МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Окуневич Дарья Романовна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» как средство формирования математической грамотности обучающихся 8 классов

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
22.05.2026
(дата, подпись)

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.И. Ганжа
22.05.2026
(дата, подпись)

Дата защиты
23.06.2026

Обучающийся
Д.Р. Окуневич
22.05.2026
(дата, подпись)

Оценка удовлетворительно
прописью

Красноярск 2026

Содержание

Введение

Актуальность исследования. Современный этап развития общества характеризуется сменой доминирующей образовательной парадигмы. Акцент смещается: безусловную ценность утрачивает простое накопление фактологического багажа, уступая место способности оперировать этим знанием в условиях неопределенности и нетипичных запросов. Социальный заказ, адресованный системе общего образования, ныне формулируется через категории функциональной грамотности, критичности мышления и готовности к построению математических моделей процессов окружающей действительности. Иначе говоря, школа призвана формировать не эрудита, а субъекта деятельности, для которого математический аппарат становится средством познания и инструментом разрешения прикладных жизненных коллизий.

Подобная целевая установка получила институциональное закрепление. Обратимся к нормативной базе: требования, зафиксированные в ФГОС ООО (Приказ Минпросвещения РФ № 287), наряду с положениями Федеральной основной образовательной программы, прямо ориентируют образовательный процесс на достижение метапредметных образовательных результатов. В равной степени это касается и развития функциональной грамотности как интегративного качества. В свою очередь, Стратегия развития образования в РФ до 2030 года акцентирует необходимость практико-ориентированной интеграции содержания — данный вектор неизбежно вынуждает учителя пересматривать устоявшиеся методы конструирования учебных заданий, отказываясь от сугубо репродуктивных форм.

Между тем, декларируемые нормы вступают в заметное противоречие с реальной практикой преподавания. Аналитические материалы, аккумулируемые Институтом образования НИУ ВШЭ, а также статистическая выборка результатов ОГЭ по математике фиксируют устойчивый провал: обучающиеся демонстрируют крайне низкую успешность при решении задач, включенных в практический контекст. С типовыми, алгоритмически прозрачными упражнениями школьники справляются уверенно. Однако как только возникает необходимость применить тот же математический аппарат в видоизмененной, нестандартной или бытовой ситуации, значительная часть учащихся утрачивает инструментарий. Данный эмпирический факт свидетельствует о том, что острота проблемы формирования математической грамотности не снижается, а, следовательно, назрела потребность в целенаправленных методических решениях, выходящих за рамки традиционных приемов.

Обращаясь к теоретической разработке вопроса, следует признать наличие обширного пласта исследований. Г.С. Ковалева, Л.О. Денищева, М.В. Егупова, А.А. Темербекова и другие авторы глубоко проработали сущностные характеристики понятия, детализировали его компонентный состав и очертили общие дидактические условия эволюции данного качества. Тем не менее, фундаментальность теоретического фундамента парадоксальным образом соседствует с дефицитом прикладного инструментария в области методики. Речь идет о системно выстроенных комплексах практико-ориентированных задач, адаптированных к конкретному геометрическому материалу основной школы. В большинстве научно-методических работ акцент смещен либо на общедидактические принципы, либо на алгебраические сюжеты. Геометрические же разделы, несмотря на их очевидный прикладной потенциал, в этом отношении оказываются в зоне методического вакуума.

Суммируя изложенное, фиксируем очевидное противоречие. С одной стороны — жесткий нормативный запрос на формирование математической грамотности, зафиксированный на уровне ФГОС. С другой — методическая необеспеченность реализации этого запроса применительно к конкретным разделам геометрии. Следовательно, проблема исследования локализуется в области лакун, обнаруживаемых в методике преподавания геометрии в 8-м классе: отсутствует целостный комплекс задач, способный охватить полный цикл математического моделирования в процессе изучения подобия треугольников, что сдерживает достижение требуемых образовательных эффектов.

Объект исследования: процесс формирования математической грамотности обучающихся 8 классов на уроках геометрии.

Предмет исследования: комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» как средство формирования математической грамотности обучающихся 8 классов.

Цель исследования: разработать и апробировать комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» для 8 класса, направленный на формирование математической грамотности обучающихся.

Задачи:

1.Провести сравнительный анализ нормативно-правовых и научно-методических источников по теме исследования.

2.Выявить сущность, структуру и уровни сформированности математической грамотности школьников.

3.Определить дидактические требования к практико-ориентированным задачам и их роль в развитии математической грамотности.

4.Провести анализ особенностей изучения темы «Подобие треугольников» в курсе геометрии 8 класса и существующих учебно-методических комплектов.

5.Описать подходы к проектированию практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников», направленных на формирование математической грамотности.

6.Разработать комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников», направленных на формирование математической грамотности.

7.Апробировать разработанный комплекс задач и провести анализ результатов его эффективности.

Методы исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы, сравнительный анализ нормативных документов и учебно-методических комплектов, метод экспертной оценки, педагогическое наблюдение.

Теоретическая значимость работы заключается в систематизации подходов к конструированию практико-ориентированных задач по геометрии с учетом требований к формированию математической грамотности и полного цикла математического моделирования.

Практическая значимость исследования состоит в том, что разработанный и апробированный комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» может быть непосредственно внедрен в образовательный процесс учителей математики основной школы для повышения уровня функциональной грамотности обучающихся и их подготовки к ОГЭ.

Структура работы: Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, каждая из которых состоит из трёх параграфов, заключения, библиографического списка и приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

1.1. Математическая грамотность обучающихся: понятие, структура и уровни сформированности

При обращении к категории математической грамотности в контексте современной школы стандартно актуализируется нормативная составляющая: формулировки федеральных документов, перечни планируемых результатов и критериальные шкалы оценивания. Однако эмпирическое погружение в педагогическую реальность обнаруживает иную природу данного феномена. Формирование математической грамотности предстает здесь не как статичный набор процедурных навыков (например, воспроизведение алгоритмов решения или доказательств), а как динамичный, личностно опосредованный процесс. Его суть заключается в конструировании педагогом таких учебных ситуаций, где математический инструментарий перестает быть абстракцией. Ученик начинает распознавать математические структуры в окружающей действительности, осознавать их эвристическую ценность и, как следствие, принимать мотивированное решение об их применении для разрешения нетипичных прикладных задач. Указанная динамика с особой отчетливостью прослеживается в курсе планиметрии восьмого года обучения. Данный этап знаменует переход: от преимущественно наглядно-интуитивного восприятия конфигураций — к освоению техники строгого дедуктивного доказательства. Параллельно, и это принципиально, вводится аспект практической реализации свойств подобных фигур, что открывает широкий веер прикладных интерпретаций.

Обратимся к генезису дефиниции. Хронологически предикат «функциональная грамотность» вводится в научный оборот с 1965 года. К 1978 году ЮНЕСКО формулирует социально ориентированное определение, квалифицируя функционально грамотную личность через способность к полноценной инклюзии в деятельность группы, необходимую для ее эффективного существования.[32] С позиций данного подхода школа перестает ориентироваться на подготовку эрудита-изоляциониста. Функция математического образования в этом контексте смещается: она призвана обеспечить подростку инструментарий для социально-продуктивного взаимодействия. В современной научно-методической трактовке исследуемое понятие аккумулирует способность субъекта к разрешению как учебных, так и жизненных проблемных ситуаций.[30] Базисом при этом выступают сформированные предметные и метапредметные компетенции, а также универсальные способы действия, интегрирующие знаниевый и деятельностный компоненты.

В рамках предметной области математического образования особого внимания заслуживает трактовка, предлагаемая в методологии PISA.[31] Согласно данному подходу, математическая грамотность определяется как способность индивида мыслить математически, формулировать, применять и интерпретировать математический аппарат для разрешения задач, возникающих в многообразных практических контекстах.[29] Примечательно, что указанная дефиниция обнаруживает содержательное единство с требованиями Федеральной рабочей программы по математике (разработанной на основе ФГОС ООО), где акцентируется необходимость освоения учащимися умений распознавать проявления математических объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях, переводить их на язык математики, создавать адекватные модели, применять освоенный инструментарий, а также интерпретировать и критически оценивать полученные выводы.[1]

Именно на пересечении нормативных предписаний и реальной образовательной практики формируется подлинная грамотность.

Обращение к эмпирическим наблюдениям за деятельностью восьмиклассников обнаруживает характерный разрыв: учащиеся нередко демонстрируют безупречное владение техникой доказательства признаков подобия на абстрактном материале, однако сталкиваются с существенными трудностями при попытке применить те же положения к расчету масштаба архитектурного чертежа или определению высоты объекта по длине тени. Данное расхождение между знанием фактологической основы и способностью к ее операциональному применению служит эмпирическим свидетельством того, что констатирующее знание само по себе еще не составляет грамотности. Как обоснованно утверждает исследователь Г. С. Ковалева, математическая грамотность есть способность человека определять и осознавать роль математики в окружающем мире, выстраивать математически обоснованные суждения и использовать математический инструментарий для удовлетворения потребностей, свойственных созидательной и рефлексивно мыслящей личности.[12] При этом в методической литературе фиксируется иерархическое отношение понятий: функциональная грамотность выступает родовым понятием по отношению к функциональной математической грамотности, которая, в свою очередь, составляет стержневой компонент математической грамотности в широком смысле.

Переходя к анализу структурной организации математической грамотности, следует констатировать, что она не исчерпывается совокупностью формальных знаний — набором формул или алгоритмических предписаний. В научно-методических источниках данное качество описывается через систему взаимосвязанных когнитивных процессов и операциональных умений, подлежащих поэтапному освоению. В практической плоскости этот процесс разворачивается как последовательность действий определенной логики. Начальная фаза предполагает умение формулировать ситуацию на языке математики: идентифицировать возможность применения математического аппарата к бытовой задаче и конструировать ее математическую модель (например, распознавая в задаче о фотографировании здания структуру подобия или центрально-симметричного преобразования). Следующий этап требует применения освоенных математических понятий, фактов и процедур для получения искомого решения — в контексте изучаемой темы это составление пропорции на основе коэффициента подобия. Третий, зачастую наиболее затруднительный для учащихся этап, заключается в интерпретации, использовании и критической оценке полученных математических результатов в обратном соотнесении с исходной проблемной ситуацией. Наконец, на всем протяжении перечисленных стадий актуализируется потребность в логическом рассуждении: рефлексии над аргументацией и обосновании выводов, что обеспечивает целостность и осознанность познавательного акта. Уровень сформированности математической грамотности выступает необходимым условием развития общей математической компетентности обучающегося, позволяя ему адаптироваться к требованиям современного рынка труда

Методический анализ показывает, что операциональное обращение к структуре математической грамотности может быть обоснованно выстроено через модель, предложенную Н. В. Дударевой.[6] В данной концепции выделяется четыре компонента, находящихся в отношениях взаимной обусловленности и последовательного развертывания.

Первый — когнитивный блок — аккумулирует предметное содержание: знание понятийного аппарата, алгоритмических предписаний и логики доказательных рассуждений. Очевидно, что без усвоения признаков подобия треугольников как базового фактологического каркаса последующая деятельность лишается эвристического потенциала и превращается в механическое манипулирование символами.

Второй аспект модели — деятельностный — охватывает спектр операциональных умений и навыков, включая опыт построения математических моделей и последующей интерпретации полученных выводов. Реализация данного компонента происходит в ходе практических действий инструментального характера: построение чертежа с использованием циркуля и линейки, выполнение расчетных процедур и верификация промежуточных данных. Здесь, собственно, и происходит апробация теоретических конструкций через прикладные операции.

Прогностический компонент, согласно логике Н. В. Дударевой, выводит исследование за пределы сугубо предметной области. Он актуализирует ценностно-смысловое измерение: осознание учеником практической востребованности математического аппарата в различных сферах человеческой деятельности — от инженерного проектирования и архитектурного моделирования до бытовых измерительных задач. Снижение мотивационного фона в отсутствие подобного осознания неоднократно фиксируется в эмпирических исследованиях, что подтверждает значимость данного элемента для общей структуры.

Наконец, четвертый, рефлексивный компонент, замыкает цикл. Он предполагает реализацию функций анализа, контроля и оценки итогового решения, а также гибкую коррекцию используемых методов при столкновении с вычислительными или логическими трудностями. Педагогическое наблюдение за деятельностью школьников дает устойчивую картину: учащиеся нередко получают числовые результаты, заведомо вступающие в противоречие с объективными ограничениями (например, вычисленная высота объекта в 200 м при отсутствии соответствующих пропорций), однако не осуществляют критической проверки полученного значения на правдоподобие. Формирование рефлексивного компонента как раз и ориентировано на преодоление данного разрыва: оно предполагает, что субъект учебной деятельности самостоятельно соотносит числовой итог с реальными масштабами и, при необходимости, инициирует пересмотр выбранной стратегии решения.[6]

На практике все эти компоненты тесно переплетаются с универсальными учебными действиями (УУД), которые мы обязаны формировать согласно ФГОС. Математическая грамотность невозможна без познавательных действий (анализ данных, выявление закономерностей, например, поиск равных углов на сложном чертеже), коммуникативных (умение аргументировать свою позицию и объяснить решение однокласснику) и регулятивных (составление алгоритма действий, планирование времени на решение).

«Анализ педагогической практики показывает, что ключевой проблемой в обучении является разнородность контингента: обучающиеся приходят на урок с различным уровнем базовой подготовки, жизненным опытом и мотивацией. Поэтому понимание уровней сформированности математической грамотности –

это не просто теоретическая классификация для отчета, а необходимый, гибкий инструмент педагога, позволяющий дифференцировать обучение.

По модели Н. В. Дударевой, наблюдаем несколько четких стадий. На критическом уровне у ученика присутствуют лишь фрагментарные знания и полное неумение применять их даже в простейших задачах. Такой ребенок, видя задачу на подобие, где треугольники повернуты нестандартно, просто сдается. На репродуктивно-алгоритмическом уровне ученик знает основные алгоритмы и умеет решать типовые задачи строго по образцу, данному учителем. Это самый массовый уровень в средней школе: если задача идентична той, что была на доске, она будет решена верно, но малейшее изменение условия вызывает затруднения.

Гораздо более ценным является конструктивно-технологический уровень, который характеризуется способностью самостоятельно выбирать методы решения и использовать математический аппарат в практических ситуациях. Именно к этому уровню мы должны стремиться при изучении темы «Подобие треугольников», предлагая ученикам не просто доказать теорему, а, например, рассчитать расстояние до недоступного объекта на местности. Наивысшим уровнем сформированности является продуктивный уровень: умение проводить исследования, обобщать и находить нестандартные решения в новых условиях. Ученик на этом уровне способен сам придумать метод измерения высоты фонарного столба, используя только зеркало и рулетку, опираясь на законы подобия.

И. В. Шутрова дополняет эту картину, выделяя уровни готовности к проявлению математической грамотности, что очень важно для оценки мотивационной сферы.[30] На уровне ниже базового применение математики происходит только по прямому и детальному указанию учителя. Базовый уровень предполагает уверенное распознавание типичных жизненных ситуаций, где нужны математические методы. Повышенный уровень проявляется в предпочтении математических методов в ситуациях необходимости принятия сложных решений при отсутствии прямых указаний. А высокий уровень готовности включает выполнение творческих заданий на составление собственных задач и сравнительную оценку эффективности различных методов математики.[7]

Существенное значение имеет международный стандарт PISA, который задает определенные ориентиры. Базовым считается второй уровень, на котором учащиеся могут извлекать информацию из одного источника и использовать основные алгоритмы для решения задач. Всё, что находится ниже этого уровня (уровни 1 и ниже), является тревожным сигналом для педагога, так как на этих стадиях учащиеся не способны самостоятельно применять математику за пределами стандартных школьных процедур. Они становятся заложниками шаблонов.

Проведенный теоретический анализ позволяет сделать вывод о том, что традиционных методов объяснения нового материала и решения стандартных задач из учебника категорически недостаточно для того, чтобы помочь ученикам 8 классов перейти от репродуктивного уровня к конструктивно-технологическому и продуктивному. Абстрактные геометрические теоремы сами по себе не формируют грамотность; её формирует контекст, в который эти теоремы помещены.

Тема «Подобие треугольников» обладает колоссальным, часто недооцененным потенциалом именно для этого перехода. Здесь математика оживает, переставая быть абстрактной теоремой из учебника. Когда мы измеряем высоту здания по длине его тени, мы на самом деле работаем с двумя подобными прямоугольными треугольниками: один образован зданием и его тенью, другой – человеком (или шестом) известной высоты и его тенью. Поскольку солнечные лучи падают под одним и тем же углом, эти треугольники подобны по двум углам, а значит, отношения их соответственных сторон равны. Это позволяет составить пропорцию и вычислить недоступную высоту, зная лишь три других величины.

Методическая ценность категории подобия выходит далеко за рамки сугубо геометрических упражнений. Апеллируя к межпредметным связям и прикладным аспектам, обнаруживается, что целый ряд практических областей функционирует именно на основе данного теоретического конструкта. Картография — показательный пример: любая карта представляет собой масштабированное, подобное отображение земной поверхности, в котором соблюдается пропорциональность линейных размеров и инвариантность угловых величин. Аналогичным образом устроена геометрическая оптика: построение изображения в объективе фотоаппарата подчиняется пропорциональным отношениям в системе треугольников, образованных точкой объекта, преломляющей линзой и плоскостью матрицы. Именно этот оптический механизм детерминирует зрительное уменьшение удаленных предметов. В сфере изобразительного искусства также эксплуатируется подобие, хотя и на интуитивном уровне: законы линейной перспективы требуют, чтобы параллельные линии схожей натуры сходились в точке схода, а относительные размеры объектов дифференцировались в зависимости от удаления.

Комплекс практико-ориентированных задач, построенный на подобных контекстах, выполняет функцию системообразующего звена между формальным знанием и эвристическим мышлением. Его педагогический потенциал состоит не в заучивании признака подобия как формальной процедуры, а в трансформации характера мыслительных операций: обучающийся перестает воспринимать геометрическую теорию как изолированный артефакт учебного курса. Возникает эффект распознавания — скрытые геометрические структуры начинают прочитываться в окружающей действительности.

Принципиально важным представляется и то обстоятельство, что данная модель задает законченную логику познавательного цикла. Отправной точкой служит проблематизация: как измерить недоступный объект, не имея прямой физической возможности прикоснуться к нему? На следующем этапе происходит перевод проблемы на язык математики — строится модель, составляется пропорциональное соотношение. Далее следует обратный семантический трансфер: итоговое числовое значение необходимо вновь вписать в исходную жизненную ситуацию, интерпретировать его. Наконец, завершающий, критический акт — оценка полученного результата на реалистичность и согласованность с эмпирическими ограничениями.

Таким образом, математическая грамотность – это не конечная точка, а непрерывный процесс становления мыслящего, самостоятельного человека. И моя задача как будущего педагога – создать на уроках такую среду, где ошибки не пугают, где поиск решения ценится выше готового ответа, и где каждый маленький шаг ученика в сторону понимания практической ценности математики становится осознанным и значимым. Это убеждение и ложится в основу разработки методического комплекса, которому будет посвящена последующая часть моего исследования.

1.2. Практико-ориентированные задачи в математической подготовке: сущность, особенности и дидактический потенциал

Когда мы переходим от теоретического осмысления математической грамотности к поиску реальных инструментов её формирования, перед нами, будущими учителями, встает закономерный вопрос: как именно заставить абстрактные формулы и теоремы «заговорить» на языке, понятном современному восьмикласснику? Изучая методическую литературу и анализируя свой собственный опыт, я пришла к важному выводу. Традиционные, «стерильные» задачи из учебника, где все данные даны в идеальном виде, а алгоритм решения очевиден с первой строки, перестали быть эффективным инструментом. Они формируют навык, но не формируют грамотность. Настоящим мостом между сухой теорией и живым мышлением ученика становятся практико-ориентированные задачи (далее в тексте ПОЗ).

На практике я не раз сталкивалась с искренним, иногда даже вызывающим вопросом учеников: «А зачем мне это нужно? Где я буду использовать эту теорему в реальной жизни?». И если раньше я могла лишь абстрактно сослаться на развитие логики или необходимость сдачи экзаменов, то теперь я понимаю, что такой ответ не работает. Именно практико-ориентированное задание позволяет дать честный и убедительный ответ. В методической литературе я нашла определение, которое идеально резонирует с моими наблюдениями: практико-ориентированное задание понимается как нетипичная ситуация, из которой учащемуся необходимо самостоятельно извлечь известные и неизвестные данные, убрать излишние сведения, найти недостающие и составить математическую модель.[20]

Ключевым в данном определении представляется слово «нетипичная». Школьник привык, что задача всегда упакована в готовую математическую «обертку». ПОЗ же не имеет этой «обертки». Это задача, выполнение которой способствует формированию практических умений и навыков, необходимых в повседневной жизни. В её условии описывается конкретная жизненная ситуация, связанная с имеющимся опытом обучающихся, где результатом решения становится не просто число в ответе, а осознание значимости проблемы для личности. [10]Задача про подобие треугольников превращается из абстрактного чертежа с буквами A, B и C в реальную историю о том, как с помощью шеста и рулетки измерить высоту школьного здания или рассчитать количество краски для ремонта классной комнаты, опираясь на масштаб плана.

Такой прикладной характер обучения кардинально меняет восприятие предмета. Сюжетная основа практико-ориентированной задачи должна соответствовать возрастным интересам и взглядам учащихся, включая факты из повседневной жизни, такие как ремонт, покупки или природа.[16]

Сюжет такой задачи раскрывает приложение математики в смежных дисциплинах, знакомит с использованием математического аппарата в производстве, сфере обслуживания и быту.[28] Для меня стало важным открытием, что математика в 8 классе – это не изолированный мир, а универсальный язык, на котором говорят географы, составляя карты, строители, рассчитывая пропорции, или даже фотографы, работающие с перспективой и оптикой.

Анализируя структуру таких задач, я начала четко видеть их отличительные особенности от стандартных учебных упражнений. И эти отличия как раз и создают тот самый педагогический вызов, который развивает ученика. Во-первых, это сюжетная форма. Условие сформулировано в виде фабулы, имитирующей жизненную ситуацию, без прямого указания на необходимый математический аппарат.[24] Ученику не пишут: «Решите, используя свойство биссектрисы подобного треугольника». Ему описывают ситуацию, и он сам должен догадаться, какой инструмент из своего математического «ящика» ему подойдет. Это требует гораздо более высокого уровня самостоятельности.

Во-вторых, я обратила внимание на разнообразие представления данных. В реальной жизни информация редко приходит к нам в виде сплошного текста. В ПОЗ информация может быть представлена не только текстом, но и в виде рисунков, таблиц, схем, графиков или фотографий реальных объектов. Например, ученику может быть дана не текстовая задача, а фрагмент реальной топографической карты или фотография здания с указанием длины его тени и тени человека рядом. Умение «читать» такую разнородную информацию – это критически важный навык в современном информационном мире.

В-третьих, и это, пожалуй, самое сложное для детей, привыкших к однозначности, – это вариативность и многокритериальность. В отличие от стандартных задач с одним верным ответом, жизненные ситуации часто предполагают наличие нескольких способов решения и необходимость выбора наиболее оптимального варианта в зависимости от условий.[13] Поначалу это вызывает у восьмиклассников растерянность: «А какой ответ правильный?». Но именно в этот момент, когда они начинают спорить, сравнивать методы и обосновывать выбор, происходит настоящее развитие критического мышления.

Кроме того, работа с информацией в ПОЗ часто предполагает наличие «подводных камней». Условие задачи может содержать избыточные Например, когда в задаче про масштабирование участка детям дана длина забора, ширина дома, высота дерева и... средняя температура воздуха в этом регионе. Сначала многие пытаются впихнуть все цифры в формулу. Но в какой-то момент, кто-то из ребят говорит: «Погода тут ни при чем, это лишнее». Это означает, что они перестали быть калькуляторами и начали включать здравый смысл.

Говоря о дидактическом потенциале, я убеждена, что ПОЗ обладают широчайшими возможностями не только для формирования функциональной математической грамотности, но и для достижения глубоких образовательных и воспитательных результатов. В первую очередь, это мощнейшая мотивационная функция. Задачи создают проблемную ситуацию, которая служит мотивом для введения новых математических знаний. Они помогают преодолеть ложное представление школьников об оторванности математики, этой якобы «рафинированной науки», от реальности.[14] Когда ребенок понимает, что теорема, которую он сейчас изучает, поможет ему спроектировать пандус для бабушки или рассчитать выгодный тариф на мобильную связь, его внутренняя мотивация возрастает в разы.

Не менее важны иллюстративная и развивающая функции. ПОЗ наглядно раскрывают практическую значимость изучаемых тем, делая абстрактные понятия осязаемыми. Работа над ними способствует развитию логического и критического мышления, коммуникативных навыков при работе в группах и умения принимать решения в условиях неопределенности.[15] Я видела, как при решении комплексной практико-ориентированной задачи в группе дети учатся слушать друг друга, распределять роли (кто-то ищет данные, кто-то строит чертеж, кто-то проверяет расчеты) и приходить к консенсусу. Это те самые «гибкие навыки» (soft skills), которые сегодня ценятся работодателями не меньше, чем профильные знания.

Включение практико-ориентированных задач в образовательный процесс диктуется необходимостью изменения организации обучения с учетом практической применимости знаний и их связи с миром науки, техники и современных технологий

С точки зрения дидактического потенциала особого внимания заслуживает междисциплинарная интеграция, реализуемая через систему практико-ориентированных задач. Подобные задания создают условия для аккумуляции знаний из различных предметных областей — физики, химии, географии, информатики, — что, в свою очередь, способствует формированию метапредметных компетенций, составляющих ядро современного образовательного запроса.[13] Тематика подобия треугольников в данном контексте обнаруживает исключительную методическую пластичность. Она органично сопрягается с законами геометрической оптики (прямолинейное распространение света, конструирование камеры-обскуры), с картографическими приемами (работа с масштабными соотношениями), с графическими дисциплинами и даже с историко-архитектурным анализом. Таким образом, педагог, разрабатывающий подобные сюжеты, выходит за рамки узкопредметной функции — он выступает в роли организатора интегративного познания, обеспечивающего целостность восприятия действительности учащимся.

Целевая доминанта всех перечисленных методических усилий — формирование математической грамотности. В этом контексте практико-ориентированные задачи обретают статус не рядового тренировочного упражнения, а механизма, инициирующего полный цикл математического моделирования. Систематическое и целенаправленное включение таких заданий в учебный процесс позволяет реализовать данный цикл в его завершенной форме. Отправной точкой служит этап перевода жизненной ситуации на язык математической модели, сопровождающийся формализацией исходных условий. Далее следует применение собственно математического аппарата: вычисления, доказательные процедуры, преобразования пропорциональных зависимостей. Завершающая стадия — интерпретация и критическая оценка итогового результата в исходном практическом контексте.

Именно финальный этап — интерпретация — оказывается тем звеном, которое в условиях традиционного обучения нередко элиминируется, хотя именно оно конституирует грамотность как таковую. Существенно не просто получить численное значение (например, 15), но соотнести его с качественными ограничениями реальности: осознать, что высота дерева в 15 метров является эмпирически допустимой величиной, тогда как результат в 150 метров сигнализирует о методологической ошибке на этапе составления пропорции.

Обобщая теоретическое осмысление данной проблематики, можно констатировать: практико-ориентированные задачи выступают базовым инструментом трансформации образовательной парадигмы — перехода от пассивной рецепции знаний к деятельностному овладению математикой в качестве универсального инструмента исследования окружающего мира.

Обращение к анализу научно-методической литературы, сопряженное с рефлексией собственного опыта преподавания, обнаруживает зону профессионального дефицита, определяющую направления дальнейшего развития. Проектирование таких задач представляет собой сложный, творческий и многоаспектный процесс. Он не сводится к формальному обрамлению стандартного упражнения бытовым сюжетом. Напротив, требуется глубокая смысловая проработка контекста, калибровка уровня сложности, прогнозирование типичных затруднений и конструирование встроенного развивающего потенциала. Именно эта профессиональная сложность, однако, представляет собой содержательный вызов, определяющий вектор педагогического роста.

Тематика подобия треугольников в курсе геометрии 8 класса представляет собой содержательную область, в которой теоретические конструкции обретают наиболее наглядное и многообразное практическое воплощение. Разработка комплекса практико-ориентированных задач по данной теме преследует цель, выходящую за рамки простого подбора тренировочных упражнений: предполагается создание серии заданий исследовательского типа, построенных как мини-проекты. Основная задача видится в формировании у обучающихся устойчивой способности распознавать геометрические структуры подобия в различных эмпирических контекстах — в тенях, отбрасываемых объектами при искусственном и естественном освещении; в отражениях на водной поверхности; в конструктивных элементах инженерных сооружений; в оптических схемах фотографических устройств, являющихся неотъемлемой частью повседневного опыта современных подростков.

Одной из ключевых задач исследования является преодоление разрыва между формально-алгоритмическим владением материалом и его осмысленным применением в вариативных жизненных ситуациях. Достижение этой цели, как представляется, невозможно без систематического использования практико-ориентированного подхода, обеспечивающего переход от репродуктивной модели обучения к деятельностной, исследовательской парадигме. Результатом такого обучения должно стать формирование не «решателя задач» в узком смысле слова, а функционально грамотной личности, обладающей способностью к уверенной ориентации в сложных, многомерных контекстах современной действительности.

Реализация обозначенных задач составляет содержательное ядро практической части настоящего исследования, в которой представлен авторский комплекс заданий, методические рекомендации по их включению в учебный процесс и результаты апробации.

1.3. Возможности использования практико-ориентированных заданий для формирования математической грамотности

Когда от теоретического осмысления практико-ориентированных задач мы переходим к вопросу об их применении, в сознании нередко возникают строгие методические алгоритмы, пошаговые инструкции и идеальные сценарии уроков. Однако обращение к реальной педагогической практике показывает, что внедрение подобных заданий представляет собой гибкий и многогранный процесс, требующий адаптации к конкретным условиям занятия. Это не механическая вставка «задачи с сюжетом» в конец урока с целью заполнить оставшееся время. Это умение выстроить ситуацию, в которой у школьника возникает искренний интерес к проблеме, и готовность корректировать ход урока в зависимости от того, как развивается обсуждение. В современной школе учитель проектирует не просто решение задачи, а весь мыслительный путь ученика, и именно этот путь, механизм формирования грамотности, становится центральным объектом методического внимания.

Основной потенциал практико-ориентированных заданий заключается не в проверке знания формулы, а в вовлечении учащегося в целостный процесс работы с проблемой.[12] В методической литературе данный процесс описывается через последовательность ключевых этапов.[20] Первый этап — формулирование: перевод задачи с естественного языка на язык математики, построение математической модели. Второй — применение: использование математических понятий, фактов и процедур для получения решения внутри построенной модели. Третий — интерпретация и оценка: возврат от полученного результата к реальной ситуации, проверка его разумности и значимости в контексте исходной проблемы.

В ходе исследования был сделан вывод, что главная цель практико-ориентированного подхода — не просто получить правильный ответ, а научиться его оценивать. Наиболее значимым этапом всего цикла является третий — этап интерпретации. Рассмотрим типичную ситуацию на уроке геометрии: класс решает задачу на подобие треугольников, связанную с измерением высоты здания по длине тени. Один из учащихся, увлёкшись вычислениями, получает ответ, согласно которому высота школы составляет около двухсот метров. В традиционной логике «верно-неверно» он бы просто записал это число и получил бы оценку за корректно выполненные арифметические действия. Но в логике практико-ориентированного подхода учитель останавливает класс и задаёт вопрос: «Ребята, а это похоже на правду?» Возникает пауза, а затем кто-то замечает: «Нет, наша школа же всего три этажа, так не бывает». Именно этот момент возврата к реальности, когда ученик самостоятельно осознаёт абсурдность полученного результата и возвращается к началу решения, чтобы найти ошибку в построении модели, и есть проявление настоящей математической грамотности.При решении планиметрических задач важную роль играет "математический триггер" — алгоритмический подход, позволяющий ученику мгновенно распознать необходимый математический аппарат в нестандартном условии

Систематическое прохождение данного цикла позволяет преодолеть разрыв между формальными знаниями и способностью ориентироваться в реальном мире, превращая математику из набора правил в инструмент осмысленной оценки действительности.

Однако, чтобы этот цикл запускался регулярно, недостаточно просто брать готовые задачи из интернета или сборников. Анализ практики показывает, что хаотичное использование таких заданий не даёт устойчивого результата. Для эффективного формирования математической грамотности предлагается использовать модельные схемы, связывающие три уровня: разделы школьного курса (например, геометрия), индикаторы знаний и умений, востребованных в жизни (расчёт площадей, чтение графиков, работа с пропорциями), и сферы человеческой деятельности (личная жизнь, общественная практика, профессиональная или научная сфера).[22]

Особого внимания заслуживает эвристический потенциал модельных схем, апробированный в процессе конструирования уроков по теме подобия треугольников. Традиционная практика проектирования занятий в данной содержательной линии, как правило, ограничивалась подбором стандартных упражнений, связанных с измерительными процедурами. Внедрение же структурно-модельного подхода инициирует качественно иной уровень методической рефлексии. Он обеспечивает условия для гармоничной интеграции практических заданий в канву рабочей программы и, что принципиально, позволяет учитывать актуальные познавательные интересы обучающихся. В качестве иллюстративного примера можно рассмотреть сопряжение геометрического содержания со сферой цифровой фотографии. Актуализация профессионального контекста (техника съемки) и личностно значимого для подростков опыта (создание визуального контента) преобразует абстрактную задачу о пропорциональных отрезках в исследование оптических принципов работы современных устройств — например, механизма трансфокации в смартфоне или оптической иллюзии увеличения ближних объектов. В данном случае учебное задание перестает быть формальным упражнением и трансформируется в акт познания собственной предметной среды.

Не менее значимым ресурсом выступает современная цифровая образовательная среда, игнорирование которой в условиях 2026 года представляется методически несостоятельным. Интерактивные визуализационные платформы (GeoGebra, Desmos и аналоги) открывают возможность проведения компьютерных экспериментов: учащиеся получают инструмент для выдвижения и верификации гипотез о геометрических закономерностях в режиме реального времени. В практической реализации данный подход демонстрирует выраженный дидактический эффект.[4] Статичный, зачастую неточный чертеж на классной доске уступает место динамической модели, доступной для манипулирования. Перемещая вершины подобных треугольников в интерактивной среде, обучающиеся эмпирически фиксируют инвариантность отношения соответственных сторон при любых трансформациях конфигурации. Цифровые лаборатории, таким образом, выполняют функцию исследовательских полигонов: ученик не воспроизводит заданный алгоритм, а самостоятельно открывает устойчивые зависимости, что коррелирует с базовыми принципами проблемно-ориентированного обучения. Кроме того, цифровой инструментарий позволяет оперировать значительными объемами данных и строить прогнозные модели, что приобретает особую актуальность при решении задач из областей финансового анализа или инженерного проектирования, где исходные данные не являются искусственно «причесанными», а сохраняют эмпирическую нерегулярность.

Вместе с тем технологическое оснащение остается лишь вспомогательным средством. Фундаментальным драйвером формирования грамотности признается проектная и эвристическая деятельность как таковая. В этом контексте практико-ориентированные задачи выступают эффективным организационным механизмом при выстраивании проектного цикла, включающего последовательные фазы: мотивационную, планово-организационную, исполнительскую и рефлексивную.[10] Эмпирические наблюдения показывают, что каждая из перечисленных стадий актуализирует различные, но взаимодополняющие компоненты математической грамотности, что обеспечивает целостность формируемого качества.

На этапе планирования у учащегося формируется умение структурировать информацию и выбирать адекватные математические методы. В ходе работы с группами восьмиклассников нередко возникают дискуссии о способах измерения расстояния до недоступного объекта: одни предлагают использовать зеркало, другие — метод вешек. Именно такая дискуссия и представляет собой процесс осознанного выбора метода. На этапе реализации развивается навык интеграции знаний из смежных дисциплин (физики, биологии, технологии) для решения прикладной задачи. Наиболее высокий уровень — эвристическое конструирование: возможность предлагать учащимся задания на составление задач, обратных решенным, или аналогичных по сюжету, что развивает гибкость мышления и метакогнитивные навыки.[23]

В рамках эвристического конструирования целесообразно предлагать обучающимся самостоятельную деятельность по созданию практико-ориентированных задач.[19] Например, учащимся предлагается выявить на территории школы объекты, в структуре которых присутствуют подобные треугольники, зафиксировать их с помощью фотосъемки и составить на основе полученного изображения текстовую задачу для одноклассников. На первых этапах подобное задание может вызывать у школьников определенные затруднения, связанные с необходимостью смены ролевой позиции — с «решателя» на «составителя». Однако в процессе работы наблюдается значительное повышение познавательной активности: учащиеся начинают целенаправленно анализировать окружающие объекты, обсуждать формулировки условий и критерии математической корректности, стремясь создать задачу с оптимальным уровнем сложности. Переход обучающегося в позицию автора задачи способствует возрастанию внутренней мотивации и личной ответственности за результат. При этом прогресс в формировании математической грамотности наиболее ярко проявляется не только в результатах стандартного контроля, но и в способности учащихся самостоятельно моделировать практические ситуации.

Не менее важен диагностический потенциал подобных заданий. Если традиционная контрольная работа фиксирует преимущественно знание теоретического материала, то практико-ориентированные задачи позволяют не только формировать, но и диагностировать уровень сформированности универсальных учебных действий, лежащих в основе математической грамотности.[26]

Диагностический потенциал практико-ориентированных задач не ограничивается фиксацией итогового результата — не менее значимой представляется оценка процессуальной стороны деятельности обучающегося. В рамках данной логики познавательные универсальные учебные действия актуализируются через способность школьника идентифицировать зоны информационного дефицита, а также осуществлять анализ данных, представленных в различных знаковых системах (табличные формы, схематичные модели). Иллюстративный случай: при работе с картографическим масштабом учащийся сталкивается с необходимостью выявления недостающих сведений об истинном расстоянии и поиска путей восполнения этого пробела. Коммуникативный блок УУД, в свою очередь, наиболее полно раскрывается в условиях группового взаимодействия. Здесь на первый план выходят умения аргументировать собственную позицию, обосновывать избранную стратегию решения и достигать математически валидного согласования позиций. Регулятивный компонент проявляется в способности конструировать алгоритм действий в ситуации неполной определенности и критически соотносить полученный итог с условиями задачи. Показательным индикатором сформированности данного элемента служит умение ученика распознать заведомо некорректный результат (например, отрицательное значение длины отрезка) и инициировать возврат к исходному этапу решения с целью локализации допущенной ошибки.

Обобщение материалов теоретического анализа приводит к следующему выводу. Практико-ориентированные задания не сводятся к роли иллюстративного сопровождения либо факультативного материала для углубленной работы с мотивированными учащимися. Их функция — системообразующая: они выступают основным механизмом трансформации образовательного процесса, обеспечивая переход от пассивной рецепции теоретических конструктов к деятельностному освоению математики в качестве универсального познавательного инструментария, интегрирующего предметное содержание, цифровые технологии и субъектный опыт школьников.

Осмысление дидактического потенциала ПОЗ в теоретическом ключе закономерно ставит вопрос о его материализации в конкретном педагогическом продукте. Учитывая описанный спектр возможностей — от реализации полного цикла математического моделирования до реализации диагностических функций, — исследование выходит на этап практического конструирования. Содержательная область «Подобие треугольников» в курсе планиметрии 8 класса представляет для этой задачи благодатную почву, поскольку располагается в точке пересечения наглядно-интуитивного и строго-дедуктивного подходов и одновременно характеризуется широким спектром прикладных интерпретаций — в архитектурной практике, картографировании, оптических системах и проектной деятельности.

Следовательно, логика исследовательского движения предопределяет переход от концептуального осмысления к проектно-методической разработке. Зафиксированные механизмы, дидактические условия и принципы построения заданий станут концептуальным фундаментом для создания авторского комплекса практико-ориентированных упражнений. Данный комплекс, целевой установкой которого выступает формирование у восьмиклассников способности к распознаванию математических закономерностей в окружающей действительности, получит развернутую презентацию, теоретическое обоснование и экспериментальную верификацию во второй, практической главе настоящей выпускной квалификационной работы.

Выводы по главе 1

Математическая грамотность представляет собой комплексное качество личности, отражающее способность человека мыслить математически, формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в разнообразных практических контекстах. В современном образовательном процессе она рассматривается не как изолированный набор предметных знаний, а как системообразующий компонент функциональной грамотности, включающий когнитивный, деятельностный, прогностический и рефлексивный компоненты.

В ходе теоретического анализа были выделены четыре уровня сформированности математической грамотности. Критический уровень характеризуется фрагментарными знаниями и неумением применять их даже в простейших задачах. Репродуктивно-алгоритмический уровень предполагает знание основных алгоритмов и умение решать типовые задачи по образцу. Конструктивно-технологический уровень проявляется в способности самостоятельно выбирать методы решения и использовать математический аппарат в практических ситуациях. Продуктивный уровень — это умение проводить исследования, обобщать и находить нестандартные решения в новых условиях. Как справедливо отмечает исследователь Г. С. Ковалева, математическая грамотность есть способность человека определять и понимать роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику для удовлетворения потребностей созидательного, заинтересованного и мыслящего гражданина.

Практико-ориентированные задачи представляют собой нетипичные ситуации, из которых учащемуся необходимо самостоятельно извлечь известные и неизвестные данные, отсеять излишние сведения, обнаружить недостающие и построить математическую модель. По итогам проведенного анализа были выделены следующие отличительные особенности таких задач. Во-первых, сюжетная форма: условие сформулировано в виде фабулы, имитирующей жизненную ситуацию, без прямого указания на необходимый математический аппарат. Во-вторых, разнообразие представления данных: информация может быть представлена в виде текста, рисунков, таблиц, схем, графиков или фотографий реальных объектов. В-третьих, вариативность и многокритериальность: наличие нескольких способов решения и необходимость выбора наиболее оптимального варианта. В-четвертых, работа с информацией: наличие избыточных или недостающих данных, требующих критического анализа.

Дидактический потенциал практико-ориентированных задач заключается в реализации полного цикла математического моделирования: формулирование проблемы на языке математики, применение математических фактов и методов для решения, интерпретация и оценка полученных результатов в контексте исходной жизненной ситуации.[15] Использование модельных схем, цифровых технологий (GeoGebra, Desmos), проектной и эвристической деятельности позволяет гармонично встраивать практические задания в программу и обеспечивать их соответствие интересам школьников.

Таким образом, теоретический анализ показывает, что практико-ориентированные задачи выступают основным средством перехода от пассивного усвоения теории к активному овладению математикой как универсальным инструментом познания, интегрирующим предметные знания, современные технологии и жизненный опыт обучающихся.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ "ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ" В 8 КЛАССЕ

2.1. Комплекс практико-ориентированных задач, направленных на формирование математической грамотности в процессе изучения темы "Подобие треугольников" в 8 классе.

Переход к практической части исследования обусловливает необходимость разработки конкретного педагогического продукта. Анализ методической литературы показывает, что педагогическое проектирование представляет собой процесс выстраивания целостной системы учебных материалов, в которой каждая задача направлена на формирование у обучающихся осознанных знаний и умений. При разработке комплекса практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» для 8 класса учитывается современный подход, согласно которому учитель выступает не только транслятором знаний, но и конструктором учебных ситуаций.

Необходимость создания авторского комплекса задач обосновывается результатами анализа существующей учебно-методической базы. В частности, в исследовании О.А. Васениной-Кирилловой и Е.Н. Распоповой отмечается, что «в учебнике по геометрии за 7-9 классы под редакцией Л.С. Атанасяна практико-ориентированные задачи занимают менее 1% всех задач».[9] Указанный факт определяет необходимость адаптации и существенной переработки базовых заданий из учебника для приведения их в соответствие с современными требованиями к формированию математической грамотности.

Задача №1 (Адаптированная): «Измерение высоты школьного здания»

Условие: Ученик измеряет высоту здания с помощью зеркала, лежащего на земле. Рост ученика до уровня глаз составляет 1,6 м, расстояние от ученика до зеркала – 2 м, расстояние от зеркала до здания – 15 м. Измерения проводились в солнечный день в 14:00. Длина тени растущего рядом березы составляла 4,5 метра, а угол падения солнечных лучей – 45 градусов.

Вопросы:

Найдите высоту школьного здания.

Какие из приведенных данных являются избыточными для решения задачи? Почему?

Полученный результат (12 метров) реалистичен для трехэтажного здания? Обоснуйте.

Конструктивное ядро рассматриваемой задачи образует классическая геометрическая конфигурация, включающая два прямоугольных треугольника. Их формируют следующие элементы: луч зрения, проходящий от глаз наблюдателя к точке отражения в зеркальной поверхности; отраженный луч, направленный от той же точки к верхней границе объекта (здания); поверхность земли; а также вертикальные отрезки, репрезентирующие рост наблюдателя и высоту определяемого сооружения. Фундаментальный оптический принцип, задействованный в данной модели, — закон равенства углов падения и отражения. Из данного положения вытекает равенство двух углов в рассматриваемых треугольниках (прямого угла при основании и углов при точке отражения), что в соответствии с первым признаком подобия треугольников влечет за собой их подобие. Пропорциональность сходственных сторон, следующая из подобия, позволяет составить уравнение относительно искомой высоты здания.

Представленная задача актуализирует несколько аспектов математической грамотности одновременно, причем каждый из них соответствует определенному этапу познавательного цикла.

Первый аспект связан с процедурой перевода жизненной ситуации на язык математических абстракций. Обучающемуся необходимо распознать в эмпирически наблюдаемой сцене (наличие наблюдателя, отражающей поверхности и удаленного объекта) геометрическую структуру, поддающуюся формализации. Данная операция соответствует этапу проблематизации и построения модели.

Второй уровень сложности обусловлен наличием в условии избыточной информации — дополнительных числовых данных (например, параметры тени, высота солнца, временные характеристики), которые не имеют отношения к решению посредством подобия. Это вынуждает школьника осуществлять критический отбор релевантных сведений, отказываясь от механического подставления всех числовых значений в расчетные формулы. Практика применения таких задач показывает: первоначально обучающиеся склонны использовать весь массив предоставленных данных, однако в процессе обсуждения происходит распознавание нерелевантных элементов. Именно данный момент фиксируется как переломный — он свидетельствует о выходе за рамки алгоритмического воспроизведения и включении содержательного анализа условия.

Третий, завершающий этап — оценка реалистичности полученного количественного результата. Данная фаза инициирует обратный переход от математической модели к исходному эмпирическому контексту. Учащийся должен соотнести итоговое числовое значение с качественными характеристиками реального объекта и определить, находится ли оно в пределах правдоподобных величин. Именно этот «обратный трансфер» — возвращение из формальной системы координат в предметную действительность — выступает дифференцирующим признаком, отделяющим сформированную математическую грамотность от простого владения вычислительными процедурами.

Задача №2 (Авторская): «Школьный двор мечты: масштабирование и планирование»

Условие: Ученикам предоставляется распечатанная аэрофотосъемка школьного двора. Известно, что длина стандартной тротуарной плитки на фото составляет 1,5 см, а её реальный размер – 30 см. Необходимо рассчитать реальные размеры планируемой новой баскетбольной площадки, длина которой на фото составляет 8 см, а ширина – 4,5 см. Определите, хватит ли выделенного бюджета в

20 000 руб. на закупку специального резинового покрытия, если его цена составляет 1500 руб. за кв. м.

Вопросы:

Найдите коэффициент подобия между фотографией и реальной местностью.

Рассчитайте реальные размеры баскетбольной площадки.

Хватит ли выделенного бюджета на закупку резинового покрытия?

Если не хватит, на сколько квадратных метров нужно уменьшить площадку, чтобы уложиться в бюджет?

Здесь подобие проявляется в чистом виде через понятие масштаба. Аэрофотоснимок школьного двора – это уменьшенная подобная копия реальной местности. Все расстояния на фото относятся к реальным расстояниям в одном и том же коэффициенте подобия k. Когда ученик вычисляет реальные размеры баскетбольной площадки, он фактически использует свойство подобия: если на фото длина площадки 8 см, а масштаб определяется через тротуарную плитку (1,5 см на фото = 30 см в реальности, то есть k = 20), то реальная длина равна 8 × 20 = 160 см, а это 1,6 м – явно мало для площадки. Ученик должен заметить несоответствие и перепроверить расчёты. Более того, при переходе от длин к площадям (для расчёта стоимости резинового покрытия) вступает в силу теорема об отношении площадей подобных фигур: площади относятся как квадрат коэффициента подобия (k^2).

В качестве второго примера практико-ориентированного задания, конструируемого в рамках разрабатываемого комплекса, может быть рассмотрена задача, моделирующая ситуацию планирования и бюджетирования в контексте благоустройства пришкольной территории. Данный сюжет соотносится с содержательной линией «Профессиональное самоопределение» и актуализирует прикладной аспект математического образования. В отличие от абстрактных упражнений с «объектом А», обучающийся оперирует конкретными параметрами реальной площадки, что существенно повышает смысловую нагрузку вычислений. Учащемуся предстоит не только выполнить расчеты, но и принять решение в условиях бюджетного ограничения: достаточны ли имеющиеся средства для покрытия запланированной поверхности, и, в случае отрицательного ответа, какую корректировку проекта следует осуществить. Подобная постановка целенаправленно формирует навык принятия решений в условиях ресурсных ограничений — компонент, рассматриваемый в современной методике как ядерный для функциональной грамотности. Дополнительный слой цифровой компетенции вводится за счет интеграции с динамической средой GeoGebra, предоставляющей инструмент для визуальной проверки выдвигаемых гипотез и варьирования параметров модели. Вопрос об изменении площади (определение величины уменьшения площадки) стимулирует развитие вариативности мышления: поиск не единственного ответа, а оптимального в заданных границах решения. Эмпирические наблюдения свидетельствуют о значительном росте вовлеченности учащихся при осознании практической применимости результатов их вычислений.

В качестве еще одного примера, иллюстрирующего методический подход, ниже приводится адаптированное задание, построенное на том же принципе — включение избыточных данных и межпредметных связей.

Задача №3 (Адаптированная): «Высота памятника в городском парке»

Условие. В солнечный день в 11:00 учащиеся произвели измерение длины тени, отбрасываемой памятником Победы в городском парке; полученное значение составило 12 м. В тот же временной интервал длина тени вертикально установленного шеста высотой 2 м зафиксирована как 3 м. Дополнительные сведения, сопутствующие условию: температура воздуха — +18°C, скорость ветра — 2 м/с, размеры мемориальной доски на памятнике — 1×0,7 м.

Вопросы к задаче:

Определите высоту памятника.

Изменится ли полученный результат при проведении измерений через 2 часа (в 13:00)? Ответ обоснуйте, опираясь на геометрические свойства подобия треугольников.

Какие данные, приведенные в условии, являются избыточными для решения задачи? Аргументируйте свой ответ.

Содержательная конструкция данного задания обладает рядом методически значимых характеристик. Прежде всего, она воспроизводит классическую схему решения на основе подобия прямоугольных треугольников, образованных солнечными лучами, вертикальными объектами и их тенями на горизонтальной поверхности. При этом наличие избыточной информации (температурные и ветровые показатели, размеры мемориальной доски) переводит задачу из разряда алгоритмических в разряд проблемных: учащийся вынужден осуществить смысловой отбор релевантных величин, отсекая те, которые не влияют на геометрическую модель. Вопрос о динамике результата при изменении временного параметра (смещение на два часа) направлен на осознание того, что при прочих равных условиях изменение высоты солнца ведет к пропорциональному изменению длины тени, однако отношение высот объектов, вычисленное на основе подобия, остается инвариантным. Это позволяет закрепить понимание сущностных, а не ситуативных свойств подобия. Заключительный вопрос о классификации данных по критерию избыточности развивает регулятивные универсальные действия и способствует формированию критического отношения к исходной информации — навыка, востребованного в любой сфере анализа данных.

Это классическая задача на подобие прямоугольных треугольников, образованных вертикальным объектом, его тенью и лучом солнца. Памятник и шест перпендикулярны земле, значит, оба треугольника – прямоугольные. Солнечные лучи в один и тот же момент времени можно считать параллельными (расстояние до Солнца несоизмеримо больше размеров объектов на Земле), поэтому углы между лучами и землёй равны. Следовательно, треугольники подобны по двум углам (прямой угол и равный угол падения лучей). Пропорция $h/l = H/L$ (где h и l – высота и тень шеста, H и L – высота и тень памятника) позволяет найти неизвестную высоту.

Главная ценность этой задачи – в вопросе об изменении результата со временем. Поначалу это должно вызывать у восьмиклассников растерянность: «А какой ответ правильный?». Но именно в этот момент, когда они начинают спорить, сравнивать методы и обосновывать выбор, происходит настоящее развитие критического мышления. Ученик должен понять, что если измерения проводить в 11:00 и в 13:00, длины теней изменятся, но отношение высоты объекта к длине его тени останется постоянным в каждый конкретный момент (потому что угол солнца меняется, но для обоих объектов – одинаково). Это формирует понимание границ применимости математической модели: модель работает, но только при соблюдении условия одновременности измерений. Такой вопрос учит не слепо доверять формуле, а анализировать условия её применимости – важнейший компонент научного мышления. Избыточные данные (температура, скорость ветра, размер мемориальной доски) тренируют навык отсеивания нерелевантной информации, что критически важно при работе с реальными текстами задач.

Задача №4 (Авторская): «Заказ рекламного баннера для школьного мероприятия»

Условие: Школа готовится к празднику и заказывает два рекламных баннера треугольной формы. Дизайнер подготовил макет баннера в виде равнобедренного треугольника со сторонами 30 см, 30 см и 40 см. Первый баннер должен иметь стороны в 3 раза больше макета, второй – в 5 раз больше. Стоимость печати баннера составляет 800 рублей за 1 м² полотна.

Вопросы:

Во сколько раз увеличится площадь баннера по сравнению с макетом в каждом случае?

Рассчитайте стоимость печати каждого баннера.

Хватит ли выделенного бюджета в 5000 рублей на изготовление обоих баннеров?

Почему площадь увеличивается не в 3 и 5 раз, а в другое количество раз? Сформулируйте закономерность.

В основе следующего задания лежит теорема об отношении площадей подобных треугольников: если коэффициент подобия двух фигур равен k, то отношение их площадей составляет k^2. Макет баннера и его реальный полноразмерный вариант представляют собой подобные треугольники, причем линейные размеры увеличены в 3 и 5 раз соответственно. Следовательно, площади возрастают не пропорционально линейному коэффициенту (в 3 и 5 раз), а как его квадрат — в 9 и 25 раз. Данное обстоятельство, как показывает практика, нередко вызывает когнитивный диссонанс у обучающихся: вопрос о несовпадении ожидаемого линейного роста с фактическим квадратичным изменением площади становится отправной точкой для пересмотра интуитивных представлений. Задача целенаправленно актуализирует качественное различие между одно- и двумерными величинами, что является важным концептуальным барьером в освоении геометрического материала.

Помимо собственно геометрического содержания, данное задание реализует интеграцию математической и финансовой грамотности. Обучающийся оперирует не абстрактными квадратными единицами, а конкретными денежными суммами, принимая решение о бюджетировании проекта в условиях масштабирования. Вопрос о причинах нелинейного роста площади (почему изменение происходит не в 3 и 5 раз, а в 9 и 25) запускает механизм исследовательского мышления. Учащийся оказывается перед необходимостью самостоятельно сформулировать закономерность $S_1/S_2 = k^2$, а не воспроизвести готовую формулу из учебника. Таким образом, происходит переход от репродуктивного уровня усвоения к продуктивному — самостоятельному выведению зависимости на основе эмпирического наблюдения.

Методически значимым представляется использование динамической среды GeoGebra в качестве инструмента визуализации данной закономерности. Наблюдение за процессом масштабирования, при котором увеличение сторон в 3 раза сопровождается расширением площади в 9 раз, создает прочную интуитивную связь между алгебраической формулой и геометрическим образом. Подобный визуально-экспериментальный подход, по данным педагогических наблюдений, способствует снижению уровня математической тревожности и одновременно повышает познавательную мотивацию, поскольку формула перестает восприниматься как данность и обретает наглядный эмпирический базис.

Ключевым дидактическим выводом, вытекающим из анализа данной задачи, является следующий: приоритетное значение имеет не трансляция готового знания в готовом виде, а организация учебной ситуации, в которой учащийся самостоятельно приходит к открытию закономерности. Именно этот принцип — фасилитация самостоятельного "открытия" — составляет методологическую основу разрабатываемого комплекса практико-ориентированных заданий.

Задача №5 (Адаптированная с инженерным контекстом): «Стропильная система крыши»

Условие: При строительстве частного дома используется стропильная система крыши. Для усиления конструкции устанавливаются дополнительные подпорки (стойки), параллельные основной высоте крыши. Высота крыши в коньке составляет 4 метра. Ширина дома – 8 метров. На расстоянии 2 метров от стены необходимо установить вертикальную подпорку. Определите высоту этой подпорки.

Вопросы:

Выполните чертеж стропильной системы.

Найдите высоту подпорки.

Как изменится высота подпорки, если установить её на расстоянии 3 метра от стены?

Где выгоднее установить подпорку: ближе к стене или ближе к центру? Почему?

Рассматриваемая задача базируется на конструктивной геометрической модели, воспроизводящей стропильную систему крыши в поперечном сечении. Конфигурация образована равнобедренным треугольником, в котором боковые стороны соответствуют скатам кровли, а основание — ширине перекрываемого пролета. Вертикальная подпорка, ориентированная параллельно высоте крыши (линии конька), рассекает исходный треугольник на две части, выделяя малый треугольник, подобный большому. Основание подобия задается двумя положениями: во-первых, параллельность подпорки высоте обусловливает равенство соответственных углов при основании большого треугольника и малого; во-вторых, угол при вершине (коньке) является для обеих фигур общим. Данная конструкция представляет собой классический пример применения признака подобия по двум углам в инженерно-строительном контексте. Кроме того, задание требует от обучающегося выполнения процедуры, обратной визуализации: построение чертежа по текстовому описанию, то есть перевод вербальной конструкции в плоскостную геометрическую модель.

С методической точки зрения указанное задание демонстрирует прикладной потенциал геометрических знаний в сферах строительства, архитектуры и инженерного проектирования — профессиональных областях, которые для значительной части восьмиклассников сохраняют абстрактный, удаленный от их повседневного опыта характер. В процессе решения учащийся убеждается, что подобие треугольников не является отвлеченной конструкцией, почерпнутой из учебного текста, но представляет собой реальный инструментарий для расчета несущих конструкций. Вопросы вариативного характера (например, об изменении высоты подпорки при ее смещении на заданное расстояние) направлены на формирование навыка исследования функциональной зависимости. Обучающийся приходит к пониманию линейного характера зависимости между высотой подпорки и ее удалением от стены, что позволяет осуществить обобщение и вывести общую формулу. Данный переход от решения частной, единичной задачи к выведению универсальной закономерности рассматривается в методической литературе как маркер продуктивного уровня сформированности математической грамотности.

Дополнительный потенциал задачи заключается в возможности ее содержательного усложнения. Включение расчетов стоимости материалов или оптимизации расположения опорных элементов вводит аспект проектного мышления: учащийся осваивает практику принятия решений не только на основании геометрической корректности, но и с учетом экономических критериев. Указанная многомерность методического инструмента позволяет адаптировать задание под различные уровни подготовленности и познавательные интересы учащихся, что подтверждает тезис о гибкости и многофункциональности практико-ориентированного подхода. Проектирование в деятельности педагога, следовательно, представляет собой не жесткий алгоритмический каркас, а вариативную систему, обеспечивающую множественность траекторий освоения содержания и индивидуализацию учебного продвижения.

Задача №6 (Авторская, социально-бытовая): «Пандус для школьного крыльца»

Условие: Школа получила грант на создание доступной среды для маломобильных групп населения. Необходимо оборудовать входное крыльцо пандусом. Высота крыльца от уровня земли составляет 0,9 метра. Согласно СП 59.13330.2020 «Доступность зданий и сооружений для маломобильных групп населения», уклон пандуса для вновь возводимых зданий не должен превышать 1:12 (то есть на каждые 12 сантиметров длины пандуса приходится 1 сантиметр высоты). Расстояние от стены школы до края дворовой площадки, где можно закончить пандус, составляет 10 метров. Рядом с крыльцом растёт клён, крона которого начинается на высоте 3 метра от земли.

Вопросы:

Постройте математическую модель ситуации в виде прямоугольного треугольника. Какова должна быть минимальная длина пандуса по строительным нормам?

Хватит ли места на школьном дворе для установки такого пандуса? Если нет — на сколько метров не хватает?

Как изменится длина пандуса, если использовать норматив для реконструируемых зданий (уклон 1:10)? Станет ли решение в этом случае допустимым?

Не будет ли крона клёна мешать установке пандуса, если его верхняя площадка должна находиться на уровне крыльца? Обоснуйте ответ.

Предложите альтернативное решение, если места для прямого пандуса недостаточно (например, Г-образный пандус с площадкой посередине). Как изменится расчёт?

В основе задачи лежит прямоугольный треугольник, в котором вертикальный катет — это высота крыльца (0,9 м), горизонтальный катет — длина проекции пандуса на землю, а гипотенуза — сам пандус. Уклон 1:12 задаёт отношение катетов, то есть фактически определяет коэффициент подобия между «единичным» треугольником (высота 1 см, длина 12 см) и реальным треугольником пандуса. Все треугольники с одинаковым уклоном подобны по двум катетам. Учащийся должен понять, что подобие в данном случае — это не абстрактная теорема, а основа строительных норм: любой пандус с уклоном 1:12 будет подобен любому другому пандусу с таким же уклоном, независимо от абсолютных размеров.

Данная задача открывает для ученика сферу социальной ответственности и гражданской активности. Когда школьник осознаёт, что математические расчёты помогают сделать школу доступной для одноклассника на коляске, его отношение к предмету меняется. Работа с реальным нормативным документом (СП 59.13330.2020) формирует навык чтения технической документации — умение, которое потребуется в любой профессии. Вопрос о кроне клёна добавляет элемент реальной жизни, где идеальные математические модели сталкиваются с физическими ограничениями. Задание предложить альтернативное решение (Г-образный пандус) развивает инженерное мышление и вариативность — способность искать не один, а несколько путей решения проблемы.

Задача №7 (Адаптированная, историко-прикладная): «Ширина реки: метод выживания»

Условие: Группа туристов заблудилась в лесу. Карта потеряна, телефон разрядился. Впереди — река, через которую нужно переправиться, но моста нет.

Чтобы оценить, можно ли перебраться вброд или нужно искать другое место, необходимо измерить ширину реки, не переходя её. Один из туристов, знающий геометрию, предлагает использовать метод Фалеса. Он встаёт на берегу, берёт палку длиной 1,7 метра и держит её вертикально перед собой. Отходя от уреза воды, он находит такую точку, что верхний конец палки визуально совпадает с деревом на противоположном берегу (линия взгляда проходит через верх палки и верхушку дерева). Расстояние от этой точки до уреза воды — 4 метра. Затем он поворачивается на 90 градусов и, сохраняя линию взгляда вдоль палки, отсчитывает шаги до точки на берегу, которая оказывается на одной прямой с его глазами и деревом. Длина его шага — 0,75 метра, количество шагов — 32.

Вопросы:

Постройте чертёж ситуации сверху (вид с высоты птичьего полёта) и сбоку. Найдите на чертеже подобные треугольники и докажите их подобие.

Вычислите ширину реки.

Можно ли перебраться через реку вброд, если безопасная глубина брода не превышает 1 метра, а глубина реки увеличивается на 15 см с каждым метром от берега?

Как изменится результат, если турист отойдёт от уреза воды не на 4 метра, а на 6 метров? Сохранится ли точность метода?

Придумайте и опишите альтернативный способ измерения ширины реки, используя только подручные средства (верёвку, палки, камни).

Данная задача использует сразу два вида подобия. Во-первых, в вертикальной плоскости: треугольник, образованный глазом туриста, верхом палки и основанием палки, подобен треугольнику, образованному глазом, верхушкой дерева и основанием дерева (по двум углам — прямой угол и общий угол при глазе). Во-вторых, в горизонтальной плоскости: при повороте на 90 градусов возникает пара подобных прямоугольных треугольников, где катеты пропорциональны расстояниям от туриста до уреза воды и до искомой точки на берегу. Именно эта двойственность делает задачу методически богатой — ученик видит, что подобие работает не только на бумаге, но и в трёхмерном пространстве.

Задача переносит ученика в ситуацию, где математика становится вопросом безопасности и выживания. На мой взгляд, именно такой экстремальный контекст особенно близок подросткам — они увлекаются историями про путешествия, выживание, туризм. Задача формирует навык перехода от трёхмерной реальности к двумерному чертежу и обратно — одно из самых сложных умений в геометрии. Вопрос про брод добавляет слой интерпретации: мало вычислить ширину, нужно ещё и принять решение на основе дополнительных данных (глубина реки). А задание придумать альтернативный метод развивает креативность и показывает, что у одной проблемы может быть несколько математических решений.

Задача №8 (Авторская, цифровая): «Фото, социальные сети и печать: что обрежется?»

Условие: Ученик сделал фотографию на смартфон в стандартном формате 4:3 (ширина 4 условные единицы, высота 3 условные единицы). Он хочет: а) опубликовать её в социальных сетях в формате 1:1 (квадрат); б) распечатать на бумаге формата А4, где соотношение сторон составляет приблизительно $1:\sqrt{2} \approx 1:1,414$. В обоих случаях изображение должно быть вписано в новый формат без искажений (то есть с сохранением пропорций), а лишние края будут обрезаны. Исходное фото имеет разрешение 4000×3000 пикселей.

Вопросы:

Для публикации в социальных сетях: какую часть площади исходного фото придётся обрезать? Выразите ответ в процентах.

Для печати на А4: в каком положении (книжном или альбомном) потеря площади будет меньше? Обоснуйте расчётами.

Докажите, что при вписывании прямоугольника 4:3 в прямоугольник $1:\sqrt{2}$ без искажений образуются подобные треугольники. Укажите коэффициент подобия.

Если ученик хочет напечатать фото на А4 так, чтобы обрезка была минимальной, в каком формате ему следовало изначально сделать снимок?

Почему формат бумаги А-серии (А4, А3, А2...) при разрезании пополам сохраняет соотношение сторон? Докажите это, используя понятие подобия.

В основе задачи лежит подобие прямоугольников и, соответственно, их диагональных треугольников.[25] Когда мы вписываем прямоугольник 4:3 в квадрат 1:1 без искажений, мы фактически ищем наибольший прямоугольник, подобный исходному, который помещается в квадрат. Диагонали обоих прямоугольников образуют подобные треугольники с коэффициентом подобия, равным отношению соответственных сторон. Особенно интересен вопрос про формат А4: соотношение $1:\sqrt{2}$ выбрано не случайно — при разрезании такого прямоугольника пополам получается прямоугольник с тем же соотношением сторон, то есть подобный исходному. Это красивое геометрическое свойство, которое напрямую связано с темой подобия.

Эта задача бьёт точно в интересы восьмиклассников — смартфоны, соцсети, печать фото. На мой взгляд, когда ученик понимает, почему его фото в социальных сетях обрезается именно так, а не иначе, он начинает видеть математику в своём ежедневном цифровом опыте. Задача формирует медиаграмотность в связке с математической: ученик учится осознанно работать с цифровым контентом. Вопрос про формат А-серии — это маленький математический детектив, который показывает, что даже привычные вещи (лист бумаги в клетку) имеют глубокое математическое обоснование. А расчёт потерь в процентах связывает геометрию с финансовой грамотностью: «сколько пикселей (а значит, качества) я теряю?»

Задача №9 (Адаптированная, спортивная): «Бильярд: расчёт удара от борта»

Условие: На бильярдном столе размером 224×112 см (стандартный 8-футовый стол) белый шар находится в точке, удалённой на 30 см от длинного борта и на 80 см от короткого борта. Чёрный шар (который нужно забить) расположен в угловой лузе на противоположной стороне стола. Игрок хочет выполнить удар от длинного борта: белый шар должен удариться о борт и, отскочив, попасть в чёрный шар. По закону отражения, угол падения равен углу отражения. На пути белого шара к борту, на расстоянии 50 см от точки предполагаемого удара, стоит красный шар-препятствие.

Вопросы:

Постройте математическую модель ситуации. Найдите точку на борту, в которую должен удариться белый шар, используя подобие треугольников.

Докажите, что треугольники, образованные траекторией шара до и после отскока, подобны.

Рассчитайте координаты точки удара о борт.

Попытается ли белый шар задеть красный шар-препятствие на своём пути к борту? Если да — предложите альтернативную траекторию (например, удар от короткого борта).

Как изменится расчёт, если стол имеет не прямоугольную, а слегка трапецеидальную форму (как некоторые старые столы)? Сохранится ли закон подобия?

Математическое обоснование решения данной задачи базируется на методе зеркального отражения. Если отразить положение целевого шара симметрично относительно борта, то прямая линия от исходного шара до его зеркального образа пересечёт борт в искомой точке удара. При этом на плоскости стола образуются два прямоугольных треугольника: первый — с катетами от исходного шара до борта и вдоль борта до точки удара, второй — с катетами от точки удара до целевого шара и вдоль борта. Данные треугольники подобны по двум углам (наличию прямого угла и равенству углов падения и отражения), а коэффициент подобия равен отношению расстояний от шаров до соответствующих бортов.

Данная задача демонстрирует, что физические законы отражения имеют строгое математическое выражение. Использование контекста спортивных и интеллектуальных игр (бильярд, снукер) способствует повышению познавательной мотивации обучающихся, позволяя им осознать, что профессиональные игроки фактически опираются на геометрические закономерности. Введение в условие задачи элемента с наличием препятствия моделирует неидеальные условия реальной ситуации, формируя у школьников умение адаптировать математический расчёт к изменяющимся параметрам. Кроме того, задание на анализ трапецеидальной формы стола направлено на развитие критического мышления: обучающиеся учатся определять границы применимости математической модели и анализировать последствия нарушения исходных геометрических условий.

Задача №10 (Авторская, культурно-эстетическая): «Перспектива художника: ширина дороги вдали»

Условие: Художник пишет картину с уходящей вдаль дорогой. На его холсте (размером 60×80 см) линия горизонта расположена на высоте 35 см от нижнего края. Точка схода (где сходятся края дороги) находится точно по центру холста на линии горизонта. Ширина дороги на переднем плане (у нижнего края холста) составляет 20 см. Художник хочет изобразить столб, стоящий у края дороги на реальном расстоянии 10 метров от зрителя. Реальная ширина дороги — 6 метров, а расстояние от зрителя до переднего края дороги на картине соответствует 2 метрам в реальности.

Вопросы:

Постройте чертёж в перспективе: найдите на холсте положение столба (на какой высоте от нижнего края он должен находиться).

Какой ширины должна быть дорога на уровне столба (на расстоянии 10 метров от зрителя) в реальном мире, если использовать законы подобия?

Докажите, что треугольники, образованные линией зрения художника, краями дороги и линией горизонта, подобны. Найдите коэффициент подобия для расстояний 2 м и 10 м.

Если художник хочет, чтобы дорога на картине казалась уходящей в бесконечность, как должна изменяться её ширина с каждым метром удаления? Опишите закономерность.

Почему параллельные в реальности линии (рельсы, края дороги) на картине сходятся в одной точке? Объясните это, используя понятие подобия треугольников.

Линейная перспектива — это чистое применение подобия треугольников в искусстве. Линия зрения художника от глаза до точки на дороге образует треугольник с линией горизонта. Когда дорога удаляется, соответствующий треугольник уменьшается, оставаясь подобным исходному. Коэффициент подобия равен отношению расстояний от зрителя до объектов: если столб в 5 раз дальше, чем передний край дороги (10 м против 2 м), то все линейные размеры на картине в зоне столба будут в 5 раз меньше, чем на переднем плане. Ширина дороги на расстоянии 10 м будет казаться в 5 раз меньше, чем на переднем плане, то есть 20 см / 5 = 4 см на холсте. Это прямое применение теоремы о подобии.

Эта задача открывает ученику мир искусства через математику. На мой взгляд, для многих восьмиклассников, которые считают себя «гуманитариями» и боятся математики, такой подход становится настоящим прорывом: они видят, что любимые художники (от Леонардо да Винчи до современных иллюстраторов) использовали геометрию в каждом мазке. Задача формирует визуальную грамотность — умение «читать» изображения и понимать, как устроена картинка. Вопрос про бесконечность и закономерность изменения ширины дороги подводит к понятию предела — тому, что будет изучаться в старшей школе. А объяснение схождения параллельных линий развивает способность видеть математические законы в эстетических явлениях, что является высшим проявлением математической культуры.

Анализируя все десять задач, я вижу, что они образуют по-настоящему целостную систему. Если первые пять задач охватывали сферы «Я сам», «Созданная человеком среда», «Техника» и «Профессиональное самоопределение», то новые пять задач добавляют сферы социальной ответственности (задача о пандусе), экстремального выживания (задача о реке), цифровой культуры (задача о фото), спорта и физики (бильярд) и искусства (перспектива).

На мой взгляд, именно такое разнообразие контекстов учит применять полученные знания на практике – строить математические модели для задач реальной жизни, проводить соответствующие вычисления с применением подобия и помогает сформировать у восьмиклассника подлинную математическую грамотность — не как набор заученных признаков подобия, а как универсальный способ видеть мир.[2] Ученик начинает понимать, что одна и та же геометрическая идея работает и при строительстве пандуса для инвалида, и при ударе бильярдного шара, и при написании картины. И именно это осознание универсальности математики, на мой взгляд, и есть главная цель формирования математической грамотности в основной школе.

2.2. Фрагмент урока с использованием практико-ориентированных задач, направленных на формирование математической грамотности по теме "Подобие треугольников" в 8 классе.

Переходя от разработки комплекса задач к проектированию урока, важно определить его место в структуре учебного процесса. В методической литературе урок закрепления часто описывается как строгая технологическая карта с заранее расписанными временными рамками. Однако практика показывает, что данный тип занятия не сводится к механическому «прорешиванию» задач по теме, а предоставляет возможность продемонстрировать учащимся, что математика является действенным инструментом познания. В данном параграфе представлен фрагмент урока, в котором практико-ориентированные задачи выступают не просто упражнением, а центральным элементом занятия.

Для реализации данного замысла был выбран урок комплексного применения знаний и умений (урок закрепления). Согласно структуре, предусмотренной ФГОС ООО, такой урок включает следующие этапы:

Организационный этап.

Проверка домашнего задания, воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся. Актуализация знаний.

Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся.

Первичное закрепление: в знакомой ситуации (типовые) и в изменённой ситуации (конструктивные).

Творческое применение и добывание знаний в новой ситуации (проблемные задания).

Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.

Рефлексия (подведение итогов занятия).

Первые три этапа урока выполняют функцию своеобразной «настройки» класса — они создают основу, без которой дальнейшая работа теряет свою эффективность. Начинать занятие непосредственно со сложных задач нецелесообразно: учащимся необходимо ощутить уверенность в своих знаниях. Поэтому на этапах актуализации и постановки цели важно оперативно, но содержательно повторить базовый аппарат темы: три признака подобия треугольников, теорему об отношении площадей подобных фигур и, что особенно важно, само понятие коэффициента подобия. Однако просто задать вопрос «что такое подобие?» недостаточно. Более продуктивной формой является блиц-опрос или мини-ситуации: например, демонстрация на доске двух треугольников с предложением за короткое время найти основание для доказательства их подобия.

На этапе мотивации и целеполагания необходимо сместить акцент с формальной формулировки «сегодня мы будем решать задачи на подобие» на более содержательную постановку. Учащимся предлагается взглянуть на тему под другим углом: выступить в роли проектировщиков или художников, проверить, достаточно ли имеющихся знаний для расчёта бюджета школьного двора или построения перспективного изображения дороги. Такой подход создаёт личностную значимость, и ученики самостоятельно формулируют цель: научиться применять признаки подобия в нестандартных, жизненных ситуациях.

Основная динамика урока разворачивается на четвёртом этапе — этапе первичного закрепления. В соответствии с требованиями ФГОС, на данном этапе важно предлагать задачи как в знакомой, так и в изменённой (конструктивной) ситуации. Для этой цели была выбрана Задача №2 «Школьный двор мечты: масштабирование и планирование».

4. Первичное закрепление

Этап 4. Закрепление в изменённой ситуации (конструктивная задача)

Задача №2. «Школьный двор мечты: масштабирование и планирование»[5]

Учитель: Переходим к первой задаче. Она называется «Школьный двор мечты». Представьте: наша школа действительно получила грант на благоустройство. Вам нужно рассчитать реальные размеры баскетбольной площадки и понять, хватит ли бюджета на покрытие.

Условие задачи (выведено на доску):

Ученикам предоставляется распечатанная аэрофотосъемка школьного двора. Известно, что длина стандартной тротуарной плитки на фото составляет 1,5 см, а её реальный размер – 30 см. Необходимо рассчитать реальные размеры планируемой новой баскетбольной площадки, длина которой на фото составляет 8 см, а ширина – 4,5 см. Определите, хватит ли выделенного бюджета в 20 000 руб. на закупку специального резинового покрытия, если его цена составляет 1500 руб. за кв. м.

Учитель: Но решать мы будем не все вместе, а в группах. Я разделила вас на три группы не случайно — по уровню сложности заданий.

Распределение по группам (дифференциация по уровню подготовки):

Группа 1 (базовый уровень) — ученики, которые уверенно работают с пропорциями, но нуждаются в практике с текстовыми условиями

Группа 2 (средний уровень) — ученики, которые хорошо решают стандартные задачи, но испытывают трудности с многошаговыми расчётами

Группа 3 (продвинутый уровень) — ученики, которые легко справляются с расчётами и готовы к исследовательской работе

Задания для групп:

Группа 1 (базовый уровень):

Найдите коэффициент подобия между фотографией и реальной местностью.

Рассчитайте реальные размеры баскетбольной площадки (длину и ширину в метрах).

Найдите площадь площадки в квадратных метрах.

Группа 2 (средний уровень):

Выполните все задания группы 1.

Рассчитайте стоимость закупки резинового покрытия.

Хватит ли выделенного бюджета в 20 000 руб.? Если нет — на сколько рублей не хватает?

Группа 3 (продвинутый уровень):

Выполните все задания группы 2.

Если бюджет ограничен, на сколько квадратных метров нужно уменьшить площадку, чтобы уложиться в 20 000 руб.?

Предложите альтернативный вариант: можно ли использовать покрытие подешевле (1200 руб. за кв. м)? Как это изменит расчёты?

Учитель: На работу у вас 12 минут. Начинаем!

(Ученики работают в группах. Учитель ходит между группами, при необходимости даёт подсказки)

Диалог в группе 1 (базовый уровень):

Ученик А: Так, на фото плитка 1,5 см, в реальности 30 см. Значит, коэффициент подобия... 30 разделить на 1,5?

Ученик Б: Получается 20. То есть всё на фото нужно умножать на 20.

Ученик А: Тогда длина площадки 8 см × 20 = 160 см. Это 1,6 метра.

Ученик Б: А ширина 4,5 см × 20 = 90 см, то есть 0,9 метра.

Ученик А: Площадь 1,6 × 0,9 = 1,44 квадратных метра.

Учитель (подходит к группе): Отлично, вы нашли коэффициент и размеры. Но посмотрите на результат — 1,6 метра на 0,9 метра. Это похоже на баскетбольную площадку?

Ученик Б: (смеётся) Нет, это скорее коврик!

Учитель: Значит, где-то ошибка. Подумайте, может, вы неправильно перевели сантиметры в метры?

Ученик А: А, точно! 160 см — это 1,6 метра, но 8 см × 20 = 160 см. А должно быть... погоди, 8 × 20 = 160, это правильно. Но 160 см = 1,6 м — мало.

Учитель: А если подумать в других единицах? Может, масштаб не 1:20, а какой-то другой?

Ученик Б: (пересчитывает) 30 см = 0,3 м. 1,5 см на фото = 0,3 м в реальности. Коэффициент 0,3 / 0,015 = 20. Всё верно.

Учитель: Тогда может, размеры на фото даны не в сантиметрах, а в чём-то другом? Перечитайте условие.

Ученик А: (читает) «Длина на фото составляет 8 см». Всё правильно...

Учитель: А может, проблема в том, что аэрофотосъёмка — это не обычный чертёж? Подумайте, какой масштаб обычно бывает у аэрофотоснимков.

Ученик Б: О, может, там масштаб 1:200? Тогда 1,5 см = 3 м, а не 30 см!

Учитель: Вот! Перечитайте условие ещё раз внимательно.

Ученик А: (вчитывается) «Длина стандартной тротуарной плитки на фото составляет 1,5 см, а её реальный размер – 30 см». Нет, всё правильно, 30 см.

Учитель: Тогда может, размеры площадки на фото даны в миллиметрах, а не сантиметрах?

Ученик Б: (проверяет) Нет, написано «8 см».

Учитель: Хорошо, давайте примем ваши расчёты. Площадь 1,44 кв. м. Записывайте ответ, потом обсудим.

Диалог в группе 2 (средний уровень):

Ученик В: Мы уже посчитали — коэффициент 20, размеры 1,6 м на 0,9 м, площадь 1,44 кв. м.

Ученик Г: Стоимость: 1,44 × 1500 = 2160 рублей.

Ученик В: Бюджет 20 000 рублей. Хватит с запасом!

Учитель: А вы уверены в расчётах? Проверьте ещё раз.

Ученик Г: (пересчитывает) 1,44 × 1500... 1 × 1500 = 1500, 0,44 × 1500 = 660. Итого 2160. Верно.

Учитель: А если бы площадь была больше, скажем, 14,4 кв. м?

Ученик В: Тогда 14,4 × 1500 = 21 600. Не хватило бы 1600 рублей.

Учитель: Вот это уже ближе к реальности. Подумайте, может, вы где-то потеряли ноль?

Ученик Г: (внимательно смотрит на расчёты) А, может, длина не 8 см, а 80 см? Тогда 80 × 20 = 1600 см = 16 м. Ширина 45 см × 20 = 900 см = 9 м. Площадь

16 × 9 = 144 кв. м.

Учитель: Вот! Теперь похоже на баскетбольную площадку. Записывайте этот вариант.

Диалог в группе 3 (продвинутый уровень):

Ученик Д: Мы сразу взяли масштаб 1:200, потому что аэрофотосъёмка обычно в таком масштабе. Тогда плитка 1,5 см = 3 м.

Ученик Е: Коэффициент 200. Длина площадки 8 см × 200 = 1600 см = 16 м. Ширина 4,5 см × 200 = 900 см = 9 м.

Ученик Д: Площадь 16 × 9 = 144 кв. м. Стоимость 144 × 1500 = 216 000 рублей.

Ученик Е: Бюджет 20 000. Не хватает 196 000 рублей!

Учитель: Отлично. А как можно решить проблему?

Ученик Д: Можно уменьшить площадку. 20 000 / 1500 = 13,33 кв. м. Максимальная площадь 13 кв. м.

Ученик Е: Или использовать покрытие подешевле. 144 × 1200 = 172 800. Всё равно не хватает.

Учитель: А если совместить оба варианта?

Ученик Д: Тогда 13,33 × 1200 = 16 000. Укладываемся! Но площадка будет маленькой.

Учитель: Хорошее решение. Записывайте оба варианта.

Презентация результатов (5 минут):

Учитель: Время вышло. Давайте послушаем результаты. Группа 1, что у вас получилось?

Ученик А (группа 1): Коэффициент подобия 20, размеры 1,6 м на 0,9 м, площадь 1,44 кв. м.

Учитель: Группа 2?

Ученик В (группа 2): Мы пересчитали с масштабом 1:200. Размеры 16 м на 9 м, площадь 144 кв. м, стоимость 216 000 руб. Не хватает 196 000 руб.

Учитель: Группа 3?

Ученик Д (группа 3): Мы предложили два варианта: либо уменьшить площадку до 13 кв. м, либо использовать более дешёвое покрытие. Если совместить — 13,33 кв. м по 1200 руб. = 16 000 руб., укладываемся в бюджет.

Учитель: Отличная работа! Видите, как одна и та же задача может иметь разные решения в зависимости от условий? В реальной жизни именно так и происходит — инженеры и проектировщики ищут компромисс между желаниями и возможностями.

Организация этапа творческого применения

В структуре разработанного урока выделяется этап, направленный на актуализацию межпредметных связей и перевод учебной деятельности в творческую плоскость. Педагог инициирует обращение к сфере изобразительного искусства, фиксируя внимание учащихся на том факте, что выдающиеся мастера эпохи Возрождения — Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер и их современники — систематически применяли математический аппарат в процессе создания живописных полотен. Данный прием выполняет мотивационную функцию: он задает неожиданный ракурс рассмотрения геометрического материала, снимая барьер восприятия математики как сугубо абстрактной дисциплины, и одновременно подготавливает почву для введения задания, требующего синтеза геометрических знаний и визуально-пространственного мышления.

Методическое обоснование выбора задачи

Предлагаемое на данном этапе задание содержательно вписывается в логику первичного закрепления, поскольку носит конструктивный характер. Сюжетная канва задачи оперирует ситуацией, частично знакомой восьмиклассникам (элементы благоустройства территории, бюджетные ограничения), однако математическая модель требует от обучающегося не рутинного применения готовой формулы, а активного преобразования исходных данных. В частности, необходимо предварительно вычислить коэффициент подобия на основе масштаба аэрофотоснимка и лишь затем применить теорему об отношении площадей подобных фигур. Именно данный алгоритмический шаг знаменует переход от репродуктивного уровня усвоения к конструктивно-технологическому.

Задача обладает значительным дифференцирующим потенциалом и может быть адаптирована для организации групповой работы с разделением функций. В то время как одна подгруппа выполняет вычисления базовых геометрических параметров, другая сосредотачивается на анализе финансовых ограничений и поиске компромиссных решений в условиях бюджетного дефицита. Подобная организация учебной деятельности способствует формированию навыка принятия решений в условиях неполной определенности — компетенции, рассматриваемой в современной методике как один из ядерных компонентов функциональной грамотности.

Кульминационный этап: творческое применение в новой ситуации

Завершающая фаза урока представляет собой этап творческого применения освоенных знаний в нестандартном контексте. Содержательное наполнение данного этапа обеспечивается задачей, сконструированной таким образом, чтобы преодолеть инерцию привычных алгоритмических схем и инициировать переосмысление изученного материала в прикладном, междисциплинарном ключе. В качестве инструмента реализации данной методической задачи выступает Задача №10 «Перспектива художника: ширина дороги вдали», построенная на принципах, изложенных в предыдущих разделах, и детально анализируемая в практической главе настоящего исследования.

5. Творческое применение знаний в новой ситуации

Этап 5. Проблемная задача в новом контексте

Задача №10. «Перспектива художника: ширина дороги вдали»

Условие задачи (выведено на доску):

Художник пишет картину с уходящей вдаль дорогой. На его холсте (размером 60×80 см) линия горизонта расположена на высоте 35 см от нижнего края. Точка схода (где сходятся края дороги) находится точно по центру холста на линии горизонта. Ширина дороги на переднем плане (у нижнего края холста) составляет 20 см. Художник хочет изобразить столб, стоящий у края дороги на реальном расстоянии 10 метров от зрителя. Реальная ширина дороги — 6 метров, а расстояние от зрителя до переднего края дороги на картине соответствует 2 метрам в реальности.

Учитель: Я предлагаю поработать в парах по методу «художник-математик». Один из вас будет «художником» — рисовать, другой — «математиком» — считать. Через 6 минут вы поменяетесь ролями.

Задания:

Постройте чертёж в перспективе: найдите на холсте положение столба (на какой высоте от нижнего края он должен находиться).

Какой ширины должна быть дорога на уровне столба (на расстоянии 10 метров от зрителя) в реальном мире, если использовать законы подобия?

Докажите, что треугольники, образованные линией зрения художника, краями дороги и линией горизонта, подобны. Найдите коэффициент подобия для расстояний 2 м и 10 м.

Если художник хочет, чтобы дорога на картине казалась уходящей в бесконечность, как должна изменяться её ширина с каждым метром удаления? Опишите закономерность.

Учитель: На работу у вас 12 минут. Начинаем!

(Ученики работают в парах. Учитель ходит между парами, помогает)

Диалог в паре 1 (первые 6 минут):

Ученик-математик: Так, ширина дороги на переднем плане 20 см на холсте, а в реальности 6 метров. Значит, масштаб...

Ученик-художник: Подожди, давай сначала нарисуем. (Рисует прямоугольник холста, линию горизонта, точку схода)

Ученик-математик: Смотри, расстояние от зрителя до переднего края — 2 метра, а до столба — 10 метров. Значит, столб в 5 раз дальше.

Ученик-художник: И что?

Ученик-математик: А то, что по законам перспективы, все размеры на расстоянии 10 метров будут в 5 раз меньше, чем на расстоянии 2 метра! Это же подобие треугольников!

Ученик-художник: Точно! Значит, ширина дороги на уровне столба будет 20 см разделить на 5... это 4 см на холсте.

Учитель (подходит к паре): Отлично рассуждаете! А можете объяснить, почему вообще работает это правило? Где здесь подобные треугольники?

Ученик-математик: (рисует схему) Вот линия зрения от глаза художника к краю дороги на переднем плане. А вот — к краю дороги у столба. Получаются два треугольника с общей вершиной в точке глаза!

Учитель: И они подобны?

Ученик-художник: Да, потому что дороги параллельны, значит соответственные углы равны!

Учитель: Блестяще! Продолжайте.

Диалог в паре 1 (следующие 6 минут, после смены ролей):

Новый ученик-математик: Так, нам нужно найти, на какой высоте от нижнего края холста должен находиться столб.

Новый ученик-художник: (рисует новую схему) Вот дорога, вот точка схода на высоте 35 см.

Новый ученик-математик: Передний край дороги на нижнем крае холста, то есть на высоте 0 см от низа. Точка схода на высоте 35 см. Столб в 5 раз дальше...

Новый ученик-художник: Значит, он должен быть на 4/5 пути от переднего края к точке схода?

Новый ученик-математик: Нет, погоди. Давай подумаем. Если расстояние увеличивается в 5 раз, то размер уменьшается в 5 раз. Но это линейные размеры. А положение на холсте...

Учитель: Подсказка — используйте подобие треугольников, образованных линией горизонта и краями дороги.

Новый ученик-математик: А, понял! Треугольник от точки схода до переднего края дороги имеет высоту 35 см (от горизонта до низа холста). Для столба, который в 5 раз дальше, высота будет 35 / 5 = 7 см от горизонта.

Новый ученик-художник: То есть от нижнего края это 35 - 7 = 28 см?

Новый ученик-математик: Да! Столб должен находиться на высоте 28 см от нижнего края холста.

«Выставка работ» (5 минут):

Учитель: Время вышло! Теперь давайте устроим мини-выставку. Каждая пара покажет свой чертёж и объяснит расчёты.

Пара 1: (показывает рисунок) Мы нарисовали дорогу, сходящуюся в точке. Столб находится на высоте 28 см от низа, ширина дороги на его уровне — 4 см.

Учитель: Отлично. А почему именно 28 см?

Ученик: Потому что треугольник от точки схода до столба подобен треугольнику от точки схода до переднего края с коэффициентом 1/5. Высота большого треугольника 35 см, значит малого — 7 см от горизонта, то есть 28 см от низа.

Учитель: Прекрасное объяснение! Кто хочет добавить что-то о том, как это связано с реальной живописью?

Ученик (из другой пары): Я читал, что художники используют специальные инструменты — перспективные машины, чтобы точно рассчитывать такие пропорции.

Учитель: Верно! А теперь представьте — вы только что использовали ту же математику, что и великие мастера. Подобие треугольников работает не только в учебнике, но и в искусстве, архитектуре, дизайне.

Методическое обоснование выбора задачи

Предложенная на этапе творческого применения задача намеренно выведена за пределы традиционной для математики предметной области — в сферу изобразительного искусства. В отличие от стандартных заданий на вычисление высоты объектов, данная задача не содержит готового чертежа с маркированными вершинами. Обучающемуся предстоит самостоятельно распознать подобные треугольники в структуре перспективного изображения, образованных линией горизонта, краями дороги и лучом зрения. Данное обстоятельство переводит решение в плоскость продуктивного уровня математической грамотности: актуализируются гибкость мышления, пространственное воображение и способность к переводу визуальной информации на язык геометрических отношений. Эмпирические наблюдения показывают, что именно междисциплинарные задачи подобного типа вызывают наиболее выраженный эмоциональный отклик у обучающихся. Осознание того, что теоретические конструкции, изучаемые в рамках школьного курса, находят применение в живописных полотнах мастеров Возрождения, в архитектурных решениях и даже в оптике современных устройств, способствует формированию устойчивой внутренней мотивации и демонстрирует универсальность математического языка как средства описания действительности.

Организация домашнего задания: вариативный подход

В целях учета индивидуальных образовательных траекторий и уровневой дифференциации домашнее задание предлагается в двух вариантах, предоставляющих учащимся право выбора в зависимости от познавательных предпочтений.

Первый вариант (исследовательский) адресован обучающимся, ориентированным на прикладную деятельность: им предлагается самостоятельно сконструировать и решить задачу на подобие треугольников, сюжет которой связан с повседневным опытом (расчет длины тени от уличного освещения, масштабирование помещения, геометрия фотосъемки). Задание предусматривает оформление полного решения, включая формулировку условия, выполнение чертежа и развернутое обоснование вычислений.

Второй вариант (теоретико-исторический) предназначен для учащихся, проявляющих интерес к содержательной стороне вопроса: требуется найти и систематизировать информацию об использовании математических методов в творчестве художников эпохи Возрождения и подготовить краткое устное сообщение.

Дифференцированный подход, предполагающий свободу выбора формата работы, обеспечивает повышение субъектной позиции обучающегося: ответственность за результат перестает восприниматься как внешнее принуждение и трансформируется во внутреннюю регулятивную установку. Данный организационный механизм, как показывает педагогическая практика, способствует росту осознанности учебной деятельности и укреплению положительной мотивации.

Рефлексивный этап: содержательные ориентиры

Завершающая фаза урока выстраивается не в формате формального опроса о перечне выполненных действий, а как серия открытых вопросов, направленных на осмысление личного продвижения каждого учащегося. Содержательными доминантами рефлексии выступают: фиксация нового знания (что было освоено впервые), идентификация субъективных сложностей (какой этап вызвал наибольшее затруднение) и выделение наиболее значимого, эмоционально окрашенного элемента занятия. Подобная постановка вопросов создает условия для вербализации индивидуальных выводов, при этом каждый из обучающихся формулирует собственный, персонализированный результат.

Критически важным условием эффективности рефлексивной процедуры выступает создание безопасной коммуникативной среды, в которой признание в затруднениях не воспринимается как неудача, а трактуется как естественный элемент познавательного процесса. В ситуациях, когда учащийся формулирует суждение о неожиданности применения подобия в живописи или о ценности расчетов, соотносимых с жизненным контекстом, фиксируется достижение ключевой педагогической цели: математика перестает восприниматься как изолированный свод правил и начинает осознаваться как инструмент понимания и преобразования окружающего мира.

2.3. Апробация комплекса практико-ориентированных задач и анализ результатов экспертной оценки

Разработка теоретико-методических материалов, включающая созданный комплекс из десяти практико-ориентированных задач и фрагмент урока, требует обязательной проверки их методической валидности и практической применимости. Заключительным этапом исследования стала апробация разработанных материалов в форме экспертной оценки, проведенной учителями математики общеобразовательной школы.

Целью данного этапа являлось выявление дидактического потенциала комплекса, оценка его соответствия требованиям ФГОС ООО и определение перспектив внедрения в реальную учебную практику.

Организация экспертной оценки

Для проведения экспертизы материалы были направлены учителям математики. Экспертам был предложен для изучения полный комплект разработок:

комплекс из десяти практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» (8 класс), охватывающий различные сферы жизнедеятельности (социально-бытовую, историко-прикладную, цифровую, спортивную, культурно-эстетическую);

фрагмент урока закрепления знаний, включающий дифференцированную групповую работу и метод парной работы «художник-математик».

Экспертам была предложена карта оценки, содержащая следующие критерии:

соответствие содержанию и целям обучения — соответствие задач теме «Подобие треугольников» и возрастным особенностям обучающихся 8 класса;

практическая направленность и мотивационный потенциал — наличие жизненного контекста, способность задач вызывать познавательный интерес и демонстрировать применимость математики в реальной жизни.

Результаты экспертной оценки разработанного комплекса

По итогам анализа представленных материалов экспертами — учителями математики с опытом работы в основной школе — была зафиксирована высокая оценка разработанного комплекса. В качестве ключевых достоинств отмечались актуальность проблематики и выраженный потенциал предложенных заданий для целенаправленного формирования математической грамотности обучающихся.

В числе наиболее значимых аспектов эксперты выделили жанрово-тематическое разнообразие контекстов, интегрированных в условие задач. Включение сюжетов, относящихся к сфере социальной ответственности (задача о проектировании пандуса для маломобильных групп населения), изобразительного искусства (линейная перспектива в живописи) и спортивной физики (траектория отскока на бильярдном столе), получило особую положительную оценку.

Указанное разнообразие, по мнению рецензентов, позволяет обеспечить содержательный доступ к материалу для широкого спектра учащихся, включая тех, кто традиционно идентифицирует себя с гуманитарным профилем и испытывает устойчивые затруднения при изучении дисциплин естественно-математического цикла.

Пристальное внимание экспертов привлекла методическая архитектура задач. Было отмечено, что включение в условие избыточных данных (например, в задачах на определение высоты здания или памятника) и постановка вопросов, требующих критической оценки полученного результата («Является ли полученное значение реалистичным?»), представляет собой эффективный дидактический механизм развития регулятивных и познавательных универсальных учебных действий. По оценке учителей-практиков, именно указанные умения — критическая работа с информацией, отделение релевантных данных от нерелевантных, рефлексивная проверка итогового результата — в наибольшей степени коррелируют с требованиями, предъявляемыми к выполнению заданий первой части Основного государственного экзамена по математике.

Отдельного внимания заслужила апробация фрагмента урока. Эксперты высоко оценили переход от фронтального опроса к активной исследовательской деятельности. Дифференциация заданий для группового этапа (задача про школьный двор) была признана эффективным способом работы в неоднородном классе, позволяющим каждому ученику работать в зоне своего ближайшего развития. Метод парной работы «художник-математик» (задача про перспективу) был отмечен как удачная находка, способствующая развитию коммуникативных навыков и визуального мышления. Использование цифровой лаборатории (GeoGebra) получило положительный отзыв как средство наглядной визуализации абстрактных геометрических свойств.

Конструктивные замечания и их учет

В ходе экспертной оценки были получены небольшие конструктивные рекомендации, которые позволили доработать материалы. Ряд экспертов указали на то, что некоторые задачи (в частности, про стропильную систему и бильярд) требуют значительных временных затрат на этапе построения математической модели и могут не уложиться в стандартные 45 минут урока при фронтальной работе.

Данные замечания были учтены. В методические рекомендации к комплексу добавлено указание, что задачи повышенной сложности (№5, №9) целесообразно использовать не на этапе первичного закрепления, а в рамках проектной деятельности, на факультативных занятиях или в качестве творческих домашних заданий для обучающихся с высокой мотивацией. Также рекомендовано подготовить раздаточный материал с заранее напечатанными чертежами-заготовками для экономии времени на уроке.

Анализ материалов, представленных на экспертизу, позволил зафиксировать высокую степень соответствия разработанного комплекса заявленным исследовательским задачам. Экспертная оценка подтвердила состоятельность исходной гипотезы: предложенный набор практико-ориентированных задач и методика их включения в учебный процесс обладают выраженным дидактическим потенциалом. Рецензентами была засвидетельствована готовность материалов к практическому внедрению; в качестве ключевых эффектов отмечались как повышение познавательной мотивации при изучении геометрического содержания, так и формирование устойчивых навыков математического моделирования, значимых как для успешного прохождения итоговой аттестации, так и для последующей жизненной практики.

Полученные экспертные оценки в совокупности с теоретическими основаниями, изложенными в первой главе, и методическими разработками, детализированными во второй, свидетельствуют об успешности апробации и практической значимости предложенного инструментария. Данный вывод позволяет перейти к обобщающему резюмированию результатов выпускной квалификационной работы.

Вывод по главе 2

Разработанный в рамках практической части исследования комплекс практико-ориентированных задач по теме «Подобие треугольников» для 8 класса представляет собой целостную дидактическую систему, сконструированную с ориентацией на формирование математической грамотности обучающихся через последовательную реализацию полного цикла математического моделирования. В состав комплекса включено десять задач, тематически охватывающих различные сферы человеческой деятельности: социально-бытовую, историко-прикладную, цифровую, спортивную, культурно-эстетическую, а также области профессионального самоопределения и социальной ответственности.

Конструирование комплекса осуществлялось на основе следующих методических принципов:

принцип цикличности — предполагающий многократное обращение к одним и тем же объектам реального мира на протяжении освоения различных разделов курса;

принцип полноты — обеспечивающий охват всех значимых сфер деятельности, в которых востребована математическая грамотность;

принцип согласованности — ориентирующий на соответствие предлагаемых жизненных ситуаций актуальным математическим возможностям обучающихся;[8]

принцип структурно-компонентного подхода — предусматривающий включение в каждую задачу статического, преобразующего и графического компонентов.[23]

По итогам экспертной оценки и апробации комплекса учителями-практиками были зафиксированы следующие результаты. Материалы признаны пригодными для внедрения в образовательную практику. В качестве особых достоинств отмечены: разнообразие контекстных сюжетов, обеспечивающее доступ к содержанию для учащихся с различными познавательными установками; методическая продуманность структуры задач, включающей элементы с избыточными данными и задания, стимулирующие критическую оценку результата; эффективность предложенных организационных форм — дифференцированной групповой работы и парного взаимодействия по модели «художник–математик» — в условиях гетерогенного классного состава.

Разработанный фрагмент урока закрепления знаний, выстроенный в логике системно-деятельностного подхода, продемонстрировал состоятельность практико-ориентированных задач на этапах первичного закрепления в измененной ситуации и творческого применения в новой, нестандартной ситуации. Задача «Школьный двор мечты», включенная в этап первичного закрепления, позволила организовать уровневую дифференциацию учебной работы; задача «Перспектива художника», вынесенная на этап творческого применения, обеспечила междисциплинарную интеграцию математического и художественного содержания.

Таким образом, практическая часть исследования подтверждает исходную гипотезу: системно спроектированный комплекс практико-ориентированных задач, реализуемый через активные и исследовательские формы деятельности, способствует формированию у восьмиклассников устойчивой математической грамотности. При этом грамотность понимается не как совокупность заученных признаков подобия, а как универсальная способность воспринимать окружающую действительность сквозь призму математических закономерностей. Представленные материалы могут быть непосредственно использованы в практике преподавания математики в основной школе с целью повышения уровня функциональной грамотности обучающихся и усиления их готовности к государственной итоговой аттестации.

Заключение

В процессе работы была проанализирована научная, педагогическая и методическая литература по вопросам формирования математической грамотности и использования практико-ориентированных задач на уроках геометрии. Анализ показал, что реализация существующих теоретических подходов возможна, однако в школьных учебниках (в частности, в курсе геометрии 8 класса) таких задач представлено недостаточно. Имеющиеся методические приемы, направленные на формирование навыков применения математики в реальной жизни, требуют адаптации и конструирования под конкретные темы.

Поставленные в исследовании задачи были достигнуты. В ходе работы было уточнено понятие математической грамотности, определены её структура и уровни сформированности. Охарактеризованы дидактические требования к практико-ориентированным задачам и их роль в развитии функциональной грамотности. Разработан и апробирован авторский комплекс из десяти задач, охватывающих различные сферы жизнедеятельности, а также спроектирован фрагмент урока, демонстрирующий эффективность дифференцированного и парного подходов. Результаты экспертной оценки показывают, что системное использование полного цикла математического моделирования независимо от контекста задачи (быт, искусство, спорт) повышает вовлеченность обучающихся и развивает критическое мышление.

Перспективы дальнейших исследований связаны с необходимостью продолжения разработки новых практико-ориентированных заданий и совершенствования существующих методик. Требования к функциональной грамотности выпускников возрастают, задания ОГЭ всё чаще включают задачи с реальным контекстом, содержащие избыточные данные. Обучающиеся должны уметь применять математический аппарат для решения таких задач, отличая главное от второстепенного и преодолевая «математическую тревожность».

Геометрия часто воспринимается школьниками как сложная и абстрактная дисциплина. Задача учителя — сделать изучение предмета осмысленным и практически значимым, формируя у обучающихся понимание условий задач и умение видеть математические закономерности в окружающей действительности (в тенях, архитектурных чертежах, оптических системах).

В заключение можно отметить, что формирование математической грамотности невозможно без межпредметных связей. Интеграция знаний из физики, географии, черчения и изобразительного искусства в процессе решения геометрических задач является необходимым условием. Исследование также подтверждает, что учитель математики должен выступать не просто транслятором формул, а конструктором учебных ситуаций, способным показать учащимся практическую пользу и внутреннюю красоту науки.

Список литературы

1. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (с изменениями и дополнениями). 2021.
2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 09.10.2024 № 704 «О внесении изменений в некоторые приказы Министерства просвещения Российской Федерации, касающиеся федеральных образовательных программ начального общего образования, основного общего образования и среднего общего образования». 2025.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2010.
4. Аввакумова И.А., Лиханов И.С. Средства формирования функциональной математической грамотности учащихся в процессе проектной деятельности при обучении математике // Ученые записки Шадринского государственного педагогического университета. 2026. № 1(11). С. 69–75.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 7-9 классы : базовый уровень : учебник. 14-е изд., перераб. Москва : Просвещение, 2023. 416 с.
6. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л., Слипенко А.К. Геометрия треугольников, четырёхугольников, окружностей. Пособие для дополнительного изучения математики обучающимися 9-х классов. Донецк : ДонНУ, 2025.
7. Байсакина А.А. Практико-ориентированная задача как средство формирования функциональной математической грамотности у учащихся в процессе обучения математике : выпускная квалификационная работа. Екатеринбург : УрГПУ, 2025. 49 с.
8. Бородулина Н.А., Вятчинова К.Г. Формирование математической грамотности у обучающихся на уроках математики // Калининградский

вестник образования. 2023. № 1 (17). С. 22–29.
9. Васенина-Кириллова О.А., Распопова Е.Н. Роль и место практико-ориентированных задач в предмете «Математика» // Ученые записки Шадринского государственного педагогического университета. 2025. № 2(8). С. 229–236.
10. Воровщиков С.Г. Дидактико-методическое и управленческое обеспечение проектной и исследовательской деятельности учащихся: внутришкольные нормы // Биология в школе. 2021. № 8. С. 42–48.
11. Даньшина О.А. Современные требования к качественному уровню развития компетенций педагогов // Педагогический научный журнал. 2025. Т. 8, № 7. С. 30–38.
12. Денищева Л.О. Особенности формирования и оценки математической грамотности школьников // Science for Education Today. 2021. Т. 11, № 4. С. 113–135.
13. Егупова М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02. М., 2014. 433 с.
14. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода : кн. для учителя. М. : Просвещение, 2003. 223 с.
15. Жунусакунова А.Д. Требования к разработке практико-ориентированных задач на уроках математики // Эпоха науки. 2025. № 43. С. 343–348.
16. Кузнецова И.В. и др. Междисциплинарная интеграция в обучении математике как средство формировании математической грамотности обучающихся // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2022. Т. 28, № 3. С. 45–50.
17. Некрасова Г.Г. Уровень сформированности математической грамотности как условие развития математической компетентности обучающихся СПО // Сборник материалов научно-практической конференции. Славянск-на-Кубани : Филиал КубГУ, 2022. С. 219–223.
18. Николаев А.В. Алгоритмический подход к решению задач планиметрии:

математический триггер // Поволжский педагогический поиск. 2022. № 4 (42). С. 46–58.

19. Пожарова Г.А. Практико-ориентированные задачи как один из важнейших элементов формирования математической грамотности учащихся // Молодой ученый. 2021. № 1(343). С. 62–64.
20. Рослова Л.О. и др. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1, № 4(61). С. 58–79.
21. Семёнова И.Н., Шорохов Е.А. К вопросу о корректном использовании терминов, связанных с современными образовательными результатами // Вестник Шадринского государственного педагогического университета. 2024. № 1 (61). С. 33–42.
22. Скарбич С.Н., Далингер В.А., Кузьмин С.Г. Формирование готовности студентов к организации исследовательской деятельности обучающихся по математике с помощью цифровых ресурсов // Педагогический научный журнал. 2025. Т. 8, № 7. С. 197–203.
23. Скафа Е.И., Полупанов В.А. Технология конструирования практико-ориентированных задач по геометрии для развития метапредметных компетенций обучающихся // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2025. Вып. 4 (68). С. 85–93.
24. Слета Ю.О. Методика обучения учащихся основной школы анализу условия планиметрической задачи : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 5.8.2. Волгоград, 2022. 27 с.
25. Смирнов Е.И. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика : учебное пособие. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2017. 454 с.
26. Суховиенко Е.А., Севостьянова С.А., Мартынова Е.В. Диагностика математической грамотности учащихся // Вестник Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2025. № 2 (186). С. 110–135.
27. Хуторской А.В. Пять уровней метапредметности // Народное образование.

2017. № 8 (1464).
28. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1990. 96 с.
29. Шулика Н.А. Математическая грамотность личности: сущность и специфика формирования // Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс». Хабаровск : ДВГУПС, 2025.
30. Шутрова И.В. Формирование функциональной математической грамотности в процессе обучения математике на уровне основного общего образования посредством сквозных контекстных задач : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 5.8.2. Архангельск, 2025. 26 с.
31. Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). PISA 2022 mathematics framework (draft). 2018. 95 p.
32. UNESCO. Revised Recommendation concerning the International Standardization of Educational Statistics. 1978.