МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Яковлев Вадим Денисович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Обучение учащихся 8 класса умению решать задачи по теме «Окружность» с использованием динамических чертежей

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
22.05.2026
(дата, подпись)

Научный руководитель
доктор пед. наук, профессор В.Р. Майер
(дата, подпись)

Дата защиты
23.06.2026

Обучающийся
В.Д. Яковлев
(дата, подпись)

Оценка________________
прописью

Красноярск 2026

Содержание

Введение

Актуальность темы. Задачи, при решении которых используются свойства и признаки окружностей, традиционно занимают важное место в курсе геометрии 8 класса. Они используются не только как средство изучения теоретического материала, но и как основа для развития таких когнитивных навыков обучающихся, как пространственное мышление, логическое мышление и исследовательские навыки. Однако на практике можно увидеть, что этот раздел вызывают определённые трудности у обучающихся. Сложности вызывают следующие факторы: необходимость мысленно управлять динамическими образами, представление различных комбинаций взаимного расположения элементов окружности, рассмотрение различных частных случаев, которые невозможно визуально обнаружить на статичном чертеже. Преодолеть целый ряд возникающих затруднений можно при условии максимального усиления общедидактического принципа наглядности, сместив приоритет со статического чертежа, на чертёж динамический. Геометрические чертежи с элементами анимации позволяют за короткий промежуток времени визуализировать не только большое количество частных случаев, но и провести небольшое исследование в стиле экспериментальной математики.

В современной методике обучения математике часто возникает противоречие между возросшими техническими возможностями образовательной среды и нехваткой методических приемов их использования при изучении конкретных тем. С одной стороны, геометрические чертежи с элементами анимации позволяют за короткий промежуток времени визуализировать как большое количество частных случаев, так и провести небольшое исследование в стиле экспериментальной математики. С другой стороны, большинство учителей либо не используют эти возможности, либо редко применяют их, не выстраивая системную работу по формированию умений решать задачи.

В эпоху цифровизации общества такой подход при обучении геометрии вполне реализуем. Появились компьютерные инструменты и среды, позволяющие создавать и применять в обучении динамические чертежи. Наиболее популярны среди подобных программ так называемые системы динамической математики или интерактивные цифровые образовательные ресурсы (ИЦОР), наиболее популярные из них в России это Живая математика, Математический конструктор, GeoGebra. Несмотря на то, что некоторые учителя математики эффективно используют на уроках эти системы, опыт применения динамических чертежей в практике большинства учителей при обучении теме «Окружность» в 8 классе, представлен пока недостаточно.

Цель исследования: теоретически обосновать, разработать и экспериментально апробировать применение динамических чертежей, выполненных с использованием систем динамической математики, при обучении обучающихся 8 класса умению решать задачи по теме «Окружность».

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в 8 классе, ориентированный на использование в обучении геометрии интерактивных образовательных ресурсов.

Предмет исследования: приёмы и методы использования динамических чертежей для обучения учащихся 8 класса умению решать задачи по теме «Окружность».

Задачи:

1. описать типологию задач по теме «Окружность» на основе анализа учебных пособий по геометрии для 8 класса;
2. выявить анимационные, конструктивные и исследовательские возможности интерактивных цифровых образовательных ресурсов Живая математика и Математический конструктор как средств обучения решению задач теме «Окружность» с использованием динамических чертежей;

3. разработать приёмы и методы применения динамических чертежей при обучении решению задач по теме «Окружность» в 8 классе.
4. провести апробацию разработанных приёмов и методов применения динамических чертежей при обучении решению задач по теме «Окружность» в 8 классе

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка. В первой главе рассматриваются дидактические основы использования цифровых технологий при обучении геометрии и анализируются конструктивные возможности сред «Живая математика» и «1С:Математический конструктор». Вторая глава посвящена практической реализации разработанных приемов и методов, а также описанию результатов их апробации на примере изучения разделов «Взаимное расположение окружности и прямой», «Углы, вписанные в окружность», «Вписанные и описанные окружности»

Глава 1. Дидактические и цифровые аспекты обучения учащихся 8 класса умению решать задачи по теме «Окружность»

1.1. Обзор основных типов задач по теме «Окружность» в 8 классе, их представленность в школьном учебнике по геометрии.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования, одной из ключевых задач обучения геометрии является формирование у обучающихся умения решать как типовые задачи, так и задачи, требующие применения знаний в нестандартной ситуации [24, 27]. Тема «Окружность» в курсе геометрии 8 класса занимает особое место, являясь связующим звеном между планиметрией и начальными сведениями о кривых линиях. Анализ содержания учебника Атанасяна Л.С. и коллектива авторов «Геометрия. 7-9 классы», который является основным в большинстве общеобразовательных организаций, позволяет выявить структуру, типологию и дидактические особенности задач, предлагаемых для изучения данной темы [3]. Как отмечают исследователи в области цифровой дидактики, в том числе Селевко Г.К., современные образовательные технологии требуют пересмотра роли наглядности, что особенно актуально для геометрии [25].

В рассматриваемом учебнике тема «Окружность» представлена в Главе IX (с. 189-213). Структура главы включает в себя три параграфа, каждый из которых, в свою очередь, разбит на пункты.

В первом параграфе рассматриваются такие темы, как «Взаимное расположение окружности и прямой», «Взаимное расположение двух окружностей» и «Общие касательные к двум окружностям». Задачи, представленные в этом параграфе можно разделить на несколько типов. Рассмотрим их подробнее:

1) Задачи на прямое применение условий взаимного расположения объектов, фигурирующих в условии задачи. Эти задачи направлены на отработку теоретических знаний. Примером такой задачи случит задача №740: «Пусть d – расстояние от центра окружности радиуса r

до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) r = 16 см, d = 12 см; б) r = 5 см, d = 4,2 см; в) r = 7,2 дм, d = 3,7 дм; г) r = 8 см, d = 1,2 дм; д) r = 5 см, d = 50 мм?». Задачи подобного типа необходимы для формирования первичных навыков анализа, но в процессе решения на бумаге или на доске получается лишь статичный чертеж, не позволяющий обучающемуся увидеть плавный переход от одного случая к другому.

2) Задачи на построение. При выполнении этих задач обучающимся необходимо выполнить построение с помощью циркуля и линейки. Так в задаче №739 предлагается построить две окружности с центрами в точках A и B на заданной прямой, чтобы они удовлетворяли одному из указанных условий: а) не имели общих точек и одна лежала внутри другой; б) не имели общих точек и лежали вне друг друга; в) пересекались; г) касались внешним образом; д) касались внутренним образом. Результатом выполнения такого задания станут несколько статичных чертежей для каждого конкретного случая. Из-за этого возникает необходимость в динамической визуализации этих графиков, так как все эти построения можно выполнить на одном графике в соответствующей динамической среде [8].

3) Задачи на доказательство. Данные задачи предлагают обучающимся доказывать различные геометрические факты. Например, задача №743: «Радиус OM окружности с центром в точке O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведенная через точку M, параллельна хорде AB.». Данный тип задач важнен для развития логического мышления, но их геометрическая конфигурация статична. Обучающийся видит только один конкретный случай, что может не дать ему полного понимания неизменности доказываемого свойства.

4) Задачи на вычисление длин и углов, которые также основываются на свойствах касательных (№744-746). Например, по известному радиусу и расстоянию от центра до точки найти длину отрезка касательной. Визуально эти задачи однотипны.

Весь спектр задач первого параграфа оперирует статичными образами. Теоретический материал о трех случаях взаимного расположения прямой и окружности или о пяти случаях расположения двух окружностей дается на отдельных, не связанных между собой чертежах. Обучающийся не может увидеть плавный переход от пересечения к касанию и затем к отсутствию общих точек, что является ключевым для глубокого понимания зависимостей между геометрическими величинами.

Во втором параграфе рассматриваются следующие темы: «Градусная мера дуги окружности», «Теорема о вписанном угле» и «Углы, образованные хордами, касательными». Рассмотрим задачи, представленные в этом параграфе:

1) Задачи на вычисление градусной меры дуги и вписанного угла. В задачах №766-769 требуется по известной дуге найти вписанный угол, и наоборот. Например, задача №766: «Найдите вписанный угол *ABC*, если дуга *AC*, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.». Обучающийся работает с абстрактными числами, не видя, как изменение положения точки на окружности влияет на величину дуги, а следовательно, и на угол. Динамический чертеж, где можно перемещать вершину вписанного угла по окружности и наблюдать за неизменностью его величины при фиксированной дуге, мог бы качественно изменить понимание теоремы.
2) Задачи на нахождение углов, образованных хордами, касательными и секущими. В теоретической части учебника даются формулы для вычисления таких углов. Например, в задаче №777: «Хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *E*. Найдите $\angle BEC$, если

$\smile AD=54°$, $\smile BC=70°$». Для решения необходимо применить теорему об угле между пересекающимися хордами. Статичный чертеж, продемонстрированный в учебнике, фиксирует одно расположение пересекающихся хорд. Обучающийся должен усвоить, что величина угла зависит только от градусных мер двух дуг, заключенных между его сторонами, и не зависит от того, где именно пересеклись хорды. Без возможности перемещать точку пересечения и видеть неизменность результата это понимание формируется сложнее.

3) Задачи на доказательство. Например, задача №778: «Отрезок AC – диаметр окружности, AB – хорда, MA – касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$». Это классическая задача, иллюстрирующая свойство угла между касательной и хордой. Статичный чертеж, сделанный от руки на доске или в тетради, будет изображать лишь один частный случай, в то время как свойство остается верным для любого положения точки B на окружности.

Задачи второго параграфа, несмотря на их важность для формирования понятийного аппарата, также опираются на статичную визуализацию. Ключевые зависимости между величинами углов и дуг даны в теоремах, но их наглядное подтверждение через интерактивный эксперимент в учебнике отсутствует.

В третьем параграфе рассматриваются окружности, вписанные и описанные около четырехугольников. Рассмотрим некоторые типы задач:

1) Задачи, связанные с четырехугольниками, описанными около окружности. В теоретическом материале вводится свойство: в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. Задачи №787 и №788 напрямую опираются на это свойство. В задаче №787: «Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника» – требуется применить формулу площади описанного многоугольника

$S = pr$, где p – полупериметр. В задаче №788: «Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь – 12 см². Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник» – задача, обратная по отношению к №787. Статичные чертежи иллюстрируют лишь конкретные примеры, но не показывают, как меняется вписанная окружность при изменении формы четырёхугольника, сохраняющего свойство описанности.

2) Задачи, связанные с четырехугольниками, вписанными в окружность. В теоретическом материале вводится свойство: в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°. В задачах №791 и №792 используется доказательство, опирающееся на это свойство. Но как и в предыдущих задачах, визуализацией задачи является статичное изображение, что не позволяет рассмотреть все возможные варианты построений.

В конце главы представлен блок «Дополнительные задачи», который содержит задачи повышенной сложности. В них рассматриваются более сложные конфигурации, такие как общие касательные к двум окружностям, пересекающиеся окружности, а также задачи на доказательство, требующие высокого уровня абстрактного мышления. Например, задача №801: «Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая m, пересекающая эти окружности в точках C и D. Докажите, что величина угла CBD не зависит от выбора прямой m». Это типичная задача на инвариантность, для осознания которой обучающемуся необходимо увидеть, что при вращении прямой m вокруг точки A треугольник CBD, хотя и меняет свою форму, сохраняет угол при вершине B. Статический чертеж может изобразить только одно положение прямой m, что делает понимание инвариантности гораздо более трудным.

Проведенный анализ показывает, что система задач по рассматриваемой теме является структурированной и охватывает все ключевые аспекты темы. В ней представлены задачи на вычисление, на доказательство, на построение, а также задачи, требующие применения комбинации изученных теорем. Однако, несмотря на все достоинства, дидактический аппарат учебника опирается исключительно на статичные чертежи. Каждая задача и каждый теоретический вывод иллюстрируются одним или несколькими фиксированными рисунками. Такой подход имеет свои ограничения, которые особенно заметны при изучении геометрических конфигураций, обладающих динамическими свойствами

1.2. Конструктивные возможности среды Живая математика по разработке динамических чертежей для решения задач по теме «Окружность».

Эффективность использования информационных технологий в процессе обучения геометрии, особенно при изучении раздела «Окружность», напрямую зависит от инструментария, который имеется в распоряжении учителя и обучающегося. Традиционный статичный чертеж, как было отмечено выше, не позволяет в полной мере реализовать принцип наглядности при рассмотрении динамических конфигураций. Для преодоления этого недостатка современная методика преподавания математики все чаще обращается к системам динамической математики [10, 23]. Как отмечают Матвеев С.Н. и Нуждина О.Е. [23], сравнительный анализ таких систем позволяет выделить их сильные стороны для использования в образовательном процессе. Одной из наиболее доступных и методически проработанных среди них является программа «Живая математика», которая «наиболее часто применяется для иллюстрации именно геометрических элементов» [26].

Анализ научно-методической литературы и практического опыта, представленного в работах Сенчилова В.В., Майера В.Р. и их соавторов [18, 19, 20, 21], а также Шабата Г.Б., позволяет выделить ключевые конструктивные возможности среды «Живая математика», которые делают её незаменимым инструментом при разработке динамических чертежей на уроках геометрии. Майер В.Р. и Семина Е.А. [21] подробно описывают методику использования информационных технологий в обучении геометрии будущих учителей, подчеркивая важность владения такими средами.

Прежде всего, среда «Живая математика» позиционируется не просто как инструмент для создания иллюстраций, а как полноценная «компьютерная система интерактивного моделирования, исследования и анализа широкого круга задач» [26]. Это принципиальное отличие от статичных презентаций в MS PowerPoint, создание которых, как справедливо замечает Сенчилов, требует от учителя не только высокого уровня владения программой, но и умения самостоятельно следить за соблюдением всех технических требований к чертежу и его соответствием условию задачи [26]. В отличие от этого, «Живая математика» изначально ориентирована на создание именно динамических, легко варьируемых и редактируемых геометрических построений. Данный подход полностью соответствует современным образовательным технологиям, описанным Селевко Г.К. [25], которые направлены на активизацию познавательной деятельности обучающихся.

Конструктивные возможности среды для разработки чертежей по теме «Окружность» основываются на наличии полного набора стандартных геометрических инструментов, аналогичных реальным циркулю и линейке, но с расширенной функциональностью. Учитель или обучающийся может с высокой точностью построить окружность и все связанные с ней элементы. Ключевым отличием является то, что все объекты после построения остаются подвижными. Как отмечает Шабат Г.Б. и др. [13], интерфейс программы интуитивно понятен и позволяет быстро освоить основные приемы работы.

Опираясь на опыт, описанный в работах, посвященных развитию пространственного воображения [20], можно утверждать, что среда позволяет не просто создать статичный чертеж, но и заложить в него математические зависимости. Например, при построении вписанного угла, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её, среда автоматически сохраняет связь между положением вершины, градусной мерой дуги, на которую угол опирается, и величиной самого угла. Перемещая вершину мышью, пользователь наблюдает, что его величина остается неизменной, что является прямой иллюстрацией теоремы о вписанном угле. Таким образом, перемещая элементы чертежа, обучающийся может убедиться в истинности утверждений [26]. Иванов С.Г. и Рыжик В.И.

[14] подчеркивают, что такая среда идеально подходит для организации исследовательских и проектных заданий по планиметрии.

Одним из наиболее ценных качеств «Живой математики» для изучения темы «Окружность» является возможность создавать не просто подвижные, но и анимированные чертежи. В исследованиях, посвященных компьютерному геометрическому конструированию, под компьютерной анимацией понимается имитация реального или идеального процесса, достигаемая за счет изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений, создающих эффект движения [1, 20]. В контексте нашей темы это позволяет моделировать динамику геометрических процессов, которые в обычных условиях статичны.

Кроме того, среда позволяет создавать сложные анимационные сценарии. В работе Майера В.Р. и соавторов описывается создание презентации путешествия кубика по лабиринту [20]. Этот пример демонстрирует принципиальную возможность среды по созданию управляемой анимации. Применительно к теме «Окружность», можно создать анимированную модель, показывающую, как меняется градусная мера вписанного угла при движении его вершины по дуге, или как «скользит» касательная вдоль окружности, сохраняя свойство перпендикулярности радиусу. В работах Болдова С.С, и Солощенко М.Ю. также можно увидеть эффективные методы использования Живой математики.

Развитие пространственного воображения и исследовательских навыков невозможно без получения количественных характеристик изучаемого объекта. «Живая математика» предоставляет встроенные инструменты для измерения геометрических величин. Одна из ключевых особенностей программы заключается в том, что элементы чертежа можно легко измерить с помощью компьютерных средств, а полученные численные результаты допускают дальнейшую компьютерную обработку [26].

В контексте задач по теме «Окружность» это открывает широкие возможности для организации исследовательской деятельности обучающихся. Например:

- Обучающийся может измерить длины отрезков касательных от заданной точки до точек касания, а затем, перемещая любую из точек касания, проследить, как меняется эта длина. Это подводит его к пониманию свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки.
- При изучении теоремы о вписанном угле обучающийся может самостоятельно измерить величину вписанного угла и соответствующего ему центрального угла, убедившись, что первый в два раза меньше второго. Перемещая вершину вписанного угла по окружности, он увидит, что пока дуга остается неизменной, результат измерения также остается постоянным.

Хотя тема «Окружность» в 8 классе относится к планиметрии, элементы пространственного воображения, развиваемые с помощью «Живой математики», имеют пропедевтическое значение для последующего изучения стереометрии. Как отмечается в статье, при использовании информационных технологий открываются огромные возможности изменения и совершенствования методики, которая способствует улучшению формирования пространственного воображения обучающихся. [17, 26].

Среда позволяет создавать модели, выходящие за рамки плоского чертежа. В работе В.Р. Майера описывается конструирование куба, трехмерного лабиринта и даже «сноуборда из геометрических объектов» [20]. Хотя эти примеры напрямую не связаны с окружностью, они демонстрируют важное для нас свойство: возможность вращать готовую конструкцию и рассматривать её с разных сторон. Для темы «Окружность» это может быть полезно при решении комбинированных задач, где окружность вписана в многоугольник, и важно понять взаимное расположение элементов, которое на статичном чертеже может быть менее очевидным. Обучающийся получает возможность по-новому ставить и решать задачи на построение, а правильность решения можно проверить, просто взглянув на конструкцию с другой стороны [26, 28].

Особого внимания заслуживает тот факт, что среда «Живая математика» позволяет не только создавать демонстрационные модели, но и организовывать полноценную исследовательскую деятельность обучающихся. Как отмечается в совместной работе Майера В.Р. и его соавторов, «разработанные динамические чертежи для большинства заданий прошли успешную апробацию на кружке "Экспериментальная математика" для обучающихся 7–9 классов» [20]. При таком подходе формируется не только пространственное воображение, но и абстрактное мышление, что крайне полезно как при изучении стереометрии, так и при решении задач прикладной направленности [2].

В контексте нашей темы это означает, что обучающиеся могут самостоятельно конструировать динамические модели для решения поставленных задач. Такой подход соответствует современным требованиям к организации учебного процесса, поскольку партнерство между обучающимися и учителем, совместное решение проблемно-познавательных задач является основным путем успешного познания математики [7, 26].

Следует отметить, что в среде «Живая математика» реализована возможность создания кнопок-подсказок, которые активируют анимацию или демонстрируют правильное решение. Так например, в одном из описанных в статье заданий после нажатия на соответствующие кнопки-подсказки на экране появляется ось симметрии, которая, перемещаясь по плоскости, последовательно накладывается на заданные прямые [20]. Применительно к теме «Окружность» такие подсказки могут использоваться для демонстрации правильного построения или для проверки результатов самостоятельной работы обучающихся.

Обобщая отмеченное выше, можно выделить следующие принципиальные отличия динамических чертежей, созданных в среде

«Живая математика», от традиционных статических чертежей, используемых в учебниках и на классной доске.

Первое отличие заключается в возможности изменения параметров модели в реальном времени. Компьютерную модель чертежа, в отличие от ее бумажного варианта, можно «тиражировать, деформировать, перемещать отдельные элементы и видоизменять всю конструкцию» [26]. Это позволяет обучающемуся рассмотреть не один частный случай, а практически все возможные конфигурации, удовлетворяющие условию задачи.

Второе отличие связано с возможностью получения количественных характеристик непосредственно с чертежа. Элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку [26]. Это позволяет поиск решения задачи сопроводить элементами исследования, которые могут «подсказать» учащемуся ключевую идею ее решения [9].

С точки зрения технической реализации, среда «Живая математика» предоставляет пользователю интуитивно понятный интерфейс, который, как отмечается в статье, является достаточно простым в освоении [26]. Основные инструменты сгруппированы на боковой панели и включают в себя: инструменты для построения точек; инструменты для перемещения и вращения объектов на чертеже; инструменты для построения окружностей; инструменты для построения прямых, отрезков и лучей; инструменты для построения многоугольников; инструмент, позволяющий по нажатию дать название для любого объекта на чертеже.

С точки зрения практической реализации, «Живая математика» обладает высоким дидактическим потенциалом. Простота освоения программы позволяет использовать её не только учителю при подготовке к уроку, но и непосредственно обучающимся на занятии. Среда дает возможность создавать красочные, легко изменяемые и корректируемые чертежи, что существенно повышает мотивацию обучающихся и их познавательный интерес [26].

Таким образом, среда «Живая математика» предоставляет все необходимые инструменты для создания динамических чертежей при обучении теме «Окружность». В отличие от статичных изображений на бумаге или доске, программа позволяет сделать геометрические конфигурации подвижными: обучающийся может изменять положение прямой относительно окружности, перемещать вершину вписанного угла или точку, из которой проведены касательные, и сразу видеть, как при этом меняются свойства фигуры. Встроенные измерительные инструменты дают возможность получать численные значения длин и углов, что превращает решение задач в небольшое исследование. Кроме того, среда проста в освоении и может использоваться как учителем для демонстрации, так и обучающимися для самостоятельной работы. Все это позволяет говорить о том, что «Живая математика» является эффективным средством для формирования умения решать геометрические задачи, а разработанные в ней динамические чертежи делают процесс обучения более наглядным и осознанным.

1.3. Дидактические возможности готовых моделей-чертежей по теме «Окружность» в библиотеке «1С:Урок», выполненных в среде 1С:Математический конструктор.

Вместе со средой «Живая математика» в современной методике преподавания геометрии всё больше начинает использоваться платформа «1С:Урок». Эта платформа представляет собой облачный сервис, которая объединяет электронный образовательные ресурсы по разным предметам, включая математику [11, 12]. Динамические модели, созданные на этой платформе, обладают схожими с «Живой математикой» свойствами: они подвижны, позволяют изменять параметры геометрических фигур в реальном времени, проводить измерения длин и углов, а также анимировать отдельные элементы [29]. В отличие от «Живой математики», которая в основном ориентирована на создание динамических чертежей непосредственно учителем или обучающимся, платформа «1С:Урок» предлагает учителю библиотеку готовых моделей-чертежей, которые можно использовать на различных этапах урока без дополнительной технической подготовки [4]. Это значительно сокращает время на подготовку к занятию и позволяет учителю сосредоточиться непосредственно на организации образовательной деятельности обучающихся.

Для решения задач по теме «Окружность» на платформе «1С:Урок» можно выделить несколько типов готовых моделей-чертежей, которые различаются по своему дидактическому назначению.

Первый тип – демонстрационные модели. Они предназначены для использования учителем при объяснении нового материала. Такие модели позволяют наглядно показать ключевые свойства геометрических фигур. Например, модель для демонстрации различных углов, образованных хордами, касательными и секущими, где можно менять величины дуг, положение хорд, касательных и секущих, для того, чтобы увидеть изменения градусной меры угла в различных конфигурациях. Модель представлена на рисунках 1.1. – 1.5.

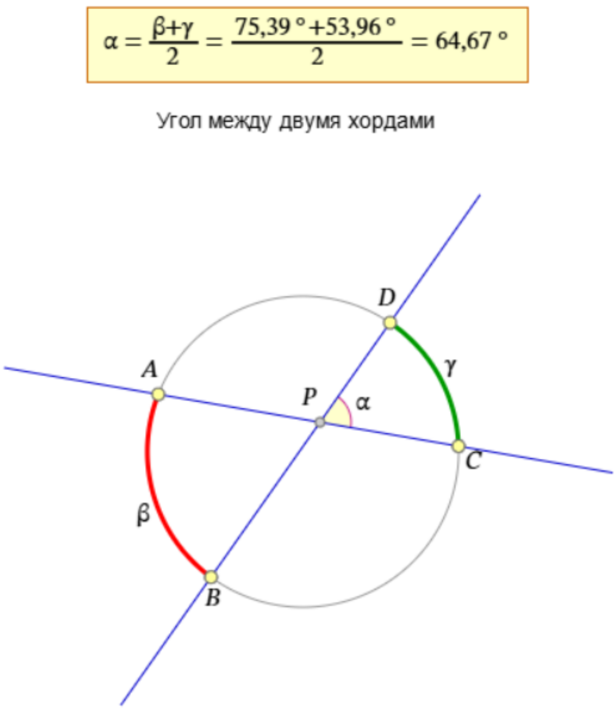


Рисунок 1.1. – Угол между двумя хордами

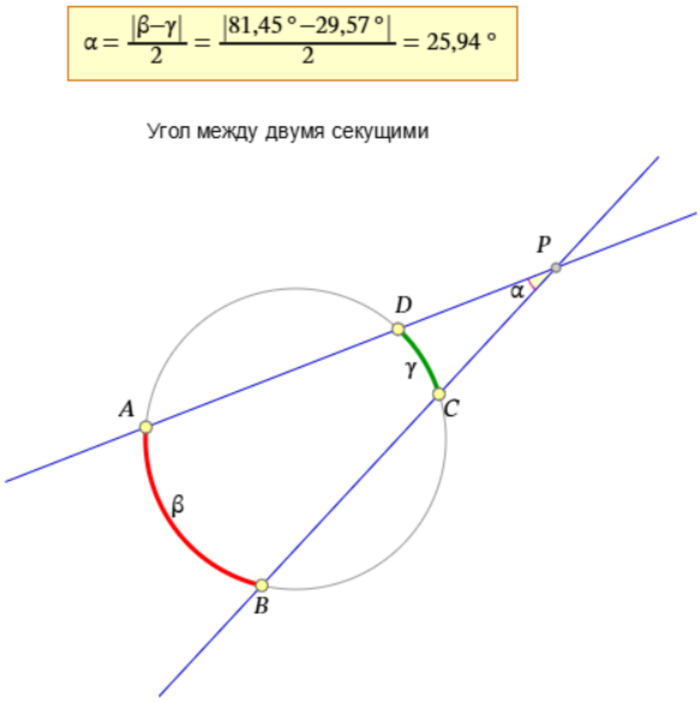


Рисунок 1.2. – Угол между двумя секущими

$$\alpha = \frac{|\beta - \gamma|}{2} = \frac{|228{,}18^\circ - 131{,}82^\circ|}{2} = 48{,}18^\circ$$

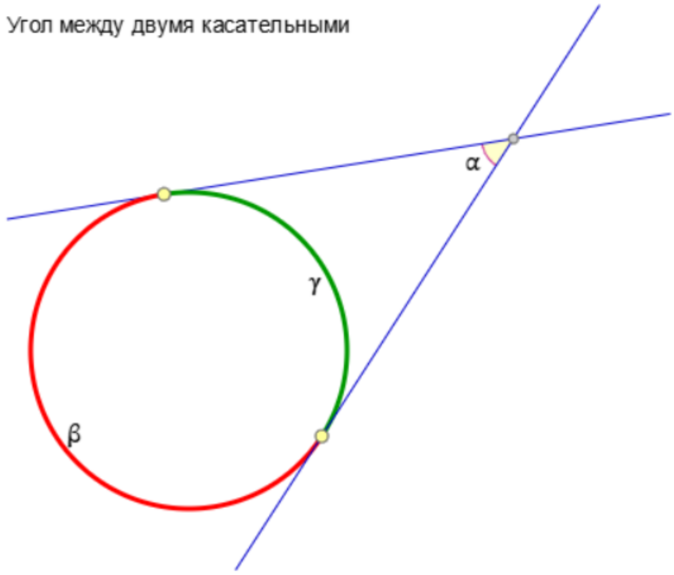


Рисунок 1.3. – Угол между двумя касательными

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{119{,}77^\circ}{2} = 59{,}88^\circ$$

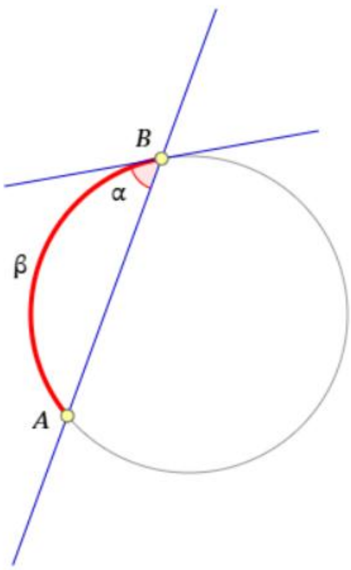


Рисунок 1.4. – Угол между касательной и хордой

$$\alpha = \frac{|\beta - \gamma|}{2} = \frac{|119{,}77\,° - 59{,}98\,°|}{2} = 29{,}89\,°$$

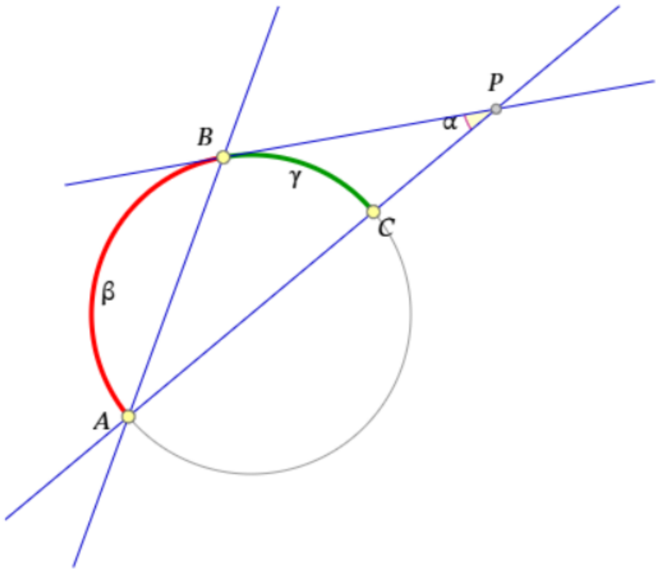


Рисунок 1.5. – Угол между касательной и секущей

Второй тип – модели для контроля и самоконтроля. Они могут содержать скрытые элементы, проверочные вопросы или кнопки, показывающие правильный ответ после того, как ученик выполнит задание самостоятельно. Например, модель для проверки умения строить хорду так, чтобы центральный угол, опирающийся на эту хорду, был равен 60°.

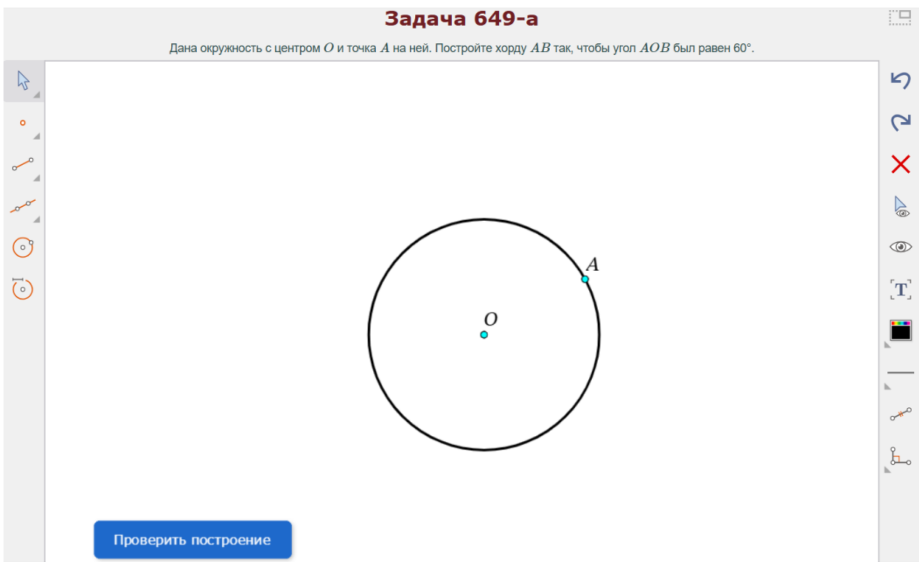


Рисунок 2. – Пример интерактивного задания из библиотеки «1С:Урок»

Рассмотрим применение готовых моделей-чертежей, представленных на платформе «1С:Урок», на различных этапах урока геометрии:

- На этапе актуализации знаний модель может быть использована для быстрой проверки домашнего задания или повторения изученного ранее материала. Учитель выводит модель на экран с помощью мультимедийного проектора и задает классу вопросы, требующие анализа изображенной конфигурации.
- На этапе изучения нового материала модели служат наглядной опорой для формулировки теоремы или свойства. Вместо того чтобы просто объявить обучающимся, что «сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°», учитель демонстрирует модель, на которой ученики сами видят, что при перемещении одной из вершин вписанного четырехугольника по окружности, сумма противоположных углов остаётся равной 180°.
- На этапе закрепления и решения задач модели позволяют организовать как фронтальную работу, так и индивидуальную работу обучающихся за компьютерами. Обучающиеся получают задание: «Дана окружность с центром О и точка А на ней. Постройте хорду АВ так, чтобы угол АОВ был равен 120°».

Использование готовых моделей-чертежей на платформе «1С:Урок» открывает перед учителем целый ряд дидактических возможностей. Прежде всего, это наглядность. Абстрактные геометрические понятия и зависимости становятся видимыми, доступными непосредственному восприятию. Обучающийся видит не просто застывший чертеж в учебнике, а процесс изменения геометрической конфигурации в реальном времени, что помогает ему гораздо глубже понять суть изучаемого свойства или теоремы [10].

Кроме того, использование таких ресурсов позволяет по-настоящему индивидуализировать обучение. В классе всегда есть обучающиеся с разным уровнем подготовки, и статичный чертеж на доске одинаков для всех.

Динамическая же модель дает возможность каждому обучающемуся работать в своем темпе: кто-то может подольше поэкспериментировать с моделью, кто-то – быстро перейти к следующим заданиям. Это ведет к более эффективному усвоению знаний, поскольку материал осваивается не через запоминание формулировок, а через собственный опыт и самостоятельные наблюдения [22, 31].

Важно и то, что применение динамических чертежей положительно сказывается на общем качестве образовательного процесса. Учитель получает возможность отказаться от малоэффективных статичных иллюстраций и перейти к более современным, деятельностным формам работы. Наконец, динамические чертежи обеспечивают оперативную обратную связь. Результаты изменений на чертеже видны мгновенно, и обучающийся сразу может оценить, правильно ли он понимает материал, а учитель – своевременно скорректировать работу как отдельных обучающихся, так и всего класса [6].

На основании вышесказанного можно утверждать, что готовые модели-чертежи по теме «Окружность», представленные на платформе «1С:Урок», представляют собой полезный дидактический ресурс для учителя математики. С их помощью возможно эффективно реализовать принцип наглядности на разных этапах урока, при этом существенно экономя время учителя. Но, в отличие от самостоятельного создания чертежей в средах динамической математики, работа с готовыми моделями ограничивает возможности для творчества обучающихся и не всегда позволяет адаптировать чертеж под конкретную нестандартную задачу. В связи с этим оптимальным решением будет совместное использование готовых моделей из библиотеки «1С:Урок» и самостоятельных разработок динамических чертежей в таких средах, как «Живая математика», что и будет продемонстрировано во второй главе настоящего исследования.

Глава 2. Приёмы и методы применения динамических чертежей при обучении умению решать задачи по теме «Окружность» в 8 классе

2.1. Изучение взаимного расположение окружности и прямой с использованием динамических чертежей

Изучение вопроса о том, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность, является традиционной отправной точкой для всего раздела «Окружность» в курсе геометрии 8 класса. В учебнике Л.С. Атанасяна «Геометрия. 7–9 классы» этот материал изложен в пункте «Взаимное расположение прямой и окружности» параграфа «Окружность и прямые» и сопровождается тремя статичными рисунками (Рисунок 3). На первом изображена прямая, пересекающая окружность в двух точках, на втором – прямая, касающаяся окружности в одной точке, на третьем – прямая, не имеющая с окружностью общих точек.

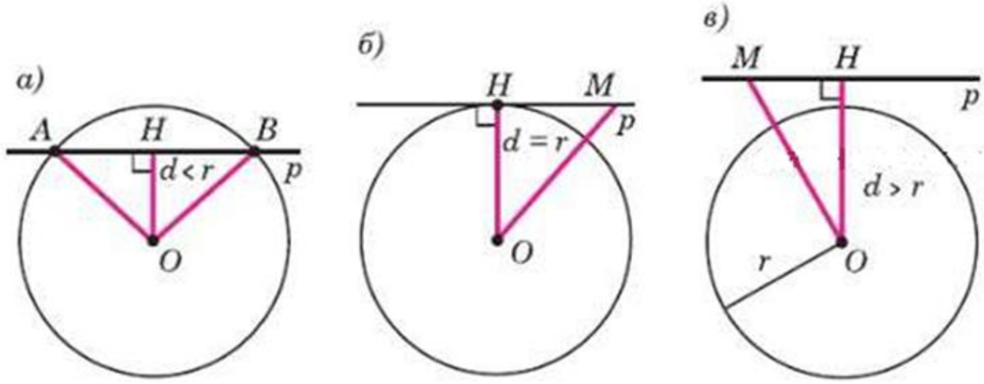


Рисунок 3. – Три случая взаимного расположения окружности и прямой.

Как показывает педагогическая практика, статичный характер этих иллюстраций создаёт у обучающихся определённые когнитивные затруднения. Обучающийся видит три застывшие картинки, но не наблюдает процесса перехода от одного случая к другому. Ему остаётся лишь заучить, что если расстояние от центра окружности до прямой d меньше радиуса r – то две точки, если равно – то одна, если больше – то ни одной. Формирование глубокого понимания требует возможности увидеть, как при непрерывном изменении d картина плавно меняется. Преодолеть это ограничение можно, перейдя от статичных иллюстраций к **динамическим чертежам**, выполненным в среде «Живая математика».

В данном параграфе будут рассмотрены приёмы и методы применения динамических чертежей при изучении темы «Взаимное расположение прямой и окружности». В таблице 1 представлен перечень основных задач и понятий из учебника Л.С. Атанасяна [2], которые будут использованы для иллюстрации возможностей динамической визуализации.

Таблица 1. Перечень задач и теорем из учебника Л.С. Атанасяна, поддерживаемых динамическими чертежами.

Условия задачи, определения, понятия	**Пункты в учебнике, номер задачи**	**Наличие статистического чертежа в учебнике**
Понятие взаимного расположения окружности и прямой. Выяснить, сколько общих точек могут иметь окружность и прямая в зависимости от их взаимного расположения, если известно расстояние от центра окружности до этой прямой.	П. 76. Взаимное расположение прямой и окружности	Рис. 242.
Задача. На динамическом чертеже изображена окружность с центром в точке O и прямая p. По заданным значениям параметров r и d, где r – радиус окружности, а d – расстояние от центра окружности до прямой p, определите взаимное расположение прямой и окружности а) r = 16 см, d = 12 см; б) r = 5 см, d = 4,2 см; в) r = 7,2 дм, d = 3,7 дм; г) r = 8 см, d = 1,2 дм; д) r = 5 см, d = 50 мм	Задачи Задача 740	Нет рисунка
Задача. На рабочем поле среды «Живая математика» постройте произвольную окружность и точку A, лежащую внутри этой окружности. Через эту точку постройте произвольную прямую. 1. Проведите компьютерный эксперимент: выясните, как взаимно расположены окружность и прямая, может ли эта прямая лежать вне окружности, касаться окружности или быть её секущей. 2. На основе проведенного эксперимента сформулируйте гипотезу, затем докажите эту гипотезу.	Задачи Задача 741	Нет рисунка

Задача. На динамическом чертеже изображена окружность с центром в точке O радиуса r и касательная AB к этой окружности, точка B – точка касания. Задание: 1) Найдите AB, если OA = 2 см, а r = 1,5 см. 2) Найдите AB, если $\angle AOB$ = 60°, а r = 12 см.	Задачи Задача 744 и задача 745	Нет рисунка
Задача. На рабочем поле среды «Живая математика» постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ $\angle A = \angle D = 90°$. Так же постройте окружность в соответствии с требованиями задания на выбор Задание на выбор: а) Выясните, является ли прямая AB касательной к окружности с центром B радиуса AB. б) Выясните, является ли прямая CD касательной к окружности с центром A радиуса AD. в) Выясните, является ли прямая CD касательной к окружности с центром B радиуса BC.	Задачи Задача 748	Нет рисунка
Задача. На динамическом чертеже изображена окружность с центром в точке O радиуса 3 см, прямая p, проходящая через центр окружности и отрезок AH, который является перпендикуляром к прямой p (точка H принадлежит p). Необходимо выяснить, является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) OA = 5 см., AH = 4 см. б) $\angle HAO$ = 45°, OA = 4 см. в) $\angle HAO$ = 30°, OA = 6 см.	Задачи Задача 749	Нет рисунка

Опишем процедуру конструирования динамических чертежей на примере трёх случаев взаимного расположения окружности и прямой и задачи из таблицы 1.

Три случая взаимного расположения окружности и прямой. Эта тема опирается на хорошо знакомое школьникам понятие расстояния от точки до прямой. С этим понятием они неоднократно сталкивались как при решении геометрических задач, так и в реальных жизненных ситуациях – например, при оценке кратчайшего пути от объекта до дороги или при определении удалённости одного предмета от другого. При изучении данной темы учителю стоит обратить внимание обучающихся на то, что соотношение между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой лежит в основе многих практических задач: от расчёта зоны уверенного приёма радиосигнала до определения траектории движения режущего инструмента относительно заготовки на станке.

Как на динамическом чертеже, построенном в среде «Живая математика», определить характер взаимного расположения окружности и прямой, ещё не обращаясь к формулировкам из учебника? Решение этого вопроса заключается в использовании встроенных измерительных средств программы. Среда «Живая математика» позволяет в любой момент измерить радиус окружности и расстояние от её центра до заданной прямой, а также вывести эти значения на экран. Перемещая прямую относительно окружности с помощью мыши или ползунка, обучающиеся в реальном времени наблюдают, как в реальном времени меняются эти две величины.

Рассмотрим построение модели «Три случая взаимного расположения прямой и окружности» в среде «Живая математика»:

Шаг 1. В произвольном месте среды ставим точку (Инструмент «Точка»), она будет являться центром окружности. Называем эту точку O (Инструмент «Текст»). Затем задаём радиус окружности как параметр r (Вкладка «Вычисления» $\to$ «Новый параметр»), положим $r = 3$ см.

Шаг 2. Выделяем точку O и переносим её на 90° на 1 см (Вкладка «Преобразования» $\to$ «Перенести»), новую точку назовем E. Строим прямую ОЕ (Инструмент «Прямые»). Находим точки пересечения этой прямой и окружности (Вкладка «Построения» $\to$ «Пересечения»). Верхнюю точку называем X, нижнюю – Y. Скрываем исходную окружность (Выделяем окружность $\to$ Вкладка «Вид» $\to$ «Скрыть окружность»). Строим две полуокружности с центром в точке O и концами X и Y (Выделяем точки O, X

и Y → Вкладка «Построения» → «Дуга на окружности» → Повторить). После построения дуг скрываем точки X и Y.

Шаг 3. Ставим произвольную точку на прямой OE, называем её H. Строим прямую р, перпендикулярную OE и проходящую через точку H, (Выделяем прямую OE и точку H → Вкладка «Построения» → «Перпендикуляр»). Меняем окрас точки H на жёлтый, это будет означать возможность перемещения этой точки с помощью компьютерной мыши.

Шаг 4. Находим пересечение прямой р с дугами окружности (Выделяем прямую p и любую из дуг → Вкладка «Построения» → «Пересечения» → Повторить с второй дугой). Точку пересечения с левой дугой обозначим буквой A, с правой – B.

Шаг 5. Выбираем на прямой p две точки – M и N. Скрываем прямую p, на её месте строим ограниченную прямую MN («Инструмент пользователя» → «Ограниченная прямая»). Отрезок MN обозначаем p.

Шаг 6. Соединяем точку O отрезками OH и OM с точками H и M (Инструмент «Отрезки»). Затем маркером отмечаем прямой угол при вершине H (Инструмент «Маркер» → Наводим на точку H и протягиваем в диагональном направлении).

Шаг 7. Отмечаем вектор параллельного переноса точками O и E (Выделяем точку O → Выделяем точку E → Вкладка «Преобразования» → «Отметить вектор»). Переносим точку E этим переносом в новую точку (Вкладка «Преобразования» → «Перенести»). Таким образом создаем шесть новых точек. Начиная с точки E пронумеруем их (имя точки E заменим на 1). Эти точки нам понадобятся для последующего эксперимента.

Шаг 8. Находим длины отрезков AB, OM и OH (Выделяем точку A → Выделяем точку B → Вкладка «Измерения» → «Расстояние», для отрезков OM и OH аналогично). Для удобства переименуем отрезок OH, назовем его d.

Шаг 9. Чтобы не перемещать точку H вручную, создаём кнопки «Переместить H в …» (Выбираем точку H → Выбираем точку O → Вкладка

«Правка» → «Кнопки» → «Перемещение», и так для каждой точки до точки 7).

Полученная модель представлена на рисунке 4.

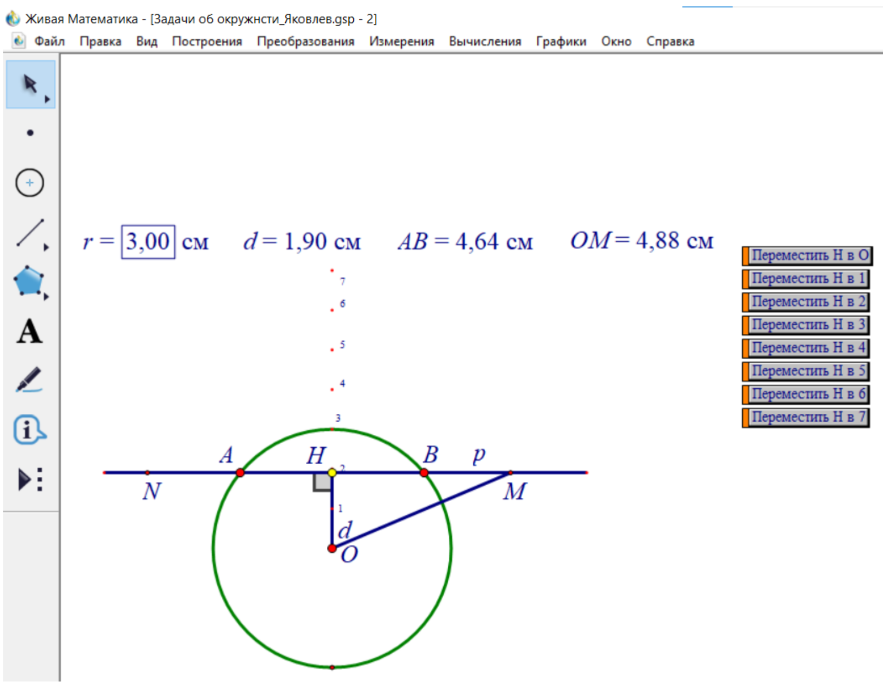


Рисунок 4. – Модель для исследовательского эксперимента.

Учитель демонстрирует эту модель классу, после чего предлагает провести эксперимент: «Вам необходимо выяснить, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения».

Эксперимент. Обучающиеся начинают перемещать точку *H* с помощью кнопок и заполнять таблицу. Таблица с результатами представлена на рисунке 5.

r	d	AB	OM
3,00 см	0,00 см	6,00 см	4,50 см
3,00 см	1,00 см	5,66 см	4,61 см
3,00 см	2,00 см	4,47 см	4,92 см
3,00 см	3,00 см	0,00 см	5,41 см
3,00 см	4,00 см		6,02 см
3,00 см	5,00 см		6,73 см
3,00 см	6,00 см		7,50 см
3,00 см	7,00 см		8,32 см

Рисунок 5. – Таблица с результатами эксперимента.

Выдвижение гипотез. По окончанию эксперимента учитель задаёт обучающимся вопрос, какие закономерности они смогли установить в ходе своего исследования. Обучающиеся выделяют три закономерности: пока точка H находилась внутри окружности, прямая и окружность имели две общих точки – A и B; когда точка H находилась на окружности точки A и B совпали, тем самым прямая и окружность имели одну общую точку; когда точка H вышла за пределы окружности точки A и B пропали, следовательно общих точек у прямой и окружности нет. На основе этих закономерностей обучающиеся формулируют следующие гипотезы:

- **Гипотеза 1**. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют две общие точки;
- **Гипотеза 2**. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности ($d = r$), то прямая и окружность имеют одну общую точку;
- **Гипотеза 3**. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности ($d > r$), то прямая и окружность не имеют общих точек.

После выдвижения гипотез учитель предлагает обучающимся наглядно их доказать. Доказательство проводится на той же модели.

Доказательство гипотезы 1. Скрываем на модели лишние объекты (отрезок OM и его длину), также нужно скрыть дуги окружности. Сперва нам нужно доказать, что длины отрезков HA и HB равны, а именно $HA = HB = \sqrt{r^2 - d^2}$. Для этого выведем на поле рабочей среды значения отрезков HA и HB как мы это делали ранее, затем вычислим значение выражения $\sqrt{r^2 - d^2}$ (Вкладка «Вычисления» → «Вычислить» → «Функции» → Выбираем функцию «sqrt» → Мышью нажимаем на параметр r → Умножаем его на себя → Мышью нажимаем на значение d → Умножаем его на себя → «Готово»). На экран выводится вычисление заданного выражения (Рисунок 6).

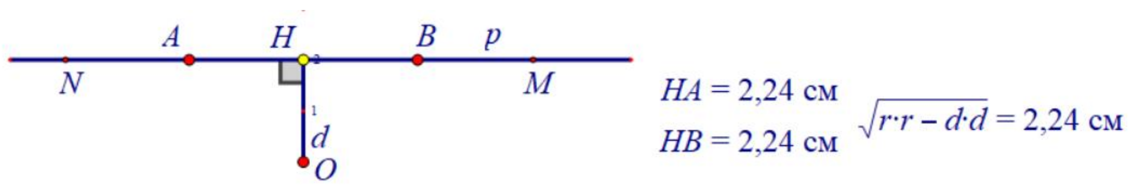


Рисунок 6. – Доказательство выражения Живой математике

При изменении расстояния d обучающиеся наблюдают, что при любом d ($d < r$) длины отрезков HA и HB равны и между собой и при этом равны выражению $\sqrt{r^2 - d^2}$. Теперь проведем отрезки OA и OB. По предложенной обучающимися гипотезе точки A и B являются общими для окружности и прямой, значит отрезки OA и OB должны равняться радиусу окружности. Докажем это с помощью теоремы Пифагора, так как полученные треугольники OHA и OHB являются прямоугольными. По ранее доказанному мы знаем, что $HA = HB = \sqrt{r^2 - d^2}$. Таким образом мы получили следующие выражения:

1) $OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)}$

2) $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)}$

Раскрывая скобки в последнем выражении, получим, что $OA = OB = r$. Следовательно, точки A и B лежат на окружности, при этом они так же принадлежат прямой p, значит эти точки являются общими для окружности и прямой. Но есть ли еще между ними общие точки? Проведем доказательство от противного, т.е. предположим, что существует новая точка C, которая так же является общей для прямой и окружности. Построим отрезок OC, тем самым мы получим треугольник OAC (Рисунок 7).

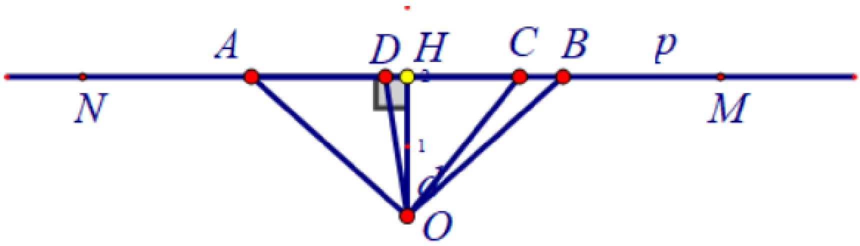


Рисунок 7. – Применение метода «от противного».

Обратим внимание, что этот треугольник равнобедренный, так как ранее мы доказали, что расстояние от центра окружности до общих точек равно r, при этом C не совпадает ни с A ни с B. Построим медиану OD в этом треугольнике, так как этот треугольник равнобедренный, то медиана OD так же является высотой этого треугольника. Следовательно, отрезок OD перпендикулярен прямой p. Заметим, что отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H – серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра к прямой p, что невозможно. Полученное противоречие снимает допущение о существовании более двух общих точек окружности и прямой при ($d < r$). Таким образом, гипотеза доказана.

Доказательство гипотезы 2. Возвращаем модель к изначальному виду. С помощью кнопки переместим прямую p так, чтобы отрезок OH был равен радиусу окружности (Рисунок 8). Из этого следует, что точка H лежит на окружности и является общей точкой прямой и окружности.

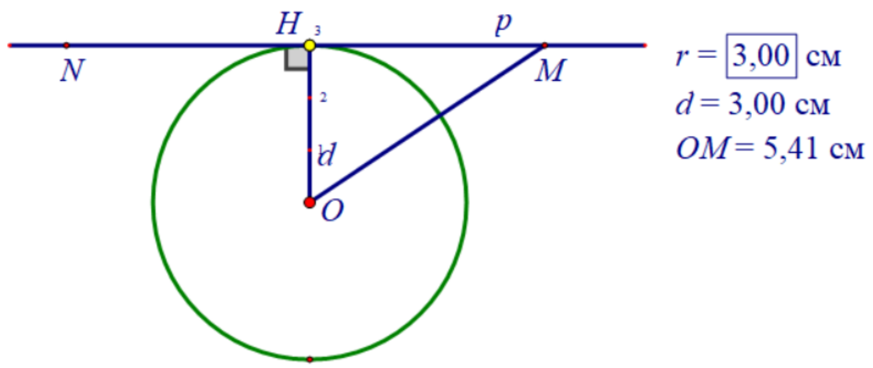


Рисунок 8. – Модель для доказательства второй гипотезы.

Докажем, что других общих точек нет. Рассмотрим произвольную точку *M* на прямой *p* так, чтобы эта точка не совпадала с точкой *H*. Тогда имеет место следующее неравенство *OM* > *OH*, так как *OM* является наклонной, а любая наклонная больше перпендикуляра. Для наглядности выведем на экран длину отрезка *OM*. Обучающиеся могут перемещать точку *M* по прямой *p*, и наблюдать, что при любом положении точки *M* на прямой, отличном от точки *H*, наклонная *OM* будет больше радиуса окружности, а это значит, что точка *M* не лежит на окружности. В силу произвольности выбора точки *M* гипотеза доказана.

Доказательство гипотезы 3. Последняя гипотеза имеет самое простое доказательство. С помощью кнопок перемещаем прямую p на любую точку, лежащую вне окружности (Рисунок 9).

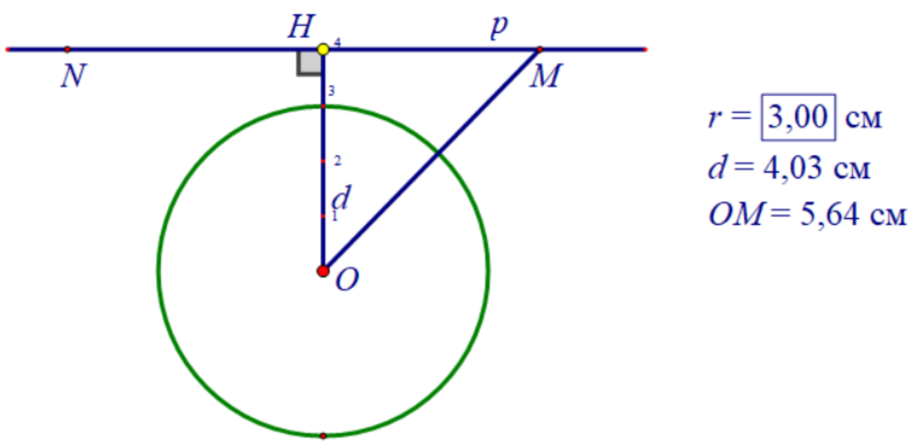


Рисунок 9. – Модель для доказательства третей гипотезы.

В этом случае отрезок *OH* будет больше радиуса окружности, поэтому для любой точки прямой *p* будет справедливо следующее двойное неравенство $OM \geq OH > r$. Последнее неравенство показывает, что какую бы точку на прямой р мы не взяли, она не будет лежать на окружности, а значит у прямой и окружности нет общих точек. Гипотеза доказана.

Такой метод, который Сгибнев называет «Экспериментальной математикой» [8], способствует развитию пространственного воображения и закреплению связей между визуальным образом и его аналитическим описанием.

Задача на применение условия взаимного расположения прямой и окружности. После того как теоретическая база заложена, необходимо перейти к формированию умения решать задачи. Рассмотрим задачу 740 из учебника Атанасяна, формулировка которой была адаптирована под среду «Живая математика».

Задача. На динамическом чертеже изображена окружность с центром в точке *O* и прямая *p*. По заданным значениям параметров *r* и *d*, где *r* – радиус окружности, а *d* – расстояние от центра окружности до прямой *p*, определите взаимное расположение прямой и окружности

а) $r = 16$ см, $d = 12$ см;

б) $r = 5$ см, $d = 4{,}2$ см;

в) $r = 7{,}2$ дм, $d = 3{,}7$ дм;

г) $r = 8$ см, $d = 1{,}2$ дм;

д) $r = 5$ см, $d = 50$ мм.

Рассмотрим последовательность построения динамического чертежа:

Шаг 1. Создаем новые параметры *r* и *d* (Вкладка «Вычисления» → «Новый параметр» → Задаём имя параметра и единицы измерения → «Готово»).

Шаг 2. Создаем точку в произвольном месте среды, она будет центром окружности (Инструмент «Точки»), назовём её *O*. Затем строим две окружности с центром в заданной точке, а радиус будет задаваться соответствующим параметром (Выделяем точку O и параметр r → Вкладка «Построения» → «Окружность по центру и радиусу», для второй окружности аналогичное построение).

Шаг 3. Строим радиусы этих окружностей (Инструмент «Отрезки» → Выделяем точку O → Конец отрезка ставим в произвольное место на окружности). Называем эти радиусы r и d соответственно (Инструмент «Текст»).

Шаг 4. Строим прямую p. Так как отрезок d это расстояние от центра окружности до прямой p, нам необходимо построить перпендикуляр к этому отрезку (Выделяем отрезок d → Выделяем конец отрезка, лежащий на окружности → Вкладка «Построения» → «Перпендикуляр»). После этого мы можем скрыть окружность с радиусом d (Выделяем окружность → Вкладка «Вид» → «Скрыть окружность»).

Шаг 5. Выделяем точки пересечения прямой p и окружности (Выделяем прямую p → Выделяем окружность → Вкладка «Построения» → «Пересечения»). Назовем точки пересечения A и B соответственно (можно любые другие названия точек).

Итоговая модель представлена на рисунке 10.

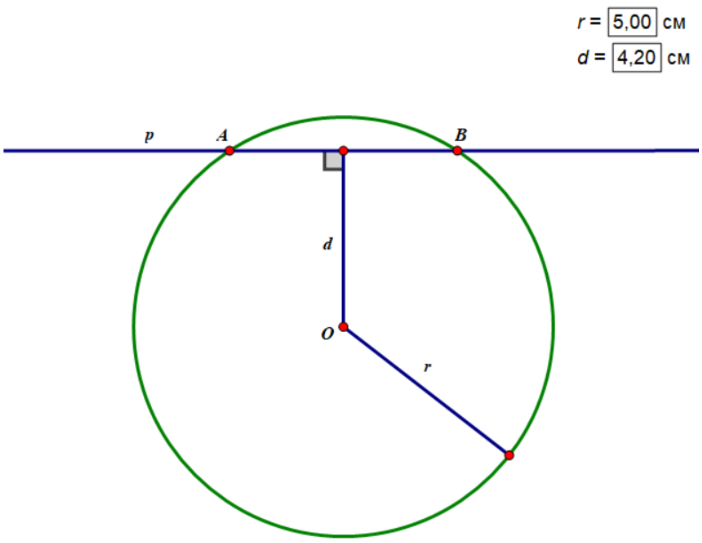


Рисунок 10. – Модель для задачи 740.

В процессе решения этой задачи обучающиеся строят динамическую модель по описанным ранее шагам. После чего начинают последовательно или в произвольном порядке выполнять задания а)-д). Выполнение задания представляет собой небольшой опыт, в котором обучающиеся вводят значения параметров в соответствующие окошки, наблюдая при этом изменение чертежа. Результаты наблюдений обучающиеся фиксируют в текстовых блоках рядом с чертежом. Такая работа позволяет закрепить полученные ранее теоретические знания на практике.

2.2. Изучение углов, вписанных в окружность, с использованием динамических чертежей

Не менее важным разделом при изучении темы «Окружность» является раздел «Центральные и вписанные углы». В предыдущем параграфе мы рассматривали взаимное расположение прямой и окружности, где ключевую роль играло расстояние от центра до прямой, теперь в центре внимания оказывается иная зависимость: связь между положением вершины угла, её расположением на окружности и градусной мерой дуги, на которую этот угол опирается. Изучение данной темы занимает центральное место в курсе геометрии 8 класса, поскольку именно здесь закладываются основы для понимания многих геометрических зависимостей, которые будут востребованы как при решении планиметрических задач, так и в дальнейшем, при изучении стереометрии. В таблице 2 представлен перечень методических материалов, поддерживаемых динамическими чертежами.

Таблица 2.

Формулировка теоремы и следствий, условия задачи, определения понятия	**Пункты в учебнике, номер задачи**	**Наличие статистического чертежа в учебнике**
Определение вписанного угла	П. 80. Теорема о вписанном угле	Рис. 258
Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается	П. 80. Теорема о вписанном угле	Рис. 259
Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны	П. 80. Теорема о вписанном угле	Рис. 260
Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой	П. 80. Теорема о вписанном угле	Рис. 261
Задача. На динамическом чертеже изображена окружность и вписанный угол *ABC*. Найдите градусную меру этого угла, если дуга *AC*, на которую он опирается, равна: а) 48° б) 57° в) 90° г) 124°	Задачи Задача 766.	Нет рисунка

д) 180°		
Задача. На динамическом чертеже изображена окружность и вписанный в неё треугольник ABC. AB – диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\cup BC = 134°$ б) $\cup AC = 70°$	Задачи Задача 771	Нет рисунка
Задача. На рабочем поле среды «Живая математика» изобразите окружность с диаметром AC, хордой AB и касательной MA. Угол MAB острый. Выясните, равны ли углы $\angle MAB$ и $\angle ACB$.	Задачи Задача 778	Нет рисунка

Ключевая теорема этого раздела – теорема о вписанном угле – утверждает, что величина вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается. При доказательстве этой теоремы рассматривают три случая, каждый их которых имеет статичное изображение в учебнике (Рисунок 11): а) Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC; б) Луч BO делит угол ABC на два угла; в) Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла.

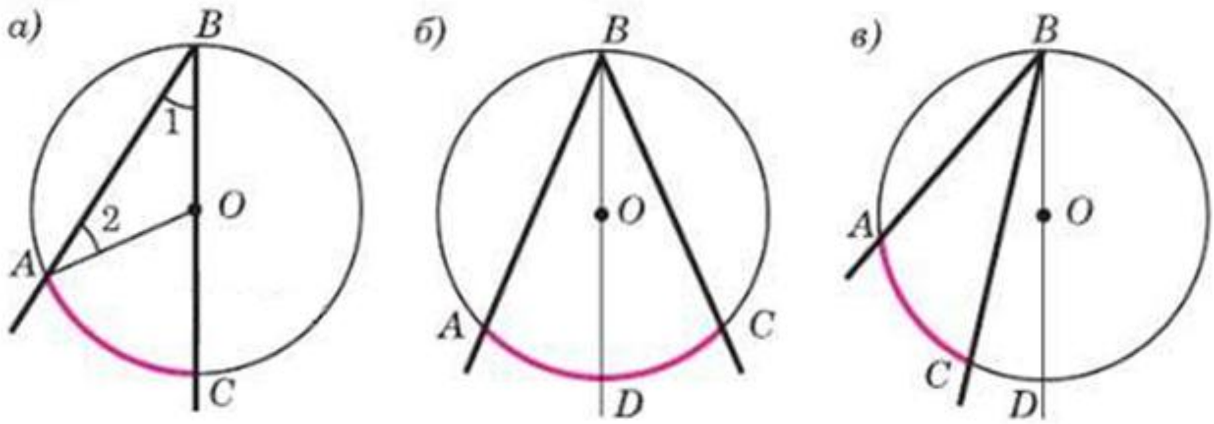


Рисунок 11. – Три случая расположения луча BO относительно угла ABC.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся готовой моделью, представленной в библиотеке «1С:Урок». Использование готовой модели позволяет учителю не тратить время на самостоятельное конструирование динамического чертежа и уделить больше внимания теоретическому обоснованию доказательства.

Первый случай. Учитель демонстрирует обучающимся чертеж (Рисунок 12), на котором представлена окружность с центром в точке O и вписанный угол ABC. Луч BO совпадает со стороной BC вписанного угла. На стороне AB построен равнобедренный треугольник AOB.

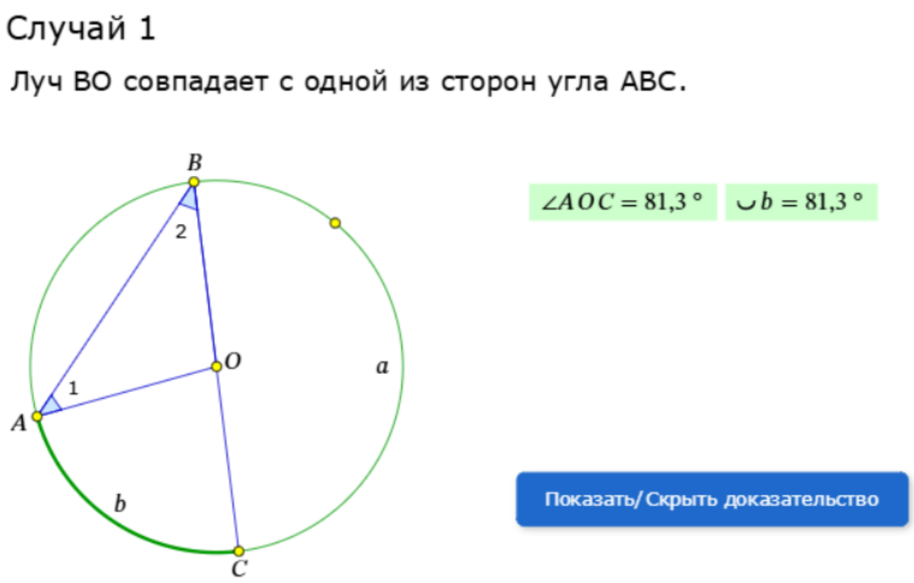


Рисунок 12. – Первый случай доказательства теоремы о вписанном угле.

Рассмотрим угол AOC, он является центральным. Мы знаем, что по основному свойству центрального угла $\angle AOC$ будет равен дуге, на которую он опирается. Модель наглядно это демонстрирует. Учитель может перемещать вершину A чтобы продемонстрировать, что при любом положении точки A, пока дуга AC меньше полуокружности, будет выполняться равенство $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC – внешний угол равнобедренного треугольника AOB, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то мы воспользуемся теоремой о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. В результате мы получили следующее равенство $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Из полученного равенства следует, что $2\angle 1 = \cup AC$. Так как угол 1 соответствует углу ABC, получаем равенство $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \cup AC$. После проведенных рассуждений учитель демонстрирует полное доказательство на экране

Второй случай. Для следующего случая учитель переключается на следующую страницу модели, на которой изображен новый чертеж (Рисунок 13.).

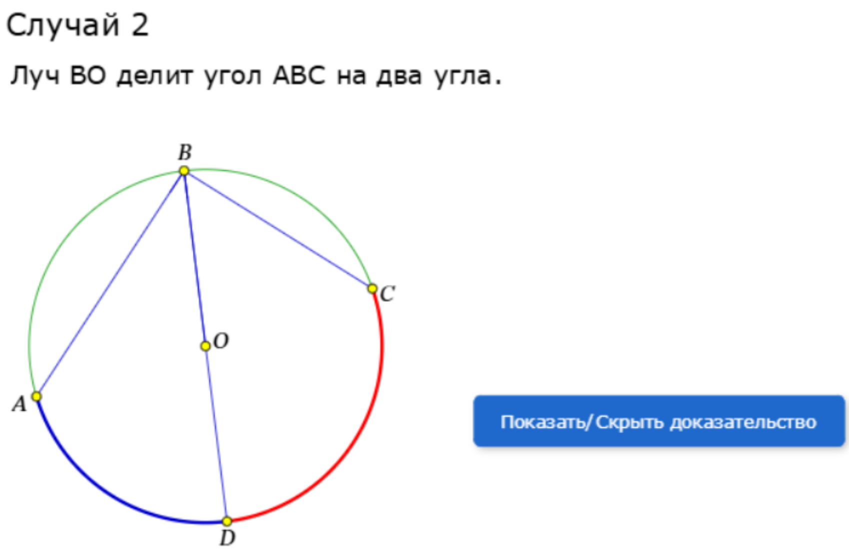


Рисунок 13. – Второй случай доказательства теоремы о вписанном угле.

В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D. Эта точка разделяет дугу AC на две дуги: $\cup AD$ и $\cup DC$. Для наглядности они выделены разными цветами. Заметим, что отдельном рассмотрении каждой из этих дуг и соответствующих им углов мы снова получим рассмотренный ранее первый случай. Тогда воспользуемся ранее доказанным и получим следующие равенства: $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Сложив эти равенства получим $\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC$, что в свою очередь равносильно равенству $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. После проведенных рассуждений учитель демонстрирует на экране полное доказательство.

Третий случай. Учитель выводит на экран последний чертеж (Рисунок 14) и просит обучающихся провести самостоятельное доказательство на основе двух доказанных случаев.

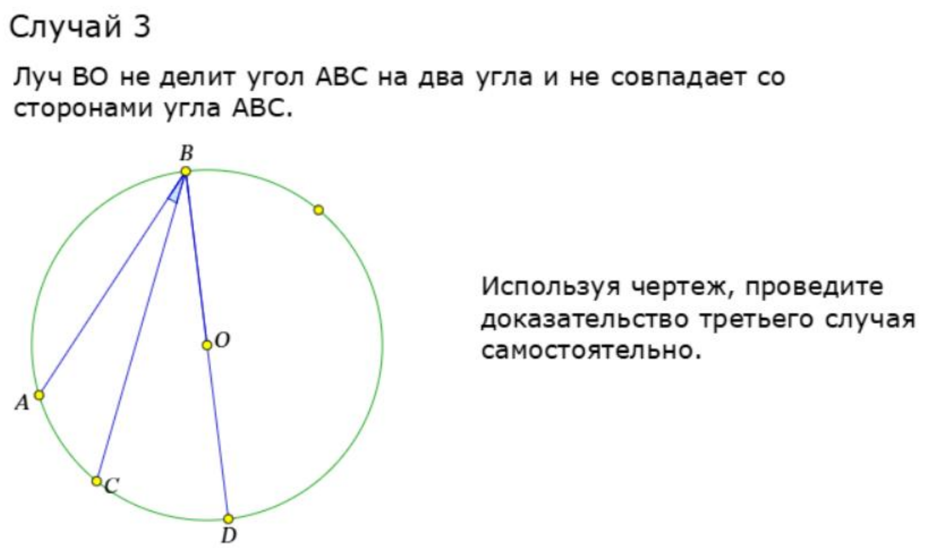


Рисунок 14. – Третий случай доказательства теоремы о вписанном угле.

В процессе самостоятельного доказательства обучающиеся замечают, что оно схоже с предыдущими. Обучающимся необходимо применить оба ранее доказанных случая. После такой наглядной демонстрации логика доказательства становится для обучающихся значительно более прозрачной.

После доказательства теоремы важно перейти к этапу осмысления и закрепления её следствий. Здесь динамические чертежи также предоставляют богатые возможности для организации исследовательской деятельности обучающихся.

Следствия из теоремы. Учитель выводит на экран чертеж (Рисунок 15), демонстрирующий эти следствия:

- Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.

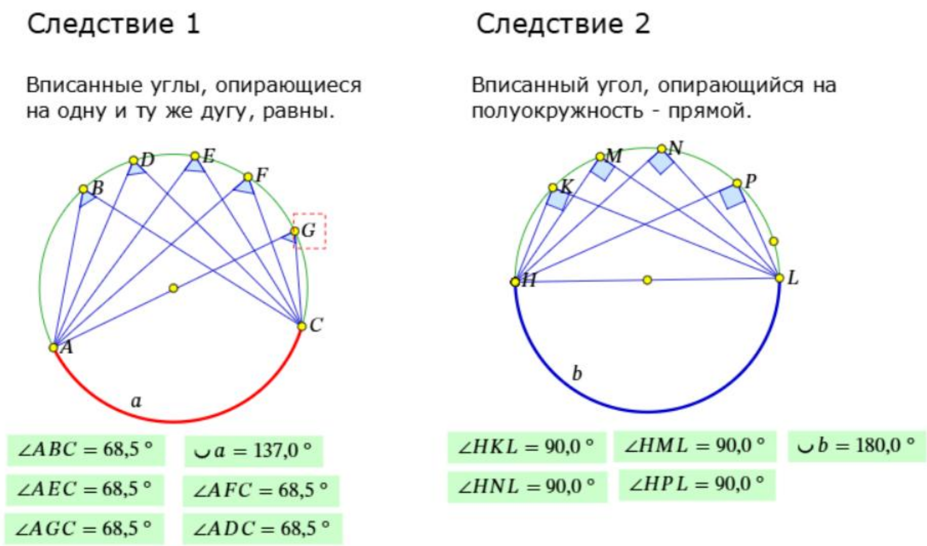


Рисунок 15. – Следствия из теоремы о вписанном угле.

Учитель предлагает обучающимся выполнить исследовательское задание: «Переместите вершины этих углов по окружности, изменяя их положение, но не меняя дугу, на которую они опираются. Что происходит с их величинами?» Обучающиеся с удивлением обнаруживают, что, несмотря на изменение формы углов, их числовые значения остаются неизменными и равными между собой.

Аналогично организуется работа со вторым следствием. Учитель предлагает классу проблемную ситуацию: «Будет ли этот угол всегда прямым?». Обучающиеся, перемещая вершину угла по окружности и наблюдая за изменением его величины, видят: значение 90° остаётся неизменным. Если же кто-то из обучающихся попытается «сдвинуть» концы дуги так, чтобы они перестали быть диаметрально противоположными точками, угол перестанет быть прямым. Это наблюдение позволяет сделать понимание материала гораздо глубже, чем простое заучивание формулировки из учебника, поскольку оно подкреплено собственным экспериментальным опытом.

Решение задачи на вычисление. Когда основные теоретические сведения усвоены, учитель переходит к следующему этапу – обучению школьников применению этих знаний в процессе решения задач. Рассмотрим задачу 771 из учебника Атанасяна, формулировка которой была адаптирована под среду «Живая математика».

Задача. На динамическом чертеже изображена окружность и вписанный в неё треугольник ABC. AB – диаметр окружности.
Найдите углы треугольника, если:

а) $\cup BC = 134°$

б) $\cup AC = 70°$

Рассмотрим решение задания под буквой а). Для решения этой задачи динамическая модель строится следующим образом:

Шаг 1. Строим произвольную окружность (Инструмент «Циркуль»). Центр окружности назовём точкой O (Инструмент «Текст»).

Шаг 2. Строим точку в произвольном месте на окружности (Инструмент «Точка»). Назовем её точкой B. Так как AB по условию является диаметром окружности нам нужно повернуть точку B по окружности на 180°. Для начала отметим центр поворота. (Выделяем точку O → Вкладка «Преобразования» → «Отметить центр»), затем повернем точку B (Выделяем точку B → «Вкладка Преобразования» → «Поворот», в появившемся окне задаём угол поворота 180°). Новую точку называем A. Соединяем точки A и B отрезком (Инструмент «Отрезки» → Нажимаем на точку A → Нажимаем на точку B).

Шаг 3. По условию задания а) дуга BC имеет градусную меру, равную 134°. Для точного построения создаём параметр *alfa* (Вкладка «Вычисления» → «Новый параметр»), в качестве единиц выбираем угол в поле «Значение» задаем необходимый угол. После этого зададим угол поворота. (Выделяем параметр *alfa* → Вкладка «Преобразования» → «Отметить угол»). Теперь поворот будет осуществляться на угол, заданный в параметре. Осуществляем поворот точки B (Аналогично предыдущему шагу, но угол уже задан). Новую точку называем C. Строим треугольник ABC с помощью отрезков.

Шаг 4. Отметим каждую из дуг AC, BC и AB (Вкладка «Построения» → «Дуга на окружности» → Выделяем окружность → Выделяем точку C → Выделяет точку A, для остальных дуг аналогично). **Важно** при построении дуг выбирать точки против часовой стрелки, в противном случае будет выделена большая дуга. Для наглядности окрасим дуги в разные цвета, также можно отметить для каждой дуги соответствующий вписанный угол (Инструмент «Маркер») и окрасить его в соответствующий цвет.

Шаг 5. Выводим на экран градусную меру каждой дуги (Выделяем дугу → Вкладка «Измерения» → «Угловая мера дуги»).

Итоговая модель представлена на рисунке 16.

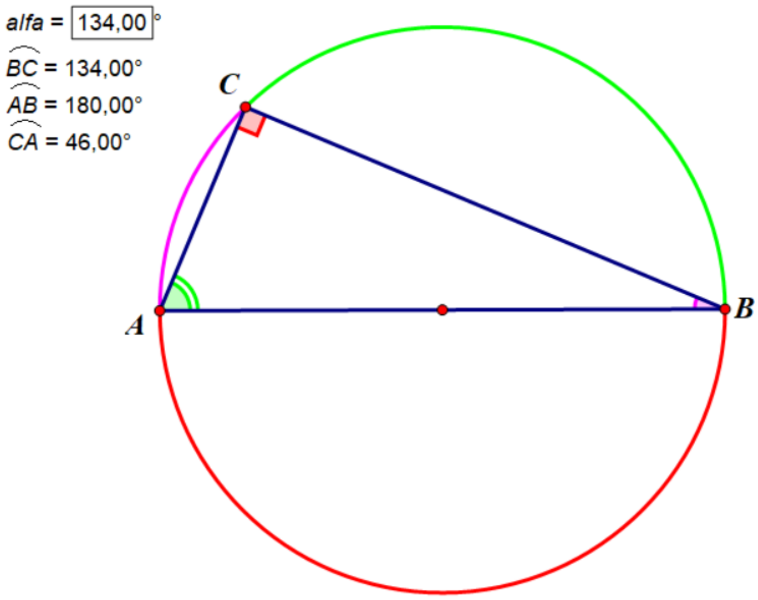


Рисунок 16. – Модель для задачи 771(а).

Решение. Решение начинается с построения модели по указанным шагам. После этого обучающиеся сопоставляют углы треугольника и дуги окружности, используя доказанную ранее теорему. Обучающиеся составляют следующие равенства.

$\angle A = \frac{1}{2} \cup BC$

$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC$

$\angle C = \frac{1}{2} \cup AB$

Затем при помощи встроенного калькулятора обучающиеся высчитывают значение каждого угла вписанного треугольника. Выглядит это следующим образом: Вкладка «Вычисления» $\rightarrow$ «Вычислить» $\rightarrow$ Выбирается необходимое градусное значение дуги $\rightarrow$ Выбранное значение делится пополам. Полученные значения будут иметь следующий вид $\frac{\cup AC}{2} = 23^{\circ}$. За место выражения $\frac{\cup AC}{2}$ обучающимся необходимо указать, какому именно углу соответствует это значение. Таким образом обучающиеся приходят к ответу на задание.

Ответ: $\angle A$ = 67°, $\angle B$ = 23°, $\angle C$ = 90°.

Решение задачи на доказательство. Рассмотрим задачу 771 из учебника Атанасяна, формулировка которой была адаптирована под среду «Живая математика».

Задача. На рабочем поле среды «Живая математика» изобразите окружность с диаметром *AC*, хордой *AB* и касательной *MA*. Угол *MAB* острый. Выясните, равны ли углы $\angle MAB$ и $\angle ACB$.

Рассмотрим построение модели для этой задачи:

Шаг 1. Строим окружность. Центр окружности назовем *O*.

Шаг 2. На окружности произвольно ставим точку. Называем её *A*. По условию отрезок *AC* – диаметр окружности. Для построения этого отрезка повернем точку *A* по окружности на 180°. Новую точку называем её *C*. Строим отрезок *AC*.

Шаг 3. По условию отрезок *AB* – хорда. Дополнительных условий у нас нет, поэтому строим произвольную хорду с помощью отрезка.

Шаг 4. Строим касательную *MA*. Так как точка *A* принадлежит окружности, то она является точкой касания и мы можем построить касательную, построив перпендикуляр к диаметру окружности через точку *A*. По условию угол *MAB* должен быть острым, поэтому размещаем точку М на касательной по стороне той полуокружности, где находится точка *B*.

Итоговая модель представлена на рисунке17.

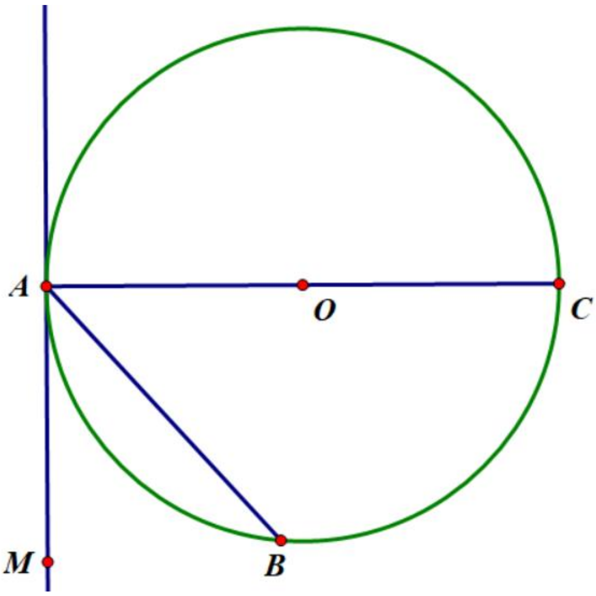


Рисунок 17. – Модель для задачи 778.

Доказательство. Для начала выполним дополнительное построение – отрезок BC. Так как один из нужных углов это $\angle ACB$. По условию MA – касательная к окружности, значит $\angle MAC = 90°$. $\angle MAC$ можно представить в виде суммы двух углов $\angle MAC = \angle MAB + \angle BAC$. Из этого равенства выразим $\angle MAB$, получим $\angle MAB = \angle MAC - \angle BAC$. Подставим в это выражение значение угла $\angle MAC$, $\angle MAB = 90° - \angle BAC$. Теперь рассмотрим треугольник ABC. Он является прямоугольным, так как $\angle ABC$ вписанный и опирается на диаметр, а по второму следствию из теоремы о вписанном угле мы знаем, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, – прямой. Тогда мы может сказать, что $\angle BAC + \angle ACB = 90°$, поскольку сумма углов треугольника равна 180°. Из этого равенства выразим значение угла $\angle ACB$, $\angle ACB = 90° - \angle BAC$. Сравним значения углов $\angle MAB$ и $\angle ACB$

$\angle MAB = 90° - \angle BAC$

$\angle ACB = 90° - \angle BAC$

Правые части этих равенств равны, значит и левые части также будут равны. Получаем $\angle MAB = \angle ACB$. Что и требовалось доказать. Для дополнительной проверки можно вывести значения этих углов на экран, они будут равны. Также обучающиеся могут перемещать точку B по окружности.

Они смогут наблюдать, что пока $\angle MAB$ будет оставаться острым, равенство между $\angle MAB$ и $\angle ACB$ будет сохраняться, но как только $\angle MAB$ перестает быть острым, равенство нарушается.

2.3. Изучение вписанных и описанных окружностей с использованием динамических чертежей

Тема «Вписанная и описанная окружности четырехугольников» завершает изучение главы «Окружность» в 8 классе и является важным связующим звеном между планиметрией и последующим изучением геометрии в старших классах, где понятия вписанной и описанной окружностей широко используются при рассмотрении правильных многоугольников и решении задач на комбинации геометрических фигур. В параграфе будет показано, как динамические чертежи, выполненные в среде «Живая математика», позволяют наглядно продемонстрировать свойства вписанных и описанных четырехугольников, организовать экспериментальную проверку условий их выполнения.

Таблица 3.

Формулировка теоремы и следствий, условия задачи, определения, понятия	**Пункты в учебнике, номер задачи**	**Наличие статистического чертежа в учебнике**
Определение вписанной в многоугольник окружности и описанного многоугольника	П. 82. Вписанная окружность	Рис. 268
Свойство описанного четырехугольника. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны	П. 82. Вписанная окружность	Рис. 269
Признак описанного четырехугольника	П. 82. Вписанная окружность	Рис. 272
Определение описанной около многоугольника окружности и вписанного многоугольника	П. 83. Описанная окружность	Рис. 270
Свойство вписанного многоугольника. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°	П. 83. Описанная окружность	Рис. 271
Признак вписанного многоугольника.	П. 83. Описанная окружность	Рис. 273
Задача. Выясните, можно ли вписать окружность в выпуклый четырехугольник, если суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны	Дополнительные задачи Задача 807	
Задача. Выясните, можно ли	Дополнительные задачи	

описать окружность около четырехугольника, если сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180°	Задача 810	

Опишем процедуру конструирования динамического чертежа для изучения свойства и признака четырехугольника, описанного около окружности.

Окружность, вписанная в выпуклый четырехугольник. Построение модели:

Шаг 1. В произвольном месте среды строим окружность, центр окружности называем O. Вне окружности строим точку A.

Шаг 2. Соединяем точки A и O отрезком. На отрезке AO отмечаем середину (Выделяем отрезок AO $\rightarrow$ Вкладка «Построения» $\rightarrow$ «Середина»). Назовем эту точку P.

Шаг 3. Строим новую окружность с центром в точке P радиуса PO. Отмечаем точки пересечения двух окружностей. Это будут точки касания прямых, проведенных из точки A. После этого можно скрыть построенную окружность, точку P и отрезок AO.

Шаг 4. Строим касательные из точки A к отмеченным точкам на окружности. Точки пересечения называем M и N.

Шаг 5. Прямых AM и AN отмечаем точки B и D за точками касания. Аналогичным образом (Шаги 2-4) строим новые касательные из точек B и D. Новые точки касания называем H и Т. Точку пересечения касательных BH и DT называем точкой C.

Шаг 6. Строим дополнительный отрезок JK, точка J лежит на прямой AB, точка K на прямой DC. Создаем кнопку, по нажатию на которую будет скрываться и при повторном нажатии показываться отрезок JK.

Итоговая модель представлена на рисунке 18.

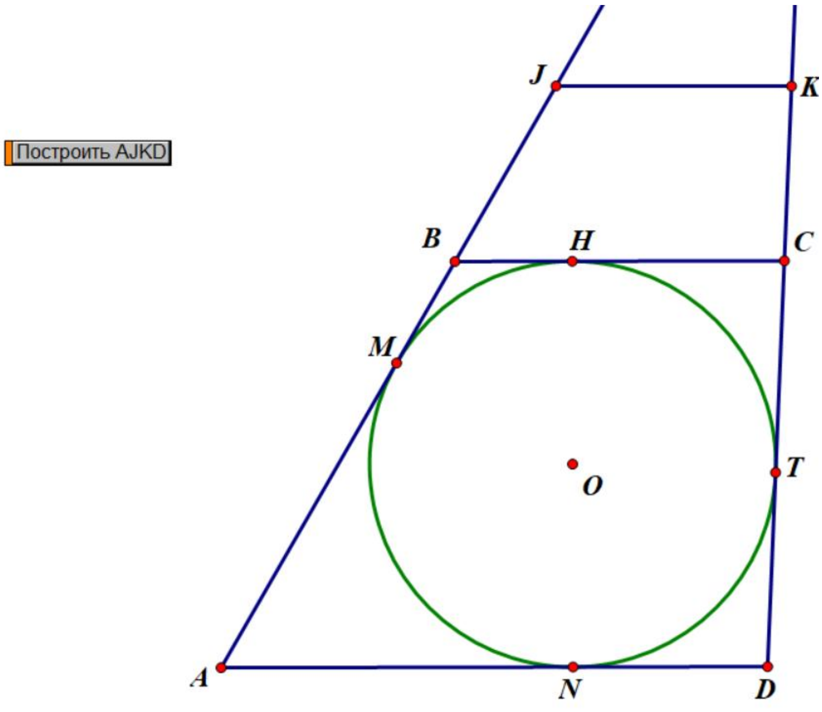


Рисунок 18. – Модель для изучения свойства описанного четырехугольника.

Учитель демонстрирует модель обучающимся и с её помощью вводит понятие вписанной окружности и описанного многоугольника:

- Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности.

Учитель предлагает обучающимся определить, являются ли представленные на модели четырехугольники описанным около окружности. Опираясь на определение, обучающиеся делают вывод, что четырехугольник $ABCD$ является описанным, так как окружность касается каждой его стороны: стороны AB в точке M, стороны BC в точке H, стороны CD в точке T, стороны AD в точке N. Затем они делают вывод, что четырехугольник $AJKD$ не является описанным, поскольку окружность не касается стороны JK. После вывода обучающихся учитель акцентирует внимание обучающихся на том, что в отличие от треугольника не во всякий четырехугольник можно вписать окружность. Учитель наглядно демонстрирует данный факт, построив дополнительную окружность, которая будет касаться стороны *JK*, но уже не будет лежать внутри четырехугольника *AJKD*. После этого учитель скрывает построенную окружность и отрезок *JK*. Далее учитель выводит на модели значения сторон четырехугольника $ABCD$ и предлагает обучающимся установить закономерность на основе показанных значений. После непродолжительных обсуждений класс приходит к выводу, что суммы противоположных сторон равны, затем учитель выводит на модель свойство описанного четырехугольника (Рисунок 19):

- **Свойство**. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

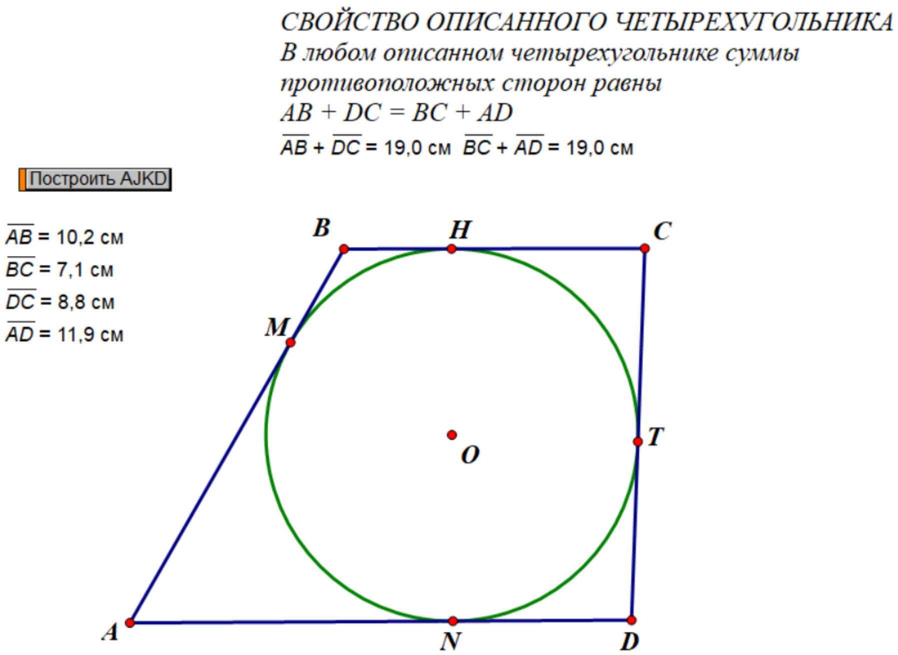


Рисунок 19. – Демонстрация свойства описанного четырехугольника

Учитель предлагает обучающимся доказать это свойство на этой же модели. Из курса геометрии 7 класса обучающиеся знают, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны. Для представленной модели это значит: $AM = AN = a$, $BM = BH = b$, $CH = CT = c$, $DT = DN = d$. Тогда значения сторон четырехугольника примут вид: $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $AD = a + d$. Подставим эти полученные значения в наше равенство $a + b + c + d = b + c + a + d$. Полученное равенство является верным для любого описанного четырехугольника, поэтому свойство доказано.

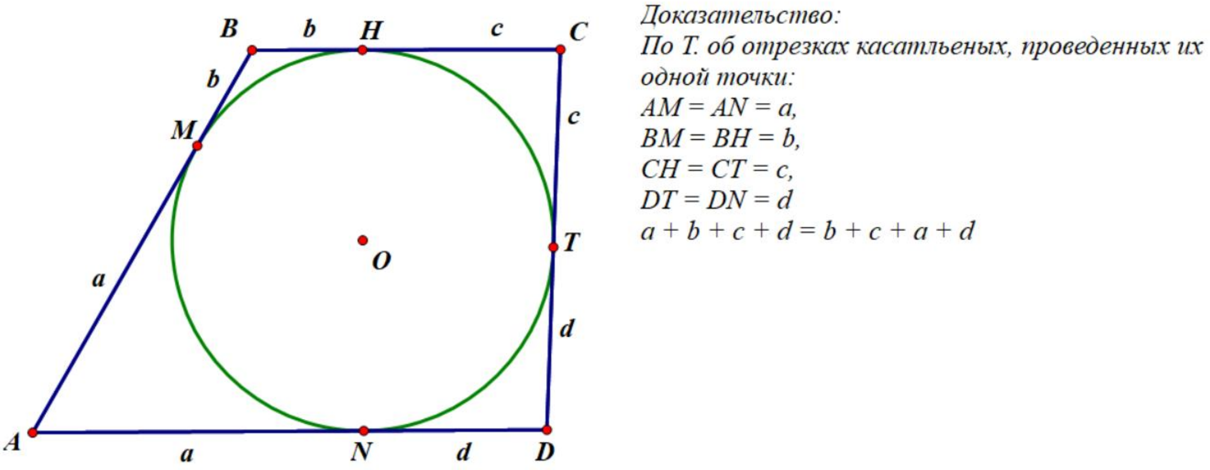


Рисунок 20. – Доказательство свойства описанного четырехугольника.

После этого учитель предлагает проверить обратное утверждение: *если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность*. Для этого он предлагает решить соответствующую задачу.

Задача. С помощью динамического чертежа выясните, можно ли вписать окружность в выпуклый четырехугольник, если суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

Доказательство. Решение данной задачи рассмотрим на построенной модели. Для начала учитель скрывает все лишние объекты, оставляя на экране только четырехугольник. По условию задачи нам известно, что суммы противоположных сторон равны, значит получаем $AB + CD = BC + AD$, обозначим это равенство (1). Проведем биссектрисы углов A и D (Выделяем стороны, образующие нужный угол → Вкладка «Построения» → «Биссектриса»). Они пересекутся в некоторой точке *R*. Заметим, что эта точка равноудалена от сторон *AB*, *AD*, и *CD*, это можно проверить, построив перпендикуляры к этим сторонам от точки *R*. Зная это, мы можем построить окружность с центром в точке *R*, касающуюся указанных трех сторон (Рисунок 21).

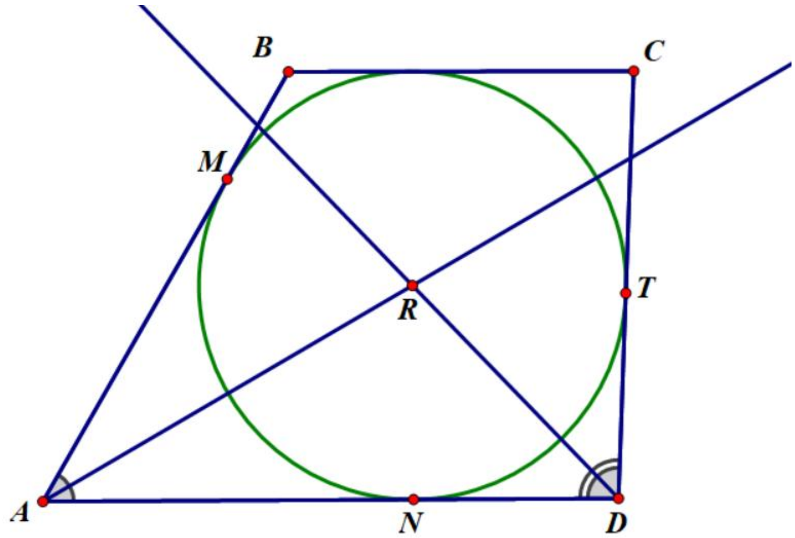


Рисунок 21. – Дополнительные построение к задаче 807.

Нам осталось доказать, что эта окружность будет касаться также отрезка *BC*. Воспользуемся методом «от противного». Предположим, что прямая *BC* либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай. Проведем касательную *B'C'*, параллельную стороне *BC* (*B'* и *C'* – точки пересечения касательной со сторонами *AB* и *DC*). Мы получили описанный четырехугольник *AB'C'D* (рисунок 22)

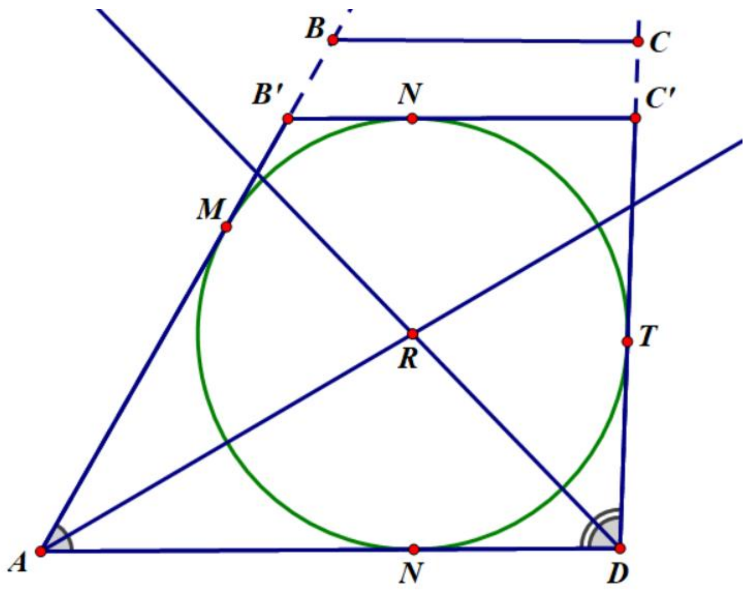


Рисунок 22. – Решение задачи 807.

Тогда по свойству его сторон мы получаем равенство

$AB' + C'D = B'C' + AD$, обозначим это равенство (2).

Но $AB' = AB - B'B$, $C'D = CD - C'C$, поэтому из равенства (2) получаем: $AB + CD - AD = B'C' + C'C + B'B$

В силу равенства (1) левая часть будет равна BC. Таким образом, приходим к равенству $BC = B'C' + C'C + B'B$, т.е. в четырехугольнике *B'BCC'* одна сторона равна сумме трех других сторон, но по свойству неравенства четырехугольника любая сторона меньше суммы остальных, значит наше предположение ошибочное.

После этого учитель предлагает обучающимся самостоятельно рассмотреть второй случай (*BC* – секущая к окружности). Поскольку доказательство во втором случае аналогично первому, обучающиеся приходят к выводу, что *BC* не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны *BC*, что и требовалось доказать.

Окружность, описанная около четырехугольника.

Построение модели:

Шаг 1. В произвольном месте среды строим окружность, центр окружности называем *O*.

Шаг 2. Строим произвольный четырехугольник, вершины которого лежат на окружности (Инструмент «Многоугольники»). Вершины четырехугольника называем *A*, *B*, *C* и *D*.

Шаг 3. Строим дополнительный четырехугольник *ABED*, точка *E* лежит внутри окружности. Создаем кнопку, по нажатию на которую будет скрываться и при повторном нажатии показываться четырехугольник *ABED*.

Итоговая модель представлена на рисунке 23.

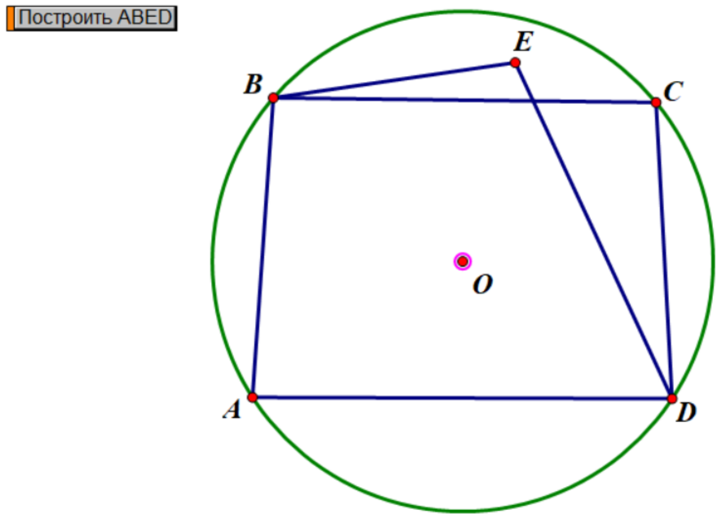


Рисунок 23. – Модель для изучения свойства вписанного четырехугольника

Учитель демонстрирует модель обучающимся и с её помощью вводит понятие описанной окружности и вписанного многоугольника:

- Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

Учитель предлагает обучающимся определить, являются ли представленные на модели четырехугольники вписанным в окружность. Опираясь на определение, обучающиеся делают вывод, что четырехугольник *ABCD* является вписанным, так как все вершины этого четырехугольника лежат на окружности. Затем они делают вывод, что четырехугольник *ABED* не является вписанным, поскольку вершина Е не лежит на окружности. После вывода обучающихся учитель акцентирует внимание обучающихся на том, что в отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Учитель наглядно демонстрирует данный факт, построив дополнительную окружность, которая будет проходить через вершину *E*, но при этом уже не будет проводить через остальные вершины четырехугольника *ABED*. После этого учитель скрывает построенную окружность и отрезки *BE* и *ED*. Далее учитель выводит на модели значения углов четырехугольника *ABCD* и предлагает обучающимся установить закономерность на основе показанных значений. После непродолжительных обсуждений класс приходит к выводу, что суммы противоположных углов равны 180°, затем учитель выводит на модель свойство описанного четырехугольника (Рисунок 24):

- **Свойство**. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных сторон равна 180°.

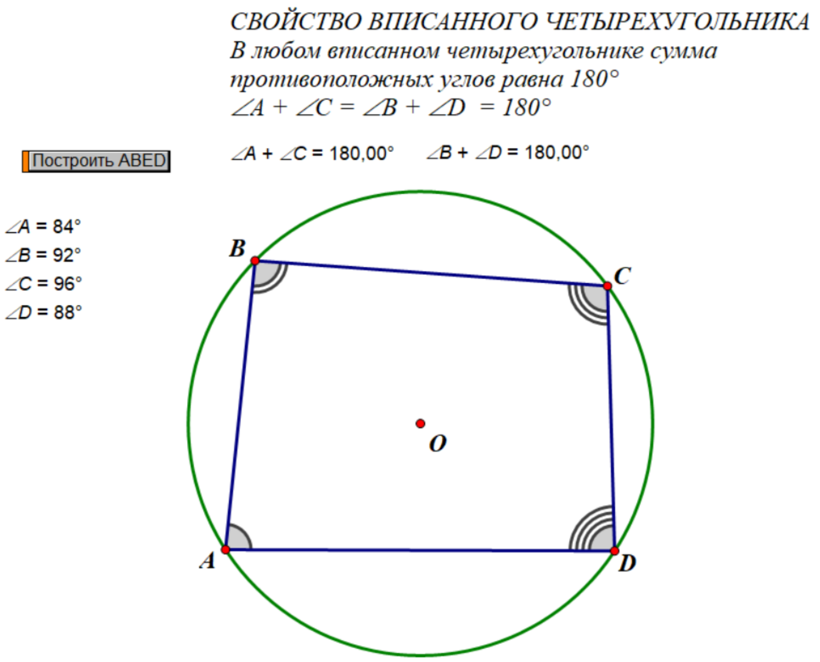


Рисунок 24. – Демонстрация свойства вписанного четырехугольника

Учитель предлагает обучающимся доказать это свойство на этой же модели. По ранее изученной теореме о вписанном угле обучающиеся знают, что вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Для представленной модели это значит: $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle B = \frac{1}{2} \cup ADC$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$, $\angle D = \frac{1}{2} \cup ABC$. Из этого следует следующие равенства:

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} * 360° = 180°.$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} (\cup ADC + \cup ABC) = \frac{1}{2} * 360° = 180°.$$

Полученные равенства верны, поскольку каждая из пар дуг $\cup BCD + \cup BAD$ и $\cup ADC + \cup ABC$ образуют окружность.

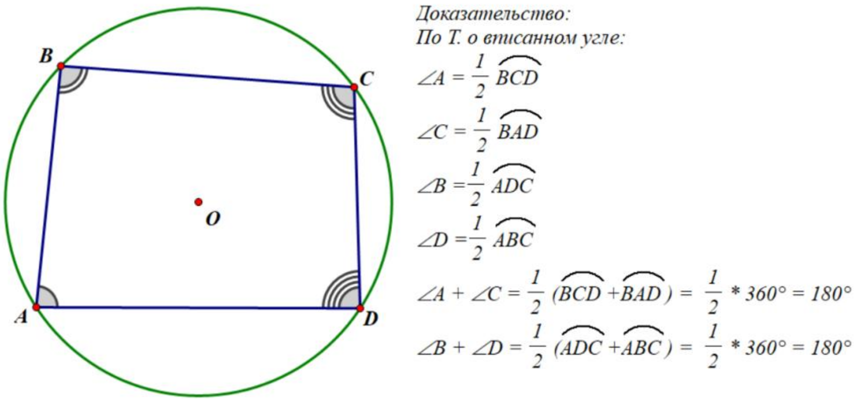


Рисунок 25. – Доказательство свойства вписанного четырехугольника.

После этого учитель предлагает проверить обратное утверждение: *если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность*. Для этого он предлагает решить соответствующую задачу.

Задача. С помощью динамического чертежа выясните, можно ли описать окружность около четырехугольника, если сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180°.

Доказательство. Решение данной задачи рассмотрим на построенной модели. Для начала учитель скрывает все лишние объекты, оставляя на экране только четырехугольник, окружность скрывается с помощью кнопки. По условию задачи нам известно, что сумма противоположных углов равна 180°, значит получаем $\angle A + \angle C = 180°$, обозначим это равенство (1). Построим дуги DAB и BCD (Выделяем соответствующие точки → Вкладка «Построения» → «Дуга по трем точкам») (Рисунок 26).

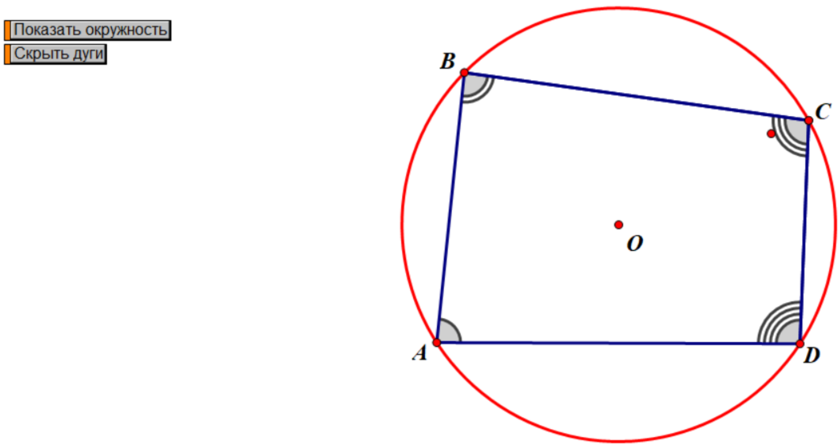


Рисунок 26. – Дополнительные построения к задаче 810

Нам осталось доказать, что эта окружность будет проходить через точку *C*, т.о. дуги *DAB* и *BCD* должны образовывать окружность. Воспользуемся методом «от противного». Предположим, что точка *C* лежит либо внутри окружности, либо вне её. Рассмотрим первый случай. При нём точка *C* является точкой пересечения хорд *BK* и *DJ* (рисунок 27).

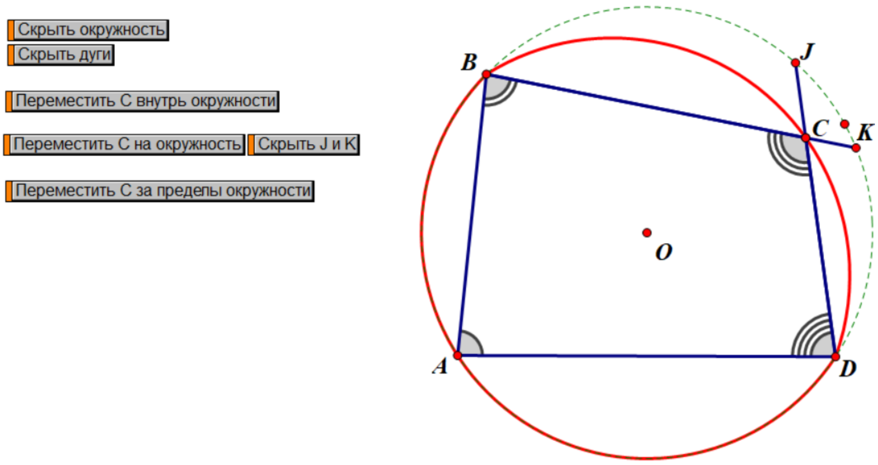


Рисунок 27. – Решение задачи 810.

Тогда воспользуемся теоремой об угле между хордами. Из этой теоремы мы знаем, что угол между хордами равен полусумме двух дуг окружности, заключенными между сторонами угла и их продолжениями. Получим следующее равенство $\angle C = \frac{1}{2}\,(\smile DAB + \smile JK)$. Из полученного равенства можем сделать вывод, что $\angle C > \frac{1}{2} \smile DAB$. Поскольку $\angle A = \frac{1}{2} \smile BJD$, то мы получаем следующее неравенство:

$\angle A + \angle C > \frac{1}{2} (\smile BJD + \smile DAB)$, а поскольку

$\frac{1}{2} (\smile BJD + \smile DAB) = \frac{1}{2} * 360^{\circ} = 180^{\circ}$.

Мы получаем $\angle A + \angle C > 180^{\circ}$, что противоречит условию (1), это значит, что наше предположение ошибочно.

После этого учитель предлагает обучающимся самостоятельно рассмотреть второй случай (точка C лежит вне окружности). Пользуясь предыдущим доказательством и теоремой об угле между секущими, обучающиеся приходят к выводу, что точка C не может лежать вне окружности. Следовательно, точка C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

2.4. Результаты апробации

Проверка проводилась на базе Дзержинской МБОУ ДСШ №2. Работа проводилась в двух восьмых классах. В 8а классе динамические чертежи применялись на уроках всегда, причём обучающиеся не только пользовались готовыми моделями, но и самостоятельно строили чертежи в среде «Живая математика». В 8б классе динамические чертежи использовались редко, они были представлены исключительно готовыми моделями.

Сбор данных осуществлялся в несколько этапов. Сначала был проведён обзор методической литературы по теме использования динамических чертежей в обучении геометрии. На основе этого обзора разработаны анкета для обучающихся. Затем проведены итоговая контрольная работа по теме «Окружность» и анкетирование, после была выполнена статистическая обработка полученных данных. На заключительном этапе проанализированы собранные данные и сформулированы выводы об эффективности использования динамических чертежей при обучении учащихся 8 классов умению решать задачи по теме «Окружность».

Результаты выполнения итоговой контрольной работы в двух классах существенно различаются, результаты представлены на рисунке 28.

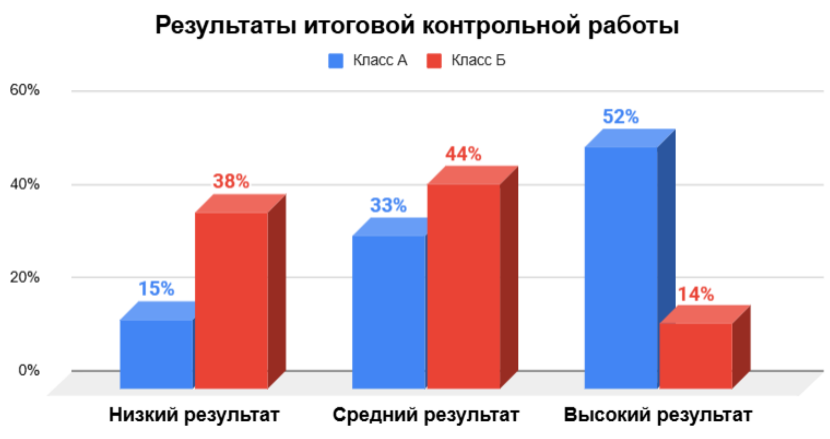


Рисунок 28. – Диаграмма с результатами итоговой контрольной работы по теме «Окружность».

Сравнение результатов итоговой контрольной работы показало, что обучающиеся 8б класса, редко работавшие с динамическими чертежами, справились с заданиями хуже, чем их сверстники из 8а класса, где динамические чертежи использовались постоянно. При этом следует учитывать, что на успеваемость могли повлиять и другие факторы, не связанные с применением динамических чертежей.

Данные, полученные в результате анкетирования, позволяют сделать вывод о том, что динамические чертежи способствуют росту познавательного интереса обучающихся к геометрии. Ниже на диаграммах представлены результаты опроса, наглядно подтверждающие это утверждение (Рисунки 29 – 31).

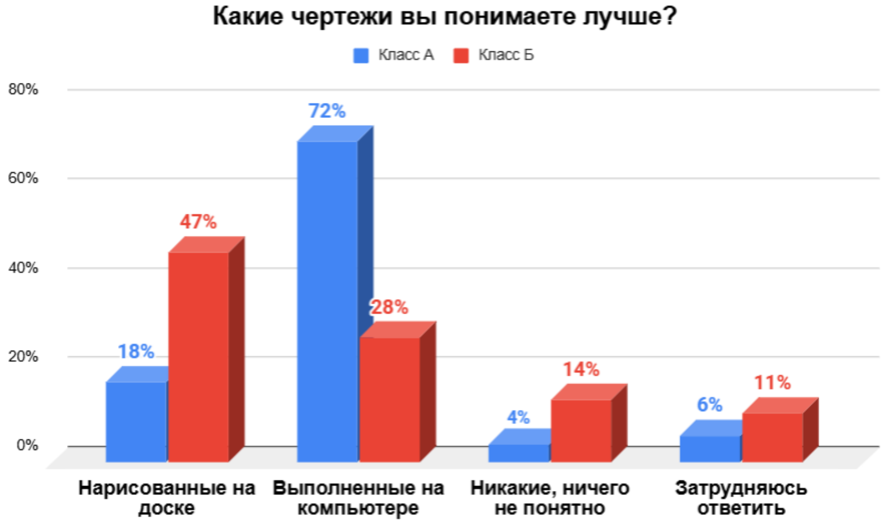


Рисунок 29. – Диаграмма с ответами обучающихся.

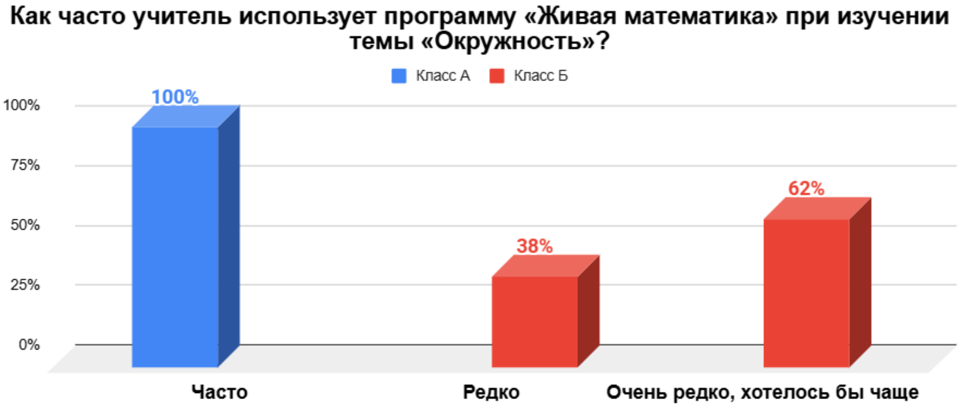


Рисунок 30. – Диаграмма с ответами обучающихся.

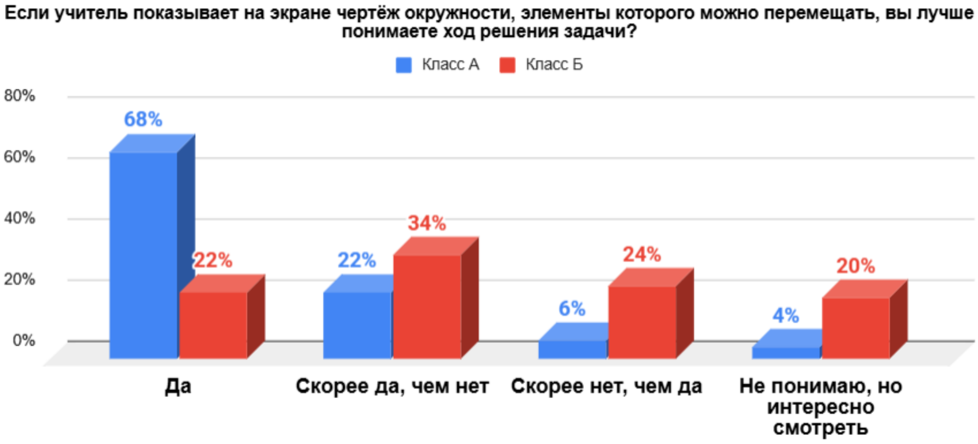


Рисунок 31. – Диаграмма с ответами обучающихся.

Из представленных данных, можно сделать вывод о том, что обучающимся, где активно используются динамические чертежи нравится посещать уроки геометрии, а обучающиеся другого класса, хотели бы, чтобы таких интерактивных уроков было больше. В 8б классе обучающиеся чаще сомневаются при ответе на вопрос, затрудняются отвечать однозначно, так как им сложно судить об эффективности такого подхода в решении задач, ведь его используют не часто, однако большинство хотели бы, чтобы динамические чертежи-иллюстрации присутствовали как можно чаще при решении задач в классе.

Таким образом, результаты апробации показали, что систематическое использование динамических чертежей и самостоятельное построение моделей обучающимися положительно сказались на формировании умений решать задачи по теме «Окружность». В классе, где динамические чертежи применялись постоянно, школьники лучше понимали геометрический материал, увереннее решали задачи на построение и доказательство, а также проявляли более устойчивый интерес к урокам геометрии. В классе, где динамические чертежи использовались редко и только в виде готовых моделей, обучающиеся чаще испытывали затруднения при решении сложных задач, их ответы были менее уверенными, а интерес к предмету – ниже. Сопоставление данных анкетирования и результатов контрольной работы позволяет утверждать, что применение динамических чертежей, особенно при условии самостоятельного построения, является эффективным средством формирования у обучающихся умений решать задачи по теме «Окружность».

Чтобы использование динамических чертежей в курсе геометрии основной школы давало максимальный результат, учителю необходимо наряду с общедидактическими принципами руководствоваться следующими частными дидактическими принципами:

1. *Принцип синхронности использования динамических чертежей*: использование конструктивных, измерительных и вычислительных возможностей систем динамической математики должно быть синхронизировано по времени с курсом геометрии в школе. В соответствии с этим принципом использование динамических чертежей при изучении геометрии рекомендуется начинать не в старшей школе, и даже не в 9 классе, а гораздо раньше, например, в 5 или в 6 классе. Не будет поздно это сделать и в 7 классе, одновременно с началом изучения курса геометрии. Обучающиеся на этом этапе обучения ещё не озабочены проблемами подготовки к ОГЭ и ЕГЭ, они с удовольствием и интересом выполняют простейшие геометрические построения виртуальными инструментами, решают задачи прикладного и исследовательского характера, готовятся к участию в турнирах и конкурсах.

2. *Принцип самостоятельности использования динамических чертежей*: применение динамических чертежей при обучении геометрии даст максимальный дидактический эффект, если конструктивные, измерительные, вычислительные и любые другие возможности систем динамической математики будут использоваться самими обучающимися максимально самостоятельно. Если обучающимся постоянно предлагать подготовленные заранее учителем математики или другими субъектами образовательной деятельности готовые модели динамических чертежей, то это не будет способствовать формированию умений решать задачи без посторонней помощи. Обучающиеся, которые умеют самостоятельно строить динамические чертежи, удовлетворяющие условию задачи, более успешны в

их решении, поскольку на таких чертежах можно легко выполнять дополнительные построения, без особых трудностей удалять неудачные построения, проверять найденное решение с помощью измерений и вычислений.

3. *Принцип приоритета компьютерной анимации при использовании динамических чертежей*: применение компьютерной анимации при обучении геометрии заметно оживляет и разнообразит учебный процесс. На первых порах можно использовать так называемую ручную анимацию, которая реализуется с помощью простого перемещения мышкой геометрического объекта или его фрагмента, например, вершины многоугольника. Позднее обучающиеся знакомятся с кнопочной, параметрической и ползунковой анимацией, которые позволяют не только наблюдать за тем или иным геометрически объектом во всём его многообразии, но и проводить простейшие исследования в стиле экспериментальной математики.

4. *Принцип непрерывности использовании динамических чертежей*: применение компьютерной анимации при обучении геометрии даст максимально положительный педагогический эффект, если эти чертежи использовать не фрагментарно, и не эпизодически, а регулярно, желательно в большинстве разделов и тем курса геометрии. Естественно, делать это только тогда, когда динамические чертежи уместны, и без всякого сомнения способствуют повышению качества обучения. Идеально будет, если у учителя математики помимо курса геометрии появится возможность вести элективный курс или кружковые занятия по использованию динамических чертежей в дополнительных разделах курса математики.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы все поставленные задачи были решены, цель исследования достигнута. Отметим основные результаты исследования.

В первой главе выполнен анализ типологии задач по теме «Окружность» в школьном учебнике геометрии, выявлены ограничения статичных чертежей, затрудняющие формирование у обучающихся умения решать задачи данного раздела. Изучены конструктивные возможности среды «Живая математика» и дидактический потенциал готовых моделей из библиотеки «1С:Урок» как средств обучения решению задач с использованием динамических чертежей.

Во второй главе разработаны и апробированы приёмы и методы применения динамических чертежей при обучении учащихся 8 класса умению решать задачи по теме «Окружность». На примере трёх разделов темы показано, как динамические чертежи позволяют: формировать умение анализировать условие задачи через визуализацию различных частных случаев; развивать умение выдвигать и проверять гипотезы в ходе компьютерного эксперимента; отрабатывать умение применять теоремы при решении задач на вычисление, доказательство и построение. Результаты апробации подтвердили эффективность предложенной методики: в классе с постоянным использованием динамических чертежей и самостоятельным построением моделей обучающиеся успешнее справлялись с решением задач, чем в классе, где динамические чертежи использовались редко.

Библиографический список

[1] *Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р.* Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе. г. Красноярск: Изд-во Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2019. 164 с.

[2] *Алексашов А.А.* Магистерская диссертация: Исследовательский подход к обучению геометрии в 9 классе на базе системы динамической геометрии Живая математика. г. Красноярск, 2020.

[3] *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Математика. Геометрия 7 – 9 классы: учебник. М.: Просвещение, 2023. 416 с.: ил.

[4] Библиотека интерактивных материа [Электронный ресурс] // Официальный сайт «1С» : Библиотека «1С:Урок». — Режим доступа: URL: https://urok.1c.ru/library/

[5] *Болдов С.С., Солощенко М.Ю.* Использование учебно-методического комплекта "Живая математика" в процессе обучения геометрии / Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования. 2015. Барнаул. С. 1758-1762

[6] *Габитова А.З.* Использование УМК «Живая математика» при изучении темы «Окружность и круг» 8 класс [Электронный ресурс]. URL:https://www.surwiki.admsurgut.ru/wiki/images/7/7e/Габитова_Альфия_Зияевна_МБОУ_СОШ_12_Живая_математика_21_03_16.pdf

[7] *Ганичева Е.М.* Моделирование средствами программной среды "живая математика" как метод решения задач с элементами исследования. / Математический вестник педвузов и университетов волго-вятского региона / 2017 стр. 313

[8] Геометрия на подвижных чертежах / Сгибнев А. И.; под ред. А.Д. Блинкова. М.:МЦНМО , 2019. 184 с.

[9] *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе// Сценарии уроков. 2018. С. 21-31.

[10] *Дубровский В.Н.* Визуализация функциональных зависимостей в программах динамической геометрии // КИО. 2020. №4. С. 93-112.

[11] *Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А.* 1С:Математический конструктор – новая программа динамической геометрии // КИО. 2007. №3. С. 47-56.

[12] *Дубровский, В.Н.* 1С:Математический конструктор: направления развития // Новые информационные технологии в образовании: Применение технологий "1С" для повышения эффективности деятельности организаций образования : Сборник научных трудов Четырнадцатой Международной научно-практической конференции "Применение технологий "1С" для повышения эффективности деятельности организаций образования"; М., 28–29 января 2014 г. М: Общество с ограниченной ответственностью "1С-Паблишинг", 2014. С. 210-212.

[13] Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов. Шабат Г.Б., Чернявский В.М., Кулагина В.В., Смолина Л.М., Боровикова В.Н., Дубровский В.Н., Аджемян Г.А., Пантуев А.В. М.: ИНТ, 2013. 205 с

[14] *Иванов С.Г., Рыжик В.И.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «живая математика» // Информатика и образование. 2016. №7. С.45-48.

[15] *Кириллова Д.А.* Применение среды Geogebra при изучении темы "уравнение окружности" как способ перехода к решению задач с параметром // Наука и школа. 2022. №2. С. 152-160.

[16] Концепция развития математического образования в Российской Федерации (в редакции Распоряжения Правительства Российской Федерации от 08.10.2020 № 2604-р)

[17] Кугуелова О.*Н.* Учебно-методический комплект “Живая математика” и его применение на уроках геометрии // Вестник московского государственного педагогического университета. Серия:

Информатика и информатизация образования. М., 2008. №11. С. 232-234.

[18] *Майер В.Р.* Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2012 №4

[19] *Майер В.Р., Апакина Т.В.* Компьютерная Анимация в среде Живая математика на уроках геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании : материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием; г. Красноярск, 18–19 ноября 2015 года г. Красноярск: Изд-во Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2015. С. 59-64.

[20] *Майер В.Р., Ёлгина М.В., Аржанникова Н.С., Виштель П.О.* Компьютерное геометрическое конструирование заданий занимательного характера как средство развития пространственного воображения обучающихся основной школы на уроках математики // известия вгпу. 2023. №6 (179). С. 94-97.

[21] *Майер, В.Р., Семина, Е.А.* Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров — будущих учителей математики. г. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2014. 516 с.

[22] *Манченкова Е.О.* Магистерская диссертация: Методика использования анимационных возможностей компьютерной среды Живая математика при обучении геометрии в 8 классах. г. Красноярск, 2017.

[23] *Матвеев С.Н., Нуждина О.Е.* Сравнительный анализ информационных средств «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Математические методы и информационно-технические средства: Материалы XX Международной научно-практической конференции. Краснодар, 2024. С. 186-193.

[24] Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 "Об утверждении федерального образовательного стандарта основного общего образования"

[25] *Селевко Г.К.* Современные образовательные технологии: учебное пособие. М.: Народное образование, 2018. 256 с.

[26] *Сенчилов В.В.* Применение интерактивных технологий при изучении курса геометрии в школе // Концепт. 2013. №10 (26). С. 1-6.

[27] Федеральный государственный стандарт основного общего образования: утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 18 июня 2025 г. № 467.

[28] *Фунтиков Р.А.* Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Молодой ученый. 2018. № 33 (219). С. 8-11.

[29] *Хайрутдинова А.А., Чернышова И.Н.* Применение программы 1С: Математический конструктор на уроках геометрии // Вестник науки. 2023. №6 (63). С. 426-430.

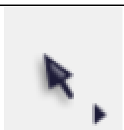
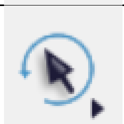
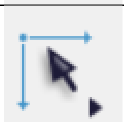
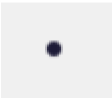
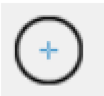
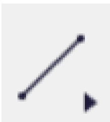
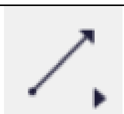
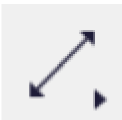
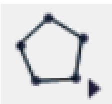
[30] *Шабат Г.Б.* «Живая математика» и математический эксперимент // Вопросы образования. 2005. №3. С. 156-165.

[31] *Ширикова Т.С.* Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием Geogebra: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Архангельск, 2014.

Приложения

Приложение 1.

Таблица. Инструменты Живой математики

Иконка	Название инструмента	Комментарий по использованию
	Стрелка	Позволяет перемещать выбранный объект по рабочему полю
	Стрелка Поворота	Позволяет вращать выбранный объект вокруг фиксированной точки
	Стрелка Растяжения	Позволяет изменять размеры выбранного объекта
	Точка	Позволяет создавать объект «Точка» в любом месте рабочего поля, на любом месте другого объекта, в местах пересечения двух и более объектов и т.д.
	Циркуль	Позволяет построить окружность с двумя точками: одна в центре окружности, другая на окружности.
	Отрезки	Позволяет построить отрезок в любом месте рабочего поля. Так же можно соединить любые две исходные точки
	Лучи	Позволяет построить луч в любом месте рабочего поля. Так же можно луч из любой исходной точки
	Прямые	Позволяет построить прямую в любом месте рабочего поля. Так же можно провести прямую через две исходные точки
	Многоугольники	Позволяет построить произвольный многоугольник в любом месте рабочего поля. Двойное нажатие по последней точке многоугольника завершает построение.
	Внутренняя область многоугольников	Позволяет построить внутреннюю область произвольного многоугольник в любом месте рабочего поля. У построенного многоугольника будет закрашена внутренняя область. Двойное нажатие по последней точке многоугольника завершает построение.

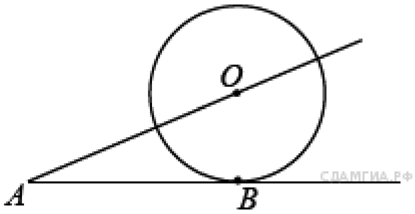
	Многоугольник с внутренней областью	Позволяет построить произвольный многоугольник в любом месте рабочего поля. У построенного многоугольника будет закрашена внутренняя область. Двойное нажатие по последней точке многоугольника завершает построение.
	Текст	Позволяет давать названия любым объектам на рабочем поле путем нажатия на них. Позволяет создавать текстовые блоки.
	Маркер	Позволяет пользователю рисовать маркером в пределах рабочего поля. Позволяет отмечать углы, отмечать равные прямые.
	Информация	Позволяет узнать информацию об интересующем объекте на рабочем поле. Для получения информации необходимо нажать по объекту.
	Инструмент пользователя	Позволяет пользователю создать собственный инструмент. Для этого должна быть построена какая-либо конфигурация на рабочем поле, после чего её можно сохранить в виде инструмента. Существует возможность загрузить инструменты с помощью дополнительных файлов.

Приложение 2.

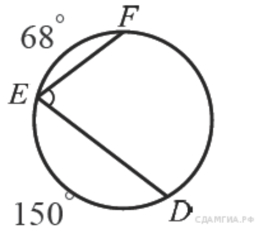
Итоговая контрольная работа по теме «Окружность»

Вариант 1

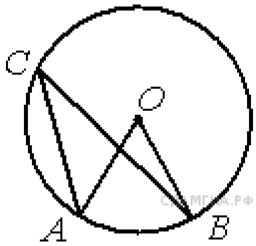
1. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $AO = 13$ см.



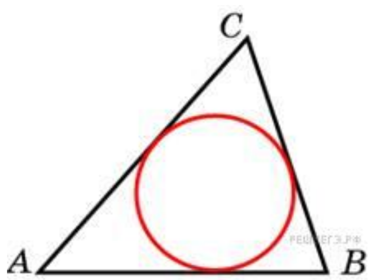
2. Найдите $\angle DEF$, если градусные меры дуг DE и EF равны 150° и 68° соответственно.



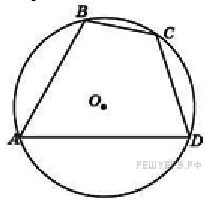
3. Точка O — центр окружности, $\angle AOB = 84°$ (см. рисунок). Найдите величину угла ACB (в градусах).



4. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

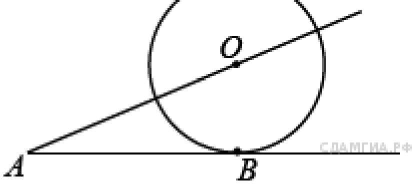


5. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как $4 : 2 : 3 : 6$. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

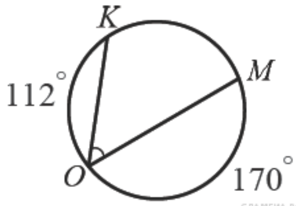


Вариант 2

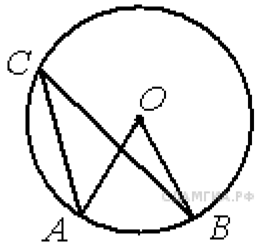
1. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $OA = 15$ см.



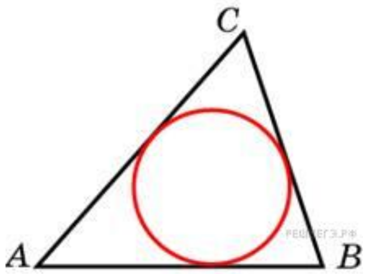
2. Найдите $\angle KOM$, если градусные меры дуг KO и OM равны 112° и 170° соответственно.



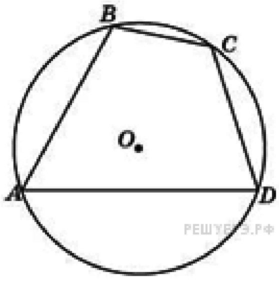
3. Точка O — центр окружности, $\angle ACB = 24°$ (см. рисунок). Найдите величину угла AOB (в градусах).



4. Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



5. Стороны четырехугольника $ABCD$ AB, BC, CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно $95°$, $49°$, $71°$, $145°$. Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



Приложение 3.

Анкета для обучающихся

Класс ________________________________

1. Какие чертежи по теме «Окружность» вы понимаете лучше?

А) нарисованные на доске;

Б) выполненные на компьютере (динамические, подвижные);

В) никакие, ничего не понимаю;

Г) затрудняюсь ответить.

2. Как часто учитель использует программу «Живая математика» при изучении темы «Окружность»?

А) часто;

Б) редко;

В) очень редко, хотелось бы чаще.

3. Если учитель показывает на экране чертёж окружности, элементы которого можно перемещать (точки, прямые, углы), вы лучше понимаете ход решения задачи?

А) да;

Б) скорее да, чем нет;

В) скорее нет, чем да;

Г) не понимаю, но интересно смотреть.

4. Как вы считаете, использование программы «Живая математика» помогло бы вам лучше разобраться в теме «Окружность»?

А) да;

Б) скорее да, чем нет;

В) скорее нет, чем да;

Г) не помогло бы;

Д) затрудняюсь ответить.

5. Вам интересны уроки геометрии, когда учитель использует подвижные чертежи при решении задач на окружность?

А) однозначно да;

Б) скорее да, чем нет;

В) скорее нет, чем да;

Г) затрудняюсь ответить.

6. Какие уроки вам кажутся более интересными и понятными: те, где учитель использует компьютер с динамическими чертежами (подвижные окружности, углы, прямые), или те, где чертит только на доске? Почему?

____

____

____