МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра математики и методики обучения математике

Сушкевич Валерия Валерьевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема: «Изучение темы ”Соотношения между сторонами и углами треугольника” в курсе геометрии 7 класса с использованием анимационных чертежей»

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Профиль (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой, к.п.н., доцент Шашкина М.Б.
____
(дата, подпись)
Руководитель: д-р п.н., профессор Майер В.Р.
____
Дата защиты ________ «20» 06. 2025________
Обучающийся: Сушкевич В.В.
____
Оценка ______________________________
(прописью)

Красноярск 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Современное школьное образование активно интегрирует цифровые технологии в процесс обучения, что особенно важно для таких предметов как геометрия, где наглядность играет ключевую роль. Изучение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» в 7 классе является фундаментальным этапом в освоении курса геометрии, поскольку закладывает основы понимания свойств геометрических фигур и их взаимосвязей. Однако традиционные методы преподавания, основанные на статичных чертежах и текстовых объяснениях, не всегда позволяют учащимся в полной мере визуализировать и осознать динамику геометрических зависимостей.

В этой связи особую значимость приобретают такие системы динамической математики как «Живая математика» и «Математический конструктор», которые позволяют создавать интерактивные анимационные чертежи. Их использование способствует формированию у учащихся пространственного мышления, повышает мотивацию к изучению геометрии и обеспечивает более глубокое усвоение материала. Однако, несмотря на широкие возможности этих программ, их применение в школьной практике остается фрагментарным, а методики работы с динамическими чертежами недостаточно систематизированы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в 7 классе.

Предмет исследования: приёмы и способы применения анимационных чертежей в курсе геометрии 7 класса при изучении соотношений между сторонами и углами треугольника.

Цель исследования - разработка приёмов и способов применения авторской методической копилки анимационных чертежей (см. курсовую работу [28]) при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» на уроках геометрии в 7 классе.

Задачи исследования:

1.Провести анализ традиционных методик изучения соотношений между сторонами и углами треугольника в школьных учебниках геометрии.

2.Раскрыть конструктивные, вычислительные и анимационные возможности систем динамической математики для создания анимационных чертежей, поддерживающих курс геометрии 7 класса.

3.Систематизировать авторские и заимствованные анимационные чертежи, в соответствии с содержанием курса геометрии 7 класса.

4.Разработать способы и приёмы применения конкретных анимационных чертежей авторской методической копилки в избранных теоремах и задачах курса геометрии 7 класса.

5. Провести апробацию авторской методической копилки анимационных чертежей и разработанных способов их применения на уроках геометрии на уроках геометрии в 7 классе.

Глава 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ И ЦИФРОВЫЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

1.1. Анализ изучения темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» в школьных учебниках геометрии

Тема «Соотношения между сторонами и углами треугольника» является ключевой в курсе геометрии 7 класса, так как закладывает основы для изучения тригонометрии и решения задач на вычисление элементов треугольников.

Цель анализа: сравнить подходы к изложению темы в учебниках Атанасяна, Погорелова, Мерзляка, Александрова и Смирновой, выявить методические особенности и полноту материала.

Место темы в учебниках.

1. Атанасян Л.С. и др. – Глава 4 «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (после признаков равенства треугольников, перед прямоугольными треугольниками) [3].
2. Погорелов А.В. - §4 «Сумма углов треугольника» и §5 «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (после параллельных прямых, перед окружностью) [20].
3. Мерзляк А.Г. и др. – Глава 3 «Параллельные прямые. Сумма углов треугольника» (включает теорему о соотношении сторон и углов) [17].
4. Александров А.Д. и др. – Глава 5 «Треугольники» (раздел «Неравенство треугольника») [1].
5. Смирнова И.М., Смирнов В.А. – Глава 4 «Треугольники» (подраздел «Соотношения в треугольнике») [27].

Во всех анализируемых учебниках тема изучается после:

- изучения признаков равенства треугольников (Атанасян, Смирнова);

- темы «Параллельные прямые» (Погорелов, Мерзляк);
- основ геометрических построений (Александров).

Последовательность изучения элементов темы в большинстве учебников:

1. Теорема о соотношении сторон и углов треугольника;
2. Неравенство треугольника;
3. Теоремы синусов и косинусов (в некоторых учебниках - только упоминание);
4. Применение изученного при решении задач.

Рассмотрим более подробно каждый учебник.

Атанасян Л.С. (наиболее полная и методически выверенная структура).

1.Введение понятий: - теорема о соотношении сторон и углов; - обратная теорема; - следствия.

2.Неравенство треугольника.

3.Практическое применение: - решение задач на вычисление; - задачи на доказательство.

4.Связь с последующими темами: - подготовка к изучению прямоугольных треугольников.

Погорелов А.В. (сжатое изложение).

1. Теоретический блок: -теорема о сумме углов; - соотношение сторон и углов.

2. Неравенство треугольника.

3. Минимум практических заданий (4-5 задач на доказательство).

Мерзляк А.Г. (от практики к теории).

1. Практическая мотивация: - измерение углов при разных сторонах.

2. Теоретическое обоснование: -теорема и ее доказательство.

3. Визуализация: - графическое представление зависимостей.

4. Прикладные задачи.

Александров А.Д. (Строгий логический подход).

1. Аксиоматическое введение: -определения и свойства.

2. Доказательства теорем: - через векторные величины.

3. Обобщение: - случай произвольных многоугольников.

Смирнова И.М. (упрощенный стиль).

1. Объяснение на примерах: - конкретные треугольники.

2. Формулировка теорем: - в упрощенной форме.

3. Типовые задачи: - по шаблону. В таблице 1 представлен сравнительный анализ логики изложения.

Таблица 1

Автор учебник	Логика подачи материала	Характер доказательств	Практическая наглядность
Атанасян Л.С.	Последовательный переход от теории к задачам через следствия	Детализированный, с поэтапным объяснением	Акцент на вычислительные задания
Погорелов А.В.	Теоремы дополняются обратными утверждениями и неравенствами	Краткий, без избыточных пояснений	Ограниченное количество практических задач
Мерзляк А.Г.	Обучение строится от конкретных примеров к теоретическим выводам	Визуально понятные, с иллюстрациями	Примеры из реальных ситуаций
Александров А.Д.	Строгое следствие от аксиом к обобщающим концепциям	Теоретические, с высокой степенью абстракции	Минимум прикладных заданий
Смирнова И.М.	Упрощенный подход: от частных случаев к общим правилам	Облегченные для понимания	Стандартные учебные упражнения

Методические особенности изучения темы. Анализ учебников позволяет выявить ключевые методические подходы к изложению темы, которые влияют на ее усвоение школьниками. Рассмотрим подробнее особенности каждого учебника.

1. Учебник Атанасяна Л.С. и др.

Методическая направленность: традиционный учебник с системным подходом, сочетающий строгую логику изложения с практической направленность.

Структура подачи материала: Последовательное изложение – начинает с фундаментальной теоремы о взаимосвязи сторон и углов треугольника, затем переходит к неравенству треугольника; Визуальное выделение – все теоремы и следствия оформлены в рамках, ключевые формулировки графически акцентированы.

Особенности доказательств: Полнота изложения – каждое доказательство приводится поэтапно (например, доказательство через построение внешнего угла); Наглядность – обязательное использование иллюстративных чертежей, визуализация каждого шага доказательства.

Методический аппарат: Теоретическая часть – лаконичные и точные формулировки, обязательные доказательства всех утверждений; Практическая часть – разноуровневая система упражнений, акцент на развитие логического мышления.

Система упражнений: Типы задач – базовые (на прямое применение теорем), доказательные, прикладные (реальные геометрические задачи).

Недостатки: преобладание типовых упражнений, мало творческих и нестандартных задач.

Вывод: оптимальный вариант для общеобразовательных классов благодаря гармоничному сочетанию теории и практики [3].

2. Учебник Погорелова А.В.

Методическая направленность: концентрированный теоретико-аксиоматический подход с минимальной дидактической обработкой материала.

Структура подачи материала: Компактное изложение – теоремы представлены в предельно сжатой форме, доказательства даются в лаконичной, но полной формулировке; Логические взаимосвязи – четкая интеграция с ранее изученными темами, минимальное количество вспомогательных пояснений.

Особенности доказательств: Стиль изложения – краткие, но строгие логические обоснования (например, трёхшаговое доказательство неравенства треугольника); Методический подход – акцент на самостоятельный анализ и выводы, ограниченное число иллюстративных примеров.

Методический аппарат: Теоретическая часть – сжатые формулировки основных положений, полные, но минималистические доказательства; практическая составляющая – ограниченный набор упражнений, преимущественно теоретическая направленность.

Система упражнений: Характеристика заданий – базовые задачи на применение теорем, незначительное количество доказательных упражнений; Ограничения – практически отсутствуют прикладные задачи, минимум творческих заданий.

Недостатки: Дидактические ограничения – недостаточная доступность для слабоуспевающих учащихся, дефицит разъясняющих материалов; Практические аспекты – скудный набор задач различного уровня, отсутствие реальных практических примеров

Выводы: учебник наиболее эффективен для классов с углубленным изучением математики, также для работы с одаренными учениками, профильного обучения в старших классах [20].

3. Учебник Мерзляка А.Г. и др.

Методическая направленность: исследовательский подход с акцентом на наглядность и практическое применение знаний. Основной упор делается на индивидуальный метод познания через визуализацию и экспериментальную деятельность.

Структура подачи материала: Визуальное сопровождение – обилие иллюстраций, включая цветные графические материалы, использование методики "наводящих вопросов» перед изложением доказательств; Практическая ориентация – материал представлен в контексте реальных ситуаций, последовательность «от частного к общему».

Особенности доказательств: Стиль изложения – доказательства сопровождаются визуальными подсказками, использование исследовательского подхода через постановку проблемных вопросов; Методические приёмы – акцент на самостоятельное открытие свойств и закономерностей, допущение некоторых упрощений в строгости доказательств.

Методический аппарат: Теоретическая часть – подача через серию наглядных примеров, использование интерактивных элементов (в электронных версиях); Практическая составляющая – задачи сформулированы как мини-исследования, реальные кейсы из геодезии и архитектуры.

Система упражнений: Характеристика заданий – преобладают задачи на практическое применение, много исследовательских заданий (например, анализ изменения параметров фигур); Особенности – задачи с реальным контекстом, использование интерактивных форматов.

Недостатки: Теоретические аспекты – не всегда соблюдается математическая строгость, иногда недостаточно глубоко проработаны доказательства; Практические ограничения - требует дополнительного оборудования для интерактивных элементов, не всегда подходит для традиционных форм контроля знаний.

Выводы: данный учебник наиболее эффективен для классов с гуманитарным уклоном, учреждений с техническим оснащением, работы с учащимися визуального типа восприятия, развития исследовательских навыков [17].

4. Учебник Александрова А.Д. и др.

Методическая направленность: абстрактно-формальный подход, ориентированный на строгую математическую стройность и обобщённость изложения.

Структура подачи материала: Аксиоматическая основа – теоремы формулируются в максимально обобщенной форме, минимальная конкретизация для сохранения математической чистоты; Логическая организация – четкое следование от аксиом к сложным теоретическим построениям, отсутствие упрощений и методических адаптаций.

Особенности доказательств: Стиль изложения – абсолютно строгие, формализованные доказательства, использование сложного математического аппарата (например, алгебраических структур); Методическая сложность – высокий уровень абстракции, требует развитого математического мышления.

Методический аппарат: Теоретическая часть – деятельные, но сложные для восприятия доказательства, минимум поясняющих примеров; Практическая составляющая – задачи исключительно теоретического характера, преобладание доказательных упражнений высокой сложности.

Система упражнений: Характеристика заданий – доказательства теорем и их следствий, задачи на применение абстрактных концепций; Особенности – отсутствие прикладных и наглядных задач, упражнения требуют глубокого понимания теории.

Недостатки: Дидактические ограничения – практически недоступен для учащихся без специальной подготовки; Практические аспекты – не развивает прикладные навыки, не адаптирован для стандартной школьной программы.

Выводы: подходит для специальных математических школ, для работы с одаренными учащимися, углубленного изучения высшей математики [1].

5. Учебник Смирновой И.М., Смирнова В.А.

Методическая направленность: упрощенный, доступный стиль с элементами проблемного обучения.

Особенности: Доступность – объяснения простым языком, с аналогиями; разбираются типичные ошибки учеников. Проблемные задания – есть задачи с «ловушками» (например, на ложные следствия из теорем).

Методика: много графических иллюстраций; упор на визуализацию

Недостатки: не хватает сложных задач.

Вывод: хорош для классов со средним уровнем подготовки [27].

Общие методические выводы:

- Для стандартной программы оптимален Атанасян (баланс теории и практики);

- Для углубленного изучения – Погорелов или Александров;

- Для наглядности и интерактива – Мерзляк;

- Для слабых классов – Смирнова.

1.2. Системы динамической математики Живая математика и Математический конструктор как средства создания анимационных чертежей для поддержки курса геометрии в 7 классе

Современные педагогические исследования [7] указывают на ключевую роль наглядных методов в преподавании геометрических понятий [25]. Эта проблема особенно актуальна для семиклассников, впервые приступающих к систематическому освоению геометрии. Как отмечает Далингер В. А. (2020), «Использование интерактивных чертежей помогает преодолеть абстрактность геометрических закономерностей, преобразуя их в зрительные образы» [7].

К числу эффективных инструментов визуализации относятся динамические математические среды – специализированное программное обеспечение для создания и анализа интерактивных моделей. В российской образовательной практике наибольшее распространение получили два продукта:

1. «Живая математика» разработка института научных технологий.
2. «Математический конструктор» разработка нашей отечественной фирмы «1С».

Далее проанализируем функциональные особенности этих программных платформ.

Конструктивные возможности.

1. «Живая математика».

Инструменты построения: Создание базовых геометрических объектов (точки, прямые, отрезки, окружности) с помощью интуитивного интерфейса [12]; Автоматическое построение серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан и высот треугольника [7]; Динамическое изменение параметров фигур (например, перемещение вершин треугольника с сохранением его свойств) [19].

2. «Математический конструктор».

Расширенные инструменты: Построение сложных геометрических конструкций (например, вписанные и описанные окружности) с помощью шаблонов [16]; Использование макросов для автоматизации построений (например, создание равностороннего треугольника по заданной стороне); Поддержка многокомпонентных чертежей (например, несколько треугольников с общими элементами) [15].

Вычислительные возможности.

1. «Живая математика»

Измерения и вычисления: Автоматический расчет длин отрезков, величин углов, площадей фигур [12]; Отображение зависимостей между параметрами (например, изменение углов при варьировании сторон треугольника) [7]; Проверка условий (например, проверка выполнения неравенства треугольника для заданных длин) [19].

2. «Математический конструктор»

Расширенные вычисления: Работа с формулами и переменными (например, вычисление периметра и площади по заданным параметрам) [16]; Статическая обработка данных (например, анализ зависимости углов от сторон в серии треугольников); Экспорт данных таблицы для дальнейшего анализа [2].

Анимационные возможности.

1. «Живая математика».

Базовая анимация: Создание движущихся объектов (например, точка, скользящая по стороне треугольника) [11]; Запись траектории (например, построение геометрического места точек) [7]; Проигрывание сценариев (например, демонстрация преобразования треугольника при изменении углов) [19].

2. «Математический конструктор».

Сложная анимация: Многоуровневые сценарии (например, последовательное построение и преобразование фигур) [16]; Интерактивные анимации с управлением параметрами (например, изменение скорости движения точки) [15]; Экспорт анимаций в видеоформат для использования в презентациях [16].

Применение в курсе геометрии 7 класса.

Примеры использования конструктивных возможностей: Построение и исследование треугольников с заданными свойствами (например, равнобедренный треугольник с изменяемым основанием); Демонстрация признаков равенства треугольников через наложение фигур [14].

Примеры использования вычислительных возможностей: Проверка теоремы о сумме углов треугольника для различных конфигураций [7]; Исследование зависимости между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике [19].

Примеры использования анимационных возможностей: Визуализация доказательства теоремы о неравенстве треугольника [16]; Создание интерактивных задач на построение (например, построение треугольника по трем элементам) [26]. В таблице 2 проведен сравнительный анализ динамических сред «Живая математика» и «Математический конструктор».

Таблица 2

Критерий	**«Живая математика»**	**«Математический конструктор»**
Интерфейс и доступность	Простой, интуитивный интерфейс, подходит для начинающих	Более сложный интерфейс, требует обучения
Конструктивные возможности	Базовые инструменты построения (точки, линии, окружности); динамическое изменение объектов	Расширенные инструменты (макросы, шаблоны); поддержка сложных построений
Вычислительные функции	Автоматический расчет длин, углов, площадей; проверка геометрических условий	Работа с формулами и переменными; статический анализ данных
Анимационные возможности	Простая анимация движущихся объектов; запись траекторий	Сложные многоуровневые сценарии; экспорт анимаций в видео
Готовые материалы	Ограниченное количество шаблонов	Обширная библиотека готовых моделей и задач
Интеграция с учебным процессом	Подходит для демонстраций и простых исследований	Позволяет создавать полноценные интерактивные уроки
Стоимость и доступность	Бесплатные аналоги	Коммерческая лицензия

	(GeoGebra)	
Целевая аудитория	Учащиеся 7-9 классов, начинающие учителя	Старшеклассники, преподаватели, углубленное изучение

Выводы: «Живая математика» идеально подходит для быстрого создания наглядных чертежей и простых анимаций, особенно при изучении базовых тем (треугольники, параллельные прямые); «Математический конструктор» предлагает более мощные инструменты для сложных построений и вычислений, что полезно для углублённого изучения материала; Комбинирование обеих систем позволяет максимально эффективно поддерживать курс геометрии 7 класса, обеспечивая как наглядность, так и глубину изучения материала.

Выводы по главе 1

Анализ учебников выявил разные подходы к изучению темы: от строгих (Атанасян) до интерактивных (Мерзляк). Динамические программы («Живая математика», «Математический конструктор») доказали свою эффективность для визуализации геометрических зависимостей, обладая конструктивными возможностями, вычислительными функциями и анимационными инструментами.

Традиционное обучение ограничено статичными чертежами, что затрудняет понимание динамики геометрических свойств.

Перспективными направлениями являются интеграция цифровых инструментов в обучении, что упрощает усвоение материала, развивает пространственное мышление, а также позволяет адаптировать обучение для разных уровней.

Комплексный анализ подтвердил необходимость и эффективность использования анимационных чертежей.

Глава 2. ПРИМЕНЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА В 7 КЛАССЕ

В курсовой работе (см. [28]) мы приводим мнение целого ряда специалистов по теории и методике обучения математике, работающих в области информатизации школьного математического образования (В.А. Булычёв, В.Н. Дубровский, А.И. Сгибнев, М.В. Шабанова и др.), о том, какие именно теоремы и задачи школьного курса геометрии следует рассматривать с точки зрения целесообразности их визуального сопровождения анимационными чертежами. Считается, что если динамический чертёж просто копирует статический чертёж из задачника или школьного учебника и в процессе доказательства теоремы или решения задачи его анимационные возможности никак не используются, то нет никакой необходимости тратить время как на создание такого чертежа, так и на его применение в учебном процессе.

Учитывая это обстоятельство, мы отдавали предпочтение тем теоремам и задачам, которые в той или иной форме допускали эффективную поддержку анимационными чертежами. Кроме этого, для некоторых задач, визуальная составляющая решения которых совершенно не требовала динамичности, мы иногда практиковали внесение таких изменений в их формулировки, после которых анимационный чертёж оказывался весьма оправданным. Доказательство некоторых утверждений (теорем или задач на доказательство) мы иногда предваряли компьютерными экспериментами с использованием анимационных чертежей, что позволяло обучающимся самостоятельно формулировать требуемое утверждение.

В параграфах второй главы мы рассмотрим некоторые разработанные нами для методической копилки анимационные чертежи, используя при этом исследовательский подход в стиле экспериментальной математики, который разработан О.Л. Безумовой, О.Н. Троицкой, М.В. Шабановой, А.В.

Ястребовым и др. в монографии «Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение» [2]. Одна из особенностей систем динамической математики заключается в том, что успешность их освоения напрямую связана с успешностью освоения курса элементарной геометрии. Без знания элементарной геометрии практически невозможно научиться создавать качественные динамические чертежи в любой системе динамической математики. В определённом смысле верно и обратное утверждение. В современных условиях информатизации образования умение создавать динамические чертежи способствует эффективному освоению курса элементарной геометрии.

По этой причине в практике нашей работы мы старались наиболее способных обучающихся привлекать к процессу создания анимационных чертежей. Поскольку шестиклассники и семиклассники ещё не очень озабочены предстоящими в 9 классе государственными экзаменами, то нам удавалось охватить дополнительными занятиями (кружок по динамической математике) 12 учеников 6-х и 7-х классов. Практически все члены кружка с большим удовольствием принимали участие в разработке динамических чертежей, которые им предлагал учитель. В основе приёмов и методов, позволяющих обучать не только созданию анимационных чертежей, но и применению этих чертежей на уроках геометрии, лежат положения, которым удовлетворяют практически все известные системы динамической математики. В первую очередь это наличие следующих возможностей:

- свободно перемещать с помощью компьютерной мышки любые независимые объекты чертежа по всему рабочему полю, что позволяет создавать эффект ручной анимации;

- изменять с любым наперёд заданным шагом значения выведенных на экран числовых параметров (а вместе с ними и всех, зависящих от них элементов чертежа), используя для этого клавиши «+» и «-», что позволяет создавать эффект параметрической анимации;

- задавать с помощью кнопок управляемое перемещение системы объектов, компонентами которой являются как геометрические фигуры, так и объекты иной природы (тексты, формулы, числовые выражения и т.п.), что позволяет создавать эффект кнопочной анимации;

- использовать готовые инструменты для построения геометрических объектов, которые зависят от положения только одной точки на плоскости, что позволяет создавать анимационные чертежи, удовлетворяющие всем требованиям к таким чертежам (аккуратность, точность и т.п.);

- создавать собственные инструменты пользователя, способствующие эффективному конструированию анимационных чертежей, одновременно с этим дающие возможность пользователю «окунуться» в роль непосредственного разработчика программного средства;

- использовать готовые инструменты на применение конкретных преобразований плоскости для построения требуемых геометрических объектов, что позволяет создавать анимационные чертежи, некоторые элементы которых инвариантны относительно этих преобразований.

2.1. Задачи об углах и сторонах треугольника

В данном параграфе рассмотрим несколько теорем и задач об углах и сторонах треугольника. Сопроводим их краткими комментариями по разработке соответствующих анимационных чертежей, сформулируем методические рекомендации по применению этих чертежей на уроках геометрии в 7 классе. В таблице 3 приведён их список.

Таблица 3. Избранные теоремы и задачи об углах и сторонах треугольника

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункт в учебниках [1 или 2], номер задачи**	**Наличие статического чертежа в учебниках**
Т е о р е м а. Сумма углов треугольника равна 180º	П. 30 [1]. Теорема о сумме углов треугольника	Рис. 124

З а д а ч а. В треугольнике ABC дан угол при вершине B. Из вершины A проведена высота AD. 1. Найдите ∠BAD, если ∠ABC=70º.	[2, 20]. Сумма углов треугольника,	Нет рисунка
З а д а ч а на нахождение ошибки в геометрическом рассуждении	Задача из арсенала Председателя Правительства РФ Мишустина М.В.	Рисунок был сделан фломастером на листе бумаги при встрече с учениками
З а д а ч а. Даны равносторонний треугольник ABC и квадрат DEFG, у которого вершина D лежит на стороне AB, а вершины E, F и G находятся внутри треугольника, ∠ BDE=70°. Кроме этого дан второй квадрат KLMN, вершина К которого лежит на стороне EF первого квадрата, а вершины L и M - на стороне BC треугольника. Найдите ∠FKN, если известно, что он острый.	Олимпиадная задача	Нет рисунка

Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей для каждого из указанных в таблице 3 утверждений.

Теорема о сумме углов треугольника. Теорема, в которой доказывается утверждение о том, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180º, является важнейшей теоремой геометрии. Одновременно с этим это предложение – одно из утверждений, которое демонстрирует обучающимся сам процесс доказательства. Поэтому учителю необходимо так провести урок, чтобы он сохранился в памяти ученика как урок самостоятельного открытия «нового для него» геометрического факта. Помочь в этом может предварительная совместно с некоторыми учениками разработка к этому уроку двух анимационных чертежей.

Первый чертёж предназначен для проведения простейшего эксперимента, т.е. небольшого числа испытаний, по результатам которых класс в целом и каждый ученик в отдельности могут осознанно сформулировать содержание того свойства, которым обладает сумма углов любого треугольника. До тех пор, пока это свойство не будет доказано для произвольного треугольника, это свойство рекомендуют называть не теорема, а предположение или *гипотеза*. Для надёжности результаты всех испытаний следует занести в таблицу.

Второй чертёж предназначен для визуальной поддержки доказательства (обоснования) той гипотезы, которая будет сформулирована учениками по итогам проведения эксперимента, т.е. для доказательства теоремы. Основное отличие второго чертежа от первого заключается в том, что в произвольно изображённом треугольнике мы уже не будем измерять его углы при вершинах. Вместо этого мы выполним дополнительное построение, чтобы воспользоваться лишь аксиомами и ранее доказанными теоремами.

Перейдём к процедуре построения первого чертежа в среде Живая математика. Одновременно с созданием динамического чертежа мы обсудим возможные действия учащихся при проведении ими экспериментальных исследований.

1. Построим изображение треугольника ABC. Стороны треугольника изобразим отрезками со стилем линий «средняя». Вершины треугольника изобразим точками, стиль точек «большая». Чтобы визуально было видно приглашение к проведению эксперимента, связанного с ручной анимацией, каждую точку окрасим жёлтым цветом, что означает перемещение любой из них с помощью компьютерной мыши.

2. Установим с помощью маркера при вершине A треугольника ABC одну дужку, при вершине B – две дужки, при вершине C – три дужки. Используя инструмент «Угол» в меню команд «Измерения», измерим величину каждого из трёх углов треугольника. Для удобства нахождения суммы углов треугольника округлим до целого величину каждого угла. Для этого надо зайти в свойства величины измеренного угла и выбрать опцию «Целое». Для наглядности поместим измеренные величины углов внутри треугольника ABC в непосредственной близости к соответствующей вершине. Для этого изобразим биссектрисы всех углов треугольника,

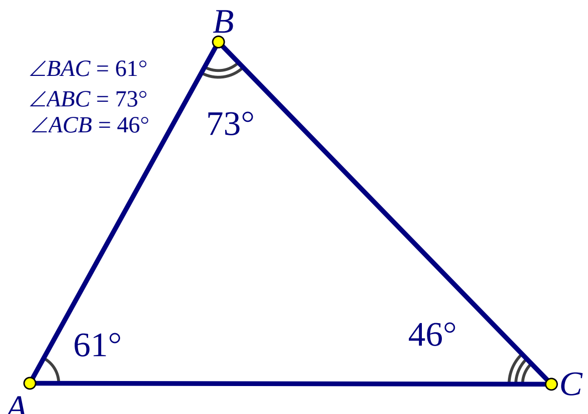


Рисунок 1

поместим на каждой из них точку, к каждой точке прикрепим измеренную величину угла (подсвечивается точка, затем величина угла, заходим в меню «Правка», нажимаем на клавишу «Shift», становится активной команда «Привязать текст к точке»). После этого спрячем всё лишнее. На экране появится изображение, которое представлено на рисунке 1.

3. Полученного динамического чертежа уже вполне достаточно для проведения компьютерного эксперимента, связанного с установлением

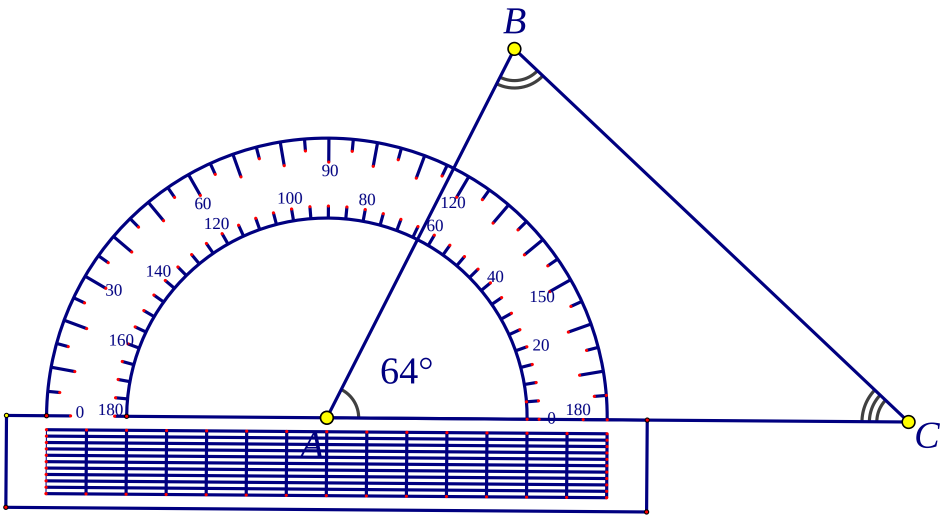
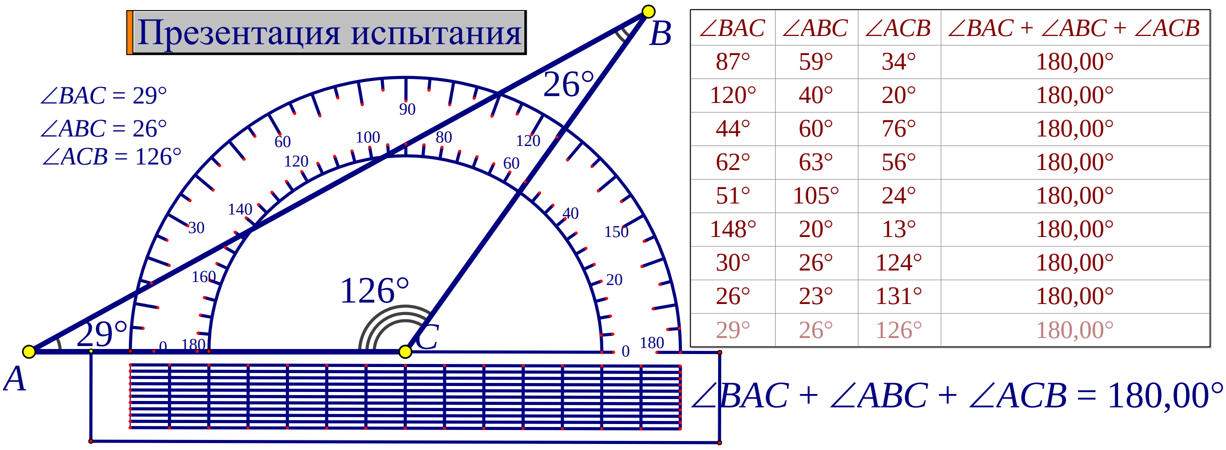


Рисунок 2.

зависимости между углами треугольника. Устный подсчёт суммы углов позволяет заметить закономерность, которой обладает величина, являющаяся суммой этих углов. Однако для приближения электронной версии эксперимента к его бумажному аналогу (выполнение которого допускает дублирование в школьных тетрадях), можно заранее с учениками, участниками кружка по динамической математике, подготовить собственный инструмент «Транспортир» (рис. 2). Перемещать и поворачивать этот инструмент можно с помощью компьютерной мыши. Для удобства можно создать кнопки, позволяющие перемещать транспортир от одной вершины треугольника к другой по факту активизации кнопки.

4. Перемещая транспортир от одной вершины треугольника к другой, обучающиеся находят приближённые значения угловых величин. Уточнить эти значения можно с использованием меню Измерения среды Живая математика. Для первых двух-трёх испытаний классу можно предложить самостоятельно найти сумму этих углов. В дальнейшем такое суммирование можно поручить компьютеру. Для этого следует обратиться в меню



∠BAC	∠ABC	∠ACB	∠BAC + ∠ABC + ∠ACB
87°	59°	34°	180,00°
120°	40°	20°	180,00°
44°	60°	76°	180,00°
62°	63°	56°	180,00°
51°	105°	24°	180,00°
148°	20°	13°	180,00°
30°	26°	124°	180,00°
26°	23°	131°	180,00°
29°	26°	126°	180,00°

Рисунок 3.

«Вычисления», активировать команду «Вычислить…», на экране появится графический калькулятор. С его помощью найти нужную сумму всех трёх углов (рис. 3). Затем, подсветив по очереди все три угла и сумму этих углов, используя команду «Заполнять таблицу» (после ее активации на экране появится таблица из четырёх столбцов), начать вносить данные, меняя положения вершин треугольника ABC. После серии испытаний ученики должны озвучить гипотезу о сумме углов треугольника.

Опишем теперь конструирование анимационного чертежа, который учитель может применить при обосновании гипотезы, т.е. для доказательства теоремы. Перед этим учитель должен пояснить, что с помощью эксперимента мы проверили нашу гипотезу лишь только для небольшого числа треугольников (так на рис. 3 зафиксировано только 9 испытаний). Нет никаких гарантий, что наша гипотеза будет выполняться и для всех остальных треугольников.

Приступим к построению анимационного чертежа для визуальной поддержки доказательства теоремы о сумме углов треугольника.

1. Построим на рабочем поле среды Живая математика произвольный треугольник ABC, для этого достаточно построить три произвольные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и соединить каждые две из них отрезками. Используя инструмент Маркер (седьмая кнопка сверху на вертикальной панели инструментов), изобразим одну дужку для угла при вершине A (в ее свойствах рекомендуем выбрать опцию «Прозрачно»), две дужки при вершине C, и, наконец, три дужки – при вершине B. Для удобства в работе с углами, как и в учебнике, обозначим одну дужку цифрой 1 (подсветим дужку мышью, нажмём правую клавишу, выберем команду Переименовать угловую метку…, введём цифру 1 для дужки при вершине A, цифру 2 – при вершина B, и цифру 3 – при вершине C) (Рис. 4). Завершим пункт кнопкой «Скрыть/Показать ABC» (Рис. 7).

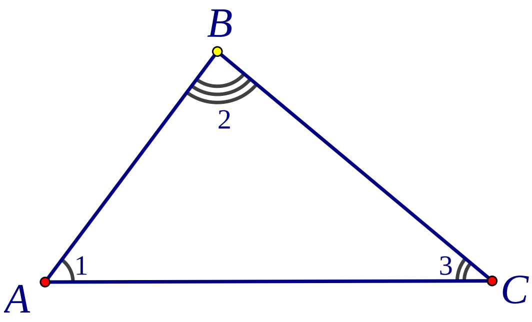


Рисунок 4

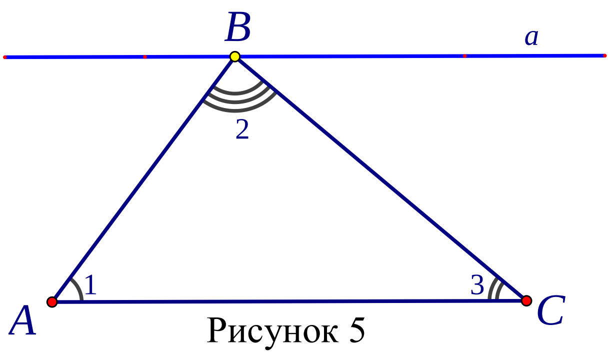


Рисунок 5

2. Далее, проведём через точку B прямую, параллельную стороне AC. Для этого подсветим отрезок AC, вершину B, зайдём в горизонтальное меню, кнопка Построения, выбираем команду Параллельная прямая. На экране появиться требуемая прямая. Чтобы ограничить ее, выберем на этой прямой две точки, сделаем их Очень маленькими, одну слева от B, вторую, справа от B, скроем прямую и соединим точки отрезком, который обозначим буквой *a* (Рис. 5). Именно этот отрезок и будет на нашем чертеже выполнять роль всей прямой, проходящей через B и параллельной AC. Создадим кнопку «Скрыть/Показать a» (Рис. 7).

3. Как известно, точка B разбивает прямую a на два луча. Поместим на

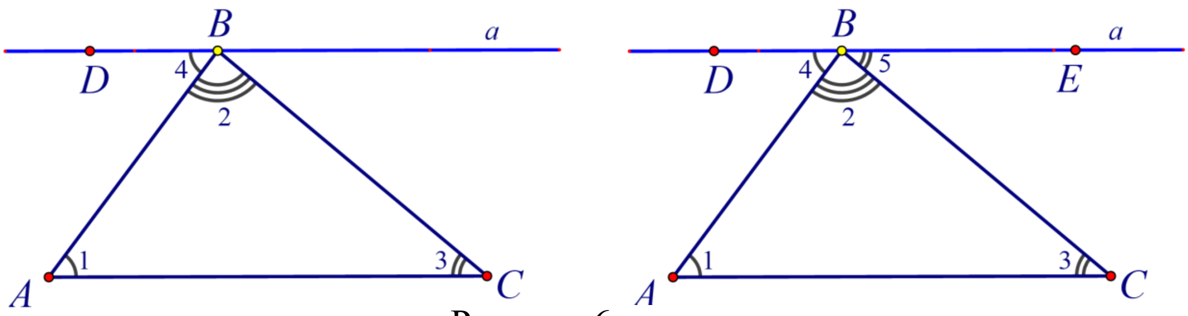


Рисунок 6

один из лучей точку D, например тот, что направлен влево от B, на второй луч поместим точку E. Создадим кнопки «Скрыть/Показать D» и «Скрыть/Показать E» (Рис. 7). Поскольку углы BAC и ABD – накрест лежащие при параллельных прямых AC и a и секущей AB, то они равны. Создадим маркером для угла ABD одну дужку, отметим ее цифрой 4 (Рис. 6, левый слайд). Аналогичное построение выполним и для пары углов ACB и CBE. Создадим маркером для угла CBE две дужки, отметим их цифрой 5 (Рис. 6, правый слайд).

4. Чтобы учителю не проводить на уроке приведённые выше построения,

Рисунок 7

можно объединить шесть созданных выше построений единой презентацией. Для этого все кнопки подсвечиваются в том порядке, как они расположены на рисунке 7, слева направо, заходим в горизонтальное меню Правки, опять выбираем Кнопки, в открывшемся окне выбираем опцию Действие, в свойствах которой выбираем опцию Последовательно, с паузой между этапами, например, в 3 секунды. Переименовываем ее как «Презентация чертежа для теоремы». Таким образом, анимационный чертёж для обоснования гипотезы о том, что сумма углов любого треугольника равна развёрнутому углу, полностью готов. После проведения доказательства гипотеза получает полное право получить статус теоремы.

Задача на нахождение угла треугольника. Опишем процедуру конструирования анимационного чертежа для следующей задачи (вторая строка таблицы 3)

З а д а ч а. *В треугольнике ABC дан угол при вершине B. Из вершины A проведена высота AD. Найдите $\angle$BAD, если $\angle ABC=70^o$.*

Чтобы создать анимационный чертёж для визуальной поддержки решения этой задачи, выполним следующие построения, которые мы сопроводим комментариями по использованию этого анимационного чертежа в учебном процессе:

1. Построим произвольный отрезок AB (рисунок 8, (а)).

2. Отметим точку B как центр поворота (меню Преобразования).

3. Повернём внутреннюю область отрезка AB (для этого надо подсветить его и зайти в пеню Преобразования) вокруг точки B на заданный в соответствии с пунктом 1 условия задачи угол. Зададим для образа отрезка AB стиль линии «Пунктирный», обозначим его через h (рисунок 8(а)).

4. Поместим на отрезок h произвольную точку C, окрасим эту точку жёлтым цветом, что означает возможность перемещать мышью эту точку по пунктирному отрезку h.

5. Соединим точки A, B и C отрезками, получим треугольник ABC, который окрасим светло-зелёным цветом. Если бы точка C не могла перемещаться по отрезку h, то анимационные возможности треугольника ABC исчерпывались бы только подобными треугольниками (т.е. масштабом ΔABC) и поворотами вокруг A или B, что понятно, не влияет на величины искомых углов. Перемещение C по отрезку h позволяет разнообразить форму ABC, превращая его при необходимости из остроугольного в тупоугольный или прямоугольный.

6. Проведём через A перпендикуляр к h, найдём точку пересечения D этого перпендикуляра с отрезком h, изобразим перпендикуляр AD. В треугольнике ABD для каждого угла с помощью маркера построим дужки: одну для угла B, две для угла D и три для угла с вершиной в точку A.

7. Созданный чертёж позволит использовать его для всех видов треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Если точки B и C будут располагаться по разные стороны от точки D, то мы получим случай, когда

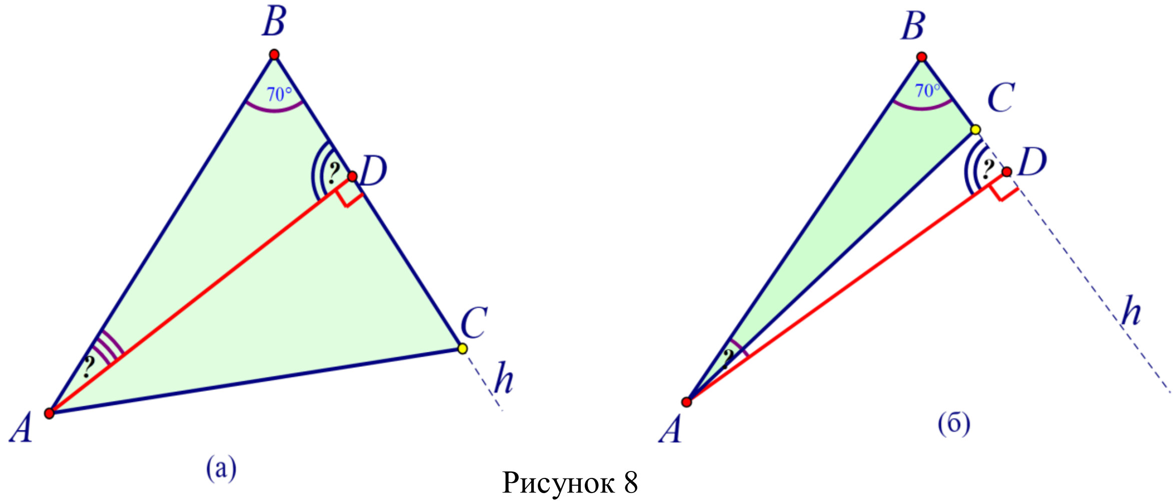


Рисунок 8

ABC – остроугольный (рис. 8(а)). Если же B и C будут по одну сторону относительно D, то ABC – тупоугольный (рис. 8(б)). Внимание обучающихся необходимо обратить на то, что ответ не зависит от вида треугольника ABC.

Задача на нахождение ошибки. Учителя практически не используют подобные задания. Однако умение находить ошибки в рассуждениях является весьма ценным и значимым для любого человека.

З а д а ч а. *Дан отрезок AB и два отрезка BC и AD одинаковой длины, лежащие по одну сторону относительно прямой AB. Пусть* $\angle ABC = 90°$, *а угол* $\angle BAD$ *на несколько градусов больше прямого угла. Найдите ошибку в следующих рассуждениях, из которых вытекает, что* $\angle ABC = \angle BAD$:

1. Обозначим длины данных отрезков BC и AD через *a*. Соединим точки C и D отрезком CD (рис. 9). Если отрезки CD и AB окажутся параллельными, то CD ⊥ BC. В противном случае достаточно провести из точки A перпендикуляр к прямой CD, длина которого окажется равной длине наклонного отрезка AD к этой же прямой CD. Что невозможно.

2. Пусть E и F – середины отрезков AB и CD. Построим серединные перпендикуляры к AB и CD. Т.к. они не параллельны между собой, то у них есть общая точка, обозначим ее O.

3. OC = OD, т.к. O принадлежит серединному перпендикуляру к CD.

4. Аналогично, OA = OB, отсюда ∠OAB=∠OBA.

5. △OAD = △OBC по трём сторонам (OA = OB, OC = OD, AD = BC).

6. Из равенства △OAD = △OBC следует, что ∠OBC = ∠OAD.

7. Из пунктов 4 и 6 следует, что

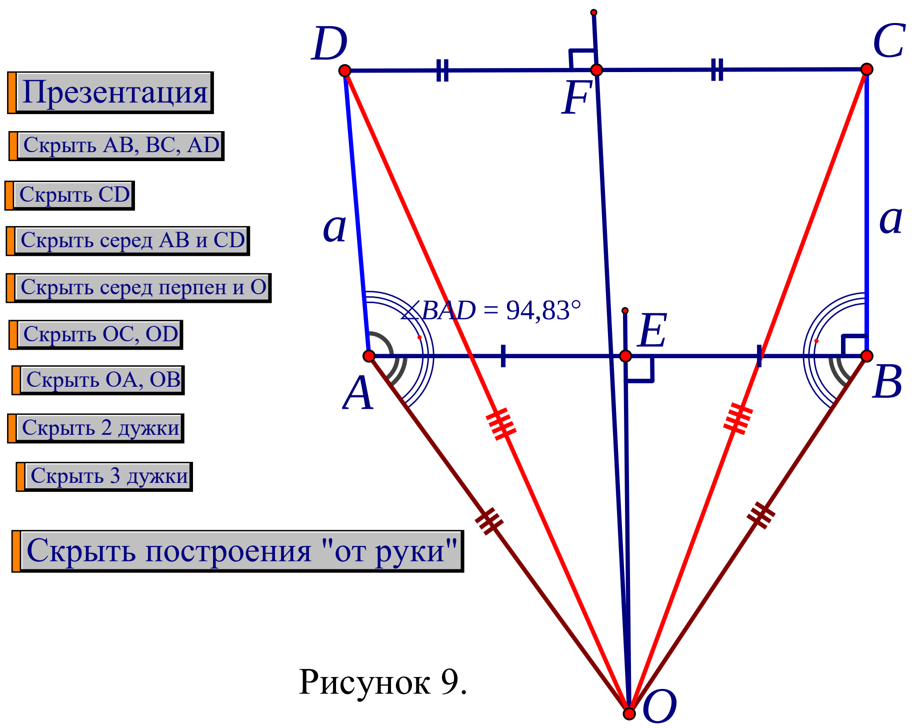


Рисунок 9.

∠BAD = ∠OAD - ∠OAB = ∠OBC - ∠OBA = ∠ABC.

В каком месте рассуждений допущена ошибка?

Приведённые на рисунке 9 построения выполнялись в среде Живая математика, но при этом использовались не все необходимые для этого инструменты, в частности, оба серединных перпендикуляра строились, что называется «от руки». Если провести все построения аккуратно, т.е. с использованием соответствующих инструментов среды Живая математика, то точка O при угле ∠BAD = 94,83° окажется на гораздо более дальнем расстоянии от E, чем это представлено на рисунке 9. Несмотря на это, треугольники AOD и BOC окажутся всё равно равными. Единственное, что их будет отличать, это направление обхода вершин. Так, например, если вершины O, B и C правого треугольника OBC расположены против движения часовой стрелки, т.е. положительно ориентируют плоскость, то вершины O, A и D левого треугольника OAD (см. рисунок 9) ориентируют плоскость, содержащую данные отрезки, отрицательно. На самом деле ориентация треугольников должна быть одинаковой.

В этом случае ∠BAD уже не будет равен разности ∠OAD - ∠OAB, как это прописано в пункте 7 решения. Верным окажется равенство ∠BAD = 360° - ∠OAD - ∠OAB, но оно не равно ∠OBC - ∠OBA (рис. 10). Таким образом, место, где допущена ошибка при проведении доказательства, является пункт 7.

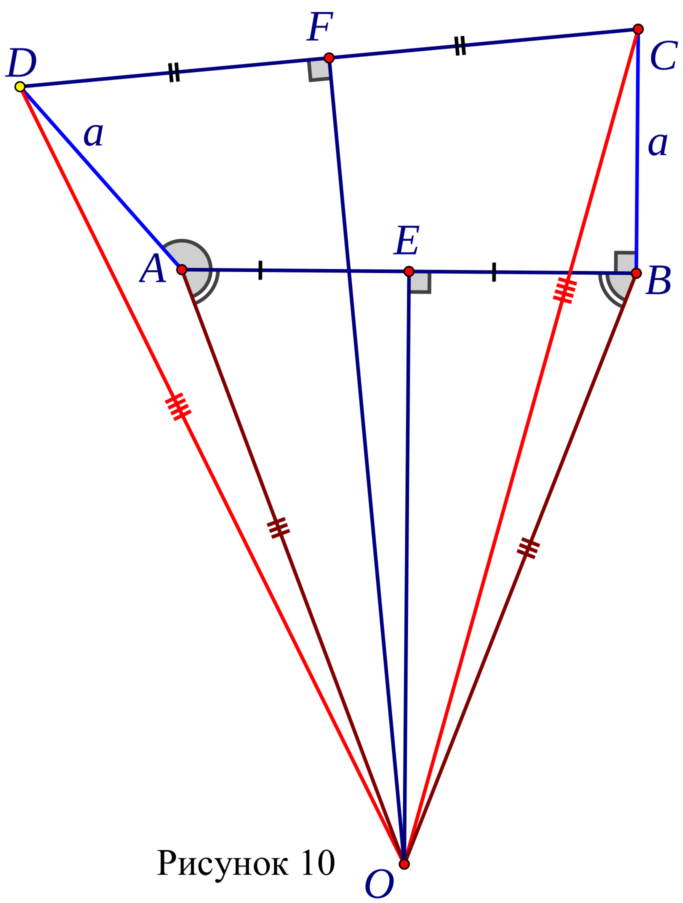


Рисунок 10

Рассмотренное задание на нахождение ошибки в рассуждениях, связанных с геометрическими построениями, является ещё одним весомым аргументом того, что системы динамической математики крайне необходимы при обучении решению геометрических задач, причём не только на вычисления и построения, но и на опровержение ошибочных утверждений.

Олимпиадная задача. В завершение параграфа рассмотрим ещё одну задачу, которая предлагалась ученикам 7 класса на олимпиаде в Албании.

Задача. *Даны равносторонний треугольник ABC и квадрат DEFG, у которого вершина D лежит на стороне AB, а вершины E, F и G находятся внутри треугольника,* $\angle BDE=70°$. *Кроме этого дан второй квадрат KLMN, вершина K которого лежит на стороне EF первого квадрата, а вершины L и M - на стороне BC треугольника. Найдите* $\angle FKN$, *если известно, что он острый.*

Несмотря на длинную формулировку и большое количество геометрических объектов, фигурирующих в условии задачи, ее решение вполне по силам и среднему ученику. Особенно, если у него будет возможность построить анимационный чертёж. Во всяком случае, ученикам нашей группы динамической поддержки это удалось сделать без особых проблем. Опишем, как это происходило (с помощью учителя):

1. Используя инструмент пользователя «Треугольник», был построен правильный треугольник ABC (рис. 11). По размерам его следует сделать достаточно большим, т.к. внутри него должны находиться два подвижных квадрата. Отметим маркером одну дужку при каждой вершине треугольника.

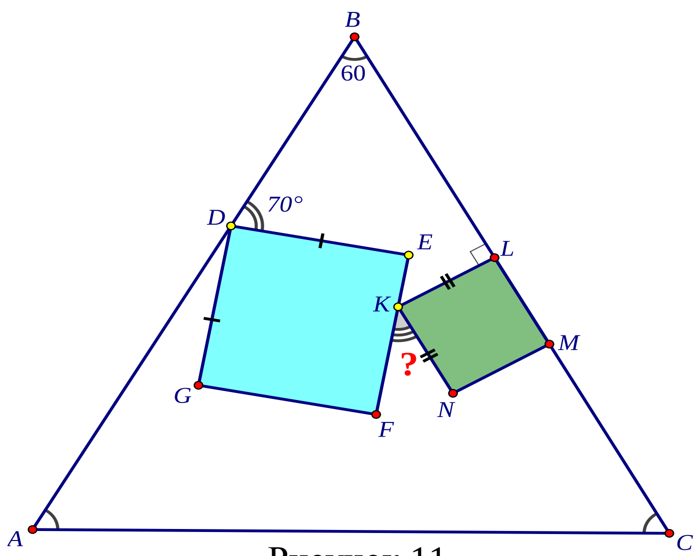


Рисунок 11.

Выпустим из вершины B биссектрису, поместим на нее точку и «привяжем» к точке текст «60º» (биссектрису и точку спрячем).

2. На стороне AB выбрана произвольная точка D, окрашена жёлтым, что означает ее анимационную подвижность в пределах отрезка AB. После этого D отмечается как центр поворота (меню команд «Преобразования»). Далее подсвечивается вершина B треугольника ABC и находится ее образ B′ при повороте вокруг D на отрицательный угол -70º, т.е. по часовой стрелке (используется команда «Повернуть» из меню «Преобразования»). После этого строится луч DB′, находится точка B′′ пересечения этого луча со стороной BC. Луч и точка B′ скрываются, строится отрезок DB′′.

3. На отрезке DB′′ выбираем произвольную точку E (окрасим ее жёлтым), скрываем DB′′ вместе с точкой B′′, строим отрезок DE. На отрезке DE как на стороне строим квадрат DEFG, так, чтобы B и F лежали по разные стороны относительно DE. Окрасим квадрат синим цветом. Отметим маркером в две дужки угол BDE. Выпустим из D биссектрису, поместим на нее точку и «привяжем» к точке текст «70º».

4. Осталось построить второй квадрат. Для этого на стороне EF первого квадрата построим произвольную точку K (опять окрасим жёлтым), проведём перпендикуляр KL к стороне BC треугольника, построим отрезок KL, на этом отрезке как на стороне строим квадрат KLMN. Окрашиваем его зелёным цветом, отмечаем маркером прямой угол BLK, тремя дужками искомый угол FKN.

5. Осталось выполнить дополнительные построения, которые обязательно необходимо спрятать кнопкой «скрыть/показать». Но чтобы их

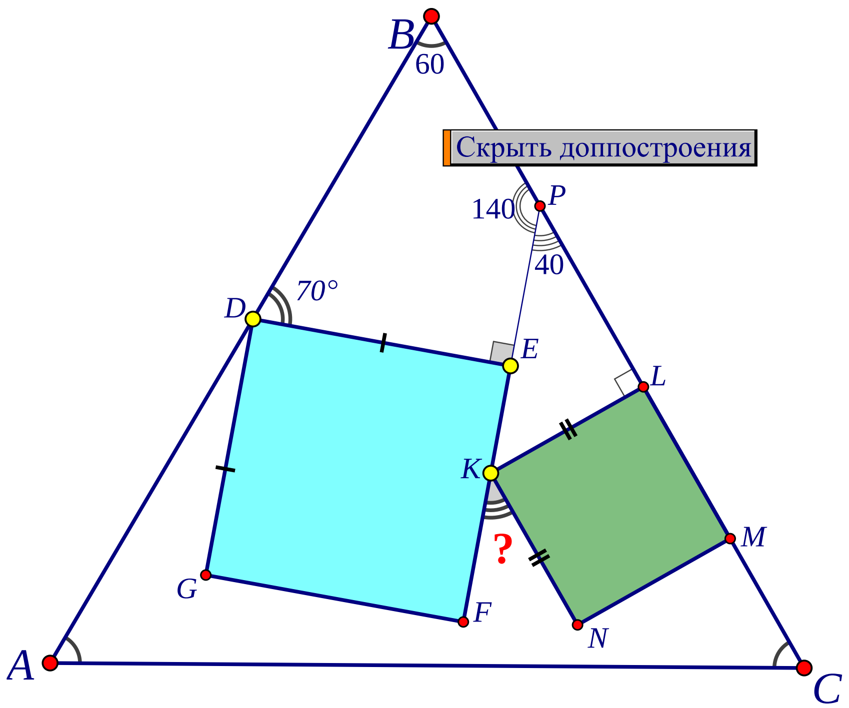


Рисунок 12.

выполнить, нужно найти оптимальный вариант решения задачи. Учитель совместно со своими помощниками приходят к выводу, что пятиугольник DBLKE следует разбить лучом FE на четырёхугольник и треугольник. Строится луч FE, находится его точка пересечения с BC, обозначим ее буквой P, строим отрезок PE (рис. 12), прячем луч.

6. Теперь решение становиться достаточно очевидным: в четырёхугольнике BDEP находим угол при вершине P, затем смежный с ним угол KPL, который и будет равен искомому углу FKN, как соответственный при параллельных прямых BC и KN и секущей KP.

2.2. Задачи на неравенство треугольника, сравнение величин сторон и углов

Изучение неравенства треугольника в 7 классе требует наглядного представления, чтобы учащиеся могли: понять, почему сумма любых двух сторон треугольника должна быть больше третьей стороны; визуализировать последствия нарушения этого правила; закрепить теоретическое знание через динамическую демонстрацию. В данном параграфе рассмотрим теорему и задачу, связанные с неравенством треугольника, а также методические рекомендации по использованию анимационных чертежей для их изучения. Анимационные чертежи помогут наглядно продемонстрировать условия, при которых три отрезка могут образовать треугольник и визуализировать доказательства теорем.

Таблица 4. Избранные теорема и задача о неравенстве треугольника

Формулировка теоремы, условия задачи, определение понятия	**Пункт в учебниках [1 или 2], номер задачи**	**Наличие статического чертежа в учебниках**
Теорема. В любом треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны	П.34 [1]. Неравенство треугольника	Рис. 134
Задача. Даны три отрезка a, b, c. При каких условиях они могут быть сторонами треугольника?	[2, А. Погорелов]. Условия существования треугольника.	Нет рисунка
Следствие. Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: AC<AB+CB, AC<AB+BC, BC<BA+AC	П.34 [1]. Неравенство треугольника	Нет рисунка

Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей на примере теоремы и задачи приведенных в таблице 4.

Теорема о неравенстве треугольника. Неравенство треугольника является одним из фундаментальных понятий геометрии, которое утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны. Для эффективного изучения это темы рекомендуем использовать анимационные чертежи, которые помогут ученикам не только понять формулировку данной теоремы, но и самостоятельно прийти к ее доказательству.

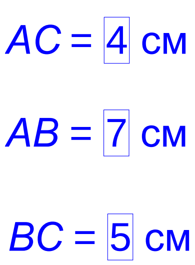


Рисунок 13

Ниже опишем построения двух анимационных чертежей, которые можно разработать для проведения урока. Первый чертеж нам будет нужен для экспериментальной проверки гипотезы, а второй чертеж для визуализации доказательства этой теоремы. Приступим к построению первого чертежа.

1. Для того чтобы построить треугольник изначально нужно задать параметры его сторон, нажимаем на пункт меню «Вычислить», выбираем «Новый параметр» задаем длины трех сторон треугольника, после того как параметры сторон заданы на рабочем поле среды с помощью инструмента «Точка» произвольно в любом удобном месте ставим точку А, затем с нужно построить три заданные стороны треугольника нажимаем на пункт меню «Построения» и выбираем окружность по центру и радиусу, соединяем все точки с помощью инструмента «Отрезок». Скроем окружности и отметим параметры сторон треугольника.

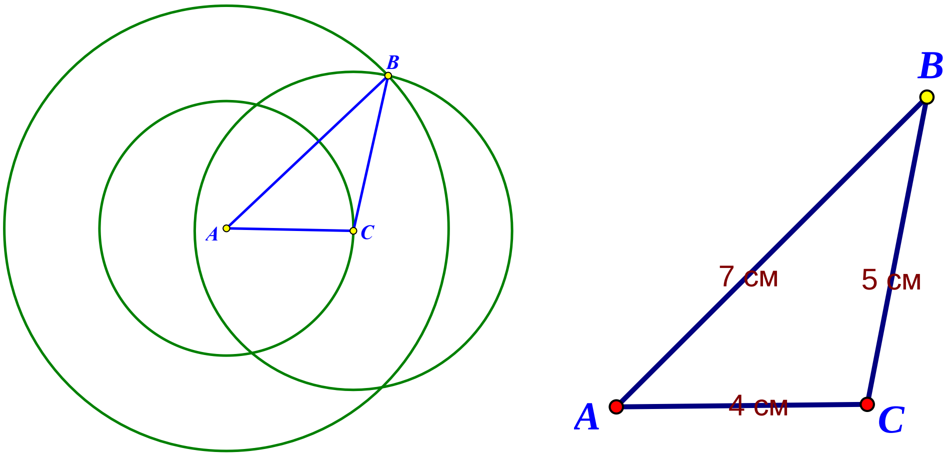


Рисунок 14

$AC + AB = 8$ см

$AB + BC = 9$ см

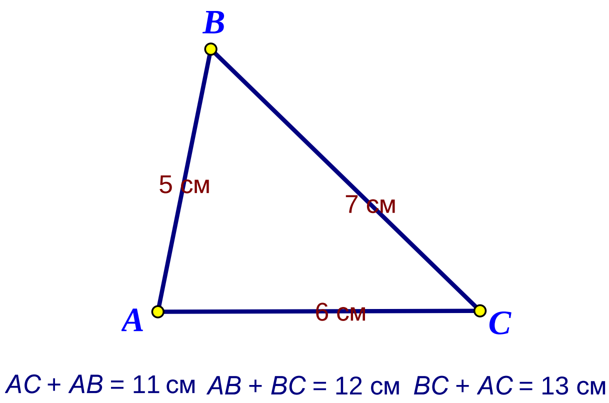
$BC + AC = 13$ см

Рисунок 15

2. Построенного чертежа уже достаточно для проведения компьютерного эксперимента, который позволит нам подтвердить или опровергнуть нашу гипотезу о том, что сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны. Следующее что нам нужно сделать это вычислить сумму сторон треугольника попарно, для этого в пункте

меню «Вычисления» выбираем пункт «Вычислить» и вычисляем сумму каждой пары сторон.

3. После того, как построение треугольника по заданным параметрам закончилось, можем приступать к проведению эксперимента. Ученикам предлагается в построенном треугольнике изменить значение параметров сторон (это выполняется с помощью клавиш «+», «-») и наблюдать что происходит с треугольником при изменении этих параметров. Для более наглядного анализа учащимся предлагается создать таблицу, в которой будут фиксироваться значения сторон, а также результаты проверки неравенства, которое звучит в теореме AC+AB>BC, AB+BC>AC, BC+AC>AB.



AC + AB	BC	AB + BC	AC	AB	BC + AC
15 см	5 см	12 см	8 см	7 см	13 см
11 см	3 см	10 см	4 см	7 см	7 см
11 см	4 см	11 см	4 см	7 см	8 см
11 см	4 см	11 см	4 см	7 см	8 см
12 см	5 см	12 см	5 см	7 см	10 см
13 см	6 см	13 см	6 см	7 см	12 см
9 см	7 см	9 см	7 см	2 см	14 см
7 см	7 см	9 см	5 см	2 см	12 см
11 см	7 см	12 см	6 см	5 см	13 см

Рисунок 16

После серии таких испытаний на основе эксперимента ученики должны сформулировать и озвучить гипотезу о том, что треугольник существует только тогда, когда сумма любых двух сторон больше третьей.

Теперь опишем создание анимационного чертежа, который может быть использован учителем для доказательства теоремы. Но прежде учитель доводит до сведения учеников информацию о том, что в экспериментальной работе мы проверили гипотезу лишь для малой части треугольников, и этот эксперимент не дает гарантий что это выполняется для абсолютно всех треугольников.

Начнем построение анимационного чертежа для визуализации доказательства теоремы о неравенстве треугольника.

1. На рабочем поле среды создаем произвольный треугольник ABC, для этого произвольно с помощью инструмента Точка строим три точки так чтобы они не лежали на одной прямой, каждую называем для этого «кликаем» правой кнопкой мыши на нужную точку и выбираем пункт «Переименовать точку…» называем точки соответственно A, B, C. Затем с помощью инструмента Отрезок соединяем эти точки между собой, треугольник построен, чтобы все эти построения не выполнять на уроке так как это отнимает время, создадим кнопку «Скрыть/Показать треугольник».

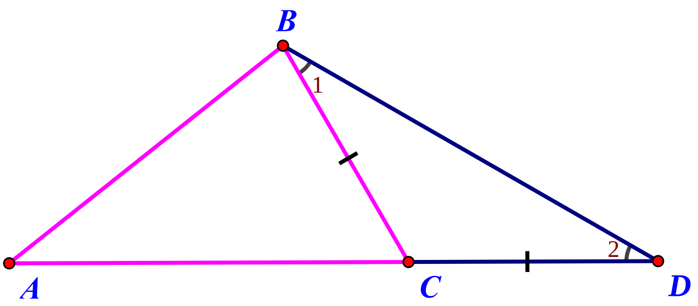


Рисунок 17

2. Далее на продолжении стороны AC отложим отрезок CD такой что BC=CD, для этого отмечаем вершину C и отрезок BC, переходим в пункт Построения и выбираем Окружность по центру и радиусу, на пересечении отрезка и окружности с помощью инструмента Точка отмечаем точку D, скрываем окружность и соединяем точки B и D отрезком, для удобства поменяем цвет дополнительных построений как показано в учебнике. С помощью инструмента Маркер отмечаем что отрезок BC=CD, также с помощью инструмента Маркер отмечаем дужками угол CBD и угол BDC как 1 и 2 соответственно, как в учебнике на статичном чертеже, для этого проведем биссектрисы углов CBD и BDC и отметим на них точки правой кнопкой мыши выберем стиль «Очень маленькая», назовем точки. Чтобы не проводить все эти построения в ходе занятия, рекомендуется объединить все созданные кнопки в одну «Презентация построения».

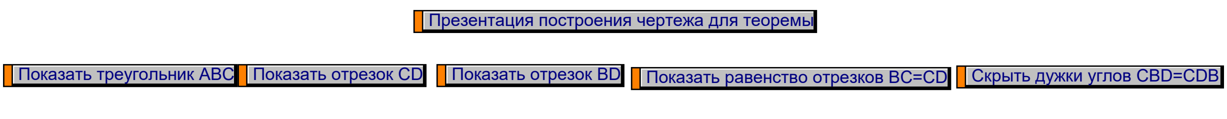


Рисунок 18

Для этого поочередно подсвечиваем все созданные кнопки в нужной последовательности, заходим в пункт меню Правка, затем наводим мышь на пункт Кнопки и выбираем пункт Действия, в данном разделе переименовываем кнопку Презентация построения и устанавливаем нужное нам время для построения каждого элемента чертежа. Анимационный чертеж для обоснования гипотезы о том, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон готов, а значит наша гипотеза может принять статус теорема после проведения доказательства.

Задача на нахождение условий существования треугольника. Необходимо создать анимационный чертеж, демонстрирующий условие существования треугольника по трем заданным отрезкам a, b, c (теорема о неравенстве треугольника). Чертеж должен наглядно показывать, как изменение длин отрезков влияет на возможность построения (существования) треугольника.

Задача. Даны три отрезка a, b, c. При каких условиях они могут быть сторонами треугольника? (пункт 2 в таблице 4). Опишем процесс построения анимационного чертежа к задаче.

1. Построим три произвольных отрезка с возможностью изменения их длин, для этого выбираем инструмент Отрезок и строим произвольно направленные отрезки, назовем эти отрезки a, b, c, подсветим отрезок нажимаем на правую кнопку мыши и выбираем опцию Переименовать. Отрезки построены. Теперь нужно измерить их длину, подсвечиваем нужный отрезок переходим в пункт меню «Измерить» и выбираем опцию Длина, проделываем это с каждым из отрезков. Для того, чтобы было удобно работать с длинами отрезков округлим их до единиц, для этого подсвечиваем параметр нажимаем правую кнопку мыши, выбираем опцию Свойство, переходим в раздел Величины в графе Точность выбираем Единицы, аналогично и для других величин.

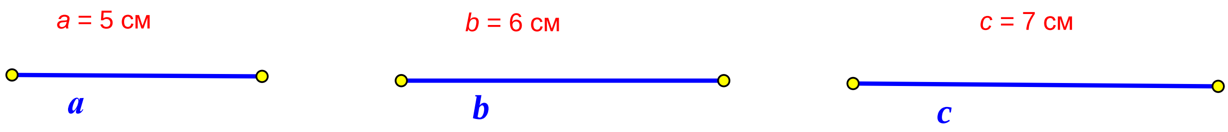


Рисунок 19

2. Приступаем к построению треугольника. На рабочем поле ставим произвольно точку А, затем подсвечиваем точку и один из отрезков выбираем в пункте меню Построения и опцию Окружность по центру и радиусу, с помощью инструмента Отрезок соединяем точку А и окружность, на втором конце отрезка отмечаем точку В. Далее для того чтобы построить вторую сторону треугольника снова подсвечиваем точку А и другой отрезок снова строим окружность по центру и радиусу. Для того чтобы построить третью сторону треугольника подсвечивает точку С и последний оставшийся отрезок, также строим окружность по центру и радиусу, на пересечении двух окружностей ставим точку В и соединяем все точки (вершины треугольника) отрезками, построение треугольника завершено.

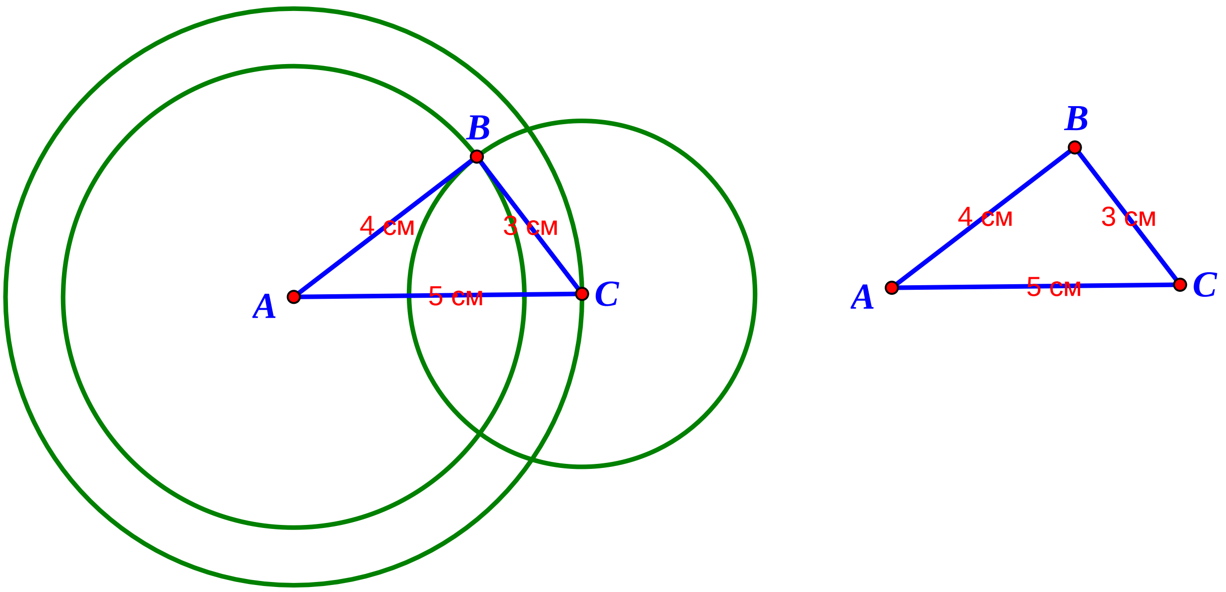
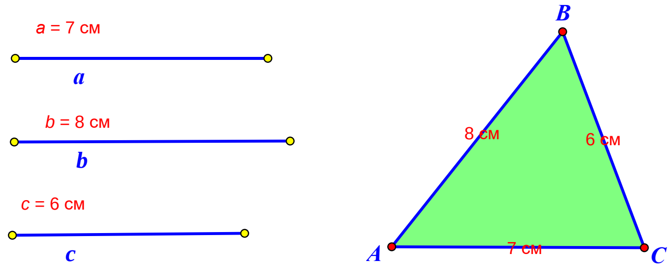


Рисунок 20

3. После проведенного построения треугольника, ученикам предлагается построить таблицу для фиксации результатов изменения параметров треугольника. В данной таблице фиксируются данные при которых треугольник существует, а при каких нет. Для того чтобы изменить

параметры сторон, учащимся всего лишь нужно потянуть за точку на конце отрезка.



a	b + c	b	a + c	c	a + b	Периметр △ABC
7 см	10 см	6 см	12 см	5 см	13 см	18 см
5 см	16 см	8 см	12 см	7 см	14 см	21 см
10 см	14 см	5 см	19 см	9 см	15 см	24 см
6 см	14 см	9 см	11 см	5 см	15 см	20 см
3 см	20 см	12 см	10 см	7 см	15 см	
7 см	18 см	12 см	13 см	6 см	19 см	25 см
4 см	14 см	5 см	13 см	10 см	9 см	
7 см	14 см	8 см	13 см	6 см	14 см	21 см

Рисунок 21

Наблюдая за изменениями треугольника при изменении его параметров сторон, учащиеся наглядно видят, что треугольник существует лишь только в том случае, когда любая его сторона меньше суммы двух других сторон.

Сравнение величин сторон и углов треугольника. Второй важный аспект темы – соотношение между сторонами и углами треугольника: *«В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот».* Обсуждение этого важнейшего соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника также стоит начать с несложного эксперимента, по результатам которого учащиеся должны сами сформулировать требуемое соотношение.

На рабочем поле строится произвольный треугольник ABC (рис. 22), с помощью маркера при его вершинах A, B и C ставятся одна, две и три дужки соответственно. После этого каждая дужка переименовывается: одна дужка называется буквой A, две дужки – B, три дужки – C. Имена дужек прячутся. После этого выполняется измерение углов. Чтобы измерить, например, угол BAC, подсвечивается одна дужка, заходим в меню «Измерения», на экране появляется ∠A = 77,62°. Аналогично, измеряются остальные углы (рис. 22).

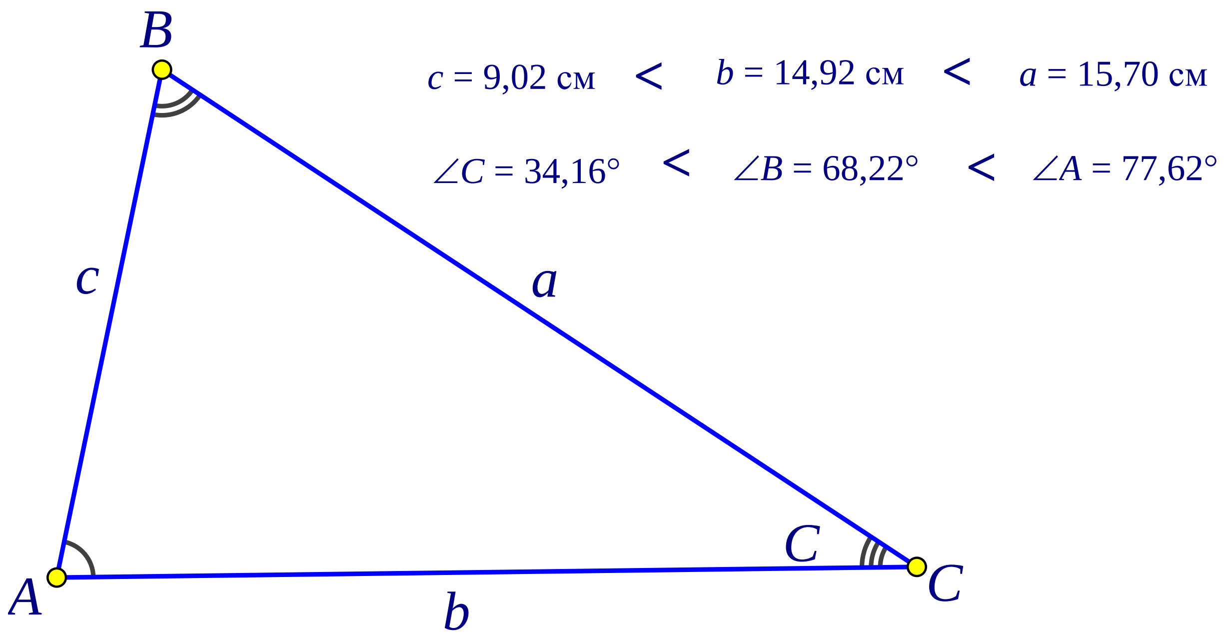


Рисунок 22

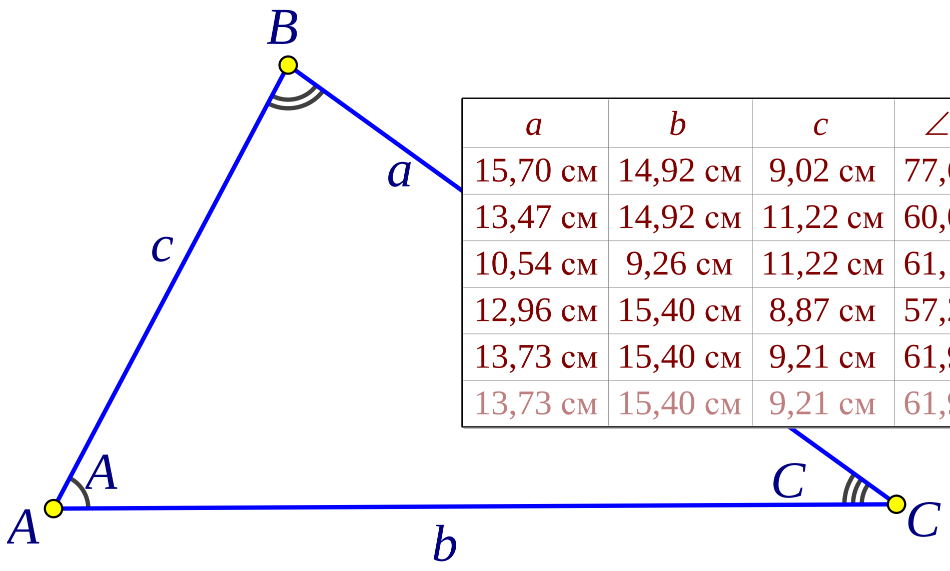
Аналогичная процедура выполняется со сторонами треугольника, сторона ВС обозначается буквой *a*, сторона АС − буквой b, сторона АВ − буквой с, обозначения сторон (в отличие от углов) не прячутся. Как и в случае с углами все стороны треугольника измеряются. Далее, учитель выводит на экран четыре значка «меньше» (или «∠»), которые имеются на нижней панели форматирования текста. Учащимся предлагается расположить отрезки в порядке возрастания длин сторон. Так, например, для треугольника АВС, представленного на рисунке 22, самую маленькую длину будет иметь отрезок с, за ним расположится отрезок b, самым длинным окажется отрезок *a*. На экране появится неравенство:

$$c = 9{,}02\text{ см} < b = 14{,}92\text{ см} < a = 15{,}70\text{ см}$$

Если теперь также упорядочить величины углов, то мы получим аналогичное неравенство, но только с углами:

$$\angle C=34{,}16^{o} < \angle B=68{,}22^{o} < \angle A=77{,}62^{o}$$

Вывод, который должны сделать учащиеся: против самой большой стороны *a* лежит самый большой угол при вершине А, против самой маленькой стороны с лежит самый маленький угол при вершине С.



a	b	c	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
15,70 см	14,92 см	9,02 см	77,62°	68,22°	34,16°
13,47 см	14,92 см	11,22 см	60,06°	73,75°	46,19°
10,54 см	9,26 см	11,22 см	61,10°	50,25°	68,65°
12,96 см	15,40 см	8,87 см	57,25°	87,60°	35,15°
13,73 см	15,40 см	9,21 см	61,96°	81,76°	36,28°
13,73 см	15,40 см	9,21 см	61,96°	81,76°	36,28°

Рисунок 23

Продолжая эксперимент, учитель изменяет с помощью мыши расположения вершин треугольника, результаты фиксируются в соответствующей таблице (рис. 23). Например, при втором испытании наибольшую длину будет иметь сторона b = 14,92 см, а наибольшую угловую величину будет иметь угол ∠B = 73,75°, лежащий напротив стороны b, т.е. против большей стороны в треугольнике всегда лежит больший угол. Аналогичный результат будет верен и во всех остальных испытаниях компьютерного эксперимента. По итогам эксперимента учащиеся должны сформулировать требуемую гипотезу «В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона».

Но самые главные слова учитель должен произнести после этого. Никакое количество экспериментальны испытаний не позволит нам присвоить гипотезе статус теоремы. Даже если испытаний будет не пять, как в нашем случае, а пять миллиардов. Никто не гарантирует, что на пять миллиардов первом испытании наша гипотеза подтвердится. Такой статус наша гипотеза получит лишь только в том случае, если нам удастся доказать ее, используя для этого не процедуру измерения углов, а логические рассуждения, опирающиеся только на аксиомы и ранее доказанные теоремы.

2.3. Задачи на построение треугольников

В третьем параграфе изучается теорема о равноудалённости точек одной из двух параллельных прямых от другой прямой, а также семь задач на построение треугольника по трем заданным элементам. Формулировки этих задач представлены в таблице 5.

Все перечисленные утверждения естественным образом поддаются визуализации с помощью динамических чертежей, что позволяет эффективно дополнять методическую коллекцию материалов для учителей математики.

Таблица 5

Формулировка теоремы, условия задачи	**Пункт в учебнике, номер задачи**	**Наличие статического чертежа в учебнике**
Т е о р е м а. Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой	П. 37. Теорема о равноудалённости точек двух параллельных прямых	Рис. 138
З а д а ч а. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.	П. 38. Построение треугольника по трём элементам. №1	Рис. 140
З а д а ч а. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.	П. 38. Построение треугольника по трём элементам. №2	Нет рисунка
З а д а ч а. Построить треугольник по трём сторонам.	П. 38. Построение треугольника по трём элементам. №3	Рис. 141
З а д а ч а. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.	Параграф 4. Построение треугольника по трём элементам. №286	Нет рисунка
З а д а ч а. Построить треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данной стороной и медианой.	Параграф 4. Построение треугольника по трём элементам. №287	Нет рисунка
З а д а ч а. Построить треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из них.	Параграф 4. Построение треугольника по трём элементам. №294	Нет рисунка
З а д а ч а. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.	Параграф 4. Построение треугольника по трём элементам. №295	Нет рисунка

Опишем процедуру конструирования анимационных чертежей на примере первой теоремы и последней задачи из таблицы 4.

Теорема о равноудалённости точек двух параллельных прямых. Эта теорема обычно легко воспринимается учениками 7 класса и не вызывает затруднений. Однако перед её изучением учитель может заинтриговать класс, рассказав о неевклидовой геометрии Лобачевского. В ней в отличие от привычной нам геометрии, расстояние от двух произвольных точек A и X на одной из параллельных прямых (например, прямой a) до второй прямой b не равны, а различаются. Этот контраст помогает подчеркнуть особенность евклидовой геометрии, в которой все точки одной из параллельных прямых равноудалены от другой.

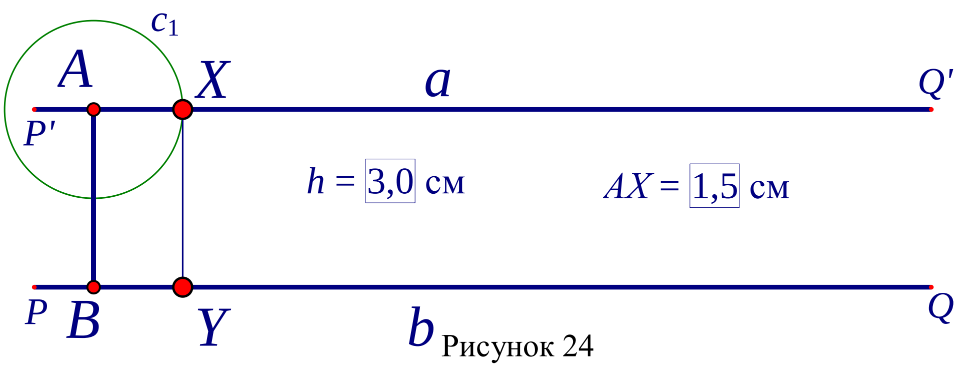


Рисунок 24

Перед формулировкой и доказательством теоремы о равноудалённости точек параллельных прямых можно провести наглядный эксперимент с помощью динамической среды (например, «Живая математика»). Создание анимационного чертежа не требует сложных действий – опишем ключевые шаги:

1. Построение начальной точки. Начнем с произвольной точки P, расположенной в нижней части рабочего поля, ближе к левому краю. Для этого используем инструмент «Точка».

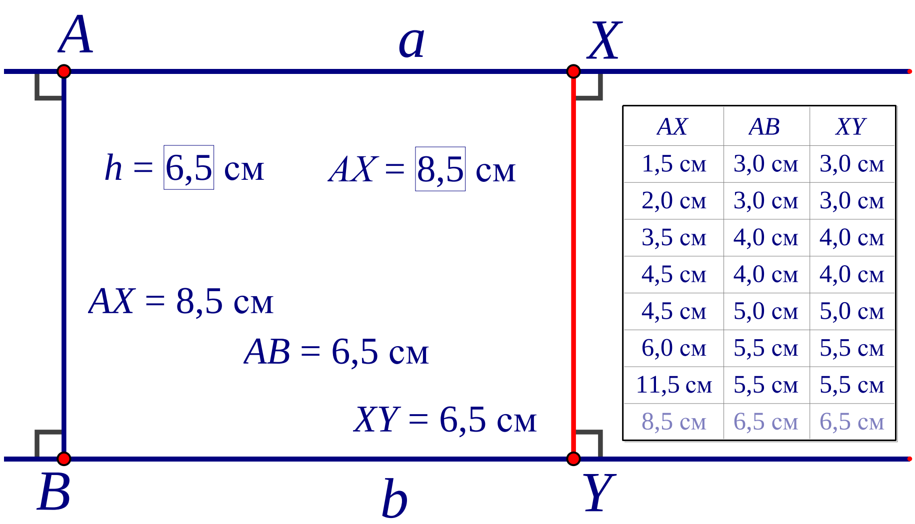
2. Перенесём точку P вправо на расстояние 1 см, полученную точку обозначим B (рис. 24), построим луч PB, поместим на него произвольную точку Q. Скроем луч PB, соединим точки P и Q отрезком, который обозначим

b. Точки P и Q сделаем «Очень маленькими». Отрезок PQ = b и будет в нашем эксперименте играть роль одной из параллельных прямых.

3. Измерения в эксперименте будем производить в сантиметрах, с точностью до одной десятой после запятой. С этой целью зададим два параметра h и AX, где h расстояние между параллельными прямыми. Второй параметр AX – расстояние в сантиметрах между фиксированной точкой A на первой параллельной прямой *a*, и произвольной точкой X на этой же прямой. В свойствах обоих параметров зададим шаг изменения этих параметров при нажатия на клавиши «+» или «-», положим шаг равный 0,5 см.

4. Изобразим теперь прямую a и точку A на ней. Для этого с помощью полярного переноса перенесём точки P, B, Q, включая отрезок *a*, на расстояние h и угол 90°. Образы точек P, B и Q обозначим соответственно P′, A и Q′, прямой b – через *a*. Чтобы построить изображение точки X изобразим окружность c_1 с центром в точке *A* и радиуса, равного параметру AX, пересечение этой окружности с прямой a и будет точкой X, далее строится Y – ортогональная проекция точки *X* на прямую *b*.

5. Теперь осталось скрыть окружность c_1, точки P, Q, P′ и Q′, измерить расстояния между парами точек A и X, A и B, X и Y. Создать таблицу из трёх столбцов AX, AB и XY. Меняя значения обоих параметров, приступить к



AX	*AB*	*XY*
1,5 см	3,0 см	3,0 см
2,0 см	3,0 см	3,0 см
3,5 см	4,0 см	4,0 см
4,5 см	4,0 см	4,0 см
4,5 см	5,0 см	5,0 см
6,0 см	5,5 см	5,5 см
11,5 см	5,5 см	5,5 см
8,5 см	6,5 см	6,5 см

Рисунок 25

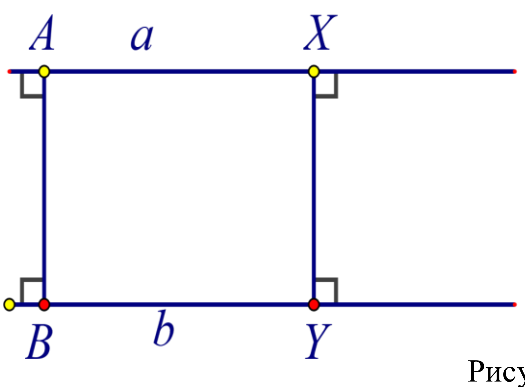
проведению экспериментальных испытаний. В каждом из них значения в последних двух столбцах таблицы оказались равными. По итогам проведения эксперимента ученики должны сформулировать следующую гипотезу.

Г и п о т е з а. *Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой*.

Перейдём к созданию анимационного чертежа, который поможет наглядно продемонстрировать доказательство теоремы. Однако перед этим учителю следует акцентировать внимание учащихся на важном моменте: проведенные восемь экспериментов не дают абсолютной гарантии истинности выдвинутой гипотезы. Как подчеркивалось ранее, ограниченное число частных случаев не может служить достаточным основанием для универсального вывода.

Приступим к построению анимационного чертежа для визуальной поддержки д о к а з а т е л ь с т в а теоремы о равноудалённости точек двух параллельных прямых.

1. Поскольку при доказательстве теоремы нет необходимости вычислять расстояния, то мы выполним построение анимационного чертежа без использования параметров. Сначала изобразим некоторый горизонтально расположенный отрезок *a*. Через его концы проведём две прямые перпендикулярные к отрезку *a* (на рис. 26 они скрыты). На одном из перпендикуляров, например, левом, отметим жёлтую точку, проведём через нее прямую, параллельную *a*, найдём точку пересечения этой прямой со



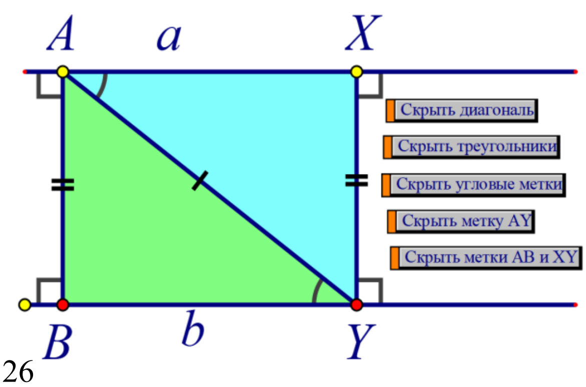


Рисунок 26

вторым перпендикуляром. Соединим отрезком полученную точку с жёлтой точкой, обозначим этот отрезок через *b*, спрячем оба перпендикуляра. Итак, мы изобразили две параллельные прямые a и b (рис. 26, левый слайд), положение которых можно менять, ухватившись мышью за жёлтую точку и перемещая ее вверх или вниз по скрытому нами перпендикуляру. В частности, прямую b можно расположить как ниже прямой a, так и выше a.

2. Далее, поместим на отрезок a две произвольные точки, обозначим их A и X, окрасим жёлтым цветом, что является сигналом того, что эти точки можно перемещать по a, используя для этого ручную анимацию. Проведём через A и X перпендикуляры к отрезку a, найдём точки их пересечения с отрезком b, обозначим эти точки, соответственно, B и Y. Соединим пары точек A и B, X и Y отрезками. С помощью маркера изобразим прямые уголки при вершинах A, B, X и Y. На этом можно завершить создание анимационного чертёжа (рис. 26, левый слайд). Остались простые построения, которые учитель может выполнить «вживую». Однако и их можно реализовать с помощью кнопочной анимации.

3. Изобразим диагональ AY, создадим кнопку «Скрыть/Показать диагональ». Окрасим ΔABY зелёным, ΔAXY голубым, создадим кнопку «Скрыть/Показать треугольники». Изобразим с помощью маркера по одной дужке для углов XAY и BYA, создадим кнопку «Скрыть/Показать угловые метки». С помощью маркера пометим диагональ AY, создадим кнопку «Скрыть/Показать метку AY». С помощью маркера пометим отрезки AB и XY, создадим кнопку «Скрыть/Показать метки AX и XY». При необходимости все эти кнопки можно объединить одной кнопкой: «Презентация» и кнопкой возвращения в исходное положение: «В исходное».

Задача на построение треугольника по двум сторонам и медиане к одной из них. Опишем процедуру конструирования анимационного чертежа для следующей задачи (последняя строка таблицы 4).

З а д а ч а. *Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.*

Визуальное сопровождение решения этой задачи желательно поддержать такими анимационными чертежами, чтобы у учителя была возможность оперативно обсудить с обучающими все этапы этого решения, т.е провести анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый из этих этапов отдельно.

Этап анализа. При анализе предполагается, что задача решена, рекомендуется от руки построить искомую фигуру и установить ее зависимость от тех объектов, которые заданы по условию задачи. Любая система динамической математики позволяет достаточно быстро построить соответствующий чертёж. В случае нашей задачи выполняем построения:

1. Строим произвольный треугольник ABC (рис. 27), в котором данными сторонами будем считать сторону BC, обозначим ее *a*, и сторону AC, обозначим ее b. Кроме этих сторон изобразим и данную медиану AD, которая проведена к стороне BC, обозначим ее m_a. Ясно, что D – середина BC.

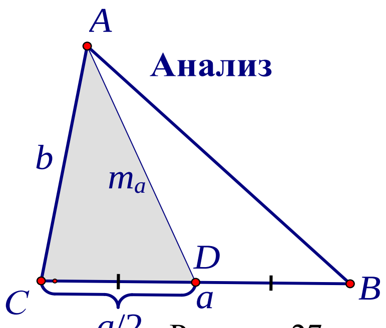


Рисунок 27

2. Все обозначения желательно поместить на чертеже. Это облегчит процесс нахождения искомой зависимости, т.к. все фигурирующие в условии задачи данные будут на глазах у обучающихся. Соединяем концы отрезка CD фигурной скобкой, обозначаем ее a/2. По такому чертежу становится понятно, что в треугольнике ACD известны все три стороны, поэтому его можно построить. На чертеже этот треугольник окрашивается, его изображение должно подсказать обучающимся построение оставшейся вершины B.

Этап построения. На этом этапе изображаются три данных отрезка: a, b и m_a и указываются построения, в результате выполнения которых на рабочем поле появится искомый треугольник. При создании анимационного чертежа, поддерживающего этот этап, выполним следующие построения:

1. Изображается произвольная точка C, строится горизонтальный луч CX, далее изображается окружность c_1 с центром в точке C и радиуса a, находится точка B пересечения этой окружности с лучом CX. Точки C и B соединяются отрезком CB. Чтобы создать презентацию построения искомого треугольника, необходимо параллельно с каждым из перечисленных выше построений, создавать кнопку, которая это построение скрывает или показывает. Поэтому у нас последовательно будут создаваться кнопки «Скрыть/Показать луч CX», «Скрыть/Показать окружность c_1», «Скрыть/ Показать пересечение B», «Скрыть/Показать отрезок BC».

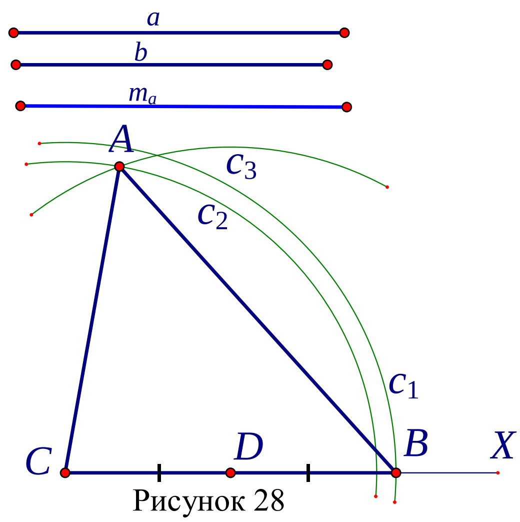


Рисунок 28

2. Для завершения построения осталось изобразить точку A. Так как A находится от C на расстоянии b, то она должна принадлежать окружности c_2 с центром в точке C и радиуса b. Построим эту окружность. Найдём середину D стороны BC треугольника ABC. Так как медиана AD нам задана отрезком m_a, то A находится на расстоянии m_a от точки D, следовательно, A должна принадлежать окружности c_3 с центром D и радиуса m_a, построим эту окружность. Но тогда, точка A должна лежать на пересечении окружностей c_2 и c_3. Построим точку A, затем оставшиеся стороны AC и BC треугольника ABC. Создадим кнопки «Скрыть/Показать середину D», «Скрыть/Показать окружность c_2», «Скрыть/Показать окружность c_3», «Скрыть/Показать пересечение A» и «Скрыть/Показать отрезки AB и AC».

3. Осталось объединить все кнопки общей кнопкой «Презентация построения» и кнопкой «В исходное».

Этап доказательства. На этом этапе обучающимся следует доказать, что построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи. Чтобы построенный анимационный чертёж «подсказал» детям как это сделать, можно дополнить его такими элементами: 1) фигурной скобкой, соединяющей точки B и C, и визуализирующей тот факт, что BC=a (а это следует из того, что B лежит на окружности c_1 радиуса a); 2) поставить маркером равные метки у отрезков AC и b (здесь используем то, что точка A лежит на окружности c_2 радиуса b); 3) изобразить отрезок AD и отметить маркером равные метки у отрезков AD и b (здесь используем то, что A лежит на окружности c_3 радиуса m_a). Осталось теперь для презентации добавить три кнопки: «Скрыть/Показать фигурную скобку», «Скрыть/Показать метки для AC и b», «Скрыть/Показать AD и метки для AD и m_a».

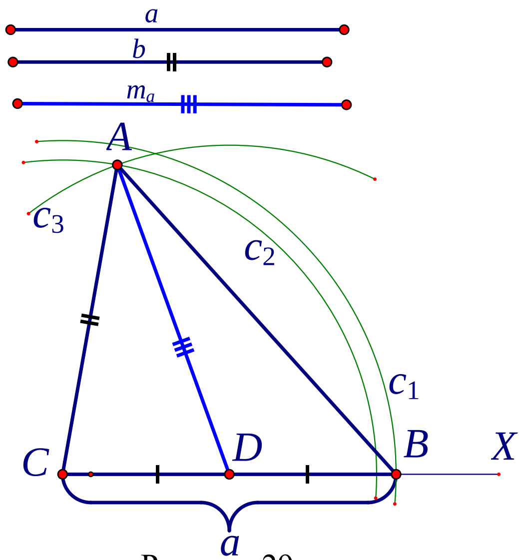


Рисунок 29

Этап исследования. На этом этапе необходимо выяснить, во-первых, всегда ли наша задача имеет решение, и, во-вторых, если решение существует, то сколько их. В условиях реального учебного процесса учителю редко удаётся аккуратно рассмотреть все четыре этапа, особенно последний этап исследования. В условиях, когда в распоряжении учителя будет тот чертёж, который построен на втором этапе, то с его помощью исследование можно провести достаточно оперативно. Исследование начинается с просмотра всех пунктов построения треугольника ABC (второй этап). Наибольшие опасения вызывает пункт построения точки, принадлежащей пересечению геометрических фигур. Если фигуры не пересекаются, то их пересечение не содержит ни одной точки, в этом случае задача не будет иметь решения. Если же пересечение содержит более одной точки, то и решений задачи может оказаться более одного. В нашей задачи таким пунктом является построение треугольника ACD (более точно, построение точки A). Обучающимся известно, что построение треугольника по трём его сторонам возможно лишь тогда, когда любая его сторона меньше суммы двух других. В нашей задаче искомый треугольник ABC можно построить, если удастся построить треугольник ACD.

a = 7,65 см $\quad$ b = 7,20 см

$\frac{a}{2}$ = 3,82 см $\quad$ m_a = 7,54 см

m_a = 7,54 см $<$ $b + \frac{a}{2}$ = 11,02 см

$\frac{a}{2}$ = 3,82 см $<$ $b + m_a$ = 14,74 см

b = 7,20 см $<$ $\frac{a}{2} + m_a$ = 11,36 см

Рисунок 30

Для выяснения вопроса, связанного с возможностью построения ΔACD, измерим длины данных отрезков, вычислим половину длины отрезка a, сравним, выполняются ли требуемые неравенства. Так для изображения, представленного на рисунке 28, все три неравенства выполняются (рис. 30).

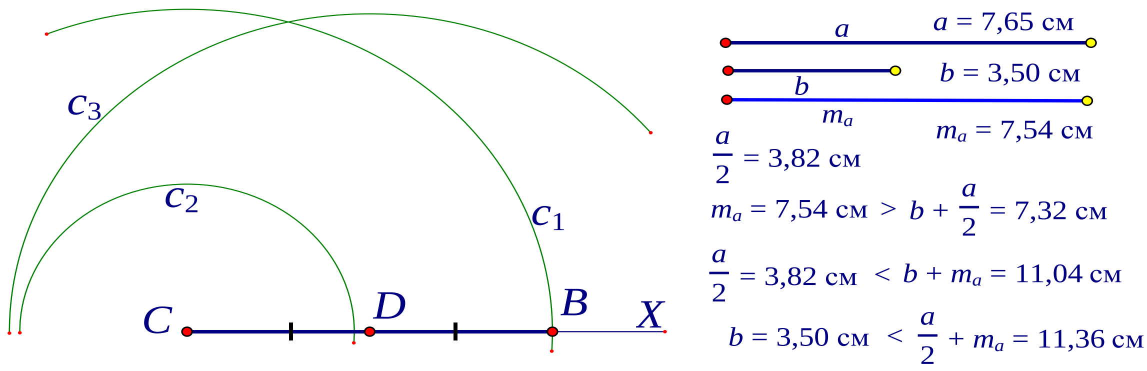


Рисунок 31

Немного уменьшим длину одного из данных отрезков, например b. Для этого с помощью мыши переместим правый (жёлтый) конец отрезка b. Окружность c_2 окажется полностью внутри окружности c_3 и не будет иметь с ней ни одной общей точки. По этой причине точка A, а вместе с ней и треугольник ABC, исчезнут. Это означает, что искомого треугольника не существует, т.е. задача не имеет решения. Не будет решения и в том случае, если окружности коснуться. Если же окружности пересекутся по двум точкам, то им будут соответствовать два разных треугольника, но они будут симметричны относительно прямой BC, т.е. это будет одно решение. Для того, чтобы учителю не перемещать вручную правый конец отрезка b, можно создать кнопки «Уменьшить длину b» и «В исходное».

2.4. Результаты апробации

Апробация методики применения анимационных чертежей в изучении соотношений между сторонами и углами треугольника проводилась на базе МБОУ «Сарагашская СОШ» во время прохождения практики 2024-2025 учебного года. В исследовании приняли участие учащиеся 7 класса в количестве 14 человек. Апробация проходила в естественных условиях учебного процесса при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» и проводилась в два этапа: входной и итоговый контроль.

Для проведения апробации были разработаны:

1. Комплекс анимационных чертежей, охватывающих все основные разделы темы.
2. Система упражнений и задач трех уровней сложности (приложение Б).
3. Методические рекомендации для учителя по поэтапному включению анимации в урок (приложение В).
4. Диагностические материалы для оценки эффективности методики (приложение А).

Для комплексной оценки результатов апробации использовались следующие методы:

- Педагогическое наблюдение за: познавательной активностью учащихся; качеством выполнения практических заданий; динамикой формирования пространственного мышления.
- Анкетирование учащихся по параметрам: уровень интереса к геометрии; оценка понятности материала; предпочтения в формах представления информации.
- Анализ учебных достижений по: результатам входного и итогового тестирования; качеству выполнения графических работ; успешности решения задач на построение.

Основными критериями эффективности выступили: показатели усвоения учебного материала; сформированность пространственного мышления; уровень познавательной мотивации; качество выполнения практических заданий. Задания входного и итогового тестирования (Приложение А), анкета (Приложение Г).

На этапе входного контроля до проведения пробации, учащимся было предложено выполнить тест, результаты которого представлены ниже.

Таблица 6. Результаты входного тестирования

п/п № учащегося	Количество баллов
Ученик 1	2
Ученик 2	4
Ученик 3	1
Ученик 4	6
Ученик 5	3
Ученик 6	4
Ученик 7	3
Ученик 8	6
Ученик 9	5
Ученик 10	3
Ученик 11	3
Ученик 12	2
Ученик 13	2
Ученик 14	4

Проанализировав выполненные работы, был выявлен уровень сформированности знаний по данной теме: базовый уровень демонстрируют 57% учащихся (8 человек); средний уровень демонстрируют 43% учащихся (6 человек); высокий уровень в классе не выявлен. Средний балл уровня знаний данной темы составил 3,4 (баллов). Ниже приведена диаграмма уровня сформированности знаний по теме.

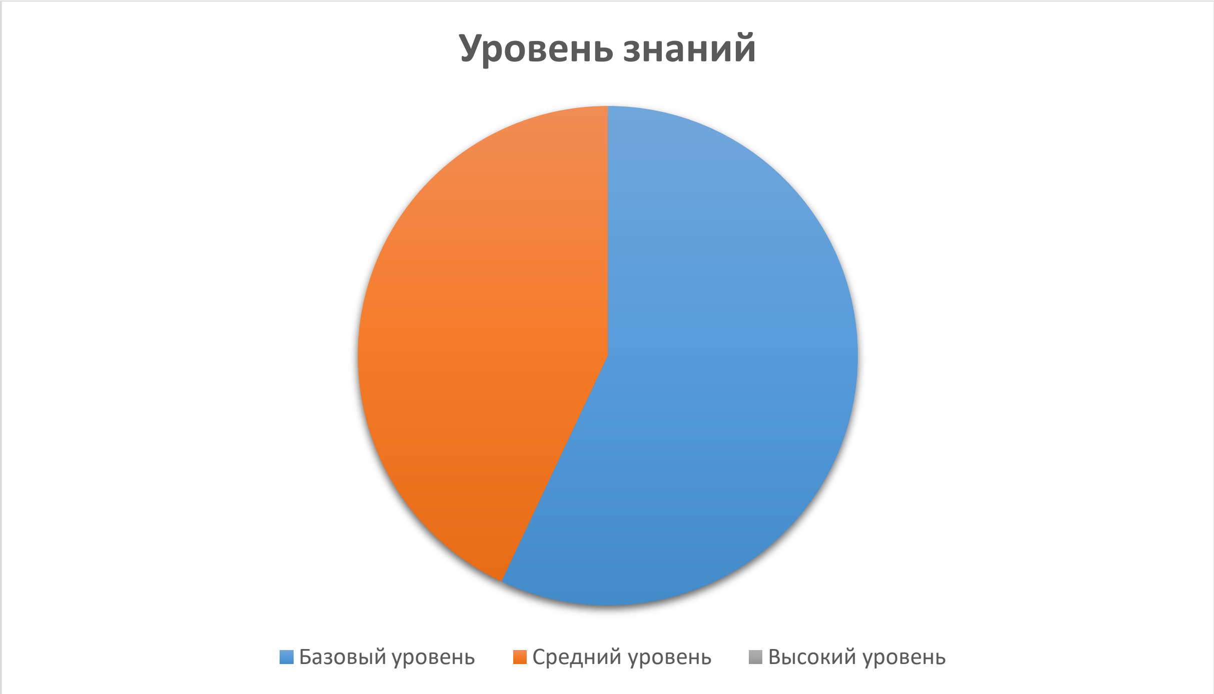


Рисунок 32

После проведенного исследования учащимся было предложено выполнить контрольное тестирование, для того чтобы выяснить эффективен ли метод обучения с применением анимационных чертежей. Результаты выполнения контрольного тестирования представлены ниже.

Таблица 7. Результаты контрольного тестирования

п/п № учащегося	Количество баллов
Ученик 1	4
Ученик 2	4
Ученик 3	6
Ученик 4	4
Ученик 5	5
Ученик 6	2
Ученик 7	1
Ученик 8	6
Ученик 9	7
Ученик 10	4
Ученик 11	6
Ученик 12	5
Ученик 13	4
Ученик 14	4

Проведя анализ работ, был сформирован следующий вывод: базовый уровень выявлен у 14% учащихся (2 человека); средний уровень продемонстрировали 79% учащихся (11 человек); высокий уровень продемонстрировали 7% учащихся (1 человек). Средний балл уровня знаний темы после проведения апробации составил 3,9 (баллов). Построим диаграмму и проведем сравнительный анализ входного и контрольного тестов.

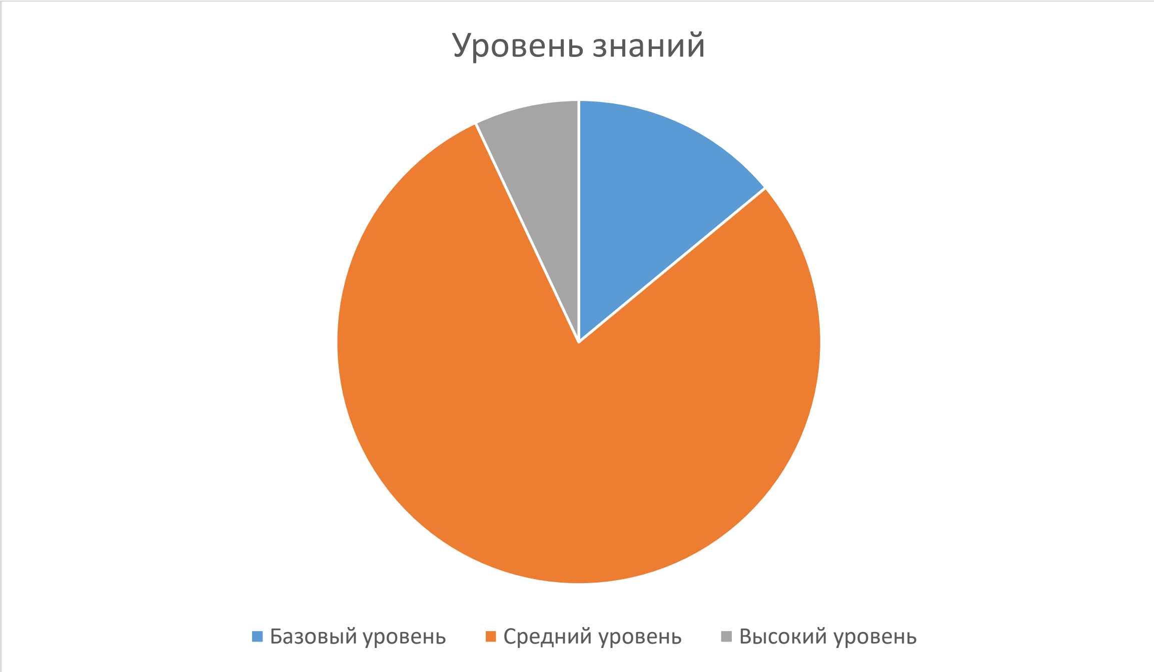


Рисунок 33

Сравним данные входного и контрольного теста.

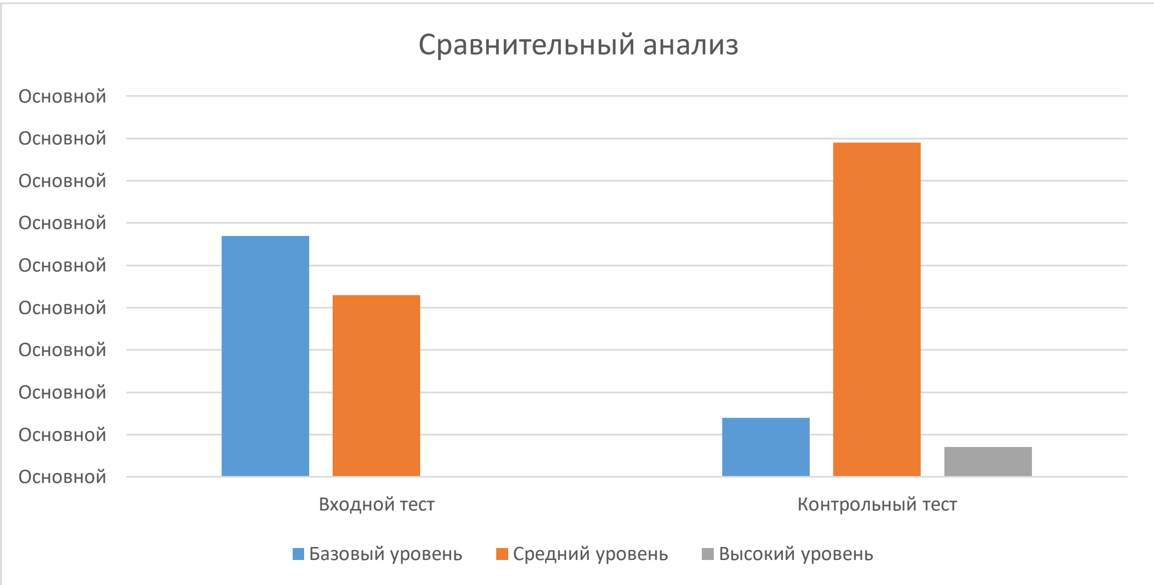


Рисунок 34

Таким образом, проанализировав результаты можно сделать вывод, что методика применения анимационных чертежей на уроках геометрии эффективна, средний балл класса вырос на 0,5 (баллов).

Также апробация подтвердила, что анимационные чертежи повышают наглядность и доступность геометрии, стимулируют познавательную деятельность учащихся. В целом методика работы с анимационными чертежами доказала свою эффективность и может быть рекомендована к внедрению в школьную практику при условии учета возможных ограничений.

Выводы по главе 2

Во второй главе исследования доказана эффективность анимационных чертежей при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» в 7 классе.

Основные результаты:

1. Повышение наглядности: Анимационные чертежи, созданные в «Живой математике», помогают учащимся визуализировать геометрические зависимости, что улучшает понимание материала.
2. Рост успеваемости: Апробация методики показала увеличение среднего балла успеваемости класса на 0.5, а число учащихся со средним уровнем знаний выросло с 43% до 79%.
3. Развитие мышления: Использование динамических чертежей способствует формированию пространственного мышления и исследовательских навыков.
4. Гибкость в обучении: Методика позволяет адаптировать материал под разный уровень подготовки учащихся и эффективно применять её на всех этапах урока.

Таким образом, анимационные чертежи доказали свою практическую ценность и могут быть рекомендованы для внедрения в школьное обучение геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование было направленно на разработку и апробацию методики использования анимационных чертежей при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» в курсе геометрии 7 класса. В ходе работы были решены поставленные задачи, что позволило подтвердить гипотезу и сделать следующие выводы:

1. Анализ традиционных методик показал, что изучение данной темы в школьных учебниках геометрии преимущественно опирается на статичные иллюстрации и текстовые объяснения, что не всегда обеспечивает достаточную наглядность и понимание динамических взаимосвязей между элементами треугольника.

2. Использование систем динамической математики (Живая математика и Математический конструктор) открывает широкие возможности для создания интерактивных чертежей, позволяющих визуализировать геометрические зависимости в режиме реального времени. Эти инструменты способствуют развитию пространственного мышления, повышают мотивацию учащихся и облегчают усвоение сложных понятий.

3. Разработанный комплекс анимационных чертежей систематизирован в соответствии с разделами темы: соотношения между сторонами и углами, неравенство треугольника, задачи на построение. Это позволяет учителю гибко использовать их на различных этапах урока – при объяснении нового материала, решении задач и закреплении знаний.

4. Апробация методики в школьной практике подтвердила ее эффективность. Учащиеся демонстрировали более глубокое понимание геометрических закономерностей, активнее участвовали в обсуждении задач и показывали лучшие результаты при выполнении самостоятельных работ.

Таким образом, применение анимационных чертежей в обучении геометрии способствует повышению наглядности, интерактивности и эффективности учебного процесса. Перспективы дальнейшего исследования связаны с расширением банка динамических материалов, разработкой методических рекомендаций для учителей и интеграцией подобных технологий в другие разделы школьного курса математики.

Итак, все поставленные задачи исследования решены, цель – достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А. Д. и др. Геометрия. 7 класс. – М.: Просвещение, 2018. – 176 с.

2. Асмолов А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А. Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2019. – 159 с.

3. Атанасян Л. С. и др. Геометрия 7-9 классы – М.: Просвещение, 2023. – 384 с.

4. Геометрия 7-9. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И – М.: Просвещение, 2019. – 88 с.

5. Геометрия, 8 класс по учебнику Атанасяна Л.С. и др. Поурочные планы. Часть 1.\ Гилярова М.Г. : Волгоград, Учитель –АСТ, 2019. – 126 с.

6. Гилярова М.Г. Геометрия, 8 класс по учебнику Атанасяна Л.С. и др. Поурочные планы. Часть 2./ Гилярова М.Г. : Волгоград, Учитель – АСТ, 2019. – 38 с.

7. Далингер В. А. Цифровые технологии в обучении математике. – М.: Просвещение, 2020. – 200 с.

8. Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. – М.: Просвещение, 2019. – 24 с.

9. Дидактические материалы по геометрии за 8 класс./ Зив Б. Г., Мейлер В. М. – М.: Просвещение, 2019. – 125 с.

10. Дубровский В. Н. Компьютерные инструменты в образовании: «Живая математика» / В. Н. Дубровский, А. А. Панюков // Информатика и образование. – 2021. – № 5. – С. 12–18.

11. Живая математика [Электронный ресурс]. – URL: https://www.livegeometry.ru (дата обращения: 02.06.2025).

12. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов. – Москва: Институт новых технологий, 2013. – 205 с.

13. Задачи и упражнения на готовых чертежах./ 7-9 классы. Геометрия. Рабинович Е.М. - М: Илекса, 2019. – 60 с.

14. Иванова М. Н. Инновационные методы преподавания геометрии. – М.: Просвещение, 2023. – 210 с.

15. Красс М. С. Использование «Математического конструктора» в преподавании геометрии / М. С. Красс // Математика в школе. – 2023. – № 4. – С. 33–39.

16. Математический конструктор [Электронный ресурс]. – URL: https://obr.1c.ru/mathkit (дата обращения: 01.06.2025).

17. Мерзляк А. Г. и др. Геометрия. 7 класс. – М.: Вентана – Граф, 2021. – 192 с.

18. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии Л.И. Боженкова, Бином, 2019. – 53 с.

19. Петрова Е. С. Интерактивные математические среды. – СПб.: Лань, 2022. – 150 с.

20. Погорелов А. В. Геометрия 7-9 классы. – М.: Просвещение, 2019. – 240 с.

21. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2018. – 67 с.

22. Проверочные задания по математике для учащихся 5-8 и 10 классов./ Буланова Л. М., Дудницын Ю. П – М.: Просвещение, 2018. – 51 с.

23. Рабочие программы по геометрии к УМК Л.С. Атанасяна и др./Сост. Н.Ф. Гаврилова. – М.ВАКО.2019. - 192с.

24. Самостоятельные и контрольные работы к учебнику Л. Атанасяна Л.С. 7-9 классы./ Иченская М. А – Волгоград: Учитель, 2018. – 99 с.

25. Саранцева Г. И. Методика Преподавания геометрии. – Казань: КФУ, 2021. – 180 с.

26. Смирнова А. Г. Работа с математическим конструктором. Методическое пособие. – СПб.: Питер, 2021. – 178 с.

27. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7 класс. – М.: Мнемозина, 2020. – 176 с.

28. Сушкевич В. В. Методическая копилка анимационных чертежей к избранным теоремам и задачам о треугольниках в 7 классе / Рукопись курсовой работы по производственной практике: Междисциплинарный практикум, КГПУ им. В.П. Астафьева, 2025. – 36 с.

29. УМК ФГОС. Рабочая тетрадь по геометрии 8 класс. / Ю.А. Глазков, П.М. Камев.- М. «Экзамен», 2019. – 70 с.

30. Фарков А. В. Тесты по геометрии : 7 класс : к учебнику Л. С. Атанасяна и др. / А. В. Фарков. – М. : Экзамен, 2022. – 96 с.

31. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2018. – 48 с.

32. https://kmc.sfu-kras.ru/documents/podufalov-doklad2-mayer.pdf

Приложение А

Задания для входного контроля.

1. В треугольнике ABC ∠A=50°, ∠B=70°. Найдите угол C.
2. Может ли треугольник иметь стороны 3см, 4см, 8см? Ответ обоснуйте.
3. В треугольнике со сторонами 5см и 7см определите диапазон возможных длин третьей стороны.
4. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
5. Нарисуйте треугольник, у которого: - одна сторона в 2 раза больше другой; - один угол прямой. Подпишите элементы.

Критерии оценки были следующие:

Базовый уровень – воспроизведение формул, решение типовых задач (1-3 балла);

Средний уровень – применение знаний в измененной ситуации, доказательство простых утверждений (4-6 баллов);

Высокий уровень – теоретическое применение в нестандартных условиях, анализ ошибок (7-10 баллов).

Приложение А (продолжение)

Задания контрольного этапа.

1. Верно ли утверждение: «В треугольнике против большей стороны лежит больший угол»? (1балл)

2. Верно ли, что:

- в равнобедренном треугольнике углы при основании равны?
- если в треугольнике все углы равны, то и стороны равны? (1балл)

3. Может ли треугольник иметь углы:

- 50°, 60°, 80°
- 90°, 30°, 70°
-110°, 40°, 30° (2 балла)

4. Определите вид треугольника, если его стороны равны:

А) 5см, 7см, 9см

Б) 6см, 8см, 10см (2 балла)

5. Можно ли построить треугольник со сторонами:

А) 3см, 4см, 7см

Б) 5см, 5см, 5см. (ответ обоснуйте, используя неравенство треугольника) (2 балла)

6. Постройте треугольник со сторонами:

a=6см, b=4см, угол B=60°. Опишите шаги построения (2 балла).

Критерии оценивания остались прежними как и на входном контроле.

Приложение Б

Система упражнений и задач трех уровней сложности по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (7 класс).

1. Базовый уровень (закрепление основных понятий и простейших применений теорем).

Теоретические вопросы:

- В треугольнике ABC угол A = 50°, угол B = 60°. Найдите угол C.
- Может ли треугольник иметь углы 30°, 60°, 90°? Ответ обоснуйте.

Задачи на соотношение сторон и углов:

- В треугольнике ABC сторона AB = 5 см, BC = 7 см, угол A = 40°. Какая из сторон лежит против большего угла?
- Укажите, какой угол больше: в треугольнике со сторонами 3 см, 4 см, 5 см – угол, лежащий против стороны 5 см, или угол, лежащий против стороны 4 см?

Неравенство треугольника:

- Может ли треугольник иметь стороны: а) 2 см, 3 см, 6 см;

б) 4 см, 5 см, 8 см?

- Найдите наибольшую целую длину третьей стороны треугольника, если две другие равны 4 см и 9 см.

2. Повышенный уровень (применение знаний в нестандартных ситуациях и комбинированных задачах).

Задачи на доказательство:

- Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
- В треугольнике ABC угол A > угла B. Что можно сказать о сторонах BC и AC?

Задачи на построение:

Приложение Б (продолжение)

- Постройте треугольник по двум сторонам 5 см и 7 см и углу между ними 45°. Измерьте третью сторону и проверьте неравенство треугольника.
- Можно ли построить треугольник с углами 70°, 50° и стороной 6 см, лежащей к углу 70°? Выполните построение.

Комбинированные задачи:

- В треугольнике ABC сторона AB = 8 см, угол C = 60°, угол B = 45°. Найдите сторону AC.
- В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а угол при вершине – 100°. Сравните длины боковых сторон.

3. Углубленный уровень (творческие и олимпиадные задачи, требующие аналитического мышления).

Задачи на исследование:

- Может ли в треугольнике сторонами, лежащая против угла 30°, быть вдвое меньше другой стороны? Приведите пример или опровергните.
- В треугольнике ABC угол A = $\mathcal{L}$, угол B = $\mathfrak{B}$. При каких условиях сторона BC будет наибольшей?

Олимпиадные задачи:

- В треугольнике со сторонами 5 см, 6 см, 7 см найдите наибольший угол.
- Докажите, что в любом треугольнике сумма длин любых двух сторон больше удвоенной медианы, проведенной к третьей стороне.

Практико-ориентированные задачи:

- На местности нужно продолжить путь от пункта A к пункту C через пункт B так, чтобы общее расстояние было минимальным. Угол между направлениями AB и BC равен 120°, AB = 3 км, BC = 4 км. Можно ли сократить путь? Ответ обоснуйте.

Приложение В

Методические рекомендации для учителя по поэтапному включению анимации в урок.

1. Подготовительный этап. Цель: отбор и адаптация анимационных материалов к теме урока.

Действия учителя:

- Анализ учебных целей

- Определить, какие понятия или задачи требуют визуализации (например, доказательство теоремы о неравенстве треугольника, построение биссектрисы).

- Выбрать анимации, которые наилучшим образом иллюстрируют эти процессы.

- Техническая подготовка

- Проверить совместимость анимаций с оборудованием в классе (ПК, проектор, интерактивная доска).

- Заранее протестировать анимации, чтобы избежать технических сбоев во время урока.

- Разработка дидактических материалов

- Подготовить вопросы для обсуждения после просмотра анимации.

- Составить задания, где ученики будут применять увиденное (например, после демонстрации построения треугольника по трем сторонам дать аналогичную задачу для самостоятельного решения).

2. Основной этап урока

Цель: Эффективное использование анимации при объяснении нового материала или решении задач.

1. Мотивационный этап (3–5 мин)

- Проблемная ситуация:

Приложение В (продолжение)

Пример: Показать анимацию, где три отрезка не могут образовать треугольник (нарушено неравенство треугольника). Спросить: "Почему фигура не получилась? Какое условие не выполнено?"

- Цель: Заинтересовать учащихся, подвести к формулировке темы.

2. Объяснение нового материала (10–15 мин)

- Демонстрация анимации с комментариями

Пример: При изучении зависимости между углами и сторонами показать, как при увеличении угла противолежащая сторона автоматически удлиняется.

- Пошаговая остановка анимации

- В ключевых моментах (например, при достижении прямого угла) сделать паузу и попросить учащихся сформулировать наблюдения.

- Связь с теорией

После просмотра – устное обсуждение: "Как это соотносится с теоремой о соотношении сторон и углов?"

3. Практическое закрепление (15–20 мин)

- Интерактивная работа

- Дать задание, где ученики сами управляют параметрами в анимации (например, в Живой математик изменяют длины сторон и наблюдают, когда треугольник возможен).

- Решение задач

- После анимации предложить аналогичную задачу на построение или доказательство.

- Работа в парах/группах

- Одна группа решает задачу традиционно, другая – с помощью анимации, затем сравнивают результаты.

3. Заключительный этап (5–7 мин)

Цель: Закрепление материала и рефлексия.

Приложение В (продолжение)

Действия учителя:

- Контрольные вопросы

- "Как анимация помогла понять тему?"

- "Какие моменты стали понятнее?"

- Мини-тест или устный опрос

- 2–3 вопроса на применение изученного (например, "Может ли треугольник иметь стороны 2, 7, 4? Почему?").

- Обратная связь от учеников

- Анкета или устное обсуждение: *"Понравился ли такой формат? Что было самым полезным?"*

4. Дополнительные рекомендации

- Дозированное использование – не более 2–3 анимаций за урок, чтобы не перегружать восприятие.
- Сочетание с традиционными методами – после анимации обязательно закреплять материал на бумаге (чертежи, записи доказательств).
- Дифференциация заданий – для сильных учеников можно усложнять задачи (например, добавить дополнительные условия), для слабых – давать более простые анимации с пошаговыми подсказками.

Приложение Г

Анкета

1. Как вы считаете, помогают ли интерактивные методы лучше понять материал?

□ Да, они делают урока интереснее и понятнее

□ Иногда, зависит от темы

□ Нет, учебник эффективнее

□ Затрудняюсь ответить

2. Как интерактивные методы повлияли на вашу мотивацию к уроку?

□ Повысили

□ Не повлияли

□ Снизили интерес

□ Затрудняюсь ответить

3. Хотели бы вы, чтобы интерактивных методов на уроках было больше?

□ Да, гораздо больше

□ Да, но в меру

□ Нет, сейчас их в меру

□ Нет, они только мешают

4. Какие предметы на ваш взгляд, больше подходят для интерактивного обучения? (напиши свой вариант)____

5. Ваши предложения, что нужно добавить или изменить в использовании интерактивных методов? ___________________________________