30 учащихся класса можно выбрать культорга и казначея?

2. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0,9,8,7,6,5?

3. Сколько существует различных кодов, состоящих из трехзначного числа, цифры которого выбираются из цифр 1,2,3,4, и следующего за ним трехбуквенного слова, буквы которого выбираются из гласных букв русского алфавита?

4. Используя свойства числа сочетаний, найти $C_6^4 + C_6^5 + C_6^3$.

5. Сколькими способами можно составить букет из трёх цветков, выбирая цветы из девяти имеющихся?

Вариант 2.

1. Сколькими способами 6 детей можно рассадить на 6 стульях?

2. Сколькими способами можно составить набор из 4 карандашей, выбирая их из 8 имеющихся карандашей восьми различных цветов?

3. Шифр сейфа образуется из двух чисел. Первое двузначное число, образуется из цифр 1,2,3,4,5(цифры в числе могут повторяться). Второе, трехзначное число, образуется из цифр 8 и 9. Сколько различных шифров можно использовать в таком сейфе?

4. Используя свойства числа сочетаний, найти $C_9^7 + C_{10}^8$?

5. Сколькими способами можно разложить 7 монет по двум карманам так, чтобы ни один карман не был пустым?

Приложение 2

