МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)
Институт математики, физики и информатики
Кафедра физики, технологии и методики обучения

Патюков Даниил Анатольевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Модель открытой Вселенной как задача об осцилляторе с параметрами

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы Физика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
доцент, кандидат педагогических наук
С.В. Латынцев
06.06.2025
(дата, подпись)

Руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
А.М. Баранов
16.05.2025
(дата, подпись)

Обучающийся
Д. А. Патюков
07.05.2025
(дата, подпись)

Дата защиты 20 июня 2025
Оценка отлично
(прописью)

Красноярск 2025

Оглавление

Введение 3

Глава I. Открытые космологические модели Вселенной 7

1.1. Космологическая модель Фридмана 7

1.2. Модель Фридмана в подходе Фока 11

Глава II. «Механический» подход к описанию эволюции Вселенной 15

2.1. Уравнения Эйнштейна для открытых космологических моделей 15

2.2. Эволюция открытой космологической модели Вселенной как задача о движении частицы в силовом поле 17

2.3. Поведение функции состояния космологической модели для механической модели осциллятора 23

Глава III. Открытая космологическая модель Вселенной как задача о гармоническом осцилляторе, зависящем от параметров 31

3.1. Уравнения Эйнштейна в «механическом подходе» для осциллятора с постоянной жёсткостью 31

3.2. Решение уравнений тяготения и исследование соответствующей космологической модели 33

3.3. Функция состояния и её поведение 35

Глава IV. Методическое сопровождение хода занятия по теме ВКР 40

4.1. Сценарий урока «От Фридмана до наших дней: Эволюция представлений о расширении Вселенной» 40

4.2. Методические рекомендации по проведению урока по теме «От Фридмана до наших дней: Эволюция представлений о расширении Вселенной» 48

Заключение 50

Список используемых источников 53

Введение

Проблема возникновения, структуры и эволюции Вселенной волнует человечество уже несколько тысячелетий. Одно из ранних упоминаний о наблюдениях за космическими объектами датируется II тыс. до н.э. -- вавилонская глиняная табличка Аммисадуки с указанием времени восхода Венеры, её первого и последнего появления на горизонте до или после восхода и захода Солнца в виде лунных дат. За последние 5000 лет человечество прошло путь от мифов о плоской Земле до квантовой космологии. Однако, несмотря на все достижения, на сегодняшний день сущность 95% состава Вселенной остаётся неизученной, что оставляет открытым вопрос о космологической эволюции.

Актуальность темы исследования: развитие разделов физики, астрономии и математики привело к расширению человеческих представлений о природе. Однако вопрос об эволюции Вселенной до сих пор остаётся дискуссионным в силу отсутствия возможности проведения какого-либо физического эксперимента по данной проблеме-задаче. По этой причине было предпринято множество попыток сконструировать математическую модель–аналог, на основе которой бы стало возможно наблюдение различных сценариев эволюции Вселенной. И хотя численные значения некоторых параметров таких моделей неизвестны (что и является причиной незнания человечеством чёткого сценария эволюции реальной Вселенной), рассмотрение математических моделей (как точных решений уравнений тяготения Эйнштейна), задаваемых разными численными значениями входящих параметров, позволяет получить дополнительную информацию о поведении данной открытой системы. При объединении результатов моделирования поведения Вселенной и данных астрономических наблюдений, возможно, в будущем получится определить численные значения параметров модели и, тем самым, уточнить сценарий эволюции Вселенной.

Объект исследования: эволюция Вселенной.

Предмет исследования: открытая космологическая модель Вселенной.

Цель работы: изучение эволюции открытой Вселенной на примере космологической модели, сконструированной посредством метода «механического аналога» -- механической модели осциллятора с постоянным коэффициентом жёсткости (закон Гука), для которого используется переменная (аналог времени), являющаяся корнем четвертой степени из решения Фридмана, получение в графической форме особенностей поведения данной модели Вселенной и их физическая интерпретация.

Гипотеза: решение поставленной задачи позволит получить графики поведения отношения давления к плотности энергии (функции состояния) открытой космологической модели, отвечающих различным сценариям эволюции открытой Вселенной, в зависимости от значений вводимых параметров (в том числе, коэффициента жёсткости).

Задачи:

1. Сделать обзор открытой космологической модели Вселенной Фридмана в исходном подходе и подходе Фока.
2. Изложить суть «механического подхода» для решения уравнений гравитационного поля Эйнштейна, привести примеры соответствующих ему открытых космологических моделей**.**
3. Построить математическую модель, описывающую эволюцию Вселенной в рамках открытой космологической модели, используя механическую аналогию с движением материальной частицы в некотором силовом поле.
4. Рассмотреть механический осциллятор с силой Гука (постоянный коэффициент жесткости), уравнение движения для которого записано через новую переменную Z (аналог времени), связанную с классическим решением Фридмана для открытой Вселенной как корень четвертой степени из конформного множителя метрики Фридмана в записи Фока.

5. Записать и решить уравнения тяготения, сведенные к уравнению движения для механического осциллятора с единичной массой и постоянным коэффициентом жёсткости, для «новой» переменной.
6. Найти давление и плотность энергии для такой космологической модели относительно «новой» переменной.
7. Ввести и записать функцию состояния $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \frac{\hat{p}}{\hat{\varepsilon}}$ для данного случая и построить графики.
8. Проанализировать результаты и сделать выводы об эволюции сконструированной открытой модели Вселенной.
9. На базе полученных результатов составить методическую документацию, сопровождающую ход учебного занятия для школьников по теме ВКР.

Выпускная квалификационная работа включает в себя: введение, четыре главы, заключение, библиографический список.

Первая глава посвящена обзору открытой космологической модели Вселенной Фридмана в исходном подходе и подходе Фока.

Вторая глава содержит изложение «механического подхода», используемого в качестве инструмента описания эволюции Вселенной. В данной главе в качестве аналогии эволюции Вселенной приводится задача, рассматривающая движение частицы в силовом поле. Также вторая глава включает в себя описание поведения функции состояния космологической модели при введении для механической модели осциллятора (как аналога эволюции Вселенной) переменной, обратной к переменной из подхода Фока для описания открытой модели Фридмана.

Третья глава представляет собой оригинальную часть ВКР, то есть, само исследование, в котором открытая космологическая модель Вселенной рассматривается как задача об осцилляторе с параметрами, но при этом переменная, являющаяся аналогом времени классической механики,

представляет собой корень четвертой степени из конформного множителя метрики Фридмана для открытой Вселенной в описании Фока.

Четвёртая глава состоит из методических сопровождающих документов, описывающих ход урока для школьников по данной теме: сценарий и рекомендации по проведению учебного занятия.

В заключении подведены итоги проделанной работы и сформулированы выводы.

Глава I.

Открытые космологические модели Вселенной

1.1. Космологическая модель Фридмана

Модель открытой Вселенной Фридмана – это теоретическая модель, которая описывает глобальную эволюцию Вселенной на основе решения уравнений общей теории относительности (ОТО) для случая однородного и изотропного распределения плотности, температуры и давления вещества.

Однородность (тождественность свойств пространства во всех его точках) и изотропность (одинаковость физических свойств во всех направлениях) Вселенной ведут к следующему: Вселенная имеет начало, и она должна либо расширяться, либо сжиматься [3].

В 1929 году на основе измеренных расстояний до галактик и их красных смещений было открыто расширение Вселенной в соответствии с законом Хаббла, что стало первым наблюдательным подтверждением космологической модели Фридмана.

Однородность и изотропия распределения материи во Вселенной, наблюдаемые на масштабах свыше 100 Мпк (326 миллионов световых лет), соответствуют решению уравнений ОТО с максимально симметричной метрикой пространства-времени. В общем случае такая метрика носит название метрики Фридмана [16], [21]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \qquad (1.1)$$

Где ds – четырёхмерный интервал пространства-времени, имеющий размерность длины; c – скорость света в вакууме; $a(t)$ – масштабный фактор, r, θ, φ – пространственные координаты в сферической системе координат (причём r – безразмерная координата); t – время. Параметр кривизны (или постоянная кривизны) k принимает только дискретные значения +1, –1 или 0, что соответствует закрытой, открытой или плоской (евклидовой) геометрии трёхмерного пространства (рис. 1).

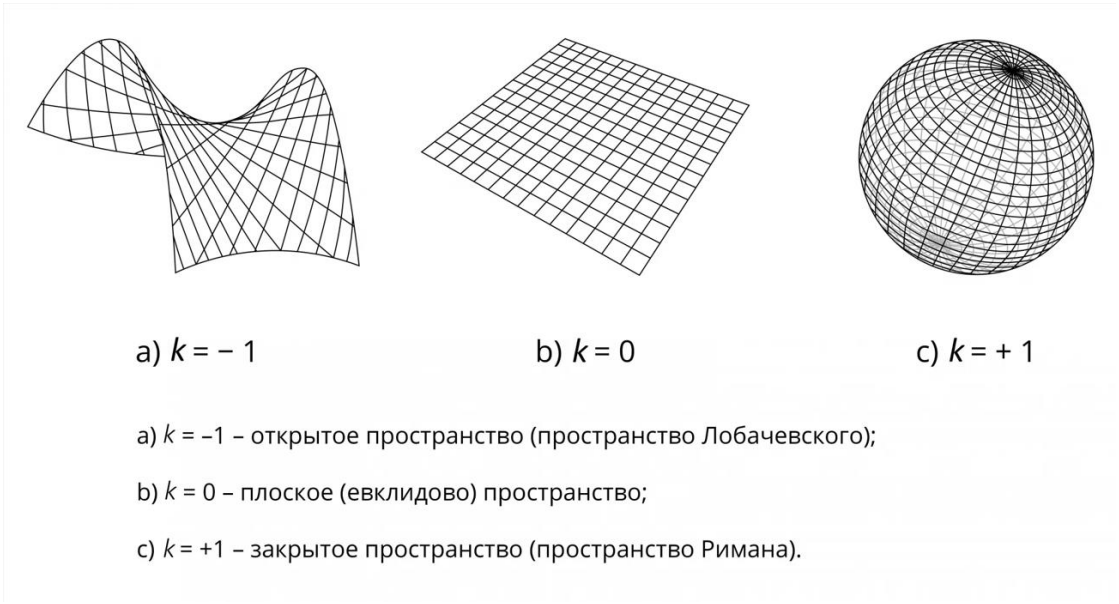

Рис. 1. Три типа однородных изотропных пространств, соответствующие разным значениям параметра кривизны.

Модель открытой Вселенной Фридмана – это один из трёх возможных случаев эволюции Вселенной в рамках стандартной космологической модели (ΛCDM), основанной на метрике, представленной формулой (1.1).

Открытая космологическая модель Фридмана характеризуется следующим образом:

1. Отрицательная (гиперболическая) кривизна: параметр $k = -1$. Пространство искривлено как седло (Рис. 1, a);
2. Параметр плотности $\Omega < 1$: суммарная плотность энергии во Вселенной, включая обычную материю, тёмную материю и тёмную энергию, меньше критической плотности ($\rho < \rho_{crit}$ или $\Omega_{total} = \rho / \rho_{crit} < 1$). Критическая плотность – это плотность, при которой пространство было бы плоским (евклидовым);
3. Вечное расширение: сила гравитационного притяжения всей материи и энергии во Вселенной недостаточна, чтобы остановить начавшееся расширение;

4. Расширение замедляется гравитационными силами (особенно на ранних этапах, когда доминирует материя), но никогда не останавливается полностью и не сменяется сжатием;
5. Скорость расширения (H(t) – параметр Хаббла) асимптотически стремится к некоторому положительному значению ($H(\mathrm{t})>0$), но постепенно уменьшается со временем (без учёта тёмной энергии);
6. Пространство бесконечно по объёму в силу отрицательной кривизны и однородности;
7. Если сумма углов треугольника при триангуляции больше или меньше 180°, то в больших масштабах геометрия неевклидова;
8. Эволюция масштабного фактора $a(t)$, описывающего размер Вселенной, определяется первым уравнением Фридмана, которое задаёт соотношение между удельной кинетической энергией и удельной потенциальной энергией пробной частицы в гравитационном поле:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=H^2(t)=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{kc^2}{a^2}+\frac{\Lambda c^2}{3}, \qquad (1.2)$$

где $\dot{a}$ - производная масштабного фактора по времени (скорость расширения), $H(t)$ - параметр Хаббла в момент времени t, G - гравитационная постоянная, ρ - суммарная плотность энергии (материя, излучение, тёмная энергия), k - параметр кривизны: $k=-1$ для открытой модели, c - скорость света, Λ - космологическая постоянная (тёмная энергия): $\Lambda=0$, для открытой модели.

С учётом значения параметров, входящих в первое уравнение Фридмана, для модели открытой Вселенной имеем:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=H^2(t)=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{c^2}{a^2} \qquad (1.3)$$

Плотность ρ убывает со временем из-за расширения. Даже когда плотность становится мала, второй член уравнения $+c^2/a^2$ доминирует, обеспечивая вечное расширение $H^2(t)>0$;

9. Ускорение расширения трёхмерного пространства определяется вторым уравнением Фридмана:

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+\frac{3p}{c^2})+\frac{\Lambda c^2}{3}, \qquad (1.4)$$

где $\ddot{a}$ имеет размерность ускорения: a - масштабный фактор, имеющий размерность длины; две точки над символом означают вторую производную по времени.

Для открытой модели $\Lambda=0$. В соответствии с этим, уравнение (1.4) примет вид:

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+\frac{3p}{c^2}) \qquad (1.5)$$

10. Закон сохранения вещества определяется третьим уравнением Фридмана:

$$\dot{\rho}=-3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+\frac{p}{c^2}). \qquad (1.6)$$

Любое из трёх уравнений Фридмана является следствием двух других.

11. Тепловая смерть: по мере расширения плотность вещества и излучения падает, температура стремится к абсолютному нулю. Если доминирует тёмная энергия (особенно с $w=-1$), расширение ускоряется, ещё быстрее «разводя» материю и приводя к изоляции галактик и их скоплений.

В середине XX века открытая модель (наряду с закрытой) была одной из двух основных альтернатив для описания Вселенной, поскольку считалось, что $\Lambda=0$, $\Omega_{total}<1$.

Однако, данные, полученные за последние десятилетия, с очень высокой точностью (с погрешностью $\approx 0.2\%$) указывают на то, что

пространство Вселенной плоское ($\Omega_{total} \approx 1$). Эти результаты были получены в процессе измерения анизотропии реликтового излучения: производились измерения угловых размеров акустических пиков спутниками COBE, WMAP, Planck.

Наблюдения далёких сверхновых типа Ia указали на ускоренное расширение Вселенной в современную эпоху, что требует наличия тёмной энергии: $\Lambda > 0$ (или её аналога).

Современные данные сильно противоречат «чистой» открытой модели Фридмана ($k = -1$, $\Lambda = 0$, $\Omega_{total} < 1$). Однако открытая космологическая модель Фридмана является важным историческим и теоретическим решением, демонстрирующим возможность вечного расширения Вселенной с отрицательной кривизной, которая стала отправной точкой в дальнейшем конструировании космологических моделей.

1.2. Модель Фридмана в подходе Фока

Подход Фока к модели открытой Вселенной Фридмана – исторический и методологический аспект, связанный с интерпретацией систем отсчёта и координатных условий в общей теории относительности (ОТО).

Фок считал, что для физической интерпретации решений уравнений гравитационного поля Эйнштейна необходимо накладывать дополнительные координатные условия, которые выделяют класс «наиболее физичных» («естественных») систем отсчёта. Примером служит введение условия гармонических координат (или координат де Дондера-Фока) [22]:

$$\Box x^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) = 0, \qquad (1.7)$$

где $\Box$ - общековариантный даламбертиан, g - определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ - контравариантный метрический тензор.

Стандартная метрика FLRW ($k = -1$), записанная с сигнатурой (-, +, +, +):

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (1.8)$$

где χ - радиальная гиперболическая координата.

Фок преобразовал эту метрику к виду, удовлетворяющему условию гармоничности для временной и пространственной координат. Фок искал такую систему отсчёта, которая была бы «инерциальной на бесконечности» или имела бы наиболее простую связь с плоским пространством-временем Минковского.

Кроме того, он ввёл новую радиальную координату r, связанную со стандартной координатой χ соотношением:

$$r = \frac{2}{H_0}\sinh(\chi/2), \quad (1.9)$$

где H_0 - некоторая константа с размерностью постоянной Хаббла, вводимая для согласования размерностей. Цель этого преобразования – привести пространственную метрику на заданный момент времени к виду, максимально близкому к евклидовой, но с поправкой на кривизну.

После преобразований и выбора специфической временной координаты (также удовлетворяющей гармоническому условию), метрика открытой Вселенной в подходе Фока принимает более сложный вид, чем стандартная FLRW. Пространственная часть при $t = const$ выглядит так:

$$dl^2 \approx \frac{dr^2}{\left[1-\left(H_0 r/2c\right)^2\right]^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (1.10)$$

Это напоминает метрику Пуанкаре для единичного шара (модель гиперболического пространства), но с явной зависимостью от «хаббловского» параметра H_0 [18]. Это преобразование затрагивает синхронную систему отсчёта FLRW.

Физическая интерпретация подхода Фока заключается в том, он считал гармонические координаты физически выделенными. В его подходе

координаты r, θ, φ в преобразованной метрике интерпретировались как «естественные» радиальное расстояние и углы.

Он стремился к тому, чтобы уравнения движения тел (например, в приближении слабого поля) в этих координатах имели вид, максимально похожий на уравнения Ньютона, но с релятивистскими поправками, включая «силу Хаббла».

Подход Фока подчёркивает глобальную роль космологического расширения даже в локальных системах. Фок настаивал, что стандартная система отсчёта сопутствующего наблюдателя в FLRW не является единственно возможной и что гармоническая система имеет преимущества для описания тел на фоне расширяющейся Вселенной.

Недостатки подхода Фока к открытой модели Вселенной Фридмана:

1. Фундаментальный принцип ОТО – общая ковариантность (независимость законов физики от произвола в выборе математических координат). Условие гармоничности, вводимое Фоком, является одним из многих возможных калибровочных условий (как лоренцева калибровка в электродинамике). Оно может быть удобно для решения уравнений, но оно не несёт абсолютного физического смысла само по себе;
2. Удобство FLRW: система сопутствующих координат в метрике FLRW (t, χ, θ, φ) имеет огромное преимущество:
    - Обладает физической наглядностью: время t - это собственное время фундаментальных наблюдателей, покоящихся относительно фона (галактик). Координата χ связана с физическим расстоянием в данный момент времени (через масштабный фактор $a(t)$);
    - Однородность и изотропия Вселенной наиболее явно и просто выражены именно в этих координатах;

- Уравнения эволюции Вселенной Фридмана выводятся и решаются наиболее просто в этой системе.

3. В современной космологии стандартная метрика FLRW в сопутствующих координатах является общепринятой и фундаментальной [20]. Гармонические координаты могут использоваться как технический инструмент в некоторых специализированных задачах (например, при численном решении уравнений ОТО, в теории возмущений), но они не рассматриваются как физически более предпочтительные для описания глобальной структуры Вселенной, чем сопутствующие координаты. Физические наблюдаемые параметры (расстояния, красные смещения, угловые размеры) всегда рассчитываются исходя из метрики FLRW и её геометрических свойств.

Модель открытой Вселенной Фридмана в подходе Фока – это попытка представить стандартную космологическую метрику (1.1) с сигнатурой $(+,-,-,-)$ в гармонических координатах, которые Фок считал физически выделенными. Данный подход не получил широкого признания в современной космологии. Физическая интерпретация космологических наблюдений и эволюции Вселенной базируется на стандартной метрике FLRW в сопутствующих координатах: она явно и просто отражает однородность, изотропию, позволяет просто вывести и решить уравнения Фридмана.

Глава II.

«Механический подход» к описанию эволюции Вселенной

2.1. Уравнения Эйнштейна для открытых космологических моделей

Современные космологические модели базируются на решениях Фридмана уравнений гравитационного поля Эйнштейна. Причём Вселенная рассматривается однородной и изотропной (космологический принцип), с отрицательной кривизной пространства, постоянно расширяющейся. Решение Фридмана является конформно-плоским, что предполагает запись метрики четырёхмерного пространства-времени в конформно-плоском виде [6], [11], [12], [17]. Подход Фока позволяет переписать эту метрику в виде, конформном галилеевой метрике (метрике Минковского).

При использовании подхода Фока, в котором метрика четырёхмерного пространства-времени является конформно-галилеевой, а конформный множитель есть функция одной переменной, возможна запись решения уравнений Эйнштейна, которые описывают однородную изотропную Вселенную, заполненную материей с произвольным уравнением состояния, в виде квадратур. Такая запись может быть использована для моделирования эволюции модели Вселенной на различных этапах.

Рассмотрим получение точных решений с использованием подхода Фока. Метрика имеет вид:

$$ds^2 = \exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \qquad (2.1)$$

где $\exp(2\sigma)$ - конформный множитель, $\sigma = \sigma(\mathrm{S})$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1;-1;-1;-1)$ - метрический тензор Минковского; μ, ν = 0, 1, 2, 3; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\kappa = 8\pi$.

Правую часть уравнений Эйнштейна (без космологической постоянной)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \qquad (2.2)$$

запишем в приближении идеальной жидкости с тензором энергии-импульса (ТЭИ):

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon u_\mu u_\nu + p b_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

где ε – плотность энергии; p -- давление; 4-скорость $u_\mu = \exp(\sigma) b_\mu$ пропорциональна градиенту переменной S как функции координат x^μ: $b_\mu = S,_\mu$; $u_\mu u^\mu = 1$ - условие нормировки 4-скорости; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ есть 3-проектор на 3-пространство, который играет роль метрического тензора для 3-пространства, при этом выполняется условие ортогональности 3-пространства и временно-подобной конгруэнции u^μ: $b_{\mu\nu} u^\mu = 0$.

В результате (1+3)-расщепления система уравнений (2.2) сводится к системе двух дифференциальных уравнений в полных производных:

$$3 \cdot \left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2 \right) = \kappa\varepsilon \cdot \exp(2\sigma); \tag{2.4}$$

$$2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2} \right) = -\kappa p \cdot \exp(2\sigma), \tag{2.5}$$

где штрих обозначает производную d/dS.

Данная система дифференциальных уравнений определяет следующие параметры: (2.4) – задает плотность энергии, (2.5) – давление.

Решение этой системы есть уравнение состояния вещества, которая представляет собой связь между плотностью энергии и давлением. Эта связь является функцией точки пространственно-временного континуума (в данном подходе – функцией переменной S). Большинство космологических моделей строится в предположении, что эта связь – величина постоянная, но различная на разных этапах эволюции моделей. То есть, строго говоря, мы не можем сконструировать действительно эволюционные модели, когда вещество (а соответственно, и уравнение состояния) меняются по мере развития таковых. Однако, опираясь на вид самих уравнений, возможно получить точные решения с переменным уравнением состояния,

описывающие Вселенную, содержащую различные состояния материи на разных этапах своей эволюции. Другими словами, следует ввести функцию состояния, которая в каждый момент времени есть уравнение состояния.

Данную систему (2.4)-(2.5) можно свести к уравнению Рикатти для переменной S, введя явным образом функцию состояния как

$$\beta(S) = \frac{p(S)}{\varepsilon(S)}. \tag{2.6}$$

По виду функции состояния $\beta(S)$ можно найти её критические точки, а по графикам – «пронаблюдать» множество сценариев эволюции Вселенной, меняя значения входящих в неё параметров.

2.2. Эволюция открытой космологической модели Вселенной как задача о движении частицы в силовом поле

Введём замену $\sigma = 2 \cdot \ln(y)$. Тогда система (2.4)-(2.5) преобразуется к виду:

$$12 \cdot y' \left(y' + \frac{1}{S} \cdot y \right) = \kappa\varepsilon \cdot y^6 \tag{2.7}$$

$$4 \cdot \left(y'' + \frac{2}{S} \cdot y' \right) = -\kappa p \cdot y^5 \tag{2.8}$$

С помощью замен: $y = z_1(1/S)$, либо $y = z_2(S)/S$, где z_1 и z_2 -- некоторые функции, можно избавиться от первой производной в уравнении (2.8) (определение давления).

Уравнение (2.7) (определение плотности энергии) при обеих заменах переменной примет следующий вид:

$$\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} \right) = \kappa \frac{z^6}{12x^4} \cdot \varepsilon, \tag{2.9}$$

где $x = 1/S$ для первой замены, а $x = S$ - для второй.

Уравнение (2.8), независимо от замены, преобразуется так:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(x, z, p), \tag{2.10}$$

где

$$F(x,z,p) = -\kappa \frac{z^5}{4x^4} \cdot p. \qquad (2.11)$$

Считая x за новую переменную «времени», а функцию z как «обобщённую» координату, получаем возможность интерпретировать (2.10) как уравнение Ньютона для одномерного движения частицы единичной массы под действием силы F из (2.11).

Зная функцию F и интегрируя это уравнение, получаем «закон движения» $y = y(x)$. Так можно найти конформный множитель $\exp(2\sigma) = y^4$ и определить все остальные параметры в космологической модели. Конкретному «механическому» движению частицы единичной массы будет соответствовать конкретная эволюция Вселенной.

Так выглядит алгоритм замены проблемы моделирования эволюции открытой Вселенной на эквивалентную ей задачу о механическом движении частицы единичной массы в некотором силовом поле.

Наиболее распространёнными силовыми полями являются потенциальные поля. Если $F = -dU/dz$, то давление оказывается напрямую зависимым от выбора U:

$$\kappa p = 4\frac{x^4}{z^5} \cdot \frac{dU}{dz} \qquad (2.12)$$

Перейдём к новой переменной $x = 1/S$, считая $z \equiv y$ и зная, что решение Фридмана для открытой Вселенной как раз отвечает такой зависимости от S.

Если потенциал оказывается функцией только «координаты» z, то уравнение (2.10) интегрируется с помощью соответствующего «закона сохранения», в котором «полная энергия» определяется выбранными начальными условиями, что позволяет «конструировать» различные сценарии эволюции космологической модели.

Простейший пример движения – движение по инерции. Для него $F = 0$ $(U \equiv U_0 = const)$. В такой «механической» интерпретации решение Фридмана

отвечает равномерному движению (движению в поле постоянного потенциала):

$$p=0;\ \frac{dU}{dy}=0;\ y=1-Ax=1-\frac{A}{S};\ A>0, \tag{2.13}$$

где A – постоянная «скорость» (в «механической» интерпретации, x – это время, в диапазоне значений от $0\Leftrightarrow S=\infty$ до $1/A\Leftrightarrow S=A$), а также постоянная, связанная с плотностью пылевидного вещества, не «создающего» давления и заполняющего фридмановскую Вселенную.

Здесь конформный множитель метрики равен

$$\exp(2\sigma)=y^4=(1-\frac{A}{S})^4 \tag{2.14}$$

Для того, чтобы плотность энергии была положительной, необходима положительность постоянной A. Точное выражение для плотности энергии некогерентной пыли фридмановского решения имеет вид:

$$\kappa\varepsilon=\frac{12Ax^3}{(1-\mathrm{Ax})^6}. \tag{2.15}$$

«Неравномерное движение» в этом подходе приводит к обобщению решения Фридмана [25], [26], [27], [28].

В качестве следующего «потенциала», после константы $(U\equiv U_0=const)$, выступает линейная функция с постоянными a и b:

$$U=ay+b, \tag{2.16}$$

то есть равнозамедленное движение частицы единичной массы под действием постоянной тормозящей силы:

$$F=-\frac{dU}{dy}=-a, \tag{2.17}$$

где a -- постоянная, совпадающая с ускорением в «механическом» подходе.

Находим безразмерный «путь», проходимый этой частицей:

$$y=C_0+Cx-\frac{a}{2}x^2, \tag{2.18}$$

где C_0 и C - постоянные интегрирования, соответственно интерпретируемые как начальное безразмерное расстояние и скорость при $x=0$.

Выражение (2.18) является точным решением системы (2.7)-(2.8).

При $x\to 0$ $(S\to\infty)$ должно выполняться условие галилеевости и асимптотическое прохождение решения через решение Фридмана для открытой Вселенной. Из этого получаем, что $C_0=1$, $C=-A$ и выражение (2.18) принимает вид:

$$y=1-Ax-\frac{a}{2}x^2. \tag{2.19}$$

Такая запись функции y при положительности параметра a обеспечивает для g_{00} компоненты метрического тензора при всех $S<\infty$ (или $x>0$) условие $g_{00}<1$. Такое условие справедливо для конформного множителя, принимающего вид

$$\exp(2\sigma)=\left(1-Ax-\frac{a}{2}x^2\right)^4=\left(1-\frac{A}{S}-\frac{a}{2S^2}\right)^4. \tag{2.20}$$

Поведение модели определяется соотношением между постоянными A и a.

Для данного случая выражение, содержащее давление, запишется как

$$\kappa p(x)=\frac{4ax^4}{y^5}. \tag{2.21}$$

Знак давления определяется знаком «ускорения» a: при отрицательном a давление также отрицательно.

Плотность энергии из (2.9) запишется в виде

$$\kappa\varepsilon(\mathrm{x})=12\,\mathrm{x}^3\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{ax})(1+ax^2/2)}{y^6}. \tag{2.22}$$

Выражение для вычисления трёхмерной скалярной кривизны в данном подходе выглядит так

$$^3R=-\frac{3\sigma'_S}{S}\exp(-2\sigma)=\frac{6x^3y'_x}{y^5} \tag{2.23}$$

и для нашего случая будет иметь вид

$$^3R = -\frac{6x^3(A+ax)}{(1-Ax-ax^2/2)^5}. \qquad (2.24)$$

Точка сингулярности в данной модели (момент, когда $\exp(2\sigma)=0$, $^3R \to \infty$) будет соответствовать при учёте отрицательности x

$$x_0 = 1/S_0 = \frac{-A+\sqrt{(A^2+2a)}}{a}. \qquad (2.25)$$

При стремлении параметра a к нулю ($a \to 0$) в пределе точка сингулярности становится равной $x_0 = 1/A$.

Функция состояния при этом принимает вид

$$\beta(\mathrm{x}) = \frac{p(x)}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{3}\frac{ax(1-Ax-ax^2/2)}{(\mathrm{A}+\mathrm{ax})(1+ax^2/2)}, \qquad (2.26)$$

откуда видно, что $\beta(x)$ обращается в нуль на концах отрезка: в точке $x=0$ и в точке сингулярности x_0 (несмотря на то, что в точке сингулярности давление и плотность энергии принимают бесконечные значения).

Обращение в ноль $\beta(x)$ на концах отрезка означает, что в некоторой точке отрезка функция состояния достигает своего максимального значения, зависящего от соотношения между постоянными A и a. В окрестности точки $x=0$ справедливо соотношение

$$\beta(\mathrm{x}) \approx \frac{1}{3}\frac{a}{A}x. \qquad (2.27)$$

Если в выражении (2.26) положить $A=0$ («сконструировать» Вселенную, заполненную только материей, «создающей» отличное от нуля давление) то получим функцию

$$y = 1-a^2x^2/2 \qquad (2.28)$$

и соответствующую функцию состояния

$$\beta(x) = \frac{1}{3}\frac{(1-a^2x^2/2)}{(1+a^2x^2/2)}, \qquad (2.29)$$

для которой максимальное значение $\beta = 1/3$ будет достигаться при стремлении x к нулю $(S \to \infty)$.

Запишем соответствующие давление и плотность энергии для случая, когда $A = 0$:

$$\kappa p = \frac{4ax^4}{(1 - ax^2/2)^5}; \tag{2.30}$$

$$\kappa\varepsilon = 12ax^4 \frac{(1 + ax^2/2)}{(1 - ax^2/2)^6}. \tag{2.31}$$

Асимптотическое поведение выражений (2.30) и (2.31) вблизи $x = 0$ $(S \to \infty)$ могут быть представлены как

$$\kappa p \approx 4ax^4 \tag{2.32}$$

$$\kappa\varepsilon \approx 12ax^4 \tag{2.33}$$

Видим, что непылевая материя («создающая» отличное от нуля давление и связанная с параметром a), заполняющая Вселенную, асимптотически подчиняется ультрарелятивистскому уравнению состояния

$$\varepsilon_{rad} = 3p. \tag{2.34}$$

Рассмотрение поведения давления (2.21) и плотности энергии (2.22) вблизи $x = 0$ $(S \to \infty)$ приводят к следующим результатам:

$$\kappa p \approx 4ax^4 \tag{2.35}$$

$$\kappa\varepsilon \approx 12Ax^3(1 + 6Ax) + 12ax^4, \tag{2.36}$$

или

$$\varepsilon \approx \varepsilon_{dust} + \varepsilon_{rad}, \tag{2.37}$$

где ε_{dust} и ε_{rad} - плотности энергии некогерентной пыли, полученные асимптотически при $a = 0$ (совпадающие с асимптотикой соотношения (2.15)) и ультрарелятивистской материи $(a \neq 0)$.

2.3. Поведение функции состояния космологической модели для механической модели осциллятора

Теперь рассмотрим квадратичный потенциал (это соответствует колебательному движению):

$$U = B^2 y^2 / 2 + U_0, \tag{2.38}$$

где B - постоянная, выступающая в «механической» интерпретации в роли коэффициента жёсткости пружины.

Из уравнения (2.10), которое принимает вид уравнения «колебаний», сразу получаем точное решение [2], [13]:

$$y = \sqrt{(1 + A^2/B^2)}\cos(Bx + \alpha_0) = \frac{\cos(Bx + \alpha_0)}{\cos\alpha_0}, \tag{2.39}$$

где $tg^2\alpha_0 = A^2/B^2 = 1 - 1/\cos^2\alpha_0$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

Конформный множитель запишется как

$$\exp(2\sigma) = (1 + A^2/B^2)^2\cos^4(Bx + \alpha_0) = (1 + A^2/B^2)^2\cos^4\varphi(\text{x}) = \left(\frac{\cos\varphi(\text{x})}{\cos\alpha_0}\right)^4, \tag{2.40}$$

где $\varphi \equiv B/S + \alpha_0 = Bx + \alpha_0$.

Из (2.38) и (2.12) сразу приходим к выражению для давления:

$$\kappa p = \frac{4B^2/S^4}{(1 + A^2/B^2)^2\cos^4\varphi(S)} = 4B^2x^4\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\varphi(x)}\right)^4, \tag{2.41}$$

а из (2.7) – к выражению для плотности энергии:

$$\kappa\varepsilon = \frac{12B}{S^3}\frac{tg\varphi(S)\left(1 + \frac{B}{S}tg\varphi(S)\right)}{(1 + A^2/B^2)^2\cos^4\varphi(S)} = 12Bx^3tg\varphi(\text{x})(1 + \text{Bxtg}\,\varphi(\text{x}))\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\varphi(x)}\right)^4. \tag{2.42}$$

Откуда видно, что функция состояния принимает вид:

$$\beta = \frac{1}{3}Bx\frac{ctg\varphi(x)}{(1 + Bxtg\varphi(x))} \tag{2.43}$$

Трёхмерная скалярная кривизна для этого решения запишется как

$${}^3R = -6Bx^3tg\varphi(x)\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\varphi(x)}\right)^4 = -\frac{\kappa\varepsilon}{2(1 + \text{Bxtg}\,\varphi(x))}. \tag{2.44}$$

Для физической интерпретации решения (2.40) рассмотрим асимптотическое поведение конформного множителя, плотности энергии и давления, чтобы выяснить, в чём сущность постоянных A и B.

Ограничим рассмотрение промежутком $0 \le (Bx + \alpha_0) < \pi/2$. Точка сингулярности (когда $\exp(2\sigma) = 0$, а $p, \varepsilon \to \infty$) в этой модели будет соответствовать

$$x_0 = 1/S_0 = \frac{(\pi/2 - \alpha_0)}{B}. \qquad (2.45)$$

При стремлении x к нулю $(S \to \infty)$ конформный множитель $\exp(2\sigma)$ стремится к единице.

Для сравнения с наблюдательными данными о плотностях вещества и излучения в современную эпоху мы должны связать координатную переменную S с собственным (физическим) временем

$$\tau = \int_{S_0}^{S} u_\mu dx^\mu = \int_{S_0}^{S} y^2 dS = (1 + A^2/B^2) \int_{S_0}^{S} \cos^2\left(\frac{B}{S} + \alpha_0\right) dS = -\frac{B}{\cos^2 \alpha_0} \int_{\pi/2}^{\varphi} \left(\frac{\cos\varphi}{\varphi - \alpha_0}\right)^2 d\varphi, \qquad (2.46)$$

Видно, что асимптотически $\tau \approx S$. Разложив давление и плотность энергии в ряд по степеням x (или $(1/S)$) с точностью $O(x^5)$, получим

$$\kappa p \approx 4B^2 x^4; \qquad (2.47)$$

$$\kappa\varepsilon \approx 12Ax^3(1 + 6Ax) + 12B^2x^4 = \kappa\varepsilon_{dust} + \kappa\varepsilon_{rad}, \qquad (2.48)$$

где $\kappa\varepsilon_{rad} = 3\kappa p$ - плотность энергии ультрарелятивистского состояния материи; $\kappa\varepsilon_{dust}$ - плотность энергии некогерентной пыли, совпадающая в этом приближении с асимптотикой плотности энергии фридмановского решения.

Из этого следует, что постоянная A отвечает за наличие вещества, а B отвечает за наличие излучения. Плотность энергии при этом асимптотически распадается на прямую сумму плотности энергии пыли и плотности энергии равновесного излучения (2.48). Причём уравнение состояния в этом приближении совпадает с уравнением состояния ультрарелятивистского газа.

Если устремить B (величину, отвечающую за наличие излучения) к нулю, то в пределе должно получиться решение Фридмана:

$$\lim_{B\to 0}\left(\sqrt{(1+A^2/B^2)}\cos\left(\frac{B}{S}+\alpha_0\right)\right)=1-A/S=1-Ax. \qquad (2.49)$$

Если теперь разложить выражение (2.39) для функции y в ряд по степеням x вблизи точки $x=0$ и ограничиться точностью $O(x^3)$, то получим фактически выражение (2.18):

$$y(x)\approx 1-Ax-\frac{B^2x^2}{2}, \qquad (2.50)$$

при условии, что $a=B^2$.

Выбор потенциала привёл к обобщению рассмотренного ранее случая.

Эволюция открытой космологической модели с излучением

Запишем выражения для давления и плотности энергии в новых обозначениях, перейдя от $x=1/S$ к новой переменной $z=B/S$:

$$\kappa p=\frac{4z^4}{B^2}\frac{1}{(1+A^2/B^2)^2\cos^4\varphi(z)}=\frac{4z^4}{B^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi(z)}\right)^4; \qquad (2.51)$$

$$\kappa\varepsilon=\frac{12z^3}{B^2}\frac{tg\varphi(z)(1+z\mathrm{tg}\,\varphi(z))}{(1+A^2/B^2)^2\cos^4\varphi(z)}=\frac{12z^3}{B^2}tg\varphi(z)\left(1+z\mathrm{tg}\,\varphi(z)\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi(z)}\right)^4, \qquad (2.52)$$

где $\varphi(z)=z+\alpha$.

Функция состояния примет вид:

$$\beta=\frac{p}{\varepsilon}=\frac{1}{3}\frac{zctg\varphi(z)}{\left(1+ztg\varphi(z)\right)}. \qquad (2.53)$$

Приравнивая функцию состояния нулю, $\beta(z)=0$, получаем два корня:

$$z_1=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ z_2=0. \qquad (2.54)$$

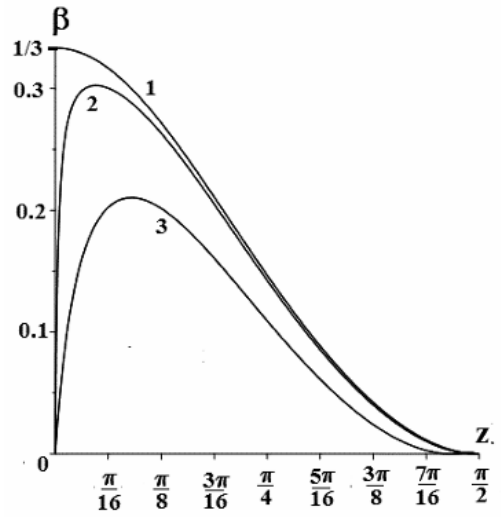

Рис. 2. Поведение функции состояния $\beta(z)$ открытой космологической модели в случае присутствия только излучения (1) и в присутствии излучения и массовой материи (2, 3).

Первый корень $z_{01}=\frac{\pi}{2}$ отвечает наиболее близкой к началу Вселенной точке, и в отсутствии массовой материи ($\mathrm{A}=0$ или $tg(\alpha)=0$). Второй корень ($z_2=0$ или $S=\infty$) соответствует фридмановской асимптотике (присутствует некогерентная пыль; отсутствует излучение).

На графике рисунка 2 кривая (1) описывает поведение функции состояния в отсутствии массовой материи ($A=0$). Максимальное значение равно $1/3$, что означает выход Вселенной на ультрарелятивистскую стадию состояния материи. В этом состоянии Вселенная после разогрева до ультрарелятивистского состояния пребывает все дальнейшее время.

Если появляется хотя бы ничтожное количество массовой материи, то Вселенная не может достичь чисто ультрарелятивистской стадии. В лучшем случае, разогрев Вселенной приведет к состоянию близком к ультрарелятивистской стадии. Это демонстрируют кривые (2), для которой $tg(\alpha_1) = 0.01$, и (3) с $tg(\alpha_2) = 0.1$. Увеличение доли массовой материи означает, что температура с самого начала будет не очень высокой и Вселенная быстрее остынет.

Начальный разогрев должен выводить Вселенную как можно ближе к ультрарелятивистской стадии, для того чтобы эволюционирующая Вселенная остывала как можно медленнее.

Функция состояния и эволюция открытой космологической модели:

Произведем инверсию переменной z, определив переменную $x = 1/z = S/B$, чтобы «переместить» точку $z_2 = 0$ на бесконечность $(S = \infty)$. Тогда функция состояния перепишется в виде

$$\beta(x) = \frac{1}{3}\frac{ctg\varphi(x)}{(x + tg\varphi(x))} = \frac{1}{3}\frac{ctg\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)}{\left(x + tg\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)\right)}. \qquad (2.55)$$

В этом случае корень уравнения $\beta(\mathrm{x}) = 0$ есть

$$x_0 = \frac{2}{\pi - 2\alpha}. \qquad (2.56)$$

При отсутствии массовой материи $(\mathrm{A} = 0)$ этот корень равен $x_0 = 2/\pi$.

Приведём два графика поведения функции состояния рассматриваемого решения: безмассовой материи $(\mathrm{A} = 0)$, то есть $tg(\alpha) = 0$ и при наличии массовой материи.

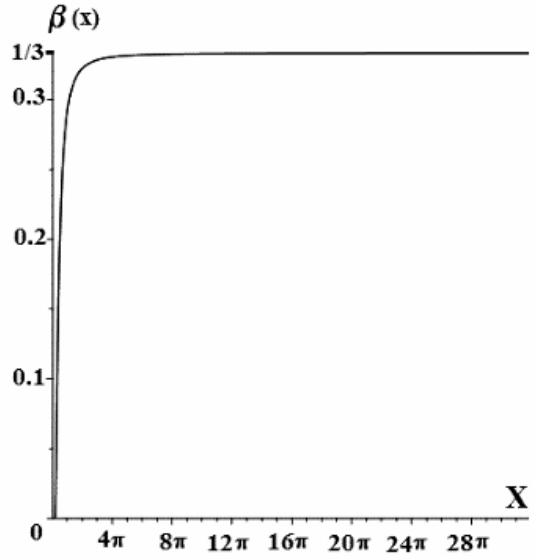

Рис. 3. Поведение функции состояния $\beta(\mathrm{x})$ открытой космологической модели в отсутствие массовой материи, когда $(\mathrm{A} = 0)$, что эквивалентно $\alpha = 0$.

Из графика на рисунке 3 видно, что резкий разогрев Вселенной на начальной стадии до ультрарелятивистского состояния материи, отмеченный на графике значением $\beta = 1/3$, в отсутствие массовой материи не спадает с течением времени: нет асимптотики, присущей наличию вещества. Вселенная заполнена только равновесным излучением и находится в этом состоянии бесконечно долго.

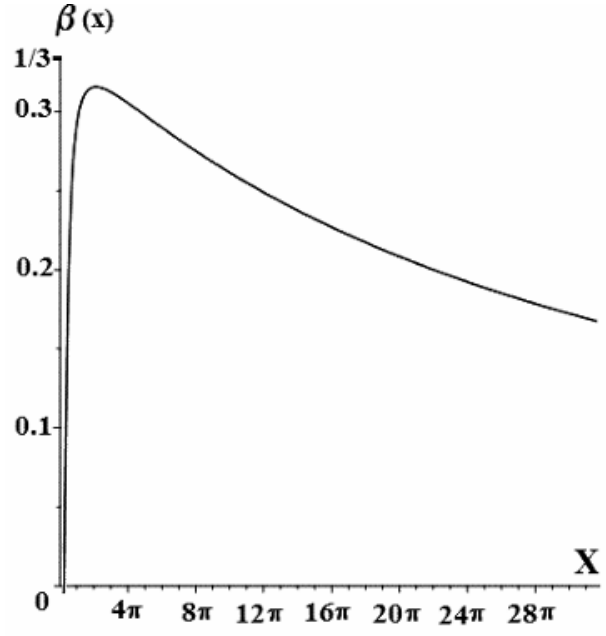

Рис. 4. Поведение функции состояния $\beta(\mathrm{x})$ открытой космологической модели в присутствии массовой материи.

На графике рисунка 4 приведено поведение функции состояния при некотором значении $A/B = tg(\alpha) \neq 0$. Максимальное значение β не достигает ультрарелятивистской стадии $\beta = 1/3$, оно оказывается меньше. После пика кривой идёт резкое спадание: чем больше отношение $A/B = tg(\alpha)$, тем быстрее идёт остывание.

Эти два графика (Рис. 3-4) указывают на существование зависимости между отношением параметров A/B и максимальным возможным значением функции состояния, что позволяет судить о степени разогрева Вселенной на начальной стадии.

Искомая зависимость $tg(\alpha) = A/B$ от максимального значения функции состояния $\beta_{\max} = b$ выглядит следующим образом:

$$tg(\alpha)=\frac{3w(b)tg(\nu(\mathrm{b}))+(3\mathrm{b}-1)}{(3b-1)tg(\nu(\mathrm{b}))-w(b)}, \tag{2.57}$$

где

$$w(b)=3\sqrt{(1-2b-3b^2)b};\ \nu(b)=\frac{w(\mathrm{b})}{2(3b+1)}. \tag{2.58}$$

Соответствующий график приведён на рисунке 5, где видно, что ультрарелятивистскую стадию Вселенная может достигнуть, строго говоря, при $A/B=0$.

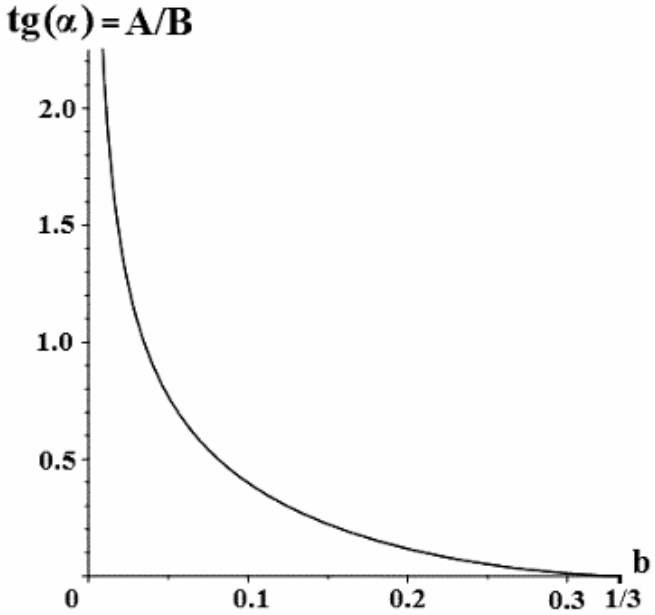

Рис. 5. Поведение отношения параметров A/B в зависимости от максимального значения b функции состояния.

На рисунке 6 приведены графики поведения функции состояния $\beta(x)$ для различных значений максимума b этой функции, связанного функционально с отношением параметров A/B, что продемонстрировано на рисунке 5. Кривая (1) на рисунке 6 соответствует $b=1/3-0.0001$; кривая (2) - $b=1/3-0.001$; кривая (3) - $b=0.2$; кривая (4) - $b=0.05$. Видно как уменьшается разогрев Вселенной с увеличением A/B.

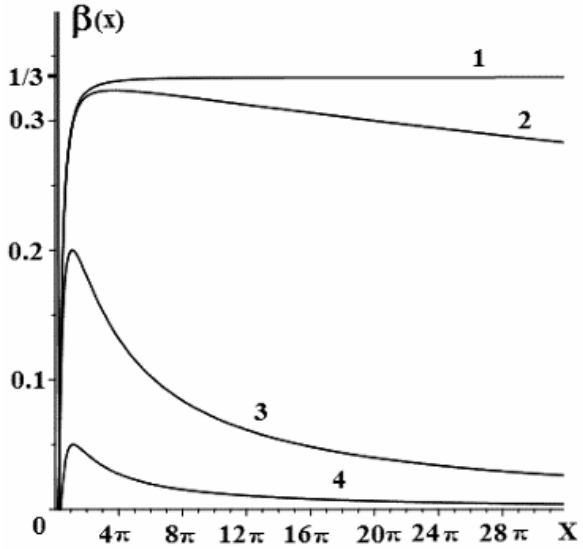

Рис. 6. Пример поведения функции состояния $\beta(x)$ для различных значений максимума $\beta_{\max} = b$.

В этой главе была рассмотрена возможность сведения моделирования эволюции Вселенной к задаче о движении частицы в силовом поле: перебрав вид функции потенциала U: $U = const$, $U = ay + b$, $U = B^2 y^2 / 2 + U_0$, пришли от модели, соответствующей равномерному движению к модели, соответствующей механическому осциллятору.

Следующая глава посвящена моделированию эволюции Вселенной как задача об осцилляторе с параметрами, подобно работам [9], [10].

Глава III.

Открытая космологическая модель Вселенной как задача о гармоническом осцилляторе, зависящем от параметров

3.1. Уравнения Эйнштейна в «механическом подходе» для осциллятора с постоянной жёсткостью

Перейдём к описанию того, как свести «моделирование» открытой Вселенной к задаче об осцилляторе с параметрами. Возьмём 4D метрику, конформную метрике Минковского (подход Фока [24]):

$$ds^2 = \exp(2\sigma)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \exp(2\sigma)(dt^2 - dr^2) \qquad (3.1)$$

где $\exp(2\sigma)$ – конформный множитель, зависящий от переменной S, являющейся расстоянием в 4D пространстве-времени; $S^2 = t^2 - r^2$; индексы μ,ν пробегают значения $0,1,2,3$; $\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$ – метрический тензор Минковского; гравитационная постоянная Ньютона и скорость света взяты равными единице; эйнштейновская гравитационная постоянная равна $\kappa = 8\pi$.

Уравнения Эйнштейна без космологического члена и с источником в виде тензора энергии-импульса в приближении идеальной жидкости $T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\cdot u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$ запишутся в виде:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \qquad (3.2)$$

где ε -- плотность энергии; p – давление; $u_\mu = \exp(\sigma) b_\mu$ - 4-скорость; $b_\mu = S_{,\mu}$; $u_\mu u^\mu = 1$; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$-- метрический тензор 3-пространства, ортогонального временноподобной конгруэнции u^μ: $b_{\mu\nu}u^\nu = 0$.

В результате проецирования на временноподобное направление и пространственноподобную 3-площадку система уравнений (3.2) сводится к системе двух дифференциальных уравнений и после перехода к новой функции $y(S)$ (как $\sigma(S) = 2\ln(y(S))$, принимает вид:

$$12\cdot y'\left(y' + \frac{1}{S}\cdot y\right) = \kappa\varepsilon\cdot y^6 \qquad (3.3)$$

$$4\cdot\left(y''+\frac{2}{S}\cdot y'\right)=-\kappa p\cdot y^5 \tag{3.4}$$

где штрихом обозначена производная по S.

Переход к новой переменной $x=1/S$ позволяет переписать уравнение (3.4) в виде, аналогичном второму закону Ньютона в механике:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F(x,y,p) \tag{3.5}$$

где «сила» F вводится как $F(x,y,p)=-\kappa\frac{y^5}{4x^4}\cdot p$.

Для некогерентной пыли ($p=0$) или для инерциального движения с $F=0$ сразу получаем открытую модель Фридмана с $y(x)=1-A_F x$, где A_F – постоянная Фридмана, отвечающая за наличие вещества.

Далее попытаемся получить космологическое решение уравнений тяготения, вводя потенциал $U=B^2y^2/2$, где B^2 – аналог коэффициента жёсткости пружины. Тогда потенциальная «сила» F записывается в виде (закон Гука):

$$F=-\frac{dU}{dy}=-B^2y, \tag{3.6}$$

а уравнение движения (3.5) принимает вид уравнения колебаний:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+B^2y=0, \tag{3.7}$$

где y – корень четвёртой степени из конформного множителя метрики для открытой Вселенной в подходе Фока; $x=1/S$ - аналог времени; B^2 - аналог коэффициента жёсткости пружины [1], [14].

В следующем параграфе будет приведено описание «конструирования» новой открытой модели Вселенной, как осциллятора с параметрами, путём введения новой переменной «фридмановского» типа, которая будет выполнять функцию времени.

3.2. Решение уравнений тяготения и исследование соответствующей космологической модели

Введём новую переменную вида $Z = 1 - A_F x$ (аналогично работам [4], [7]), которая будет выполнять функцию времени, как «старая» переменная $x = 1/S.$ Тогда уравнение колебаний (3.7) примет вид:

$$A_F^2 \frac{d^2 y}{dZ^2} + B^2 y = 0, \tag{3.8}$$

где A_F – постоянная Фридмана, связанная с плотностью массы материи; y – корень четвёртой степени из конформного множителя метрики для открытой Вселенной в подходе Фока; Z - аналог времени; B^2 -- аналог коэффициента жёсткости пружины.

Разделив обе части выражения на A_F^2 и введя новый параметр $\xi = B / A_F$, окончательно имеем:

$$\frac{d^2 y}{dZ^2} + \xi^2 y = 0. \tag{3.9}$$

где $\xi = B/A_F$ - новый аналог циклической частоты; $Z = 1 - A_F x$ - новый аналог времени.

Решение полученного дифференциального уравнения (3.9) имеет вид:

$$y(\mathrm{Z}) = C \cdot \cos(\xi \cdot \mathrm{Z} + \gamma). \tag{3.10}$$

Далее необходимо потребовать прохождения модели через решение Фридмана для больших S: $S \to \infty \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow Z = 1.$

Поэтому разложим (3.10) в ряд Тейлора в точке $Z = 1$ с сохранением первых двух членов:

$$y \approx C \cdot \cos(\frac{B}{A_F} + \gamma) - C \cdot \frac{B}{A_F} \cdot \sin(\frac{B}{A_F} + \gamma) \cdot (\mathrm{Z} - 1). \tag{3.11}$$

Приравняем полученное приближение переменной Z , выраженную через x . Сравнивая коэффициенты при степенях x , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C\cdot\cos(\dfrac{B}{A_F}+\gamma)=1; \\ C\cdot\dfrac{B}{A_F}\cdot\sin(\dfrac{B}{A_F}+\gamma)=-1, \end{cases} \tag{3.12}$$

которая, в свою очередь, сводится к трансцендентному уравнению вида:

$$\tan(\xi+\gamma)=-\frac{1}{\xi}. \tag{3.13}$$

Следовательно, введение новой переменной Z, тесно связанной с решением Фридмана для открытой Вселенной, требует наличия жесткой связи между параметрами в виде уравнения (3.13). Это означает, что, например, что параметр ξ не может быть произвольным, как это было при построении предыдущих моделей. Другими словами, могут реализовываться не произвольные модели.

С учётом всех проделанных замен, получим выражения для давления и плотности энергии в новых переменных:

$$A_F^2\frac{d^2y}{dZ^2}=F(Z,y,p)=-\kappa\frac{y^5}{4\cdot\left(\dfrac{1-Z}{A_F}\right)^4}p \tag{3.14}$$

$$-A_F\frac{dy}{dZ}\left(-A_F\frac{dy}{dZ}-\frac{y}{\left(\dfrac{1-Z}{A_F}\right)}\right)=\kappa\frac{y^6}{12\cdot\left(\dfrac{1-Z}{A_F}\right)^4}\varepsilon \tag{3.15}$$

Из (3.14) найдем выражение для давления κp:

$$\kappa p=4\cdot(1-Z)^4\,\xi^2\,A_F^{-2}y^{-5}, \tag{3.16}$$

А из (3.15) -- для плотности энергии $\kappa\varepsilon$:

$$\kappa\varepsilon=12\cdot(1-Z)^4C\xi\cdot\sin(\xi\cdot Z+\gamma)(\xi\,\mathrm{tg}(\xi\cdot Z+\gamma)-\frac{1}{1-Z})\,A_F^{-2}\,y^{-6} \tag{3.17}$$

Введём функцию $\beta(Z,\xi,\gamma)=p/\varepsilon$, которая для каждого Z является уравнением состояния. Воспользуемся соотношениями (3.16), (3.17) и запишем:

$$\beta(\mathrm{Z},\xi,\gamma)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\xi\cdot(1-\mathrm{Z})\cdot ctg(\xi\cdot\mathrm{Z}+\gamma)}{\xi\cdot(1-\mathrm{Z})\cdot tg(\xi\cdot\mathrm{Z}+\gamma)-1} \tag{3.18}$$

Введя замены переменных $\theta=\xi\cdot(1-Z)$, $\psi=\xi\cdot Z+\gamma$, перепишем функцию состояния в виде

$$\beta(\theta,\psi)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\theta\cdot ctg(\psi)}{\theta\cdot tg(\psi)-1} \tag{3.19}$$

где $0\le\theta\le Z_0=(\frac{\pi}{2}-\gamma)/\xi$; $\psi=(\xi+\gamma)-\theta$, а $Z=1$; $Z=Z_0$ суть нули функции β из (3.18).

Таким образом, было получено выражение для функции состояния новой открытой космологической модели. В следующем параграфе будут рассмотрены особенности поведения этой функции и построены её графики, а затем, на их основе будет дана физическая интерпретация полученных результатов.

3.3. Функция состояния и её поведение

Далее перейдём к построению графиков для иллюстрации поведения полученной функции состояния. Для наблюдения за влиянием конкретного параметра на поведение функции β мы должны «зафиксировать» значения остальных переменных параметров. Продемонстрируем влияние параметра ξ на поведение функции состояния, положив $\gamma=0$, не забывая о том, что ξ и γ связаны трансцендентным уравнением (3.13).

Функция состояния β, отвечающая этим вариантам космологических моделей, изображена на рисунке 7.

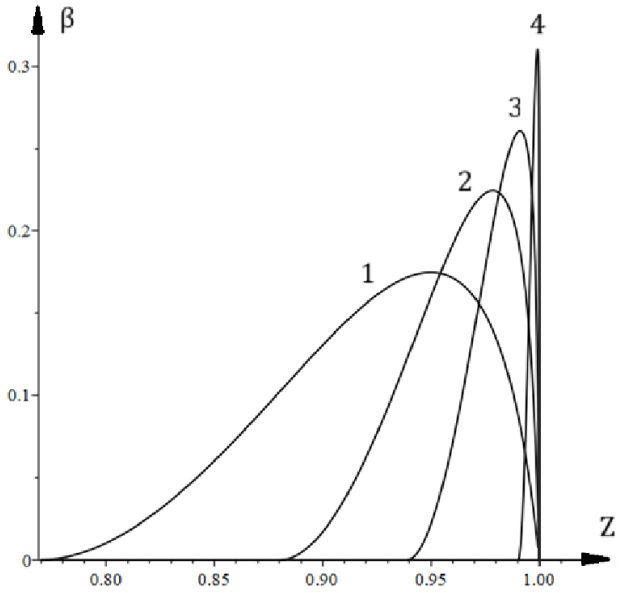

Рис. 7. Графики 1-4 поведения функции β с заданными параметрами ξ и γ.

Представленные графики соответствуют четырем случаям (четырем решениям уравнения (3.13)):

1. Космологическая модель с параметрами $\xi = B / A_F = 6{,}121$ и $\gamma = 0$.
2. Космологическая модель с параметрами $\xi = B / A_F = 12{,}486$ и $\gamma = 0$.
3. Космологическая модель с параметрами $\xi = B / A_F = 25{,}093$ и $\gamma = 0$.
4. Космологическая модель с параметрами $\xi = B / A_F = 160{,}215$ и $\gamma = 0$.

Физическая интерпретация точек кривых β: нули функции состояния соответствуют началу и концу эволюции Вселенной: ближайший минимум функции состояния к точке $Z = 1$ - начало эволюции Вселенной, ноль функции β в точке $Z = 1$ - конец эволюции Вселенной. Точка максимума функции состояния между нулями β характеризуется отношением B / A_F (количественное отношение излучения к массовой материи), по которому можно судить о степени разогрева Вселенной на начальной стадии.

Полученное семейство кривых (Рис. 7), при фиксированном значении $\gamma = 0$, обладает следующей особенностью: при возрастании параметра ξ значение функции состояния β стремится к $1/3$, что соответствует модели «электромагнитной» Вселенной. Это значит, что «сконструированная» в этой работе космологическая модель пригодна для анализа эволюции Вселенной.

Иными словами, функция β, полученная в процессе вычислений, всё ещё является носителем уже известной нам информации, а значит, она может стать источником для поиска новых данных о сценарии эволюции Вселенной.

На рисунке 7 представлен тривиальный случай: параметр $\gamma = 0$, и меняется только параметр $\xi = B / A_F$. Однако, строго говоря, для полученной функции состояния β мы имеем конкретную взаимосвязь между параметрами ξ и γ в виде трансцендентного уравнения (3.13). Это означает, что значение каждого отдельного параметра не задаётся произвольно. Однако, для данной функции состояния мы можем менять оба параметра ξ и γ в соответствии с их взаимосвязью. Иными словами, в общем случае, получение графиков функции β сводится к задаче на построение кривых в трёхмерии параметров (ξ, γ) и переменной Z, что представлено на рисунке 8:

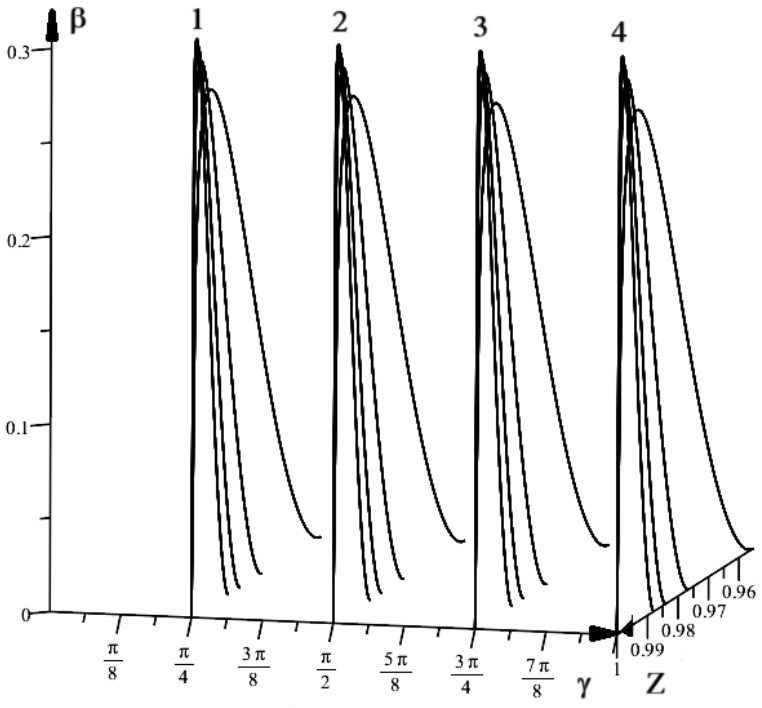

Рис. 8. Графики семейств 1-4 поведения функции β с заданными параметрами ξ и γ.

Представленные графики соответствуют 4 семействам:

1. Семейство космологических моделей с параметрами $\gamma = \pi/4$

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
36.887	68.315	99.736	131.154

2. Семейство космологических моделей с параметрами $\gamma = \pi/2$

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
36.101	67.529	98.950	130.368

3. Семейство космологических моделей с параметрами $\gamma = 3\pi/4$

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
35.315	66.744	98.165	129.583

4. Семейство космологических моделей с параметрами $\gamma = \pi$

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
34.529	65.958	97.379	128.798

Стоит отметить, что семейства космологических моделей строятся в трёхмерии (ξ, γ, Z) в следующих диапазонах: $Z \in [0;1]$; $\gamma \in (0;\pi]$; $\xi \in [0;\infty)$. Это сделано из следующих соображений: значение Z обусловлено нулями функции β, причём при построении кривых в математическом пакете реализуется алгоритм поиска такого значения Z, при котором β обращается в ноль вблизи точки $Z = 1$. Поэтому диапазон значений Z начинается от 0 и заканчивается 1. Параметр γ лежит в указанном диапазоне по следующей причине: поскольку ξ и γ связаны трансцендентным уравнением через функцию тангенса, соответственно корни такого уравнения представляют собой ряд значений, причём соседние отличаются друг от друга на величину числа π. В силу того, что параметр γ является безразмерным (аналог

начальной фазы), то его увеличение не даёт нам новых кривых β, они будут полностью повторяться для γ и $\gamma+\pi n$, где n принадлежит множеству целых чисел. Соответственно, диапазон значений для ξ выбран таким образом, поскольку у него есть физический смысл: $\xi = B / A_F$. Это значит, что если мы будем брать разные значения этого параметра при заданном γ, то будем получать космологические модели с разными физически размерными величинами. Иными словами, в качестве нижней границы для параметра ξ взят 0, поскольку отношение B / A_F не берётся отрицательным, а верхняя граница берётся равной $+\infty$. Данный подход позволяет построить полное множество космологических семейств в трёхмерии (ξ, γ, Z) так, чтобы ни одна из моделей не дублировалась на графике.

«Сконструированная» новая открытая космологическая модель в таком подходе ограничена упомянутыми выше диапазонами значений для параметров (ξ, γ, Z). В силу этого она не позволяет «пронаблюдать» сценарии эволюции Вселенной при $\xi \to 0$. Также графики полученной функции состояния (3.18) после точки $Z = 1$ не уходят в $-\infty$ по оси β, что ограничивает «поисковые территории» на пути исследования. Однако, несмотря на упомянутые недостатки, новая модель открытой Вселенной, представленная в виде осциллятора с параметрами, тем не менее, является носителем «физической» информации о её эволюции. Одна и та же информация может быть представлена в разных формах и видах, что позволяет обнаруживать скрытые на первый взгляд закономерности и связи. Таким образом, «сконструированная» модель открытой Вселенной является одной из возможных форм представления информации о космологической эволюции.

Глава IV.

Методическое сопровождение хода занятия по теме ВКР

4.1. Сценарий урока «От Фридмана до наших дней: Эволюция представлений о расширении Вселенной»

Целевая аудитория: 10-11 класс (физико-математический профиль).

Предмет: Физика [19] / Астрономия [15], [29].

Время: 80 минут (2 спаренных урока).

Тип урока: Урок открытия нового знания; урок-исследование [23].

Цель: Сформировать у обучающихся представление о том, как с течением времени менялись взгляды на устройство и эволюцию Вселенной. Сформировать умение анализировать графики функции состояния, и на их основе давать физическую интерпретацию сценариев эволюции космологических моделей.

Планируемые результаты:

1. **Предметные:**

- Знать основные положения космологического принципа: однородность и изотропия пространства;
- Понимать на качественном уровне суть и следствия трёх уравнений Фридмана;
- Знать о наличии наблюдательных данных, указывающих на ускоренное расширение Вселенной (реликтовое излучение, сверхновые типа Ia);
- Понимать физическую интерпретацию графиков эволюции масштабного фактора $a(t)$ для разных моделей Фридмана.
- Понимать физическую интерпретацию графиков функции состояния $\beta = p/\varepsilon$ для разных моделей, обобщающих решения Фридмана.

- Сравнивать открытую модель Вселенной Фридмана и новую «сконструированную» космологическую модель (на основе предоставленных графиков и физических интерпретаций).

2. **Метапредметные:**

- Познавательные: анализировать графики, сравнивать модели, выявлять закономерности, строить логические рассуждения, устанавливать причинно-следственные связи, работать с научной информацией.
- Регулятивные: ставить учебные задачи, планировать деятельность, осуществлять самоконтроль при выполнении заданий, оценивать результаты.
- Коммуникативные: участвовать в коллективном обсуждении, аргументировать свою точку зрения, воспринимать и понимать позицию других, использовать научную терминологию.

3. **Личностные:**

- Формирование научного мировоззрения.
- Понимание динамичности научного знания.
- Осознание масштабов Вселенной и места человека в ней.
- Развитие интереса к фундаментальным исследованиям и космологии.

Оборудование:

1. Компьютер, проектор, экран, доска, маркеры.
2. Презентация (ключевые слайды: космологический принцип; три уравнения Фридмана; графики $a(t)$ для моделей Фридмана; наблюдательные данные, указывающие на ускоренное расширение Вселенной; графики $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$ для «сконструированной» открытой модели; сравнительная таблица космологических моделей).

3. Мои материалы: графики $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$; памятка, включающая в себя краткую физическую интерпретацию «сконструированной» модели.
4. Раздаточный материал: задания для групповой работы (анализ графиков и сравнение моделей); таблица для заполнения «Сравнение космологических моделей».

Ход урока:

1. **Организационный момент (2 мин):**

   Приветствие класса, настрой на работу. Объявление темы: «Сегодня мы рассмотрим динамику изменения взглядов человечества на устройство и эволюцию Вселенной с течением времени. Мы попытаемся понять, как математика и физика описывают космологическую эволюцию, познакомимся с новыми идеями в этой области, базирующимися на классических работах Александра Фридмана».

2. **Актуализация знаний и постановка проблемы (5 мин):**

   Вопросы классу, помогающие актуализировать знания обучающихся:

- Что такое Вселенная в самом широком смысле?

  Ответ: Пространство, время, материя, энергия.
- Какое фундаментальное свойство Вселенной мы знаем из наблюдений?

  Ответ: Вселенная расширяется согласно закону Хаббла.
- Как человечество представляло себе Вселенную в начале 20 века?
- Что показали уравнения обшей теории относительности (ОТО) Эйнштейна применительно ко Вселенной?

  Ответ: Вселенная не может быть статичной. Для её описания необходимо «конструирование» динамических моделей.

Формулировка проблемы: «Если Вселенная расширяется, то каков характер этого расширения? Меняется ли оно с течением времени? Какую форму, и какой сценарий эволюции имеет наша Вселенная? Космологические модели дают ответы на эти вопросы. Сегодня мы разберём классическую основу – модели Фридмана, посмотрим, что говорят современные наблюдения, и познакомимся с новой моделью открытой Вселенной, «сконструированной» на базе фридмановской.

Изучение классической модели Фридмана (20 мин):

Космологический принцип (слайд):

Однородность и изотропность Вселенной в больших масштабах (свыше 100 Мпк или 326 миллионов световых лет) лежат в основе моделирования.

Уравнения Фридмана (слайд):

- $(\dot{a}/a)^2 = \ldots$ (Первое уравнение Фридмана, связывающее скорость расширения $\dot{a}/a$ (параметр Хаббла H) с плотностью энергии во Вселенной ρ и кривизной пространства k).
- Ключевые параметры: плотность энергии ρ, критическая плотность ρ_{crit}, параметр плотности $\Omega = \rho/\rho_{crit}$, параметр кривизны $\Omega_k = 1 - \Omega$.
- $\ddot{a}/a = \ldots$ (Второе уравнение Фридмана, определяющее ускорение расширения трёхмерного пространства).
- $\dot{\rho} = \ldots$ (Третье уравнение Фридмана – закон сохранения вещества).

Три сценария (слайды с графиками $a(t)$):

- Закрытая модель ($\Omega > 1, k > 0$, сферическая геометрия): Расширение сменяется сжатием («Большое сжатие»). График $a(t)$ - циклоида.

- Плоская модель ($\Omega = 1$, $k = 0$, евклидова геометрия): Расширение вечно, скорость стремится к нулю. График $a(t)$ - парабола ($\dot{a} \to 0$ при $t \to \infty$).
- Открытая модель ($\Omega < 1$, $k < 0$, гиперболическая геометрия): Расширение вечно, скорость стремится к ненулевой константе. График $a(t)$ - прямая ($\dot{a} = \text{const}$) при больших t.

  Физическая интерпретация: судьба Вселенной зависит от средней плотности вещества и энергии в ней.

3. **Современные наблюдательные данные: (5 мин):**

- Наблюдения далёких сверхновых типа Ia (конец 90-х) показали, что расширение Вселенной ускоряется.
- Это не укладывается в чистую модель Фридмана с обычным веществом (Ω_{matter}). Вещество должно тормозить расширение.
- Чтобы разрешить сложившуюся ситуацию, была «сконструирована» ΛCDM-модель (современная стандартная модель): ввели присутствие тёмной энергии (Ω_Λ) - компоненты с отрицательным давлением, вызывающей антигравитацию и ускорение. В этой модели наша Вселенная плоская ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$) и ускоренно расширяется вечно. График $a(t)$ имеет сигмоидную форму (*замедление* $\to$ *ускорение*).
- Акцентирование внимания обучающихся на том, что ΛCDM – модель, хорошо описывающая данные, но природа тёмной энергии неизвестна. Это открывает путь для альтернативных моделей и интерпретаций.

4. **Представление «сконструированной» новой открытой модели (15 мин):**

- Мотивация: «Поиск альтернативных описаний ускоренного расширения и геометрии Вселенной – активная область

исследований. Сейчас мы познакомимся с моделью, разработанной на основе классической модели Фридмана».

- Суть модели:

Основа: уравнения гравитационного поля Эйнштейна, уравнения Фридмана.

Ключевая идея: кратко сформулировать, как была «сконструирована» данная космологическая модель (описание «механического подхода»)

Главный результат (слайды с 2D и 3D графиками $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$): показать графики функции состояния $\hat{\beta}$ для новой открытой модели. Сравнить их с графиками для других космологических моделей из научных статей, посвящённых вопросу моделирования эволюции Вселенной.

- Физическая интерпретация графика: объяснить обучающимся, что именно показывает график функции состояния $\hat{\beta}$ для новой «сконструированной» космологической модели:

— Что означают нули функции $\hat{\beta}$?

— Какую информацию в себе несёт максимум функции $\hat{\beta}$ между её «нулями»?

— Что могло бы означать устремление функции $\hat{\beta}$ в $-\infty$ после точки $Z = 1$?

— Какими ограничениями обладает «сконструированная» модель?

— Какими преимуществами обладает данная модель?

5. Групповая работа: анализ и сравнение моделей (20 мин):

Класс делится на группы по 3-4 человека. Каждая группа получает:

- Раздаточный материал с графиками для: классической открытой модели Фридмана, ΛCDM-модели и новой «сконструированной» модели.

- Таблицу для заполнения:

Характеристика	Модель Фридмана	ΛCDM (стандартная)	Примечания
Геометрия (k)			
Плотность (Ω)			
Характер расширения $(\dot{a})$			
Наличие ускорения $(\ddot{a} > 0)$			
Конечная скорость ($\dot{a}$ при $t \to \infty$)			
Судьба Вселенной			
Главная особенность			

- Вопросы для обсуждения:

Чем график классической модели визуально отличается от ΛCDM-модели?

Графики $a(t)$ или $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$ являются наиболее информативными об эволюции Вселенной?

Какую информацию о Вселенной даёт функция $a(t)$, а какую $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$?

- Роль учителя: консультирует группы, направляет обсуждение, помогает с физической интерпретацией графиков.

6. Обсуждение результатов групповой работы (10 мин):

- Лидеры групп докладывают основные выводы по таблице и отвечают на вопросы для обсуждения.
- Учитель обобщает результаты, акцентирует внимание на ключевых отличиях и особенностях приведённых моделей, выявленных учениками. Подтверждает или корректирует их выводы.
- Дискуссионный вопрос: «Могут ли сосуществовать разные модели, описывающие одни и те же данные? Почему учёные продолжают разрабатывать альтернативные модели, при наличии стандартной?»

7. **Рефлексия и итоги (3 мин):**

- Вопросы классу:

— Какие космологические модели мы рассмотрели на занятии?

— Что является причиной появления новых космологических моделей?

— В чём заключается основная идея новой «сконструированной» открытой модели, представленной сегодня?

— Почему изучение таких моделей важно?

- Итог учителя: «Мы увидели динамику изменения человеческих представлений об устройстве и эволюции Вселенной: от классических решений Фридмана до современной стандартной модели с тёмной энергией и альтернативных подходов, таких как новая «сконструированная» открытая модель. Космология остаётся наукой, полной загадок, а новые модели, подобные рассмотренной, - это шаги на пути к их разгадке».

8. **Домашнее задание (по выбору):**

- **Базовое:** подготовить конспект урока, ответив на вопросы: а) Какие 3 сценария описывал Фридман? б) Что показали наблюдения сверхновых? в) Что такое ΛCDM-модель? г) Какая ключевая особенность новой «сконструированной» открытой модели (по вашему мнению)?
- **Углублённое:** найти информацию об одном из подтверждающих наблюдений ΛCDM (реликтовое излучение, барионные акустические осцилляции) и объяснить, как оно поддерживает модель плоской ускоряющейся Вселенной. Подумать, как это наблюдение согласуется (или нет) с новой открытой моделью.
- **Творческое (исследовательское):** предложить свою аналогию (упрощённую), объясняющую расширение в классической открытой модели Фридмана.

4.2. Методические рекомендации по проведению урока по теме «От Фридмана до наших дней: Эволюция представлений о расширении Вселенной»

Методические рекомендации по проведению урока по теме ВКР представляют из себя «точечные советы», так что они могут быть представлены в качестве списка. Их можно читать в любом порядке:

1. Адаптация сложности материала под уровень обучающихся старшей школы по новой «сконструированной» модели: самое сложное – сформулировать и преподнести понятную физическую интерпретацию новой открытой модели и её графиков функции состояния $\hat{\beta}(\xi, Z, \gamma) = \hat{p}/\hat{\varepsilon}$ для 10-11 класса. Стоит избегать тотального математического формализма: для проведения занятия не понадобится полный набор формул из ВКР, можно какие-то шаги в процессе повествования «опустить» (например, реализацию (1+3)-расщепления уравнений гравитационного поля). Для объяснения физической интерпретации следует использовать упрощённые аналогии и качественные описания.
2. Визуализация: полученные графики для новой модели – главный инструмент. Их необходимо сделать максимально чёткими, подписать оси и добавить легенду. Для наглядности можно использовать разные цвета/типы линий для сравнения с другими космологическими моделями или семействами в пределах одних и тех же координатных осей. Также можно воспользоваться написанной программой в математическом пакете в процессе занятия или на перемене, чтобы показать, как именно задаются параметры для данной «сконструированной» модели. Используя программу, можно «на месте» строить различные конфигурации космологических семейств моделей с параметрами.
3. Суть отличий: чётко сформулировать для себя и обучающихся: чем физически «сконструированная» открытая модель принципиально

отличается от классической открытой модели Фридмана? (Не математически, а по предсказываемому поведению Вселенной). Это основа для дальнейшего обсуждения и сравнения.

4. Наблюдательные следствия: кратко упомянуть, какие наблюдательные данные (реальные или гипотетические) поддерживают или могут поддержать «сконструированную» модель, в отличие от других. Это добавит убедительности в том, что «полученная Вселенная» не лишена «физичности».
5. Энтузиазм и ясность доносимых мыслей учителя: понимание темы и увлечённость ею – не менее важный фактор успеха урока, чем наличие технических приспособлений и оборудования в кабинете. Нужно говорить чётко, вести дискуссию, поощрять вопросы. Также важно подчеркнуть в процессе занятия, что демонстрируемая «сконструированная» модель Вселенной не просто математическая абстракция, а результат реальной научной работы.
6. Гибкость в подаче материала: необходимо быть готовым упростить объяснение или пропустить некоторые детали, если видно, что материал слишком сложен для аудитории. Сфокусироваться на главной идее и физической интерпретации графиков.

Сценарий урока, приведённый в IV главе, в совокупности с методическими рекомендациями и научными статьями [5], [8] позволит не только рассказать о классической космологии, но наглядно и доступно представить суть и значение проведённого исследования в рамках данной бакалаврской работы, вдохновив школьников на изучение фундаментальной науки.

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе была рассмотрена открытая космологическая модель Вселенной Фридмана в исходном подходе и подходе Фока. Была описана суть «механического подхода» к решению уравнений гравитационного поля Эйнштейна. Более конкретно:

1. Были приведены примеры открытых космологических моделей, обобщающих решения Фридмана, которые отвечают данному «механическому подходу». А именно, взяв разные виды функции потенциала U , получили:

- При $U = const$ - модель Вселенной, соответствующую равномерному движению частицы в силовом поле;
- При $U = ay + b$ - модель Вселенной, соответствующую равнозамедленному движению частицы единичной массы под действием постоянной тормозящей силы в силовом поле;
- При $U = B^2 y^2 / 2 + U_0$ - модель Вселенной, соответствующую модели «механического» осциллятора;

2. Функции состояния данных моделей были проиллюстрированы графиками.

В III главе был применён вышеописанный «механический подход» к нахождению решения уравнений Эйнштейна для открытой модели Вселенной, как осциллятору с параметрами. Также был найден вид функции состояния новой модели.

1. Был использован подход Фока для выбора исходной конформно-плоской метрики.
2. Тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна был взят в приближении идеальной паскалевой жидкости.
3. После приведения уравнений к «механическому» виду (то есть произвели замену описания эволюции Вселенной на задачу об

осцилляторе с параметрами) пришли к реализации решения Фридмана (3.10).

4. Далее ввели функцию состояния: отношение давления к плотности энергии для осциллятора с параметрами.
5. Были получены графики поведения данной функции состояния с заданными параметрами (Рис. 7-8), чтобы «пронаблюдать» эволюцию Вселенной в зависимости от значений параметров, связанных трансцендентным уравнением.

Далее, в IV главе была приведена методическая документация, сопровождающая ход занятия по теме выпускной квалификационной работы для обучающихся 10-11 классов физико-математического профиля, а именно: сценарий урока и рекомендации по проведению занятия.

Основные результаты работы:

1. В рамках «механического подхода» к конструированию открытых космологических моделей получено точное решение уравнений Эйнштейна как аналог задачи об осцилляторе с параметрами.
2. С учётом замены «старой» переменной (аналога времени) на новую переменную, тесно связанную с решением Фридмана, было получено дополнительное требование на параметры в виде трансцендентного уравнения.
3. Множество решений этого трансцендентного уравнения суть множество значений отношения параметров модели. Каждому такому отношению соответствует своя открытая космологическая модель. Другими словами, получаем множество таких моделей, каждая из которых обладает конкретным отношением параметров, а значит, имеем множество открытых космологических моделей со своей эволюцией.
4. Для такого осциллятора с параметрами была введена функция β, которая в каждый момент времени представляет собой уравнение состояния.

5. Поведение функции состояния проиллюстрировано графиками с различными значениями параметров модели. Таким образом, была получена графическая иллюстрация влияния соотношения вещества и излучения на эволюцию открытой космологической модели Вселенной, обобщающей модель Фридмана.
6. Полученное семейство кривых, при фиксированном значении $\gamma = 0$, обладает следующей особенностью: при возрастании параметра ξ значение функции состояния β стремится к $1/3$, что соответствует модели «электромагнитной» Вселенной. Это значит, что «сконструированная» в этой работе космологическая модель пригодна для анализа эволюции Вселенной.
7. Была написана программа в математическом пакете, позволяющая строить полное множество кривых β в трёхмерии (ξ, γ, Z). То есть реализована возможность наблюдения за поведением функции состояния космологической модели при одновременном изменении двух параметров: ξ и γ.
8. В качестве апробации научно-исследовательской работы, основные результаты были представлены и доложены на следующей конференции в очном формате:

   1. Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Образование и наука в XXI веке: математика, физика, информатика и технологии в смарт-мире» (Красноярск, Красноярский государственный педагогический университет, им. В. П. Астафьева).

Список используемых источников

1. Baranov A. M., Saveljev E. V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field. // Space, Time and Fundamental Interactions. 2020. No. 3. PP. 27–36.
2. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times // Russ. Phys. J. 1984. – V. 27. – No 7. – P.569-572.
3. Ахметов Н. С. Вселенная и модели Фридмана / Ахметов Н. С. // Курсовая работа [Электронный ресурс]. URL: https://portfolio.kspu.ru/works/download/164913 (дата обращения: 13.02.2025).
4. Баранов А. М. Ещё раз о Фридмана-подобной модели открытой Вселенной с давлением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. - №1. – с. 4-11.
5. Баранов А. М. Одно обобщение открытой космологической модели Фридмана при наличии вязкости // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. - №3. – с. 4-11.
6. Баранов А. М. Основы теории относительности и гравитации: Математическое введение : учеб. пособие. – 1-е изд. – К.: Сибирь, 1987. – 91 с.
7. Баранов А. М. Фридмана-подобная модель с давлением на основе решения Фридмана для открытой Вселенной // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. - №4. – с. 26-35.
8. Баранов А. М. Эволюция открытой космологической модели с излучением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. - №1. – с. 20-29.
9. Баранов А. М., Ахметов Н. С. Космологическая модель открытой Вселенной как задача об осцилляторе с диссипацией // Инновации в естественно-научном образовании. – 2024. – с. 285-290.

10. Баранов А. М., Ахметов Н. С. Открытая Вселенная как осциллятор с трением // Физико-математическое и естественнонаучное образование: наука и школа. – 2024. – с. 13-17.
11. Баранов А. М., Савельев Е. В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. I. Четырёхмерное пространство-время. – 1-е изд. – Л.: ВИНИТИ, 1988. 21 с.
12. Баранов А. М., Савельев Е. В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. II. Многомерное пространство-время. – 1-е изд. – Л.: ВИНИТИ, 1990. 13 с.
13. Баранов А. М., Савельев Е. В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена // Изв.вузов (Физика). 1984. №7. С. 32-35.
14. Баранов А. М., Савельев Е. В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2014. - №1. – с. 37-46.
15. Воронцов-Вельяминов Б. А., Страут Е. К. Астрономия. Базовый уровень : учебник для 10-11 классов общеобразовательных организаций / Б. А. Воронцов-Вельяминов, Е. К. Страут. — Москва : Просвещение, 2024. — 256 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1967. 460 с.
17. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности – 1-е изд. - М.: Наука, 1969. 327 с.
18. Модель Пуанкаре // Википедия [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.ruwiki.ru/wiki/Модель_Пуанкаре (дата обращения: 12.05.2025).
19. Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., Чаругин В. М. Физика. Классический курс. Базовый и профильный уровни : учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин – Москва : Просвещение, 2010. – 399 с.

20. Сажина О. С. Стандартная космологическая модель // Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – URL: https://bigenc.ru/c/standartnaia-kosmologicheskaia-model-e0e084 (дата обращения: 12.05.2025).
21. Сажина О. С., Сажин М. В. Космологическая модель Фридмана // Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – URL: https://bigenc.ru/c/kosmologicheskaia-model-fridmana-4efea8 (дата обращения: 10.05.2025).
22. Тимофеенко А. В. Введение в общую теорию относительности [Электронный ресурс] — URL: https://timofey.pro/static/pdfdocs/005_Vvedenie_v_OTO.pdf (дата обращения: 12.05.2025).
23. ФГОС среднего общего образования (Приказ Минобразования России от 17.05.2012 № 413 (ред. 11 .12. 2020), зарегистрировано в Минюсте России 7 июня 2012 г. № 24480). [Электронный ресурс] URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo
24. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. 2-е изд., доп. – М.: Гос. Изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. – 563 с.
25. Фридман А. А. Избранные труды. М.: Наука, 1966. – 462 с.
26. Фридман А.А. Мир как пространство и время. - М: Наука, 1965. - 110 с.
27. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной // УФН. 1963. Т. 80. Вып. 3. С. 447-452.
28. Фридман А.А. О кривизне пространства //Успехи физических наук. - 1963. - №80:3. - С. 439-446.
29. Чаругин В. М. Астрономия. Базовый уровень : учебник для 10-11 классов общеобразовательных организаций / В. М. Чаругин – Москва : Просвещение, 2018. – 144 с.