МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)
Институт математики, физики и информатики
Кафедра физики, технологии и методики обучения

Беломестнова Валентина Сергеевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Искусство построения математических моделей на примере модели военной стратегии: разработка факультатива для школьников.

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы Физика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
доцент, кандидат педагогических наук
С.В. Латынцев
06.06.25
(дата, подпись)

Руководитель
доцент, кандидат физико-математических наук
И.Н. Орлова
12.05.2025
(дата, подпись)

Обучающийся
В.С. Беломестнова
05.05.2025
(дата, подпись)

Дата защиты 20 июня 2025

Оценка отлично
(прописью)

Оглавление:

Введение.

Актуальность:

Самостоятельное построение математических моделей сложно, поскольку принципам и подходам этого процесса не учат в большинстве вузов. Однако представления об этом чрезвычайно важны при проведении исследований. В связи с этим разработка рекомендаций, инструкции для ряда случаев оказалась бы полезной и актуальной. Актуальность выбора модели военной стратегии в качестве основной продиктована политической ситуацией, а также необычностью системы, далекой от стандартной физической.

Проблема:

- Неизвестна модель и ее параметры, соответствующие стратегии изматывания противника;
- искусством построения математических моделей владеют очень немногие. В работе мы планируем внести вклад в то, чтобы это умение стало проще для интересующихся.

Ключевой вопрос:

- Как выглядит модель и какие нужно взять параметры, чтобы соответствовать стратегии изматывания противника?
- Как выглядит инструкция для построения математической модели? Можно ли научить этому школьников?

Цель работы:

Разработать и проанализировать модель военной стратегии на наличие различных динамических режимов, и на ее основе подготовить методико-дидактический комплект по теме для обсуждения со школьниками.

Задачи работы:

1. Изучить научную литературу по данной теме.
2. Познакомиться со структурой различных математических моделей.
3. Построить простейшую модель военной стратегии и проанализировать важнейшие динамические режимы в ней.
4. Сопроводить модель военной стратегии соответствующими оригинальными методическими материалами.
5. Разработать методическое описание для построения математических моделей ряда динамических система (аквариум, ферма, …)
6. Сформулировать общие рекомендации по построению математических моделей (алгоритм, рецепт, инструкция).
7. Адаптировать материалы для обучающихся разных уровней подготовки.
8. Разработать методико-дидактический комплект для обсуждения темы со школьниками.
9. Подготовить материалы для опубликования в научно-методической периодике.

Объект исследования: Математические модели и их изучение в образовательных организациях.

Предмет исследования: Научно-методическая разработка принципов построения математической модели на примере описания военной стратегии и др. (в т.ч. этапы построения модели военной стратегии, ее различные динамические режимы, методические материалы для обсуждения темы со школьниками, инструкция для построения математической модели)

Новизна.

- Разработана математическая модель военной кампании, учитывающая изменения морального духа в динамике множества сражений.

Продолжается поиск соответствия режимов модели стратегии изматывания противника.

- Составлена инструкция для построения математических моделей. Составлены соответствующие рекомендации для использования в образовательных организациях.

Гипотеза:

1. Можно так подобрать нач. условия и параметры модели, что они будут соответствовать стратегии изматывания противника
2. Можно разработать инструкцию, которая позволит создать математическую модель некоторого интересующего процесса или явления (можно научить разные категории слушателей создавать математические модели интересующих процессов или явлений, пользуясь правилами и принципами построения)

Структура работы: Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I. Теоретический обзор.

Множество эффективных математических инструментов представлено в современном мире. Например: математические модели и их построение, а также использование этих моделей в современном обучении. В настоящее время это остается актуальной проблемой. На данном этапе современности существует множество классификаций, типов, видов таких математических инструментов, как «математическая модель». Например, понятие "математическое моделирование" получило широкое распространение в последние десятилетия в естественно - научной и технической литературе и в настоящее время оформилось в отдельную междисциплинарную область знаний [3]. Средства такого анализа в современной науке находятся в стадии разработки и не имеют широкого распространения. По этим причинам подобное исследование представляется актуальным как с научной целью, так и с целью популяризации.

Любую динамическую систему возможно представить с помощью математической модели. В данной работе рассмотрим такую систему как «Военная стратегия», рассмотрев которую можем применить в современном обучении.

1.1. Обзор, классификация существующих подходов моделированию (составлению) моделей.

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов. [13]

Чтобы начать говорить про математические модели и их значение в физике, необходимо в целом рассмотреть что такое «моделирование» и «модель», изучить классификации и существующие подходы к моделированию и подходы к составлению моделей.

Моделирование является одним из методов познания в методологии.

Модель – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект — оригинал, сохраняя некоторые важные его черты.

Свойства моделей:

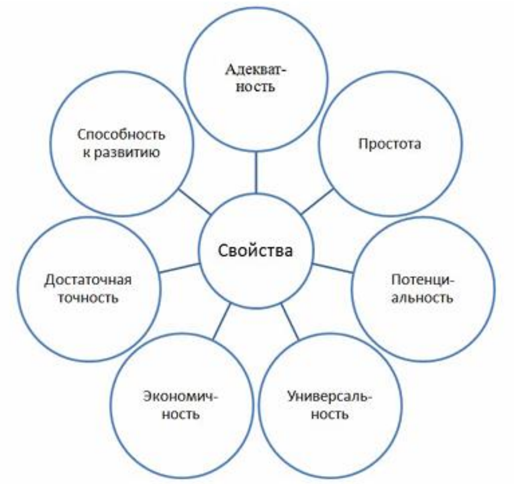


Рис 2. Свойства моделей

Классификация моделей:

1. Описательная модель (описание объекта).
2. Объяснительная модель (объяснение системы в текущем состоянии).
3. Прогностическая (понимание поведения объекта в будущем).
4. Концептуальной моделью (содержательную модель)
   - ✓ Логико-семантическая модель
   - ✓ Структурно-функциональная модель
   - ✓ Причинно-следственная модель
   - ✓ Формальная модель. [11]

Классификации моделирования:

- Идеальное моделирование (моделирование, в котором описание объекта происходит при помощи графиков, диаграмм)
- Натурное моделирование (моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог)
- Аналоговое моделирование — моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально [11].

1.2. Классификация существующих подходов к математическому моделированию систем.

Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению моделей на материальные и идеальные.

- Материальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта происходит с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта [13].
- Идеальное моделирование - такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия [13].

В основу такого моделирования положено математическое описание различных объектов.

Для подробного рассмотрения математических моделей и построения их на основе какого-то определенного объекта рассмотрим опорные понятия. Ознакомимся с классификациями существующих подходов к математическому моделированию систем.

Математическое моделирование - это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов [13].

В данный момент математическое моделирование является наиболее эффективным и результативным методом в проведении научного исследования. Разные разделы физики в современном образовании основываются на математическом моделировании. Множество явлений и объектов рассмотрены через построение математических моделей. Использование других видов моделирования происходит также активно, как использование математического моделирования. Математическое моделирование активно используется не только в математике и физике, но и в таких науках как: биология, экология, химия, социология и др., что позволило на научном уровне подойти к изучению различных образовательных проблем и не только. Рассмотрение объектов, явлений с точки зрения математического моделирования является иногда единственно верным способом познания.

Уникальные результаты были получены по проекту «Гея», связанному с математическим моделированием последствий ядерной войны. Было показано, что в результате сильного запыления атмосферы возможно значительное глобальное похолодание («ядерная зима») и связанное с этим практическое вымирание всего живого [13] .

Преимущества математического моделирования:

1. Экономичность (сбережение ресурсов).
2. Возможность моделирования гипотетических объектов.

3. Универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы.

Подходы к построению математических моделей

1. Фундаментальные законы природы (заключается в использовании фундаментальных законов природы)
2. Вариационные принципы
3. Применение аналогий при построении моделей (применяется, когда невозможно выбрать фундаментальные законы или вариационные принципы)
4. Иерархический подход к получению моделей (создается иерархия более полных моделей, обобщающих предыдущие модели как частные случаи).

Классификация существующих подходов к математическому моделированию систем

Виды моделирования	Отличительные особенности вида моделирования
Детерминированное	Отображает процессы, в которых отсутствуют случайные воздействия
Стохастическое	Отображает вероятностные (стохастические) процессы и события
Статическое	Служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени
Динамическое	Отображает поведение объекта во времени
Дискретное	Для описания процессов, которые предполагаются дискретными
Непрерывное	Отражает непрерывные процессы
Дискретно-непрерывное	Отражает как дискретные, так и непрерывные процессы
Мысленное	Часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания

Наглядное	Отображает явления и процессы, протекающие в объекте
Гипотетическое	Закладывается гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальных объектах
Аналоговое	Применяются аналоги различных уровней
Макетирование	Применяется в случаях, когда протекающие в реальных объектах процессы не поддаются физическому моделированию, либо могут предшествовать проведению других видов моделирования
Знаковое	Отображение понятий с помощью знаков, описание какого-то реального объекта в отдельных символах
Языковое	В основе лежит словарь, который очищен о неоднозначности, т.е. в нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие
Символическое	Искусственный процесс создания логического объекта

Чтобы начать исследовать объект или явление с помощью математического моделирования, необходимо изучить основные этапы метода математического моделирования для полного представления предстоящего исследования.

Основные этапы метода математического моделирования

1. ***Создание качественной модели*** *(*На данном этапе математического моделирования рассматривается характер законов и связей, действующих в системе).

   В зависимости от природы модели эти законы могут быть:

   - Физическими
   - химическими
   - биологическими
   - экономическим

Главная задача на данном этапе - выявить какую-то отличительную черту физического объекта, которая будет выделять объект.

2. Создание математической модели - постановка математической задачи

- Выделение существенных факторов. Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены или отброшены
- Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.)

На данном этапе сформированную модель определяют в определенный класс:

- Детерминированные модели (модели, в которых все параметры и начальные условия известны и не подвержены случайным изменениям. Например, дифференциальные уравнения. В детерминированных моделях все необходимые данные точно известны) [13].
- Стохастические модели (модель описывается законами) [13].

3. Изучение математической модели

- Математическое обоснование модели
- Качественное исследование модели
- Численное исследование модели.

  а) Разработка алгоритма.

  б) Разработка численных методов исследования модели

  в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

Данный этап подразумевает подробное изучение модели для успешной реализации исследования.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

4. ***Получение результатов***.

   (На данном этапе происходит сравнение полученных данных с предполагаемыми. Анализ натурного эксперимента с данными, полученными с помощью других численных алгоритмов).

5. ***Использование полученных результатов***.

<u>Прямые и обратные задачи математического моделирования</u>

- *<u>Прямые задачи математического моделирования:</u>* (структура модели и все её параметры считаются известными, главная задача провести исследование модели для извлечения полезного знания об объекте).
- *<u>обратные задачи математического моделирования: (</u>* известно множество возможных моделей, надо выбрать конкретную модель на основании дополнительных данных об объекте. Дополнительная информация может состоять в дополнительных эмпирических данных) [14].

Математические модели универсальны. Данный вид моделей описывает не только отдельное явление или объект, а описывает большие разделы явлений и объектов.

Рассмотрим задачу, промоделированную математическим методом уже известного объекта:

Задача 1; Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности.

Решение:

Введем следующие обозначения: q(t) –заряд на обкладках конденсатора, u(t) –напряжение на обкладках конденсатора, C – ёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки, E – э.д.с. самоиндукции, i – ток.

Будем предполагать, что сопротивление проводов равно нулю. Получаем цепочку очевидных формул

$$Cu(t) = q(t),\ E = -L\frac{di}{dt}, i = -\frac{dq}{dt}, u(t) = -E(t) \rightarrow CL\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -q,$$

Которая приводит к уравнению колебаний.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{CL}q = 0$$

Задача 2; Простейшая модель изменения зарплаты и занятости: зарплата, число занятых работников. Равновесие рынка труда: за плату согласны работать *N* человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного N_0;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно p_0

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0), \; a_1 > 0, \\ \dfrac{dN}{dt} = a_2(p - p_0), \; a_2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда снова получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

Вывод уравнения:

$$\frac{dp_0}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp_0}{dt} = \frac{d(p-p_0)}{dt};$$

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(N-N_0)}{dt} = \frac{dN}{dt} \;\Rightarrow$$

$$\frac{d(p-p_0)}{dt} = -a_1(N-N_0) \;\Rightarrow\; \frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} = -a_1\frac{d(N-N_0)}{dt} = -a_1\frac{dN}{dt} = -a_1 a_2(p-p_0) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p-p_0) = 0$$

Вывод. Построенные в пунктах 1,2 модели основаны на известных законах (задача 1 о колебательном контуре), и на правдоподобных представлениях о характере объекта (задача 2 о простейшей модели заработной платы). [14]

Хотя и сущность рассматриваемых явлений, и подходы к получению описывающих их моделей совершенно различны, построенные модели оказались идентичными друг другу. Это указывает на универсальность математической модели, что позволяет широко использовать данный вид моделирования

1.3. Типы математических моделей военных действий, типы военных стратегий. Исторически первая и наиболее простая модель Ланчестера.

Чтобы начать говорить про типы моделей и их значение в различных аспектах, необходимо в целом рассмотреть, что такое «Математическая модель»

Математическая модель – это математическое представление окружающего мира.

Условно можно выделить четыре общих класса математических моделей военных действий:

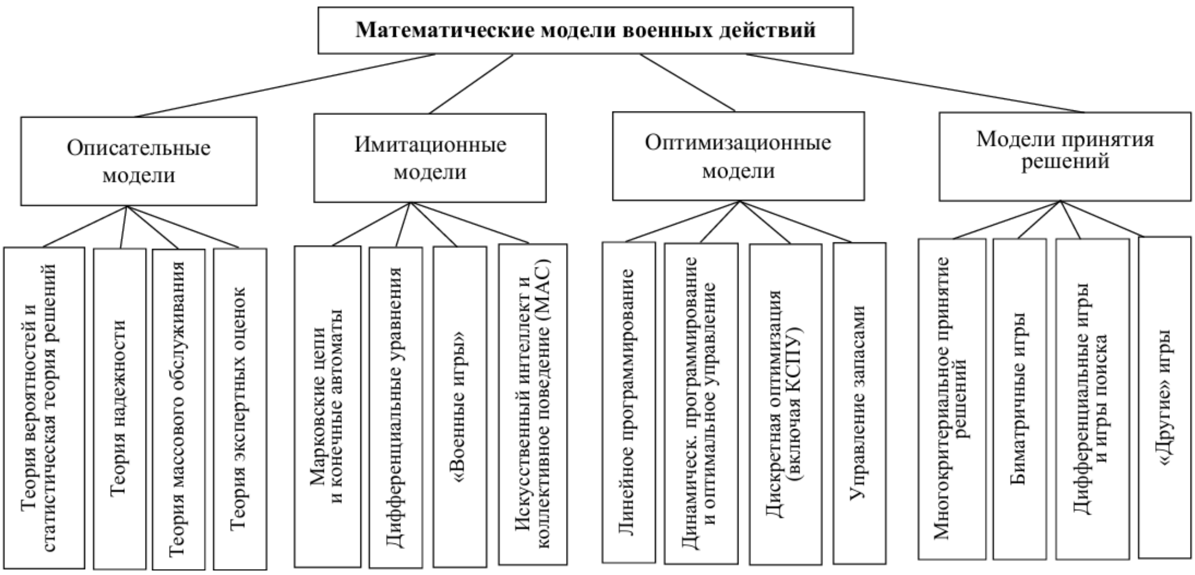


Рис. 1. Классификация математических моделей военных действий.

1. *Описательные модели*

- Теории вероятностей и статистические теории решений (помогают проводить качественный и количественный анализ)
- Теории надежности (методы обеспечения эффективной работы изделий) (6)
- Теории массового обслуживания.

- Теории экспертных оценок.

2. *Имитационные модели*
   - Дифференциальные уравнения.
   - «Военные игры»
   - Искусственный интеллект

3. *Оптимизационные модели*
   - линейное программирование
   - динамическое программирование
   - дискретная оптимизация
   - управления запасами

4. *Модели принятия решений*
   - Индивидуальное принятие решений.
   - Коллективное принятие решений [11].

Для создания такой математической модели как «Военная стратегия» необходимо рассмотреть все опорные аспекты.

Военная стратегия - наука о ведении войны, одна из областей военного искусства, высшее его проявление. Охватывает вопросы теории и практики подготовки к войне, её планирование и ведение.

Стратегия — это способ достижения победы в войне, с помощью общего плана и внедрения мер противодействия противнику с учётом постоянно меняющихся обстоятельств.

Типы военных стратегий

- Стратегическая разведка (разведывательная деятельность с целью получения информации о противнике и стратегических намерениях разведываемого государства, организации или иной социальной общности, влияющей на выработку стратегии).

- Стратегическая география (наука, изучающая военные аспекты географии, и возможность их применения)
- Стратегический мониторинг
- Стратегические планирование и прогноз (анализ основных факторов и тенденций используемых для выбора приоритетных направлений и обоснования решений на уровне государства)
- Стратегическая связь - специализированный подход к распространению и получению информации [3].

Подробно изучена так называемая «Ланчестеровская модель». Эта модель получила широкое распространение и является общеизвестной. В аппарате данной модели заложены дифференциальные уравнения.

«Ланчестеровская модель» - эта система, состоящая из двух однородных дифференциальных уравнений для моделирования боя.

Пусть имеются две противоборствующие стороны. Обозначим через x(t) (y(t)) численность войск первой (второй) стороны в момент времени t ≥ 0. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x0 и y0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

– операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);

– боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);

– вводом резервов (выводом в резерв).

Обычное сражение описывается следующей системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

$$(15)\quad \dot{x}(t) = -ax(t) - by(t) + u(t),$$

$$(16)\quad \dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t),$$

где a, b, c и d – положительные константы; u(t) и v(t) – темпы ввода резервов.

Аналогично описывается партизанская война (многие современные войны приобрели иррегулярный «партизанский» характер.

$$(17)\quad \dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t),$$

$$(18)\quad \dot{y}(t) = -dy(t) - hx(t)y(t) + v(t),$$

где g и h – положительные константы, и *смешанная война*:

$$(19)\quad \dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t),$$

$$(20)\quad \dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t).$$

Модели отличаются учетом боевых потерь.

Предполагается, что в обычном сражении каждая сторона в единицу времени поражает число противников, пропорциональное своей численности – коэффициенты ***b и c, называемые коэффициентами боевой эффективности***, могут измеряться как число выстрелов, производимое одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника. Именно такую модель первоначально и предложил Ф. Ланчестер.

Глава 2. Оригинальные результаты. Принципы разработки новой модели на примере модели военной стратегии

2.1. Построение модели военных действий. Этапы разработки и обсуждение аспектов.

На что похожа военная кампания? Каков графический образ?

Два множества взаимодействуют враждебно, пытаясь нанести друг другу урон, лишить боеспособности (не обязательно убить всех, достаточно захватить командование) Это похоже на взаимодействие в модели «хищник-жертва», но только в части, т.к. здесь два хищника. На какой из физических процессов в природе похож этот социальный процесс? Пожалуй, в физике аналогов мы не найдем. (за исключением, может быть, бомбардировки разрушающими частицами). Мы можем встретить похожие процессы в химии и биологии (но это нам не поможет).

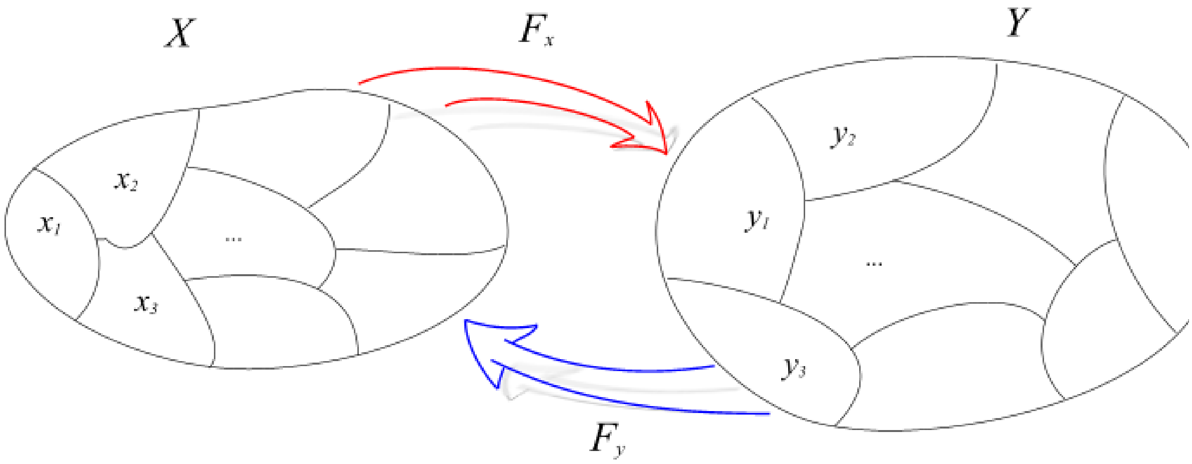


Рис. 1 Образ динамической системы

Динамическое и энергетическое описание военной операции:

Ниже мы хотим описать, какие наиболее существенные процессы происходят во время военного противоборства двух сторон, какими количественными мерами (величинами) это можно характеризовать, и самое главное – как эти параметры должны быть связаны между собой. Все это нужно сделать, опираясь на физическую эрудицию (опыт взаимодействия с физическими задачами) и интуицию, здравый смысл. Итак, выделим главные факторы, определяющие динамику военной кампании.

1. Атака, сила. Суть происходящего состоит в том, что есть некоторое усилие со стороны одной из сторон, это усилие можно характеризовать количественно. Физически мы полагаем, что этому параметру соответствует величина, аналогичная силе F. Почему мы думаем, что это усилие именно сила, а не энергия, эквивалентная количеству использованного ресурса, например? - Потому что для результативности атаки играет значение, с какой скоростью затрачивался этот ресурс, т.е. затраты ресурсов в единицу времени, интенсивность атаки, ее мощность.

2. Результативность атаки - потеря ресурсов противника. Боевые потери. Мы также понимаем, что в зависимости от величины этой силы возникнет и отклик, результат этого воздействия. Можно поставить в соответствие описываемому процессу своего рода второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Мы можем думать, что в результате этого воздействия армия противника приобретает некоторый импульс в единицу времени - некоторое возвратное движение по отношению к исходным целям (при желании можно определить соответствующие параметры). Однако, мы не будем описывать поступательное движение подсистем, которому может соответствовать импульс *p*, нам интересен просто урон – это **энергетические потери, потери ресурсов** противоположной армии. Устоявшееся название - **боевые потери**. Величина приложенной силы определяет скорость нанесения урона, скорость потери ресурсов противоположной армией:

$$F_1 \sim -\frac{\partial E_2}{\partial t}$$

Знак минус в формуле отражает очевидный факт, что при положительном усилии ресурсы противоположной армии убывают. Коэффициент пропорциональности в этой формуле будет определяться уровнем технологий и т.п.

Заметим, что эта формула – не то же самое, что формула связи силы и потенциальной энергии в механике. Это скорее мощность атаки.

Для второй армии можно составить аналогичное соотношение, т.к. она тоже предпринимает некоторые атаки в каждый момент времени. Эти рассуждения влекут появление следующей системы дифференциальных уравнений этой динамической системы:

$$\begin{cases} F_1 = -c_1 \dfrac{\partial E_2}{\partial t}, \\ F_2 = -c_2 \dfrac{\partial E_1}{\partial t} \end{cases}$$

Заметим, что силовые функции F_i могут быть как спокойно (медленно) меняющимися, так и дельтаобразными, соответствующими отдельным атакам.

3. Связь силы (интенсивности атаки) и ресурсов государства. Заметим также, что F – параметр, регулируемый с одной стороны, волевыми решениями командования, с другой – зависящий от реальных возможностей армии. Возможности армии определяются ресурсами государства E. Поэтому мы можем предположить, что между этими параметрами существует возрастающая зависимость, в простом случае – простая пропорциональность $F_i \sim E_i$, то есть:

$$\begin{cases} F_1 \sim E_1 \\ F_2 \sim E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = a_1 E_1 \\ F_2 = a_2 E_2 \end{cases}$$

Таким образом, получаем соотношения:

$$\begin{cases} -c_1 \dfrac{\partial E_2}{\partial t} = F_1 = a_1 E_1 \\ -c_2 \dfrac{\partial E_1}{\partial t} = F_2 = a_2 E_2 \end{cases}$$

Или просто

$$\begin{cases} -c_1 \dfrac{\partial E_2}{\partial t} = a_1 E_1 \\ -c_2 \dfrac{\partial E_1}{\partial t} = a_2 E_2 \end{cases}$$

Или еще проще (сделаем обозначения $a/c \equiv b,\ E_1 \equiv x,\ E_2 \equiv y$):

$$\begin{cases} \dot{E}_2 = -b_1 E_1 \\ \dot{E}_1 = -b_2 E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = -b_1 x \\ \dot{x} = -b_2 y \end{cases}$$

4. Операционные потери. Еще один фактор, имеющий значение, следующий. Ресурс может уменьшаться по причине простого износа, порчи, естественной смерти солдат и т.п. – любой ресурс имеет свой срок годности. Это так называемые **операционные потери.** Очевидно, абсолютная скорость потери ресурсов из-за операционных потерь тем больше, чем больше текущий объем ресурсной базы, то есть этот процесс соответствует соотношениям типа $dy \sim -y$ или $y' \sim -y$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_1}{\partial t} \sim -E_1, \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial t} \sim -E_2 \end{cases}$$

Этот эффект, безусловно, мал по сравнению с изменением ресурсной базы за счет других факторов. Но он есть, он не нулевой. Поэтому коэффициент пропорциональности, стоящий перед E_i в этом выражении, должен быть мал относительно других коэффициентов (между одноименными функцией и ее производной). Знак минус говорит о том, что этот фактор определяет всегда убыль ресурса. Учитывая перечисленные факторы, система уравнений приобретет вид:

$$\begin{cases} \dot{E}_2 = -a_1 E_2 - b_1 E_1 \\ \dot{E}_1 = -a_2 E_1 - b_2 E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = -a_1 y - b_1 x \\ \dot{x} = -a_2 x - b_2 y \end{cases}$$

5. Скорость восполнения ресурсов. Структура ресурсов государства в принципе неоднородна по отношению к ведению военных действий, а именно: часть ресурсов является **доступной** для текущего использования, а другая часть – **временно недоступной**, но с течением времени становящаяся также доступной в качестве средств ведения войны. *Доступные ресурсы* – это текущая численность армии, боевая техника, уже дислоцированная на позициях, гуманитарные ресурсы (питание, медикаменты, мед. персонал, …), средства связи, дороги, интеллектуальные ресурсы и т.д. *Временно недоступные* – это резервы государства в обсуждаемом контексте: гражданское военнообязанное население, заводы, трудоспособное население, превращающее ресурсы в средства ведения войны, природные ископаемые, золотой запас, и т.д. Из второго множества (недоступных) в первое (доступных) с течением времени ресурсы переходят с некоторой скоростью (которая тоже определяется ресурсами государства), и она будет называться **скоростью восполнения ресурсов**. Для одной противоборствующей стороны ресурсы поступают со скоростью $u(t)$, для другой - $v(t)$. Таким образом, система уравнений приобретет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_2 x - b_2 y + u(t) \\ \dot{y} = -a_1 y - b_1 x + v(t) \end{cases}$$

Наведем порядок с коэффициентами системы уравнений и с порядком следования переменных в уравнениях в соответствии с общепринятыми нормами:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - by + u(t) \\ \dot{y} = -cx - dy + v(t) \end{cases}$$

Полученная система уравнений уже является **системой Осипова-Ланчестера**. Диагональные элементы матрицы коэффициентов (a и d) соответствуют операционным потерям и должны быть малы по сравнению с недиагональными (b и c), соответствующими боевым потерям. Коэффициенты b и c называются **коэффициентами боевой эффективности** или **коэффициентами поражающей скорострельности боевых единиц**, поскольку им можно придать смысл числа выстрелов, производимое одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника (интерпретация, предложенная Ланчестером).

Вообще т.н. ланчестеровские модели предполагают решение с помощью системы дифференциальных уравнений, имеют еще одно специфическое название - *модели истощения.* Причина такого названия – критерий прекращения военной кампании: *проигравшей считается та сторона, чьи ресурсы первыми обратятся в ноль* (в обзоре Новикова [3] указывается, что не ресурсы, а численность войск исключительно). В реальности бои почти никогда не заканчиваются при нулевом ресурсе (за исключением боев «до последнего солдата»): как правило, отказ продолжать военные действия возникает при достижении определенного процента потерь, см. ниже.

6. Моральный дух армии. Еще один компонент ресурсов государства – это так называемый **моральный дух армии**, и его нельзя недооценивать. Нельзя победить людей, которые не намерены сдаваться ни при каких условиях. Гражданские войны, национально-освободительные, патриотические, Великая Отечественная война, бои до последнего солдата и т.п. - есть множество примеров того, как подразделения побеждали даже в отсутствии физических ресурсов. И в противоположность этому — деморализованная армия, которая даже при наличии ресурсов не имеет душевной силы идти в наступление или оказывать сопротивление, и просто бежит. Моральный дух трудно, вероятно, измерить количественно, но это реально существующая и почти осязаемая сила. От чего она зависит? - От наличия в первую очередь соответствующей идеологии в государстве, от степени личной заинтересованности солдат в успехе операции, от чего еще?

Например, в статье [4 Шумов, Корепанов] читаем: “Несмотря на значительное технологическое превосходство первой страны (США) над второй (Вьетнамом) (коэффициенты боевой эффективности отличались в 80 раз), первая страна проиграла войну, что можно объяснить неспособностью и неготовностью американского общества нести высокие социальные издержки в войне, цели которой народу не близки».

В итоге видно, что мы сами выбираем здесь, что включить, а что не включить, сами выделяем определяющие факторы. Поэтому это некоторая модель процесса, в которую вручную заложены некоторые связи, которые важны по нашему мнению. Вот в чем модель. Например, мы выбираем пропорциональность самой функции или ее производной – эффекты нулевого или первого порядка, выбираем по порядку величины.

Вообще последнее время очень часто **при разработке математических моделей** социальных, исторических, экономических процессов используют **метод аналогии** с некоторым физическим процессом или явлением, закономерностью. Например, миграция населения, распространение инфекции, эпидемии похожи на диффузию. Технологический процесс изготовления какого-либо изделия с его этапами и движением от этапа к этапу похож на термофлуктуационное движение. Ядерное вещество похоже на жидкость с эффектами поверхностного натяжения, конденсацией-испарением и т.д.

Метод аналогий – подход к построению математических моделей, основанный на сходстве процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими уравнениями.

Каков критерий окончания сражения?

На первом этапе знакомства с моделью Осипова-Ланчестера в качестве решений системы уравнений мы получали примерно такие законы движения ресурсов противоборствующих сторон как на рис. 2, 3 (решения соответствуют наличию партизанской войны с обеих сторон – имеется слагаемое xy в обоих уравнениях). Самый главный вопрос: как численность армии может быть отрицательной? В чем ошибка?

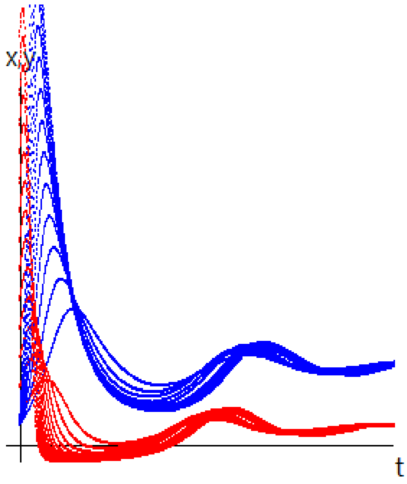


Рис. 2. Формальное решение системы уравнений Осипова-Ланчестера для двух переменных - динамика изменения численности армий x(t), y(t)

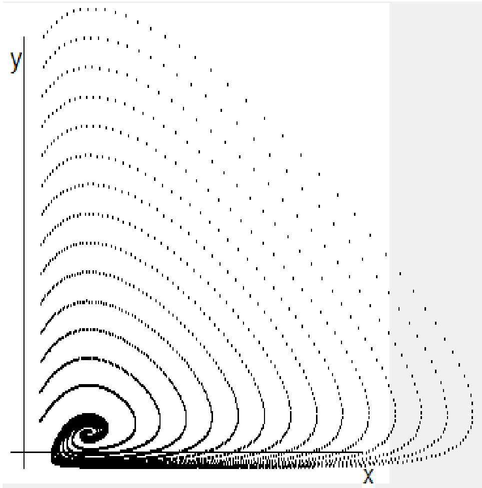


Рис. 3. Коррелограмма y(x), соответствующая рис. 2

Ответ на этот вопрос следующий. Математика этой системы уравнений не знает, что это численность армии, у нее имеется непустое решение и в области отрицательных чисел. Это мы должны наложить дополнительное условие на x и y:

$$x, y \geq 0$$

В процессе моделирования перед нами встает вопрос: каков критерий окончания сражения? Ответ очевиден: когда ресурс одной из армий (численность в данном случае) обращается в ноль, то воевать нечем. Таким образом, казалось бы, в момент обращения в ноль переменных x, y сражение заканчивается.

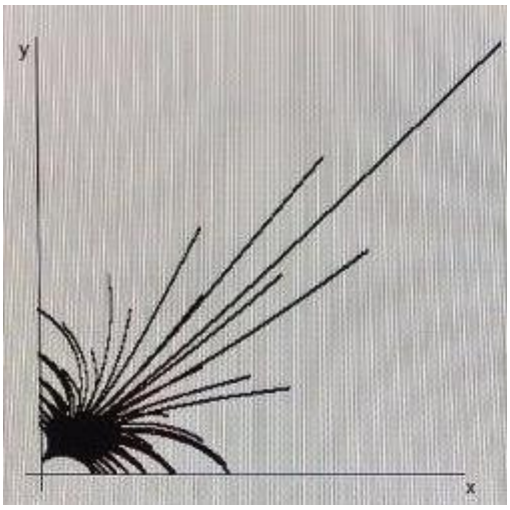


Рис. 4. Примерный вид коррелограммы модели военных действий при использовании критерия неотрицательности для численности армии

Тогда на коррелограмме *y(x)* получим примерно следующее (рис. 4):

Однако, знакомство с военно-исторической, научной литературой по данному вопросу существенно корректирует и расширяет это представление. В этой сфере имеется понятие **неприемлемые потери.** Понятие **“неприемлемые потери» - критерий окончания военной кампании**, - в каждой стране разное. В США это – «когда разрушены столицы», в России – «удар ядерным оружием», но при этом можно еще вести партизанскую войну (то есть, неприемлемые потери =0, до последнего солдата). То есть, кампания прекращается, когда ресурсы достигают этой границы, xmin.

Исследования практиков военного дела говорят о том, что противостояние сторон прекращается, когда потери армии состаляют определенный процент. Для разных народов этот показатель разный. В работе В.В. Шумова «Учет морального фактора и технологических характеристик в моделях боя» [6] отмечается, что «моральный упадок войск заключается в увеличении доли бойцов, уклоняющихся от ведения боя». По М. Осипову, «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее будет считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного процента. Таким процентом в среднем можно считать 20 %...»;

По Н. Головину «бой кончается отказом от него одной из сражающихся сторон, т. е. чисто психологическим актом». В «Науке о войне» Н. Головин выполнил блестящее исследование о влиянии потерь на исход боя. Важнейшим фактором победы войска в бою является процент «кровавых» потерь (потери раненными и убитыми), при котором войско все еще не утрачивает боеспособность (моральный дух). «…можно установить, что для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей моральной упругости войск, после которого они не способны уже к победе, являются кровавые потери в 25 %… Моральный эффект равного процента потерь для каждого из сражающихся далеко не одинаков.

Шумов также приводит пример, что во всех военных кампаниях, в которых участвовали итальянцы, потери этой армии не превосходили 3%.

Самые кровопролитные сражения, известные истории, характеризуются кровавыми потерями в 43-46% (сражение при Цорндорфе).

В оригинальной разрабатываемой модели для характеристики таких неприемлемых потерь мы вводим параметры φ_x , φ_y

Квадратичная модель боя в системе уравнений Осипова-Ланчестера

Это методический раздел, он находится в разработке. По нему имеется иллюстрация (рис. 5), полученная в рамках разработанного приложения – области, в которых побеждает красная или синяя армии, отделенные гиперболическими границами. Светлая область – область реализации «ничьей». По осям отложены отношения (b/u0, c/nu0) коэффициентов боевой эффективности и скорости возобновления ресурсов. Поскольку пространство параметров этой простейшей модели шестимерно (*a, b, c, d, u, nu*), мы искали двумерный способ отображения существенных свойств. Полагаем, что отношение коэффициента скорострельности (боевых потерь) и скорости возобновления ресурса является тем параметром, который отражает боевую мощь и тем самым вероятность победы армии.

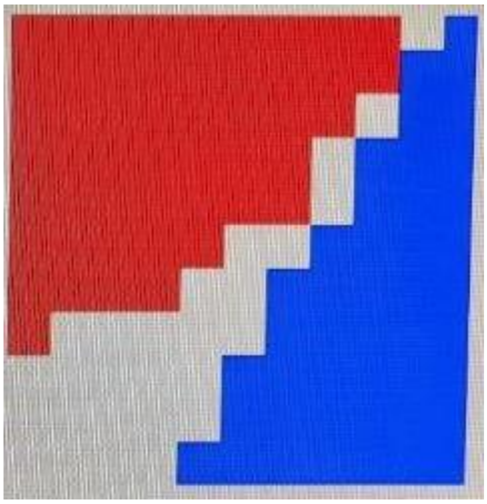


Рис. 5. Диаграмма побед «красной» и «синей» армии в простейшей модели Осипова-Ланчестера

Доказано, что модель М. Осипова является *структурноустойчивой*: изменение функций ax и ay не затрагивает основного качественного вывода (хода во времени и исхода сражения) [6, 7]. Мы убедились в этом в компьютерном эксперименте в разработанном нами приложении: вариации любых параметров системы не приводят к изменению топологии этой диаграммы (рис. 5), может измениться только наклон разделительной белой полосы. Диаграмма получена на прямоугольнике 20*20 элементарных дискретных ячеек.

Режимы, которые можно описать с помощью простых вариантов модели Осипова-Ланчестера:

Это методический раздел, он находится в разработке. Ряд режимов модели ОЛ можно найти в работе [5, Короткий].

В чем аналогия с моделью «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры

Родство модели военной кампании и модели популяционной динамики «хищник-жертва» очевидно: в том и другом случае речь идет о временной динамике численности (или вообще ресурсов) двух противоборствующих множеств, когда, в случае двух армий, имеем акты агрессии (атаки) с обеих сторон, ведущие к уменьшению этих ресурсов, либо, в случае противоборства множеств хищников и их жертв, имеем односторонние акты агресии со стороны хищников, ведущие к уменьшению численности множества жертв. В последней модели имеется еще один эффект отложенный – уменьшение численности хищников при уменьшении численности жертв, когда первым становится нечего есть. Но это свойство отличает две модели друг от друга.

Модель «хищник-жертва» Лотки-Вольтерры описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta\, y)\, x \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta\, x)\, y \end{cases}$$

По структуре правой части эта система имеет общие черты с системой уравнений Осипова-Ланчестера:

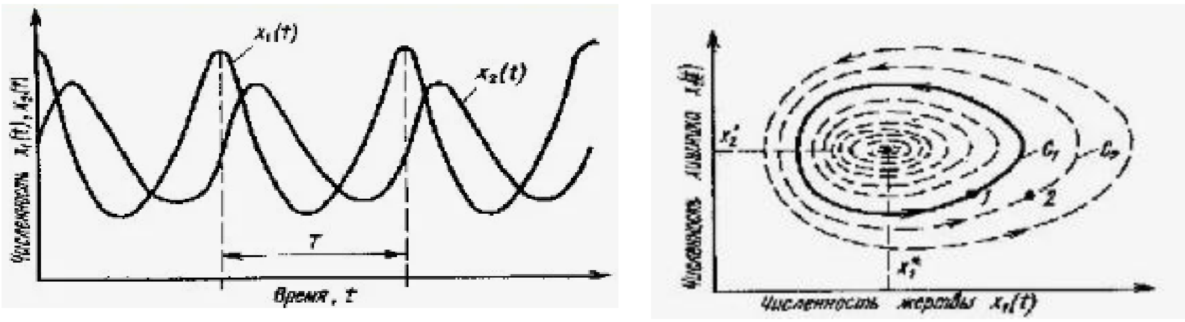
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - 0y - \beta\, xy \\ \dot{y} = -0x - \gamma y + \delta\, xy \end{cases}$$

- в этой системе нет перекрестных линейных слагаемых (в первом уравнении – с y, во втором – с x) (соответствующих боевым потерям), но они есть опосредованно: просто коэффициенты перед этими слагаемыми зависят от другой переменной, что дает нелинейные слагаемые вида *xy*, соответствующие партизанской войне в модели Ланчестера.

Можно также заметить, что во втором уравнении перед y имеем коэффициент с «правильным» отрицательным знаком.

В качестве представления существенных свойств в данной системе также используется наряду с временной динамикой переменных x и y, коррелограмма, которая здесь называется фазовым портретом.

Одним из основных результатов модели Лотки-Вольтерры являются осцилляции численностей хищников и жертв, что соответствует на коррелограмме замкнутым циклам:



а) б)

Рис. 6 Временные осцилляции численностей хищников и жертв (а) и отражение этой динамики на фазовой плоскости (xy) – коррелограмме (б) [Рубин, Биофизика]

Можно вспомнить, что в модели Осипова-Ланчестера также можно получить подобные замкнутые циклы, если не накладывать характерных ограничений на переменные *x, y* типа неотрицательности (см. рис. 3).

2.2. Общий подход к разработке математической модели любой динамической системы.

Проходя этапы разработки модели военных действий, мы отмечали, какому более общему действию соответствует данное при построении математической модели любой динамической модели. Таким образом, мы использовали метод *индукции,* выделяя те шаги, которые проходит исследователь, подбирая корректное и полное математическое описание новой динамической системы, формируя ее математическую модель. В результате мы составили примерную инструкцию для исследователей, приводим ее ниже.

На основании данной инструкции обучающиеся смогут пробовать себя в составлении математических моделей различных динамических систем. Такой вид работы поможет наилучшим образом разобраться в устройстве этих систем.

Примерная Инструкция по построению

математических моделей динамических систем.

1. Определить графический образ динамической системы (на что похожа? На какую другую систему, например, физическую. Тогда можно использовать закономерности и описание для похожих физических систем)
2. Выяснить, от каких параметров зависит процесс (перечислить).
3. Присвоить всем переменным разумное обозначение (букву) для количественного измерения, сформулировать наименование, дать определение и физический смысл
4. Составить множество переменных системы $\{ x_i \}$

5. Оценить степень малости параметров, отбросить все малые параметры, оставить только существенные.
6. Попытаться выяснить, какие переменные связаны между собой. Сделать это для каждой из переменных x_i
7. Выяснить, как именно переменная x_i с другими, каков характер связи? (пропорциональны, обратно пропорциональны, как функция и ее производная и т.п.)
8. Записать выявленные связи в виде математических количественных соотношений. Все соотношения собрать в систему уравнений.
9. Определить начальные или граничные условия в задаче.
10. Выбрать корректный способ решения (аналитически, численно, алгоритм и т.д.)
11. Проиллюстрировать решение графиками, диаграммами, поясняющими образами, схемами

Глава 3. Оригинальные результаты. Усовершенствование модели военных действий.

3.1. Какова существующая технология введения коэффициента морального духа в уравнения Ланчестера?

В монографии [8], в ряде работ В.В. Шумова [4, 6] описывается способ введения учета морального фактора в уравнения Ланчестера. Отмечается, что впервые этот способ был предложен Ю.Н. Павловским [9] в 1993 г.

Моделирование одного боя с учетом морального фактора в рамках системы уравнений Осипова-Ланчестера (ОЛ)

Упрощающие предположения:

1. На протяжении одного боя операционными потерями можно пренебречь
2. На протяжении одного боя вводом ресурсов также можно пренебречь

Тогда система уравнений ОЛ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Можно этого и не делать. Просто нужно вспомнить, какой смысл имеют коэффициенты b и c боевых потерь. Они имеют дополнительное название коээфициентов скорострельности и имеют смысл количества выстрелов в единицу времени одним бойцом. Ясно, что при падении морального духа вероятность результативных выстрелов снижается, причем, легко понять, что эта зависимость близка к линейной (вероятность результативных выстрелов и коэффициент скорострельности b, c) Моральный дух и можно количественно измерять вероятностью результативных выстрелов – то есть, можно считать, что это одно и то же. Обозначения могут разниться в разных источниках, остановимся на наименовании λ – коэффициент морального духа:

$$\lambda(t) = P(t)$$

$P(t)$ - вероятность результативных выстрелов. В моделях, о которых говорилось выше, указывается, что эта величина определяется процентом боевых потерь армии к моменту t.

В этот момент хочется сделать замечание:

1. ***моральный дух определяется не только человеческими потерями**, но и потерями других ресурсов: разрушенными дорогами, аэропортами, состоянием=удовлетворенностью системами наведения, ракетно-космическими и т. п. системами, количеством побед армии в отдельных боях (интегральная характеристика). **Значит, чтобы правильно описывать динамику военных действий, динамику коэффициента морального духа, необходимо рассматривать армию, ее вооруженные силы как множество боевых ресурсов.** Говорить только о численности армии явно недостаточно. Можно по каждому ресурсу ввести степень сохранности с одной стороны, а с другой – степень удовлетворенности, скорее, степень гордости. И затем результирующий показатель морального духа вычислять как среднее геометрическое по этим показателям. В этом тоже может быть новый вклад.*

Если считать, что коэффициент морального духа определяется только процентом людских потерь (то есть в самом простом представлении), то в этом случае он и вероятность результативных выстрелов должны вести себя так:

$$P(t) = \frac{x(t)}{x_0}$$

В начальный момент вероятность и моральный дух согласно этой формуле равны 1. При достижении критического порога этой величины бой этой стороной конфликта прекращается. Тогда система уравнений выглядит так (xy?):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by\dfrac{y}{y_0} \\ \dot{y} = -cx\dfrac{x}{x_0} \end{cases}$$

Как меняется все, если не отбрасывать ввод резервов? – никак, влияет только на коэффициент b. Может повлиять на формулу для $P(t)$.

Что может подразумевать под собой «стратегия изматывания противника»?

Настоящее исследование было целиком мотивировано стремлением установить математическое соответствие стратегии изматывания противника, о которой в последнее время можно услышать в СМИ в связи с политическими событиями. Поэтому все, что мы делаем здесь, подчинено этой сквозной сверхзадаче, сверхцели, которую мы перманентно имеем в виду, - мы отбираем те аспекты, свойства модели, те исторические примеры, которые могут дать ответ на поставленный ключевой вопрос.

С самого начала мы считали, что изматывание - это стратегия, ведущая к измотанности государства – состоянию, когда оно больше не способно противостоять противнику. Это значит, что почти все ресурсы государства истощены до своих критических минимальных отметок, когда оно может только с трудом обеспечивать самые необходимые потребности населения и не способно вести боевые действия.

Изматывание заключается не только в потерях личного состава (численности), а именно в потерях по всем составляющим военных ресурсов – транспортного сообщения, техники, продовольствия, командования … **- когда все плохо. То есть когда по всем ресурсным переменным x_i наблюдается падение на много % - это ощущается как отсутствие поддержки, отсутствие возможностей государства противостоять противнику.**

Очевидно, что этот процесс должен учитывать не только текущие ресурсы армии, не только процесс и возможность возобновления ресурсов, которые восполняются в моделях ОЛ как по мановению волшебной палочки, с неба. Нужно очевидно учесть, что ресурсы государства восполняются из огромного стратегического запаса государства (производство вооружений на военных заводах, добыча полезных ископаемых, золотой запас государства, резерв численности армии, подготовка офицерского состава, поддержание всей транспортной, энергетической и другой инфраструктуры государства на должном уровне и т.д.). Это так называемый второй эшелон в военном деле. То есть ресурс, который с некоторой скоростью может быть превращен в компоненты вооруженных сил. Это огромный резервуар (как термостат -> exp и остальные возможности), но он тоже истощается во время ведения военных действий государством. При истощении этого резервуара скорости возобновления ресурсов должны падать. И если эти скорости, пропорциональные всей мощности множества запасов государства, приближаются к нулю, и возникает это состояние, когда государство истощено, измотано настолько, что не в состоянии больше вести боевые действия.

Ясно, что **для описания этого явления необходима дальнейшая разработка модели, учитывающая возможность истощения резерва и динамического уменьшения скоростей возобновления ресурсов армии *u(t)* и *nu(t)*.**

Совершенно ясно, что за одно сражение нельзя привести государство к полному истощению, ***стратегия изматывания однозначно соответствует серии сражений****, и довольно длительной. Таким образом, становится понятно, где следует искать стратегию изматывания – 1) в серии сражений, 2) учитывая многокомпонентность ВС для правильного расчета показателя морального духа, да и истощение резерва государства также подразумевает истощение по всем компонентам боеспособности.*

Необходимо различать отдельные военные операции (битвы, сражения) и в целом войну, состоящую из множества таких операций. Стратегия изматывания противника направлена на долговременный результат, когда противник в конце концов соглашается на полную капитуляцию в войне. Истощение, прекращение действий в отдельной битве еще не означает капитуляцию стороны и прекращение войны. Мы помним критерий прекращения сражения – достижение армией недопустимых потерь φ. **Каков критерий прекращения всей войны? - Это деморализация армии**: солдаты отказываются стрелять, не видят смысла, дезертируют – коэффициенты скорострельности близки к минимальным значениям (не ноль, но минимальны). Так вот, **капитуляция в войне наступает в момент, когда показатель морального духа сравнивается с критически низким**, определяемым национальным культурным менталитетом. Но! **Не всякая капитуляция в войне сопровождается состоянием измотанности государства и**

неспособностью продолжать военные действия. То есть не всякая капитуляция сопровождается измотанностью. Некоторые противостояния заканчиваются, потому что стороны больше не видят в них смысла. Но если немного «накачать» солдат, они могли бы снова продолжить воевать. Повторимся: истощение ресурсов государства, состояние измотанности – это когда и война закончилась, и ресурсы государства флуктуируют на уровне нуля – по всем составляющим или по подавляющему большинству. Вот приблизительно таковы аспекты той цели, которую мы бы хотели достичь в рамках этой задачи.

О существовании такой стратегии упоминается во многих исторических и научных работах. Например, приведем примерную цитату из работы [10, *Грин Р. 33 стратегии войны]: "*Истощение - это военная стратегия непрерывного изматывания противника за счет постоянных потерь в личном составе и ресурсах до тех пор, пока его воля к борьбе не ослабнет» (возможно, это будет соответствовать к-ту морального духа =0). Есть размышления об этом у древнекитайского военного стратега Сунь-Цзы (3-5 вв. до н.э.) в самом известном военном трактате о военном искусстве, военной стратегии и политике «Искусство войны» [12]. Этот трактат используют в том числе современные военначальники (Хо Ши Мин, используется при обучении современных военных США).

Возможно, это стратегия намеренного затягивания конфликта. Попытка втянуть государство в затяжную войну на десятилетия, чтобы постепенно вытянуть из него все силы. Устремляя время конфликта к бесконечности. Тому много исторических примеров (100-летняя война и др.) Длительное противостояние истощит резервы любого государства.

Возможно, здесь играет роль также тип ведения войны - восточного типа: маневренная война (пример – Бауржан Момышулы, тактика волка, Волоколамское шоссе, Чингисхан), или западного типа - позиционная война, неприспособленность к маневрам.

Еще аспект, который может иметь значение (В.А. Орлов) – много малых «откусывающих» уронов. Элемент внезапности.

Также может оказаться, учитывая перечисленные факторы, что в рамках дифференциального подхода невозможно полностью описать стратегию изматывания. И это тоже результат.

3.2. Разработка модели военных действий с учетом многокомпонентности вооруженных сил и войны как серии сражений

Итак, на наш взгляд стратегию изматывания противника следует искать только в военных кампаниях, состоящих из серии битв. Также выше указано, что изматывание наверняка связано с истощением всех компонент вооружения. Кроме того, как было указано выше, корректный расчет показателя морального духа невозможен без учета многокомпонентности вооруженных сил армии. Поэтому дальнейшая разработка модели будет направлена на реализацию именно этих возможностей.

Фактически учет коэффициента морального духа влияет только на момент окончания единичного боя. Однако, если принять во внимание, что количество побед армии, патриотические настроения, гордость за вооруженные силы и т.п. не зависят от исхода отдельного боя, являются интегральными характеристиками и имеют накопительный эффект, зависящий от множества боев и момента времени, - то есть если принять, что именно такой интегральный коэффициент морального духа, а не локальный для отдельного противостояния, является определяющим, является той константой, которая вселяет веру в победу несмотря на отдельные поражения… так вот, если размышлять таким образом, то мы действительно можем проследить, как меняется этот накопительный интегральный коэффициент с течением времени, и по нему отследить, насколько сильно упал моральный дух армии, близка ли она уже к деморализованной, насколько сильно «измотана» армия. И только после этого мы должны выяснить, как нужно действовать стороне А, чтобы работать в рамках стратегии изматывания противника В. То есть, в чем стратегия? Стратегия – в выборе последовательности, интенсивности, частоте атак и т.п. Мы должны экспериментально выяснить, в чем она, эта стратегия.

Итак, вводим коэффициенты удовлетворенности той или иной составляющей вооруженных сил страны и коэффициенты партиотического чувства бойцов – те параметры, которые **в совокупности** определяют моральный дух армии и одновременно с этим удаленность от ощущения “измотанности»:

Пусть x_i – компонент боевого щита государства, измеренный, например, в произвольных денежных единицах, боевая оснащенность армии – сумма всех составляющих:

$$X = \sum_i x_i$$

Коэффициент удовлетворенности определяется как абсолютной мерой этой компоненты - оценкой ее технической оснащенности, уровня на мировой арене, как количеством данной составляющей (вооружения, например), так и сохранностью этого ресурса по отношению к первоначальному количеству. Поэтому есть постоянная или слабо меняющаяся составляющая, и есть динамически меняющаяся в результате боевых потерь часть:

$$\lambda_i = \sqrt{\lambda^i{}_0 \lambda^i{}_t}, \quad \lambda^i{}_t = \frac{x_i(t)}{x_{i0}}$$

Здесь не может быть суммы, так как это, судя по всему, вероятности (сумма не должна превысить 1). Произведение соответствует независимости этих коэффициентов на начальном этапе.

В череде боев каждый ресурс претерпевает количественные изменения, и это сказывается на текущее значение результирующего Λ(t):

$$\Lambda(t) = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m},$$

m – количество составляющих боевой мощи страны.

Характерным отличием данной модели является то, что при переходе от одного боя к другому значения Λ не возвращаются к первоначальному значению, а продолжают свою плавную накопительную динамику от того значения, на котором остановились в предыдущем бое, ослеживая все произошедшие за период боевых действий события.

Сказывается ли коэффициент λ_i на соответствующий коэффициент в уравнении (аналог коэффициента скорострельности)? Да, безусловно. Но локальный или интегральный? Когда мы пользуемся системой навигации и в душе относится к ней с пренебрежением по каким-то своим соображениям, то именно это отношение позволит нам работать здесь не на полную силу. Это аргумент в пользу того, что локальный коэффициент здесь играет значение. Однако, интегральный коэффициент также является общим для всех действий бойца, поэтому, на наш взгляд, произведение $\Lambda\lambda_i$ (или корень из него) определяет эффективность бойца в отношении ресурса x_i – это должно стоять перед соответствующим слагаемым в уравнении.

Как должна измениться система уравнений, если учесть, что весь военный ресурс государства на самом деле представляет собой множество ресурсов разных типов (не только численность армии, но и объем вооружений разных типов, количество техники, транспортная структура, системы навигации и т.д.)? Мы можем подставить эти множества $X = \sum_i x_i$, $Y = \sum_i y_i$ в систему уравнений простейшей модели Осипова-Ланчестера, получив следующее:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - by + u(t) \\ \dot{y} = -cy - dx + v(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_i \dot{x}_i = -a\sum_i x_i - b\sum_i y_i + u(t) \\ \sum_i \dot{y}_i = -c\sum_i y_i - d\sum_i x_i + v(t) \end{cases}$$

Видно, что в возникающей системе уравнений аргументами являются x_i и y_i, поэтому необходимо иметь скорости убывания каждого ресурса в силу естественных причин (смертность, выход из строя техники, …) - операционные потери каждого ресурса x_i и y_i, а также боевые потери каждого и скорости возобновления каждого ресурса. Это легко можно изменить на этапе формирования модели, например, боевую мощь y-армии, силу ее атаки можно представлять не как $F_y = by = b\sum_i y_i$, а в виде $F_y = \sum_i b_i y_i$ - каждый ресурс вносит вклад в силу атаки со своим коэффициентом (можно придать ему смысл «вес», значимость для атаки). Аналогично – для x-армии $F_x = \sum_i c_i x_i$. Это слагаемые, соответствующие боевым потерям в уравнениях. Аналогично можно рассуждать для операционных потерь: скорость естественной убыли некоторого ресурса пропорциональна его текущему количеству: $\frac{\partial x_i}{\partial t} \sim -a_i x_i$ (для каждого ресурса по-отдельности), что после суммирования по всем ресурсам даст слагаемые вида $\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = -\sum_i a_i x_i - \ldots$, $\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial t} = -\ldots - \sum_i d_i y_i + \ldots$ Скорости возобновления военной мощи также удобно разбить на отдельные ресурсы: $u(t) = \sum_i u_i(t)$. В этой логике система уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \sum_i \dot{x}_i = -\sum_i a_i x_i - \sum_i b_i y_i + \sum_i u_i(t) \\ \sum_i \dot{y}_i = -\sum_i c_i x_i - \sum_i d_i y_i + \sum_i v_i(t) \end{cases}$$

Однако знаки суммирования по *i* здесь отбросить нельзя. Например, потому, что усилие y-государства $\sum_i b_i y_i$ может быть направлено на несколько ресурсов из суммы государства x и создать им урон, убыль ($\sum_i \dot{x}_i$). Кроме того, эти суммы для разных сторон конфликта могут содержать разное число слагаемых, разные типы вооружения (например, когда сильнейшая армия США вела войну против крестьян во Вьетнаме). Эта проблема, конечно, решаемая – в суммах нужно перечислить все виды ресурсов, и отсутствующим ресурсам будут соответствовать множества с нулевой мерой ($x_j = 0$) и всеми нулевыми коэффициентами системы. Таким образом, если нельзя отбросить знаки сумм, то в таком виде, когда не отделены производные каждой переменной, систему уравнений численно решать будет сложно или невозможно.

Это значит, что систему уравнений нужно сразу пытаться получать для каждой переменной по-отдельности. Для этого нам помогут следующие рассуждения.

Сила атаки, направленная на определенный вид ресурса y_i и создающая его урон, определяется всей мощью х-армии:

$$F_x^i \to -\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$F_x^i = \sum_j c_{ij} x_j$$

Здесь учтено, что силы государства, направленные на поражение того или иного ресурса противоположной стороны, могут быть различны (они все пропорциональны полному имеющемуся множеству ресурсов, однако, могут дозироваться разными порциями) – **коэффициенты c_{ij} зависят от номера уравнения**. Добавим сюда, что изменения функции y_i также создаются операционными потерями (естественной убылью) и скоростью возобновления данного ресурса, поэтому уравнение для этой переменной приобретает вид:

$$\dot{y}_i = -\sum_j c_{ij} x_j - d_i y_i + \nu_i(t)$$

Аналогично для х-армии:

$$\dot{x}_i = -a_i x_i - \sum_j b_{ij} y_j + u_i(t)$$

Таким образом, система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -a_i x_i - \sum_j b_{ij} y_j + u_i(t) \\ \dot{y}_i = -\sum_j c_{ij} x_j - d_i y_i + \nu_i(t) \end{cases}$$

Количество уравнений в системе - *2N*, где *N* – количество разных типов военных ресурсов. Мы выделяем около 23 типов ресурсов (поэтому количество уравнений будет 46), ниже мы приводим этот перечень. Однако есть опасения, что при таком большом числе переменных система станет хаотической, поэтому мы ограничились $N=8$ условными типами ресурсов (количество уравнений 16). Все коэффициенты системы уравнений являются случайными (значения равномерно распределены в окрестности средних, отклонение варьируем в районе 30-40%).

Типы военных ресурсов в модели

Итак, мы выделяем следующие **типы военных ресурсов** (условные **компоненты вооруженных сил в модели**):

1. - численность армии - главный компонент
2. - разные виды оружия (~10)
3. - ...
4. - ...

..

12. - боевые дроны
13. - боевые машины (танки, БМП)
14. - боевые самолеты
15. - боевой флот
16. - численность офицерского состава
17. - учебные центры
18. - спутниковые системы, системы навигации и связи
19. - транспортная структура (дороги, жд, мосты)
20. - военные заводы
21. - госпитали
22. - гуманитарная составл (еда, одежда, предметы гигиены и тп)
23. - зп контрактникам (можно исключить из модели - особый режим движения средств ресурса)

Такие компоненты как знание стратегий, ум, талант полководцев нужно учесть внутри коэффициентов морального духа.

Нужно также иметь в виду, что:

побеждает не тот, кто

самый умный, самый талантливый, самый быстрый, …

а тот, кто никогда не сдается

- это значит для нас в модели, что побеждает тот, у кого самый высокий критический уровень кровавых потерь φ (связанный с критерием окончания сражения) или самый низкий критический уровень морального духа λ_{cr} (связанный с критерием окончания войны). **В рамках модельных экспериментов нам полезно проверить этот тезис** в применении к военной кампании, поскольку пока он является просто мотивационным афоризмом в психологии.

Как меняется система уравнений при учете коэффициентов морального духа?

Коэффициенты морального духа должны повлиять на коэффициенты скорострельности - они же коэффициенты боевых потерь (b и c). Если моральный дух армии падает, она деморализована, солдаты постепенно отказываются стрелять. Если солдат капитулирует, он больше не стреляет, - его скорострельность обращается в ноль, и происходит это благодаря обращению в ноль коэффициента морального духа. (**еще одно отличие**, у нас критические уровни – не ноль, ни в сражении, ни в войне). Таким образом, коэффициенты морального духа вводятся в модель как множители в параметрах b и c:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -a_i x_i - \sum_j b_{ij}\lambda_{ij} y_j + u_i(t) \\ \dot{y}_i = -\sum_j c_{ij}\lambda_{ij}^x x_j - d_i y_i + v_i(t) \end{cases}$$

$$\text{то есть} \quad b'_{ij} = b_{ij}\lambda_{ij}, \qquad c'_{ij} = c_{ij}\lambda_{ij}.$$

Коэффициенты морального духа можно интерпретировать как коэффициенты удовлетворенности j – тым ресурсом.

3.3. Факторы, влияющие на моральный дух армии.

От чего зависит моральный дух армии? Мы выделили следующие факторы, влияющие на моральный дух:

1. Является ли война для солдат защитой Родины (НАЦИОНАЛЬНО-ОСВОБОДИТЕЛЬНОЙ) или является ПОРАБОТИТЕЛЬНОЙ
2. Наличие и качество национальной доктрины, национальной идеи, патриотической идеологии
3. Талант полководцев, уровень подготовки офицерского состава
4. Процент боевых потерь - текущий показатель удовлетворенностью ходом сражения.
5. Технический уровень вооружения по каждому виду (показатель от 0 до 10 по мировой сравнительной шкале) - удовлетворенность бойцов этим видом вооружения
6. Количество/процент побед армии
7. Повторные победы или поражения
8. Качество побед или поражений («в сухую», «рубище до последнего», «пиррова победа», равносильная поражению – слишком высокой ценой)

Как вычислять коэффициенты морального духа?

1. Является ли война для солдат защитой Родины (НАЦИОНАЛЬНО-ОСВОБОДИТЕЛЬНОЙ) или является ЗАХВАТНИЧЕСКОЙ / ПОРАБОТИТЕЛЬНОЙ

САМЫЙ ГЛАВНЫЙ ФАКТОР морального духа. Это константа.

НАЦИОНАЛЬНО-ОСВОБОДИТЕЛЬНАЯ война, война по защите своей Родины всегда характеризуется максимально высоким уровнем критических кровавых потерь (в оригинальной модели это параметры φ_x, φ_y - предельные доли кровавых потерь армий х и у, при которых они капитулируют в данном сражении). Это война «не на жизнь, а на смерть», война «до последнего солдата» и т.п. Такой была Великая Отечественная война для СССР, такой была война во Вьетнаме для вьетнамцев: несмотря на превосходство мощи армии США, Вьетнам в этой войне одержал победу.

ПОРАБОТИТЕЛЬНАЯ (захватническая) война – Каждый солдат не защищает свои личные границы, личные ценности, семью и т.п. Они не знают, зачем лично им это надо, кроме материального вознаграждения. Поэтому воюющим солдатам особо без разницы, каким будет исход боя. Работает принцип «солдат спит – служба идет».

Мы оцениваем коэффициенты морального духа, соответствующие этим войнам, на следующем уровне:

Национально-освободительная война: $\lambda_1 = 1.0$

Поработительная / захватническая война: $\lambda_1 \approx 0.7$

Мы считаем, что параметр λ_1 оказывает одно из основополагающих значений на общий моральный дух, однако, тем не менее, не является критическим, по-крайней мере в нашей модели. Эксперимент в модели показывает, что исход войны еще более существенно зависит от скорости возобновления ресурсов: если у одной из сторон скорость возобновления ресурсов проигрывает другой стороне, то независимо от начального высокого уровня морального духа в этом случае велика вероятность проигрыша в войне.

Параметры φ и λ_{cr} (для капитуляции в сражении или в войне): они **не могут быть независимыми.**

2. Наличие и качество национальной доктрины, национальной идеи, патриотической идеологии

Оцениваем по шкале от 0 до 1:

$$\lambda_2^x = 1.0$$

$$\lambda_2^y = 1.0$$

3. Талант полководцев, уровень подготовки офицерского состава

Оцениваем по шкале от 0 до 1:

$$\lambda_7^x = 1.0$$

$$\lambda_7^y = 0.8$$

4. Процент боевых потерь - текущий показатель удовлетворенности ходом сражения.

Для каждой компоненты вооруженных сил (ВС) доля оставшейся в строю части выражает текущий уровень удовлетворенности фактически ходом сражения по данной компоненте:

$$\lambda\_t_x^j = \frac{x_j}{x_{0j}}$$

$$\lambda\_t_y^j = \frac{y_j}{y_{0j}}$$

Результирующий уровень удовлетворенности ходом сражения вычисляем как среднее геометрическое по всем компонентам ВС:

$$\lambda\_t_x = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} \lambda\_t_x^j}$$

$$\lambda\_t_y = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} \lambda\_t_y^j}$$

5. Технический уровень всех компонент вооруженных сил по каждому виду - удовлетворенность бойцов этим видом вооружения

Здесь просто по каждой компоненте вооруженных сил выставляем технический уровень, оценивая по шкале от 0 до 1 по мировым стандартам:

$$\lambda\_lev_x^j = \alpha_j$$

$$\lambda\_lev_y^j = \beta_j$$

Пока в модели по всем компонентам эти показатели выставлены равными 1.

Результирующий показатель технической оснащенности для армий x и y вычисляем как среднее геометрическое по всем компонентам:

$$\lambda\_lev_x = \sqrt[m]{\lambda\_lev_x^1 \cdot \lambda\_lev_x^2 \cdot ....\lambda\_lev_x^m}$$

$$\lambda\_lev_y = \sqrt[m]{\lambda\_lev_y^1 \cdot \lambda\_lev_y^2 \cdot ....\lambda\_lev_y^m}$$

6. Количество/процент побед армии

Очевидно, что количество побед армии сказывается на моральном духе солдат: если армия начинает проигрывать, то вера в победу, настрой падает. **Это тот показатель, который зависит от динамики боев, который может отслеживать динамику боевого духа на протяжении всей войны, от одного сражения к другому.** Все остальное – почти константа. Вообще, в любых соревнованиях, например, профессиональных, не только в боестолкновениях, наш моральных дух, наша **нацеленность на победу**, **вера в победу** подавляющим образом определяется нашим предыдущим опытом: получается ли у нас этим заниматься, получается ли выигрывать у других, быть лучше других в избранном деле, или нет. Другими словами, как часто нам удавалось выигрывать? Каков процент побед? Имеет также значение для нашей уверенности в своих силах, с каким отрывом нам удавалось выигрывать. Другими словами, рейтинг побед (уровень соревнования, место в рейтинге – с каким отрывом) тоже имеет значение для нашего «боевого духа». Видно, что в этом контексте боевой дух – это то же самое, что **уровень самооценки**, **уровень удовлетворенности победами** (здесь - армии). Большой разрыв в результатах (в рейтинге; здесь - в разнице кровавых потерь) равносилен победе с запасом, это дарит нам уверенность в наших силах; малый отрыв, сравнимые результаты сеют в нас неуверенность, сомнение и страх поражения в будущем. Страх – это паралич, это неспособность к решительным действиям. Рейтинг побед – это, пожалуй, принадлежность к одной из 3-ех групп: отрыв почти нулевой, значительный отрыв, ну и средний.

Каким выражением измерять этот показатель? Вначале боевых действий вера в победу, уровень удовлетворенности армией – 100%, то есть 1. Также понятно, что чем больше поражений, тем больше отнимается **от уровня удовлетворенности** (если армия одержала победу в сражении, то моральный дух повышается, если он не максимальный, и не меняется, если он уже 100%). То есть, выражение нужно строить скорее через количество поражений, а не побед:

$$\lambda = 1 - \frac{N_{fail}}{N_{battl}},$$

где N_{fail} - количество поражений армии, N_{battl} - полное число сражений. Есть еще один фактор. Это выражение должно независимо зависеть от времени. Во-первых, потому, что на начальном этапе боевых действий поражения не слишком ослабляют нашу веру в себя, мы держимся на первичном запасе веры, исходных целях, то есть имеется такой отложенный эффект происходящего. И во-вторых, потому, что если армия проиграла в самой первой битве, то согласно этому выражению выше, ее коэффициент морального духа обрушится в ноль ($1-\frac{1}{1}$), и армии придет конец (деморализована), чего, конечно, в реальности быть не может. Чем дальше от начала, тем меньше влияние временного фактора, тем больше влияние доли побед-поражений. Ясно также, что два поражения подряд или больше также существенно сказываются на веру в себя – этот фактор повторных побед или поражений мы учтем в отдельном коэффициенте морального духа (ниже). Итак, важна, как мы видим, не только доля побед-поражений, но и время, и локальное настроение. Лямбда – это настроение, уровень дофамина: падает от поражений и растет от побед. Временной фактор можно учесть введением дополнительного множителя:

$$\lambda = 1 - \frac{N_{fail}}{N_{battl}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Выбранная функция времени проста и удобна: в начальный момент времени она равна нулю, поэтому «вырезает», делает несущественным вклад в настроение побед-поражений на начальном этапе, убирает большие флуктуации, которые описаны выше. На бесконечности она стремится к 1, то есть, ее как бы нет, она «выдвигает» на первый план роль доли побед:

$$\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t \to \infty \end{cases}$$

Параметр tau приблизительно определяет то время, на котором влияние этой временной функции существенно.

7. Повторные победы или поражения

Отметим, что это **еще один показатель, который дает нелинейную и нетривиальную динамику морального духа в течение всей войны**.

Для нашей веры в победу играют значение не только процент побед, но и локальная динамика этих побед или поражений. Два поражения подряд хуже, чем два поражения, разнесенные по времени. Два поражения подряд заставляют бескопокоиться и думать «что со мной / с нами не так?». Три-четыре поражения подряд обрушивают самооценку, веру в себя. Большое число повторных поражений делают практически невозможным победу, ибо воля человека парализована, он перестает видеть смысл в каких-либо действиях. Эти эффекты определяют долговременную динамику коэффициента морального духа.

Что-то похожее можно наблюдать в банковском деле, когда говорят: «Если клиент решил, что банк умер, значит, он действительно мертв». Каждое последовательное событие, в т. ч. принятое решение, меняет отношение социума, и это новое отношение формирует все происходящее далее. Если клиенты начали плохо относиться к банку, они его и похоронили.

Коэффициент повторных побед λ_{rp} (*rp* – от слова *repeat*, повторять) должен увеличивать коэффициент морального духа λ, то есть они могут быть пропорциональны: $\lambda_{rp} \sim \lambda$. Связь между λ_{rp} и числом повторных побед N_{rp} -

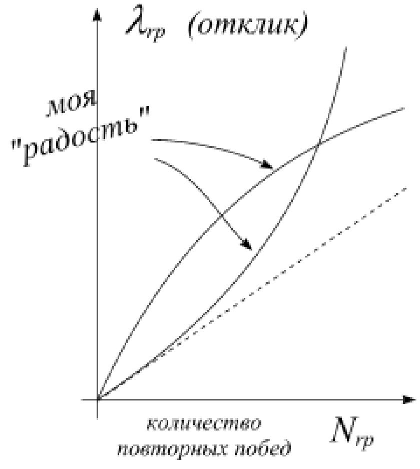


Рис. 7 Схематичное поведение

некоторая возрастающая функция, причем, коэффициента повторных побед она должна расти, но не превосходить 1, если оставаться в представлениях, что **коэффициент морального духа должен быть похож на вероятность** (вероятность стрелять, например, или вероятность что-то делать). Если попытаться представить эту функцию, то она должна расти быстрее линейной (рис. 7): моя радость, настроение, удовлетворение = моральных дух от некоторого количества повторных побед не сможет увеличиваться столь же размеренно, как и N_{rp}, мера этого чувства начнет зашкаливать гораздо быстрее. Мы уже сталкивались с такой простой функцией, которая идет из 0 в 1 на полубесконечном интервале – это может быть функция $1-e^{-x/x_0}$. Таким образом, в качестве коэффициента повторных побед можно использовать функцию

$$\lambda_{rp} = 1 - e^{-\frac{N_{rp}}{a}}$$

Проверим эту функцию на корректность предельных случаев:

$$\lambda_{rp} = 1 - e^{-\frac{N_{rp}}{a}} = \begin{cases} 0, & N_{rp} = 0: \quad \text{плохо!} \\ 1, & N_{rp} \to \infty: \quad \text{ok} \end{cases}$$

Если только что у одной из сторон было поражение, то $N_{rp} = 0$, $\lambda_{rp} = 0$ и следовательно $\lambda = 0$: то есть одно единственное поражение обрушивает коэффициент морального духа в ноль, что нереалистично. В этом случае нужно ограничить нижнюю границу λ_{rp} низким, но не нулевым значением, например, 0.3. Тогда функция этого типа, идущая из 0.3 в 1, следующая:

$$\lambda_{rp} = 0.3 + 0.7\left(1 - e^{-\frac{N_{rp}}{a}}\right) = \begin{cases} 0.3, & N_{rp} = 0 \\ 1, & N_{rp} \to \infty \end{cases}$$

В настоящий момент в модели мы вводим для симметрии также коэффициент повторных поражений (возможно, изучение системы в ближайшее время покажет избыточность этого коэффициента):

$$\lambda_{rp}^{-} = e^{-N_{rp}^{-}} = \begin{cases} 1, & N_{rp}^{-} = 0, \\ \to 0, & N_{rp}^{-} \to \infty \end{cases}$$

Тогда итоговый коэффициент повторных побед-поражений находится как среднее геометрическое этих двух коэффициентов:

$$\lambda_{rp} = \sqrt{\lambda_{rp}^{+}\lambda_{rp}^{-}},$$

где

$$\lambda_{rp}^{+} = 0.3 + 0.7\left(1 - e^{-\frac{N_{rp}^{+}}{a}}\right), \qquad \lambda_{rp}^{-} = e^{-N_{rp}^{-}}$$

Как это работает? См. таблицу ниже.

Не было проигрыша, было подряд 1 или 2 или 3 или и т.д. побед	$N_{rp}^{-} = 0$	$N_{rp}^{+} = (1,2,3,\ldots\infty)$
Тогда коэффициент повторных проигрышей 100%, при умножении на λ_{rp}^{+} будет расти при увеличении числа повторных выигрышей	$\lambda_{rp}^{-} = 1$	$\lambda_{rp}^{+} = (1-0.7e^{-1/a}, \quad 1-0.7e^{-2/a}, \quad ,\to 1)$
Выигрышей не было, было 1 или 2 или 3 или и т.д. проигрыша подряд	$N_{rp}^{-} = (1,2,3,\ldots\infty)$	$N_{rp}^{+} = 0$
Поскольку побед не было, к-т повторных побед на своем низшем уровне. Далее он умножается на коэффициент повторных поражений, который при увеличении их числа постепенно стремится к нулю.	$\lambda_{rp}^{-} = (e^{-1/a}, e^{-2/a}, \ldots, \to 0)$	$\lambda_{rp}^{+} = 0.3$

Чем больше проигрышей, тем ближе коэффициент повторных поражений и общий коэффициент к нулю – это правильно, реалистично, ибо отсутствие выигрыша лишает сил (к борьбе, полностью).

Количество побед подряд у армии x равно количеству поражений подряд у противника – армии y:

$$N^{+}_{гр\_x} = N^{-}_{гр\_y}, \qquad N^{-}_{гр\_x} = N^{+}_{гр\_y}$$

Поэтому достаточно вычислить только количество побед подряд (+) для каждой армии.

8. Качество побед или поражений («в сухую», «рубище до последнего», «пиррова победа», равносильная поражению – слишком высокой ценой и др.)

Эта возможность находится в разработке.

Что такое «пиррова победа»? – победа, которая досталась слишком высокой ценой. Победа, эквивалентная поражению. Например, в одной из стран Южной Америки, кажется, в Уругвае, после гражданской войны была уничтожена большая часть мужского населения. И до сих пор, спустя более 50 лет, население не восстановилось.

Вычисление результирующего показателя морального духа

Далее результирующий показатель морального духа в данный момент времени вычисляем как среднее геометрическое по всем показателям:

$$\lambda_x = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} \lambda_x^j}$$

$$\lambda_y = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} \lambda_y^j}$$

Результаты моделирования - варианты динамики коэффициента морального духа приведены ниже на рисунках. Результаты демонстрируют адекватную динамику

phi_x=0.2; // предельный процент человеческих потерь армии X, при

// котором она капитулирует

phi_y=0.2;

u0=3; nu0=3;

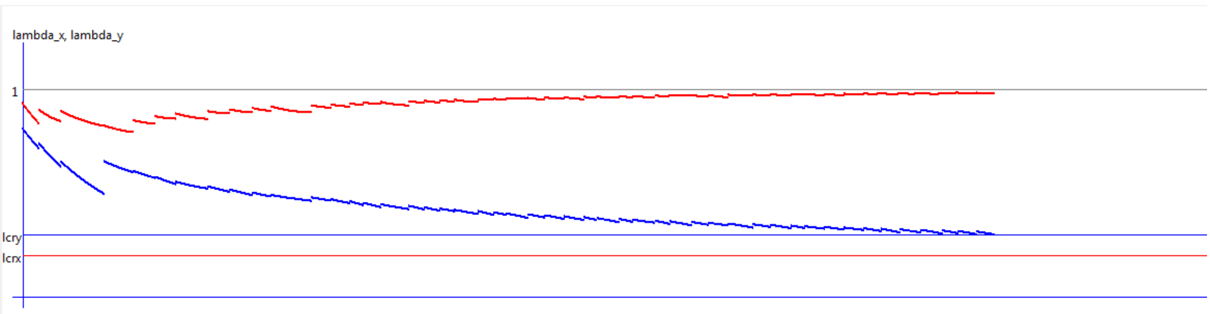


Рис. 8 Победа красных

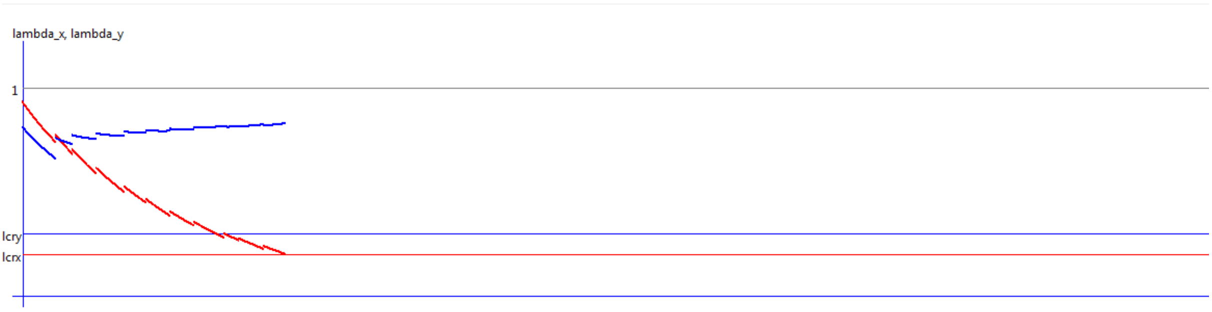


Рис. 9 Победа синих

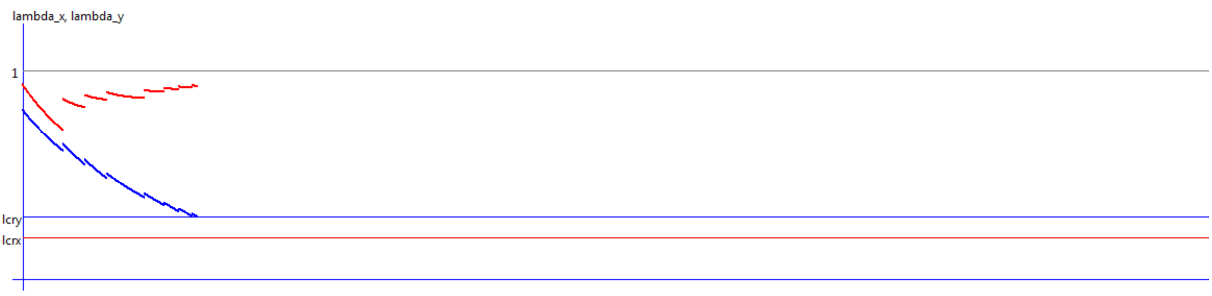


Рис. 10 Победа красных

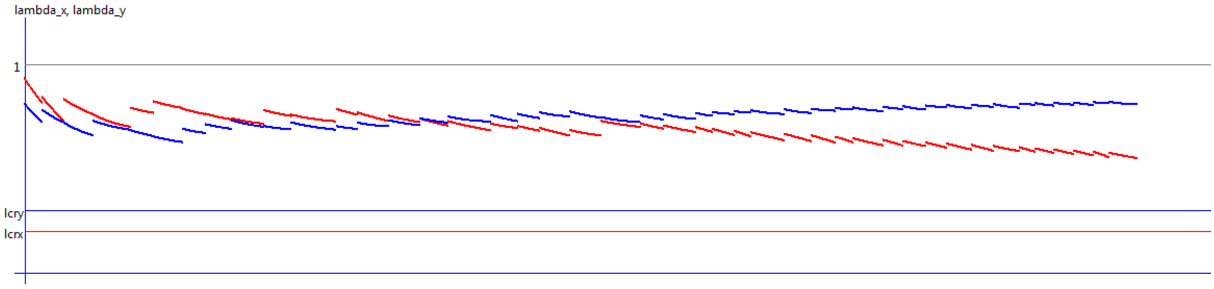


Рис. 11 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют синие

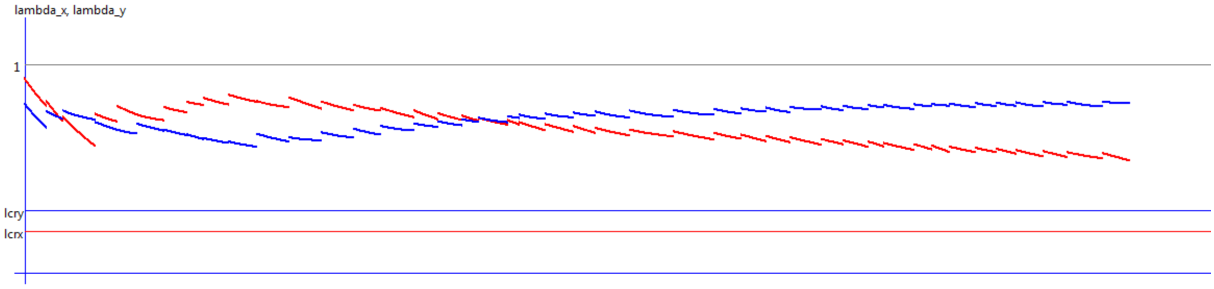


Рис. 12 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют синие

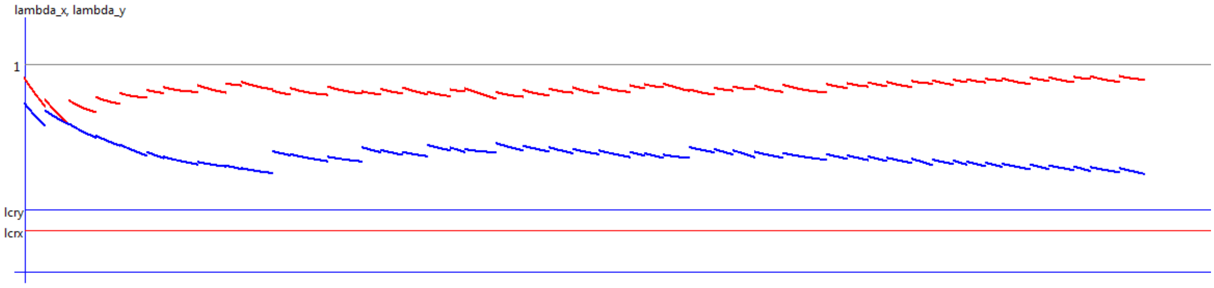


Рис. 13 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют красные

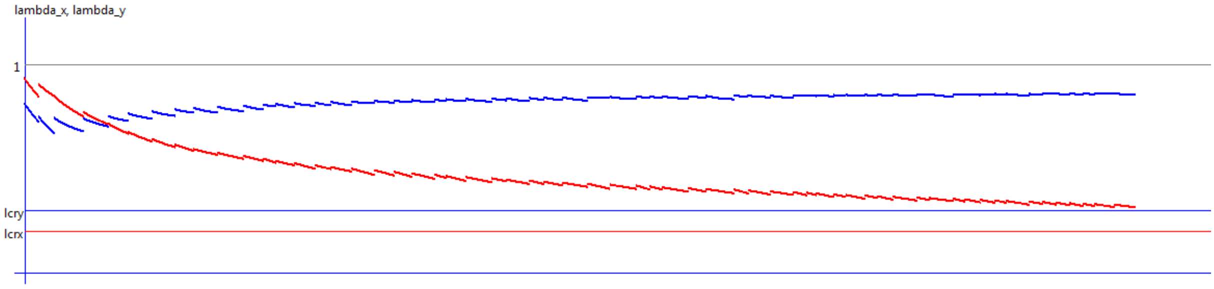


Рис. 14 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют синие

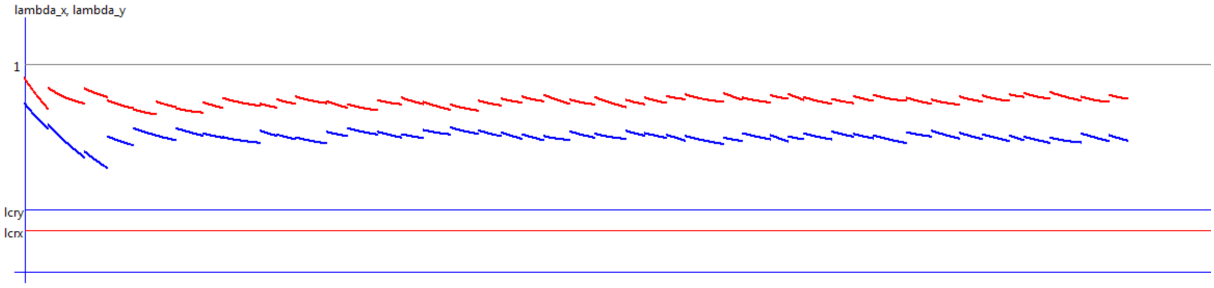


Рис. 15 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют красные

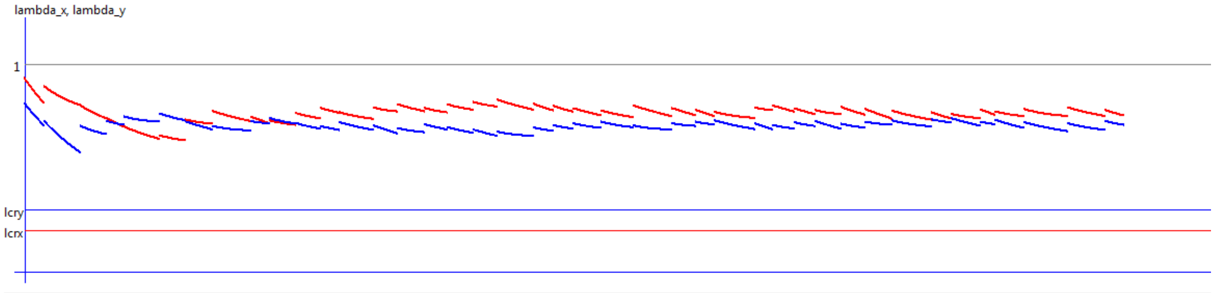


Рис. 16 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют красные с очень слабым перевесом

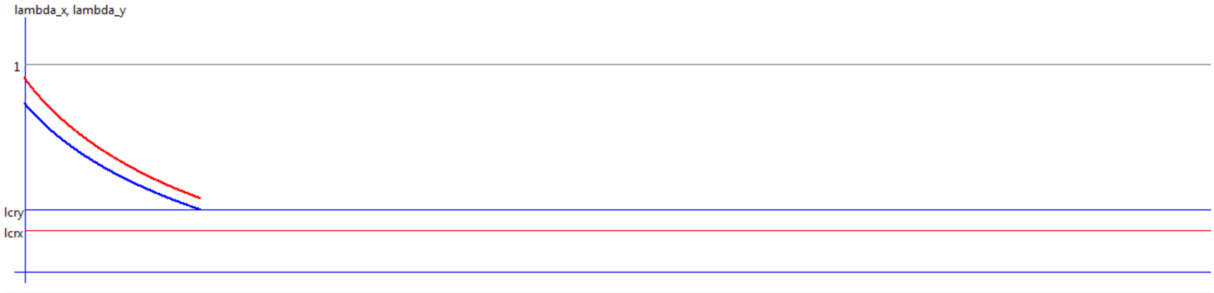


Рис. 17 Победа красных за одно сражение

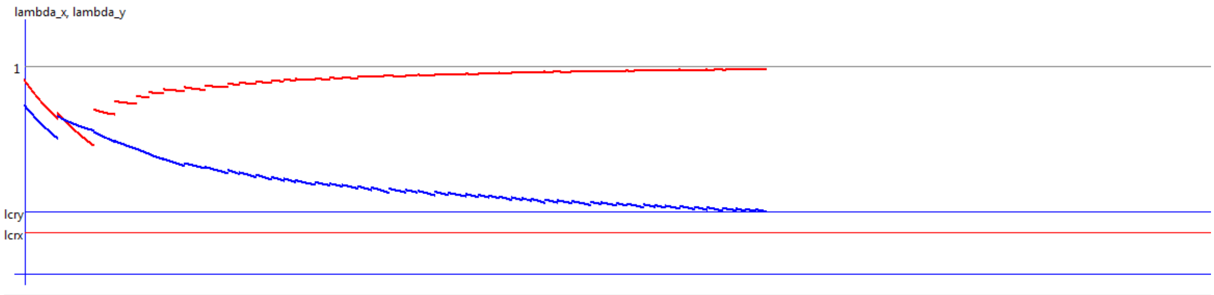


Рис. 18. Победа красных. Редкая длительность войны

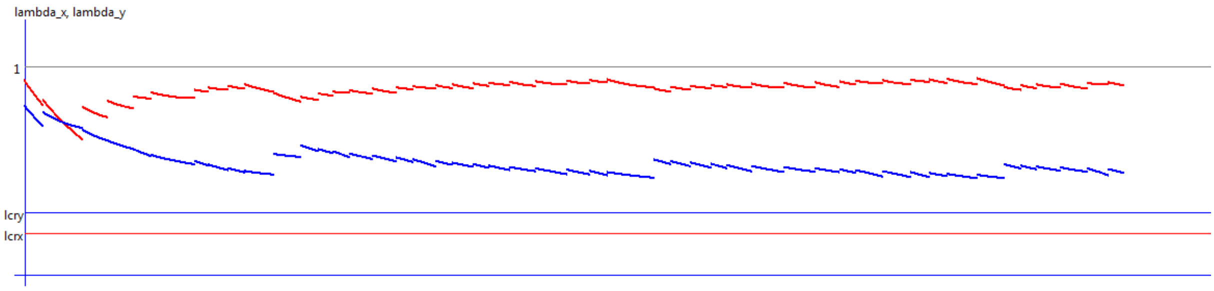


Рис. 19 Недостаточно времени для завершения войны, лидируют красные

Изучение корреляции вероятности победы армии с ее критическими показателями капитуляции в сражении и в войне (критическими уровнями кровавых потерь φ и морального духа λ_{cr})

В процессе экспериментов с компьютерной моделью мы заметили, что для победы играют определяющее значение критические уровни кровавых потерь φ_x, φ_y (критерии окончания отдельного сражения), критические уровни морального духа λ_x^{cr}, λ_y^{cr} (критерии окончания войны), при котором солдаты отказываются сражаться, а также средние значения скоростей возобновления ресурсов u_0, v_0.

Например: если солдаты армии А продолжают сражаться и при более высоких потерях, чем у армии В, то армия А неизбежно побеждает в этом сражении, потому что армия В капитулирует раньше. Однако в модели имеется случайность во всех коэффициентах на 40 % от среднего, поэтому исход боя не предрешен на 100%. Поэтому мы предполагаем, что чем больше этот показатель φ недопустимых потерь у армии, тем чаще она побеждает в сражении, то есть если провести некоторый тренд через предполагаемое облако экспериментальных точек, то эта **зависимость вероятности победы от уровня недопустимых потерь армии φ будет возрастающей**. В точном соответствии с мотивационной формулой из психологии: **невозможно победить тех, кто не сдается**.

Далее. Какова ожидаемая динамика вероятности победы от критического уровня морального духа λ_{cr}? λ_{cr} - это нижняя граница морального духа, при котором армия капитулирует в войне. Чем больше этот уровень, тем раньше капитулирует = проигрывает армия. Следовательно, чем больше этот параметр, тем меньше ожидается побед армии, таким образом, **зависимость вероятности от λ_{cr} будет убывающей**. Это математическое соотношение также означает, что невозможно победить того, кто не сдается.

На рисунках ниже показаны экспериментальные результаты для указанных зависимостей. Видно, что все отмеченные предположения подтверждаются.

Зависимость вероятности победы от уровня недопустимых потерь φ

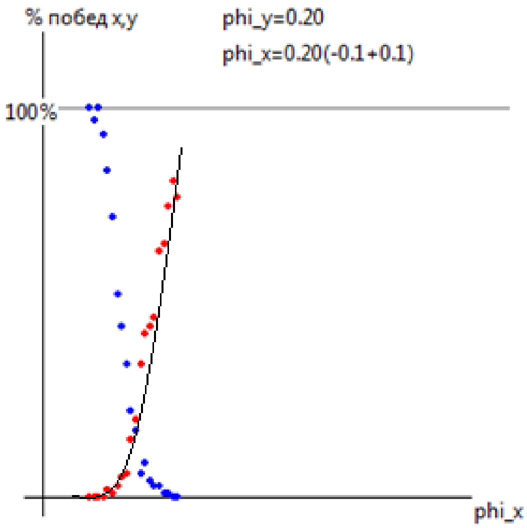


Рис. 20а) Получено при $\lambda_x^{cr} = 0.2$, $\lambda_y^{cr} = 0.25$, процент из 100 войн

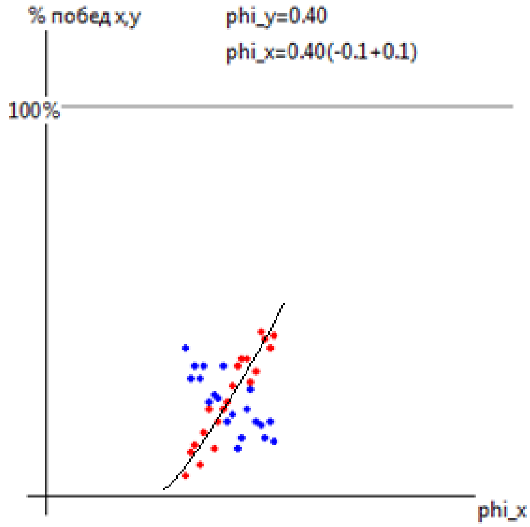


Рис. 20 б) Получено при $\lambda_x^{cr} = 0.2$, $\lambda_y^{cr} = 0.25$, процент из 100 войн

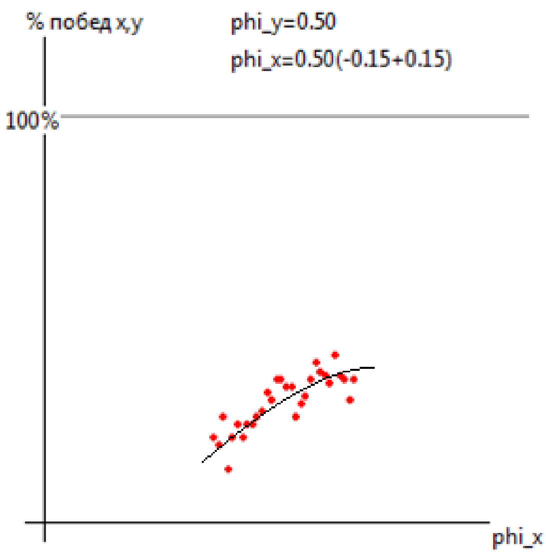


Рис. 20 в) Получено при $\lambda_x^{cr} = 0.2$, $\lambda_y^{cr} = 0.25$, процент из 100 войн

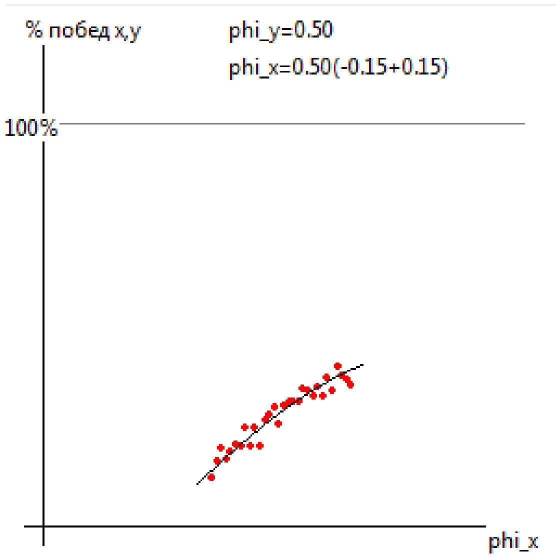
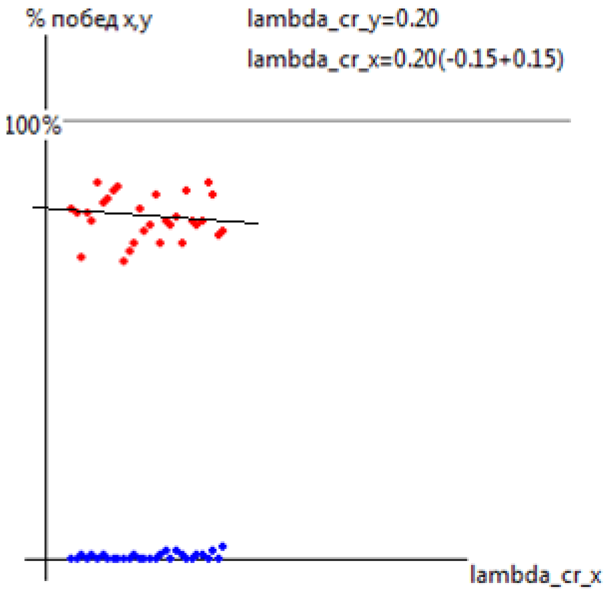


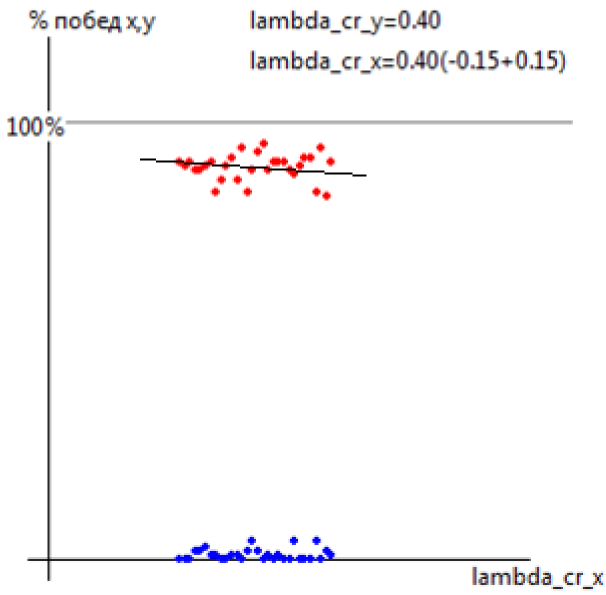
Рис. 20 г) Получено при $\lambda_x^{cr} = 0.2$, $\lambda_y^{cr} = 0.2$, процент из 200 войн

Рис. 20 Корреляция вероятности победы армии с ее уровнем недопустимых потерь (φ_x) при данном значении φ_y (указано на рисунке).

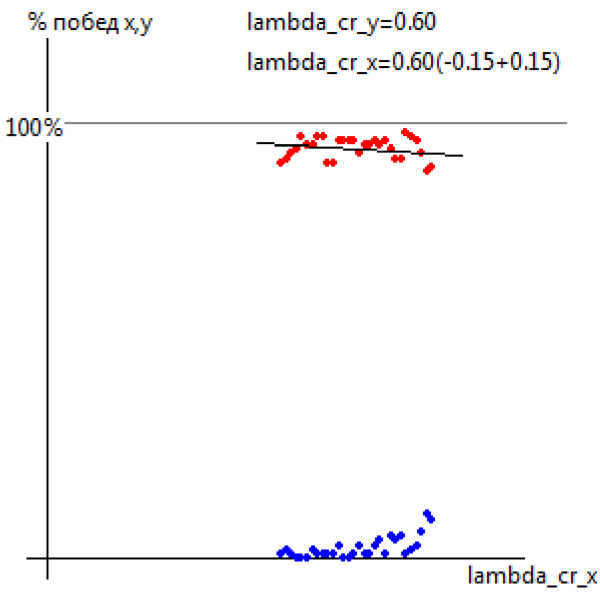
Зависимость вероятности победы от критического показателя морального духа



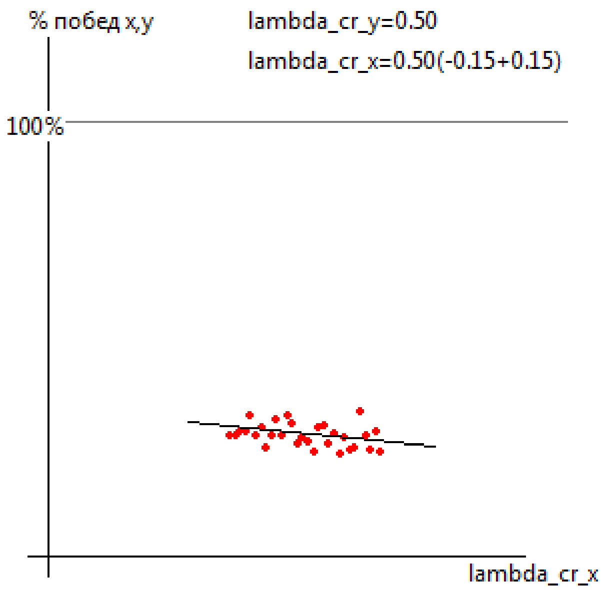
а) Получено при $\varphi_x = 0.3$, $\varphi_y = 0.2$, процент из 100 войн



б) Получено при $\varphi_x = 0.3$, $\varphi_y = 0.2$, процент из 100 войн



в) Получено при $\varphi_x = 0.3$, $\varphi_y = 0.2$, процент из 100 войн



г) Получено при $\varphi_x = 0.2$, $\varphi_y = 0.2$, процент из 200 войн

Рис. 21 Корреляция вероятности победы армии со значением критического коэффициента морального духа

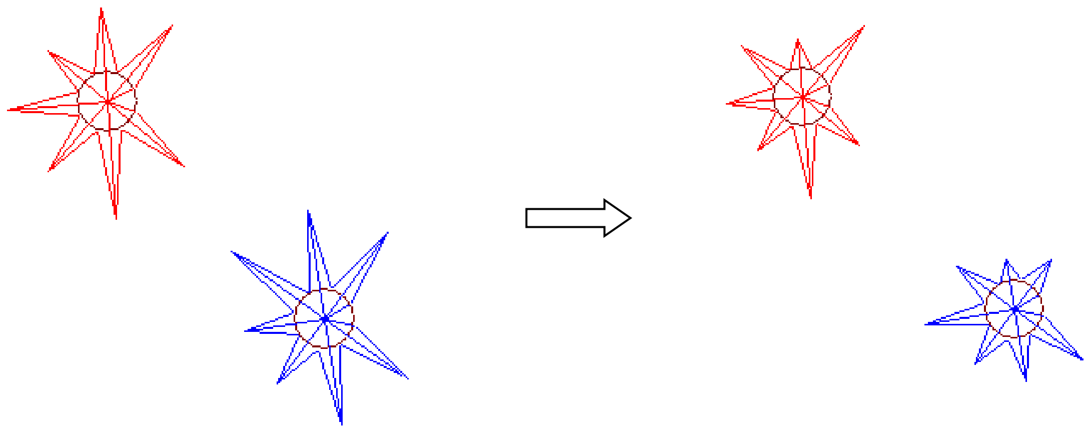


Рис. 22 Динамика компонент ВС во время сражения (иллюстрация)

Почему искусство? А не технология, например?

На наш взгляд, слово «искусство» правильно отражает процесс: даже следуя точно инструкции, всегда есть более красивый способ описания, более точный или отражающий важнейшие аспекты. Здесь мало просто навыка, знаний,... Здесь нужно чутье, креативность идей, и т.п. То есть не просто владение ремеслом, а + талант личности. Слово 'искусство' в теме даёт нам возможность широкого взгляда на проблему, отсутствие законченности, наличие элемента **иррациональности** в этом процессе. Это правильное слово.

3.4. Перспективные направления исследований в рамках тематики:

1. Статистический анализ
   a. *Считать вероятность выигрыша в войне, поскольку это процесс вероятностный, в основном благодаря тому, что все коэффициенты системы уравнений являются случайными (значения равномерно распределены в окрестности средних, отклонение варьируем в районе 30-40%).*
   b. *Мониторить длительность войны*

2. Можно проверить уровень корреляции исходных значений степени оснащенности армии, таланта полководцев, критических уровней морального духа и других и вероятности побед этой армии - то есть, какой фактор играет определяющее значение

Этапы работы со школьниками по некоторой модели:

1. Определить основные величины, влияющие на протекание процессов в системе (“Кто влияет?”)
2. для каждой величины определить множество тех параметров, с которыми она связана («На кого влияет?»)
3. Попытаться определить, каково это влияние. Каков характер связи одной величины и другой? (пропорциональны друг другу, обратно пропорциональны, связаны через производную и т.п.) («Как влияет?»)

Глава 4. Разработка методических материалов по теме

4.1. Принадлежность тематики к приоритетным направлениям исследований.

Военные действия в человеческой цивилизации не умолкают ни на один день. Для России эта тема сейчас актуальна как никогда. К настоящему моменту наука научилась описывать эти действия и предвидеть их результаты. Поэтому так важно по косвенным признакам распознавать те или иные намерения противника и т.п.

Относится ли эта тематика к приоритетной для государства? Опосредованно – безусловно, да. Технологии вынесены в топ этого рейтинга, однако, понимание стратегий и их последствий имеет также первичную роль.

Привести законодательные документы, в которых об этом говорится.

4.2. Описание методического комплекта.

Разработан методический комплект для работы со школьниками средней школы.

Содержание комплекта:

1. КТП (календарно-тематическое планирование)
2. Конспекты лекционных и семинарских занятий
3. Вариативный набор текстов для проведения семинаров по читательской грамотности.
4. Инструкция по построению моделей.(приведена в главе №2).
5. Образовательная игра «Своя игра» (Математические модели, модель военной стратегии, теория игр)
6. Текст опроса учащихся по удовлетворенности факультативом
7. Результаты опроса (Гимназия Универс, 8-9 классы,18 человек)

4.3. Календарно-тематическое планирование факультативных занятий

Тема	Тип занятия		Основные термины	Цель	Материалы и оборудование
1.Знакомство с математическими моделями и не только.	Открытие нового знания	1 ч	Математическая модель, математическое моделирование, математическая модель военной стратегии и др	Расширить кругозор, познакомить детей с данной темой, ознакомить детей с основными понятиями по теме. Познакомить детей с программой.	проектор, компьютер(ы), презентация.
2. Работа с программой моделирования военных действий	Открытие нового знания	1 ч	Осознавать и понимать, как заданные условия влияют на ход событий.		проектор, компьютер(ы).
3. Проверь себя	Отработка умений и рефлексии Открытие нового знания	1 ч	Проверить знания с помощью текстов. Улучшить грамотность обучающихся по чтению текстов.	Закрепить знания, улучшить работу обучающих с помощью тестов по теме.	проектор, компьютер(ы), вариативность текстов.
4. Своя игра.	Отработка умений и рефлексии Открытие нового знания	1-2 ч		Проверить знания с помощью игры	проектор, презентация.,
5 .Инструкция на практике	Открытие нового знания	1 ч		Отработка имеющихся знаний	проектор, презентация

4.4. Конспекты лекционных и семинарских занятий.

Программа лекционного занятия 1.

Предмет: факультативное занятие "Математические инструменты: Создание и использование моделей"

Тема: Знакомство с математическими моделями и не только.

Класс: 8-9 (базовый уровень)

Тип занятий: Открытие нового знания.

Цель: расширить кругозор, познакомить детей с данной темой, ознакомить детей с основными понятиями по теме.

Задачи:

1. Уметь давать четкое определение «Математическая модель» и «Математическое моделирование» и др
2. Знать виды математических моделей.
3. Уметь давать четкое определение «Военная стратегия»
4. Знать виды военных стратегий.

Оборудование: проектор, компьютер(ы), презентация.

Этапы лекционного занятия.

1. Организационный момент (настрой на занятие)
2. Постановка темы и цели урока
3. Раскрыть основные понятия (математическая модель, математическая модель военной стратегии, математическое моделирование, военная стратегия, виды стратегий и др).
4. Рефлексия (опрос обучающих по пройденному материалу).

Программа лекционного занятия 2.

Предмет: факультативное занятие "Математические инструменты: Создание и использование моделей"

Тема: Работа с программой моделирования военных действий.

Класс: 8-9 (базовый уровень)

Тип занятий: Открытие нового знания.

Цель: расширить кругозор, познакомить детей с программой.

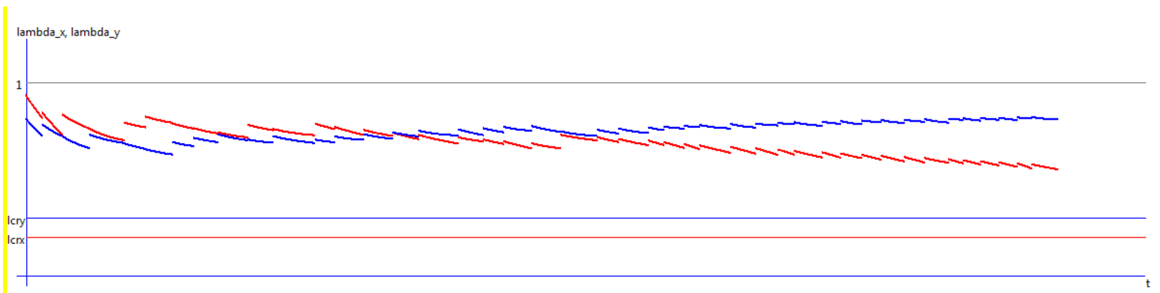
Задачи:

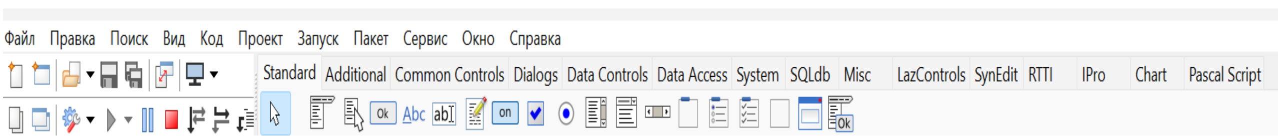
1. Осознавать и понимать, как заданные условия влияют на ход событий.
2. И как заданные условия связаны с ранее изученными понятиями.

Оборудование: проектор, компьютер(ы).

Этапы лекционного занятия.

1. Организационный момент (мотивация на занятие)
2. Постановка темы и цели урока
3. Демонстрация программы для учащихся.
4. Рефлексия





Программа занятия 3.

Предмет: факультативное занятие "Математические инструменты: Создание и использование моделей"

Тема: Проверь себя

Класс: 8-9 (базовый уровень)

Тип занятий: Закрепление изученного материала.

Цель: Закрепить знания, улучшить работу обучающих с помощью тестов по теме.

Задачи:

1. Проверить знания с помощью текстов
2. Улучшить грамотность обучающихся по чтению текстов.

Оборудование: проектор, компьютер(ы), вариативные тексты.

Этапы лекционного занятия.

1. Организационный момент (мотивация на занятие)
2. Постановка темы и цели урока
3. Работа с тестами.
4. Рефлексия

Программа занятия 4.

Предмет: факультативное занятие "Математические инструменты: Создание и использование моделей"

Тема: Своя игра.

Класс: 8-9 (базовый уровень)

Тип занятий: Закрепление изученного материала.

Цель: Закрепить знания, развить кругозор.

Задачи:

1. Проверить знания с помощью игры.

Оборудование: проектор, презентация.

Этапы занятия.

1. Организационный момент (мотивация на занятие)
2. Постановка темы и цели урока
3. Игра- викторина
4. подведение итогов.

Содержание игры-викторины «Своя игра» приведено ниже.

4.5. Вариативный набор текстов для проведения семинаров по читательской грамотности.

Вариант текста 1:

Математическая модель — это _________ (А) описания реальной жизненной ситуации (задачи) с помощью ___________ (Б) языка.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, занимаются математическим моделированием: заменяют объект исследования его математической моделью. С помощью математических методов описывается, как правило, ____________ (В) или________ (Г). Важнейшие математические модели обычно обладают важным свойством универсальности: принципиально разные реальные явления могут описываться одной и той же математической моделью. Таким образом, изучая одну математическую модель, мы изучаем сразу целый класс описываемых ею___________(Д).

Практически все авторы, описывающие процесс математического моделирования, указывают, что сначала строится особая идеальная конструкция, ________________(Е) или ____________________(Ж).

При этом финальная математическая конструкция называется математической моделью, Построение содержательной модели может производиться с помощью набора _______________(З), как в механике, где идеальные пружины, твёрдые тела, идеальные маятники, упругие среды дают готовые структурные элементы для содержательного моделирования.

Список слов и словосочетаний.

1. Готовых макетов
2. Содержательная модель
3. Концептуальная модель
4. Математический
5. Процесс
6. Идеальный объект
7. Явления
8. Способ

Запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З

Вариант текста 2:

Математические модели принятия решений в условиях конфликта, рассматриваемые в так называемой теории игр.

Под игрой понимается математическая_________(А), в котором принимают участие две или более стороны, стремящиеся к достижению разных целей. Участники игры с общими стратегическими интересами могут объединяться в _______ (Б) или__________ (В). Чаще всего в игровых моделях присутствуют два игрока – противоборствующие стороны. Выбор стратегии в конфликтной ситуации означает план действий игрока при различных возможных действиях противника. Очевидно, что стратегии могут быть более или менее удачными. Мерой эффективности действий игрока является так называемый выигрыш. Выразить результат различных исходов количественно весьма затруднительно. Но в данном случае это необходимо, т.к. в теории игр рассматриваются только такие игры, в которых выигрыш выражается числовыми данными: стоимость, расстояние, очки, баллы и т.д. Очевидно, исход игры, а следовательно, выигрыш каждого игрока зависит от применяемых ими_________ (Г). Если же в реальной ситуации возникает случай, когда исход для участника полностью зависит от него самого, то такая ситуация не рассматривается как игровая. Проигрыш рассматривается как __________ (Д) выигрыш. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только выигрыши.

При представлении конфликтной ситуации в военном деле возникает ряд трудностей в связи с описанием_________(Е), ________ (Ж), игроков, стратегий, ходов и выигрышей, т.е. в описании математической модели предстоящих военных действий по сценарию «если-то». Задача заключается в том, чтобы данную конфликтную ситуацию по возможности привести к формализованной игре без значительных потерь реальных целей, найти метод решения такой модели, _____________ (З) и анализ.

Список слов и словосочетаний.

1. Правило
2. Провести расчеты
3. Условия
4. Группа
5. Коалиция
6. Модель конфликта
7. Стратегии
8. Отрицательный

Запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З

4.6. Образовательная игра «Своя игра» (Математические модели, модель военной стратегии, теория игр).

Инструкция для участников:

- Каждая команда имеет возможность выбрать капитана и придумать название своей команде.
- Ответ принимается строго только от командира команды. Ни в коем случае не принимается ответ от других участников команды или от участников других команд.
- У каждой команды есть минута (две-три в зависимости от сложности задания) на размышление и право озвучить один ответ.
- Каждая команда имеет право выбрать понравившуюся категорию и

количество баллов.

- Совещаться можно только с участниками своей команды
- Спрашивать ответ у участника другой команды - запрещено.
- Выкрикивать ответы, не дожидаясь своей очереди, - запрещено, ответ и вопрос аннулируются
- Если время на раздумье закончилось, команда не дает ответа, этот вопрос переходит следующей по очереди команде.

Финал: когда будут выбраны все категории и даны ответы на все вопросы викторины.

Итоги подводит один из ведущих, который фиксировал баллы каждой команды в течении всей игры.

Ход мероприятия:

1. Мотивация к предстоящей игре.

Замотивировать и заинтересовать учащихся предстоящей викториной. Дать возможность ребятам поделиться на команды самостоятельно и придумать название своей команды, также выбрать капитана. Дать им немного времени на подготовку: подготовить листочки и ручки, пользоваться телефонами - запрещено. Объяснить правила игры и выбора категории с баллами. Озвучить, что на размышление дается от минуты до трех в зависимости от сложности задания.

2. Проведение математической викторины

3. Выбор категории и вопросов с количеством баллов.

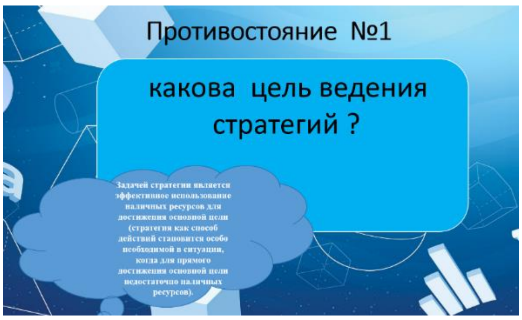
Категория первая: Противостояние

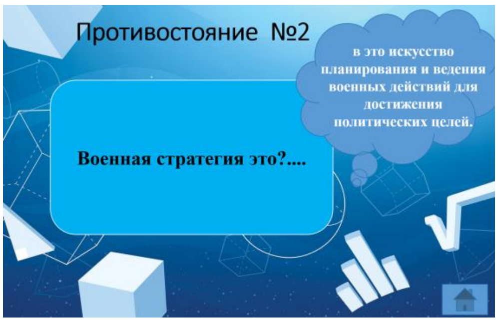
Вопрос 1. Какова цель разработки стратегий?

Ответ: Задачей стратегии является эффективное использование наличных ресурсов для достижения основной цели (стратегия как способ действий становится особо необходимой в ситуации, когда для прямого достижения основной цели недостаточно наличных ресурсов).

Вопрос 2. Военная стратегия это?...

Ответ: это искусство планирования и ведения военных действий для достижения политических целей.



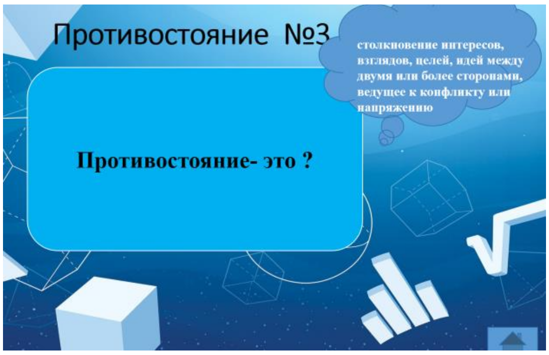


Вопрос 3. Противостояние - это ?

Ответ: столкновение интересов, взглядов, целей, идей между двумя или более сторонами, ведущее к конфликту или напряжению

Вопрос 4. Назовите виды (типы) военной стратегии?

Ответ: стратегическая разведка, география, мониторинг, планирование, прогноз и связь



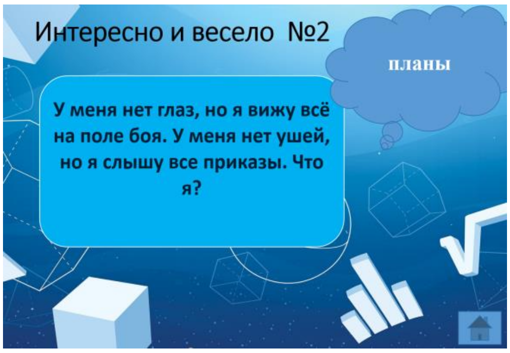
Категория вторая: Интересно и весело

Вопрос 1 Я – не оружие, но могу поразить. Я – не война, но могу привести к победе. Что я?

Ответ: Тактика

Вопрос 2. У меня нет глаз, но я вижу всё на поле боя. У меня нет ушей, но я слышу все приказы. Что я?

Ответ: Планы.



Вопрос 3. Славится своей отвагой, Воинами смелыми, Вертолетами, пехотой, Ракетами умелыми

Ответ: армия.

Вопрос 4. Назовите виды (типы) военной стратегии? И планы строит, но не пишет, И войска водит, но не плывёт, А на победу надеется

Ответ: военный стратег.

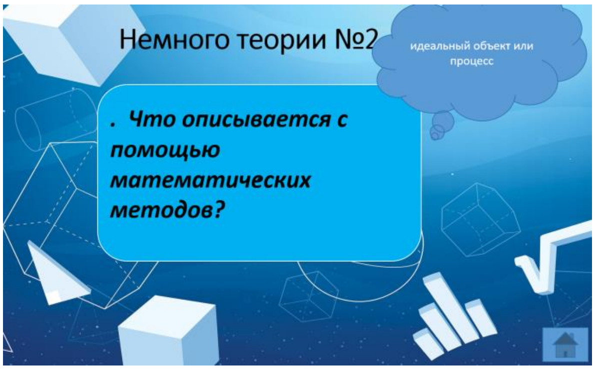
Категория третья: Немного теории…

Вопрос 1. Дайте определение понятию «Математическая модель»

Ответ: это способ описания реальной жизненной ситуации (задачи) с помощью математического языка.

Вопрос 2. Что описывается с помощью математических методов?

Ответ: идеальный объект или процесс.



Вопрос 3. В каких средах программирования можно моделировать динамику модельных систем?

Ответ: Lazarus, Си++, Python, Maple, Mathlab и др.

Вопрос 4. Какова цель ведения стратегий?

Ответ: Задачей стратегии является эффективное использование наличных ресурсов для достижения основной цели (стратегия как способ действий становится особо необходимой в ситуации, когда для прямого достижения основной цели недостаточно наличных ресурсов).

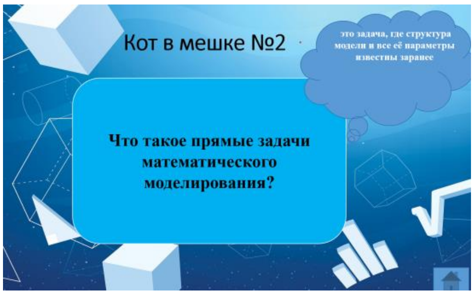
Категория четвертая: Кот в мешке

Вопрос: Назовите основные этапы построения математических моделей

Ответ: графическое представление, отбор основных факторов, математическая запись.

Вопрос 2. Что такое прямые задачи математического моделирования?

Ответ: это задача, где структура модели и все её параметры известны заранее.



Вопрос 3. Что такое обратные задачи математического моделирования?

Ответ: задачи, в которых требуется определить параметры модели, свойства объекта или другие неизвестные величины на основании наблюдаемых данных

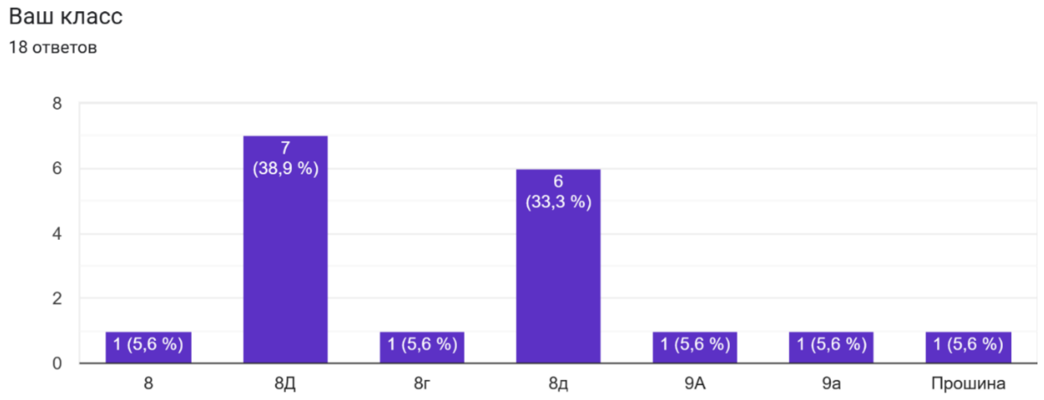
Вопрос 4. Назовите пример прямой задачи

Ответ: Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 100 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что скорость автомобилиста в 3 раза больше скорости велосипедиста. Сколько времени потребуется автомобилисту, чтобы добраться до пункта В?

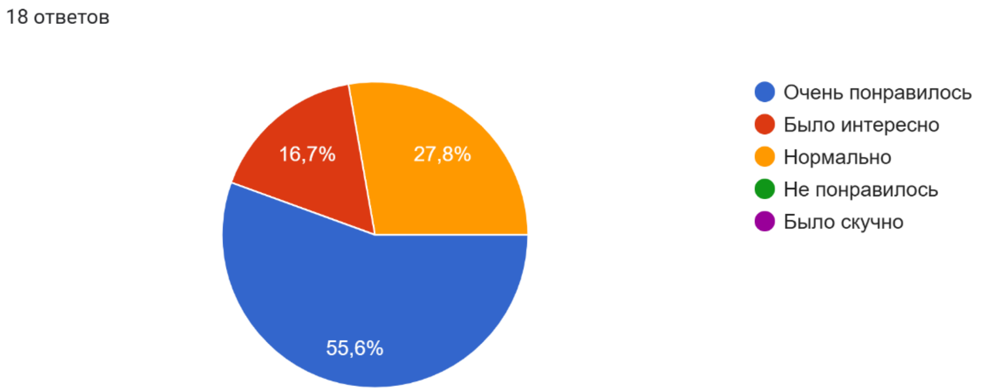
4.7. Текст Опроса. Результаты опроса.

На основе проделанной работы, был проведен опрос среди школьников 8-9 классов.

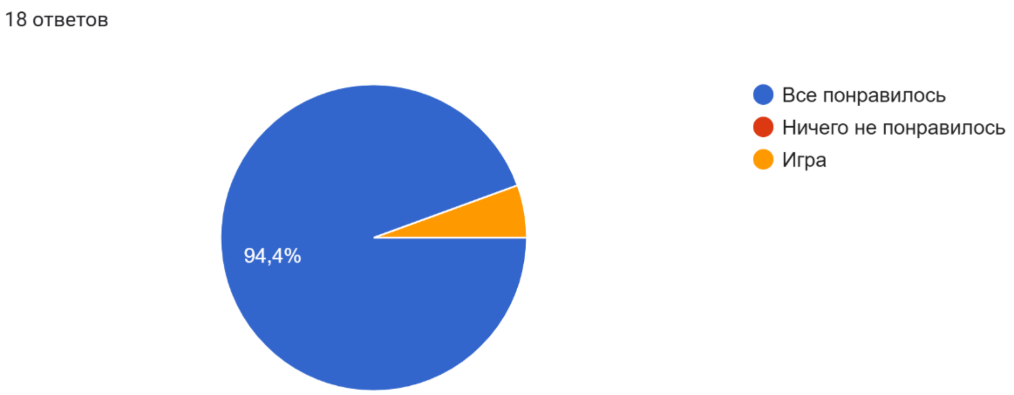
Опрос создан для улучшения и доработки мероприятия по данной теме.



1. Как бы вы оценили общее впечатление от мероприятия?

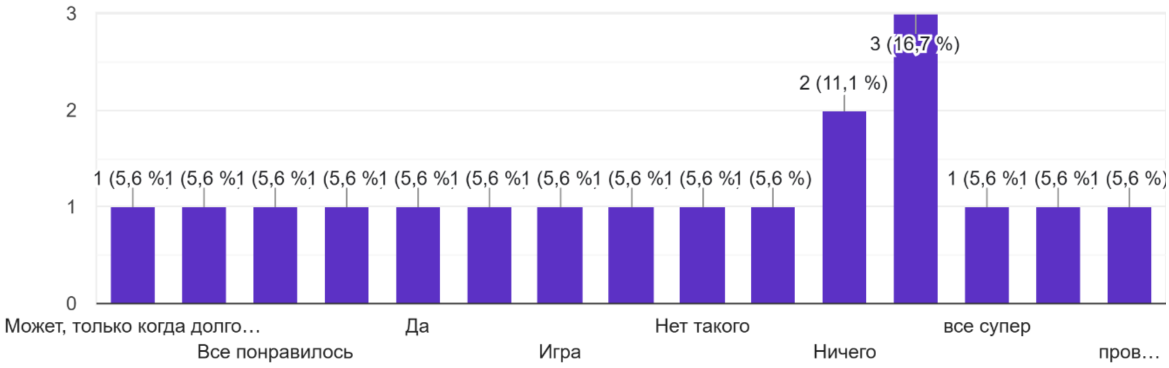


2. Что вам больше всего понравилось на мероприятии?



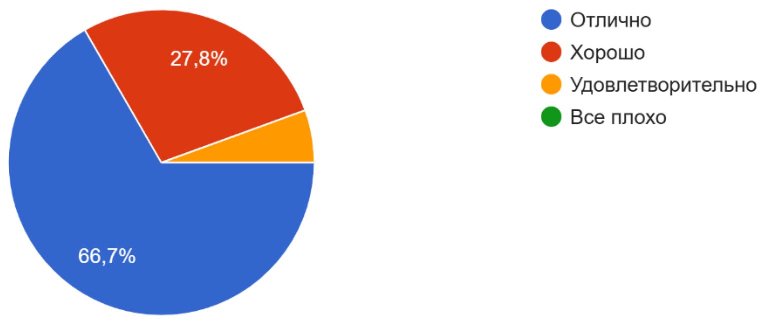
3. Что вам меньше всего понравилось на мероприятии?

18 ответов



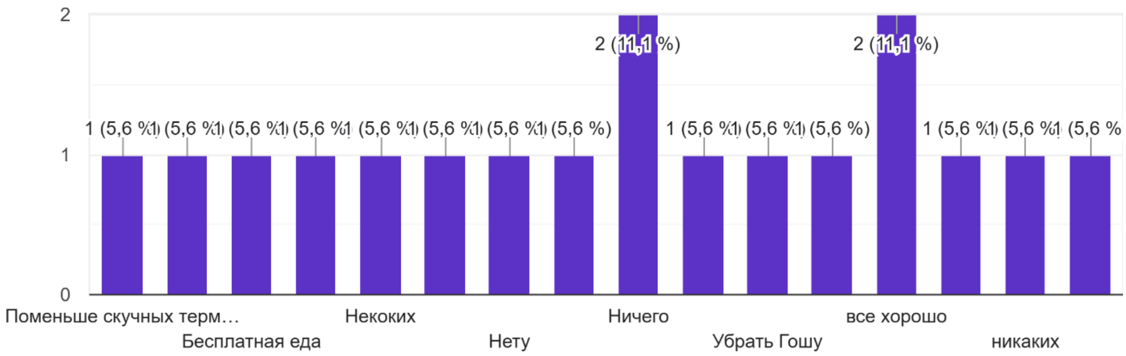
4. Как бы вы оценили качество семинара?

18 ответов

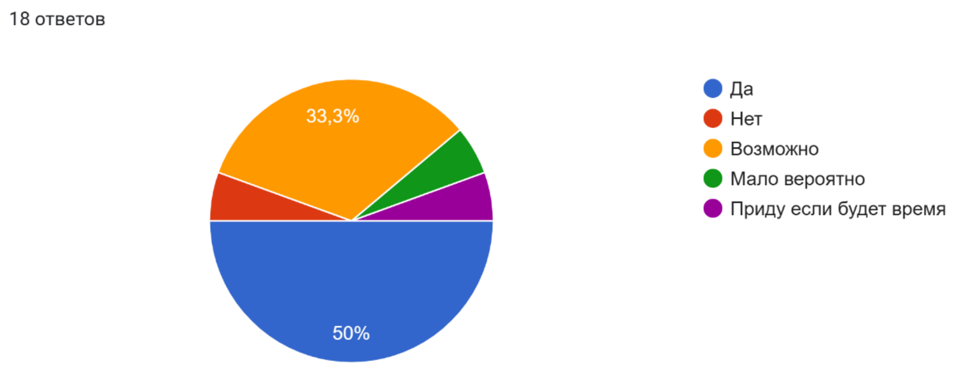


5. Какие у вас есть предложения по улучшению данного мероприятия?

18 ответов



6. Повторили ли свой поход на данное мероприятие?

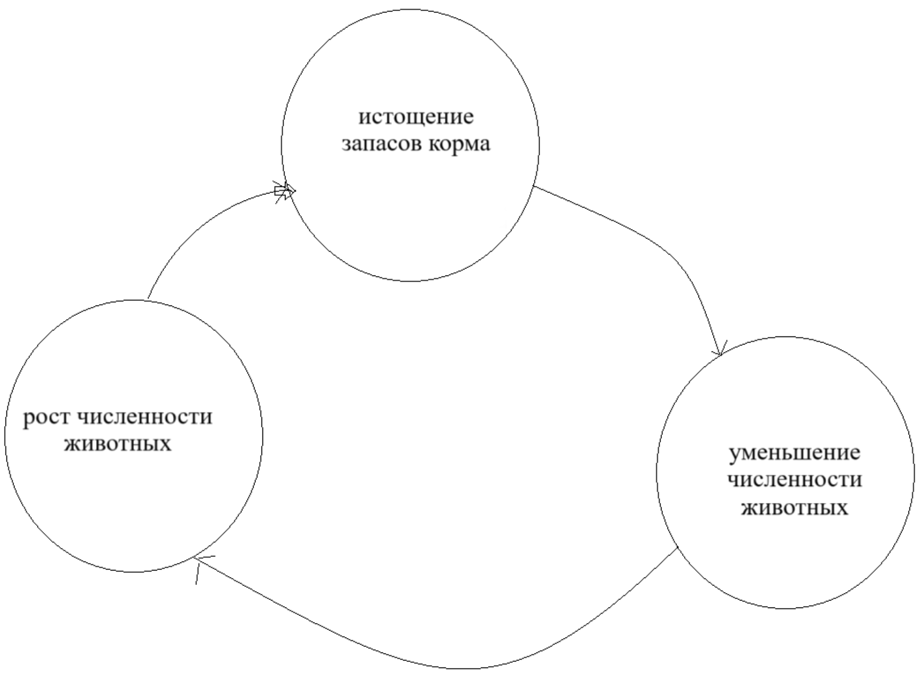


Данный опрос позволил выявить недостатки мероприятия, показал, что можно исправить, а также то, что понравилось и менять не стоит.

На основе данного тестирования можно сделать вывод, что данное мероприятие заинтересовало школьников, и в будущем его можно вводить в программу изучения.

4.8. Построение еще одной модели «с листа» на семинаре с учащимися («Ферма»)

1. Графическое представление



2. Численные значения
   - Рост численности животных N_1 N_2
   - Убыль численности животных P_1 P_2
   - Количество необходимого корма M_1 M_2

В дальнейшем будет еще разработка….

Заключение:

Выводы:

1. Разработана модель военных действий, соответствующая известной в литературе модели Осипова-Ланчестера (ОЛ), написаны подробные рассуждения, приводящие к системе уравнений ОЛ.
2. Разработано приложение для компьютера, моделирующее противоборства двух сторон.
3. Проанализированы различные режимы работы программы в рамках простейшей модели ОЛ.
4. Разработана модифицированная модель,
    a. описывающая войну, как серию сражений
    b. учитывающая изменения морального духа в динамике множества сражений
5. Предложены оригинальные способы расчета коэффициента морального духа.
6. Получены зависимости вероятности победы от уровня неприемлемых боевых потерь и от критического уровня показателя морального духа .
7. Составлена инструкция для построения математических моделей.
8. Выполнена разработка семинара по обсуждению модели фермы.
9. Составлены рекомендации для использования материалов в образовательных организациях.
10. Разработан методический комплект для обсуждения рассматриваемой тематики со школьниками (Описание комплекта и дидактических материалов, игра, опрос, семинар по обсуждению режимов работы программы и их соответствие различным стратегиям, семинар по обсуждению соответствия модели «хищник – жертва» и использованию внешних приложений, семинар по построению модели фермы)
11. Проведен ряд мероприятий факультатива со школьниками 8-9 классов МОУ «КУГ №1- Универс.

Библиографический список

1. Осипов М.П., «Влияние численности сражающихся сторон на их потери», «Военный сборник», **1915**
2. Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm.* – London: Constable and Co, **1916**. – 243 p.
3. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // *Управление большими системами,* 37 (**2012**). (обзор)
4. В.В. Шумов, В.О. Корепанов. Математические модели боевых и военных действий, *Компьютерные исследования и моделирование,* **2020** т. 12 № 1 с. 217–242. (обзор)
5. Короткий, В.А. Современные аспекты математического моделирования военных операций по Осипову-Ланчестеру: pro и contra / В. А. Короткий, М. А. Степович // Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского, Калуга, 01 февраля – 31 2018 года / Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского. – Калуга: ФБГОУ ВПО "Калужский государственный университет им. К.Э.Циолковского", **2018**. – С. 191-197. – EDN TVZVUS.
6. В.В. Шумов. Учет морального фактора и технологических характеристик в моделях боя. *Военная мысль*, № 10, **2020**.
7. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. 32 с.
8. Модели военных, боевых и специальных действий / под ред. Д. А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, **2025**. – 528 с.
9. Павловский Ю. Н. О факторе Л. Н. Толстого в вооруженной борьбе // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5. – № 1. – С. 3-15
10. 33 стратегии войны / Роберт Грин; пер. с англ. Е. Я. Мигуновой. — Москва: РИПОЛ классик, 2007.— 672 с.: ил.
11. С.В. Звонарев. Основы математического моделирования // Уральский федеральный университет. **2019**.
12. Сунь-Цзы (3-5 вв. до н.э.), «Искусство войны

13. История математического моделирования и технологии вычислительного эксперимента //2009.ТГПУ им.А.И.Корешковой Электронный ресурс]URL:https://cyberleninka.ru/article/n/istoriya-matematicheskogo-modelirovaniya-i-tehnologii-vychislitelnogo-eksperimenta
14. Детерминированные модели Электронный ресурс]URL: https://studfile.net/preview/7818273/page:9/
15. Новиков Д. А. (ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва) Электронный ресурс]URL: file:///C:/Users/valen/AppData/Local/Temp/%7BB36D77E9-33C4-46AF-9B30-EFE5508D3500%7D/1%20%D0%9C%D0%B5%D0%B3%D0%B0-%D0%BE%D0%B1%D0%B7%D0%BE%D1%80%20ierarhicheskie-modeli-voennyh-deystviy.pdf