МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Шереметьева Софья Евгеньевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Обучение вычислению площадей фигур в курсе геометрии основной школы с использованием динамических чертежей

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

____
(дата, подпись)

Научный руководитель
д-р пед. наук, к.ф.-м.н., профессор
Майер Валерий Робертович

____
(дата, подпись)

Дата защиты
____

Обучающийся
С.Е. Шереметьева

____
(дата, подпись)

Оценка________________________________
прописью

Красноярск 2026

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Современные стратегические документы в области образования – Концепция развития математического образования в российской федерации (в редакции Распоряжения правительства РФ от 08.10.2020 №2604-р) и план мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования на период до 2030 года (Распоряжение правительства РФ от 19.11.2024 №333-р) – ставят задачу повышения качества преподавания математики и формирования у школьников устойчивых математических компетенций. Одним из ключевых направлений этой работы является создание современной информационно-образовательной среды и широкое внедрение цифровых образовательных ресурсов, способствующих развитию исследовательских умений, визуального мышления и практических навыков решения прикладных задач. В условиях цифровизации образования особенно значимы средства динамической математики, позволяющие реализовать на уроке интерактивную наглядность и исследовательские сценарии.

Тема «Площадь» является центральной в школьной геометрии: она объединяет понятия длины, площади и объема, закладывает основы пространственного и функционального мышления и имеет прикладное значение. Однако практика показывает, что у учащихся возникают трудности при переходе от интуитивного представления площади к её строгому вычислению, особенно в нестандартных задачах и при работе с криволинейными фигурами. Ограниченность статичных рисунков в учебниках затрудняет усвоение идей равновеликости, разбиения и предельных переходов, что порождает формализм и снижает мотивацию к изучению темы.

В этих условиях разработка и внедрение методической копилки динамических чертежей для обучения вычислению площадей фигур в основной школе становится востребованной. Во-первых, динамические модели обеспечивают наглядную демонстрацию ключевых дидактических приемов (перекраивание, триангуляция, аппроксимация круга), способствуют развитию исследовательской деятельности. Во-вторых, подготовка учителя к самостоятельной работе с такими инструментами повышает его профессиональную компетентность и способствует внедрению цифровых практик, предусмотренных национальными и ведомственными программами. Практическая значимость исследования заключается в создании готовых методических материалов, которые можно эффективно использовать при обучении учащихся основной школы умению вычислять площади простейших планиметрических фигур: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции, круга и его частей.

Таким образом, тема ВКР «Обучение вычислению площадей фигур в курсе геометрии основной школы с использованием динамических чертежей» является актуальной как с точки зрения научно-методической модернизации преподавания геометрии, так и с позиции практической реализации государственной политики в сфере цифровизации образования.

Цель исследования: теоретически обосновать, разработать и апробировать приёмы и способы применения динамических чертежей, выполненных с использованием интерактивных цифровых образовательных ресурсов, при обучении учащихся основной школы умению вычислять площади фигур.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование в обучении систем динамической математики.

Предмет исследования: формирование у обучающихся умений вычислять площадь многоугольника, круга и его частей с использованием динамических чертежей.

Задачи исследования:

1. проанализировать учебные пособия по геометрии в основной школе на предмет изложения темы «Площадь»;

2. выявить современные проблемные зоны в знаниях учащихся по теме «Площадь» и смежным с ней темам;

3. описать анимационные, конструктивные и исследовательские возможности систем Живая математика и Математический конструктор как средств обучения вычислению площадей с использованием динамических чертежей;

4. разработать приёмы и способы применения динамических чертежей при обучении вычислению площадей фигур в основной школе;

5. провести апробацию разработанных приёмов и методов применения динамических чертежей при обучении вычислению площадей фигур в основной школе.

ГЛАВА 1. ДИДАКТИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР

Изучение геометрии в основной школе играет ключевую роль в формировании пространственного мышления и математической интуиции учащихся. Среди содержательно-методических линий школьного курса геометрии особое место занимает тема «Площадь», которая связывает воедино наглядные геометрические представления и строгий алгебраический аппарат. Вместе с тем, традиционная методика преподавания этой темы часто сталкивается с проблемой избыточной статичности учебного материала, представленного в печатных учебниках, что затрудняет понимание школьниками динамических свойств площадей (равновеликости, равносоставленности, непрерывного изменения величин).

В условиях масштабной цифровизации отечественного образования возникает необходимость переосмысления дидактических подходов по использованию современных цифровых инструментов. Первая глава данной работы посвящена исследованию теоретико-методологических и цифровых аспектов обучения учащихся основной школы вычислению площадей фигур. В рамках этой главы будут рассмотрены дидактический потенциал информационно-коммуникационных технологий, конструктивные особенности отечественных и зарубежных интерактивных геометрических сред, а также возможности использования готового цифрового контента для повышения качества преподавания математики в школе.

1.1. Сравнительный анализ изложения темы «Площадь» в учебниках по геометрии основной школы

Учебник по геометрии – ключевой предметный ресурс, определяющий содержательную и методическую линию освоения темы «Площадь» в основной школе. От того, как организовано изложение материала в учебнике, во многом зависит успех усвоения темы учащимися и удобство работы учителя при планировании уроков.

В параграфе предлагается провести сравнительный анализ современных учебников по геометрии основной школы с точки зрения изложения темы «Площадь»: последовательность введения понятий, способов доказательства формул, наглядности, характера задач, дифференциации заданий по уровню сложности. Анализ будет опираться на критерии дидактической полноты, наглядности и возможности развития у учащихся геометрического мышления, а его результатом станет выявление сильных и слабых сторон распространенных подходов к изложению темы в печатных учебных материалах.

Для анализа были выбраны три популярных учебника по геометрии авторов: Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой, А.Г. Мерзляка [2, 9, 18]. Сравнивать будем как изложение темы «Площадь» в 8 классе, так и её продолжение «Площадь круга и его частей» в 9 классе. Сравнительный Анализ представлен в виде таблиц (Таблица 1 и Таблица 2), и будет проводиться по следующим критериям для темы «Площадь» в 8 классе:

— методологический подход;
— последовательность изучения фигур;
— доказательство площади прямоугольника;
— вывод формул параллелограмма, треугольника и трапеции;
— характер системы задач;
— иллюстративный ряд и наглядность.

Для темы «Площадь круга и его частей» в 9 классе, анализ проводится по другим критериям:

— вывод формулы площади круга;
— введение понятия числа π;
— вычисление площади кругового сектора;
— вычисление площади кругового сегмента;
— ориентация системы задач;
— связь с практической деятельностью.

Сравнительный анализ изложения темы «Площадь» в 8 классе

Таблица 1

Критерий	**Геометрия 7-9 классы Л.С. Атанасян**	**Геометрия 8 класс А.Г. Мерзляк**	**Геометрия 8 класс И.М. Смирнова**
Методологический подход	Строгий дедуктивный подход. Свойства площади вводятся как аксиомы, на основе которых доказываются все последующие теоремы	Систематический, научно-практический подход. Акцент на алгоритмизацию и отработку вычислительных навыков.	Наглядно-деятельностный и развивающий подход. Большое внимание уделяется геометрической интуиции и практическому опыту учащихся.
Последовательность изучения фигур	Прямоугольник → Параллелограмм → Треугольник → Трапеция → Теорема Пифагора (доказывается через площади)	Прямоугольник → Параллелограмм → Треугольник → Трапеция. Теорема Пифагора изучается в отдельной главе позже.	Многоугольники изучаются параллельно с развитием представлений об их свойствах. Теорема Пифагора дается независимо от темы «Площадь».
Доказательство площади прямоугольника	Сложное математическое доказательство, рассматривающее три случая для сторон a и b (целые, рациональные, иррациональные	Упрощенное доказательство доступное для учащихся, с опорой на разбиение сторон на равные части. Избегаются избыточные абстрактные	Интуитивно-наглядный вывод. Формула вводится как естественное обобщение подсчета единичных квадратов, без громоздких доказательств.

	числа). Трудно для усвоения восьмиклассниками.	выкладки.	
Вывод формул параллелограмма треугольника и трапеции	Дедуктивные, через разбиение фигур на треугольники и прямоугольники (достраивание параллелограмма до прямоугольника).	Традиционный дедуктивный вывод формул. Формулы выводятся последовательно одна из другой с опорой на базовые свойства площади.	Широко используются приемы наглядного «перекраивания» (равносоставленности) фигур, что развивает пространственное мышление.
Характер системы задач	Традиционные академические задачи. Четкое разделение на расчетные задачи, задачи на доказательство и задачи повышенной сложности	Высокая плотность разнообразных задач. Сильный блок развивающих задач, задач на построение и подготовку к ОГЭ.	Большое количество практико-ориентированных и исследовательских задач, связанных с реальной жизнью.
Иллюстративный ряд и наглядность	Статичные строгие чертежи. Минимальное использование цвета. Дополнительные построения на рисунках не всегда очевидны.	Яркие современные иллюстрации. Часто используются цветные выделения высот и оснований для лучшего восприятия.	Высокий уровень наглядности. Иллюстрации показывают этапы трансформации (перекраивания) фигур, стимулируя мысленный эксперимент.

Сравнительный анализ изложения темы «Площадь круга и его частей» в 9 классе

Таблица 2

Критерий	**Геометрия 7-9 классы Л.С. Атанасян**	**Геометрия 9 класс А.Г. Мерзляк**	**Геометрия 9 класс И.М. Смирнова**
Вывод формулы площади круга	Через предел последовательности площадей правильных вписанных многоугольников (S_n) при неограниченном увеличении числа их сторон ($n \to \infty$).	Математически строгий вывод с использованием понятия предела отношения периметра и площади правильного многоугольника к кругу.	Наглядно-эвристический вывод через секторную аппроксимацию (разрезание круга на секторы и перекладывание их в прямоугольник).
Введение понятия числа π	Число π вводится сначала через отношение длины окружности к её диаметру, а затем используется при выводе площади круга.	Строгое аналитическое определение числа π как константы отношения длины окружности к диаметру с исторической справкой.	Вводится через практико-ориентированный контекст (измерения) и исторический экскурс (метод Архимеда).
Вычисление площади кругового сектора	Выводится на основе деления площади круга на $360°$ и последующего умножения на	Предлагается стандартная формула через градусную меру угла. Уделяется	Формула дается как в градусной, так и в радиальной мерах. Акцент на

	центральный угол α: $S = \frac{\pi R^2}{360 \cdot \alpha}$	внимание пониманию сектора, как доли полного круга.	пропорциональную зависимость площади от угла.
Вычисление площади кругового сегмента	Специальная формула площади сегмента не выделяется. Нахождение площади предлагается через разность площадей сектора и треугольника.	Формула площади сегмента дается в теоретическом блоке для двух случаев (центральный угол $< 180°$ и $> 180°$).	Подробно рассматривается геометрический смысл сегмента. Предлагаются наглядные схемы для его вычисления в разных конфигурациях.
Ориентация системы задач	Преобладают абстрактные расчетные задачи на подстановку данных в формулы. Мало комбинированных фигур.	Разнообразные задачи, включающие нахождение площадей заштрихованных фигур (комбинации круга, треугольников и четырехугольников).	Большой блок нестандартных задач (например вычисление площади «луночек Гиппократа», колец, лепестков), развивающих творческий подход.
Связь с практической деятельностью	Слабая связь с практикой. Задачи носят преимущественно академический характер.	Средний уровень прикладной направленности. Встречаются задачи с физическим или техническим содержанием.	Высокий уровень практико-ориентированности. Задачи на расчет площадей круглых объектов из реальной жизни (диски, клумбы, сечения).

Таким образом, проведенный сравнительный анализ изложения содержательно-методической линии «Площадь» в учебниках геометрии Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой, А.Г. Мерзляка позволил выявить существенные различия в авторских методических концепциях, а также определить ключевые дидактические дефициты традиционного печатного учебника.

Обобщая результаты анализа можно сделать следующие выводы:

1. Учебник Л.С. Атанасяна и др. ориентирован на строгую академическую систему обучения [2]. Его сильной стороной является логическая последовательность и доказательность. Однако высокий уровень абстракции часто приводит к формализму в знаниях учащихся. Статичные чертежи не позволяют учащимся со слабой геометрической подготовкой мысленно воссоздать сложные процессы предельного перехода и перекраивания фигур.

2. Учебник А.Г. Мерзляка и др. представляет собой сбалансированный практико-ориентированный курс с мощной системой разноуровневых задач, в том числе направленных на подготовку к ОГЭ [9]. Тем не менее, методика вывода формул площадей здесь также в значительной степени опирается на статичную наглядность, что оставляет за рамками урока возможность проведения учащимися самостоятельного исследовательского поиска и геометрического экспериментирования.

3. Учебник И.М. Смирновой и В.А. Смирнова наиболее близок к реализации деятельностного подхода [18]. Авторы активно используют эвристические приемы. Однако потенциал этих приемов в печатной форме учебника остается частично ограниченным, так как бумажная иллюстрация способна зафиксировать лишь одно из положений фигуры, не показывая непрерывности процесса её трансформации.

Несмотря на методические различия анализируемых учебников, их объединяет общее ограничение – статичность геометрических чертежей. На бумажном носителе невозможно продемонстрировать динамику изменения площади при варьировании параметров фигуры, процесс непрерывного перекраивания многоугольников или бесконечный процесс аппроксимаци круга вписанными n-угольниками.

Для преодоления этих ограничений, минимизации формализма в знаниях учащихся и реализации исследовательских сценариев обучения геометрии возникает необходимость интеграции в учебный процесс современных информационно-коммуникационных технологий, а именно сред динамической геометрии [6, 7]. Это делает чрезвычайно актуальным исследование конструктивных возможностей программ, способных «оживить» геометрический чертеж, чему и посвящен следующий параграф нашей работы.

1.2. Конструктивные возможности среды Живая математика по разработке динамических чертежей для обучения вычислению площадей

Программа динамической геометрии «Живая математика» (российская локализация программного пакета The geometer's Sketchpad) представляет собой интерактивную компьютерную среду, предоставляющую пользователю широкие возможности для конструирования, исследования и анализа геометрических объектов. В контексте обучения вычислению площадей данная среда обладает уникальным инструментарием, позволяющим преодолеть статику традиционного чертежа на бумаге. Благодаря механизму «перетаскивания» геометрических элементов при сохранении заданных математических связей, «Живая математика» превращается в виртуальную лабораторию.

В данном параграфе будут проанализированы функциональные и конструктивные особенности среды «Живая математика», позволяющие разрабатывать оригинальные динамические чертежи для визуализации свойств площадей фигур, а также рассмотрен интерфейс и основные «кнопки» программы.

Среда «Живая математика» обладает рядом функциональных и конструктивных возможностей, которые делают её удобным инструментом для разработки динамических чертежей по теме «Площадь». Программная среда предоставляет средства интерактивного конструирования, механизмы перетаскивания «узлов» при сохранении заданных связей, ползунки и параметрические элементы для варьирования входных величин, инструменты измерения и отображения числовых величин, а также возможности анимации и пошагового воспроизведения построений. Эти технические возможности позволяют создавать модели, в которых учащиеся могут наглядно наблюдать процессы «перекраивания» фигур, сохранения площади при деформациях и приближения площади круга вписанными многоугольниками – что отмечается как ключевое преимущество среды в работах В.Р. Майера и О.Е. Нуждина [8,10].

С дидактической точки зрения «Живая Математика» открывает заметные преимущества: интерактивность превращает пассивную демонстрацию в исследовательскую деятельность, формирование и проверка гипотез учащимися становится естественным. Как указывают И.С. Сафуанова и В.И. Ярошевич, использование подобных систем способствует развитию экспериментальных навыков, умения прослеживать зависимости и проводить вычислительные эксперименты, что особенно важно при освоении темы «Площадь» [17, 19].

Вместе с тем практическая реализация потенциала «Живой математики» сталкивается с ограничениями. Во-первых, для полного раскрытия возможностей необходима квалификация педагога в работе с инструментарием и навыки конструирования динамических моделей; без целенаправленной подготовки многие учителя используют готовые анимации лишь для фронтальной иллюстрации, не вовлекая учащихся в самостоятельное исследование [8, 17]. Во-вторых, экономически значимым препятствием является вопрос лицензирования и оснащения рабочих мест: как отмечает О.Е. Нуждина, стоимость лицензии и требования к программно-аппаратной базе могут ограничивать широкое распространение ПО в школах [16, 19]. Наконец для интеграции в учебный процесс нужны методические материалы, которых в массовой практике часто не хватает.

1. Интерфейс интерактивной геометрической среды «Живая математика» отличается лаконичностью и интуитивной понятностью. При запуске программы перед пользователем открывается рабочее поле, окруженное панелями инструментов для управления (рисунок 1).

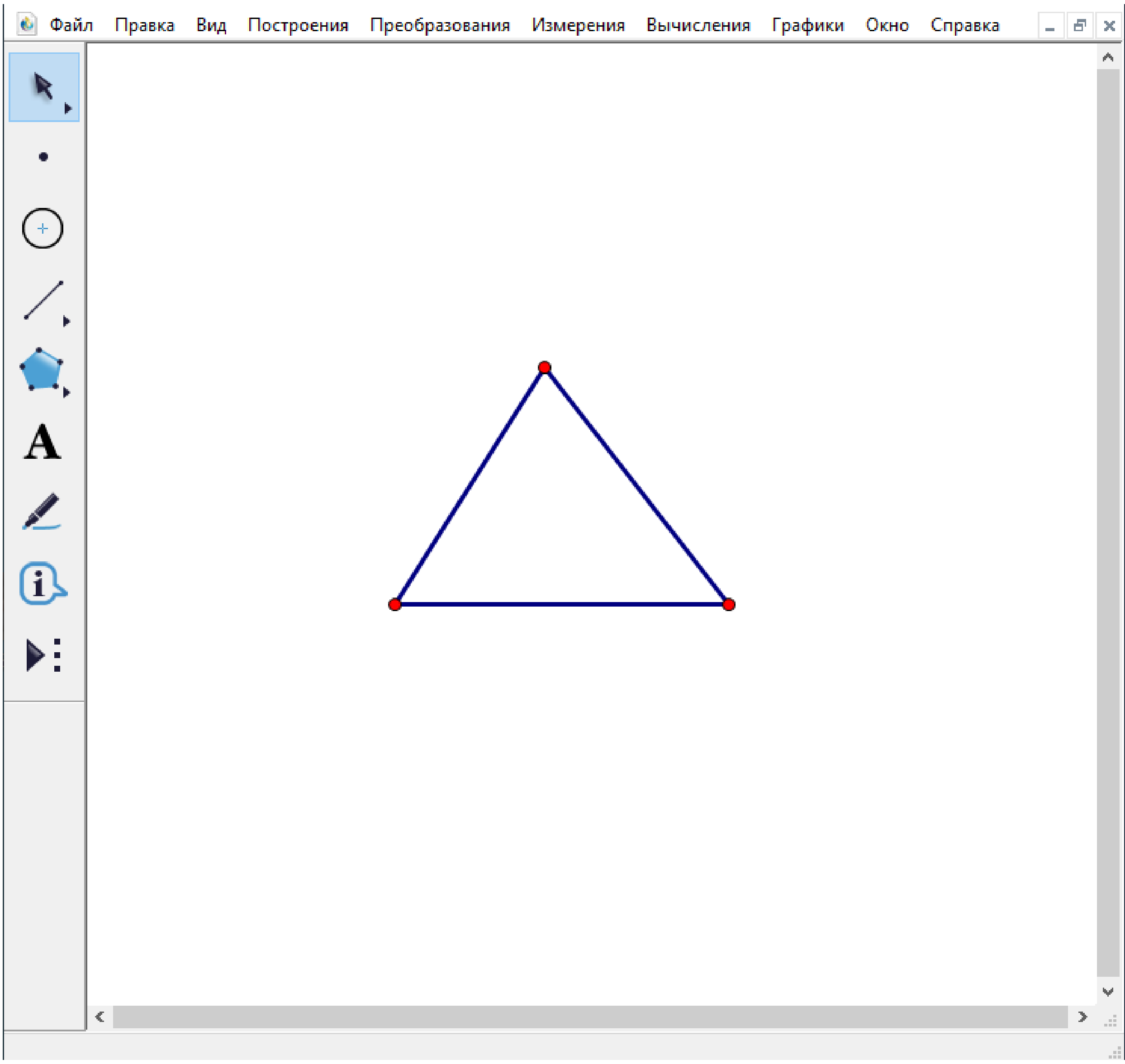
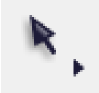
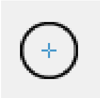
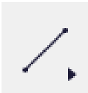
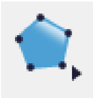
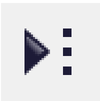


Рисунок 1.

Общий вид интерфейса СДМ «Живая математика» и его рабочие зоны.

2. Основу конструктивного функционала составляет вертикальная панель инструментов, расположенная в левой части экрана. Она включает базовые инструменты (Таблица 3), заменяющие традиционные чертежные принадлежности геометра.

Таблица 3

Иконка	Название инструмента
	Инструмент выбора
	Инструмент создания точек
	Инструмент «Циркуль»
	Инструмент «Отрезки»
	Инструмент «Внутренняя область многоугольников»
	Инструмент «Текст»
	Инструмент «Маркер»
	Инструмент «Информация»
	Инструмент пользователя (для создания собственных инструментов)

3. В отличие от простых графических редакторов, «Живая математика» строит объекты на основе математических законов. Для этого используется главное меню программы. Особое дидактическое значение для темы «Площадь» имеют следующие разделы меню:

а) Меню «Построения» (рисунок 2) позволяет строить перпендикулярные и параллельные прямые, высоты, середины отрезков, а также внутреннюю область многоугольников или криволинейных фигур, что необходимо для вычисления их площадей.

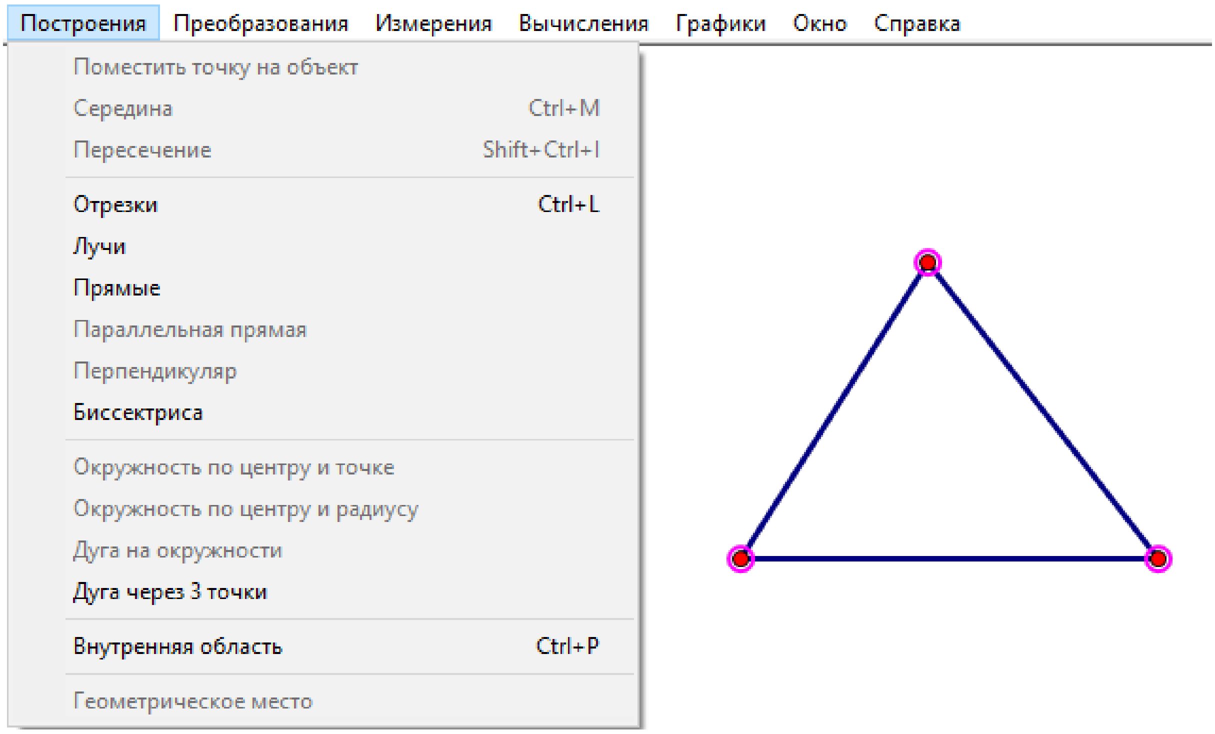


Рисунок 2.

Выпадающий список меню Построения среды Живая Математика.

b) Меню «Преобразования» (рисунок 3) обеспечивает динамический сдвиг, поворот, симметрию и гомотетию объектов.

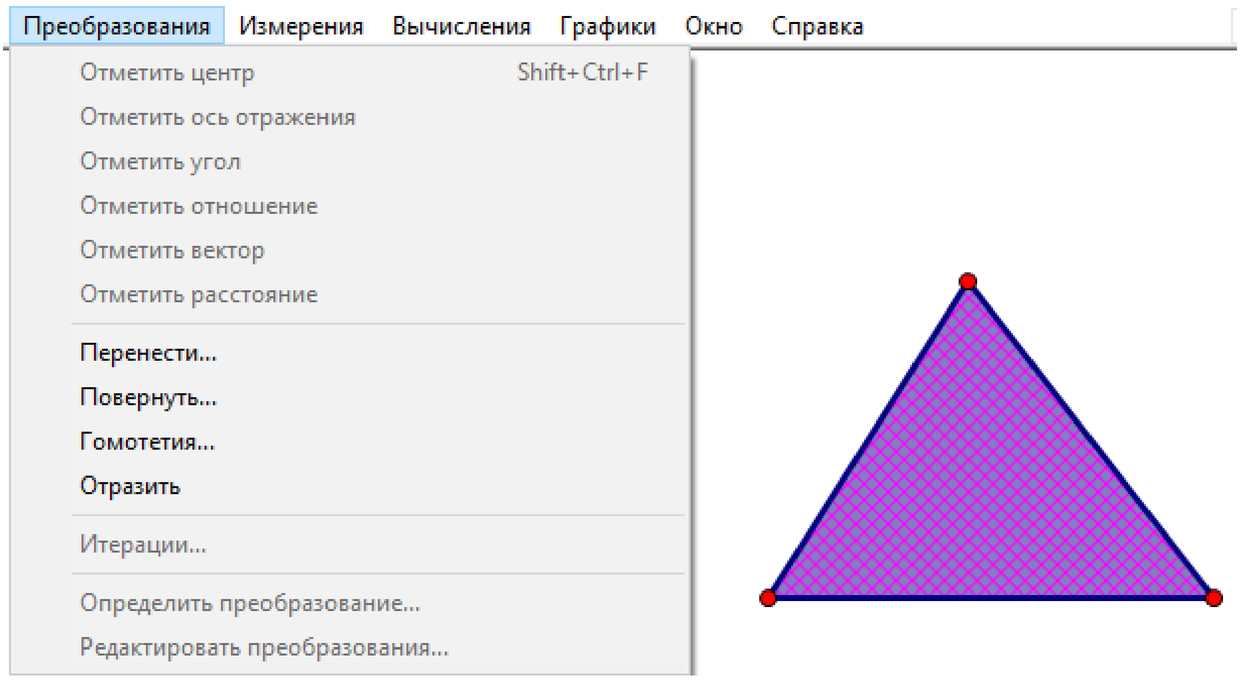


Рисунок 3.

Выпадающий список меню Преобразования среды Живая математика.

c) Меню «Измерения» (рисунок 4) позволяет мгновенно вычислить длину отрезка, величину угла, а главное – площадь выделенной внутренней области фигуры. При изменении размеров фигуры значение площади на экране пересчитываются автоматически.

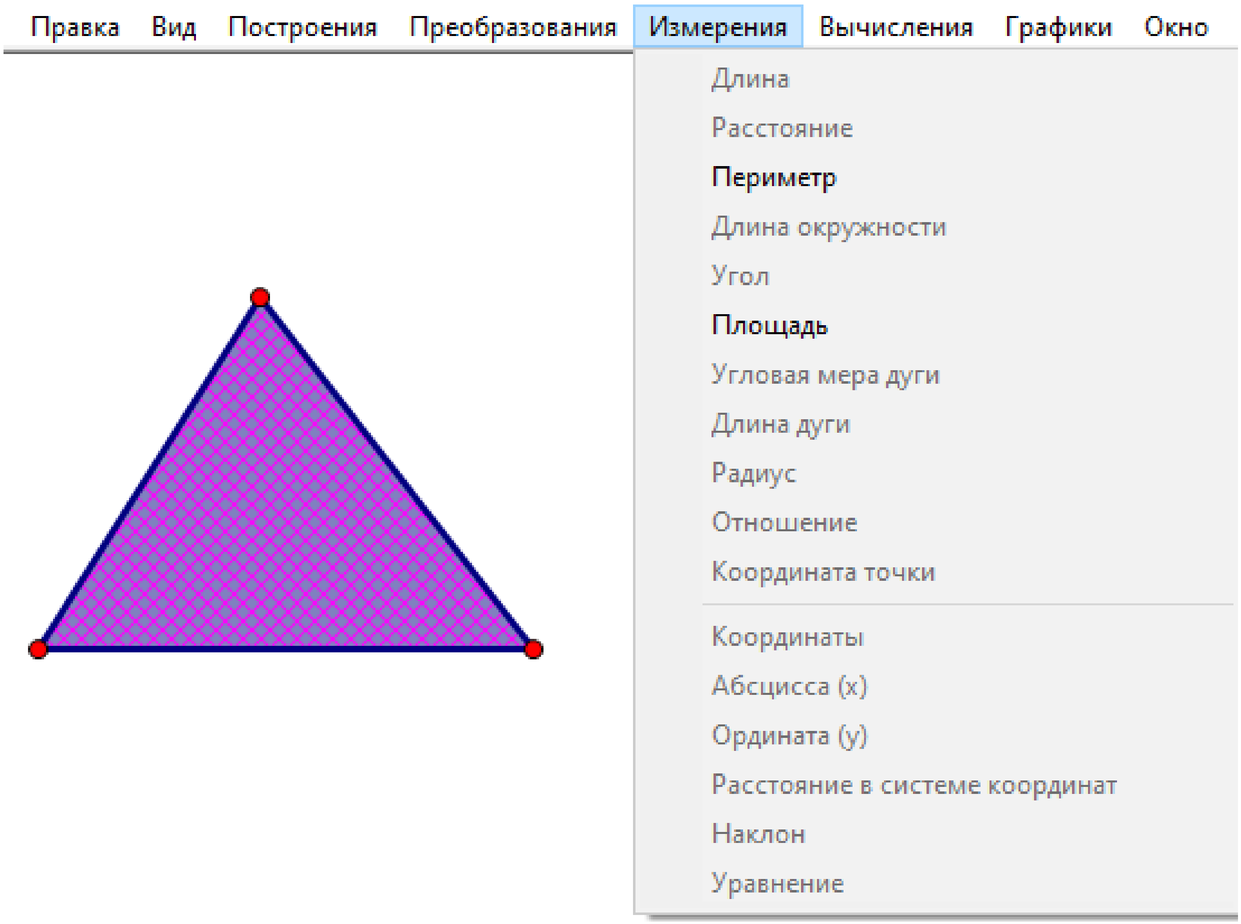


Рисунок 4.

Выпадающий список меню Измерения среды Живая математика.

4. Главной конструктивной особенностью среды является поддержка динамики и интерактивности. Чертежи могут содержать специальные кнопки анимации и управления движением точек. Например, закрепив основание треугольника и задав движение его вершины по прямой, параллельной основанию, мы получаем визуализацию сохранения площади треугольника. Инструмент создания экранных кнопок позволяет структурировать чертеж, скрывать или показывать подсказки, запускать анимацию движения частей фигур при перекраивании (рисунок 5).

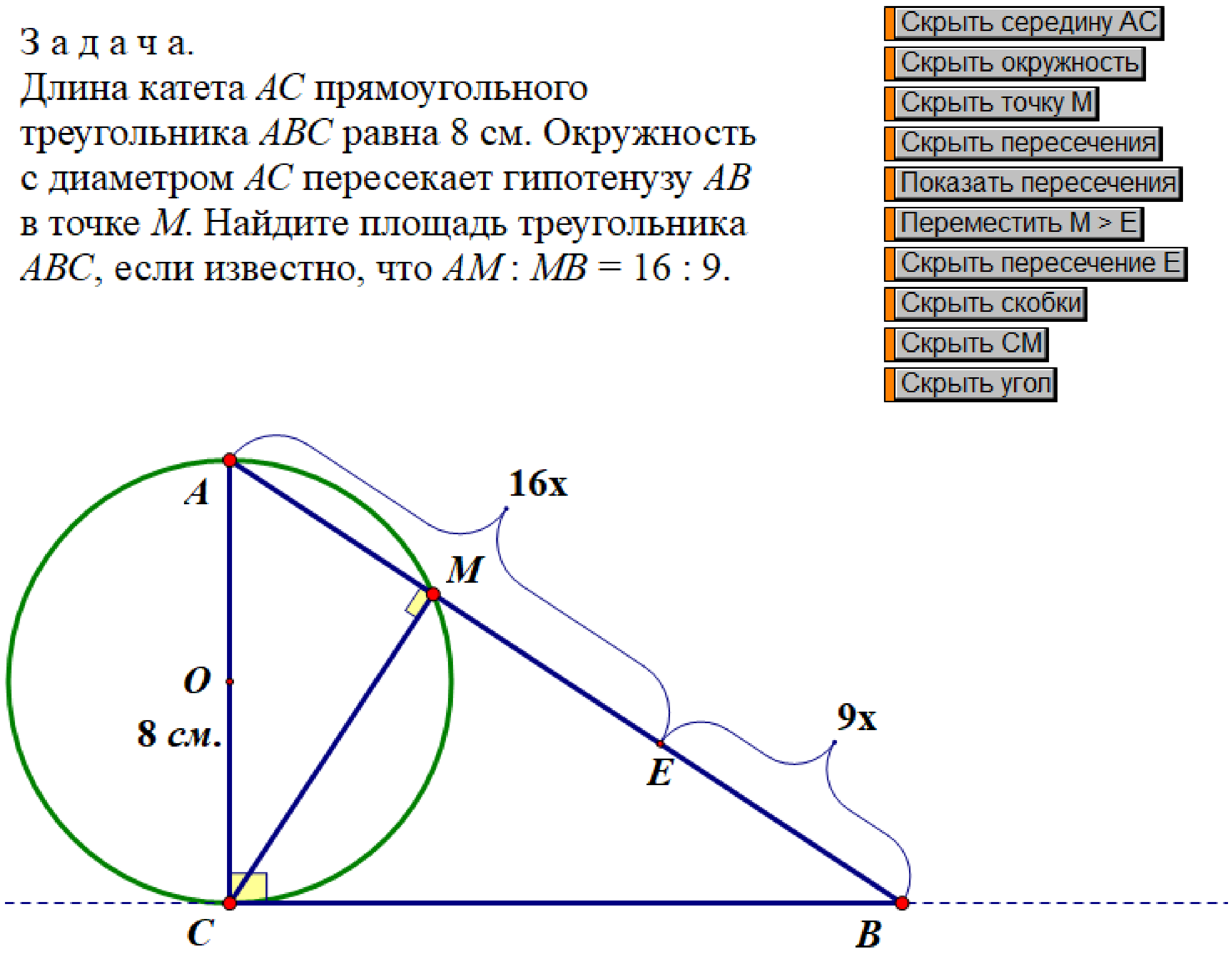


Рисунок 5.

Чертеж, созданный в среде Живая математика, и кнопки, задающие его последовательное построение.

Нажав на кнопку «Переместить M > E» точка M двигаясь по отрезку AB совмещается с точной E (рисунок 6).

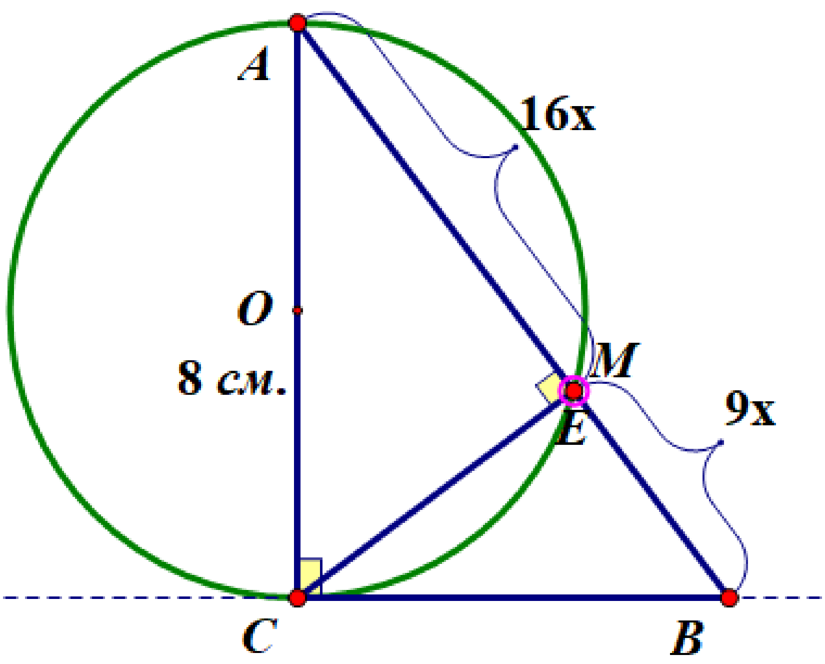


Рисунок 6.

Точка M переместилась в точку E.

Вывод из анализа состоит в том, что «Живая математика» – функционально зрелая и дидактически перспективная среда для формирования у школьников представлений о площади фигур, однако её эффективное использование требует сопровождения: доступных библиотек готовых моделей, методических рекомендаций для учителя и программ повышения ИКТ-компетентности преподавателей. Рекомендуется сочетать применение «Живой математики» с открытыми инструментами и разрабатывать локальные методические наборы, адаптированные к условиям конкретной школы.

Самостоятельное конструирование динамических чертежей в среде «Живая математика» требует от учителя дополнительных временных затрат и специальной ИКТ-компетентности. В этой связи актуальным становится использование уже готовых верифицированных цифровых образовательных ресурсов, интегрированных в единые учебные платформы. Современным отечественным аналогом, предоставляющим доступ к богатой библиотеке интерактивных моделей, является платформа «1С: Урок», функционирующая на базе программной среды «Математический конструктор». Рассмотрим возможности использования данного готового инструментария.

1.3. Дидактические возможности готовых моделей-чертежей по теме «Площадь» на платформе «1С:Урок», выполненных в среде Математический конструктор

В рамках реализации национального проекта «Образование» особое внимание уделяется внедрению качественного цифрового контента, соответствующего требованиям ФГОС. Платформа «1С: Урок» и интегрированная в неё среда динамической математики «1С: Математический конструктор» представляет собой отечественный комплекс, направленный на методическую поддержку учителя математики. Разработанные в этой среде готовые интерактивные модели-чертежи по теме «Площадь» позволяют организовать как фронтальную работу в классе, так и индивидуальную исследовательскую деятельность учащихся 8-9 классов, в том числе при изучении сложных тем, таких как площадь круга и его частей.

В данном параграфе рассматривается дидактический потенциал готовых интерактивных моделей платформы «1С: Урок», анализируются методические особенности их интеграции в структуру уроков геометрии, а также оценивается их эффективность при формировании у учащихся умений решать расчетные и доказательные задачи на вычисление площадей.

В современной системе отечественного образования особое значение приобретает использование программного обеспечения, которое не только решает актуальные дидактические задачи, но и полностью соответствует требованиям единой цифровой образовательной среды Российской Федерации. В данном контексте ведущее место среди отечественных интерактивных сред занимает динамическая программная среда «1С: Математический конструктор», интегрированная в облачную платформу «1С: Урок». Как отмечают В.Н. Дубровский, Н.А. Лебедева и О.А Белайчук, данная программа представляет собой высокотехнологичный инструмент нового поколения, специально разработанный для поддержки школьного курса математики с учетом специфики преподавания в российских школах [4].

Платформа «1С: Урок» предоставляет учителю доступ к структурированной библиотеке готовых цифровых образовательных ресурсов. В отличие от сред общего назначения, где педагогу необходимо конструировать чертежи с нуля (что требует значительных временных затрат и специальной ИТ-подготовки), ресурсы платформы «1С: Урок» представляют собой методически завершенные комплексы. В них интерактивные чертежи тесно связаны с теоретическим материалом, подсказками, виртуальными лабораториями и инструментами автоматизированного контроля знаний.

Анализ содержательного наполнения платформы «1С: Урок» по теме «Площадь» (8-9 классы) позволяет выделить несколько групп интерактивных моделей-чертежей, обладающих высоким дидактическим потенциалом:

1. Модели для визуализации свойств площади и формул многоугольников.

Данный тип моделей предназначен для наглядного введения базовых понятий теории площадей (аддитивности, инвариативности) и вывода расчетных формул для прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции.

Пример: Чему равно отношение площадей треугольников MAC и MBC (рисунок 7) [1].

$S_{MAC} = 18{,}29$

$S_{MBC} = 15{,}21$

$$\frac{S_{MAC}}{S_{MBC}} = \frac{18{,}29}{15{,}21} = 1{,}20$$

$MA = 6{,}53$

$MB = 5{,}43$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{6{,}53}{5{,}43} = 1{,}20$$

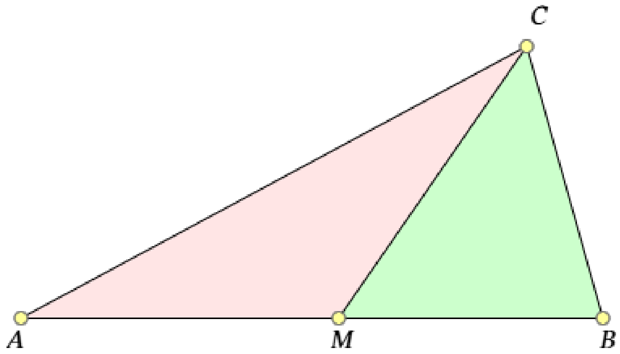


Рисунок 7.

Готовый чертеж из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.

Конструктивный функционал: учащийся может изменять геометрические параметры фигур (перетаскивать вершины, менять длины сторон), при этом программа в реальном времени производит перерасчет и отображает изменения площади.

Дидактический эффект: наглядная демонстрация инвариативности площади (например, сохранение площади треугольника при движении его вершины параллельно основанию) формирование у учеников осознанного понимания того, какие именно элементы фигуры определяют её площадь.

2. Модели исследовательских задач на построение.

Задания данного типа направлены на вовлечение учащихся в самостоятельную поисковую деятельность по созданию геометрических объектов с заданными свойствами с помощью виртуальных аналогов циркуля и линейки.

Пример: Даны два круга. Постройте круг с центром в точке O_3, площадь которого равна сумме площадей данных кругов (рисунок 8) [1].

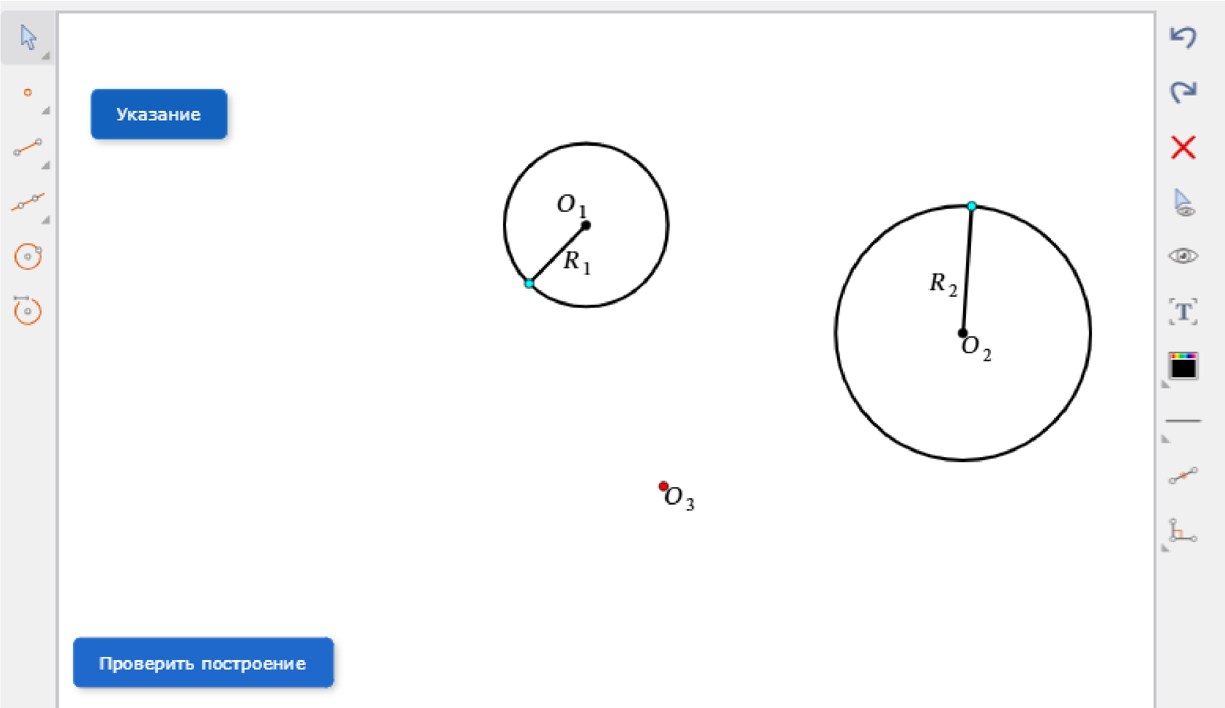


Рисунок 8.

Готовое интерактивное задание из библиотеки «1:С Урок», созданное в среде Математический конструктор.

Данная модель представляет собой интерактивную исследовательскую задачу, связывающую геометрические построения со строгими алгебраическими формулами.

Конструктивный функционал: учащиеся могут изменять радиусы двух исходных кругов, при этом программа автоматически перестраивает вспомогательный прямоугольный треугольник (рисунок 9), катеты которого динамически связаны с радиусами этих кругов, а гипотенуза задает радиус искомого третьего круга, отображая на экране постоянно обновляющиеся значения всех площадей и их суммы

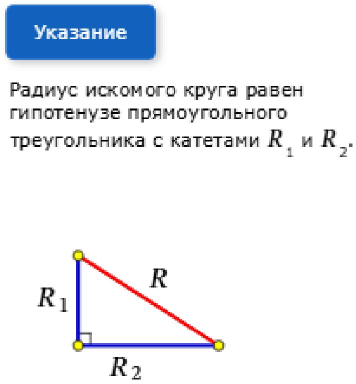


Рисунок 9.

Вспомогательный прямоугольный треугольник.

Дидактический эффект: наглядная интеграция теоремы Пифагора и формулы площади круга позволяет учащимся совершить эвристическое «открытие» геометрического закона, убедиться в его универсальности при любых деформациях чертежа и развивать алгоритмическое мышление в процессе поэтапного построения.

3. Интерактивные задачи-тренажеры на клетчатой бумаге.

Интерактивные упражнения данного типа направлены на развитие вариативного мышления и качественную подготовку к решению геометрических задач экзаменационного формата.

Пример: Примем квадрат сетки за единицу измерения площадей

a) Переместите вершины A, B, C и D так, чтобы $ABCD$ стал квадратом, площадь которого выражается числом 4;

b) Переместите вершины K, L, M и N так, чтобы $KLMN$ стал прямоугольником, отличным от квадрата, площадь которого выражается числом 4;

c) Переместите вершины P, Q и R так, чтобы PQR стал треугольником, площадь которого выражается числом 2 (рисунок 10) [1].

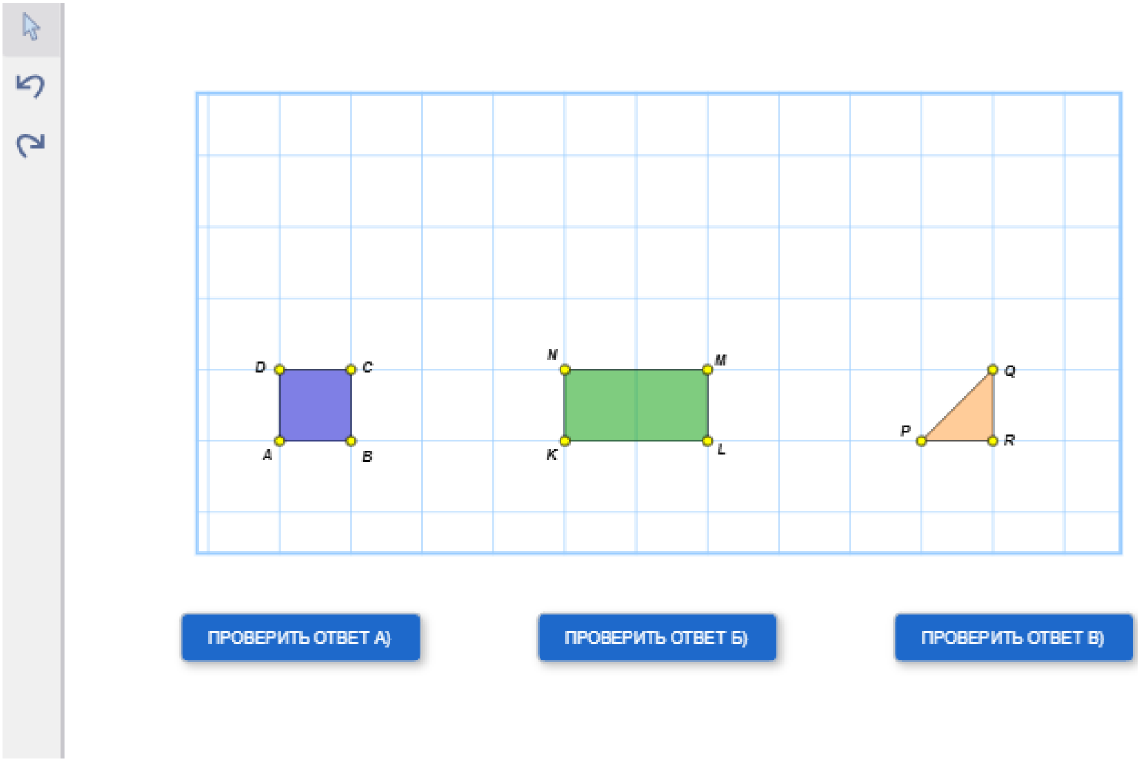


Рисунок 10.

Готовое интерактивное задание из библиотеки «1:С Урок», созданное в среде Математический конструктор.

Конструктивный функционал: использование квадратной решетки с функцией «примагничивания» вершин к её узлам обеспечивает получение целочисленных координат и исключает дробные погрешности при расчетах.

Дидактический эффект: учащиеся экспериментально осваивают понятие равновеликости фигур, убеждаясь, что разные по форме объекты могут иметь равную площадь. Также они наглядно прослеживают независимость площади от наклона боковых сторон при сдвиге вершин параллельно основанию, что помогает преодолеть формализм при заучивании формул. Наличие системы автоматической проверки ответов и пошаговых подсказок позволяет реализовать индивидуальную образовательную траекторию. Ученик получает мгновенную обратную связь, что активизирует процесс самоконтроля и снижает уровень тревожности перед совершением ошибок [1, 20].

С методической точки зрения дидактический потенциал готовых моделей «1С: Математический конструктор» на платформе «1С: Урок» заключается в реализации трех ключевых принципов современной цифровой дидактики:

— Принцип интерактивной наглядности. В отличие от пассивной демонстрации видеофильмов или слайд-презентаций, динамический чертеж вовлекает учащегося в деятельность. Ученик становится исследователем: он выдвигает гипотезу, проводит компьютерный эксперимент в интерактивной среде, фиксирует результаты и самостоятельно формулирует математический вывод.

— Принцип деятельностного подхода. Использование виртуальных лабораторий по теме «Площадь» позволяет организовать самостоятельные практические работы поискового характера. Учащиеся работают не по шаблону, а конструируют решения, осуществляют дополнительные построения на готовых интерактивных шаблонах.

— Принцип оптимизации учебного времени педагога. Использование готового контента избавляет учителя от необходимости тратить время на создание чертежей в сторонних программах. Это позволяет сосредоточится на методическом проектировании урока, подборе разноуровневых заданий и организации группового обсуждения результатов компьютерного моделирования.

Таким образом, готовые модели чертежи по теме «Площадь» на платформе «1С: Урок», выполненные в среде «Математический конструктор», представляют собой дидактически полноценную систему. Она позволяет решать целый спектр образовательных задач: от наглядного вывода теоретических формул в 8 классе до отработки практических навыков вычисления площадей сложных комбинированных фигур и частей круга в 9 классе. Интеграция данных ИЦОР в учебный процесс способствует глубокому, осознанному усвоению темы «Площадь» и формированию у учащихся устойчивых геометрических компетенций.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В первой главе исследования были подробно рассмотрены теоретико-методические, дидактические и технологические аспекты применения цифровых технологий при обучении вычислению площадей геометрических фигур в основной школе. На основе проведенного анализа были сформулированы следующие основные выводы:

1. Изучение темы «Площадь» в 8-9 классах сопряжено с высоким уровнем абстракции, что вызывает у учащихся трудности при переходе от механического применения формул к пониманию геометрического смысла площади и ее свойств. Применения ИКТ позволяет решить эту проблему за счет интерактивной визуализации, переводящей обучение из пассивного восприятия в плоскость активной учебно-познавательной деятельности.

2. Среда динамической геометрии «Живая математика» обладает мощным конструктивным инструментарием, позволяющим учителю создавать авторские модели для наглядного представления процессов «перекраивания» фигур, варьирования их параметров и доказательства базовых теорем о площадях многоугольников.

3. Платформа «1С: Урок» на базе среды «математический конструктор» предоставляет учителю готовую, методически выверенную систему интерактивных моделей, интерактивных заданий с автопроверкой и виртуальных лабораторий. Это существенно снижает трудозатраты педагога и обеспечивает преемственность в изучении площадей от простейших многоугольников в 8 классе до площади круга и его частей в 9 классе.

Таким образов, теоретический анализ дидактических возможностей информационных технологий и существующих интерактивных сред подтверждает высокую значимость динамической визуализации. Однако для успешного внедрения данных технологий в реальную практику школы недостаточно лишь обладать программным обеспечением – необходимы конкретные методические приемы, алгоритмы и сценарии уроков. Это обусловливает переход к главе, посвященной разработке конкретной методической копилки динамических чертежей и описанию приемов их практического применения при обучении решению задач на вычисление площадей.

ГЛАВА 2. ПРИЁМЫ И МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

В то время как первая глава исследования заложила теоретический фундамент и обосновала дидактическую целесообразность использования интерактивных сред, вторая глава носит выраженный практико-ориентированный и методический характер. Эффективность цифровизации обучения геометрии напрямую зависит от качества методического сопровождения интерактивных моделей: того, как именно учитель организует деятельность учащихся с динамическим чертежом, какие вопросы задает, какие исследовательские задачи предлагает для самостоятельного решения.

В данной главе представлена авторская методическая копилка динамических чертежей, разработанных для ключевых разделов темы «Площадь» в основной школе. Основное внимание уделено описанию конкретных методических приемов и методов организации учебного процесса с использованием созданных интерактивных моделей.

В главе последовательно раскрываются технологии обучения вычислению площадей многоугольников в 8 классе и площади круга, а также его частей в 9 классе, что позволяет представить целостную методическую систему работы учителя геометрии в цифровой образовательной среде.

2.1 Вычисление площадей квадрата и прямоугольника с использованием динамических чертежей

Изучение площадей геометрических фигур в курсе основной школы традиционно начинается с квадрата и прямоугольника. Эти фигуры служат дидактической основой для введения самого понятия площади как аддитивно-мультипликативной величины, а также для освоения единицы измерения – единичного квадрата. Несмотря на кажущуюся простоту формул $S = a^2$ и $S = ab$, учащиеся часто воспринимают их формально, не соотнося буквенные обозначения с реальным заполнением плоской области. Статичные чертежи в учебниках не позволяют наглядно продемонстрировать, как непрерывное изменение линейных размеров сторон влияет на квадратичную зависимость значения площади.

В данном параграфе рассматриваются методические приемы использования динамических чертежей при обучении вычислению площадей квадрата и прямоугольника в 8 классе.

В первом параграфе второй главы рассмотрим несколько теорем и задач о площадях квадрата и прямоугольника, а также фигур, образованных их пересечением. Сопроводим эти утверждения анимационными чертежами. Перечень теорем и задач приведен в таблице 4. Отметим, что некоторые задачи нами сформулированы так, чтобы их решение обучающие могли предварительно сопроводить экспериментальными исследованиями. Например, формулировку задачи 544 мы завершаем не «Докажите, что S_{ABCD} и S_{ADE} равны.», а «Сравните площади S_{ABCD} и S_{ADE}.»

Таблица 4

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункт в учебниках, номер задачи, номер задания в электронных ресурсах**	**Наличие статического чертежа в учебниках и электронных ресурсах**
Т е о р е м а 1. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон [2].	Л.С. Атанасян, П. 56	Рис. 208
З а д а ч а 1. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и	Л.С. Атанасян, П. 56. № 544	Нет рисунка

N, причём точка M – середина отрезка AE. Сравните площади S_{ABCD} и S_{ADE} [2].		
З а д а ч а 2. Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ соединены пересекающимися в точке O отрезками с двумя точками M и N стороны CD. Найдите площадь прямоугольника, если площади треугольников AOB и MON равны 8 и 2, соответственно [9].	А.Г. Мерзляк, № 215	Нет рисунка
З а д а ч а 3. Найдите площадь невыпуклого четырёхугольника $ABCD$, если AB = 4, $\angle BAD$ = 30°, CD = 2, $\angle ABC$ = 90° и $AB = CD$ [11].	Открытый банк заданий ФИПИ	Нет рисунка
З а д а ч а 4. Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причём сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов [2].	Л.С. Атанасян, П. 62. № 628	Нет рисунка
З а д а ч а 5. Проведите два отрезка с концами в вершине A квадрата $ABCD$ так, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны.	Библиотека «1С: Урок»	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор

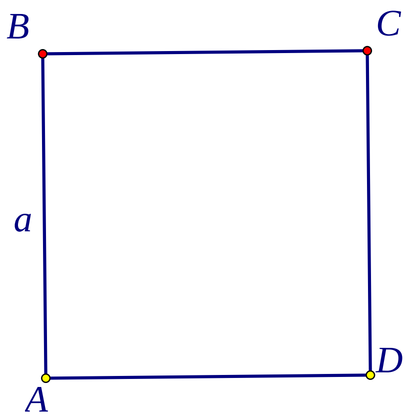
З а д а ч а 6. Точка А лежит внутри угла С, равного 60°. Расстояние от точки А до сторон этого угла равны a и b. Найдите: а)расстояние от точки А до вершины С; б)площадь четырехугольника ABCD, если AB и AD – перпендикуляры, проведенные к сторонам угла [1].	Библиотека «1С: Урок». Задача 154	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
Задача 7. Передвиньте цветные прямоугольники так, чтобы они по-прежнему не перекрывались, а в содержащей их красной рамке оставалось как можно меньше «пустого» места [1].	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
Задача 8. Зная длины сторон прямоугольника, посчитайте по формулам его периметр и площадь. Затем измерьте эти же величины с помощью инструментов. Изменяя размеры прямоугольника, скажите, всегда ли вычисленные и измеренные величины совпадают [1]?	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор

Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей на примере Задачи 4 из таблицы 4. Другие задачи представлены в приложении А.

Задача 4. Два квадрата со стороной a, имеют одну общую вершину, причём стороны одного из них лежат на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

Решению задачи предварим следующее построение динамического чертежа в системе «Живая математика 5.0» [9].

1. Воспользуемся готовым инструментом "Квадрат" (заходим в кнопку 9 на вертикальной панели инструментов, папка 04 "Четырёхугольники", выбираем инструмент "Квадрат"), получим изображение квадрата, обозначим его $ABCD$ (меняя положение жёлтых вершин A и D мы можем изменять размеры квадрата), длину стороны AB обозначим через a.

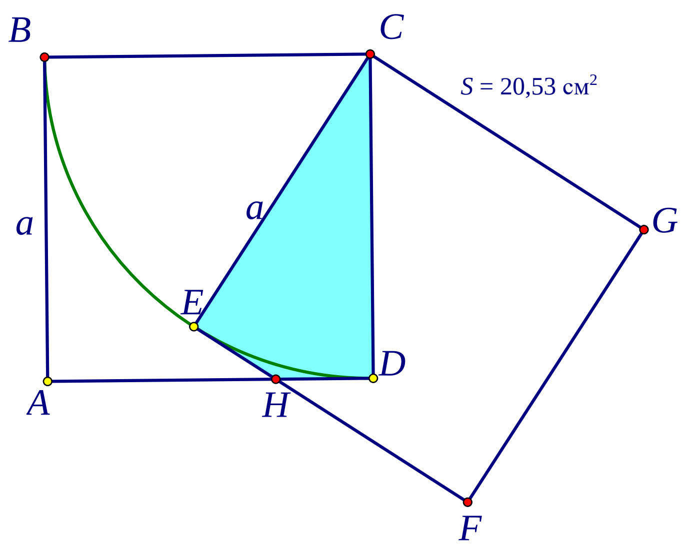


2. Создадим второй квадрат. Подсветим точку C, затем точки B и D, - изобразим (инструмент "Дуга на окружности" в папке "Построения") дугу BD окружности с центром в вершине C и радиуса $BC = a$.

3. Поместим на дугу BD произвольную точку E. Используя инструмент "Квадрат", построим на отрезке CE как на стороне квадрат $CEFG$.

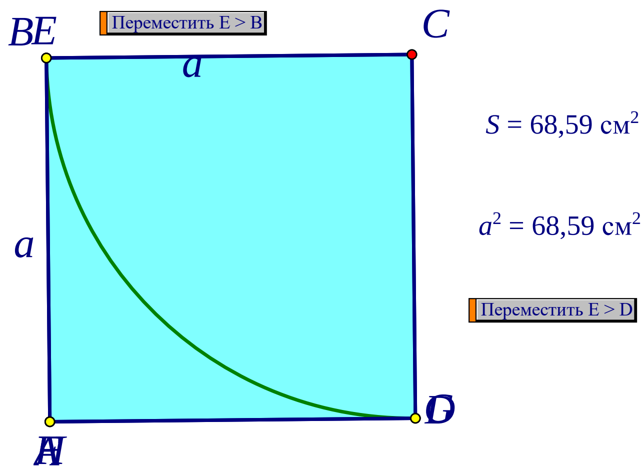
4. Построим точку H пересечения сторон AD и EF, получим четырёхугольник $CEHD$ - общую часть этих квадратов.

Окрасим его голубым цветом, найдём площадь S общей части квадратов, используя инструмент "Площадь" папки "Измерения".



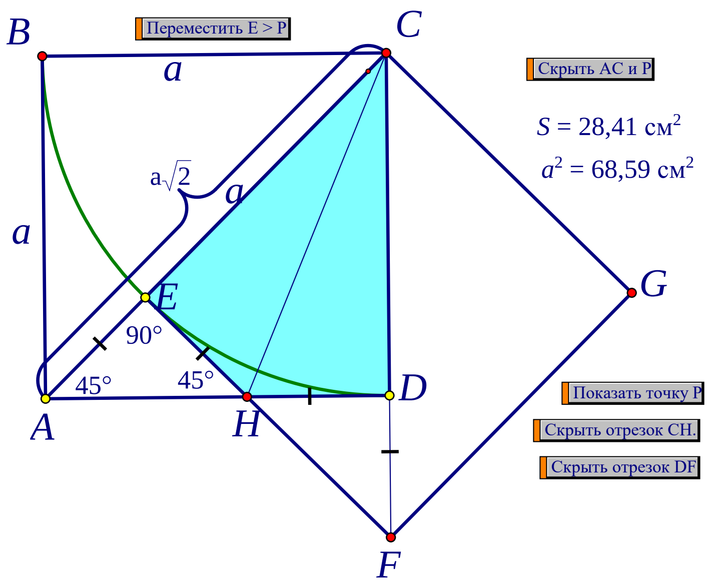
Выясним, чему равна площадь S при некоторых положениях точки E.

5. Создадим кнопки "Переместить E в B" и " E в D". Ясно, что если E совпадёт с B, то S примет наибольшее значение, т.к. оба квадрата совпадут и $S = a^2$. Если же $E = D$, то четырёхугольник $CEHD$ превратится в отрезок и S окажется равным 0.



А чему будет равна площадь S, если E поместить на диагональ AC квадрата $ABCD$?

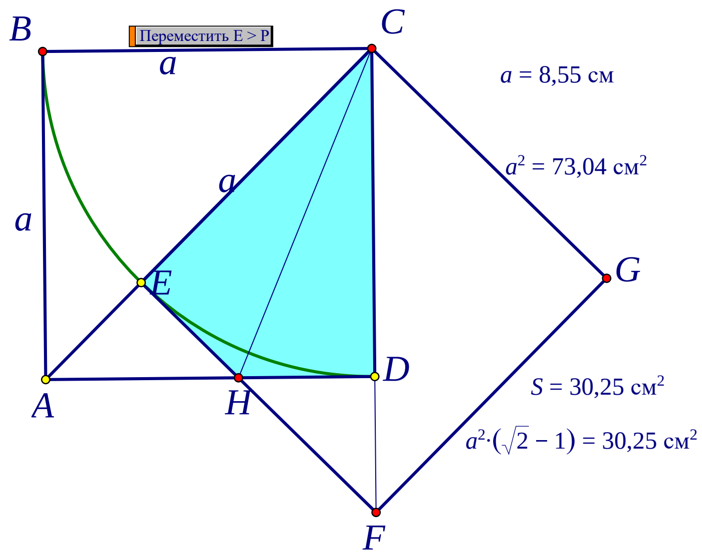
6. Построим диагональ AC, найдём ее пересечение P с дугой BD, создадим кнопку "Переместить E в P". После активации этой кнопки точка E совместиться с точкой P. Скроем точку P (кнопка "Скрыть P").



7. Для нахождения площади S четырёхугольника $CEHD$ построим отрезок CH. Рассмотрим треугольник AEH, угол при вершине E - прямой, при вершине $A = 45°$, но тогда угол при вершине H тоже 45°, ⇒ треугольник AEH равнобедренный, т.е. $AE = HE$. Но $AE = AC - CE$. По теореме Пифагора $AC = a\sqrt{2}$. Но тогда $AE = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$. Т. к. $AE = EH$, то $EH = a(\sqrt{2} - 1)$. Второй катет CE равен a. Чтобы найти площадь прямоугольного треугольника CEH, достаточно перемножить его катеты и разделить на два, получим $\frac{a^2 \cdot (\sqrt{2}-1)}{2}$. Поскольку из соображений симметрии треугольники ECH и DCH равны, то S равен удвоенной площади треугольника CEH, т.е. $S = a^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

Проверим справедливость полученной нами формулы для вычисления общей части двух квадратов, используя для этого перемещения вершины D исходного квадрата с помощью компьютерной мыши. После семи испытаний, результаты которых заносились в таблицу, мы получили подтверждение найденной формулы: значения в двух последних столбцах таблицы совпадают.

a	S	$a^2\cdot(\sqrt{2}-1)$
8,28 см	28,41 см²	28,41 см²
6,64 см	18,27 см²	18,27 см²
5,64 см	13,16 см²	13,16 см²
7,14 см	21,15 см²	21,15 см²
9,95 см	41,00 см²	41,00 см²
8,04 см	26,80 см²	26,80 см²
8,55 см	30,25 см²	30,25 см²
8,55 см	30,25 см²	30,25 см²



Все элементы необходимые для решения задачи построены и обозначены, все что больше не пригодиться – скрыто. Представленный чертеж динамичен и при любых его движениях все параллельности, перпендикулярности, отношения между точками, прямыми и отрезками сохраняются, что делает его прекрасным инструментом изучения математики. Помимо этого нами зафиксированы, все необходимые измерения, вычислена искомая площадь по формуле и с помощью кнопки «Измерить площадь области», притом в каждом из 10 экспериментальных испытаний эти значения совпадают, что говорит о том, что Гипотеза о том, что «Площадь четырехугольника $ECDH$ вычисляется по формуле $S_{ECDH} = a^2(\sqrt{2} - 1)$» является весьма правдоподобной.

После того как дети сформулируют гипотезу, учителю необходимо сообщить им о том, что на основании только одних испытаний нельзя считать, что гипотеза верна. Никто не гарантирует, что на 11 или 276 испытании гипотеза подтвердится. Чтобы проверить её правдоподобность, необходимо провести доказательство, в процессе которого используются не данные из таблицы, а условия задачи и ранее доказанные утверждения и аксиомы.

Освоение формул площадей прямоугольника и квадрата формирует у учащихся базовое понимание площади как меры плоской области. В методике геометрии эти две фигуры служат эталоном: площади всех последующих многоугольников выводятся путем их мысленного или реального преобразования в равновеликий прямоугольник. Таким образом, логика учебного процесса требует перехода от базовых четырехугольников к более сложным прямолинейным фигурам – параллелограмму, треугольнику и трапеции, - вычислительные алгоритмы для которых строятся на приёмах геометрического перекраивания и разбиения.

2.2 Вычисление площадей параллелограмма, треугольника и трапеции с использованием динамических чертежей

Тема «Площади параллелограмма, треугольника и трапеции» занимает центральное место в геометрии 8 класса. Традиционный подход к ее изучению опирается на строгое дедуктивное доказательство теорем. Однако на практике школьники часто сталкиваются с трудностями при нахождении высоты фигуры, особенно в тупоугольных треугольниках или при нестандартном развороте параллелограмма на плоскости. Кроме того, учащимся сложно мысленно осуществить разбиение трапеции или треугольника для доказательства их равносоставленности с прямоугольником.

В рамках данного параграфа представлены способы применения динамических чертежей, направленные на преодоление этих когнитивных барьеров. Рассматриваются анимационные механизмы разрезания и перекладывания частей трапеции и параллелограмма для наглядного вывода формул их площадей.

Рассмотрим несколько теорем и задач о площадях треугольника, параллелограмма, трапеции. Сопроводим эти утверждения анимационными чертежами. Перечень теорем и задач приведен в таблице 5.

Таблица 5

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункт в учебниках, номер задачи, номер задания в**	**Наличие статического чертежа в учебниках,**

	электронных ресурсах	
Т е о р е м а 1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту [2].	Л.С. Атанасян, П. 59	Рис. 214
З а д а ч а 1. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K, так что $BK{:}KM = 3{:}7$. Найдите отношение площади треугольника ABK и треугольника ABC [11].	Открытый банк заданий ФИПИ	Нет рисунка
З а д а ч а 2. Основания трапеции относятся как 1: 3. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции [11]?	Открытый банк заданий ФИПИ	Нет рисунка
З а д а ч а 3. Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Сравните S_{ABCD} и S_{AMD} [2].	Л.С. Атанасян П. 56. № 543	Нет рисунка
З а д а ч а 4. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что BK : $KM = 4 : 1$.	Открытый банк заданий ФИПИ	Нет рисунка

Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$ [11].		
З а д а ч а 5. Через вершины треугольника ABC проведены параллельные друг другу прямые, пересекающие противоположные стороны или их продолжения соответственно в точках A', B' и C'. Докажите, что отношение площади треугольника ABC к площади треугольника A'B'C' равно 1:2 [1].	Библиотека «1С: Урок». Задача 149.	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
З а д а ч а 6. Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника ABCD, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и KC пересекаются в точке T. Докажите, что площадь четырехугольника PMTK равна сумме площадей треугольников ABP и CDT [1].	Библиотека «1С: Урок». Задача 128.	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
З а д а ч а 7. В ромбе ABCD угол A равен 60 градусам, серединный	Библиотека «1С: Урок». Задача 152.	Готовый чертеж, созданный в среде

перпендикуляр к стороне AD пересекает диагональ AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне CD пересекает AC в точке P. Постройте точки M и P. Найдите отношение площади треугольника DMP к площади ромба [1].		Математический конструктор
З а д а ч а 8. Чему равно отношение площадей треугольников BAC и BAC' [1]?	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
З а д а ч а 9. Чему равно отношение площадей треугольников ABC и $A'B'C'$ [1]?	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
З а д а ч а 10. Чему равно отношение площадей треугольников ABC и $A'B'C'$ [1]?	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор
З а д а ч а 11. Чему равно отношение площадей треугольников ABC и $A'B'C'$ [1]?	Библиотека «1С: Урок».	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор

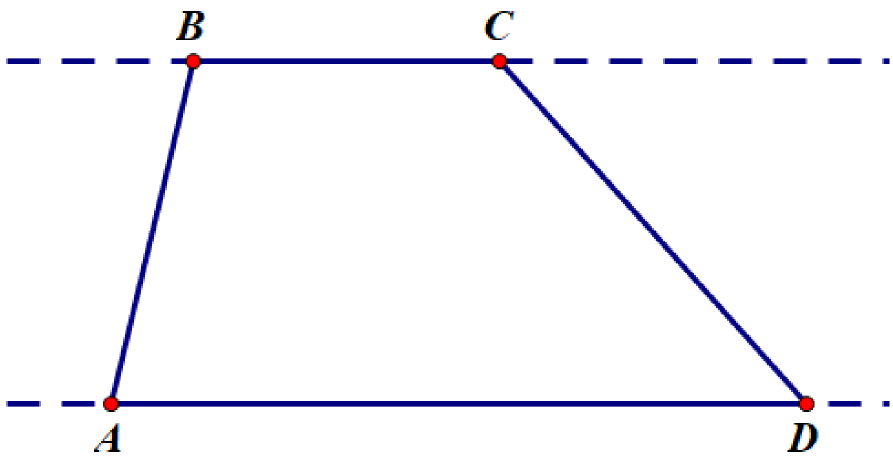
Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей на примере Теоремы 1 и Задачи 1 из таблицы 5. Другие задачи представлены в приложении Б.

Теорема 1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Изучение темы о площади трапеции в 8 классе опирается на ранее усвоенную формулу площади треугольника и свойство аддитивности. Однако при доказательстве учащимся трудно осознать, что высота второго (тупоугольного) треугольника, полученного при триангуляции трапеции, равна высоте самой трапеции, особенно когда эта высота проецируется на продолжение основания за пределы фигуры.

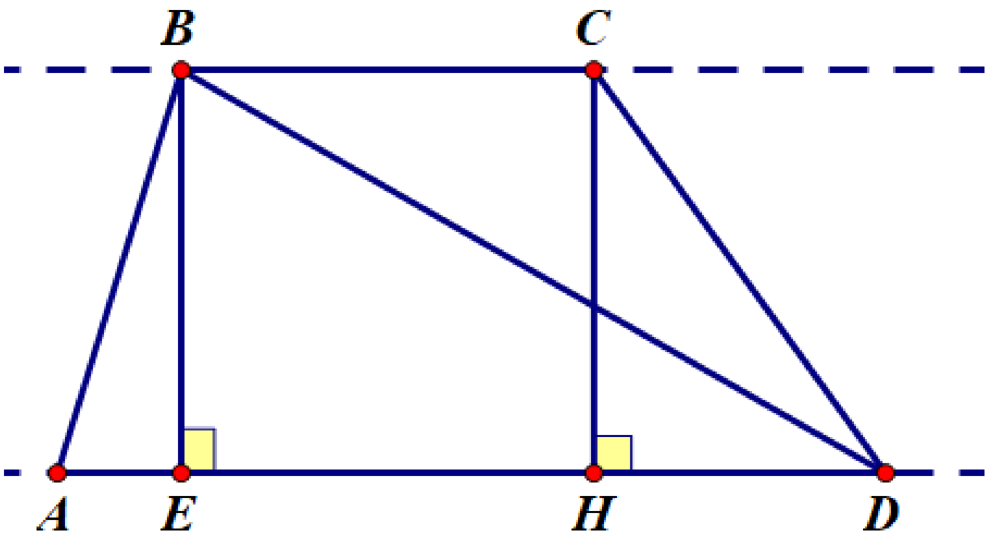
Для преодоления этого барьера спроектируем динамический чертеж и опишем методику его применения на каждом этапе конструирования и анализа модели.

1. Проведем две параллельные прямые, соединим их двумя непересекающимися отрезками. Получившаяся фигура – трапеция $ABCD$.



Целесообразно дать учащимся подумать о том, какие идеи нахождения площади трапеции у них возникают, из предложенных гипотез некоторые отсеются, а наиболее правдоподобные необходимо проверить. Учитель может подтолкнуть учащихся к мысли о разбиении трапеции на части, площади которых найти не составит особого труда, здесь дети заметят, что это возможно сделать, начертив диагональ трапеции.

2. Диагональю BD разобьем трапецию на два треугольника: BCD и ABD. Проведем высоты трапеции CH и BE.

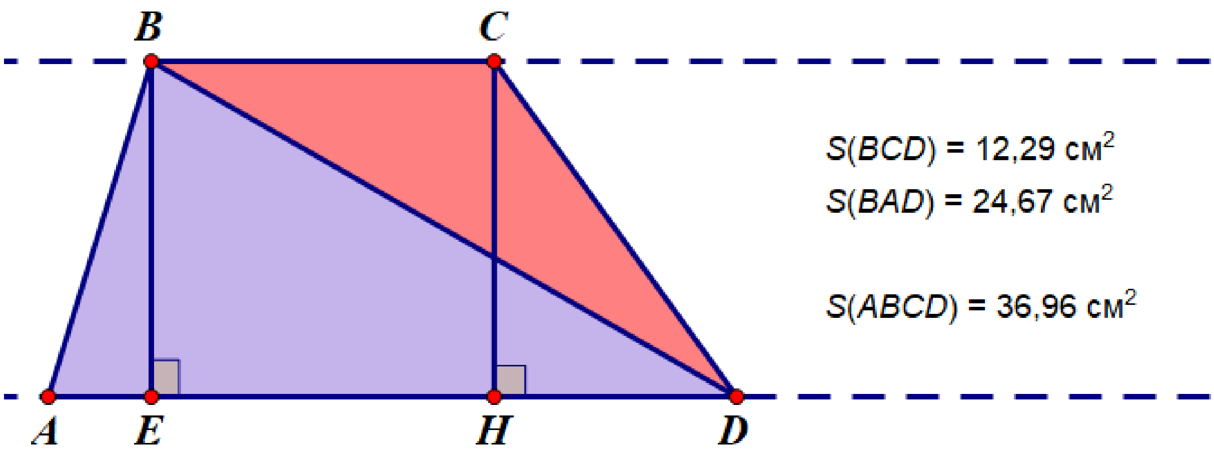


На данном этапе учитель может предложить учащимся, потянув за вершины (например B или C) вдоль параллельных прямых, подумать что происходит с формой трапеции и изменяются ли длины высот при этой деформации.

Ответ учащихся: Форма трапеции меняется, она может стать прямоугольной или равнобедренной, но длины высот остаются равными, так как расстояние между параллельными прямыми неизменно.

Динамика в этом случае помогает учащимся визуально и экспериментально зафиксировать инвариативность высоты трапеции независимо от её формы и наклона боковых сторон.

3. Далее учитель выделяет внутреннюю область образовавшихся треугольников и внутреннюю область трапеции, на экран выводятся значения площадей треугольников и площади трапеции. После чего учитель активирует динамические изменения площадей.

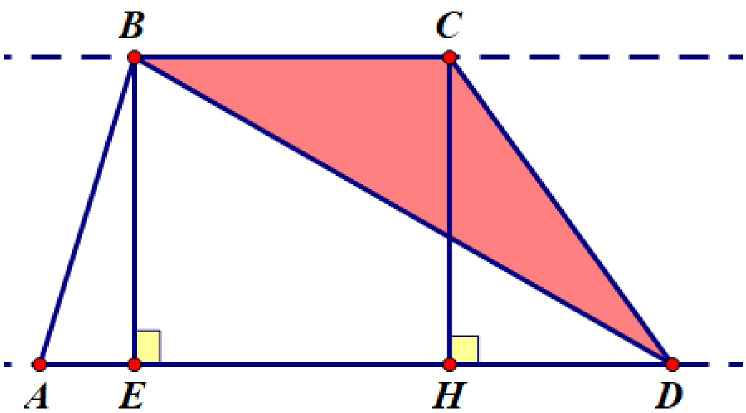


Задание учащимся: Сформулируйте гипотезу о связи площади трапеции и площадей полученных треугольников. Проверьте её деформируя трапецию за вершины.

Деятельность учащихся: Учащиеся фиксируют, что при любых деформациях на экране строго выполняется равенство $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$.

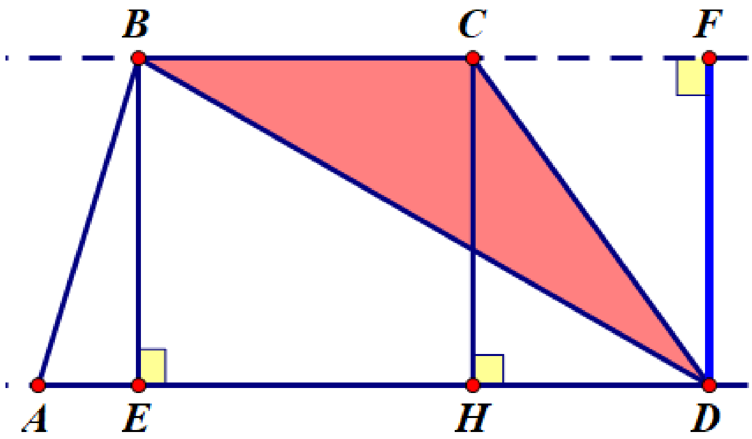
Таким образом учащиеся на практике актуализируют свойство аддитивности площади. Динамический контроль исключает сомнения в универсальности этого свойства для фигур любой конфигурации.

4. Учитель временно оставляет видимой на чертеже только внутреннюю область тупоугольного треугольника и предлагает учащимся построить его высоту из вершины D к стороне BC. На экране появляется кнопка «Показать высоту $\triangle BCD$»



Затруднение у учащихся возникает в том, что они часто пытаются провести высоту внутри треугольника, теряя связь с высотой трапеции.

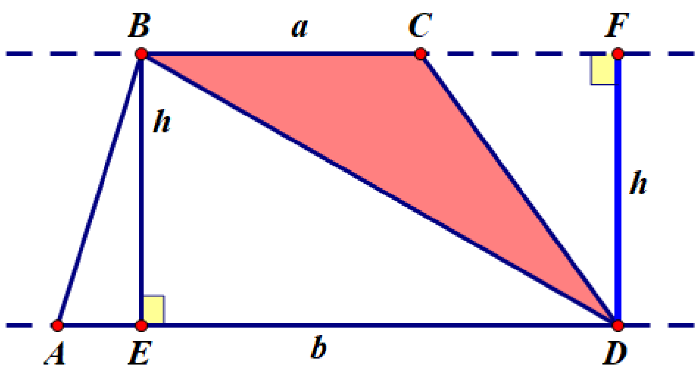
5. Учитель нажимает кнопку «Показать высоту $\triangle BCD$» и на экране появляется отрезок DF. Учащимся предлагается сравнить его длину с длиной высоты трапеции.



Учащиеся делают вывод о том, что высота $\triangle BCD$ это тоже перпендикуляр между параллельными прямыми, а следовательно $DF = CH = BE$.

Интерактивная демонстрация «внешней» высоты делает очевидным тот факт, что высоты обоих треугольников равны высоте трапеции, что является ключевым звеном в доказательстве теоремы.

6. $BC = a$, $AD = b$, высота $BE = DF = h$. Тогда на экран выводятся буквенные формулы площадей треугольников: $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot bh$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot ah$.



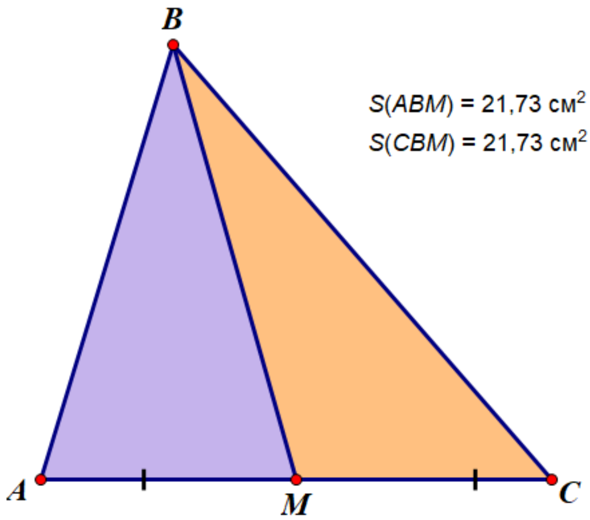
Учащиеся уже вспоминали свойство аддитивности площадей, оно выводится на экран: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot bh + \frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b) = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Благодаря предварительной динамической подготовке, формальный вывод формулы площади трапеции воспринимается учащимися не как навязанный алгоритм, а как естественный, логичный и наглядно доказанный результат их собственного мини-исследования.

Задача 1. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K, так что $BK : KM = 3 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABK и треугольника ABC.

Задачи на нахождение отношения площадей традиционно вызывают у школьников затруднения, так как требуют ухода от прямых вычислений по формулам, к оперированию пропорциями и долями. В задаче ключевая сложность заключается в необходимости поэтапного перехода: сначала от площади всего треугольника к его половине через свойство медианы, а затем к искомому треугольнику через отношение отрезков на общей прямой.

1. Учитель строит $\triangle ABC$ и проводит в нем медиану BM. Далее выделяет внутренние области цветом, а на экран выводит значение площадей, каждого треугольника.



Учащимся предлагается деформировать треугольник за вершины и понаблюдать за поведением площадей полученных частей.

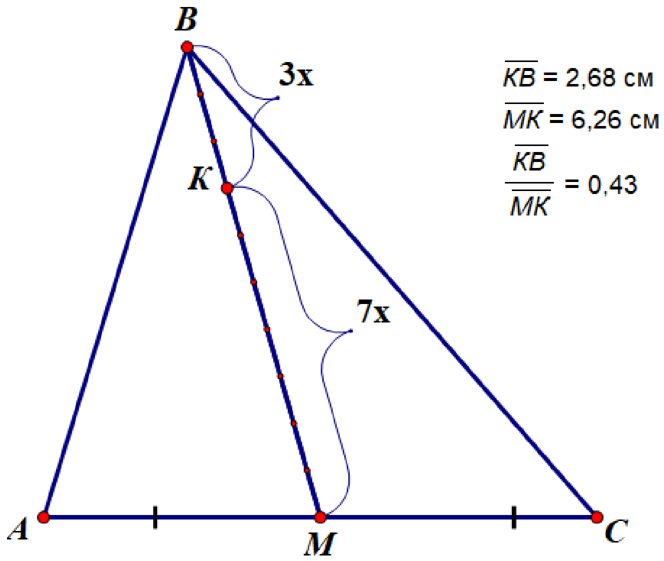
На вопрос учителя: Как медиана BM делит $S_{\triangle ABC}$?

Учащиеся отвечают: площади треугольников ABM и BMC всегда равны.

Учитель обозначает $S_{\triangle ABC} = S$. Тогда $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle MBC} = \frac{S}{2}$.

Учащиеся наглядно фиксируют фундаментальное свойство медианы – разделение треугольника на два равновеликих.

2. Учитель строит точку K на медиане, разделив отрезок BM на 10 равных частей, обозначает третью точку от вершины B буквой K. Пусть $BK = 3x, KM = 7x$, покажем это на чертеже фигурными скобками.



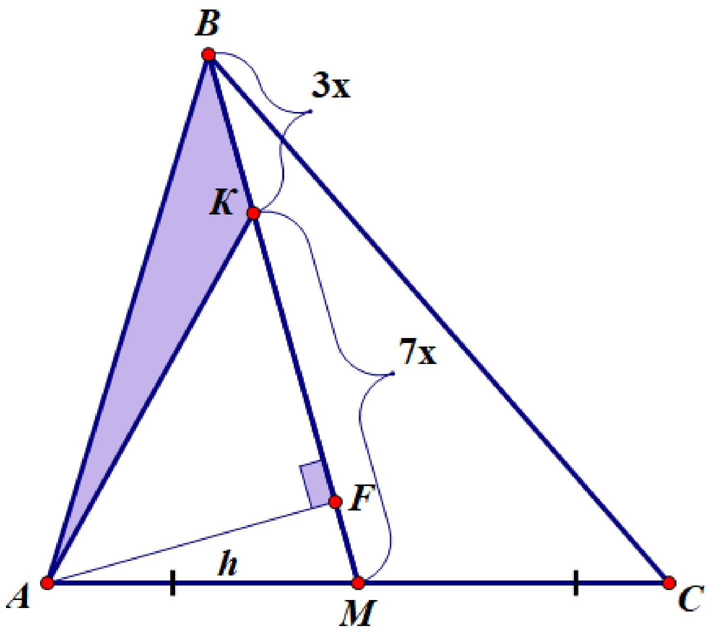
Учитель предлагает учащимся потянуть за вершину B и проследить за положением точки K.

Задание учащимся: Медиана удлиняется, длины отрезков BK и KM меняются, почему их отношение всегда остается неизменным?

Школьники приходят к выводу, что точка K связана пропорцией с концами отрезка при любом масштабе BK составляет равно $\frac{3}{10}$ от всей длины BM.

Визуализация инвариативности отношения отрезков при изменении масштаба готовит учащихся к переходу к отношению площадей, связывая геометрические длины с числовыми долями.

3. Проведем отрезок AK и выделим внутреннюю область треугольника ABK. Из вершины A опускаем перпендикуляр на прямую BM.



Вопрос учителя: Что общего у треугольников ABM и ABK? Как выразить их площади через высоту?

Вывод учащихся: У них общая высота AH. Значит их площади относятся как основания: $\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{BK}{BM} = \frac{3}{10}$

Учитель: Но мы знаем, что $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{S}{2}$. Подставьте это значение в наше отношение.

Запись на доске: $S_{\triangle ABK} = 3 \cdot \frac{\frac{S}{2}}{10} = \frac{3S}{20}$

Учитель Мы выразили площади $\triangle ABK$ и $\triangle ABC$ через одну переменную S: $S_{\triangle ABC} = S, S_{\triangle ABK} = \frac{3S}{20} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3S}{20} : S = \frac{3}{20}$.

Интерактивная подсветка общей высоты и оснований визуально развязывает сложную логическую цепочку. Учащиеся осознают, что замена площадей отношением отрезков – это строгий математический прием, который они только что проверили экспериментально.

Сформированные у учащихся умения вычислять площади многоугольников базируются на работе с прямолинейными границами фигур, где ключевыми элементами выступают высоты и основания. Однако содержательно-методическая линия площадей в основной школе не ограничивается многоугольниками [3]. В 9 классе учащиеся переходят к изучению криволинейных фигур – круга и его частей. Вычисление их площадей требует принципиально иного дидактического подхода, поскольку прямое разбиение на стандартные многоугольники здесь невозможно, что обуславливает необходимость применения динамических моделей с элементами аппроксимации и предельного перехода.

2.3 Вычисление площадей круга и его частей с использованием динамических чертежей. Результаты апробации

Изучение площади круга, кругового сектора и сегмента в 9 классе завершает содержательную линию площадей в основной школе. Сложность этой темы заключается в необходимости оперирования трансцендентным числом π и понятием бесконечного приближения [5]. Без использования средств компьютерного моделирования учителю крайне сложно изображать на доске процесс разбиения круга на бесконечно малое число секторов для доказательства формулы $S = \pi R^2$ или наглядно объяснить долевую зависимость площади сектора от величины центрального угла.

В данном параграфе описывается технология применения интерактивных динамических моделей, разработанных для эффективного обучения вычислению площадей круга, сектора и сегмента. Рассматриваются методические приемы работы с визуальными анимациями аппроксимации круга правильными n-угольниками, а также динамические чертежи, облегчающие процесс решения расчетных и исследовательских задач на нахождение площадей комбинированных криволинейных фигур.

Рассмотрим несколько теорем и задач о площадях круга и его частей. Сопроводим эти утверждения анимационными чертежами. Перечень теорем и задач приведен в таблице 6.

Таблица 6

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункт в учебниках, номер задачи,**	**Наличие статического чертежа в**

	номер задания в электронных ресурсах	**учебниках, электронных ресурсах**
Теорема 1. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус [18].	И.М. Смирнова, теорема стр. 70	Рис. 15.1, 15.2
З а д а ч а 1. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведенной к основанию. [2].	Л.С. Атанасян 1207, в)	Нет рисунка
З а д а ч а 2. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах. [2].	Л.С. Атанасян 1216	Нет рисунка
З а д а ч а 3. Найдите радиус окружности, которая делит круг радиуса R на две равновеликие части – кольцо и круг [18].	И.М. Смирнова 6, стр. 72	Нет рисунка
З а д а ч а 4. Найдите площадь части круга, расположенной вне вписанного в	И.М. Смирнова 8 а), стр. 73	Нет рисунка

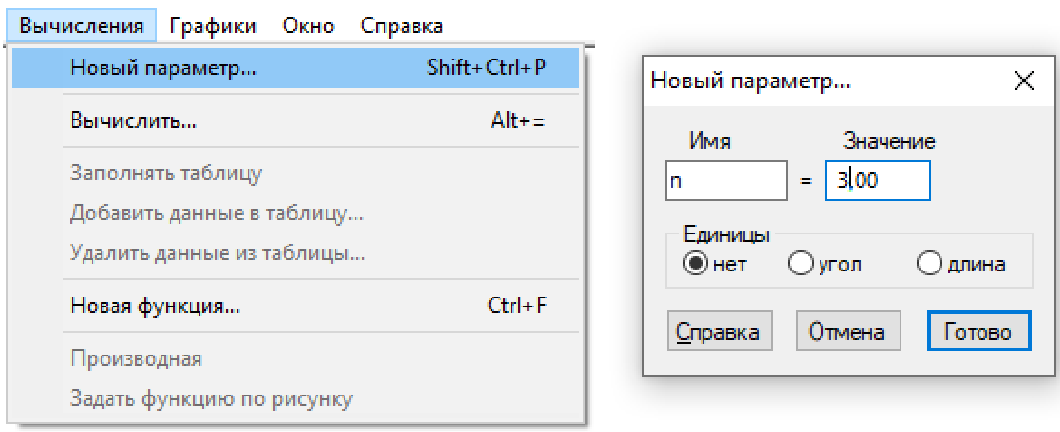
этот круг квадрата. Радиус круга равен r [18].		
З а д а ч а 5. Даны два круга. Постройте круг с центром в точке O_3, площадь которого равна сумме площадей данных кругов [1].	Библиотека «1С: Урок». Задание 1145.	Готовый чертеж, созданный в среде Математический конструктор

Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей на примере Теоремы 1 и Задачи 1 из таблицы 6. Другие задачи представлены в приложении В.

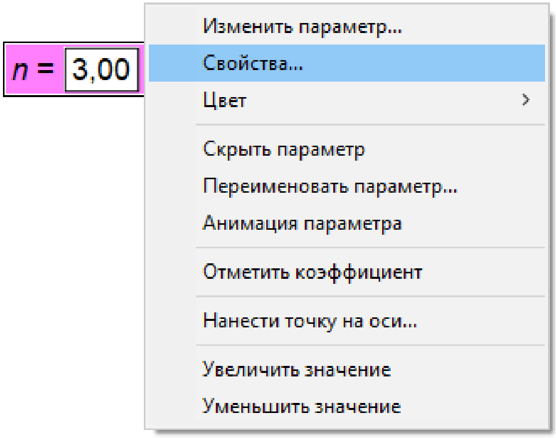
Теорема 1. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.

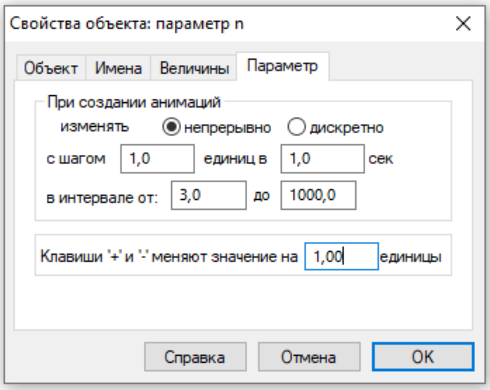
Для дидактического обеспечения и наглядной визуализации теоремы о площади круга спроектируем динамический чертеж, иллюстрирующий процесс аппроксимации круга правильными вписанными многоугольниками.

1. В меню Вычисления выбираем раздел «Новый параметр» → во всплывающем окне задаем имя и стартовое значение параметра



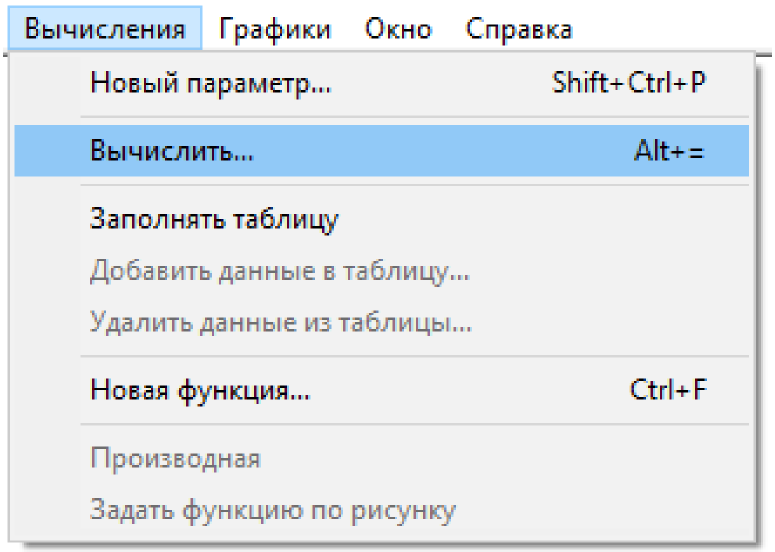
2. Кликнув правой кнопкой мыши по появившемуся параметру, выбираем в выпавшем списке раздел «Свойства» и задаем следующие свойства параметру:

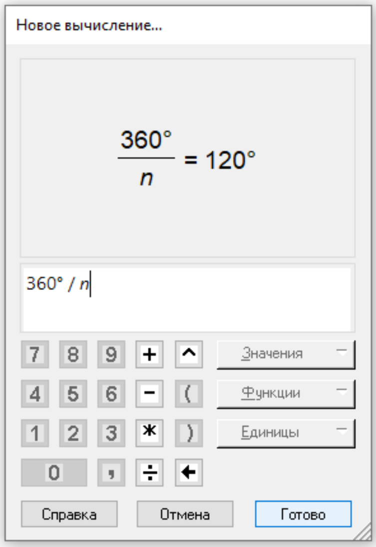




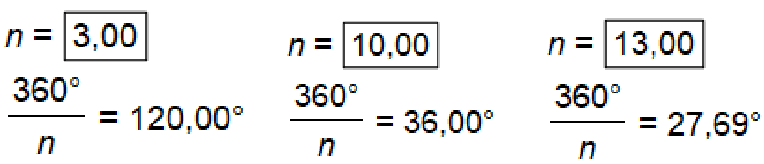
Теперь параметр будет менять значение, если нажать на него и затем нажать + или – на клавиатуре.

3. В меню Вычисления выбираем раздел «Вычислить» → во всплывающем окне вводим значение угла поворота: $\frac{360°}{n}$, нажимая при этом на мышью.

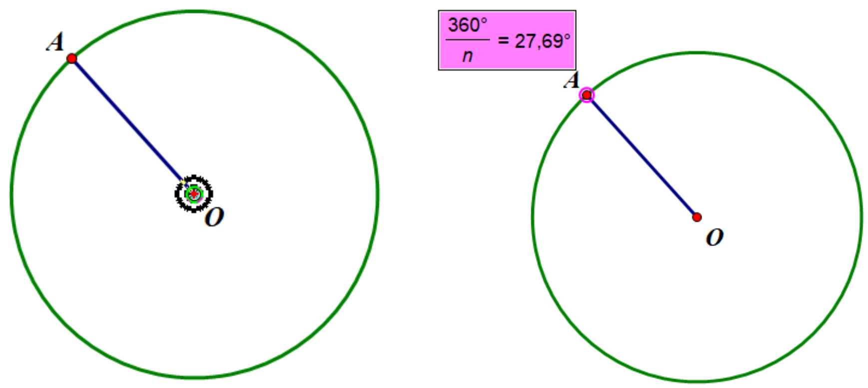




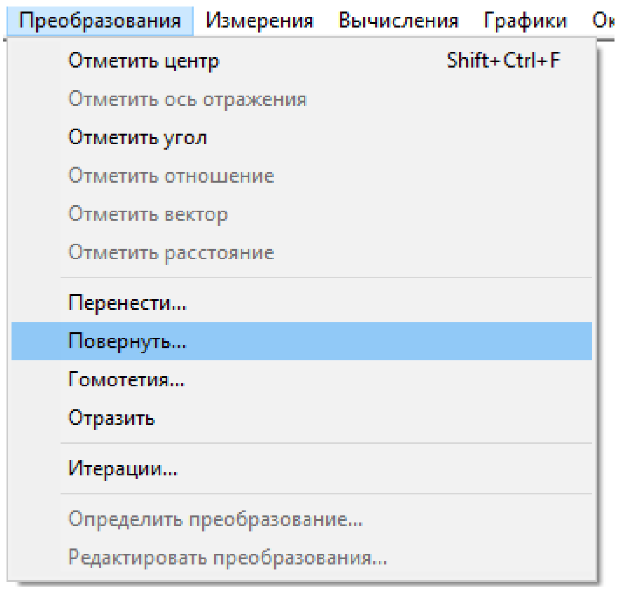
Так меняется значение угла с изменением n:

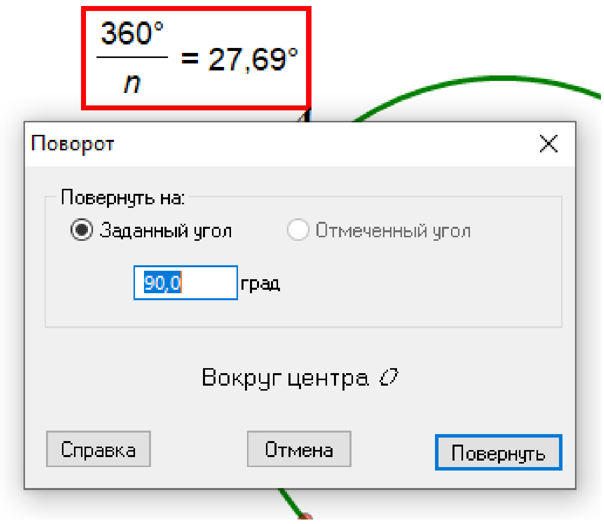


4. Строим окружность радиуса OA → дважды щелкаем по центру O, теперь он задан центром поворота. → Выбираем точку A и рассчитанный угол поаорота

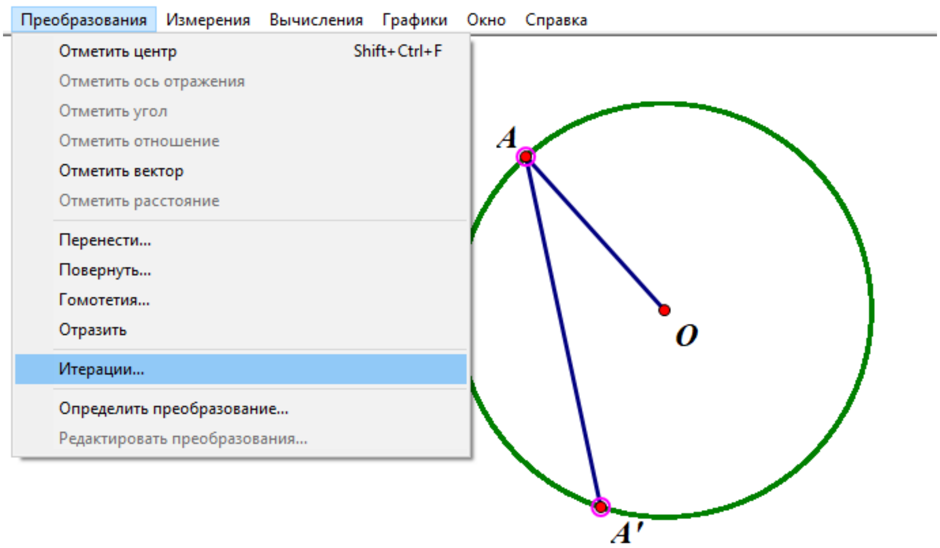


В меню Преобразования выбираем раздел «Повернуть» и после того как появилось всплывающее окно щелкаем по нашему углу поворота.

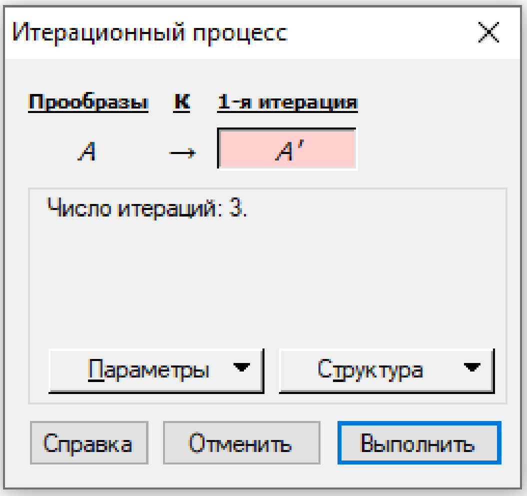




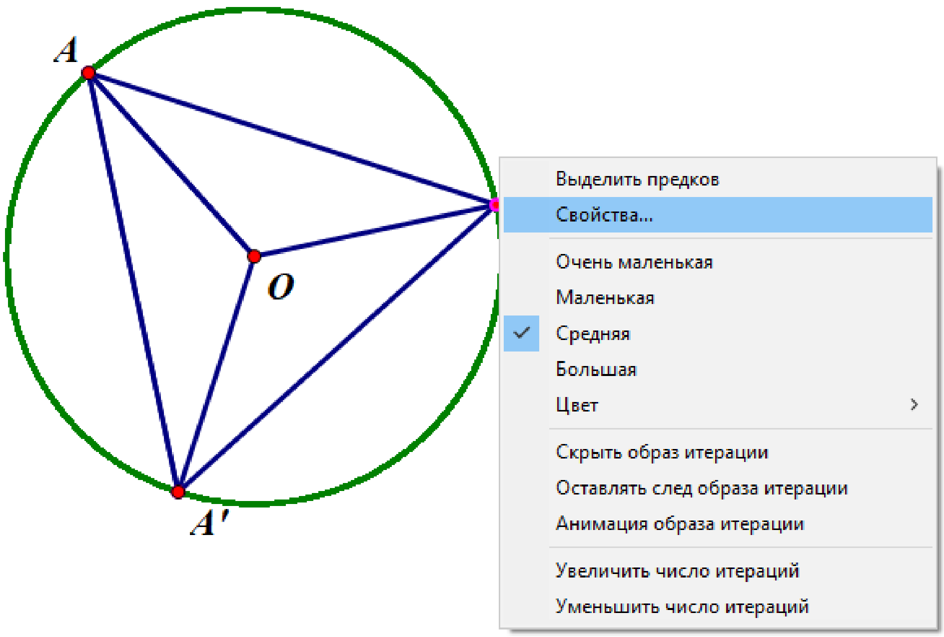
5. Точка A повернется на заданный угол и оставит след A' на окружности. Соединим отрезком эти точки – это первая сторона нашего многоугольника. Выделим точки A, и A' и перейдем в меню Преобразования раздел «Интерации».



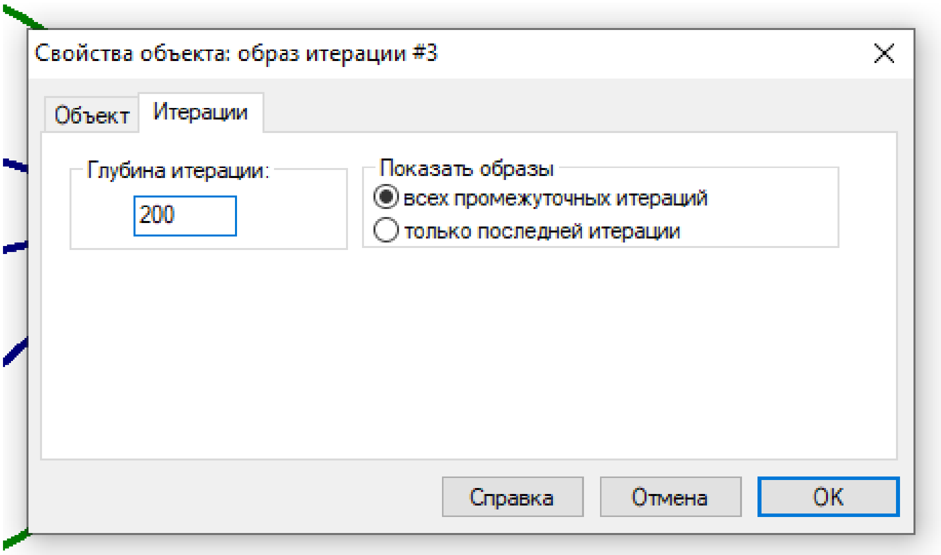
Во всплывающем окне зададим следующие значения:



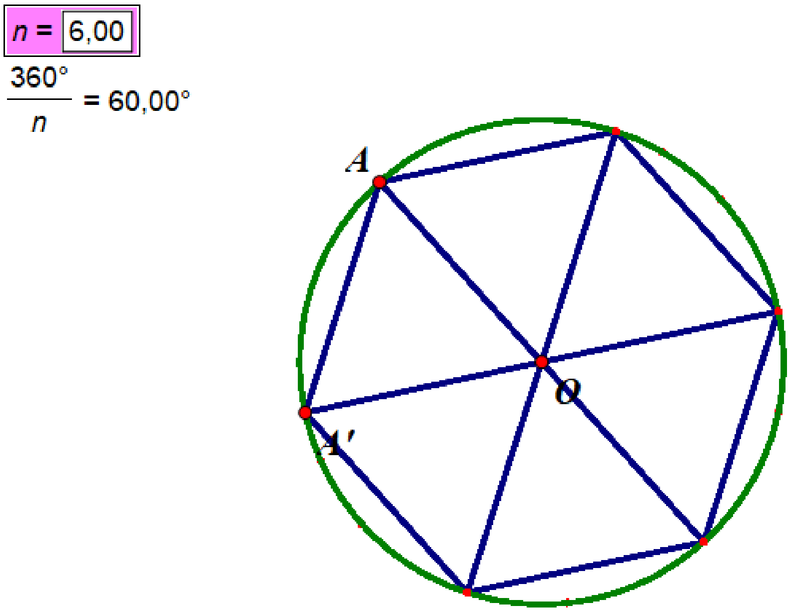
6. После того как первый многоугольник построен, правой кнопкой мыши щелкаем по ней и в выпадающем списке выбираем «Свойства».

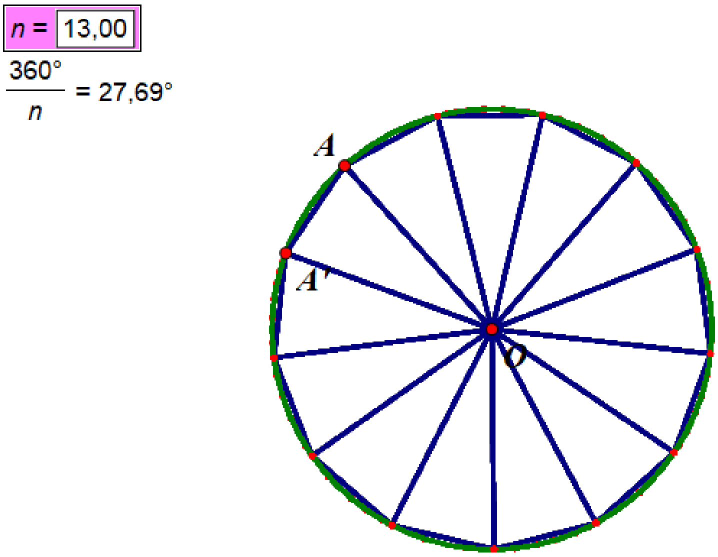


Во всплывающем окне вводим значение больше, чем количество сторон максимального нужного многоугольника.



Теперь учитель может наглядно демонстрировать сложный процесс аппроксимации круга правильными вписанными многоугольниками, так чтобы это было понятно детям.



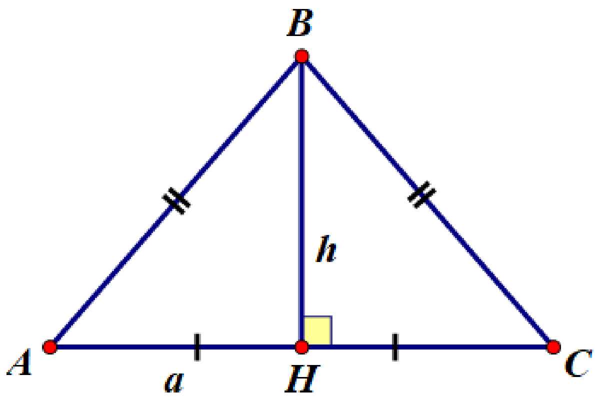


Задача 1. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведенной к основанию.

Прежде чем решить задачу построим динамический чертеж в системе «Живая математика».

Задачи на нахождение элементов вписанных и описанных окружностей традиционно вызывают у школьников затруднения из-за сложности визуализации взаимного расположения центров фигур. В предложенной задаче ключевой методический барьер состоит в том, что положение центра описанной окружности не является статичным, он может лежать внутри треугольника, на его основании или вне его пределов.

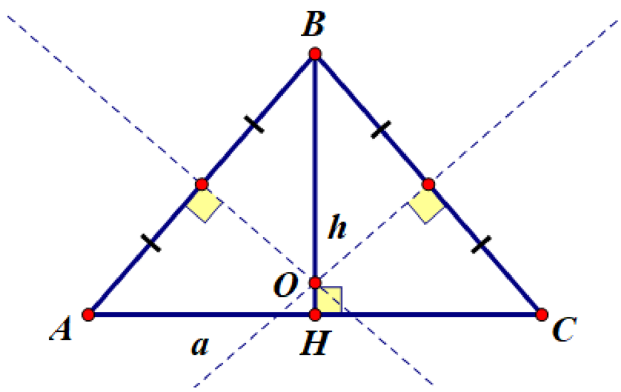
1. С помощью циркуля и линейки (в Живой математике) учитель строим центр H отрезка AC и проведем перпендикуляр BH, соединим отрезками точки A и B, B и C, в полученном треугольнике BH является высотой и медианой одновременно, $\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный. Обозначим основание AC буквой a, высоту BH буквой h.



Учащимся предлагвется вспомнить, что за точка является центром окружности описанной около треугольника.

Ответ: центром O окружности описанной около треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника.

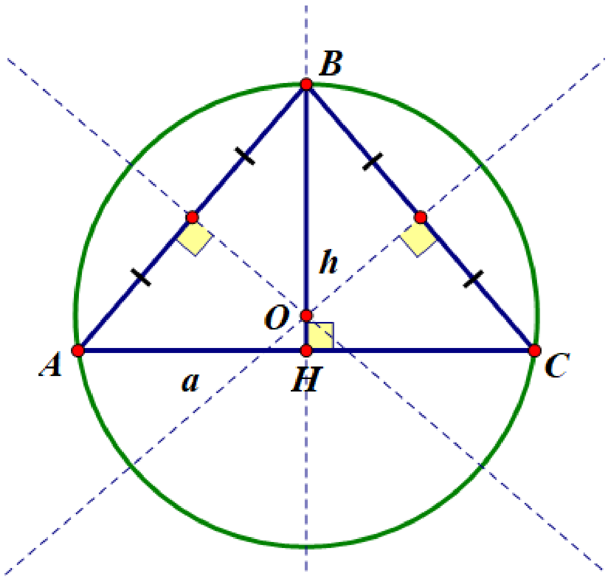
На доске построим серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC.



Учащиеся делают вывод: высота BH является серединным перпендикуляром к стороне AC, именно поэтому точка O будет лежать на прямой содержащей эту высоту.

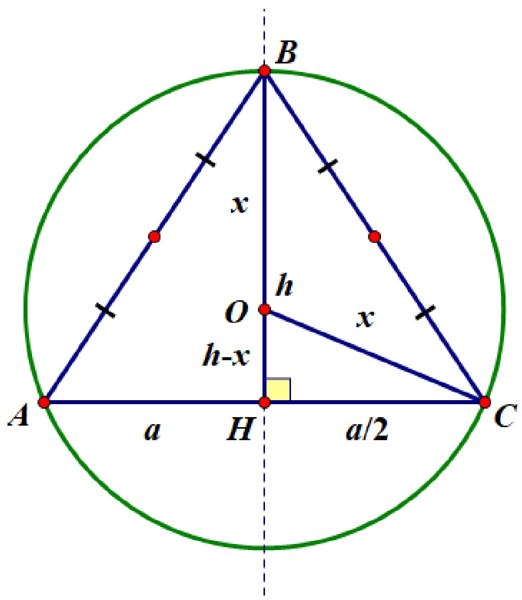
2. Радиусом окружности описанной около треугольника будет

являться расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров (O) до любой вершины этого треугольника. Построим окружность описанною около $\triangle ABC$.



3. Выясним чему равна площадь окружности и зависит ли она от положения точки O на прямой BH. Мы знаем, что площадь окружности вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, $\Rightarrow$ для нахождения площади, достаточно найти радиус описанной окружности.

а) Первый случай. Точка O находится внутри треугольника ABC. Неизвестную часть высоты BH – отрезок OH обозначим за x, тогда $OH = h - x$. Отрезок $HC = \frac{a}{2}$. Построим отрезок $OC = OB = x$ (так как оба являются радиусами).



По теореме Пифагора $OC^2 = OH^2 + HC^2$

$$x^2 = (h - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

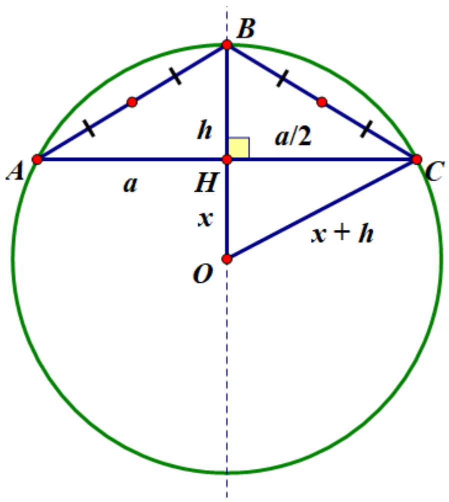
$$x^2 = h^2 - 2hx + x^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$2hx = \frac{a^2}{4} + h^2$$

$$x = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

Площадь окружности в данном случае равна: $S = \pi\left(\frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2}\right)^2$. Теперь вычислим площадь для третьего случая.

b) Второй случай. Точка O расположена вне треугольника ABC. Аналогично с предыдущим случаем введем обозначения: $OH = x, OB = x + h$, $HC = \frac{a}{2}$.



По Теореме Пифагора:

$$(x + h)^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

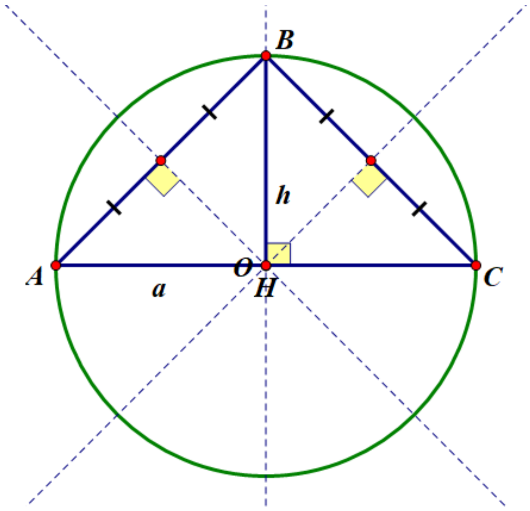
$$x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$2xh = \frac{a^2}{4} - h^2$$

$$x = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

Соответственно площадь окружности: $S = \pi\left(\frac{a^2}{8h}+\frac{h}{2}\right)^2$.

c) Третий случай. Точка O совпадает с точкой H.



Тогда выходит, что радиус описанной окружности равен $h = \frac{a}{2}$, $S = \pi h^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Проверим выполнение формулы $S = \pi\left(\frac{a^2}{8h}+\frac{h}{2}\right)^2$ для этого случая, подставим $\frac{a}{2}$ вместо h:

$$S = \pi\left(\frac{a^2}{8\,\frac{a}{2}}+\frac{\frac{a}{2}}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{4}+\frac{a}{4}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

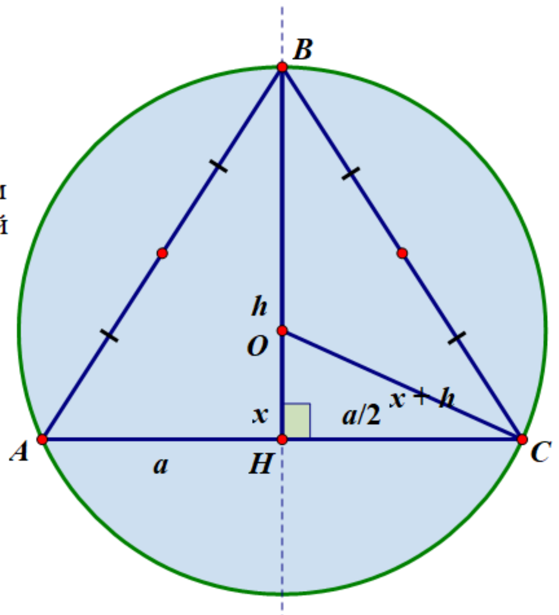
Также подставим $2h$ вместо a:

$$S = \pi\left(\frac{(2h)^2}{8h}+\frac{h}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{4h^2}{8h}+\frac{h}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)^2 = \pi h^2$$

Задание учащимся: изменяя длины сторон треугольника, сравните теоретическое значение расчитанное по нашей формуле с фактической площадью круга на экране.

Задача 1.
Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведенной к основанию.

a = 9,82 см
h = 7,61 см
S = 91,22 см^2
$\pi\cdot\left(\frac{a^2}{8\cdot h}+\frac{h}{2}\right)^2$ = 91,22 см^2



a	h	S	$\pi\cdot\left(\frac{a^2}{8\cdot h}+\frac{h}{2}\right)^2$
12,04 см	8,37 см	126,69 см^2	126,69 см^2
8,23 см	3,26 см	56,11 см^2	56,11 см^2
6,56 см	1,78 см	48,01 см^2	48,01 см^2
7,81 см	6,62 см	62,47 см^2	62,47 см^2
7,81 см	10,77 см	116,61 см^2	116,61 см^2
4,78 см	0,45 см	135,94 см^2	135,94 см^2
4,78 см	2,39 см	17,92 см^2	17,92 см^2
4,78 см	2,96 см	18,76 см^2	18,76 см^2
3,84 см	4,76 см	24,08 см^2	24,08 см^2
6,25 см	5,00 см	38,01 см^2	38,01 см^2
6,25 см	5,00 см	38,01 см^2	38,01 см^2
6,25 см	5,00 см	38,01 см^2	38,01 см^2
9,82 см	7,61 см	91,22 см^2	91,22 см^2

Вывод учащихся: при любых изменениях значения фактической и теоретической площадей совпадают, что доказывает абсолютную истинность и универсальность выведенной формулы.

Возможность мгновенной компьютерной проверки сложной формулы дает учащимся ощущение успешности, укрепляет веру в строгость математических законов и переводит вычислительную задачу в категорию осознанно усвоенных алгоритмов.

Таким образом, разработанные интерактивные модели к задачам на вычисление площади круга и его частей позволяют перевести сложные математические расчеты и абстрактные геометрические отношения в наглядную, доступную для учащихся форму. Спроектированные методические чертежи для 8 и 9 классов составили основу нашей методической копилки.

Для подтверждения практической ценности и дидактической эффективности созданных интерактивных материалов, нами была проведена их апробация в условиях реального учебного процесса. Апробация проходила на базе МБОУ Емельяновской средней общеобразовательной школы №1 и включала в себя подготовку и проведение цикла из трех уроков геометрии в 9 классе:

1. Урок по теме «Площади многоугольников»;
2. Урок по теме «Равновеликие фигуры»;
3. Урок по теме «Площадь круга и его частей».

Выбор 9 класса для проведения апробации был обусловлен необходимостью качественной подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации. В связи с этим все практические задачи были отобраны непосредственно из открытого банка заданий ФИПИ.

Поскольку исследование носило локальный характер, обучение проводилось в естественных условиях без деления класса на контрольные и экспериментальные группы. Эффективность применения ИКТ оценивалась с помощью качественного анализа деятельности учащихся на уроках, педагогического наблюдения и результатов выполнения ими предложенных задач.

Основные выводы по результатам апробации:

1. В ходе уроков учащиеся продемонстрировали уверенные навыки анализа геометрических конфигураций и быстрого нахождения необходимых для расчетов элементов (высот, оснований, радиусов).

2. Интерактивная визуализация сложных понятий способствовала осознанному усвоению материала. Школьники научились видеть внутренние связи между фигурами, что позволяет им успешно решать не только базовые расчетные задачи в один шаг, но и переходить к самостоятельному поиску

решений более сложных заданий.

3. Применение готовых динамических моделей на уроках значительно сэкономило учебное время. Это позволило за 3 занятия разобрать достаточное количество различных прототипов экзаменационных задач по теме «Площадь», уделив больше времени разбору индивидуальных затруднений учащихся.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Во второй главе исследования были детально разработаны и методически описаны приемы и способы применения динамических чертежей на всех этапах изучения темы «Площадь» в основной школе, а также были частично апробированы результаты исследования. Результаты теоретико-методического проектирования позволяют сделать следующие выводы:

1. Использование динамических чертежей при вычислении площадей квадрата и прямоугольника позволяет преодолеть формализм и в знаниях учащихся 8 класса. Интерактивная визуализация «покрытия» фигур единичными квадратами и варьирование сторон с помощью ползунков обеспечивает понимание функциональной связи между линейными размерами фигуры и ее площадью.

2. При изучении площадей параллелограмма, треугольника и трапеции динамические чертежи выступают эффективным средством реализации принципов равновеликости и равносоставленности. Интерактивные приемы «перекраивания» фигур и «сдвига» вершин способствует осмысленному выводу геометрических формул, помогают учащимся безошибочно определять высоту и основание в нестандартных геометрических конфигурациях, а также повышают качество решения расчетных задач.

3. Методика обучения вычислению площадей круга и его частей в 9 классе за счет динамического моделирования поднимается на качественно новый уровень. Интерактивная демонстрация предельного перехода

(аппроксимация круга многоугольниками при $n \to \infty$) делает доступным для понимания абстрактное математическое доказательство формулы площади круга. Модели секторов и сегментов с динамически изменяемыми параметрами (радиус, центральный угол) позволяют школьникам наглядно проследить зависимость площади части круга от её геометрических характеристик.

Таким образом, разработанная методическая копилка динамических чертежей представляет собой целостную систему, последовательно сопровождающую изучение темы «Площадь» от простейших четырехугольников в 8 классе до криволинейных фигур в 9 классе, способствуя развитию пространственного мышления, геометрической интуиции и ИКТ-компетентности учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее исследование было направлено на решение актуальной научно-методической проблемы – повышение качества геометрической подготовки учащихся основной школы в условиях цифровизации образовательного пространства. В соответствии с поставленной целью исследования были теоретически обоснованы, разработаны и частично апробированы приёмы и способы применения динамических чертежей, выполненных в интерактивных математических системах, при обучении учащихся 8-9 классов вычислению площадей геометрических фигур.

В процессе выполнения работы были полностью решены все поставленные задачи, что позволяет сформулировать следующие основные выводы и результаты исследования:

1. В результате решения первой и второй задачи был осуществлен подробный сравнительный анализ изложения темы «Площадь» в популярных учебниках по геометрии [2, А.Г. Мерзляка, И.М. Смирновой]. Анализ показал, что статичный характер печатных иллюстраций учебников существенно ограничивает возможности формирования у школьников гибких геометрических представлений. Были выявлены современные проблемные зоны в знаниях учащихся: формализм при применении формул, трудности при нахождении высот и оснований в нестандартных конфигурациях, непонимание инвариативности и аддитивности площади, а также выраженные затруднения при решении задач на площади подобных фигур и криволинейных объектов.

2. В результате решения третьей задачи были подробно изучены и описаны анимационные, конструктивные и исследовательские возможности систем динамической математики. Показано, что программа «Живая математика» и интерактивная среда «Математический конструктор» обладают мощным дидактическим потенциалом. Они позволяют преобразовывать статичные чертежи в динамические модели с возможностью варьирования

параметров при сохранении инвариативных свойств фигур, что открывает путь к организации самостоятельной учебно-исследовательской деятельности учащихся.

3. В результате решения четвертой задачи разработаны и методически описаны приемы и методы применения динамических чертежей при обучении вычислению площадей фигур, составившие основу авторской методической копилки:

— Для площадей квадрата и прямоугольника разработаны динамические чертежи со слоистыми подсказками и анализом табличных данных.

— Для площадей параллелограмма, треугольника и трапеции разработаны динамические чертежи, реализующие методы «перекраивания», триангуляции.

— Для площадей круга и его частей созданы модели, наглядно демонстрирующие сложный процесс аппроксимации круга вписанными n-угольниками при $n \to \infty$, а также динамические чертежи тренажеры для вычисления площадей круга, сегментов и «колец» в зависимости от изменения радиуса и центрального круга.

4. В результате решения пятой задачи была проведена практическая апробация разработанных материалов. Апробация проходила в естественных условиях учебного процесса в рамках проведения трех уроков геометрии с использованием подготовленных технологических карт и динамических чертежей.

Педагогическое наблюдение за ходом этих уроков анализ устных ответов и письменных работ учащихся позволили сделать следующие выводы:

— Использование динамических чертежей вызвало высокий познавательный интерес и повысило активность учащихся на уроках.

— Большинство учащихся успешно справились с предложенными на уроках расчетными задачами, легко ориентируясь в нахождении нужных элементов фигур на интерактивных чертежах.

Таким образом, результаты работы подтвердили, что разработанная методическая копилка динамических чертежей является эффективным и доступным инструментом для учителя математики. Она способствует преодолению формализма в знаниях школьников и успешному формированию геометрических умений в рамках требований ФГОС. Практическая значимость исследования заключается в том, что все разработанные интерактивные модели и методические рекомендации полностью готовы к непосредственному внедрению в практику учителей геометрии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. «1С:Урок» – Библиотека интерактивных материалов // urok.1c.ru. [Электронный ресурс] URL: https://urok.1c.ru/library (дата обращения: 16.03.2026).

2. Атанасян Л.С. Математика. Геометрия: 7-9-е классы: базовый уровень: учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.] – 14-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2023. – 416 с.

3. Гусев В.Л. Геометрия. Полный справочник. / В.Л. Гусев, И.Б. Кожухов, А.А. Прокофьев. – М.: Махаон, 2006. – 320 с.

4. Дубровский В.Н. 1С: Математический конструктор новая программа динамической геометрии» / В.Н. Дубровский, Н.А. , О.А. Белайчук // Науч. Статья – Компьютерные инструменты в образовании, 2007. – 47-56 с.

5. Епифанова Т.Н. Эти красивые луночки Гиппократа // Потенциал, 2022. – 18-24 с.

6. Корчикова М.В. Методы повышения мотивации на уроках математики // Вестник научных конференций. 2016. № 2- 5 (6). – 61-63 с.

7. Лебедева А.П. Мотивация учебной деятельности на уроках математики // Современное образование: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей XX Международной научнопрактической конференции Наука и Просвещение. Пенза, 2018. – 74-76 с.

8. Майер В.Р. Системы динамической математики как эффективное средство цифровизации общего математического образования // Доклад. – Круглый стол. «Проблемы совершенствования математического образования в России» – 7 с.

9. Мерзляк А.Г. Геометрия: 8 класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского – 7-е изд., стер. – М.: Просвещение, 2022. – 206 [2] с.

10. Нуждина О.Е. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Научно-информационный издательский центр "Институт стратегических исследований", 2024. – 107-112 с.

11. Открытый банк заданий ОГЭ // ФГБНУ «ФИПИ» [Электронный ресурс] URL: https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (дата обращения: 16.03.2026).

12. Приказ Минпросвещения России от 26.06.2025 N 495 "Об утверждении федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, и установлении предельного срока использования исключенных учебников и разработанных в комплекте с ними учебных пособий" [Электронный ресурс] URL: https://sh-ustyarulskaya-r04.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/32/50/Prikaz_Minprosvescheniya_Rossii_ot_26_06_2025_N_495_Ob_utverzhdennyy.pdf (дата обращения: 16.03.2026).

13. Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287 (ред. От 18.06.2025) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» [Электронный ресурс] URL: https://sh4-bogotol-r04.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/32/50/FGOS_OOO_red._18.06.2025.pdf (дата обращения: 16.03.2026).

14. Распоряжение Правительства РФ от 19.11.2024 года №3333-р «Об утверждении комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования на период до 2030 года» [Электронный ресурс] URL: https://sh94-taptugary-r76.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/33/376/Rasporyazhenie_Pravitel_stva_RF_ot_19.11.2024_N_3333_r_Ob_utv.pdf (дата обращения: 16.03.2026).

15. Распоряжение Правительства РФ от 08.10.2020 N 2604-р <О внесении изменений в Концепцию развития математического образования в Российской Федерации, утв. распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р> [Электронный ресурс] URL: http://government.ru/docs/all/130237/ (дата обращения: 16.03.2026).

16. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

17. Сафуанова И.С. Использование систем динамической математики в проектной деятельности учащихся / И.С. Сафуанова, В.И. Ярошевич // Науч. Статья – Вестник МПГУ, 2020. – 75-83 с.

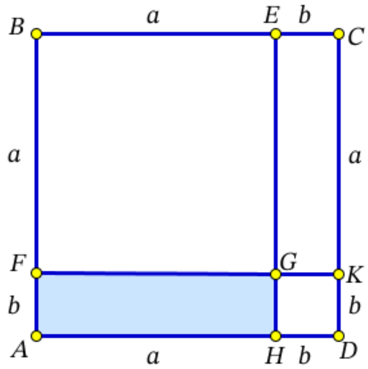
18. Смирнова И.М. Геометрия. 9 класс: учебное пособие для образовательных организаций / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2024. – 175 с.

19. УМК «Живая математика 5.0».: Сборник методических материалов. – Москва : ИНТ, 2015. – 205 с.

20. Хайрутдинова А.А. Применение программы 1С: Математический конструктор на уроках геометрии / А.А. Хайрутдинова, И.Н. Чернышова. // Науч. Статья. – Международный научный журнал «ВЕСТНИК НАУКИ», 2023. – 426-430 с.

Приложение А

Теорема 1.
Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.



$a = 6{,}21 \quad b = 1{,}61$

$S_{FBEG} = a^2 = 38{,}55 \quad S_{HGKD} = b^2 = 2{,}60$

$S = \mathrm{S}(AFGH) \quad S = \mathrm{S}(GECK)$

$S_{ABCD} = a^2 + b^2 + 2S$

$S_{ABCD} = (a+b)^2$

$a^2 + b^2 + 2S = (a+b)^2$

$a^2 + b^2 + 2S = a^2 + 2a \cdot b + b^2$

$S_{AFGH} = a \cdot b = 10{,}01$

$\mathrm{S}(AFGH) = 10{,}01$

#	a	b	S_{ABCD}	S($AFGH$)
1	0,20	6,48	1,29	1,29
2	14,21	2,79	39,70	39,70
3	6,89	5,56	38,30	38,30
4	9,03	2,00	18,04	18,04
5	5,00	18,94	94,73	94,73
6	10,24	3,14	32,18	32,18
7	14,80	3,15	46,68	46,68
8	6,31	7,56	47,65	47,65
9	4,93	5,55	27,36	27,36
10	11,12	8,06	89,59	89,59

Интерактивный чертеж к теореме 1 из таблицы 4, созданный самостоятельно в среде Математический конструктор.

Задача 1. На стороне AD прямоугольника ABCD построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём тока M - середина отрезка AE. В каком отношении находятся площади прямоугольника ABCD и треугольника ADE?

$a = 5{,}30$ см

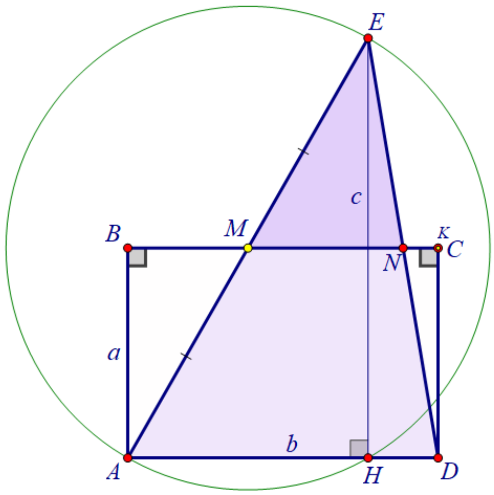
$b = 7{,}83$ см

$BM = 3{,}03$ см

$S_{ABCD} = 41{,}52$ см^2

$S_{ADE} = 41{,}52$ см^2

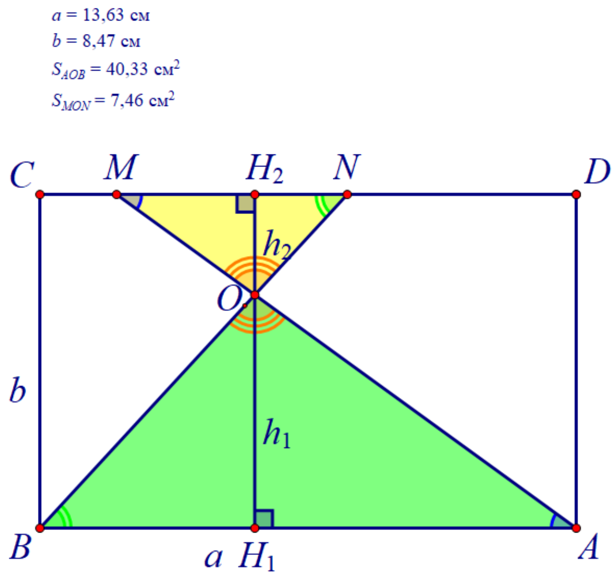
a	b	BM	S_{ABCD}	S_{ADE}
4,87 см	9,68 см	3,83 см	47,20 см^2	47,20 см^2
5,79 см	11,35 см	4,49 см	65,77 см^2	65,77 см^2
3,56 см	8,02 см	3,78 см	28,55 см^2	28,55 см^2
5,71 см	8,02 см	0,44 см	45,76 см^2	45,76 см^2
1,22 см	8,02 см	0,44 см	9,78 см^2	9,78 см^2
5,64 см	8,02 см	7,24 см	45,26 см^2	45,26 см^2
9,26 см	8,02 см	1,57 см	74,24 см^2	74,24 см^2
12,77 см	8,02 см	1,57 см	102,43 см^2	102,43 см^2
4,16 см	8,76 см	1,72 см	36,47 см^2	36,47 см^2
5,30 см	7,83 см	3,03 см	41,52 см^2	41,52 см^2



Интерактивный чертеж к задаче 1 из таблицы 4, созданный самостоятельно в среде Живая математика.

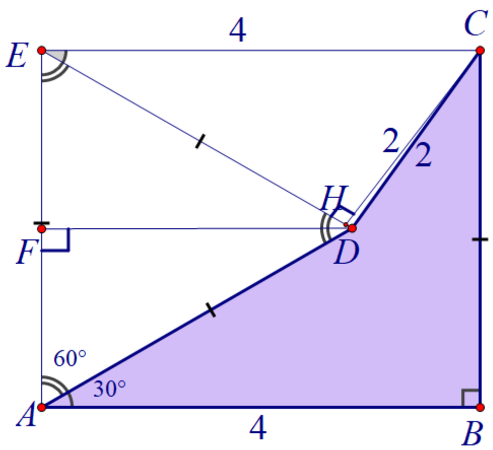
Задача 2. Вершины A и B прямоугольника ABCD соединены пересекающимися в точке O отрезками с двумя точками M и N стороны CD. Найдите площадь прямоугольника, если площади треугольников AOB и MON равны 8 и 2, соответственно.

Решение.
Пусть AB=a, BC=b, высоты OH_1 и OH_2 треугольников AOB и MON равны h_1 и h_2.
1) $\Delta AOB \sim \Delta MON$ по трём углам.
2) Найдём коэффициент k подобия. Так как $2/8 = S_{MON}/S_{AOB} = k^2$, то $k = 1/2$.
3) Из $2 \Rightarrow MN = a/2$ и $h_2 = h_1/2 = b/3$.
4) $2 = S_{MON} = \frac{1}{2}MN \cdot h_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3} = \frac{ab}{12}$.
5) Из пункта $4 \Rightarrow S_{ABCD} = ab = 12 \cdot 2 = 24$.



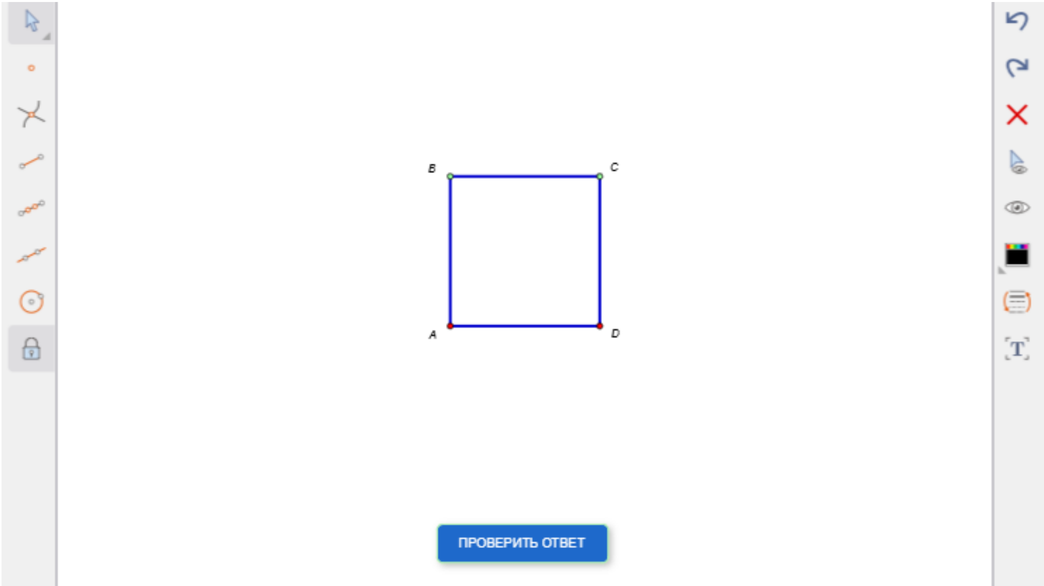
Интерактивный чертеж к задаче 2 из таблицы 4, созданный самостоятельно в среде Живая математика.

Задача 3. Найдите площадь невыпуклого четырёхугольника ABCD, если AB = 4, $\angle BAD = 30°$, CD = 2, $\angle ABC = 90°$ и CD = AB.

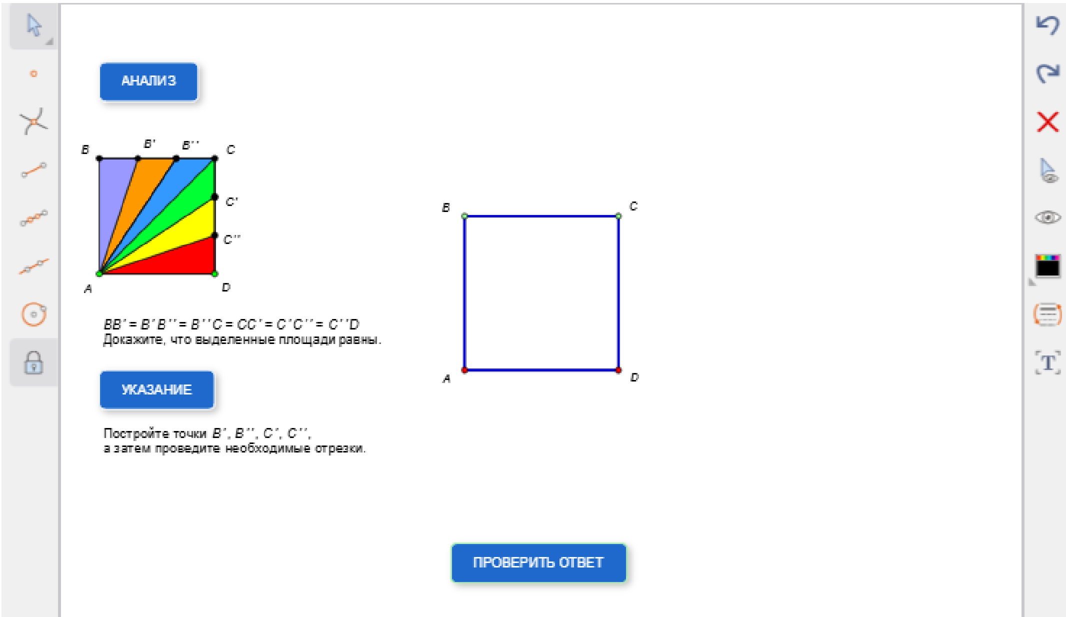


Решение.
1. Достроим ABCD до прямоугольника ABCE.
2. $\angle DAE = \angle BAE - \angle BAD = 90° - 30° = 60°$.
3. ΔDAE - равносторонний, т.к. AD = BC = AE.
4. $\angle DEC = \angle AEC - \angle AED = 90° - 60° = 30°$.
5. ΔCDE - прямоугольный. Действительно, проведём $CH \perp ED$, H лежит на ED. Если $H \neq D$, то в прямоугольном треугольнике CHE катет CH, лежащий против угла в 30° равен EC/2 = 4/2 = 2. Но тогда ΔCDH - равнобедренный CD = CH с углом при основании $\angle CHD$ равным 90°. Это невозможно. Тогда H = D и $\angle CDE = 90°$.
6. В ΔCDE по теорме Пифагора находим катет $DE = 2\sqrt{3}$, отсюда $S_{CDE} = CD \cdot DE/2 = 2\sqrt{3}$.
7. В равностороннем треугольнике ADE находим высоту $DF = \sqrt{ED^2 - (AE/2)^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$. Но тогда $S_{ADE} = 3\sqrt{3}$.
7. $S_{ABCD} = S_{ABCE} - S_{CDE} - S_{ADE} = 4 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
Ответ: $3\sqrt{3}$.

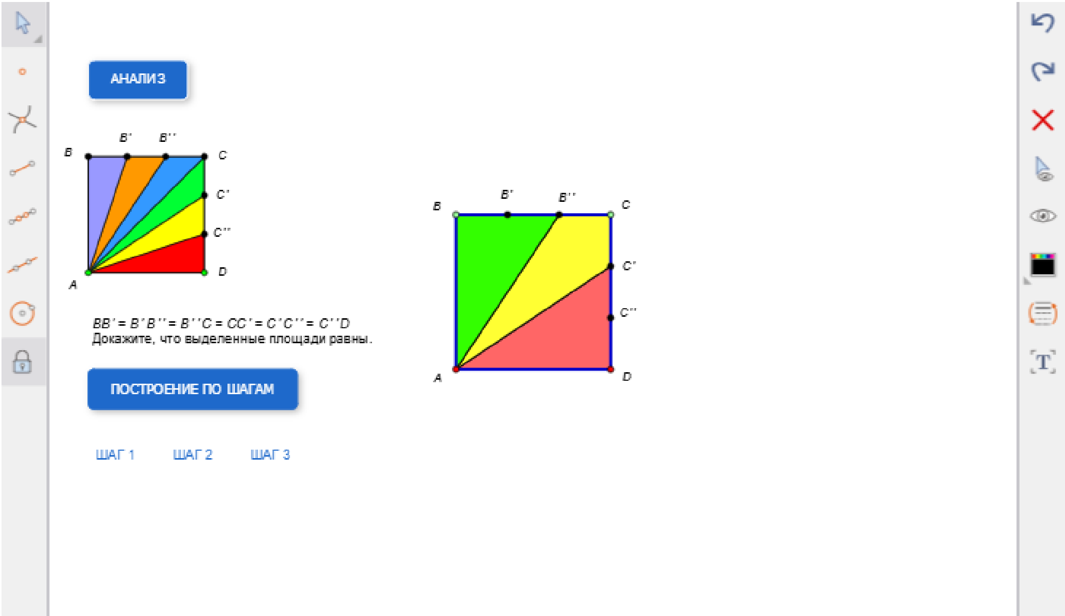
Интерактивный чертеж к задаче 2 из таблицы 4, созданный самостоятельно в среде Живая математика.



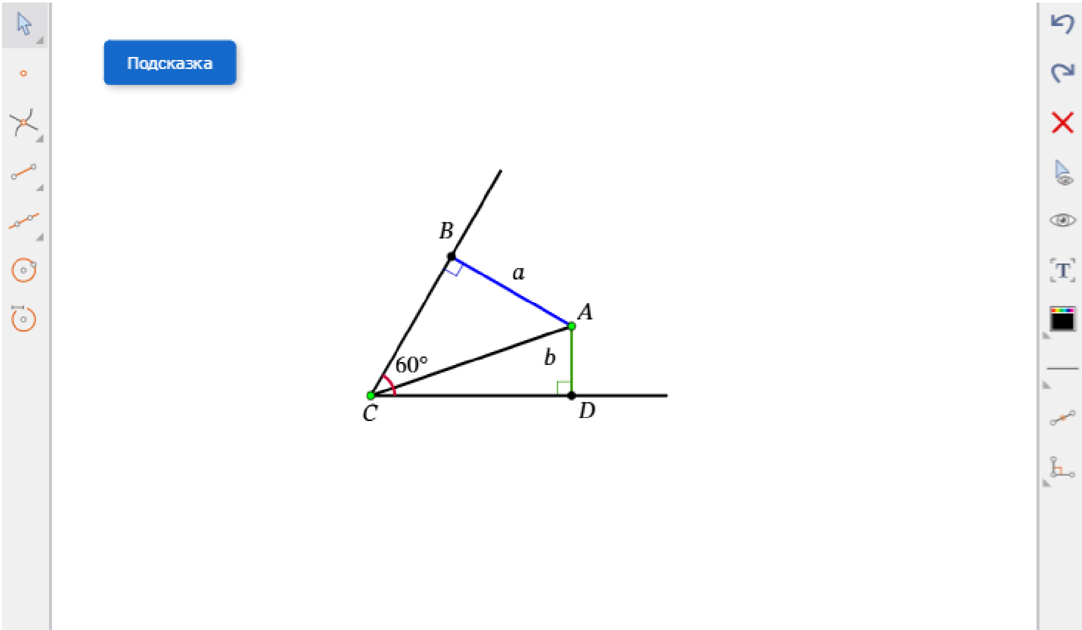
Готовый интерактивный чертеж к задаче 5 из таблицы 4 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



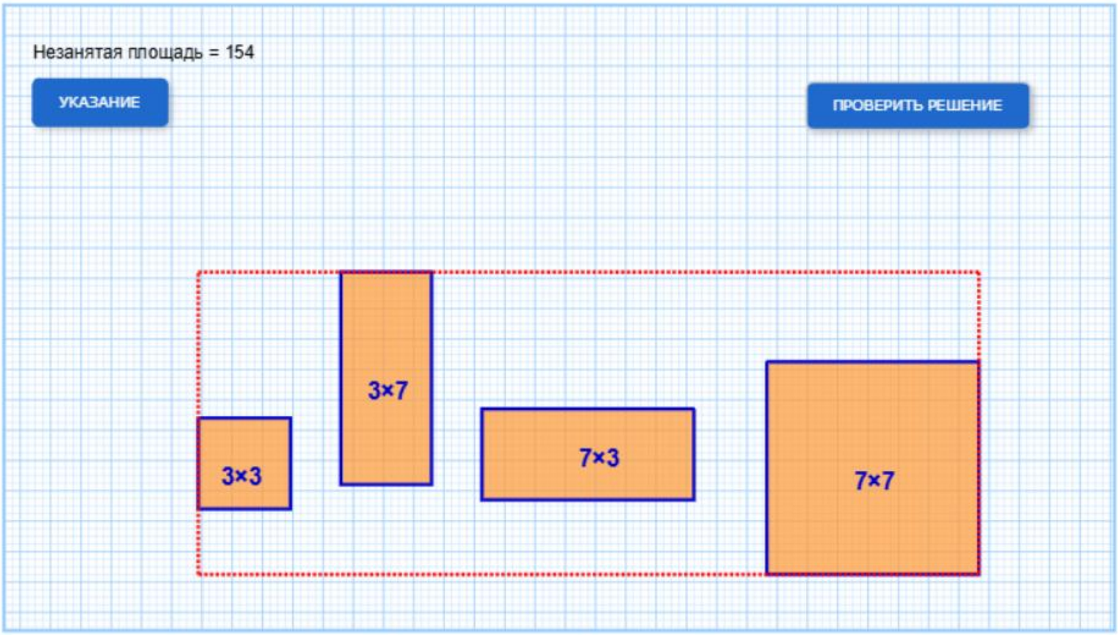
Подсказка к заданию 5 из таблицы 4.



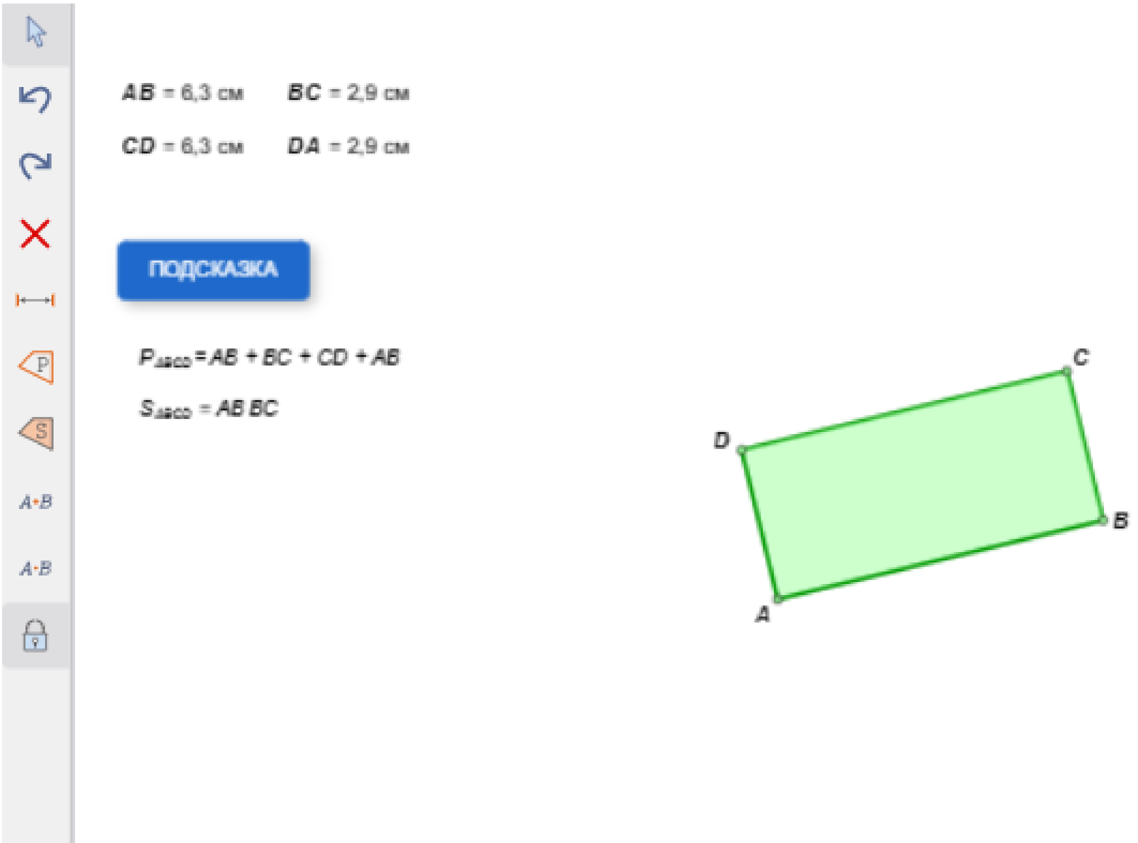
Решение задания 5 из таблицы 4.



Готовый интерактивный чертеж к задаче 6 из таблицы 4 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



Готовый интерактивный чертеж к задаче 7 из таблицы 4 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



Готовый интерактивный чертеж к задаче 8 из таблицы 4 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.

Задача 2.
Основания трапеции относятся как 1 : 3. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

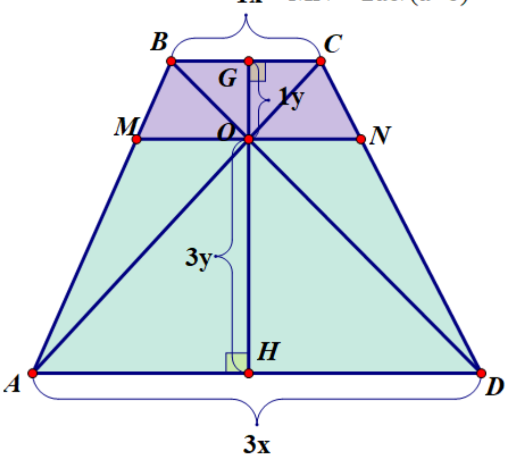
Подсказка:
отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий, через точку пересечени её диагоналей и параллельный её основаниям называется средним гармоническим оснований трапеции и вычисляется по формуле:
MN = 2ab/(a+b)

Скрыть скобки
Скрыть диагонали
Скрыть отрезок
Скрыть четырехугольники
Скрыть подсказку
Скрыть высоты
Скрыть скобки
Скрыть измерения

$S(MBCN) = 7{,}92$ см^2

$S(AMDN) = 42{,}77$ см^2

$\frac{S(MBCN)}{S(AMDN)} = 0{,}19$

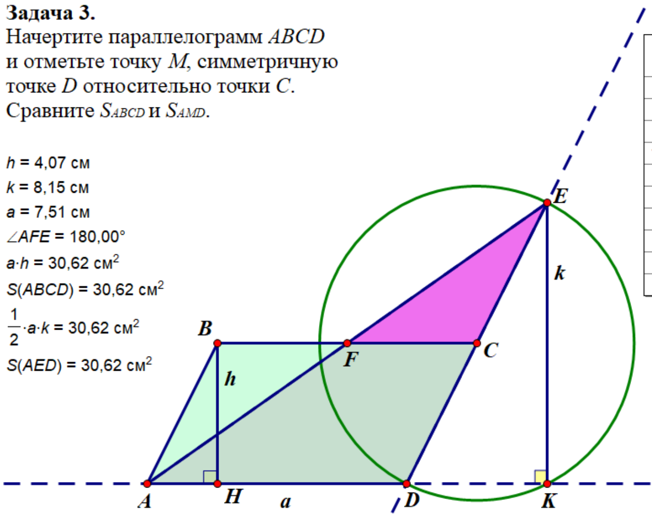


S(MBCN)	S(AMDN)	$\frac{S(MBCN)}{S(AMDN)}$
9,29 см^2	50,16 см^2	0,19
12,57 см^2	67,88 см^2	0,19
3,37 см^2	18,17 см^2	0,19
6,35 см^2	34,26 см^2	0,19
7,87 см^2	42,51 см^2	0,19
37,80 см^2	204,10 см^2	0,19
22,65 см^2	122,30 см^2	0,19
0,41 см^2	2,22 см^2	0,19
0,18 см^2	0,96 см^2	0,19

Интерактивный чертеж к задаче 2 из таблицы 5, созданный самостоятельно в среде Живая математика.

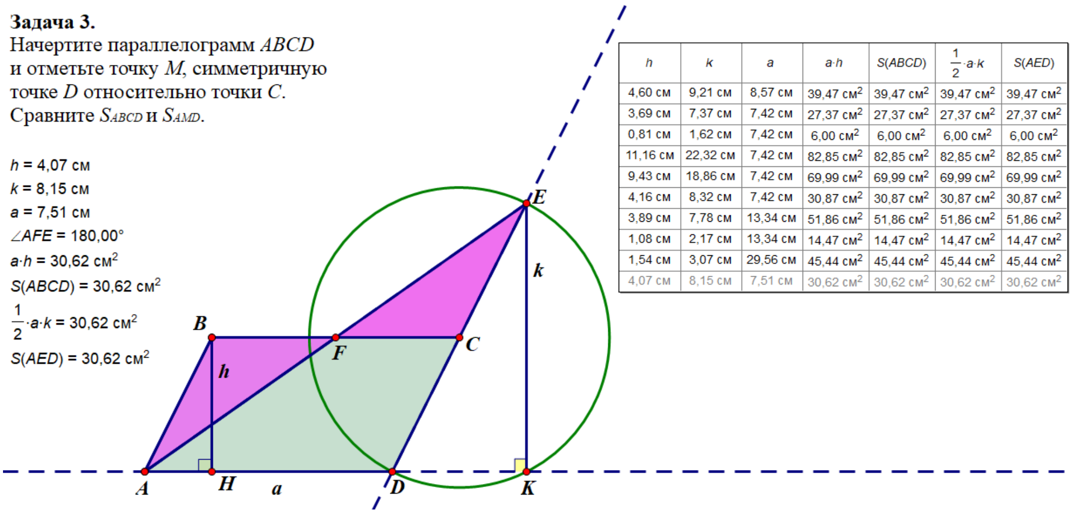
Задача 3.
Начертите параллелограмм *ABCD* и отметьте точку *M*, симметричную точке *D* относительно точки *C*. Сравните S_{ABCD} и S_{AMD}.

$h = 4{,}07$ см
$k = 8{,}15$ см
$a = 7{,}51$ см
$\angle AFE = 180{,}00°$
$a \cdot h = 30{,}62$ см^2
$S(ABCD) = 30{,}62$ см^2
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot k = 30{,}62$ см^2
$S(AED) = 30{,}62$ см^2



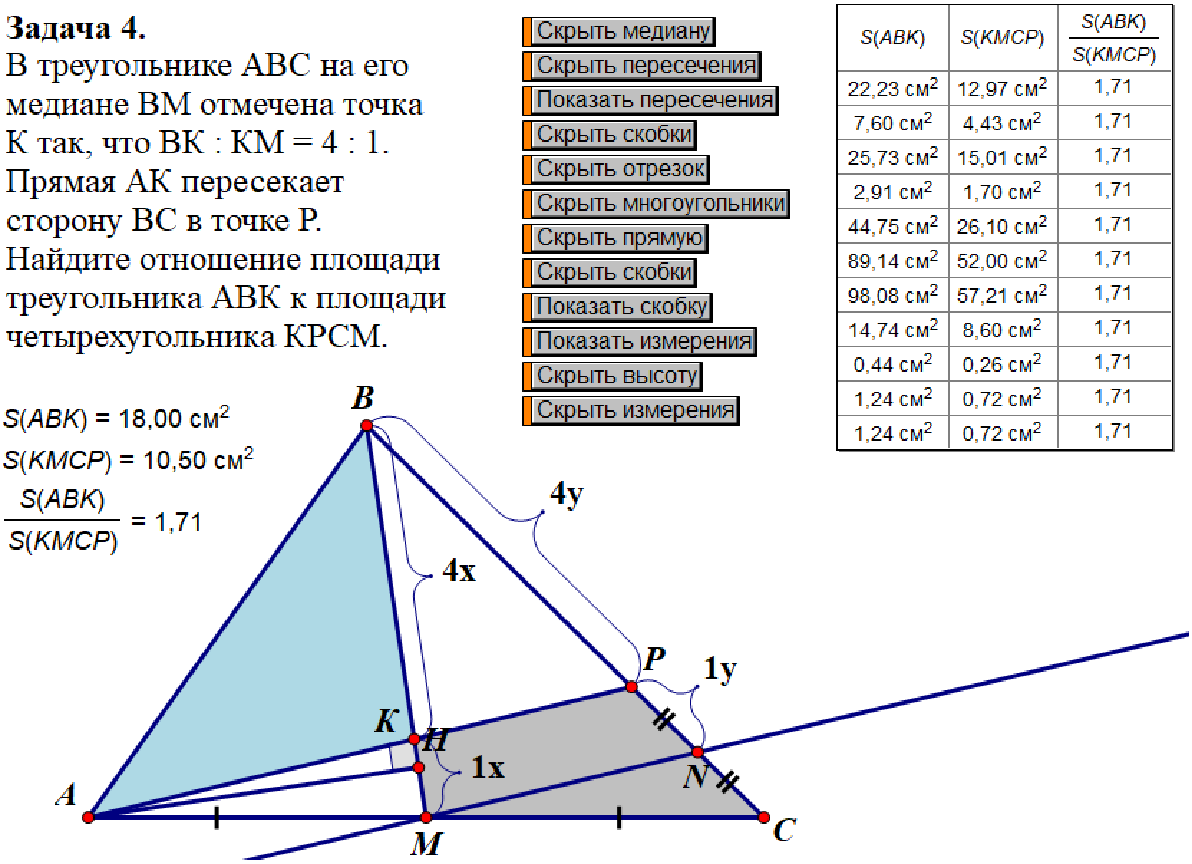
h	k	a	$a \cdot h$	$S(ABCD)$	$\frac{1}{2} \cdot a \cdot k$	$S(AED)$
4,60 см	9,21 см	8,57 см	39,47 см^2	39,47 см^2	39,47 см^2	39,47 см^2
3,69 см	7,37 см	7,42 см	27,37 см^2	27,37 см^2	27,37 см^2	27,37 см^2
0,81 см	1,62 см	7,42 см	6,00 см^2	6,00 см^2	6,00 см^2	6,00 см^2
11,16 см	22,32 см	7,42 см	82,85 см^2	82,85 см^2	82,85 см^2	82,85 см^2
9,43 см	18,86 см	7,42 см	69,99 см^2	69,99 см^2	69,99 см^2	69,99 см^2
4,16 см	8,32 см	7,42 см	30,87 см^2	30,87 см^2	30,87 см^2	30,87 см^2
3,89 см	7,78 см	13,34 см	51,86 см^2	51,86 см^2	51,86 см^2	51,86 см^2
1,08 см	2,17 см	13,34 см	14,47 см^2	14,47 см^2	14,47 см^2	14,47 см^2
1,54 см	3,07 см	29,56 см	45,44 см^2	45,44 см^2	45,44 см^2	45,44 см^2
4,07 см	8,15 см	7,51 см	30,62 см^2	30,62 см^2	30,62 см^2	30,62 см^2

Интерактивный чертеж к задаче 3 из таблицы 5, созданный самостоятельно в среде Живая математика.



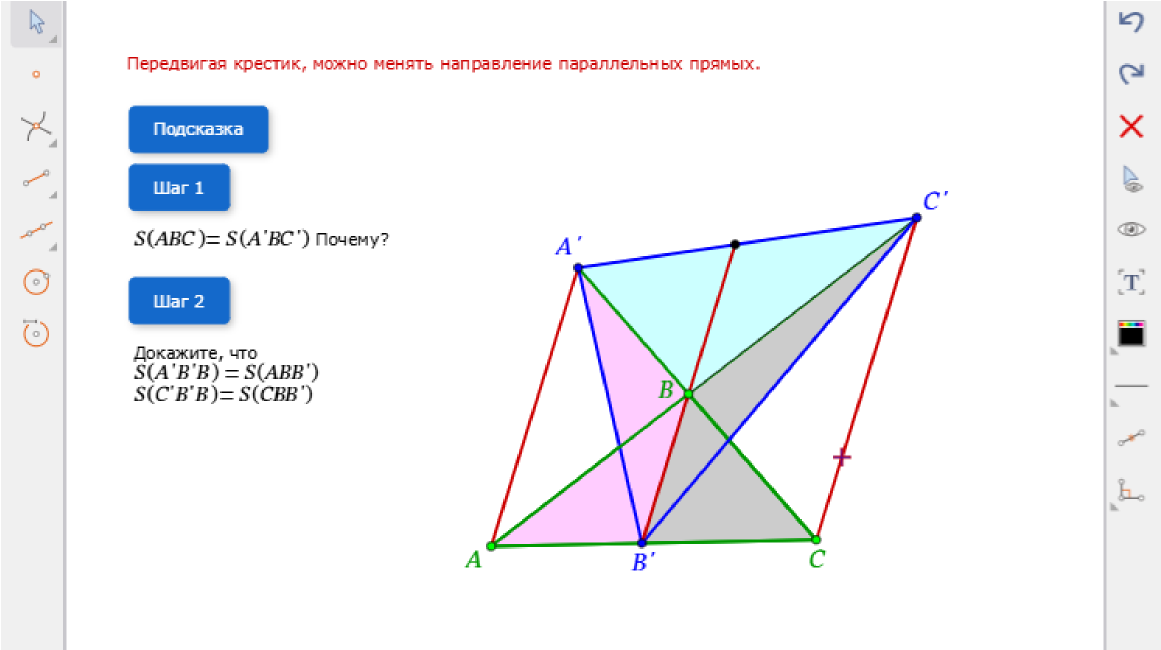
h	k	a	$a \cdot h$	$S(ABCD)$	$\frac{1}{2} \cdot a \cdot k$	$S(AED)$
4,60 см	9,21 см	8,57 см	39,47 см²	39,47 см²	39,47 см²	39,47 см²
3,69 см	7,37 см	7,42 см	27,37 см²	27,37 см²	27,37 см²	27,37 см²
0,81 см	1,62 см	7,42 см	6,00 см²	6,00 см²	6,00 см²	6,00 см²
11,16 см	22,32 см	7,42 см	82,85 см²	82,85 см²	82,85 см²	82,85 см²
9,43 см	18,86 см	7,42 см	69,99 см²	69,99 см²	69,99 см²	69,99 см²
4,16 см	8,32 см	7,42 см	30,87 см²	30,87 см²	30,87 см²	30,87 см²
3,89 см	7,78 см	13,34 см	51,86 см²	51,86 см²	51,86 см²	51,86 см²
1,08 см	2,17 см	13,34 см	14,47 см²	14,47 см²	14,47 см²	14,47 см²
1,54 см	3,07 см	29,56 см	45,44 см²	45,44 см²	45,44 см²	45,44 см²
4,07 см	8,15 см	7,51 см	30,62 см²	30,62 см²	30,62 см²	30,62 см²

Поворот треугольника FEC на угол AFE.

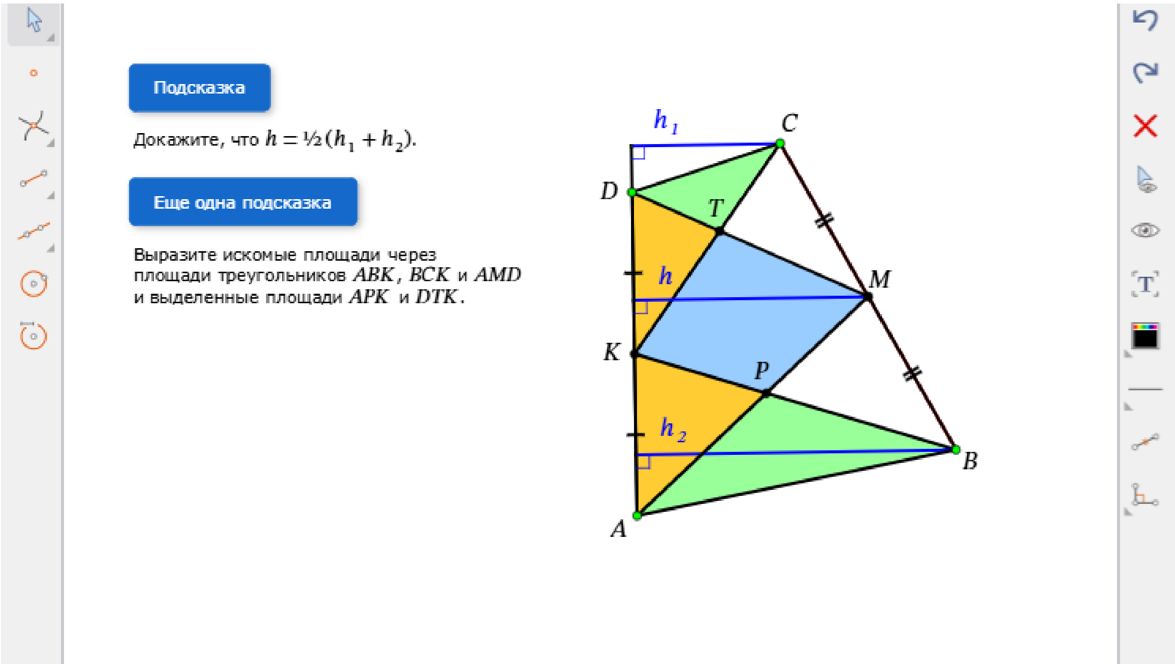


$S(ABK)$	$S(KMCP)$	$\frac{S(ABK)}{S(KMCP)}$
22,23 см²	12,97 см²	1,71
7,60 см²	4,43 см²	1,71
25,73 см²	15,01 см²	1,71
2,91 см²	1,70 см²	1,71
44,75 см²	26,10 см²	1,71
89,14 см²	52,00 см²	1,71
98,08 см²	57,21 см²	1,71
14,74 см²	8,60 см²	1,71
0,44 см²	0,26 см²	1,71
1,24 см²	0,72 см²	1,71
1,24 см²	0,72 см²	1,71

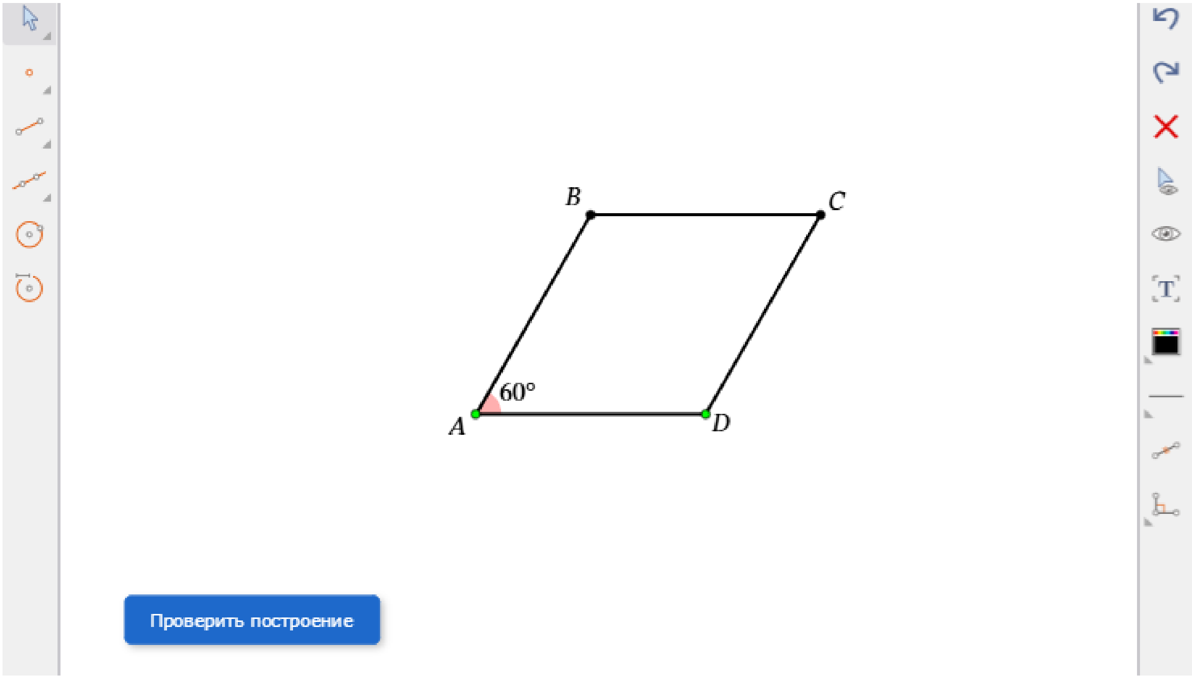
Интерактивный чертеж к задаче 4 из таблицы 5, созданный самостоятельно в среде Живая математика.



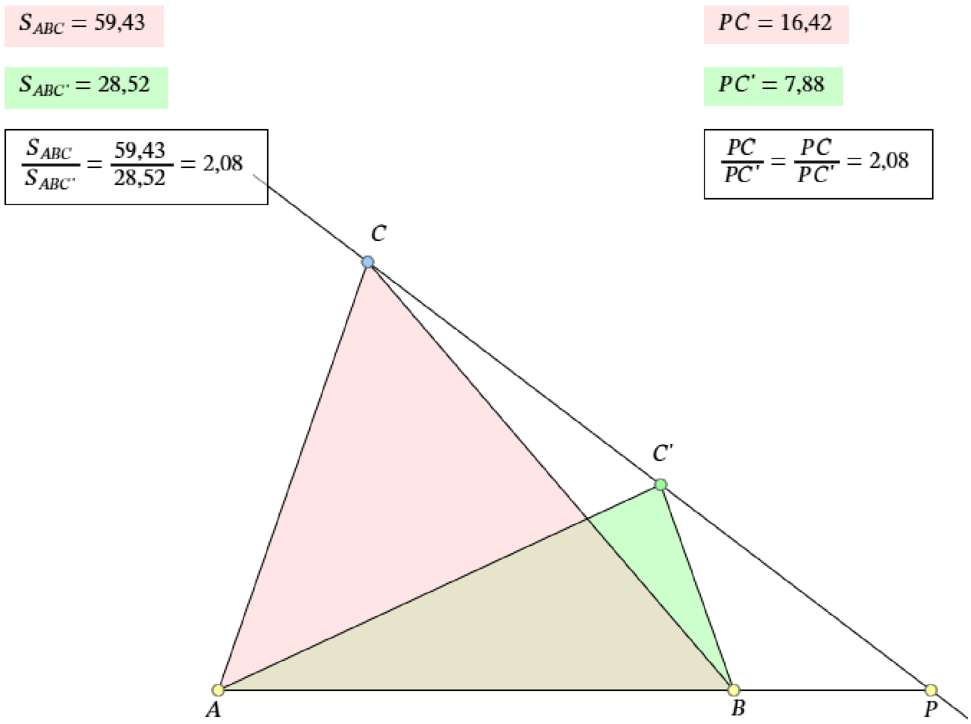
Готовый интерактивный чертеж к задаче 5 из таблицы 5 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



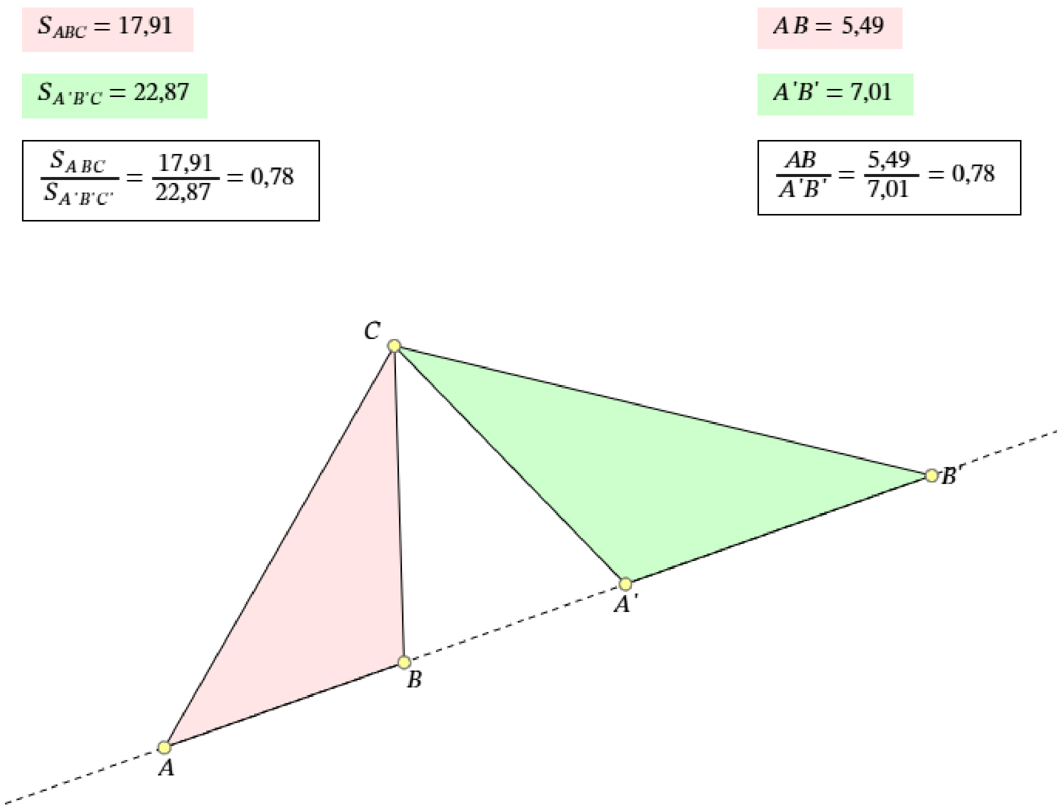
Готовый интерактивный чертеж к задаче 6 из таблицы 5 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



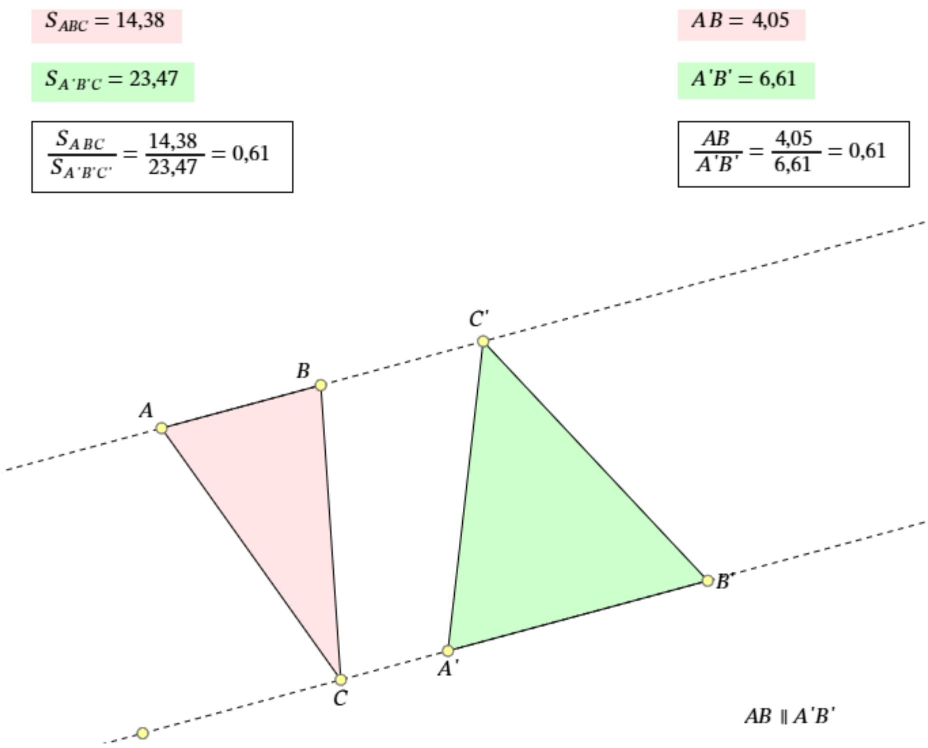
Готовый интерактивный чертеж к задаче 7 из таблицы 5 из библиотеки «1С: Урок», созданный в среде Математический конструктор.



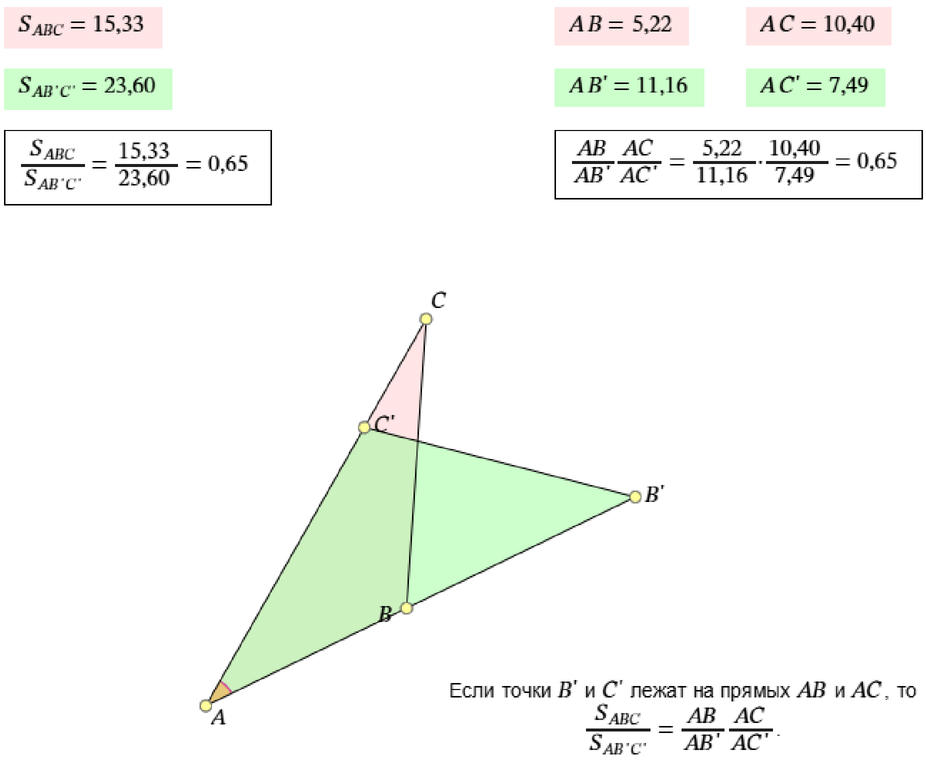
Готовый чертеж к задаче 8 из таблицы 5 из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.



Готовый чертеж к задаче 9 из таблицы 5 из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.



Готовый чертеж к задаче 10 из таблицы 5 из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.

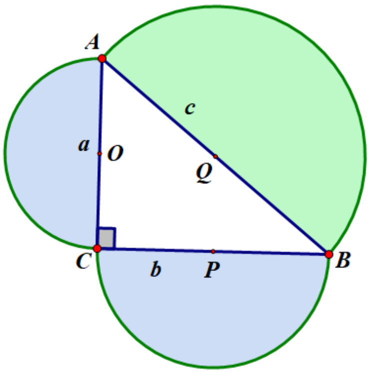


Готовый чертеж к задаче 11 из таблицы 5 из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.

Задача 2.
На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Найдите отношение площади полукруга, построенного на гипотенузе, к сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

$S(O) = 10{,}14$ см^2
$S(P) = 15{,}19$ см^2
$S(Q) = 25{,}33$ см^2
$S(O) + S(P) = 25{,}33$ см^2

$$\frac{S(Q)}{S(O) + S(P)} = 1{,}00$$



$S(O)$	$S(P)$	$S(Q)$	$\frac{S(Q)}{S(O)+S(P)}$
9,82 см^2	15,97 см^2	25,79 см^2	1,00
30,14 см^2	49,02 см^2	79,16 см^2	1,00
46,50 см^2	75,62 см^2	122,12 см^2	1,00
64,43 см^2	104,78 см^2	169,21 см^2	1,00
0,28 см^2	0,45 см^2	0,73 см^2	1,00
0,63 см^2	1,03 см^2	1,66 см^2	1,00
89,37 см^2	145,32 см^2	234,68 см^2	1,00
154,17 см^2	250,70 см^2	404,87 см^2	1,00
262,91 см^2	427,52 см^2	690,44 см^2	1,00
13,85 см^2	22,53 см^2	36,38 см^2	1,00
13,85 см^2	22,53 см^2	36,38 см^2	1,00

Решение.
1. Найдем площадь всех полукругов построенных на катетах и гипотенузе данного прямоугольного треугольника, как на диаметрах:

$$S(O) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{1}{2} * \pi * \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$S(P) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{1}{2} * \pi * \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$S(Q) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{1}{2} * \pi * \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{8}$$

2. При этом $c^2 = a^2 + b^2$. Получим:

$S(Q) = \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(a+b)^2}{8}$, с другой стороны:

$$S(O) + S(P) = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi(a+b)^2}{8} \Rightarrow$$

$$S(Q) = S(O) + S(P)$$

Интерактивный чертеж к задаче 2 из таблицы 6, созданный самостоятельно в среде Живая математика.

Задача 3.
Найдите радиус окружности, которая делит круг радиуса R на две равновеликие части – кольцо и круг.

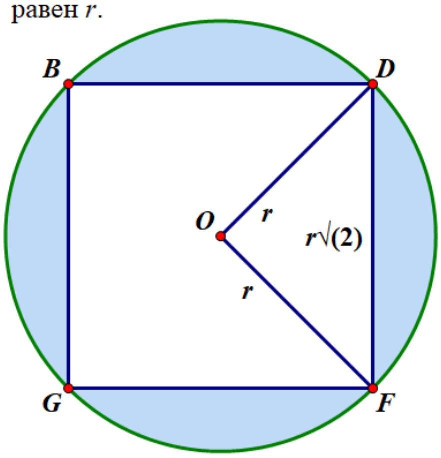
$S(OA) = 72{,}43$ см^2
$S(OC) = 36{,}21$ см^2
$S(OA) - S(OC) = 36{,}21$ см^2

Скрыть объекты
Скрыть круги

$S(OA)$	$S(OC)$	$S(OA) - S(OC)$
46,75 см^2	23,37 см^2	23,37 см^2
82,63 см^2	41,31 см^2	41,31 см^2
27,73 см^2	13,87 см^2	13,87 см^2
138,59 см^2	69,30 см^2	69,30 см^2
279,96 см^2	139,98 см^2	139,98 см^2
520,22 см^2	260,11 см^2	260,11 см^2
4,45 см^2	2,23 см^2	2,23 см^2
0,19 см^2	0,09 см^2	0,09 см^2
39,48 см^2	19,74 см^2	19,74 см^2
16,95 см^2	8,48 см^2	8,48 см^2
60,26 см^2	30,13 см^2	30,13 см^2

Интерактивный чертеж к задаче 3 из таблицы 6, созданный самостоятельно в среде Живая математика.

Задача 4.
Найдите площадь части круга, расположенной вне вписанного в этот круг квадрата. Радиус круга равен r.

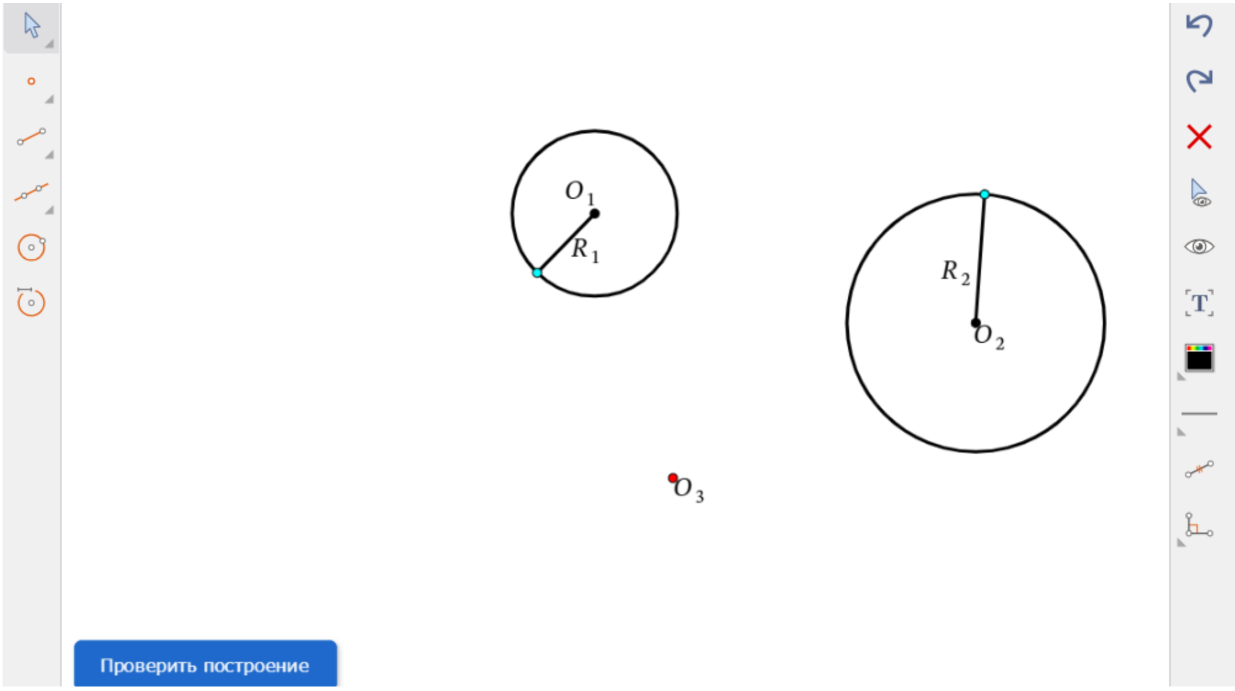


Решение.
1. Проведем отрезок OD, равный OF и по теореме Пифагора найдем DF:
$DF = \sqrt{OF^2+OD^2} = \sqrt{r^2+r^2} = r\sqrt{2}$
2. Найдем площадь искомой части как разность площади круга и вписанного в него квадрата.
$S_{круга} = \pi r^2$; $S_{BDFG} = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2 \Rightarrow S_{в.обл.} = \pi r^2 - 2r^2 = (\pi - 2)r^2$

r = 4,94 см
$(\pi - 2)\cdot r^2$ = 27,85 см^2
S(выделенной обл.) = 27,85 см^2

r	$(\pi - 2)\cdot r^2$	S(выделенной обл.)
5,13 см	30,00 см^2	30,00 см^2
6,38 см	46,51 см^2	46,51 см^2
9,49 см	102,83 см^2	102,83 см^2
13,54 см	209,37 см^2	209,37 см^2
1,89 см	4,06 см^2	4,06 см^2
1,24 см	1,74 см^2	1,74 см^2
1,22 см	1,70 см^2	1,70 см^2
24,87 см	706,12 см^2	706,12 см^2
13,40 см	204,84 см^2	204,84 см^2
8,01 см	73,21 см^2	73,21 см^2
4,94 см	27,85 см^2	27,85 см^2
4,94 см	27,85 см^2	27,85 см^2

Интерактивный чертеж к задаче 4 из таблицы 6, созданный самостоятельно в среде Живая математика.



Готовый интерактивный чертеж к задаче 5 из таблицы 6 из библиотеки «1:С Урок», выполненный в среде Математический конструктор.