МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Япин Сергей Николаевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Изучение темы «Подобные треугольники» в курсе геометрии 8 класса с использованием динамических чертежей

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
22.05.2026
(дата, подпись)

Научный руководитель
доктор пед. наук, профессор В.Р. Майер
(дата, подпись)

Дата защиты
23.06.2026

Обучающийся
С.Н. Япин
(дата, подпись)

Оценка________________________
прописью

Красноярск 2026

Оглавление

Введение

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО), начиная с 7 класса, школьный курс математики в России разделяется на две самостоятельные дисциплины: алгебру и геометрию. В то время как в алгебре акцент идет в сторону изучения чисел, алгебраических операций, уравнений и неравенств, геометрия погружает обучающихся в мир геометрических фигур, их свойств и признаков, элементов конструктивной и элементарной геометрии, аксиоматического подхода к построению геометрии.

Согласно статистике и отзывам учителей каждый второй современный школьник испытывает сложности в изучении геометрии, что связано в первую очередь с их недостаточно развитыми пространственными представлениями. Многие ученики не способны построить грамотный чертеж, который стал бы визуальным ключом к решению задачи. Это связано, прежде всего, со слабой геометрической интуицией школьников, что является, на наш взгляд, результатом клипового мышления молодого поколения, который находится в крепких «объятиях» современного интерактивного мира.

Поскольку цифровизация образования является неотъемлемой частью развития государства, педагогам не стоит пассивно наблюдать за бесцельным времяпрепровождением обучающихся в интернете. Напротив, необходимо грамотно и целенаправленно интегрировать информационные ресурсы в учебный процесс, начиная с начальной и основной школы, а не только в старших класса.

Сегодня в арсенале учителя имеется более двух десятков систем динамической математики (СДМ). Наибольшее распространение в России получили отечественный Математический конструктор, австрийская GeoGebra и американская The Geometer’s Sketchpad, в русскоязычном варианте известная как Живая математика. Начальное предназначение СДМ – обучение в школах и вузах геометрии, однако их последние версии могут с успехом применяться и на уроках алгебры и начал математического анализа, в работе математических кружков и факультативов, в исследовательской и проектной деятельности школьников, в создании школьных музеев виртуальных геометрических фигур.

Несмотря на то, что положительный опыт использования подобных технологий уже накоплен во многих школах европейской части страны (например, Москва, Казань, Ярославль, Архангельск), в школах Красноярска и Красноярского края наблюдается потребность в разработке технологий использования систем динамической геометрии. Таким образом, тема нашего исследования является достаточно актуальной.

Цель исследования: разработать и апробировать методическое обеспечение темы «Подобные треугольники» в 8 классе с применением динамических чертежей.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в 8 классе, ориентированный на использование в обучении геометрии интерактивных цифровых образовательных ресурсов.

Предмет исследования: приёмы и методы использования динамических чертежей при изучении учащимися 8 класса подобных треугольников.

Задачи исследования:

а) проанализировать учебные пособия по геометрии для 8 класса на предмет особенности изложения темы «Подобные треугольники»;

б) охарактеризовать анимационные, конструктивные и исследовательские возможности систем Живая математика и Математический конструктор как средств обучения теме «Подобные треугольники» с использованием динамических чертежей;

в) разработать приёмы и методы применения динамических чертежей при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе.

г) провести апробацию разработанных приёмов и методов применения динамических чертежей при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе.

Глава 1. Дидактические и цифровые аспекты обучения учащихся 8 класса теме «Подобные треугольники»

1.1. Сравнительный анализ представленности темы «Подобные треугольники» в школьных учебниках по геометрии

В наше время существует большое количество учебников, учебных пособий и учебно-методических материалов по каждому из предметов школьного курса, и геометрия не стала исключением. Согласно данным общедоступной электронной библиотеки на данный момент существует сто двадцать два различных учебника по геометрии различных годов выпуска [2]. Из этих учебников мы отобрали те, которые, как нам кажется, в большей степени ориентированы на использование динамических чертежей при изучении подобных треугольников. В качестве одного из них мы выбрали учебник [2] «Геометрия. 7-9 классы» коллектива авторов Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина, подготовленного под научным руководством академика А.Н. Тихонова. Приоритетным для нас помимо отмеченного выше обстоятельства явился факт принадлежности этого учебника к перечню Федерального государственного образовательного стандарта учебников, рекомендованных к использованию в школе. В качестве второго мы выбрали учебник [11] «Геометрия. 7- 9 классы» авторов И.М. Смирнова и В.А. Смирнов, которые на наш взгляд больше подходят для внеурочной деятельности по использованию систем динамической математики (СДМ).

Для этих двух учебников мы провели сравнительный анализ представленности темы «Подобные треугольники».

Таблица 1 – Паспортная характеристика раздела

Пункты паспортной характеристики	***Учебник авторского коллектива: Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др.***	***Учебник авторского коллектива: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов***
Место в курсе	Тема «Подобные треугольники» изучается в рамках главы VII «Подобные треугольники». Занимает место в середине общей	Тема «Подобные треугольники» изучается в рамках главы VIII «Подобие». Занимает место в середине общей структуры курса.

	структуры курса.	
Объем материала	На изучение темы непосредственно ориентированы первые три параграфа главы.	На изучение темы непосредственно ориентированы все пять параграфов главы.
Структурирование	§1 «*Определение подобных треугольников*». В этом параграфе представлены три пункта темы: 56. Пропорциональные отрезки. 57. Определение подобных треугольников. 58. Отношение площадей подобных треугольников. Параграф завершают 17 вопросов и задач, соответствующих содержанию каждого из трёх пунктов. §2 «*Признаки подобия треугольников*». В этом параграфе представлены три пункта темы: 59. Первый признак подобия треугольников. 60. Второй признак подобия треугольников. 61. Третий признак подобия треугольников. Параграф завершают 14 вопросов и задач, соответствующих содержанию каждого из трёх пунктов. §3. «*Применение подобия к доказательству теорем и решению задач*». В этом параграфе представлены четыре пункта темы: 62. Средняя линия треугольников. 63. Пропорциональные отрезки в прямоугольним треугольнике. 64. Практические приложения подобия треугольников. 65. О подобии произвольных фигур. Параграф завершают 20 вопросов и задач, соответствующих содержанию каждого из четырёх пунктов.	§45 «*Подобие треугольников. Первый признак подобия треугольников*». Параграф завершают 3 вопроса и 21 задача, соответствующих содержанию параграфа. Среди задач 4 задачи устных и 6 задач повышенной трудности. §46 «*Второй и третий признаки подобия треугольников*». Параграф завершают 2 вопроса и 17 задача, соответствующих содержанию параграфа. Среди задач 3 задачи устных и 7 задач повышенной трудности. §47 «*Подобие фигур. Гомотетия*». Параграф завершают 6 вопросов и 22 задачи, соответствующих содержанию параграфа. Среди задач 6 задачи устных и 8 задач повышенной трудности. §48* «Золотое сечение». Параграф завершают 6 вопросов и 14 задач, соответствующих содержанию параграфа. §49 «*Теорема Пифагора*». Параграф завершают 4 вопроса и 16 задач, соответствующих содержанию параграфа. Среди задач 5 задач устных и 2 задачи повышенной трудности.

	Главу завершают 7 задач на построение.	

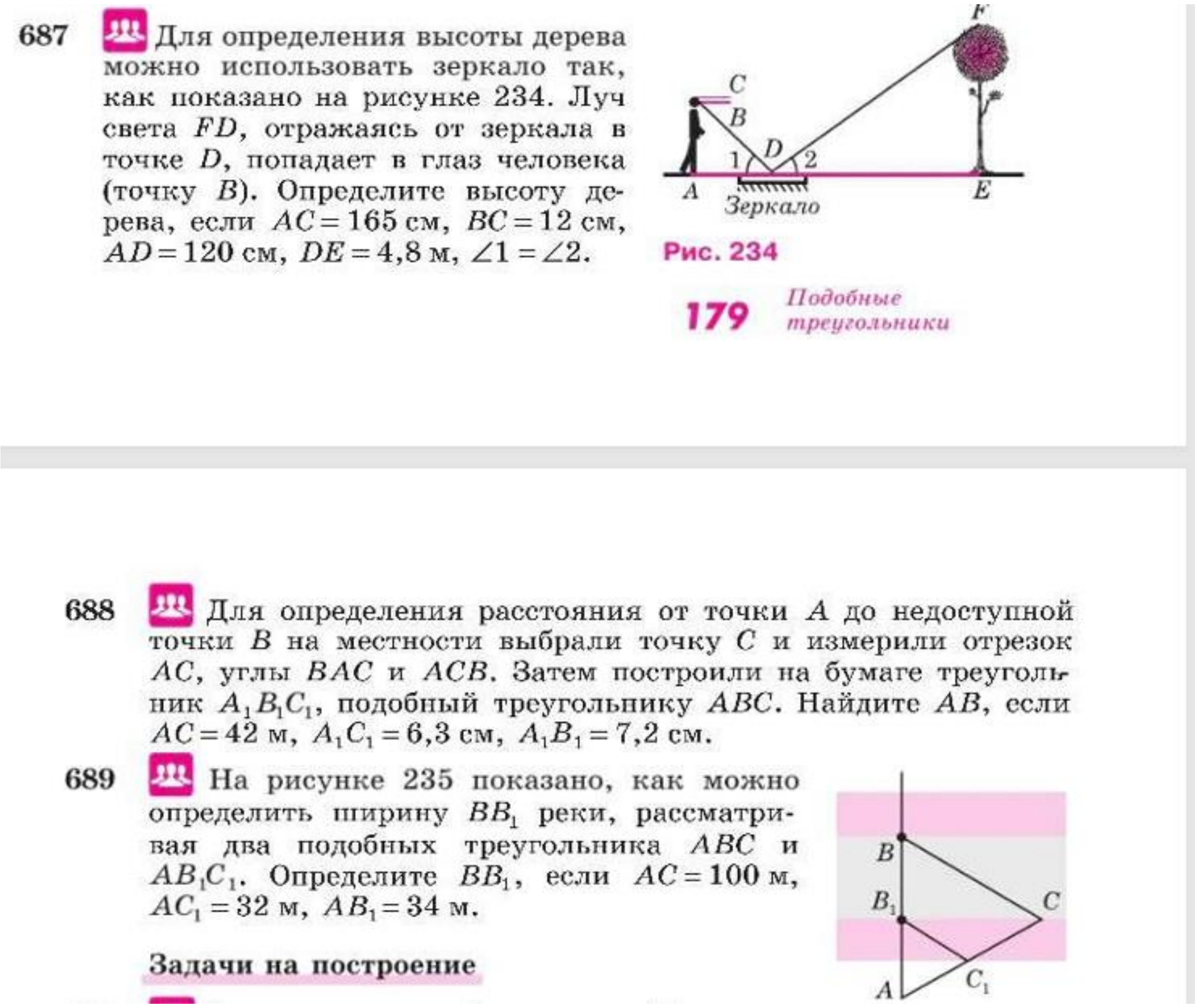
Вывод: по первой таблице, составленной для сравнительного анализа, можно сделать вывод, что в учебнике Л.С. Атанасяна тема «Подобные треугольники» включает в себя больше разделов и разбита на более мелкие детали, что может облегчить обучающимся понимание данной довольно сложной темы школьного курса геометрии.

Таблица 2 – Содержательный анализ теории

Пункты содержательного анализа	***Учебник Л.С. Атанасяна***	***Учебник В.А. Смирнова***
Введение понятия подобия треугольников	Данное понятие предваряется определением пропорциональных отрезков. и вводится через А после определения подобных треугольников вводится понятие коэффициента подобия. Имеется чертеж (рис. 220)	Данное понятие вводится сразу, на пропорциональных отрезках внимание не акцентируется. После вводится определение коэффициента подобия, но внимание на нем не заостряется, имеется чертеж (рис. 45.1)
Признаки подобия треугольников	Рассматриваются все три признака подобия треугольников, в учебнике предоставлены иллюстрации к теоремам, а также доказательство теорем.	Рассматриваются все три теоремы подобия треугольников, в учебнике предоставлены иллюстрации к теоремам, а также доказательство теорем. В данном учебнике после каждой теоремы представлен пример использования признаков подобия при решении геометрических задач.
Дополнительные теоремы и следствия	Доказательство первого признака подобия треугольников предваряется теоремой об отношении площадей двух подобных треугольников. Кроме этого, рассматривается теорема средней линии треугольника и теорема о высоте треугольников.	Рассмотрено подобие различных фигур. После доказательства всех признаков подобия рассматривается преобразование плоскости, которое называется подобием. Определяется гомотетия. А также рассматривается золотое сечение. Доказывается теорема Пифагора.
Практическая направленность	В учебнике представлены задачи практической	В учебнике представлены задачи практической

	направленности.	направленности, включая задачи по темам, не входящим в школьную программу.

Вывод: по второй таблице, составленной для сравнительного анализа, можно сделать вывод, что в учебнике Л.С. Атанасяна данная тема разобрана более точно, начиная с простого и постепенно переходя к сложному, что позволяет обучающимся лучше усвоить материал. Так же стоит заметить, что в данном учебнике рассмотрены дополнительные материалы, связанные с данной темой, так же присутствуют задания практической направленности, представленные в изображении 1.



687 Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 234. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

Рис. 234

179 Подобные треугольники

688 Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

689 На рисунке 235 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

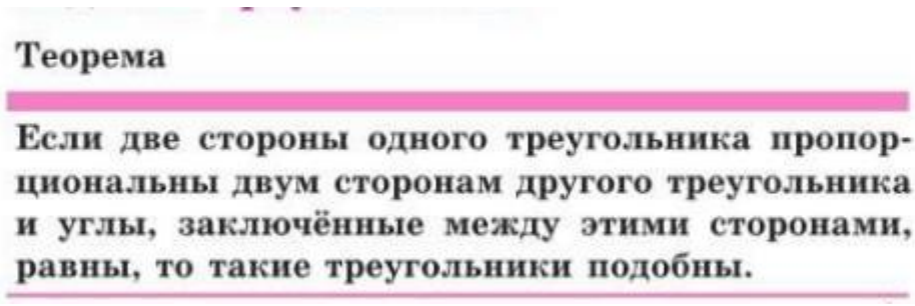
Задачи на построение

Рисунок 1 – Задания практической направленности

В учебнике Смирновых достаточно много примеров иллюстрирующих применение теорем при решении задач.

Таблица 3 – Методический аппарат

Пункты сравнения методического аппарата	***Учебник Л.С. Атанасяна***	***Учебник В.А. Смирнова***
Визуализация	Чертежи, представленные в учебнике цветные и хорошо пропечатаны, так же присутствует выделение самого главного из параграфа (все теоремы и определения выделены цветной рамкой) для наглядности прикладываем изображение 2 и 3. QR- коды на электронные ресурсы или видеоматериал отсутствует.	Чертежи, представленные в учебнике цветные и хорошо пропечатаны, для наглядности прикладываем изображение 4. QR- коды на электронные ресурсы или видеоматериал отсутствует. Также присутствует выделение самого главного из параграфа.
Язык изложения	Материал написан доступным для обучающихся 8 класса языком. Пояснительные комментарии отсутствуют.	Материал написан доступным для обучающихся 8 класса языком. Пояснительные комментарии отсутствуют.


Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Рисунок 2 – Выделение теоремы в учебнике Л. С. Атанасяна

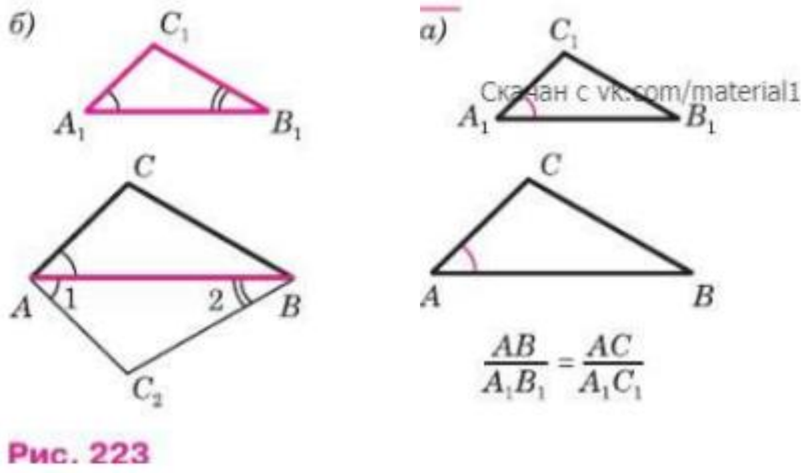


Рисунок 3 – Чертежи на которых выделено то, на что стоит обратить внимание в учебнике Л.С, Атанасяна

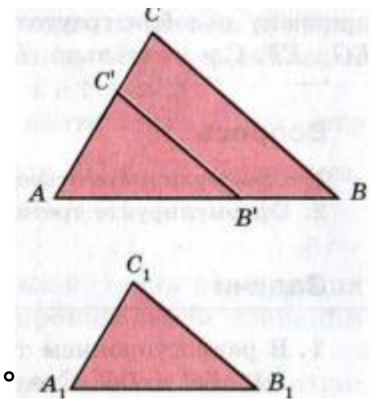


Рисунок 4 – Чертежи на которых выделено то, на что стоит обратить внимание в учебнике В.А. Смирнова

Вывод: в учебнике Л.С. Атанасяна материал выделен более «ярко», что может позволить обучающимся сразу обобрать внимание на нужную теорему или определение при повторении материала. Что касается языка написания материала, оба учебника написаны понятным для обучающихся 8 класса языком, что не будет затруднять изучение нового или повторение уже пройденного материала.

Таблица 4 – Анализ системы задач и упражнений

Пункты анализа системы задач	***Учебник Л.С. Атанасяна***	***Учебник В.А. Смирнова***
Дифференцирование заданий	В учебнике отсутствует маркировка сложности заданий.	В учебнике присутствует маркировка сложности, она показана в виде значка

		около задания, подробнее в изображении 5. Задания для сильных обучающихся обозначены символом «*», устные задания обозначены Символом «°».
Типы задач, представленные в учебнике	В учебнике присутствуют задания различных типов: на готовых чертежах, вычислительные и задачи на доказательство, а также задачи на построение.	В учебнике присутствуют задания различных типов: на готовых чертежах, вычислительные и задачи на доказательство, а также задачи на построение.
Ответы и подсказки	Ответы на задания предоставлены в конце учебника, присутствуют подсказки для построений.	Ответы на задания предоставлены в конце учебника.

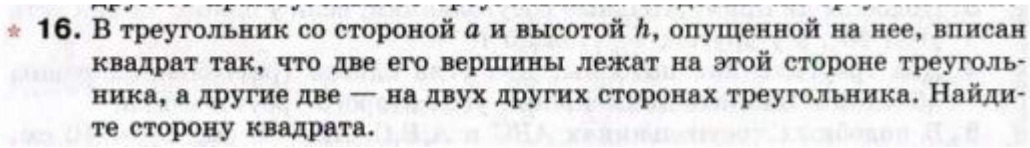

* **16.** **В треугольник со стороной *a* и высотой *h*, опущенной на нее, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на этой стороне треугольника, а другие две — на двух других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.**

Рисунок 5 – Демонстрация маркировки сложности в учебнике В.А. Смирнова

Вывод: учебники предоставляют почти одинаковый спектр заданий, однако в учебнике В.А. Смирнова предоставлено четкое дифференцирование заданий, что может помочь обучающимся выбрать порядок выполнения заданий от простых к сложным. Наличие заданий для сильных обучающихся в данном учебнике, может позволить обучающимся подумать над более сложными заданиями.

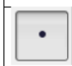
Итоговый вывод: в ходе сравнительного анализа представленности темы «Подобные треугольники» в учебниках по геометрии под редакторством Л.С. Атанасяна и В.А. Смирновой показал, что оба учебника имеют как сильные, так и слабые стороны. Но нам, кажется, что учебник Л.С. Атанасяна располагает более подробным рассмотрением темы «подобные треугольники», это выражается в большем количестве выделенных пунктов, наличие дополнительных теорем и некоторые другие пункты, рассмотренные в таблицах ранее.

1.2. Дидактические возможности среды Живая математика как средства визуального и анимационного сопровождения темы «Подобные треугольники» в 8 классе

Что такое геометрия? Для кого-то это просто школьный предмет, для кого-то научная область. Но нам, кажется, что геометрия — это искусство. В ней представлено все многообразие форм и фигур нашего мира. Но не каждый способен его рассмотреть. Что бы показать всю красоту геометрических фигур, необходима возможность посмотреть на эту фигуру под другим углом, с другой стороны, иметь возможность «держать ее на ладони». В наше время существует множество различных инструментов, предоставляющих такую возможность, мы с вами рассмотрим конкретный пример такого инструмента Живую математику.

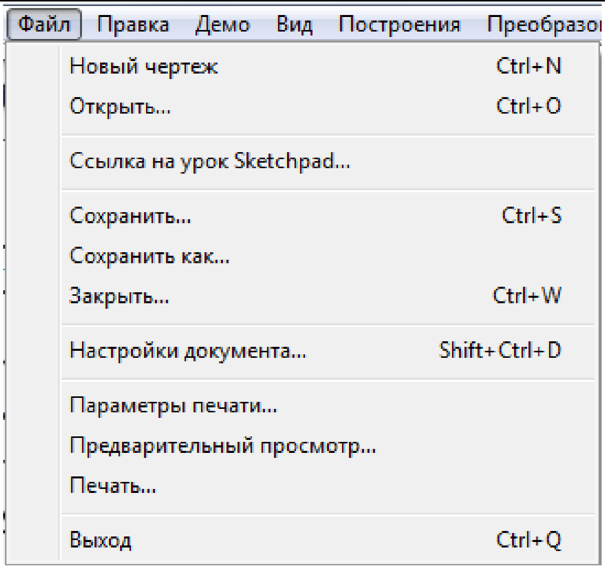
Для начала необходимо рассмотреть основные инструменты Живой математики [9]:

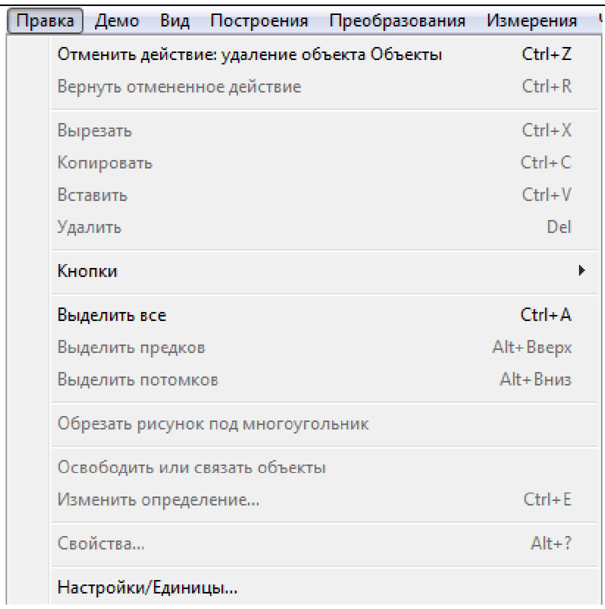
Таблица 5 – Основные инструменты живой математики

Инструмент	Описание
	Инструменты поворота, переноса и гомотетии. Позволяют выделять и передвигать объекты.
	Точка. Позволяет поставить точку в любом месте поля и на любом объекте.
	Циркуль. Позволяет строить окружность по 2 точкам – центру и точке на будущей окружности
	Линейка. Позволяет строить отрезок, луч, прямую по 2 точкам (в т.ч. по данным).
	Многоугольник. Строит любой многоугольник по вершинам – без границ, с границами и без выделения части плоскости.
	Текст. Позволяет обозначать вершины, прямые, а также добавлять любой текст в любом месте поля.
	Маркер. Позволяет добавлять метки на объекты, а также делать пометки и даже чертежи «от руки».
	Информатор. При наведении на объект описывает его, в т.ч. показывает зависимые объекты.
	Инструмент пользователя. Если какой-то объект строится довольно часто, можно сохранить его построение как личный инструмент.

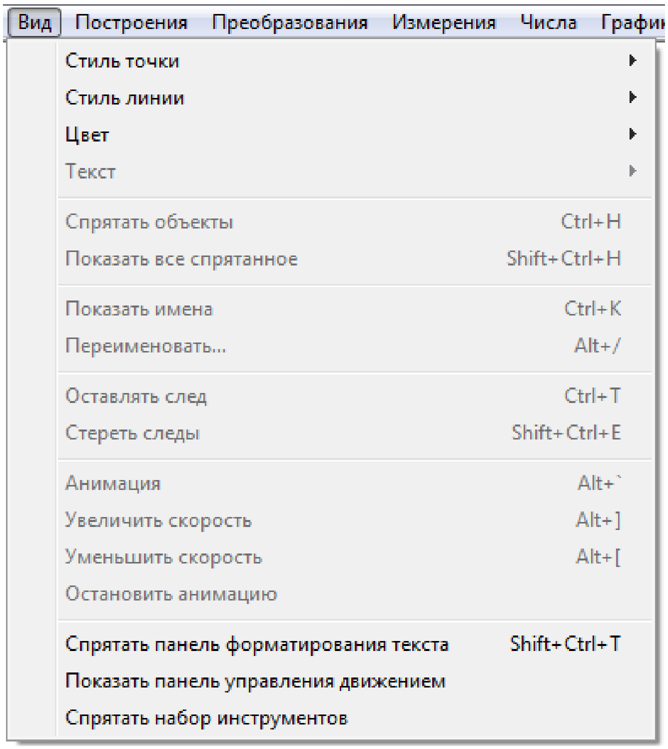
Наиболее часто используемые инструменты расположены по левому краю рабочего поля, сразу бросаются в глаза и не спрятаны в глубине интерфейса. В шапке рабочего поля располагаются основные функции среды.

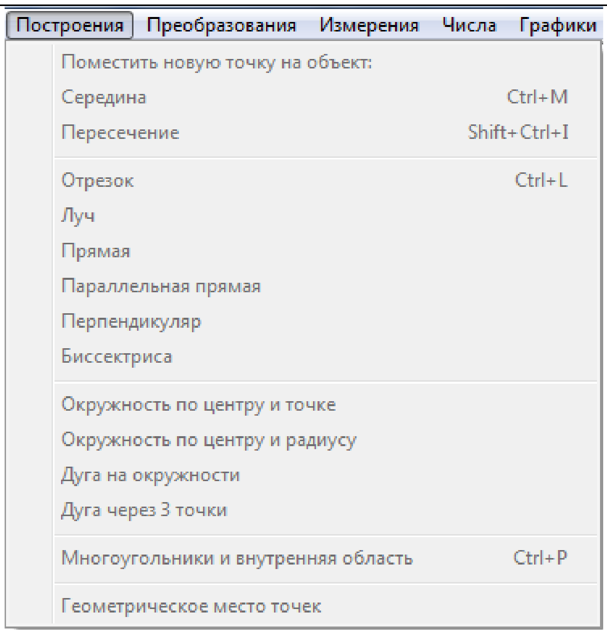
Таблица 6 – Основные функции Живой математики

<table>
<tr>
<td>


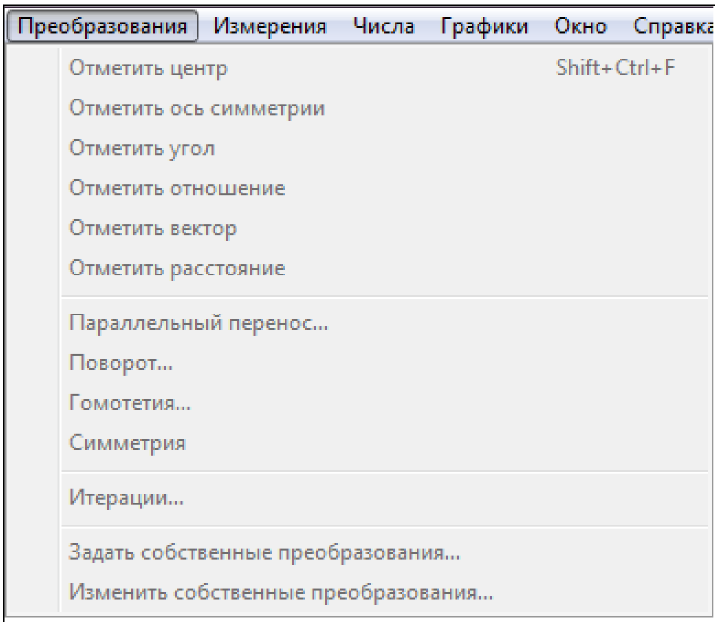
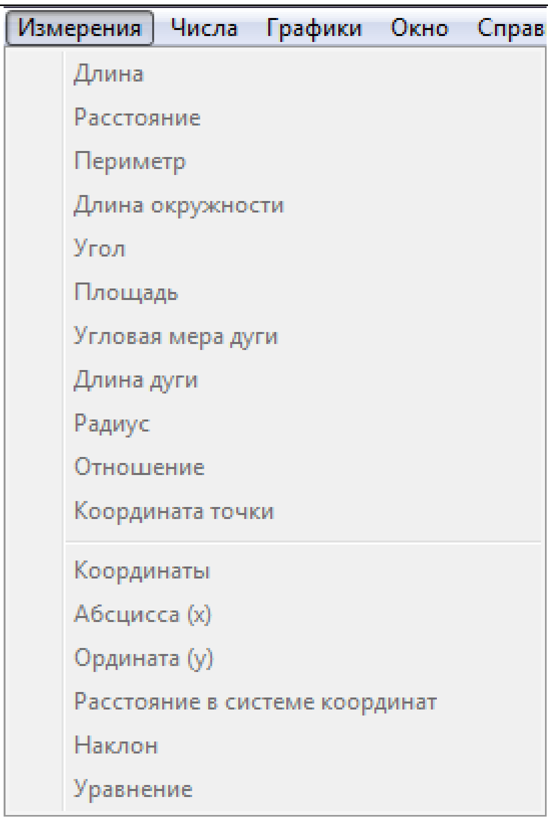
</td>
<td>Создание нового чертежа. Открытие сохраненного ранее документа. Сохранение созданного чертежа. Закрытие файла. Работа с добавлением и удалением новых листов в одном документе. Предварительный просмотр, настройки печати и печать. Закрытие программы.</td>
</tr>
<tr>
<td>


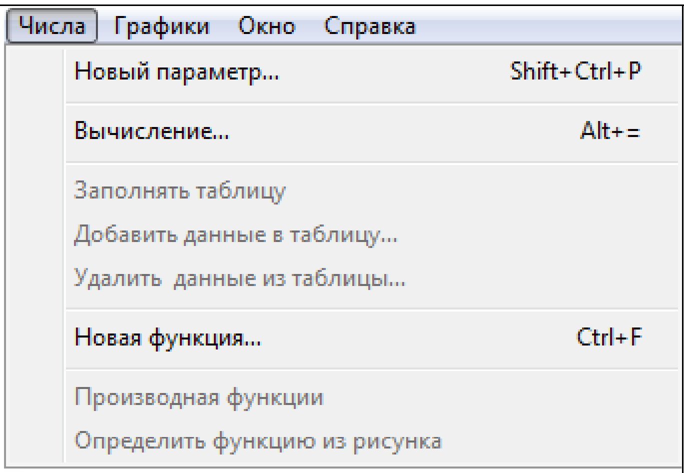
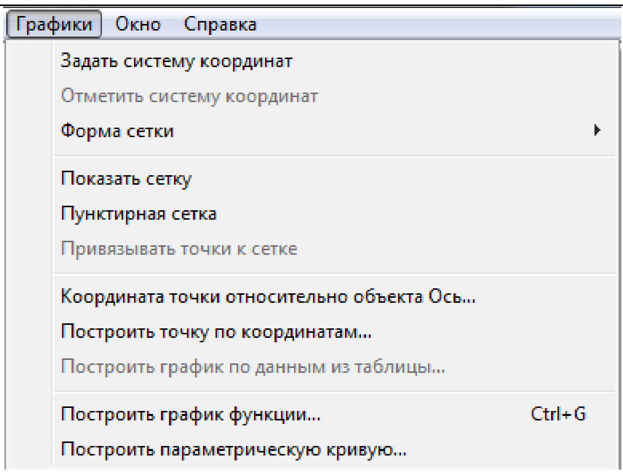
</td>
<td>Отменить только что совершенное действие и вернуть его. Вырезать и копировать выделенные объекты. Вставить вырезанные объекты, рисунки. Удалить ненужный объект. Создать кнопку скрытия/показа объекта, анимации, презентации. Выделение объектов и с ними связанных. Создание и удаление зависимости. Изменить значение выделенного объекта. Настройка программы.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Задание толщины, цвета, стиля объектов и текста. Скрытие (но не удаление) из поля зрения объектов и их демонстрация. Старт движения (анимации) объектов. Начертить траекторию (след) движения объектов. Увеличение и уменьшение скорости движения объектов, прекращение движения. Работа с панелью инструментов.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Более расширенный список построения основных объектов, которые можно строить без использования панели инструментов.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Отметить: центр, ось симметрии, угол, отношение, вектор и расстояние. Выполнить параллельный перенос, поворот, гомотетию и симметрию. Выполнить параллельный перенос (выделяем интересующий нас объект и нажать клавишу параллельный перенос, в высветившемся окне задать параметры переноса (угол, растояние)).</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Измерение длины отрезка, расстояния между точками, периметра, площади, угла, длины окружности, дуги, радиуса, отношения и угловой меры дуги (для этого выделяем интересующий нас объект и нажимаем на соответствующую функцию).
Определение координат построенных точек, расстояния между ними, наклона и уравнения, задающего.</td>
</tr>
</table>

	Калькуляционная работа с измеренными величинами, задание параметра и функций, вычисление производной, заполнение таблиц.
	Задание системы координат, выбор формы и стиля сетки, построение графиков функций, в т.ч. параметрических кривых, и построение точек.

Рассмотрим поподробнее анимационные возможности среды Живая математика. Можно организовать следующие виды анимации: ручная, кнопочная, параметрическая [1].

Ручная анимация осуществляется перетягиванием элементов фигуры с помощью курсора, данная анимация может показаться скучной, но она помогает при решении многих задач, так как ее проще всего реализовать.

Кнопочная анимация позволяет задать бесконечную анимацию точки или ее перемещение на в другое место. Для создания бесконечной анимации необходимо выделить точку чертежа и на горизонтальной панели команд выбрать «Правка: кнопки: анимация», после чего в высветившемся окне задать параметры анимации. Для реализации перемещения необходимо выделить точку, которую хотим переместить и точку, в которую хотим переместиться, после чего на горизонтальной панели команд выбрать «Правка: кнопки: переместить».

Параметрическая анимация создается с помощью заданного параметра (кнопка «Вычисления: новый параметр» на горизонтальной панели команд) и точки (при построении окружности с центром в данной точке и радиусом равному нашему параметру). Для этого необходимо выделить наш параметр и точку, после чего на горизонтальной панели команд нажать выбрать «Построения: окружность по центру и радиусу». Изменять параметр можно внесением данных с клавиатуры или нажатием на «+» и «-».

Как отмечено в статье [8] «Компьютерные анимации в среде Живая математика на уроках геометрии»: «Дидактические возможности среды Живая математика эффективно реализуются при конструировании динамических анимационных моделей, поддерживающих практически все темы и разделы курса геометрии в школе».

Перейдем к конкретным дидактическим возможностям среды Живая математика как средства как средства визуального и анимационного сопровождения темы «Подобные треугольники» в 8 классе.

По нашему мнению, одной из самых главных дидактических возможностей среды Живая математика, при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе, является интерактивная визуализация. На данный момент современные школьные учебники могут предоставить лишь статичную иллюстрацию, что не может в полной мере помочь обучающимся осознать суть подобия как преобразования, которое сохраняет форму (углы, отношение сторон) но изменяет размер. В свою очередь среда Живая математика позволяет «оживить» построение. Обучающиеся смогут в реальном времени фиксировать изменение длин сторон, при том, что отношения соответствующих отрезков остаются неизменными, так же, как и величины углов.

Использование среды Живая математика преобразует абстрактное теоретическое определение (изучаемые признаки) в наглядный эксперимент. Обучающиеся самостоятельно варьируют параметры фигуры, отслеживают инварианты, выдвигают и проверяют гипотезы относительно признаков подобия треугольников. Все вышеперечисленное способствует переходу от банального заучивания теории к более глубокому пониманию геометрических закономерностей.

Еще одной значимой дидактической возможностью среды Живая математика при изучении темы «Подобные треугольники» является возможность реализации дифференциации учебного процесса. На базовом уровне можно сделать акцент на репродуктивно-поисковую деятельность. Обучающиеся работают с заранее подготовленными динамическими моделями, в которых структурные связи между элементами уже заданы, а изменения параметров происходит в заранее предусмотренных пределах. Базовый уровень выполняет функцию снижения когнитивной нагрузки на обучающихся за счет визуальной динамической обратной связи, а также направления внимания обучающихся на выявление закономерностей, а не технические аспекты построения.

На повышенном уровне функция среды меняется. Из иллюстрационного тренажера она превращается в инструмент математического моделирования и исследовательской деятельности. Теперь обучающиеся будут самостоятельно строить динамическую модель в среде Живая математика. А также решать более сложные задания, связанные с подобием треугольников. Примерами таких заданий могут служить построения подобных треугольников образованных двумя пересекающимися секущими в окружности. Или создание виртуальных моделей для решения прикладных задач на измерение недоступных расстояний (высота здания, ширина водоёма, удаленность объекта).

Таким образом среда «Живая математика» позволяет реализовывать гибкое дифференцирование, позволяющее каждому обучающемуся двигаться к зоне ближайшего развития.

Последней рассматриваемой нами дидактической возможностью среды Живая математика при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе станет ее мотивационный потенциал. Как нам кажется, интерактивность и динамическая наглядность в совокупности с возможностью немедленной проверки своих предположений преобразует внешнюю мотивацию обучающихся во внутреннюю, поскольку обучающийся становится активным субъектом конструирования знания, а не пассивным потребителем готовых знаний. Одновременно с вышесказанным адаптивность среды, обеспечивающая дифференцирование задач, позволяет создавать ситуацию успеха для каждого обучающегося независимо от его уровня математической подготовки.

Стоит заметить, что это не единственные дидактические возможности среды Живая математика, мы выделили самые важные, по нашему мнению, дидактические возможности, предоставляемые средой Живая математика при изучении темы «подобные треугольники» в 8 классе. Так же стоит знать, что эффективность применения данной динамической среды напрямую зависит от грамотного включения среды в структуру урока: динамические чертежи не должны заменять логические рассуждения. Они выполняют функцию «моста» между наглядным образом и формальным доказательством. При таком подходе Живая математика будет являться полноценным дидактическим средством, способствующим формированию как предметных, так и метапредметных компетенций.

1.3. Типология моделей-чертежей по теме «Подобные треугольники» в Библиотеке «1С: Урок», выполненных в среде 1С: Математический конструктор.

В рамках предыдущего параграфа мы познакомились с дидактическими возможностями живой математики как средой для создания динамических чертежей. Было также отмечено, что в нынешнее время существует большое количество сред, позволяющих создавать динамические чертежи экспериментировать с геометрическими объектами в реальном времени. В данном параграфе мы составим типологию готовых моделей- чертежей по теме «Подобные треугольники» в Библиотеке «1С: Урок» [3], выполненных в среде Математический конструктор.

В процессе анализа готовых чертежей- моделей по теме «Подобные треугольники» нами были выявлены следующие их типы:

- Демонстрационные модели.
- Тренировочные модели.
- Контрольно-диагностические модели.

Остановимся на каждом типе подробнее, начнем с демонстрационных чертежей. Их главной педагогической функцией является динамическая визуализация определений признаков и свойств. Такие модели часто имеют много теоретической информации, и интересных функций позволяющих более наглядно преподнести необходимую информацию.

Далее будут продемонстрированы примеры моделей, относящихся к описанному выше типу.

На рисунке 6 продемонстрирована модель «Определение подобия треугольников»

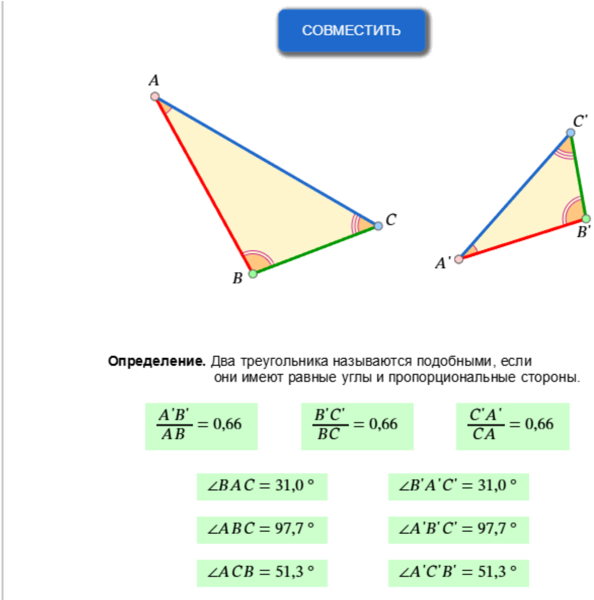


Рисунок 6 – Модель «Определение подобия треугольников»

На рисунке 7 продемонстрирована модель «1-й признак подобия треугольников»

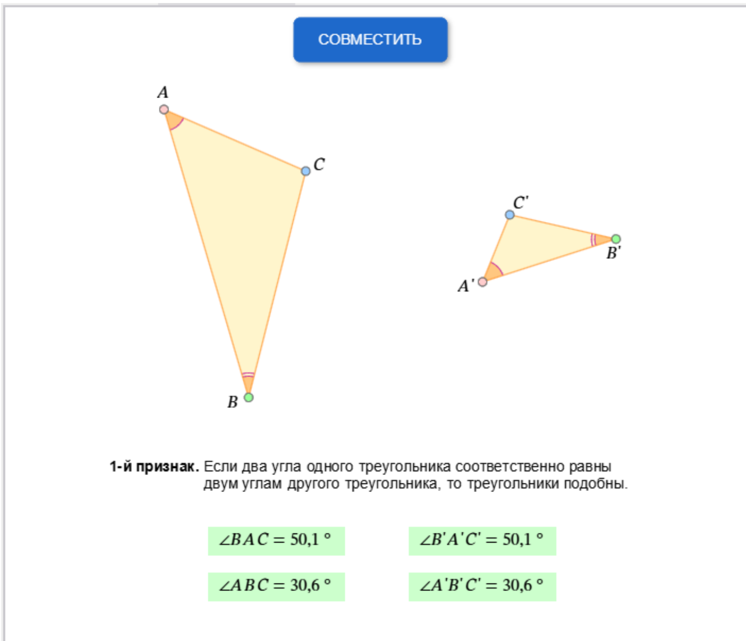


Рисунок7 – Модель «1-й признак подобия треугольников»

На рисунке 8 продемонстрирована модель «2-й признак подобия треугольников»

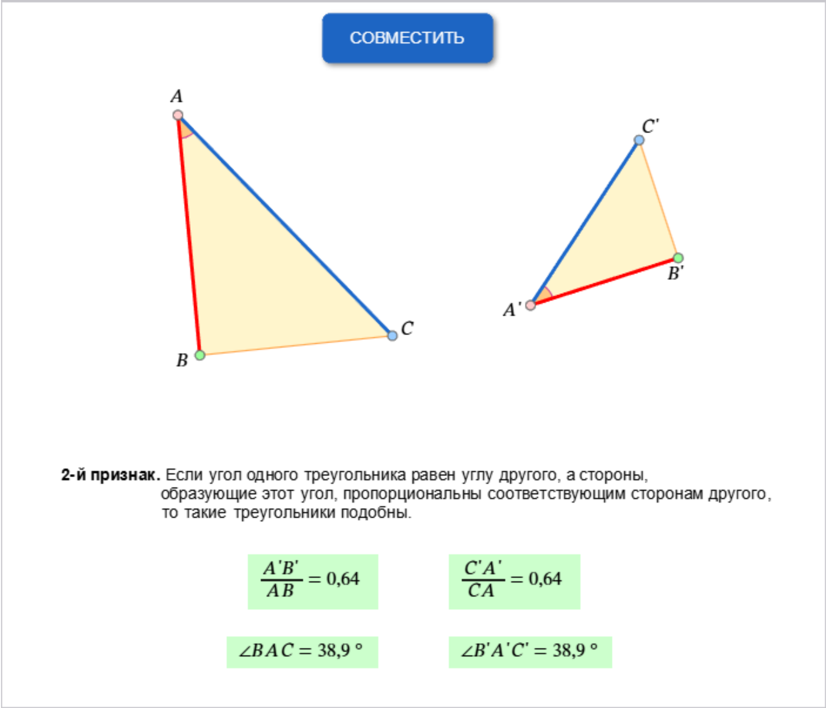


Рисунок 8 – Модель «2-й признак подобия треугольников»

На рисунке 9 продемонстрирована модель «3-й признак подобия треугольников»

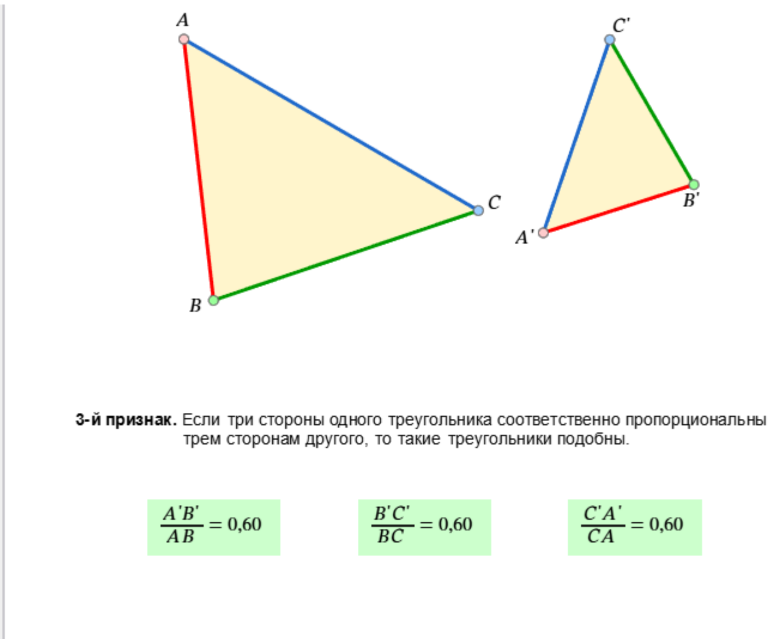


Рисунок 9 – Модель «3-й признак подобия треугольников»

Функция «совместить» продемонстрированная на рисунках 6-8 позволяет проверить равенство углов подобных треугольников, через наложение одного треугольника на другой.

Вторым типом, рассмотренным нами, будут тренировочные модели. Главной педагогической функцией данных моделей является отработка алгоритмов решения типовых задач. Задания могут быть различными, простые вычисления на готовых чертежах, задания на построение, и другое. Чаще всего в таких заданиях есть возможность получить подсказку или вовсе посмотреть правильный ответ, а также возможность моментально узнать был ли ваш ответ правильным.

Далее будут продемонстрированы примеры моделей, относящихся к типу, описанному выше.

На рисунке 10 продемонстрирована модель «Задача 550-а»

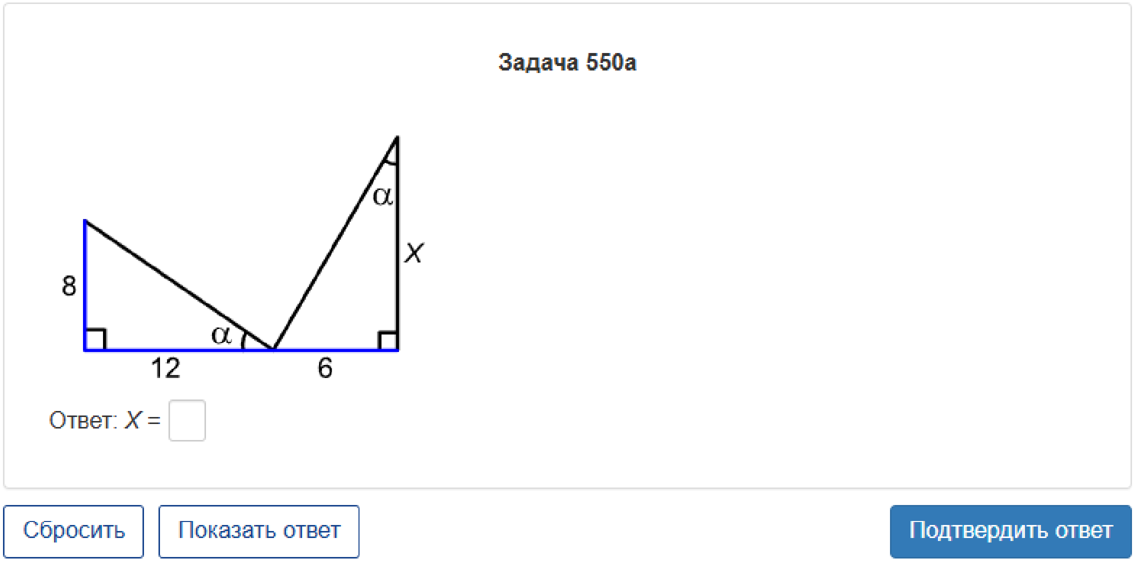


Рисунок 10 – Модель «Задача 550-а»

На рисунке 11 продемонстрирована модель «Задача 563-а»

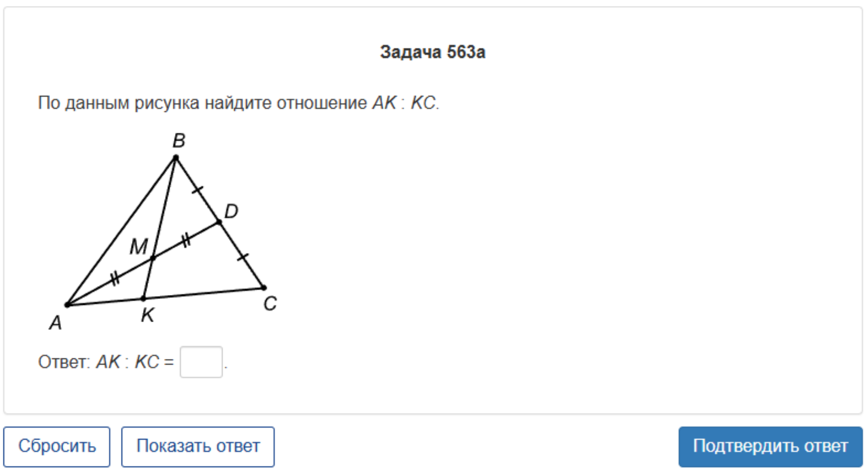


Рисунок 11 – Модель «Задача 563-а»

На рисунке 12 продемонстрирована модель «Задача 588»

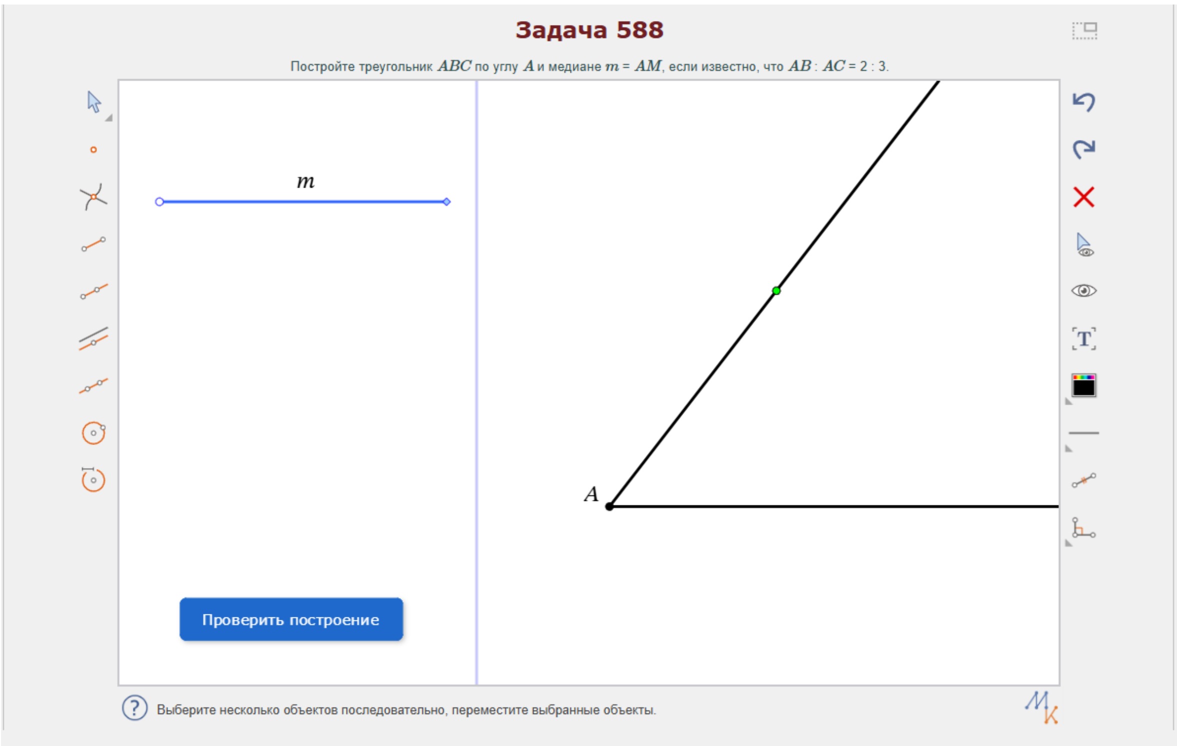


Рисунок 12 – Модель «Задача 588»

На рисунке 13 продемонстрирована модель «Определение расстояния до корабля»

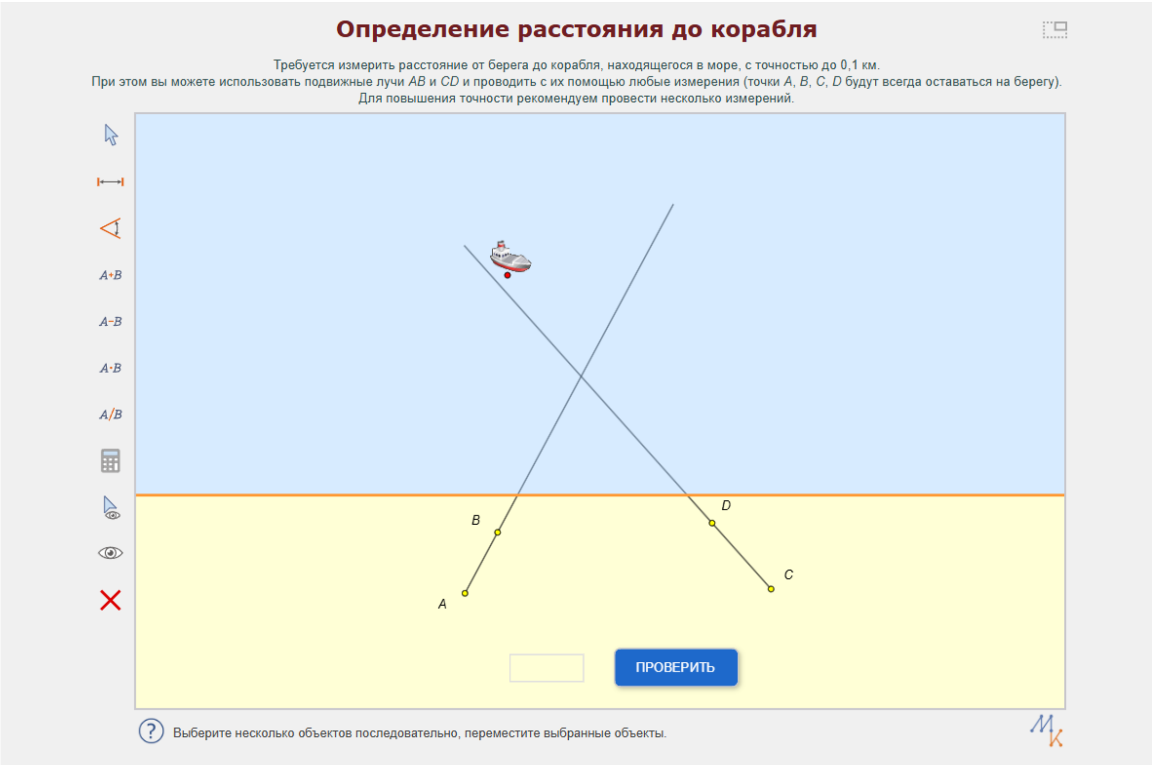


Рисунок 13 – Модель «Задача 588»

Последним, рассмотренным нами типом, будут контрольно-диагностические модели. Главной педагогической функцией данных моделей является оценивание успешности изучения данной темы каждым обучающимся. Большая часть таких заданий представлена в виде теста. Так же присутствуют задания на готовых чертежах.

Далее будут продемонстрированы примеры моделей, относящихся к описанному выше типу.

На рисунке 14 продемонстрирован тестовые задания опроса по признакам подобия треугольников, вариант 1.

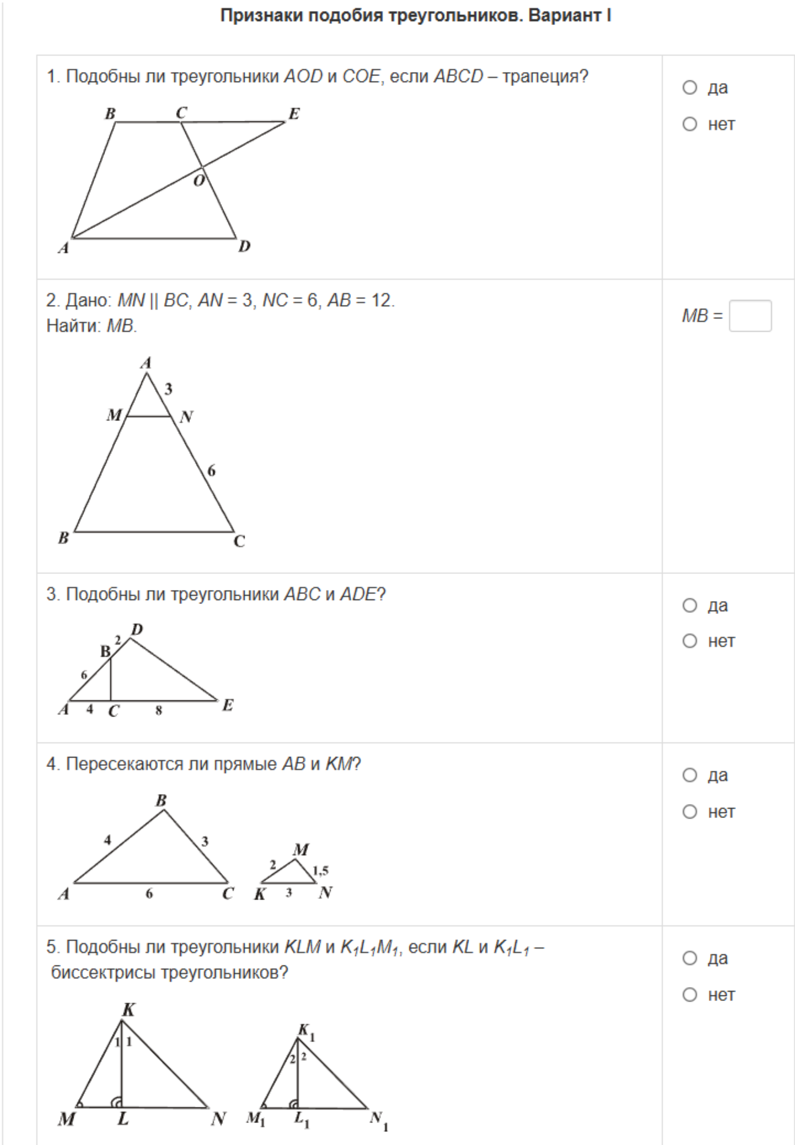
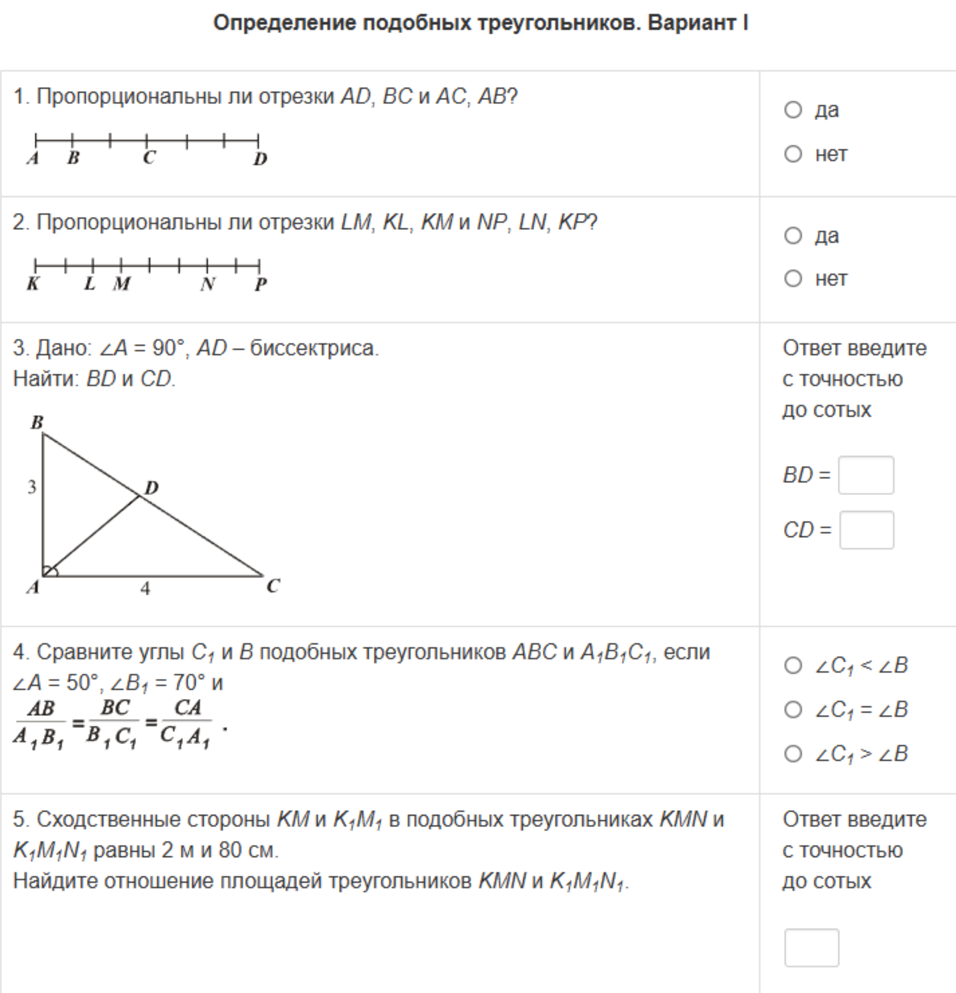


Рисунок 14 – Опрос по признакам подобия треугольников

На рисунке 15 продемонстрирован тестовые западания опроса по определению подобных треугольников, вариант 1



Определение подобных треугольников. Вариант I

1. Пропорциональны ли отрезки *AD*, *BC* и *AC*, *AB*?	○ да ○ нет
2. Пропорциональны ли отрезки *LM*, *KL*, *KM* и *NP*, *LN*, *KP*?	○ да ○ нет
3. Дано: $\angle A = 90°$, *AD* – биссектриса. Найти: *BD* и *CD*.	Ответ введите с точностью до сотых *BD* = *CD* =
4. Сравните углы C_1 и *B* подобных треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 50°$, $\angle B_1 = 70°$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.	○ $\angle C_1 < \angle B$ ○ $\angle C_1 = \angle B$ ○ $\angle C_1 > \angle B$
5. Сходственные стороны *KM* и K_1M_1 в подобных треугольниках *KMN* и $K_1M_1N_1$ равны 2 м и 80 см. Найдите отношение площадей треугольников *KMN* и $K_1M_1N_1$.	Ответ введите с точностью до сотых

Рисунок 15 – Опрос по определению подобных треугольников

Вывод: в процессе анализа и систематизации готовых чертежей-моделей по теме «Подобные треугольники» из библиотеки «1С: Урок», была составлена типология готовых чертежей-моделей. В нее были включены демонстративные модели, тренировочные модели и контрольно-диагностические модели. Наличие данных видов готовых чертежей-моделей позволяет использовать их на любом этапе урок, для повторения старого или изучения нового материала, для решения типовых заданий или проведения контроля по уровню усвоения темы. Остается только вопрос, а какие приемы и методы применения динамических чертежей, позволят наилучшим образом организовать изучение темы «Подобные треугольники» в 8 классе.

Глава 2. Организация изучения темы «Подобные треугольники» в 8 классе с применением динамических чертежей.

2.1. Приёмы и методы применения динамических чертежей при изучении пропорциональных отрезков и отношения площадей подобных треугольников

Какие конкретно теоремы и задачи школьного курса геометрии следует рассматривать с точки зрения целесообразности их поддержки с помощью любой системы динамической математики, в частности среды Живая математика? Совершенно очевидно, что если динамический чертёж просто копирует статический чертёж из задачника или школьного учебника и в процессе решения задачи его анимационные возможности никак не используются, то возникает большой вопрос в целесообразности применения этого чертежа.

Учитывая это обстоятельство, мы отдавали предпочтение тем теоремам, задачам и определениям, которые в той или иной форме допускали эффективное применение анимационных чертежей. Кроме этого, для некоторых задач, визуальная составляющая решения, которых совершенно не требовала динамичности, мы иногда практиковали внесение таких изменений в их формулировки, после которых анимационный чертёж оказывался весьма оправданным. Обоснование некоторых утверждений (теорем или задач на доказательство) мы иногда предваряли компьютерными экспериментами с использованием динамических чертежей, что позволяло обучающимся самостоятельно сформулировать требуемое утверждение.

Далее мы рассмотрим несколько теорем, задач и определений, связанных с темой «Определение подобных треугольников» из учебника Л.С. Атанасяна[2]. Сопроводим эти утверждения динамическими чертежами в среде Живая математика и математический конструктор. Перечень теорем, задач и определений приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Перечень теорем, задач и определений

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункты в учебнике, номер задачи**	**Наличие чертежа в учебнике**
Определение отношения отрезков, пропорциональных отрезков.	П. 63. Пропорциональные отрезки	Нет рисунка
Определение подобных треугольников, коэффициента подобия. Как в среде Живая математика проверить подобие треугольников	П. 64. Определение подобных треугольников	Рис. 220
Теорема об отношении площадей двух подобных треугольников	П. 65. Отношение площадей подобных треугольников	Нет рисунка
Задача: В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. а). Как точка D делит сторону BC, если AB = AC? Обоснуйте свой ответ с помощью доказательства. б) Найдите пару сторон треугольника ABC пропорциональную отрезкам BD и CD, если AB = AC. Свой ответ обоснуйте. в) Используя компьютерный эксперимент, найдите пару сторон треугольника ABC пропорциональную отрезкам BD и CD, если $\angle ABC = 90°$. Сформулируйте соответствующую гипотезу. Попытайтесь доказать свою гипотезу. г) Используя компьютерный эксперимент, найдите пару сторон треугольника ABC пропорциональную отрезкам BD и CD, если $\angle ABC$ - произвольный. Сформулируйте свой вариант ответа (гипотезу). Меняя положения вершин треугольника проверьте свою гипотезу. Докажите гипотезу, сформулируйте ее как свойство биссектрисы произвольного треугольника.	Задачи Задача 642	Рис. 221
Задача: Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC а) Найдите AB, если BC = 9 см, AD = 7,5 см, CD = 4,5 см. б) Найдите CD, если AB = 15 см, AD = 10 см, BC = 8 см. В каждом из рассмотренных случаев постройте в среде Живая математика	Задачи Задача 643	Нет рисунка

треугольник ABC и точку D. Проверьте, является ли отрезок BD в вашем треугольнике биссектрисой.		
Задача: В треугольник ABC вписан ромб AEDF так, что D лежит на стороне BC, E - на стороне AB, F - на стороне AC. Найдите отрезки BD и CD, если AB = 14 см, BC = 12 см, AC = 10 см. Постройте в среде Живая математика треугольник ABC и вписанный в него ромб AEDF. Проверьте, равны ли найденные величины длинам отрезков BD и CD на чертеже.	Задачи Задача 646	Нет рисунка
Задача: В среде Живая математика постройте треугольник ABC по трём сторонам BC = 7,7 см, AC = 4,4 см, AB = 5,2 см и треугольник DEF по двум сторонам DE = 15,6 см, EF = 13,2 см и углу $\angle E = 106°$. Используя инструменты измерения расстояний и углов (папка "Измерения"), проверьте являются ли эти треугольники подобными. Если "нет", то объясните почему. Если "да", то укажите сходственные стороны и коэффициент k подобия.	Задачи Задача 648	Нет рисунка
Задача: В среде Живая математика постройте треугольник ABC по трём сторонам BC = 12 см, AC = 10 см, AB = 14 см и подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$, сходственные стороны которых относятся как 6:5. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 18 см^2. Найдите площади этих треугольников. Используя инструмент измерения площади треугольника, проверьте найденное вами решение.	Задачи Задача 652	Нет рисунка

Опишем как можно реализовать динамические чертежи на примере определения подобных треугольников, теоремы и задачи из таблицы 7.

Определений подобных треугольников. Определение подобных треугольников содержит известное обучающимся понятие пропорциональности. Данное понятие им знакомо не только из школьного курса математики, но и из повседневной жизни. Познакомив обучающихся с определением подобных треугольников, учителю целесообразно сообщить им о том, как идея сохранения одинаковой формы при изменении размера развивалась в математике на протяжении двух тысячелетий: легенда о Фалесе Милетском и измерении высоты пирамид, строгая теория отношений Евдокса и некоторые другие исторические факты.

Как по динамическому чертежу двух треугольников в среде Живая математика узнать, что они подобны. Причем уметь это делать еще до того, как обучающиеся познакомятся с тремя признаками подобия треугольников. Для этого мы предлагаем воспользоваться коэффициентом подобия, учитывая, что во всех средах динамической геометрии имеются инструменты измерения длин отрезков, углов, а также встроенный калькулятор, с помощью которого можно будет высчитывать отношение сходственных сторон в реальном времени.

Изобразим на рабочем поле среды Живая математика треугольник ABC и $A_1B_1C_1$. Если углы полученных треугольников соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны, то эти треугольники подобны.

Давайте теперь построим заведомо подобные треугольники, для этого необходимо построить произвольный треугольник ABC и воспользовавшись инструментом «Подобный треугольник с коэффициентом k» получить подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$. Имея два подобных треугольника на рабочем поле, мы сможем продемонстрировать обучающимся, что как бы мы не изменяли дины сторон одного из них мы всегда сможем получить подобный ему. При этом, не изменяя заданный нами коэффициент подобия. Продемонстрируем это на рисунке 16.

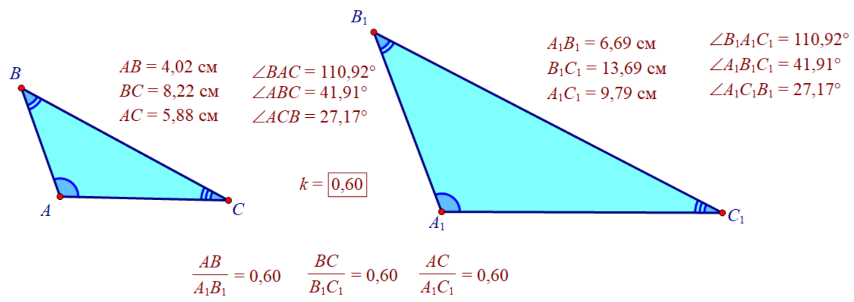


Рисунок 16 – 2 подобных треугольника

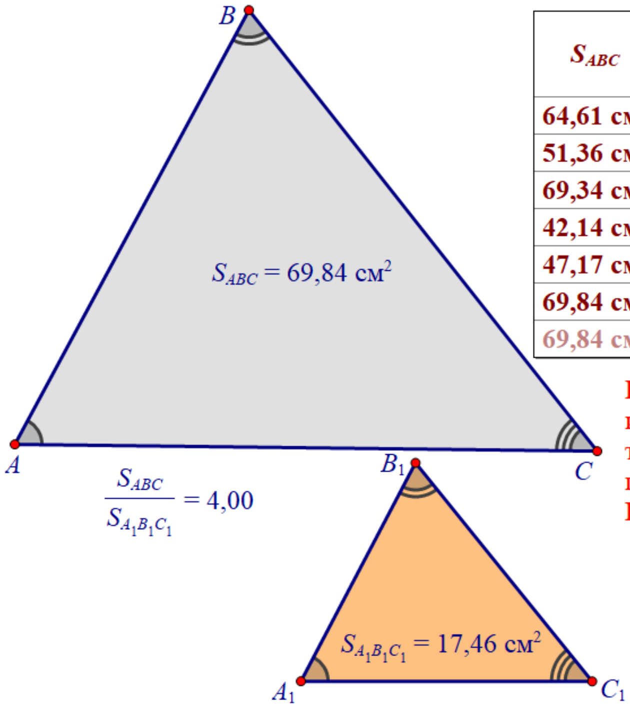
Теорема об отношении площадей подобных треугольников. Перед тем как сформулировать теорему об отношении площадей подобных треугольников, предлагается провести компьютерный эксперимент, который позволит обучающимся самостоятельно сформулировать данную теорему, назвав ее гипотезой.

Можно предложить обучающимся следующее задание: «Исследуйте, существует ли зависимость между значением отношения площадей двух подобных треугольников и коэффициентом подобия. Если такая зависимость существует, то сформулируйте гипотезу о том, какой вид имеет формула, выражающую эту зависимость. Подтвердите (верифицируйте) корректность гипотезы (правильность формулы) компьютерным экспериментом. Дедуктивно обоснуйте эту формулу, доказав соответствующую теорему.»

После того как обучающиеся выскажут свои гипотезы их можно проверить в среде динамической математики Живая математика. Для этого построим два подобных треугольника, благодаря возможностям среды Живая математика выведем площади треугольников на рабочее поле, и подсчитаем отношение их площадей. После этого можно переходить к проверке гипотез обучающихся.

Гипотезы: *первая*- отношение площадей двух подобных треугольников равно удвоенному коэффициента подобия. *Вторая*- Отношение площадей двух подобных треугольников равно утроенному коэффициента подобия. *Третья*- Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Создадим таблицу из 7 столбцов: первые два- площади наших треугольников, третий- коэффициент k, четвертый- отношение площадей наших треугольников, последние три столбца- гипотезы которые высказали обучающиеся (рисунок 17). Изменяя коэффициент подобия и площади наших треугольников зафиксируем от 5 до 7 испытаний.



S_{ABC}	$S_{A_1B_1C_1}$	k	$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$	$2\cdot k$	$3\cdot k$	k^2
64,61 см^2	16,15 см^2	2,00	4,00	4,00	6,00	4,00
51,36 см^2	12,84 см^2	2,00	4,00	4,00	6,00	4,00
69,34 см^2	7,70 см^2	3,00	9,00	6,00	9,00	9,00
42,14 см^2	2,63 см^2	4,00	16,00	8,00	12,00	16,00
47,17 см^2	2,95 см^2	4,00	16,00	8,00	12,00	16,00
69,84 см^2	4,36 см^2	4,00	16,00	8,00	12,00	16,00
69,84 см^2	17,46 см^2	2,00	4,00	4,00	6,00	4,00

Вывод. Так как столбец 4 во всех испытаниях совпадает со столбцом 7, то наиболее правдоподобной является гипотеза №3.
Гипотеза №3: $S/S_1 = k^2$

Рисунок 17 – Визуальная поддержка доказательства теоремы

После того как обучающиеся заметят закономерность, можно будет сделать вывод о правдоподобности каждой из гипотез.

Вполне возможно, что после этого у части обучающихся могут появиться сомнения в необходимости обосновывать эту гипотезу, т.е. доказывать теорему. Но учитель должен объяснить, что проведённые испытания коснулись лишь небольшого количества подобных треугольников, и нет никакой гарантии в справедливости для других подобных треугольников. Поэтому теорему необходимо доказать.

***Теорема*:** Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. [2]

Доказательство.

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так по определению подобных треугольников соответственные углы в таких треугольниках равны, в частности $\angle A = \angle A_1$, то по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу:

$\frac{S}{S_1} = \frac{AB * AC}{A_1B_1 * A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} * \frac{AC}{A_1C_1} = k * k = k^2$ Теорема доказана.

Такой метод А.И. Сгибнев в статье [5] назвал экспериментальным.

Задача из учебника Л.С. Атанасяна. Рассмотрим задачу под номером 646, формулировку которой мы адаптировали под среду Живая математика.

Задача. В треугольник ABC вписан ромб AEDF так, что D лежит на стороне BC, E - на стороне AB, F - на стороне AC. Найдите отрезки BD и CD, если AB = 14 см, BC = 12 см, AC = 10 см. Постройте в среде Живая математика треугольник ABC и вписанный в него ромб AEDF. Проверьте, равны ли найденные величины длинам отрезков BD и CD на чертеже.

Решение. Построим треугольник ABC по трем сторонам AB = 14 см, BC = 12 см и AC = 10 см. Для этого изобразим произвольную точку (вторая кнопка на вертикальной панели инструментов (ВПИ)) и назовем ее C (шестая кнопка на ВПИ), после этого перенесем точку вправо на 1 см (меню «Преобразования» на горизонтальной панели команд (ГПК), команда «Перенести…»). Построим луч (кнопка 4 на ВПИ) с началом в первой точке, содержащий вторую точку. Построим окружность (третья кнопка на ВПИ) с центром в точке C и радиусом BC. В месте пересечения окружности с лучом поставим точку и назовем ее B. Построим окружность с центром в точке C и радиусом AC, а также окружность с центром в точке B и радиусом AB. В точке пересечения окружностей поставим точку, и назовём ее A. Соединим точки A, B и C отрезками. Остается лишь скрыть используемые окружности, щелкнув по ним правой кнопкой мыши и нажав «Скрыть окружность».

Воспользовавшись инструментом «Ромб» (данный инструмент был взят из перечня готовых инструментов) построим ромб AEDF, у которого вершина F лежит на AC, точка E - на AB (точки F окрашена жёлтым, что означает возможность ее перемещения). Перемещая вершину F ромба, добьёмся того, чтобы D оказалась на BC. Изобразим диагонали AD и EF ромба. По особому свойству ромба диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. Таким образом, AD является биссектрисой угла BAC, а точка O пересечения диагоналей делит каждую из них пополам, причём EF ⊥ AD.

Итак, становится понятно, как построить вписанный в треугольник ABC: надо построить биссектрису AD, найти середину O отрезка AD, построить перпендикуляр к AD, содержащий O, далее, построить пересечение E перпендикуляра с AB, затем - пересечение F перпендикуляра со стороной AC и, наконец, построить отрезки ED и FD.

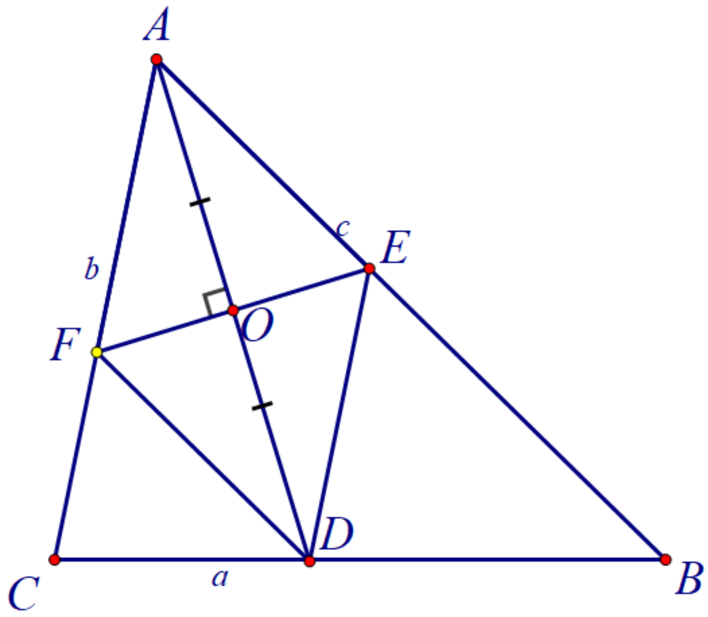


Рисунок 18 – Треугольник из задачи 646

Но как проверить, равны ли длины отрезков BD и CD? Для этого проведем цепочку рассуждений, по уже имеющимся у нас данным.

Поскольку AD биссектриса угла A треугольника ABC, то точка D разбивает сторону BC на отрезки BD и CD, пропорциональные сторонам AB и AC. Составим пропорцию $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$. Обозначим BD через x, тогда CD=12-x. Подставив все известные нам значения в написанную ранее пропорцию получим $\frac{x}{14}=\frac{12-x}{10}$. Находим x= 7. Тогда CD= 5. Измерим длины отрезков CD и BD с помощью возможностей среды Живая математика и получим CD= 5, BD= 7.

2.2. Приёмы и методы применения динамических чертежей при изучении признаков подобия треугольников

Во втором параграфе мы рассмотрим несколько теорем и задач, связанных с темой «Признаки подобия треугольников» из учебника Л.С. Атанасяна[2]. Сопроводим эти утверждения динамическими чертежами в среде Живая математика и математический конструктор. Перечень теорем, задач и определений приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Перечень теорем и задач рассмотренных в параграфе

Формулировка теоремы, условия задачи	**Пункт в учебнике, номер задачи**	**Наличие статического чертежа в учебнике**
Теорема (первый признак подои треугольников). Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.	П. 66. Первый признак подобия треугольников.	Рис.222
Теорема (второй признак подобия треугольника). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны	П. 67. Второй признак подобия треугольников.	Рис. 223 а)
Теорема (третий признак подобия треугольника). Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны	П. 68. Третий признак подобия треугольников.	Рис. 223 б)
Задача. По данным динамического чертежа найдите длину x отрезка CD.	Задачи Задача 657	Рис. 224
Задача. Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение AK/KC,	Задачи Задача 671	Нет рисунка

если: а) AM: MD = 1:1; б) AM: MD = 1:2; в) AM: MD = 1:5; г) AM: MD = 2:1; д) AM: MD = 5:1;		
Задача. Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD.	Задачи Задача 663	Рис. 225
Задача. Определение расстояния до корабля Требуется измерить расстояние от берега до корабля, находящегося в море, с точностью до 0,1 км. При этом вы можете использовать подвижные лучи AB и CD и проводить с их помощью любые измерения (точки A, B, C, D будут всегда оставаться на берегу). Для повышения точности рекомендуем провести несколько измерений.	Задача из математического конструктора	Прилагается динамический чертеж
Задача. Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, чтобы из середины зеркала было видно вершину, определите высоту дерева используя чертеж, созданный в живой математике	Задачи Задача 687	Рис. 234

Опишем как можно реализовать динамические чертежи на примере первой теорем и нескольких задачи из таблицы 8. Задачи не рассмотренные в пределах параграфа вынесены в приложение 1.

Теорема (первый признак подобия треугольников). Используя систему динамической математики Живая математика можно организовать изучение признаков подобия треугольников в виде маленького исследования.

Можно предложить обучающимся следующее задание: «Исследуйте с помощью разведочного эксперимента какое наименьшее количество из 6 возможных соотношений между углами и сторонами двух треугольников должно выполняться, чтобы эти треугольники оказались подобными. Для найденных конкретных соотношений сформулируйте гипотезу, верифицируйте ее несколькими экспериментальных испытаний, результаты испытаний занесите в таблицу. Обоснуйте предположение (докажите теорему).»

После прооведения первых двух эксперементальных испытаний, обучающеся смогут сделать вывод, о том что равенства двух соответствующих углов или пропорциональности двух пар соответственных сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для подобия этих треугольников.

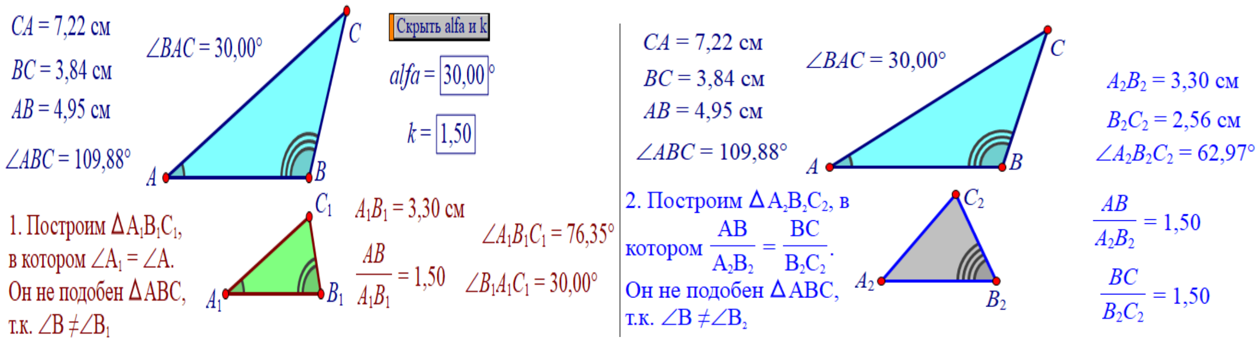
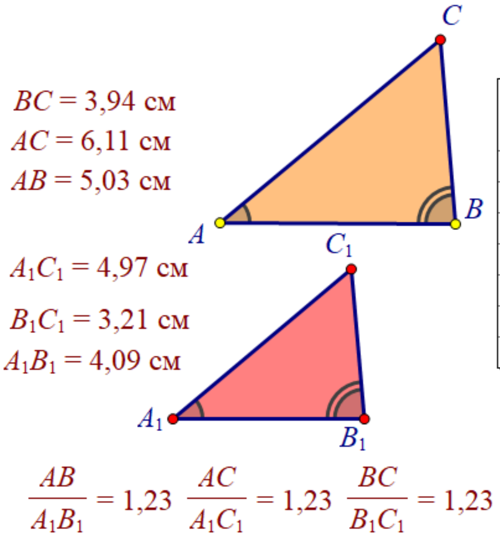


Рисунок 19 – Первое и второе эксперементальное испытание.

При проведении третьего экспериментального испытания построим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1 = \alpha$, $\angle B = \angle B_1 = \beta$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = k$ Меняя углы α и β, величину k и размеры AB, проверим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на подобие. После этого обучающиеся выдвинут гипотезу и проверят ее серией испытаний, с ранее построенными треугольниками.



AB	k	$alfa$	$betta$	$\frac{AB}{A_1B_1}$	$\frac{AC}{A_1C_1}$	$\frac{BC}{B_1C_1}$
6,22 см	0,70	60,00°	45,00°	0,70	0,70	0,70
6,22 см	0,70	50,00°	65,00°	0,70	0,70	0,70
8,31 см	0,80	50,00°	65,00°	0,80	0,80	0,80
5,27 см	0,90	50,00°	65,00°	0,90	0,90	0,90
5,27 см	1,20	40,00°	75,00°	1,20	1,20	1,20
5,27 см	1,23	40,00°	75,00°	1,23	1,23	1,23
5,03 см	1,23	40,00°	85,00°	1,23	1,23	1,23

$k = \boxed{1{,}23}$ $alfa = \boxed{40{,}00}°$ $betta = \boxed{85{,}00}°$

$gamma = 180° - alfa - betta = 55{,}00°$

Рисунок 20 – Третий эксперимент

Гипотеза. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

После проведения серии испытаний, у некоторых обучающихся может возникнуть желание не обосновывать эту гипотезу, т.е. доказывать теорему. Но учитель должен объяснить, что проведённые испытания коснулись лишь трех подобных треугольников и нет никакой гарантии в справедливости для других подобных треугольников. Поэтому сформулируем данную гипотезу как теорему и докажем ее.

Теорема (первый признак подобия треугольников). Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство.

Пусть в треугольниках ABC и A1B_1C_1 выполняются равенства $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ Из теоремы о сумме углов треугольника следует $\angle C = \angle C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB * AC}{A_1B_1 * A_1C_1}$

Аналогично, из $\angle C = \angle C_1 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA * CB}{C_1A_1 * C_1B_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Аналогично из $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Итак, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Задача из учебника Л.С. Атанасяна. Рассмотрим задачу под номером 671. Решение которой удобно рассмотреть с использованием среды Живая математика.

Задача. Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение AK/KC, если:

а) AM: MD = 1:1;

б) AM: MD = 1:2;

в) AM: MD = 1:5;

г) AM: MD = 2:1;

д) AM: MD = 5:1;

Решение. 1. На чистом листе в среде живая математика построим треугольник ABC. Найдем середину сторона BC (меню «построение: середина» на ГПК). Назовем эту точку D.

2. Выполним дополнительное построение: проведём через D прямую, параллельную BK, найдём пересечение E этой прямой со стороной AC, скроем прямую, построим отрезок DE.

3. $\triangle AMK \sim \triangle ADE$ по первому признаку ($\angle A$ - общий, $\angle AKM = \angle AED$, как соответственные). Отсюда, $\frac{AK}{KE} = \frac{AM}{MD}$.

4. $\triangle CDE \sim \triangle CBK$ по первому признаку ($\angle C$ - общий, $\angle CED = \angle CKB$, как соответственные). Отсюда, $\frac{KE}{EC} = \frac{BD}{DC} = 1$ Таким образом KC = 2KE.

5. Итак, $\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{2KE} = \frac{1}{2} * \frac{AK}{KE} = \frac{1}{2} * \frac{AM}{MD}$.

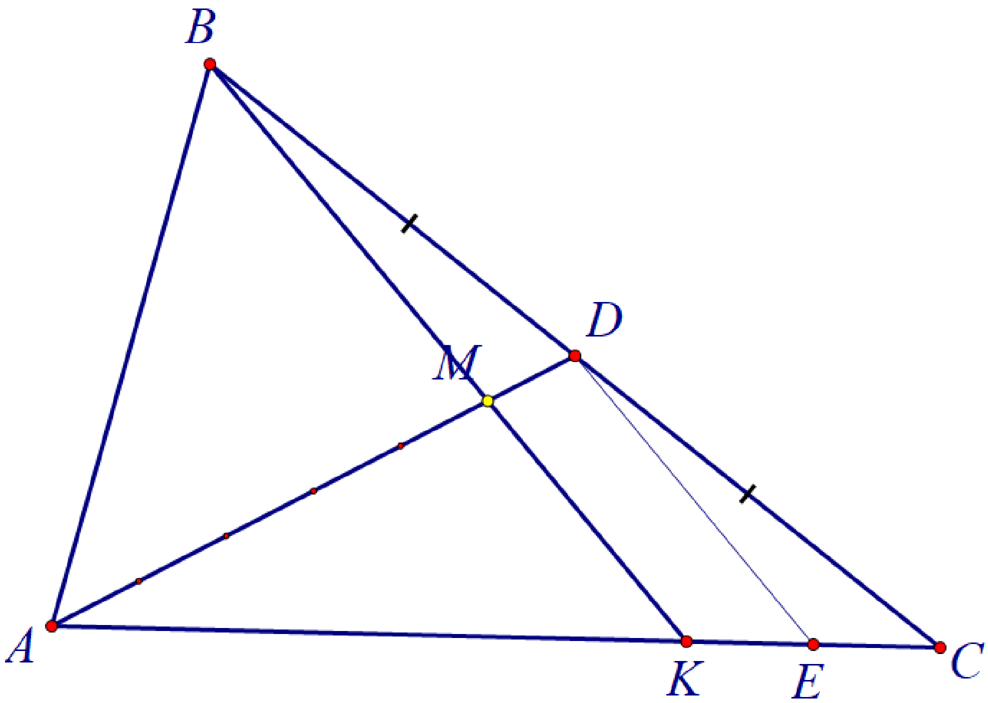


Рисунок 21 – Визуальная поддержка доказательства задачи 671

Далее остается посчитать отношение AK:KC и сопроводить это чертежем. Если выполнять данное задание в тетради, то для каждого случая придется строить свой чертеж, но благодоря возможностям среды Живая математика мы можем перемещать, подсвеченную желтым цветоом, точку M, что позволит сократить время выполнения задания и выделит время для рассмотрения большего числа задач.

Задача на доказательство с использованием признаков подобия треугольников. Рассмотрим задачу под номером 663.

Задача. Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD.

Доказательство.

1) Проведём через точку A прямую, параллельную прямой OD (на которой лежит отрезок BD). Пусть эта прямая пересекает прямую CD в точке C_1. Таким образом, по построению $AC_1 \parallel BD$.

2) Теперь необходимо объяснить, почему $AC_1 = BD$. Рассмотрим четырехугольник AC_1DB. В этом четырехугольнике сторона $AC_1 \parallel BD$ по построению и сторона $AB \parallel C_1D$, так как по условию $AB \parallel CD$, а точка C_1 лежит

на прямой CD. Четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, является параллелограммом. Следовательно, AC_1DB-параллелограмм. В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $AC_1 = BD$.

3) Рассмотрим треугольники OAB и ACC_1. $\angle OAB = \angle ACC_1$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и CD и секущей OC.

$\angle OBA = \angle ODC$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и CD и секущей OD.

$\angle AC_1C = \angle ODC$ как соответственные углы при параллельных прямых AC_1 и OD и секущей CD.

Из двух последних равенств следует, что $\angle OBA = \angle ACC_1$. Таким образом, треугольники OAB и ACC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников (по двум углам).

4) Из подобия треугольников следует пропорциональность их соответственных сторон: $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1} = \frac{AB}{CC_1}$

5) Так как $AC_1 = BD$, то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

В учебнике Л.С. Атанасяна [2] визуальная поддержка при выполнение данного задания осуществляется с помощью статичного рисунка, что может натолкнуть обучающихся на мысль о том, что доказательство верно только при конкретных значениях углов. Но благодаря возможностям среды Живая математика мы можем показать динамичный чертеж и показать обучающимся, что отрезки будут пропорциональны при любых значениях углов.

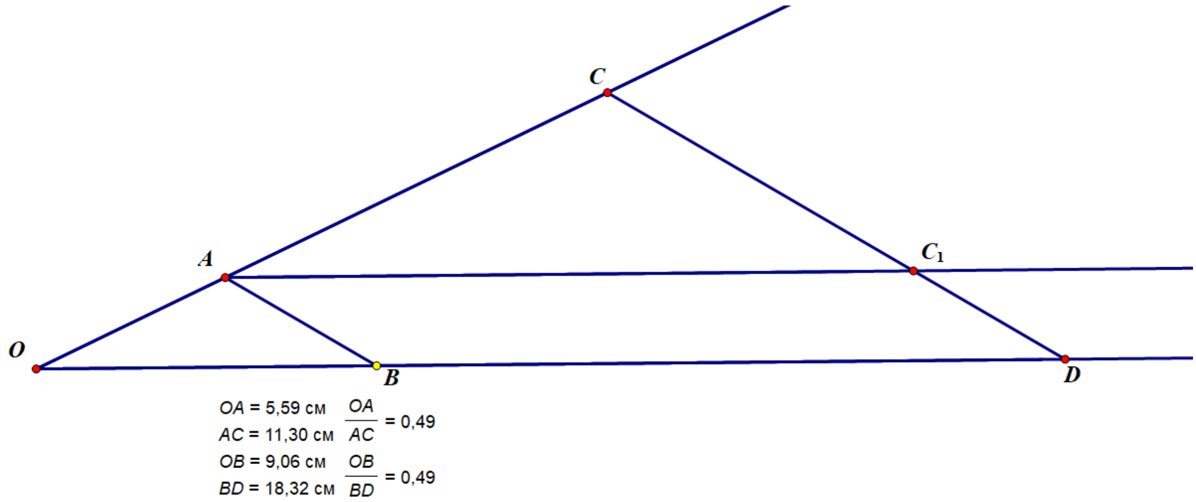


Рисунок 22 – Фрагмент чертежа к задаче 663

Опишем поэтапно процесс построения этого чертежа:

1. Изобразим на рабочем поле произвольную точку O (вторая кнопка на вертикальной панели инструментов (ВПИ)). Построим два произвольных луча (луч можно выбрать нажав четвертую кнопку на ВПИ) с началом в точке O и образующих острый угол (верхний луч назовем OL, нижний OM).

2. На луче OL изобразим произвольную точку A. Через точку A проведем прмяую, пересеккающую луч OM, в месте пересечения поставим точку и назовем ее B. Выбрав отрезок на ВПИ обозначим AB как отрезок.

3. Построим окружность с центром в точке B (третья кнопка на ВПИ) и произвольным радиусом. В местах пересечения прмяой AB и окружности поставим точки P и Q. Построим оккружности с центрами в точках P и Q с радиусами PB и QB соответственно. В местах пересечения окружности с центром в точке B с окружностями с центрами в точках P и Q поставим точки. Проведем пряму через полученные точки. В местах пересечения данной прямой и лучей оброазующих угол поставим точкки и назовем их C (для луча OL) и D (для луча OM).Полученная прямая будет параллельна прямой AB. Скроем окружности.

4. Построим окружность в произвольной точке N на отрезке BD с радиусом NA. В местах пересечения окружности с лучом OM построим поставим точки W и V. Построим окружность с центром в точке W и радиусом WA. Перенесем полученную окружность вправо на диаметр первой

построенной окружности с центроом в точке N (диаметр можно узнать выбедлив курсором окружность и на горизонтальной панели команд (ГПК) выбрав меню «Измерения: радиус», после чего домножив радиус на 2) выбрав на ГПК меню «Преобразования: перенести». Через точки пересечения первой окружности и построенных ранее окружностей построим луч с началом в точке А. Обозначим точку пересечения луча и прямой CD, буквой C_1. Обозначим отрезок AC_1 с помощью отрезка (четвертая кнопка на ВПИ).

5. Скроем все используемые для построения окружности и прямые, так как мы обозначили все через отрезки, то проподут только ли шние части. Последнее что необходимо сделать это обозначить точку B желтым цветом, как точку которую можно перемещать.

Последней рассмотренной задачей в этом параграфе станет задача от Мишустина М.В., но мы немного изменим условие задачи: Дана окружность, диаметр d и точка A на окружности. С помощью одной линейки построить прямую, проходящую через A и перпендикулярную d.

Решение.

На чистом листе в среде Живая математика построим окружность (третья кнопка на ВПИ) произвольного радиуса с центром в произвольной точке. Через центр проведем диаметр..

Поставим на окружности току D. Проведем прямую через точки B и A, а также прямую через чтоки C и D. Поставим точку в месте пересечения этих прямых и назовем ее E. Соединим прямыми точки C и A, а также точки B и D. В месте пересечения этих прямых поставим точку и назавем ее F,Углы BAC и BDC прямые, так как они вписанные и опираются на диаметр. Проведем прямую через точки E и F, в местах пересечения данной прямой с окружностью поставим точки и назовем их K и L.

Рассмотрим треугольник BEC. Прямые CA, BD – высоты этого треугольника, следовательно и прямая EF будет высотой треугольника BEC. Следовательно прямая $EF \perp d$.

Продлим деаметр за пределы откружности с левой стороны. Проведем прямую через точки K и A до пересечения с продолжением диаметра, полученную точку назовем M. Соединим точку M и точку L прямой. В месте пересечения прямой ML с окужностью поставим точку и назавем ее N. Соединим точки A и N прямой.

Рассмотрим треугольники AMN и KML. $\frac{MA}{MK} = \frac{MN}{ML}$, угол M – общий, следовательно, треугольники AMN и KML подобны (по второму признаку подобия треугольников). Из этого следует, что AN‖KL. Следовательно AN⊥d .

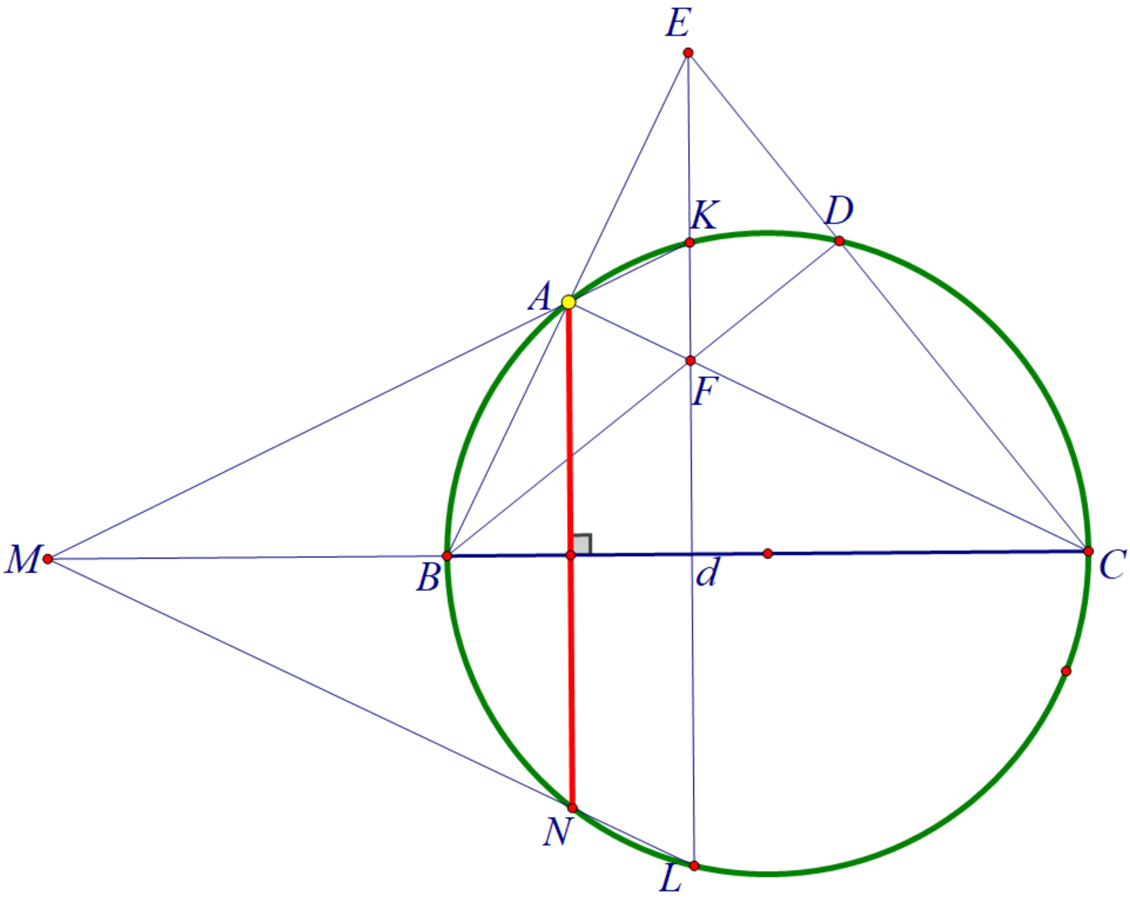


Рисунок 23 – чертеж к задачу Мишустина М.В.

2.3. Апробация и методические рекомендации применения динамических чертежей при изучении темы «Подобные треугольники»

Проверка проводилась в МБОУ Зыковская СОШ в 8 «В» и 8 «А» классах. Обучение геометрии ведется по учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия 7-9» [2]. Составы классов неоднородны: есть как сильные обучающиеся, которые достигли базового уровня и даже немного повышенного уровня, большая часть классов со средним уровнем знаний, есть ученики с низким уровнем базовых знаний. В 8 «А» классе обучение было организовано с применением готовых динамических чертежей из математического конструктора построения выполнялись в тетради (при необходимости). В 8 «В» классе обучение было организовано с применением различных систем динамической математики, в них же выполнялись построения (чаще всего это была Живая математика). В обоих классах закрепление изученного материала проводилось с использованием готовых заданий из математического конструктора.

Как показал опыт проведения уроков с применением среды динамической математики, школьники с интересом работают с компьютерными моделями. Живая математика открывает перед ними большие познавательные возможности. Школьники с большим энтузиазмом становятся активными участниками урока.

Сложности возникли лишь при первом знакомстве учащихся с программой «Живая математика», но современное поколение быстро «схватывает» всё новое, особенно связанное с компьютерами. После освоения всех тонкостей элементарных построений, вопросов больше не возникало.

После уроков с применением среды Живая математика среди учащихся 8 «В» класса был отмечен повышенный интерес к предмету. Обучающиеся лучше запоминали информацию, добытую опытным путем, и в дальнейшем, применяли ее при изучении других тем курса геометрии.

В завершении изучения темы «Подобные треугольники» в обоих классах была проведена контрольная работа (приложение 2). По результатам контрольной работы была составлена столбчатая диаграмма (рисунок 23).

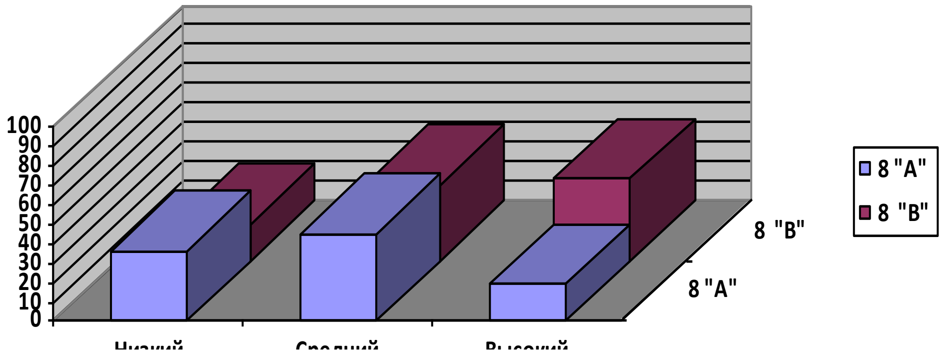


Рисунок 23 – Диаграмма, составленная по результатам контрольной работы.

Диаграмма наглядно показывает нам, что количество обучающихся (в процентном соотношении) показавших низкий уровень сформированности предметных знаний по теме «Подобные треугольники» в 8 «В» заметно ниже, чем в 8 «А» классе. Количество обучающихся, показавших средний уровень сформированности предметных знаний в 8 «В» классе чуть ниже, чем в 8 «А» классе. Но самым удивительным является то, что количество обучающихся показавших высокий уровень предметных знаний в 8 «В» классе заметно выше, чем в 8 «А». Подробное процентное отношение результатов контрольной работы приведено в таблице 9.

Таблица 9 – результаты контрольной работы

Класс	Низкий результат	Средний результат	Высокий результат
8 «А»	36%	45%	19%
8 «В»	19%	39%	42%

Таким образом, результаты контрольной работы показали, что применение систем динамической математики способствует существенному повышению качества усвоения учебного материала и развитию пространственно- логического мышления обучающихся. Интерактивная визуализация геометрических объектов позволяет перейти обучающимся от пассивного запоминания свойств фигур к активному исследовательскому поиску и самостоятельному открытию закономерностей. Следовательно, можно сделать вывод о том, что систематическое и методически грамотное применение систем динамической математики позволяет повысить уровень сформированности предметных знаний не только по теме «Подобные треугольники», но и по всему курсу геометрии.

Применение динамических чертежей при обучении курсу геометрии в основной школе будет максимально эффективным, если кроме общедидактических принципов обучения учителя будут учитывать и следующие частные дидактические принципы:

1. *Принцип синхронности использования динамических чертежей*: использование конструктивных, измерительных и вычислительных возможностей систем динамической математики должно быть синхронизировано по времени с курсом геометрии в школе. В соответствии с этим принципом использование динамических чертежей при изучении геометрии рекомендуется начинать не в старшей школе, и даже не в 9 классе, а гораздо раньше, например, в 5 или в 6 классе. Не будет поздно это сделать и в 7 классе, одновременно с началом изучения курса геометрии. Учащиеся на этом этапе обучения ещё не озабочены проблемами подготовки к ОГЭ и ЕГЭ, они с удовольствием и интересом выполняют простейшие геометрические построения виртуальными инструментами, решают задачи прикладного и исследовательского характера, готовятся к участию в турнирах и конкурсах.

2. *Принцип самостоятельности использования динамических чертежей*: применение динамических чертежей при обучении геометрии даст максимальный дидактический эффект, если конструктивные, измерительные, вычислительные и любые другие возможности систем динамической математики будут использоваться самими обучающимися максимально самостоятельно. Если обучающимся постоянно предлагать подготовленные заранее учителем математики или другими субъектами образовательной деятельности готовые модели динамических чертежей, то это не будет

способствовать формированию умений решать задачи без посторонней помощи. Учащиеся, которые умеют самостоятельно строить динамические чертежи, удовлетворяющие условию задачи, более успешны в их решении, поскольку на таких чертежах можно легко выполнять дополнительные построения, без особых трудностей удалять неудачные построения, проверять найденное решение с помощью измерений и вычислений.

3. *Принцип приоритета компьютерной анимации при использовании динамических чертежей*: применение компьютерной анимации при обучении геометрии заметно оживляет и разнообразит учебный процесс. На первых порах можно использовать так называемую ручную анимацию, которая реализуется с помощью простого перемещения мышкой геометрического объекта или его фрагмента, например, вершины многоугольника. Позднее обучающиеся знакомятся с кнопочной, параметрической и ползунковой анимацией, которые позволяют не только наблюдать за тем или иным геометрически объектом во всём его многообразии, но и проводить простейшие исследования в стиле экспериментальной математики.

4. *Принцип непрерывности использовании динамических чертежей*: применение компьютерной анимации при обучении геометрии даст максимально положительный педагогический эффект, если эти чертежи использовать не фрагментарно, и не эпизодически, а регулярно, желательно в большинстве разделов и тем курса геометрии. Естественно, делать это только тогда, когда динамические чертежи уместны, и без всякого сомнения способствуют повышению качества обучения. Идеально будет, если у учителя математики помимо курса геометрии появится возможность вести элективный курс или кружковые занятия по использованию динамических чертежей в дополнительных разделах курса математики.

Заключение

В ходе работы над выпускной квалификационной работой была рассмотрена тема «Подобные треугольники» в школьном курсе геометрии 8 класса и показаны возможности применения динамических чертежей для визуальной поддержки теоретического материала и задач, предлагаемых учебником Л.С. Атанасяна.

Системы динамической математики, такие как Живая математика и Математический конструктор продемонстрировали высокую эффективность при визуализации изучаемого материала. Их использование позволяет объединить несколько статичных чертежей в один, что сокращает время выполнения задания, давая возможность рассмотреть большее количество задач за один урок. А также повышает интерес к предмету.

Таким образом, поставленные в исследовании задачи выполнены: проведен анализ учебных пособий по геометрии для 8 классов на предмет особенности изложения темы «Подобные треугольники», охарактеризованы анимационные, конструктивные и исследовательские возможности систем Живая математика и Математический конструктор как средств обучения теме «Подобные треугольники» с использованием динамических чертежей, разработаны приемы и методы применения динамических чертежей при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе, проведена апробация разработанных приемов и методов применения динамических чертежей при изучении темы «Подобные треугольники» в 8 классе.

Библиографический список

1. *Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р.* Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе. Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2019.
2. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Математика. Геометрия 7 – 9 классы: учебник. М.: Просвещение, 2023. 416 с.: ил
3. Библиотека интерактивных материа [Электронный ресурс] // Официальный сайт «1С» : Библиотека «1С:Урок». — Режим доступа: URL: https://urok.1c.ru/library/
4. Всероссийский центр изучения общественного мнения [Электронный ресурс]. URL: https://wciom.ru/
5. Геометрия на подвижных чертежах / Сгибнев А. И.; под ред. А.Д. Блинкова. М.:МЦНМО , 2019. 184 с.
6. *Ларин С.В., Майер В.Р., Кочеткова Т.О., Карнаухова О.А.* Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2020. №1 (51). С. 6-14
7. *Ларин С.В., Сивухина Е.А., Казакова Е.В., Чилбак-оол С.В., Бурнакова М.В.* О создании мультимедийного дидактического материала по алгебре 7 класса. // Межвузовый сборник научных трудов «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе»; М: Изд-во АКФ «Политоп», 2017. С. 99-102.
8. *Майер В. Р., Апакина Т. В.* Компьютерная Анимация в среде Живая математика на уроках геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании : материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием; г. Красноярск, 18–19 ноября 2015 года г. Красноярск: Изд-во Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2015. С. 59-64.

9. *Манченкова Е.О.* Магистерская диссертация: Методика использования анимационных возможностей компьютерной среды Живая математика при обучении геометрии в 8 классах. г. Красноярск, 2017.
10. Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathedu.ru/catalogue/schoolbooks/geometry/
11. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2007. 376 с.: ил.
12. *Сумин Роман*. Школьники рассказали о «самом страшном» экзамене. Информационное агенство URA.RU [Электронный ресурс]. URL: https://ura.news/news/1052938840
13. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/
14. *Фунтиков Р.А.* Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Молодой ученый. 2018. № 33 (219). С. 8-11.
15. *Шабат Г. Б.* «Живая математика» и математический эксперимент // Вопросы образования. 2005. №3. С. 156-165.

Приложения

Приложение 1

Приложение 2

Итоговая контрольная работа по теме «Подобие треугольников», 8 класс базовый уровень

Вариант 1

1). Известно, что треугольники ABC и A1B1C1 подобны, причём стороне AB соответствует сторона- A1B1, а стороне BC-сторона B1C1.Найдите неизвестные стороны этих треугольников. (См.рис 1)

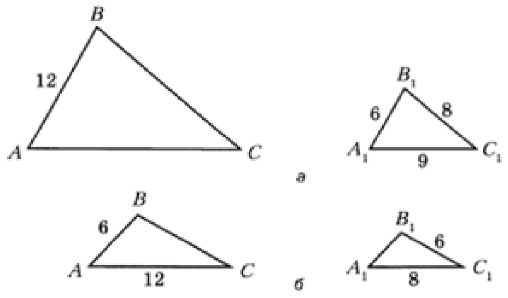


Рис 1

2). Стороны треугольника равны 5 см, 3 см и 7 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 105 см.

3). У подобных треугольников сходственные стороны равны 7 см и 35 см. Площадь первого треугольника равна 27 см². Найдите площадь второго треугольника.

4). Найдите две стороны треугольника, если их сумма равна 91 см, а биссектриса, проведённая к третьей стороне, делит эту сторону в отношении 5:8.

5). Докажите, что треугольник ABC, подобен треугольнику A1B1C1(См. рис 2)

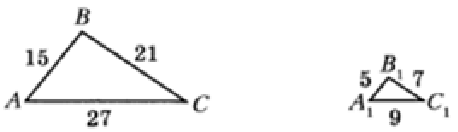


Рис.2

6). Стороны параллелограмма равны 15 см и 30 см, а расстояние между меньшими сторонами-20 см. Найдите расстояние между большими сторонами параллелограмма.

7). Докажите, что треугольники ABC и треугольник A1B1C1 подобны. (См.рис 3).

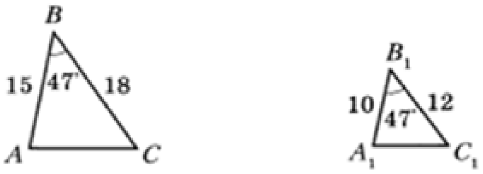


Рис.3