МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО	ОДОБРЕНО
На заседании кафедры Протокол № 8 от «06» мая 2026 Зав кафедрой М.Б. Шашкина	на заседании НМСС(Н) ИМФИ протокол № 8 от 14 мая 2026 Председатель Е.А. Аёшина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по математическому анализу

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) Физика и математика
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию
«Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составитель: М.Б. Шашкина, доцент
(ФИО, должность)
Н.А. Журавлева, доцент
(ФИО, должность)

Красноярск 2026

Фонд оценочных средств по дисциплине «Математический анализ»

Раздел 1

Тест входного контроля

1. Функция f называется ограниченной на множестве X, если
а) существует такое число $M > 0$, что $f(x) \le M$;
б) существует такое число $M > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$;
в) для любого числа $M > 0$ существует такое $x \in X$, что $|f(x)| \le M$;
г) для любого $x \in X$ существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$.

2. Областью определения функции $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 + x - 1)} + \dfrac{x+2}{x-3}$ является множество:
а) (-2;1);
б) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$;
в) $(-\infty;-2] \cup (3;+\infty)$;
г) $(-\infty;-2] \cup [1;3) \cup (3;+\infty)$.

3. Множеством значений функции $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$. является множество:
а) $[0;+\infty)$; б) [0;1]; в) [1;3]; г) $[1;+\infty)$.

4. Функция $f(x) = \dfrac{\sin 5x - 2\cos x}{6 + ctg^2 x}$
а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;
б) ограничена;
в) не ограничена ни сверху, ни снизу;
г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

5. Функция $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$ убывает на:
а) $(-\infty;0]$;
б) $[0;+\infty)$;
в) $(-\infty; +\infty)$;
г) $(-\infty; \sqrt{2})$.

6. Наименьший положительный период функции $f(x) = \sin\dfrac{x}{3} + \cos\dfrac{2x}{5}$ равен:
а) 2π;
б) 8π;
в) 15π;
г) 30π.

7. Функция $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{1 + 3^x}$ является:
а) четной;
б) нечетной;
в) ни четной, ни нечетной.

Тест по теме 1

1. Последовательность $x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ при } n \text{ нечетном} \\ \dfrac{n^2+1}{n} \text{ при } n \text{ четном} \end{cases}$ является:

а) бесконечно большой;
б) бесконечно малой;
в) неограниченной, но не бесконечно большой;
г) ограниченной, но не бесконечно малой.

2. Последовательность $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ является:

а) ограниченной, но не бесконечно малой;
б) бесконечно большой;
в) бесконечно малой;
г) неограниченной, но не бесконечно большой.

3. Дана последовательность чисел x_n. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 0$. Какой из ниже приведенных выводов будет правильным:

а) последовательность x_n является бесконечно малой;
б) последовательность x_n не является бесконечно малой;
в) последовательность x_n является бесконечно большой;
г) нельзя сделать ни вывод а), ни вывод б), ни вывод в).

4. Последовательность x_n ограничена. Что можно сказать о сходимости этой последовательности:

а) сходится к числу 0;
б) расходится;
в) может сходиться и расходиться;
г) сходится к числу, отличному от нуля.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Что можно сказать о пределе последовательности $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ не существует;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ существует, но не равен 1;

г) нельзя сделать ни вывод а), ни вывод б), ни вывод в).

6. Известно, что последовательность $y_n = 3^n(x_n - 3)$ является бесконечно малой. Что можно сказать о пределе последовательности x_n.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$;

г) нельзя сделать ни вывод а), ни вывод б), ни вывод в).

Вопросы к коллоквиуму

1. Определения непрерывной в точке функции, их геометрический смысл. Примеры.
2. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций.
3. Теорема о непрерывности сложной функции.
4. Точки разрыва функции и их классификация.
5. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.
6. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.
7. Теорема о непрерывности обратной функции.
8. Понятие непрерывной функции в школьном курсе математики.
9. Понятие степени с иррациональным показателем.
10. Показательная функция на множестве действительных чисел, ее основные свойства и график.
11. Логарифмическая функция на множестве действительных чисел, ее основные свойства и график.
12. Тригонометрические функции, их основные свойства и графики.
13. Обратные тригонометрические функции, их основные свойства и графики.

Задания для типовых контрольных работ

Примеры возможных заданий для организации контрольных работ или индивидуальных работ по разделам. Если рассматривать их как примеры заданий для контрольной, то в некоторых случаях подразумевается не одна, а две контрольные.

1. Исследуйте последовательность $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$ на монотонность и ограниченность.
2. Пользуясь определениями пределов (по Коши) докажите:

   1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(3-4x)=-1$.
3. Вычислите пределы последовательностей и функций или установить их расходимость: 1)

   $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+9)(4-n)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n}-n)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^{5n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n^2+9}}$;

   5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{tgx\cdot\sin 4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\log_5(x-1)}{e^{2x}-e^4}$
4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $\{b_n\}$ - произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что

   $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$? Приведите соответствующие примеры (контрпримеры).
5. Исследовать функцию на непрерывность.

Вопросы к зачету

1. Числовые множества. Действительные числа.
2. Ограниченные числовые множества. Окрестность точки.
3. Функция. Способы задания функций. Основные элементарные функции.
4. Числовые последовательности. Предел последовательности.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых.
6. Арифметические операции над пределами. Предельный переход в неравенствах.
7. Предел монотонной числовой последовательности. Число *e*.
8. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
9. Предел функции в точке и на бесконечности (различные определения, примеры, иллюстрации).
10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых.
11. Теорема о связи предела функции и бесконечно малой функции.
12. Основные теоремы о пределах функции.
13. Первый замечательный предел.
14. Второй замечательный предел.
15. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.
16. Непрерывность функции в точке (примеры, иллюстрации).
17. Односторонние пределы. Точки разрыва функции. Их классификация.
18. Непрерывность функции на множестве. Свойства непрерывных функций.

Раздел 2

Тест входного контроля

1.Функция f называется ограниченной на множестве X, если

а) существует такое число $M > 0$, *что* $f(x) \le M$;

б) существует такое число $M > 0$, *что* для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$;

в) для любого числа $M > 0$ существует такое $x \in X$, что $|f(x)| \le M$;

г) для любого $x \in X$ существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$.

2.Число a называется пределом числовой последовательности x_n, если

а) для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;

в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех четных $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;

г) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $x_n<a + \varepsilon$.

3. Функция f, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

а) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta>0$ и такие x, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x < x_0+\delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

г) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

4. Точка x_0 является точкой разрыва II рода для функции f, если:

а) предел функции f в точке x_0 не существует; б) функция f не определена в точке x_0;

в) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$; г) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

5. Формула $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x \le 0, \\ x^2, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ x-1, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$.

а) задает функцию на $(-\infty; +\infty)$; б) задает функцию на $[-1;1]$;

в) не задает функцию на $(-\infty; +\infty)$; г) задает функцию на $(-\infty; 0] \cup [1;+\infty)$.

6. Для функции $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 + x - 1)} + \dfrac{x+2}{x-3}$ $D(f) =$

а) $(-2;1)$; б) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$; в) $(-\infty;-2] \cup (3;+\infty)$; г) $(-\infty;-2] \cup [1;3) \cup (3;+\infty)$.

7. $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$. $E(f) =$

а) $[0;+\infty)$; б) $[0;1]$; в) $[1;3]$; г) $[1;+\infty)$.

8. Функция $f(x) = \dfrac{\sin 5x - 2\cos x}{6 + ctg^2 x}$

а) ограничена сверху, но не ограничена снизу; б) ограничена;

в) не ограничена ни сверху, ни снизу; г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

9. Функция $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$ убывает на:

а) $(-\infty;0]$; б) $[0;+\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; \sqrt{2})$.

10. Наименьший положительный период функции $f(x) = \sin\dfrac{x}{3} + \cos\dfrac{2x}{5}$ равен:

а) 2π; б) 8π; в) 15π; г) 30π.

11. Функция $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{1 + 3^x}$ является:

а) четной; б) нечетной; в) ни четной, ни нечетной.

12. Если (α_n) – бесконечно малая, а (x_n) – ограниченная, то $(\alpha_n \cdot x_n)$

а) не имеет предела; б) бесконечно малая;
в) бесконечно большая; г) ничего определенного сказать нельзя.

13. Если (x_n) и (y_n) бесконечно малые при $n \to \infty$, и $y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$

а) равен 0; б) равен 1;
в) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя; г) равен $+\infty$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{2n+1} =$

$а) 1;$ $б) e^2;$ $в) e^{-\frac{2}{3}};$ $г) \infty.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} =$

а) 0; б) –4; в) 4; г) 2.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$

$а) 0;$ $б) \frac{1}{2};$ $в) 1;$ $г) \infty.$

17. *Функция* $f(x)=\begin{cases} -x^2, & если\ x<0, \\ x^2, & если\ x>0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$

а) непрерывна; б) непрерывна только слева;
в) непрерывна только справа; г) разрывна.

18. *Функция* $f(x)=\begin{cases} -1, & если\ x<-1, \\ \frac{1}{x}, & если\ -1<x<0, \\ x, & если\ 0\le x\le 1, \\ 2, & если\ x>1. \end{cases}$

терпит разрывы первого рода в точках:
а) x = 0; x = 1; б) x = ±1; в) x = -1; x = 0; г) x = ±1; x = 0.

Задания для типовых контрольных работ

1. Найдите производную функции $y = \sqrt{4x+5}$, пользуясь определением.

2. Найти производную y':

а) $y = (ctgx)^{\sin x}$; б) $x^2 + 4\ln(x^2 + y^2) = \sqrt{y}$; в) $\begin{cases} x = e^{2t} \cdot (2t^2 + t); \\ y = e^t \cdot (t^4 + 2t). \end{cases}$

3. Найти производную второго порядка $y'' - ?$ $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

4. Составить уравнения касательной прямой и нормали, проведенных к графику функции $y = 3x - \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

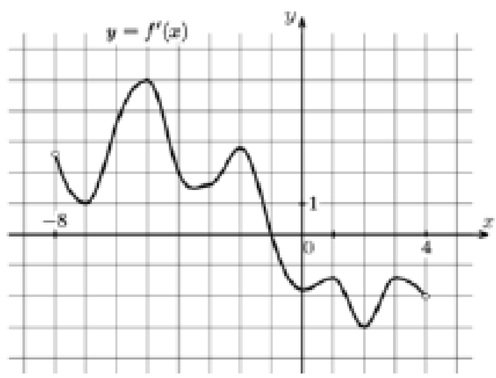
5. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

6. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$.

7. Найти точки экстремума и точки перегиба функции $y = x^4 - 6x^2 - 12$.

8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производная функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–8; 4). В какой точке отрезка [–7; –3] функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?



9. Построить возможный эскиз график функции $y = f(x)$, дифференцируемой во всех точках области определения, удовлетворяющий следующим данным:

1) $D(f): R \setminus \{-1;\ 2\}$; 2) асимптоты: $x = -1$, $x = 2$, $y = x - 1$; 3) точки пересечения с осями координат: (3; 0), (0; 2); 4) точка максимума x= - 2, точка минимума x= 0,5; 5) точек перегиба нет.

10. Разложить многочлен $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$ по степеням (x – 1).

Вопросы к зачету

1. Определение производной функции одной действительной переменной.
2. Дифференцируемость функции.

3. Правила дифференцирования. Вычисление производных основных элементарных функций.
4. Дифференцирование сложных функций. Производная обратных функций.
5. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.
6. Дифференциал и его применение.
7. Производные и дифференциалы высших порядков.
8. Касательная прямая. Геометрический смысл производной и дифференциала.
9. Физический смысл производной.
10. Основные теоремы дифференциального исчисления.
11. Многочлен и формула Тейлора.
12. Правила Лопиталя.
13. Исследование функций с помощью производных (монотонность, признаки монотонности).
14. Исследование функций с помощью производных (экстремумы функции, необходимое условие экстремума и достаточное условие экстремума).
15. Исследование функций с помощью производных (выпуклость функции, точки перегиба).
16. План построения графика функции. Асимптоты.
17. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Разделы 3, 4

Тест входного контроля

Часть 1. *В заданиях 1–15 укажите букву правильного ответа*

1. Дана функция $y = \sqrt[3]{x}$. Ее производная в точке $x_о = 2$, согласно определению, находится по формуле:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; **в)** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x+2}-\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; **г)** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}-\sqrt[3]{2}}{\Delta x}$.

2. Непрерывность функции для ее дифференцируемости является условием

а) необходимым; **в)** необходимым и достаточным;

б) достаточным; **г)** ни необходимым, ни достаточным.

3. Функция дифференцируема в точке $x_о$, если

а) она непрерывна в точке $x_о$;

б) имеет в этой точке производную;

в) имеет в точке $x_о$ односторонние производные;

г) существует предел функции в точке $x_о$.

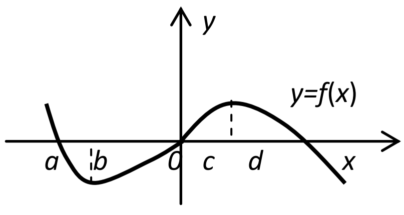


Рис. 1

4. Верно ли, что если функция f дифференцируема в точке $x_о$ n раз, то она дифференцируема в точке $x_о$ $(n–1)$ раз ?

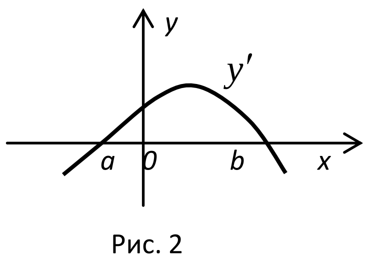


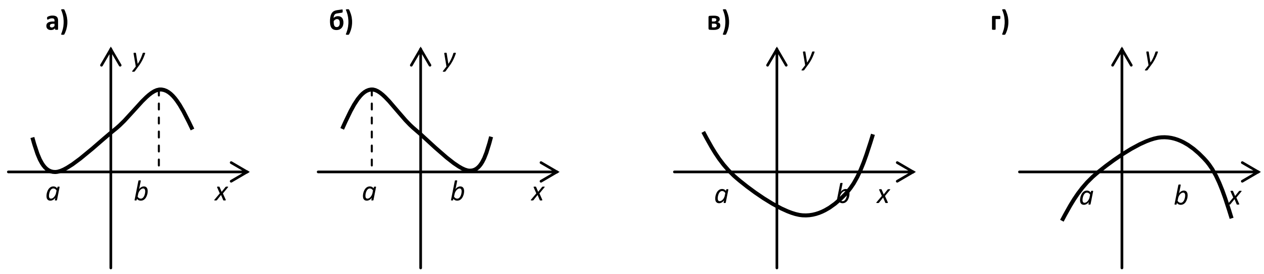
Рис. 2

а) да; **в)** ничего определенного сказать нельзя;
б) нет; **г)** другой вариант.

5. На рис. 1 изображен график функции $y = f(x)$. Производная y' равна нулю в точках

а) $a, 0, d$; **б)** b, c; **в)** $b, 0, c$; **г)** a, b, c.

6. На рис. 2 изображен график производной некоторой функции. Какой из рис. **а)–г)** изображает вид графика функции ?



7. На рис. 3 изображен график функции f. Какие из утверждений 1–5 истинны:

1) функция f дифференцируема на множестве R;
2) функция f не дифференцируема в точке $x_о = 0$;
3) функция f имеет в точке $x_о = 0$ экстремум;
4) функция f не имеет в точке $x_о = 0$ экстремума;
5) точка $x_о = 0$ – критическая точка функции ?

а) 1), 2), 5); **б)** 2), 3); **в)** 2), 4), 5); **г)** 2), 3), 5).

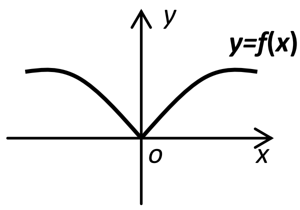


Рис. 3

8. Производная функции $y = e^{2x}$ равна

а) e^{2x}; **б)** $2e^{2x}$; **в)** 0; **г)** $2e^{2x-1}$.

9. Главной частью приращения $\Delta f(x_о)$ дифференцируемой в точке $x_о$ функции f является выражение

а) $f'(x_о)$; **б)** $f(x_о+\Delta x) - f(x_о)$;

в) $f'(x_о)\Delta x,\ f'(x_о) \neq 0$; **г)** $o(\Delta)\,\Delta x$.

10. Геометрически дифференциал функции в точке означает

а) приращение ординаты точки кривой;
б) приращение ординаты точки касательной;
в) тангенс угла наклона касательной к оси OX;
г) отрезок секущей, заключенный между точками на кривой.

11. Дифференциал функции $y = \arcsin 2x$ равен

а) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; **б)** $\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; **в)** $\dfrac{dx}{2\sqrt{1-4x^2}}$; **г)** $\dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. Угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = \dfrac{2x+1}{x}$ в точке $x_о = 1$, равен

а) 0; **б)** 1; **в)** -1; **г)** 3.

13. Функция $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x}$ имеет минимум в точке

а) $\frac{4}{5}$; **б)** $\frac{4}{3}$; **в)** 0; **г)** 1.

14. Наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ на отрезке [1;2] равно
а) 8; **б)** 27; **в)** 64; **г)** 48.

15. Кривая, изображенная на рис. 4, выпукла вверх на промежутке
а) $(x_2; x_3)$; **б)** $(x_1; 0)$; **в)** $(x_1; x_3)$; **г)** $(0; x_4)$.

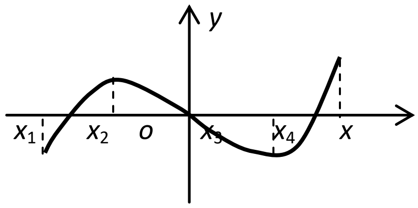


Рис. 4

***Часть 2.** В заданиях 16–20 запишите ответ*

16. Приведите пример функции непрерывной, но не дифференцируемой в точке x=1.

17. Приведите пример функции, которая имеет в точке x_o экстремум, но не дифференцируема в ней.

18. Является ли функция $y = \begin{cases} 2x+1, & x \le 0, \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$ дифференцируемой в точке x_o=0 ?

19. Найдите производную функции $y = \ln^2 \sqrt{3x+4}$.

20. Найдите значение $y''(0)$ для функции $y = e^{2x}$.

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие первообразной, основные теоремы о первообразных. Примеры. Условие, при котором данная функция является первообразной некоторой функции на промежутке.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования, примеры.
5. Метод замены переменной. Примеры.
6. Метод интегрирования по частям. Примеры.
7. Интегрирование рациональных функций, метод неопределенных коэффициентов.
8. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.
9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

Темы докладов

1. Вычисление площадей в полярных координатах с помощью определенного интеграла.
2. Принцип Кавальери.
3. Кривизна плоской кривой.
4. Площадь поверхности вращения.

5. Теоремы Гульдина–Паппа.
6. Вычисление моментов инерции с помощью определенного интеграла.
7. Вычисление работы переменной силы с помощью определенного интеграла.

Задания для типовых контрольных работ

1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{(x+\sqrt{x})^2 dx}{(x+1)\sqrt{x^3}}$; 2) $\int \frac{4^x}{\sin^2(3\cdot 4^x+2)}dx$; 3) $\int (5x^2-4)\sin 2x dx$; 4) $\int \frac{x+3}{x^2+8x+12}dx$;

5) $\int \sin^5 3x dx$; 6) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2. Приведите пример функции $y=f(x)$ такой, что интеграл $\int f(x)\cdot\frac{dx}{2\cos x-3}$ будет вычисляться метод замены переменной, и приведите его решение.

3. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_1^2 (x^2+2)\cdot\ln x dx$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$; 3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)^2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-6x+3$, $y=-2x+3$. Сделать чертеж.

5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$. Сделать чертеж.

6. Решить дифференциальные уравнения: 1) $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$, 2) $xy'+y=y^2$

7. Найти частное решение уравнения $x\sqrt{1+y^2}=-yy'$ при данном начальном условии: $y(2)=0$.

Вопросы к зачету

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства первообразных и неопределенных интегралов.
2. Таблица интегралов.
3. Основные методы интегрирования (непосредственное, метод замены переменной).
4. Основные методы интегрирования (интегрирование по частям).
5. Интегрирование простейших правильных рациональных функций.
6. Общее правило интегрирования рациональных функций.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование некоторых видов иррациональностей
9. Определенный интеграл (интеграл Римана). Его геометрический смысл. Основные свойства определенного интеграла.
10. Классы интегрируемых функций.

11. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.
12. Интегрирование методом подстановки, методом интегрирования по частям.
13. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
14. Несобственные интегралы (1 и 2 рода).
15. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции, площадь криволинейного сектора.
16. Длина дуги плоской кривой.
17. Вычисление объема тел по известным площадям параллельных сечений. Объем и площадь поверхности тела вращения.
18. Приложения определенного интеграла в физике.
19. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
20. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
21. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Раздел 5

Тест входного контроля

1. Первообразной для функции $y = cos^2 x$ на множестве R является функция

A. $y = \sin^2 x$ B. $y = \sin 2x$ C. $y = 7 + 2x + \sin 2x$ D. $y = \frac{2x - 11 + \sin 2x}{4}$.

2. Функция $y = |x+2|$ может быть первообразной некоторой функции в промежутке

A. [–3; 0]. B. B. [–5; –1]. C. C. [–1; 0]. D. D. $(-\infty; +\infty)$.

3. Если $J(x) = \int xe^2 dx$, то $J(1) = 3$, когда c равно

A. 3. B. 0. C. –3. D. 1.

4. Если $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, то $J(2) = 4$, когда c равно

A. 3. B. $\frac{10}{3}$. C. 0. D. 2.

5. Если $J(x) = \int \cos^2 x dx$, то $J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, когда c равно

A. $\frac{\pi}{4}$. B. 0. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

6. В семействе интегральных кривых функции $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ через точку P ($\frac{\pi}{2}$; 0) проходит кривая

A. $y = tgx$. B. $y = 1 - \frac{1}{\sin x}$ C. $y = 1 - ctgx$. D. $y = -ctgx$.

7. Два тела начали движение по прямой одновременно в разных направлениях из одной точки. Скорость первого v_1 (t) = $2t^2 - 3t + 1$, скорость второго v_2 (t) = $2t^2$ + 5t –3 (скорость измеряется в м/с). Время, через которое тела будут от начальной точки на одинаковом расстоянии, равно

A. 2 с. B. 4 с. C. 10 с. D. 1 с.

8. Не вычисляя интегралов, а исходя из условий интегрируемости, убеждаемся, что будет корректно поставить вопрос о вычислении интеграла $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ для функции

A. $f(x)=\frac{1}{x}$ B. $f(x)=tgx$ C. $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ D. $f(x)=\begin{cases}-1, -1\le x\le 0,\\ \ln x, 0<x\le 3\end{cases}$

9. Среднее значение функции $y = -3x^2 + 4x$ на отрезке [0; 3] равно

A. –3. B. B. –9. C. C. 3. D. D. 9.

10. Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, убеждаемся, что интеграл $\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}\,dx$ равен

A. $\frac{25}{2}$. B. B. $\frac{25}{4}$. C. C. 10. D. D. 5.

11. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 3x$ и прямой $x = 3$, равна

A. 3. B. 12. C. 6. D. $\frac{8}{3}$.

12. Фигура, описанная в задаче 11, вращается вокруг оси ox. Объем тела вращения равен

A. 27. B. 54. C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}\pi$. D. $\frac{27}{2}\pi$.

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, сходящихся и расходящихся рядов, суммы ряда.
2. Гармонический ряд. Геометрические ряды.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Понятие положительного ряда. Признаки сходимости положительных рядов: необходимый и достаточный, предельный признак сравнения, Даламбера, Коши. Переместительное свойство сходящихся рядов.
5. Понятие знакочередующегося ряда. Теорема Лейбница.
6. Понятие абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Достаточный признак абсолютной сходимости числового ряда.
7. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда, их сходимости и равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
8. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Теорема о существовании интервала сходимости. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.

9. Абсолютная и равномерная сходимость степенного ряда в круге сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда.
10. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
11. Задача разложения функции в степенной ряд. Единственность разложения.
12. Понятие ряда Тейлора. Необходимое условие разложения функции в ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.
13. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена) функций $y=\mathring{a}^{x}$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\ln(1+x)$. Биномиальный ряд. Применение биномиального ряда к вычислению значений радикалов.
14. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.

Задания для типовых контрольных работ

1. Исследовать сходимость рядов (указать признаки сходимости):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(2n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

2. Исследовать сходимость рядов и установить характер сходимости:

а) $\frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^3+2} + \frac{4}{4^3+3} - \frac{5}{5^3+4} + \ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^n}{8^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+3}}$

3. Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x+3)^{n+1}}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{6^n+3}$.

4. Используя известные разложения элементарных функций разложить функцию *f(x)* в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=\ln(3-x)$, $x_0=-2$.

Вопросы к экзамену

1. Числовые ряды. Свойства числовых рядов.
2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.
3. Знакопостоянные ряды. Общий признак сходимости положительных рядов. Признаки сравнения.
4. Ряды с неотрицательными членами. Признак Даламбера, радикальный признак Коши,
5. интегральный признак Коши.
6. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
7. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.
8. Функциональные последовательности и ряды. Сумма функционального ряда Область сходимости.

9. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
10. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
11. Свойства степенных рядов.
12. Формула и ряд Тейлора. Теоремы о сходимости ряда Тейлора.
13. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
14. Некоторые приложения степенных рядов.