

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Кожура Ирина Александровна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Методические особенности изучения
тригонометрических уравнений в старших классах в
контексте подготовки к ЕГЭ по математике**

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина

(дата, подпись)

Научный руководитель
канд. пед. наук, Е.А. Аёшина

Дата защиты

Обучающийся
И.А. Кожура

Оценка _____
Прописью

Красноярск 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	6
1.1. Тригонометрические уравнения в школьной программе по математике: исторический обзор	6
1.2. Анализ существующих подходов к изучению тригонометрических уравнений в школьном курсе математики.....	13
1.3. Требования ЕГЭ по математике к решению тригонометрических уравнений в старшей школе	22
Выводы по главе 1.....	32
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ	33
2.1. Основные методические принципы подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения».....	33
2.2. Методы, приемы и средства обучения решению тригонометрических уравнений.....	38
2.3. Модель системы заданий для подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения».....	43
Выводы по главе 2.....	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	51
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	53
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	56
Приложение А	56
Приложение Б.....	67
Приложение В	79
Приложение Г.....	82
Приложение Д.....	83

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия занимает важное место в школьной программе по математике, поскольку именно эта область знаний является основой для формирования математического мышления, навыков решения сложных задач и подготовки учащихся к сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Одной из ключевых тем тригонометрии является тригонометрические уравнения, изучение которых требует от школьников не только глубокого понимания математических основ, но и умения применять различные преобразования, распознавать типы уравнений, а также использовать аналитические и графические методы решения.

Проблема обучения тригонометрическим уравнениям исследовалась в работах многих учёных и педагогов. А.Н. Колмогоров и его соавторы предложили системный подход, основанный на поэтапном освоении формул и типовых алгоритмов. М.И. Башмаков акцентировал связь тригонометрии с практическими приложениями, используя задачи из физики и геометрии. Г.В. Дорофеев разработал методику «от простого к сложному», уделяя внимание графическим интерпретациям уравнений. В исследованиях Л.О. Денищевой и Т.А. Корешковой выделены типовые ошибки учащихся и рекомендации по их преодолению.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения качества подготовки старшеклассников к ЕГЭ по математике, в рамках которого задания на решение тригонометрических уравнений регулярно включаются в экзаменационные материалы. Анализ результатов ЕГЭ последних лет показывает, что несмотря на то, что учащиеся достаточно часто приступают к решению тригонометрических уравнений, все же они испытывают некоторые трудности с решением задач данного типа. Это связано с рядом факторов: недостаточным вниманием к теме в школьной программе, сложностью тригонометрических преобразований, а также отсутствием систематического подхода к подготовке.

Современные требования к преподаванию математики, определенные Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС), предполагают не только формирование знаний и умений у учащихся, но и развитие таких метапредметных компетенций, как логическое мышление, аналитические способности и умение работать с информацией. Подготовка к ЕГЭ требует внедрения современных методов и средств обучения, которые сделают процесс изучения тригонометрических уравнений более доступным, понятным и эффективным.

В условиях модернизации образования и повышения требований к экзаменационным результатам тема исследования приобретает особую значимость. Город Красноярск, как один из крупнейших образовательных центров Сибири, также испытывает потребность в совершенствовании подготовки школьников к ЕГЭ и внедрении эффективных методических подходов.

Проблема исследования заключается в совершенствовании методики подготовки обучающихся к решению тригонометрических уравнений, что способствует повышению уровня математических знаний и успешной сдаче ЕГЭ по математике.

Объект исследования: процесс обучения тригонометрическим уравнениям в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методические особенности изучения тригонометрических уравнений в контексте подготовки к ЕГЭ по математике.

Цель исследования: разработка модели системы заданий для подготовки обучающихся к решению тригонометрических уравнений в рамках школьного курса математики с акцентом на успешную сдачу ЕГЭ, а также методических рекомендаций по ее применению в образовательном процессе.

Для достижения цели исследования были сформулированы следующие **задачи:**

1. Провести анализ существующих исследований в области обучения решению тригонометрических уравнений.
2. Выявить основные трудности, с которыми сталкиваются обучающиеся при изучении тригонометрических уравнений, в частности в процессе подготовки к профильному ЕГЭ по математике.
3. Предложить эффективные методы, приемы и средства обучения, направленные на успешное усвоение темы.
4. Разработать и апробировать систему заданий по исследуемой теме, проанализировать полученные результаты.
5. Разработать методические рекомендации по изучению тригонометрических уравнений с учетом требований ЕГЭ.

Теоретическая значимость исследования заключается в углублении методических подходов к обучению тригонометрическим уравнениям и обобщении существующих исследований, что способствует повышению качества математического образования.

Практическая значимость исследования заключается в разработке модели системы заданий для подготовки учащихся к ЕГЭ, что позволит улучшить усвоение материала и повысить готовность школьников к экзаменам.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, шести параграфов, заключения, библиографического списка и пяти приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1. Тригонометрические уравнения в школьной программе по математике: исторический обзор

Тригонометрия, как одна из важнейших областей математики, имеет древние корни. Ее формирование связано как с практическими задачами, так и с развитием теоретической науки. Уже в III–II веках до нашей эры древние греки начали изучать зависимости между сторонами и углами треугольников. Основателем тригонометрии считается Гиппарх, который ввел понятие «хорды» как первого аналога современных тригонометрических функций. Гиппарх разработал таблицы хорд, которые позволяли рассчитывать длины хорд в зависимости от углов, что стало основой для будущих тригонометрических вычислений [3].

Дальнейшее развитие тригонометрии связано с Клавдием Птолемеем, чьи труды в астрономии («Альмагест») содержали систематизацию знаний о тригонометрии. В частности, Птолемей разработал теорему, известную как «Теорема Птолемея», которая описывает отношения между сторонами и диагоналями вписанного четырехугольника [3].

Существенный вклад в развитие тригонометрии внесли ученые мусульманской эпохи в Средние века. Они заменили ранние понятия хорды на синус, косинус и тангенс, что сделало расчеты более удобными. Исследования таких ученых, как Аль-Баттани, Аль-Каши и Насир ад-Дин ат-Туси, расширили тригонометрические функции, ввели их четкое определение и систематизацию. Эти труды были переведены на латынь в эпоху Возрождения, что позволило распространить тригонометрические знания по всей Европе [7].

В XVI–XVII веках тригонометрия стала неотъемлемой частью европейской науки, ее активно использовали астрономы (например, Иоганн

Кеплер и Тихо Браге), инженеры и картографы. В этот период начали разрабатываться таблицы значений тригонометрических функций, а также их приложения в геодезии и механике. В XVIII веке Леонард Эйлер ввел аналитические представления тригонометрических функций через экспоненциальные выражения, что стало важным шагом к более глубокому пониманию их природы [7].

С развитием образовательных систем в XVIII–XIX веках тригонометрия начала включаться в школьные и университетские курсы. В Европе тригонометрия преподавалась как часть геометрии и аналитической математики, поскольку ее применение требовалось в военном деле, инженерии и навигации. В этот период основное внимание уделялось практическим задачам: вычислению углов и расстояний по тригонометрическим формулам [7].

В Российской империи тригонометрия начала преподаваться в рамках математических курсов гимназий и реальных училищ. Один из первых известных учебников, включавших тригонометрию, был создан Михаилом Васильевичем Остроградским. В его трудах тригонометрия рассматривалась как инструмент для решения прикладных задач в механике и инженерии. Основное внимание уделялось простейшим тригонометрическим функциям, их таблицам и основным тригонометрическим тождествам [3].

Тригонометрические уравнения, как отдельная тема, начали включаться в образовательные программы на рубеже XIX–XX веков. Это было связано с усложнением задач, решаемых в инженерии и физике, а также с ростом требований к математической подготовке учащихся [3].

В XX веке тригонометрия стала обязательной частью школьных программ во многих странах. В Советском Союзе тригонометрия преподавалась в рамках алгебры и анализа в старших классах (9–10 классы). Это было обусловлено необходимостью подготовки к поступлению в технические вузы, где тригонометрия занимала важное место в курсах высшей математики [3].

В 1930–1940-х годах школьные программы включали изучение основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс и котангенс), их графиков, а также простейших уравнений, таких как [3]:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Методика преподавания в этот период основывалась на использовании таблиц значений тригонометрических функций и единичной окружности. Основное внимание уделялось задачам, связанным с практическими приложениями, например, расчету углов в геометрических фигурах [7].

В 1970–1980-х годах школьная программа по тригонометрии была значительно расширена. В этот период акцент сместился на развитие аналитических навыков учащихся. В программу были включены тригонометрические тождества, такие как [7]:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Ученики изучали преобразования тригонометрических выражений, решали уравнения с параметрами и применяли графические методы для анализа решений. Это подготовило основу для более глубокого понимания тригонометрии на уровне вузов [7]. Изменения в содержании школьных программ на протяжении XX века представлены в таблице 1.

Таблица 1

Изменения в содержании школьных программ на протяжении XX века

Период	Содержание программы	Особенности
1930–1940-е годы	Основные тригонометрические функции	Использование таблиц значений, акцент на простейшие уравнения
1950–1960-е годы	Решение уравнений с использованием единичной окружности	Введение базовых тригонометрических тождеств
1970–1980-е годы	Уравнения с преобразованиями (формулы двойного угла, суммы и разности аргументов)	Подготовка к техническому образованию, акцент на аналитические преобразования
1990-е годы	Расширение задач на уравнения с параметрами; применение графического метода	Переход к более вариативным программам, объединение алгебры и анализа

Современность	Решение сложных уравнений, включая трансцендентные; анализ графиков функций и их периодичности	Подготовка к ЕГЭ, развитие навыков анализа, моделирования, применение знаний в прикладных задачах
---------------	--	---

В современных школьных программах, разработанных в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, тригонометрические уравнения изучаются в 10–11 классах [23]. В рамках профильного уровня математики выделяются следующие ключевые аспекты:

1. Решение простейших уравнений:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

2. Применение тригонометрических тождеств для упрощения выражений:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

3. Решение сложных уравнений с преобразованиями:

$$\sin 2x, \quad \cos 2x, \quad \operatorname{tg} 2x.$$

4. Графический метод решения уравнений [8].

Задания на тригонометрические уравнения активно используются в ЕГЭ профильного уровня. Они требуют от учащихся не только знаний формул, но и умения анализировать условия задач, преобразовывать выражения и применять графические методы [23].

История включения тригонометрических уравнений в школьную программу демонстрирует эволюцию образовательных подходов и повышение требований к уровню математической подготовки учащихся. Современные программы, ориентированные на сдачу ЕГЭ, делают акцент на развитие аналитического мышления, навыков преобразования выражений и прикладного использования тригонометрии. Тема тригонометрических уравнений продолжает занимать важное место в образовательном процессе, обеспечивая подготовку учащихся к решению задач повышенной сложности,

необходимых для успешной сдачи экзаменов и дальнейшего обучения в вузах [23].

Современные подходы к изучению тригонометрических уравнений позволяют не только сформировать прочные знания в области математики, но и развивать универсальные компетенции, такие как логическое мышление, способность к анализу и обобщению информации, навыки моделирования и решения практических задач [4].

Тригонометрические уравнения имеют широкий круг применения в различных областях науки и техники. Они используются для решения задач в физике (например, при анализе колебательных процессов и волновых явлений), химии (определение угловых характеристик молекул), инженерии (расчет нагрузок в строительных конструкциях, проектирование механизмов), а также в компьютерной графике, геодезии и астрономии. В школьной программе изучение тригонометрических уравнений также выполняет важную функцию развития системного математического мышления, позволяя учащимся осваивать методы работы с абстрактными понятиями и моделями [1].

Особое внимание уделяется заданиям на решение тригонометрических уравнений в условиях нестандартных ситуаций. Например, учащихся учат преобразованию сложных тригонометрических выражений, анализу периодичности функций, нахождению общих решений уравнений и их интерпретации в контексте реальных задач. Это позволяет формировать практико-ориентированный подход к изучению математики, где знания применяются для решения задач, возникающих в повседневной жизни и профессиональной деятельности [2].

Современный подход к обучению тригонометрическим уравнениям основывается на сочетании теоретических знаний и их практического применения. Уроки, посвященные данной теме, включают:

1. Теоретическую часть: изучение основных понятий, формул и свойств тригонометрических функций. Учащиеся учатся понимать, как

взаимосвязаны синус, косинус, тангенс и котангенс, и как эти функции используют для анализа тригонометрических выражений [1].

2. Разбор типовых задач: решение уравнений с использованием единичной окружности, тригонометрических тождеств, графических методов. Например, уравнение вида: $\sin 2x = \cos x$ может быть преобразовано с использованием формул двойного угла и решено аналитически [2].

3. Практическую часть: решение задач, связанных с прикладными аспектами, например, нахождение углов наклона в геометрических задачах, расчет периодов колебаний в физике, анализ графиков функций [1].

4. Работу с параметрами: задания на ЕГЭ часто включают уравнения с параметрами, например: $\sin^2 x + 2a \sin x \cos x + a^2 \cos^2 x = 1$. Такие задачи требуют от учащихся глубокого понимания темы и умения применять систематический подход к решению [4].

Кроме того, методика преподавания включает использование современных технологий. Интерактивные графические программы, такие как GeoGebra [12] или Desmos [11], позволяют наглядно демонстрировать свойства тригонометрических функций и их графиков, что способствует лучшему пониманию материала. Также активно применяются тесты и онлайн-симуляторы, которые помогают учащимся отработать навыки решения тригонометрических уравнений в игровых и соревновательных форматах.

Задания на тригонометрические уравнения присутствуют в профильном уровне ЕГЭ по математике и относятся к числу задач средней и повышенной сложности. Они направлены на проверку умения анализировать условия задачи, находить общие и частные решения, использовать тригонометрические преобразования [23]. Примеры таких заданий включают:

- решение уравнений с использованием тригонометрических тождеств, например: $\sin x + \sin 3x = 0$;

- анализ параметрических уравнений, например: $\cos^2 x - 2a \cos x + a^2 - 1 = 0$, где необходимо найти все значения параметра a , при которых уравнение имеет решение;

- использование графических методов для нахождения решений, например, пересечение графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ [8].

Эти задания требуют от учащихся не только знаний формул и алгоритмов, но и способности к логическому анализу, последовательному преобразованию выражений и интерпретации результатов [5].

Для учащихся, которые готовятся к участию в олимпиадах или планируют поступление в технические вузы, предусмотрено углубленное изучение темы тригонометрических уравнений [4]. Это включает:

- решение уравнений более высокого порядка (например, трехчленных или полиномиальных уравнений с тригонометрическими функциями);

- использование методов приведения аргументов для упрощения уравнений;

- решение уравнений с несколькими переменными и параметрами, например: $\sin(x + y) + \cos(x - y) = 1$ [8].

Задания такого уровня помогают учащимся развить навыки работы с абстракциями и математическими моделями, что является важным этапом подготовки к освоению высшей математики.

Историческое развитие тригонометрии как науки и ее интеграция в школьную программу демонстрируют важность этого раздела математики на всех этапах образовательного процесса. Тригонометрические уравнения прошли долгий путь от простейших задач античности до сложных аналитических и графических методов решения, которые изучаются в современных школах [13].

Сегодня тригонометрические уравнения являются не только важным элементом подготовки к экзаменам и олимпиадам, но и основой для формирования аналитического мышления, развития навыков работы с абстрактными моделями и решения прикладных задач. Современные

методики преподавания и использование цифровых технологий делают изучение этой темы более наглядным, доступным и эффективным, что способствует повышению качества математического образования [14].

1.2. Анализ существующих подходов к изучению тригонометрических уравнений в школьном курсе математики

Изучение тригонометрических уравнений в школьной программе по математике является одной из ключевых тем, на которую направлены значительные усилия методистов, педагогов и исследователей в области образования. Эта тема требует от учащихся не только знания тригонометрических функций, но и умения преобразовывать выражения, находить общее решение, анализировать его графически, а также применять изученные методы в задачах прикладного характера. В последние десятилетия появилось множество подходов и методик, направленных на эффективное обучение этой теме [2].

Научные исследования в области преподавания математики показывают, что тема тригонометрических уравнений вызывает значительные затруднения у учащихся. Это связано с её абстрактным характером, сложностью преобразований и необходимостью работы с периодическими функциями. Рассмотрим основные подходы, предложенные различными авторами и исследователями [1].

На основе анализа педагогической литературы можно выделить несколько основных подходов, которые использовались и продолжают использоваться в обучении решению тригонометрических уравнений. Сравнительный анализ подходов представлен в таблице 2.

Таблица 2

Сравнительный анализ подходов к обучению решений тригонометрических уравнений

Подход	Описание	Преимущества	Недостатки
--------	----------	--------------	------------

Алгоритмический	Освоение четких правил и последовательности шагов для решения тригонометрических уравнений	- Формирует систематические навыки - Удобен для стандартных задач.	- Недостаточный акцент на творческое мышление - Сложности при решении нестандартных задач
Графический	Использование графиков для нахождения решений уравнений и анализа их свойств	- Развивает пространственное мышление - Позволяет наглядно интерпретировать решения	- Требует времени на освоение методов построения графиков - Не всегда применим для сложных задач
Интегративный	Связь тригонометрии с другими разделами математики (геометрией, алгеброй, анализом)	- Формирует целостное понимание математики - Развивает аналитические способности	- Требует высокого уровня подготовки учащихся - Сложен для реализации в базовых программах
Практико-ориентированный	Решение задач, связанных с реальной жизнью и приложениями тригонометрических уравнений	- Мотивирует учащихся - Помогает осознать прикладное значение темы	- Трудности в реализации (необходимость разработки прикладных задач)

1. Алгоритмический подход.

Алгоритмический подход является одним из наиболее распространенных в преподавании тригонометрических уравнений. Он основан на четких правилах и последовательности действий, которые учащиеся должны запомнить и применять при решении задач. Этот подход предполагает [2]:

1.1 Приведение уравнений к базовым формам, например, $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

1.2 Использование тригонометрических тождеств для упрощения выражений.

1.3 Применение известных формул для нахождения общего решения, например: $x = \arcsin a + 2\pi n$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Достоинства подхода:

- формирует систематические навыки решения задач;
- удобен для подготовки к типовым заданиям ЕГЭ, где требуется четкое следование алгоритму;
- простота в применении для базовых уравнений.

Недостатки подхода:

- слабое развитие творческого мышления и гибкости в подходе к решению нестандартных задач;
- ограниченность в применении для сложных задач, требующих исследовательского подхода или анализа параметров.

Исследователи, такие как Ю.М. Колягин и Л.С. Атанасян, отмечают, что алгоритмический подход особенно полезен на начальных этапах изучения тригонометрических уравнений, так как он позволяет учащимся закрепить основные правила и последовательности действий [2].

2. Графический подход.

Графический подход основан на визуализации решений тригонометрических уравнений с использованием графиков функций. Учащиеся учатся строить графики тригонометрических функций, таких как $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, и находить точки пересечения с графиками других функций или оси абсцисс [10].

Пример применения: Уравнение $\sin x = \cos x$ можно решить, построив графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Решения уравнения соответствуют точкам пересечения этих графиков, что позволяет наглядно увидеть их количество и расположение [16].

Достоинства подхода:

- развивает пространственное и аналитическое мышление;
- позволяет учащимся наглядно увидеть природу решений, их количество и периодичность;
- укрепляет понимание связи между алгебраическими и геометрическими методами.

Недостатки подхода:

- требует времени на освоение навыков построения графиков;
- не всегда применим для сложных уравнений или уравнений с параметрами.

Графический подход активно используется в зарубежных методиках, таких как работы Джона Хьюза и Дэвида Уэллса. Они подчеркивают, что использование графиков позволяет учащимся глубже понять свойства тригонометрических функций [10].

3. Интегративный подход.

Интегративный подход предполагает связь тригонометрических уравнений с другими разделами математики, такими как алгебра, геометрия и математический анализ. Например, уравнение $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ можно рассматривать как уравнение окружности радиуса 1, что связывает тригонометрию с геометрией [17].

Особенности подхода:

- связывает различные математические разделы, что позволяет учащимся видеть общую картину и взаимосвязь между темами;
- развивает аналитические способности и умение применять знания в новых контекстах.

Достоинства подхода:

- формирует целостное понимание математики как науки;
- развивает способности к моделированию и анализу.

Недостатки подхода:

- требует высокого уровня подготовки учащихся;
- может быть сложным для внедрения в базовые школьные программы.

Л.Г. Петерсон в своих методических рекомендациях активно продвигает интегративный подход, связывая тригонометрию с геометрией и алгеброй, а также предлагая использовать компьютерные технологии для построения графиков [12].

4. Практико-ориентированный подход.

Практико-ориентированный подход фокусируется на использовании тригонометрических уравнений для решения задач, связанных с реальной жизнью. Например:

- определение угла наклона крыши;
- расчет длины тени объекта в зависимости от времени суток;
- решение задач на периодические процессы, такие как колебания или волны [18].

Достоинства подхода:

- мотивирует учащихся, так как демонстрирует практическую значимость математики;
- развивает умение применять знания для решения реальных задач.

Недостатки подхода:

- требует значительных усилий для разработки методических материалов и задач;
- сложен для реализации в рамках стандартных школьных программ.

Исследования, проведенные О.В. Муравиной и Г.К. Муравиным, показывают, что интеграция прикладных задач в процесс обучения существенно повышает интерес учащихся к изучению тригонометрии [16].

Несмотря на разнообразие подходов, преподавание тригонометрических уравнений в школьной программе сталкивается с рядом проблем [19]:

1. Недостаточное внимание к задачам прикладного характера в базовом курсе.
2. Сложности в освоении графических методов из-за их технической сложности.
3. Ограниченное использование современных технологий, таких как интерактивные математические программы (GeoGebra, Desmos).

Перспективы развития методики преподавания тригонометрических уравнений связаны с решением вышеуказанных проблем. Современные технологии, интеграция междисциплинарных знаний и адаптация

образовательных программ к потребностям учащихся могут значительно повысить качество освоения этой темы. Рассмотрим основные направления развития [2]:

1. Активное использование цифровых технологий.

Современные интерактивные инструменты, такие как GeoGebra [12], Desmos [11] и другие графические программы, позволяют наглядно демонстрировать свойства тригонометрических функций, визуализировать решения уравнений и исследовать их зависимости от параметров. Это способствует более глубокому пониманию учащимися природы тригонометрических уравнений.

Преимущества:

- простота построения сложных графиков и их анализа;
- возможность моделирования реальных задач;
- развитие интереса учащихся к изучению темы через интерактивные методы.

Пример применения: Построение графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ для анализа их пересечений, а также изменение параметров уравнения (например, $a \sin x + b \cos x = c$) для исследования влияния коэффициентов на количество решений [20].

2. Разработка прикладных задач

Включение в учебный процесс большего количества практико-ориентированных задач помогает учащимся видеть связь между теорией и реальной жизнью. Например, задачи, связанные с расчетом углов наклона, высоты объектов, периодичности явлений, позволяют осознать практическую значимость тригонометрии [1].

Примеры прикладных задач:

- определение времени заката, если известно положение Солнца на небосводе;
- расчет длины тени объекта в зависимости от высоты Солнца;

- задачи на нахождение расстояний между объектами с использованием тригонометрических функций.

Преимущества:

- повышение мотивации учащихся;
- развитие навыков применения математических знаний для решения реальных проблем;
- формирование межпредметных связей (например, с физикой, географией, инженерией).

3. Интеграция межпредметных связей.

Современные образовательные стандарты подчеркивают важность развития метапредметных компетенций. Тригонометрические уравнения могут быть связаны с другими разделами математики (например, алгеброй, геометрией, математическим анализом), а также с такими дисциплинами, как физика, астрономия и инженерия [23].

Пример межпредметной связи:

- анализ колебательных процессов в физике с использованием уравнений вида $\sin(\omega t + \varphi) = A$;
- геометрическая интерпретация тригонометрических уравнений через единичную окружность и свойства прямоугольного треугольника.

Преимущества:

- формирование целостного представления о математике;
- развитие аналитического мышления и логики;
- подготовка к решению сложных междисциплинарных задач.

4. Увеличение доли задач с параметрами.

Одной из самых сложных тем в курсе тригонометрии являются уравнения с параметрами, поскольку они требуют от учащихся не только знания формул, но и умения анализировать различные ситуации. Однако такие задачи развивают аналитическое мышление и готовят к выполнению заданий повышенной сложности в ЕГЭ [8].

Пример задачи с параметром: решить уравнение $\sin^2 x + a \cos x = 1$ и определить, при каких значениях параметра a уравнение имеет решения [8].

Преимущества:

- развитие навыков анализа и исследования множества решений;
- подготовка к нестандартным задачам экзаменационного уровня;
- укрепление знаний по основным тригонометрическим тождествам.

5. Введение исследовательских заданий.

Исследовательские задания позволяют учащимся самостоятельно находить закономерности, исследовать свойства функций и уравнений. Такие задания помогают развить познавательную активность и умение применять математические знания в новых условиях [2].

Пример исследовательской задачи: изучить, как изменяется количество решений уравнения $\sin x = a$ в зависимости от значения параметра a , и интерпретировать результаты с помощью графиков [8].

Преимущества:

- развитие самостоятельности и творческого подхода;
- формирование навыков работы с информацией;
- подготовка к олимпиадным задачам и решениям нестандартных уравнений.

6. Адаптация содержания к требованиям ЕГЭ.

Решение тригонометрических уравнений – одна из ключевых тем профильного уровня ЕГЭ по математике. Для успешного выполнения заданий ЕГЭ необходимо внимание к следующим аспектам [8]:

- решение стандартных уравнений, таких как $\sin x = a$ или $\cos^2 x = \sin^2 x$;
- использование тригонометрических преобразований, например, формулы двойного или половинного угла;
- решение уравнений с параметрами;
- анализ заданий с использованием графиков функций.

Г.К. Муравин и О.В. Муравина, в своих пособиях акцентируют внимание на поэтапной подготовке учащихся к выполнению задач ЕГЭ, начиная с простейших уравнений и заканчивая сложными задачами на исследование [16].

7. Использование дифференцированного подхода

Уровень подготовки учащихся в классе может значительно различаться, поэтому важно использовать дифференцированный подход, который включает [21]:

- базовый уровень: обучение решению простейших уравнений, таких как $\sin x = a$, $\cos x = a$;
- уровень средней сложности: включение уравнений с использованием тригонометрических тождеств и преобразований;
- углубленный уровень: решение сложных уравнений с параметрами и задач исследовательского характера.

Преимущества:

- позволяет учитывать индивидуальные особенности учащихся;
- повышает эффективность обучения за счет постепенного увеличения сложности заданий;
- подходит для подготовки как к базовому, так и профильному уровню ЕГЭ.

Анализ существующих подходов к изучению тригонометрических уравнений показывает, что успешное освоение темы требует сочетания различных методов обучения. Алгоритмический подход позволяет освоить базовые навыки, графический – развивает интуицию и пространственное мышление, интегративный – формирует целостное математическое мышление, а практико-ориентированный – помогает учащимся увидеть прикладное значение темы [22].

Для повышения эффективности обучения важно активно использовать цифровые технологии, разрабатывать прикладные задачи, внедрять исследовательские и межпредметные задания, а также адаптировать

содержание курса к требованиям ЕГЭ. Такой комплексный подход позволит учащимся не только успешно сдавать экзамены, но и применять полученные знания в реальной жизни и профессиональной деятельности [24].

1.3. Требования ЕГЭ по математике к решению тригонометрических уравнений в старшей школе

Тригонометрические уравнения занимают важное место в структуре профильного ЕГЭ по математике. Эта тема проверяет широкий спектр знаний и умений учащихся: от базового понимания тригонометрических функций до способности выполнять сложные преобразования, анализировать условия и находить решения уравнений в заданных интервалах. Включение тригонометрических уравнений в экзамен обусловлено их фундаментальным значением в математике и прикладных науках, а также необходимостью подготовки школьников к дальнейшему обучению в вузах [25].

Единый государственный экзамен по математике профильного уровня включает задания на решение тригонометрических уравнений, так как они являются ярким примером задач, требующих сочетания теоретических знаний и практических навыков. Эти задания охватывают разные уровни сложности и проверяют широкий спектр математических компетенций [23].

Приведем разделы экзамена, где представлены тригонометрические уравнения.

Часть 1 (базовый и средний уровень сложности).

В первой части экзамена тригонометрия чаще всего встречается в номерах 6, 7, 9 и 12. Это задания базового или среднего уровня сложности, которые требуют [8]:

- решения простейших тригонометрических уравнений, таких как $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$;
- нахождения всех корней в заданном интервале, например, $[0; 2\pi]$ или $[-\pi; \pi]$.

Пример задания: «Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$ и найти все корни на отрезке $[0; 2\pi]$ ».

Часть 2 (повышенный и высокий уровень сложности).

Во второй части ЕГЭ задачи на тригонометрические уравнения представлены в номере 13. Они требуют [8]:

- применения тригонометрических тождеств;
- преобразования сложных уравнений, например, $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$;
- решения уравнений с параметрами;
- анализа множества решений, включая исследовательские задачи.

Пример задания: «Решить уравнение $\sin^2 x - 2 \cos x = 0$ на отрезке $[0; 2\pi]$ ».

Включение тригонометрических уравнений в профильный экзамен по математике объясняется следующими факторами:

1. Фундаментальность тригонометрии как раздела математики.

Тригонометрия – это один из ключевых разделов математики, который активно используется в других областях: физике, инженерии, астрономии, программировании и других прикладных науках. Умение решать тригонометрические уравнения необходимо для дальнейшего изучения высшей математики [26].

2. Развитие аналитического и логического мышления.

Решение тригонометрических уравнений требует от учащихся навыков анализа, логического мышления и умения находить рациональные пути решения. Эти качества важны не только в математике, но и в других дисциплинах, где требуется обоснованность выводов и структурированное мышление.

3. Проверка владения основными математическими инструментами.

Успешное решение тригонометрических уравнений предполагает знание тригонометрических функций, их свойств, формул, а также умение выполнять алгебраические преобразования.

4. Прикладное значение.

Тригонометрические уравнения находят применение в реальной жизни: в расчетах углов наклона, периодических процессов (например, колебания, волны), движении по кругу и других явлениях. Их включение в экзамен демонстрирует практическую значимость математики.

5. Проверка готовности к обучению в вузах.

Задачи на тригонометрические уравнения являются хорошим индикатором уровня подготовки выпускников к изучению высшей математики, где тригонометрия играет важную роль [27].

Анализ результатов ЕГЭ последних лет показывает, что задачи на тригонометрические уравнения вызывают у школьников значительные трудности [8]. Рассмотрим основные ошибки, их причины и последствия.

1. Неправильное применение тригонометрических тождеств:

1.1. Учащиеся путают основные формулы, например:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ошибки часто возникают из-за механического заучивания формул без понимания их смысла.

Пример ошибки: при преобразовании уравнения $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$, учащийся неверно применяет тождество и записывает: $\sin x - \cos x = 0$.

2. Ошибки при нахождении общего решения:

2.1. Выпускники забывают учитывать периодичность функций или не записывают вторую серию решений, например:

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример ошибки: при решении уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, учащийся записывает только одну серию решений:

$$x = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \text{ пропуская } x = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n.$$

3. Ошибки при нахождении корней в заданном интервале:

3.1. Учащиеся не проверяют, входят ли найденные корни в заданный интервал, или неправильно интерпретируют границы интервала.

Пример ошибки: на интервале $[0; 2\pi]$ указываются корни, выходящие за его пределы.

4. Сложности в преобразовании сложных уравнений:

4.1. Некоторые учащиеся не знают, как использовать формулы двойного угла или другие преобразования. Это приводит к неверному упрощению уравнений.

Пример ошибки: уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$ преобразуется неверно, так как учащийся не использует формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

5. Трудности в графическом анализе.

5.1. Учащиеся не умеют строить графики тригонометрических функций или неправильно интерпретируют точки пересечения.

Для повышения уровня подготовки к решению тригонометрических уравнений необходимо учитывать типичные ошибки и работать над их устранением [28]. Пути преодоления ошибок представлены в таблице 3.

Таблица 3

Пути преодоления ошибок

Тип ошибки	Причина	Рекомендации по устранению
Ошибки в тождествах	Недостаточное знание формул и их свойств	Регулярное повторение и использование таблицы тригонометрических тождеств, решение задач на упрощение выражений
Ошибки в общем решении	Пропуск одной из серий решений, путаница в использовании периода	Отработка типовых задач на нахождение общего решения, анализ структуры тригонометрических функций
Ошибки в интервалах	Невнимательность или непонимание работы с интервалами	Упражнения на проверку корней в интервалах, графическая интерпретация решений
Ошибки в сложных преобразованиях	Недостаточно уверенное владение тригонометрическими преобразованиями	Постепенное усложнение задач: от простых преобразований к сложным, использование учебников с

		пошаговыми примерами
Ошибки в графическом анализе	Слабое понимание связи графиков и решений тригонометрических уравнений	Использование графических методов, построение графиков вручную и с помощью программ (например, GeoGebra, Desmos)
Ошибки в вычислениях	Невнимательность при выполнении алгебраических операций, сложность работы с дробями и радикалами	Регулярная практика выполнения арифметических операций, проверка промежуточных результатов, использование калькулятора для проверки

Для устранения всех перечисленных ошибок важно уделять внимание не только решению типовых задач, но и их тщательному разбору. Учителю следует акцентировать внимание учащихся на ключевых этапах решения: выборе метода, правильности преобразований, проверке найденных корней, а также на необходимости анализа промежуточных шагов. Это позволит учащимся лучше понимать логику решения задач и избегать распространенных ошибок [29].

На основании открытых данных о результатах ЕГЭ, опубликованных ФИПИ, в таблице 4 представлены результаты выполнения заданий по тригонометрии за последние 3 года [22].

Таблица 4

Данные о результатах профильного ЕГЭ по математике (применение тригонометрии к решению задач)

Год	Часть 1 (базовые задания)	Часть 2 (сложные задания)	Общая успешность выполнения
2022 год	74%	43%	58%
2023 год	77%	46%	61%
2024 год	81%	51%	65%

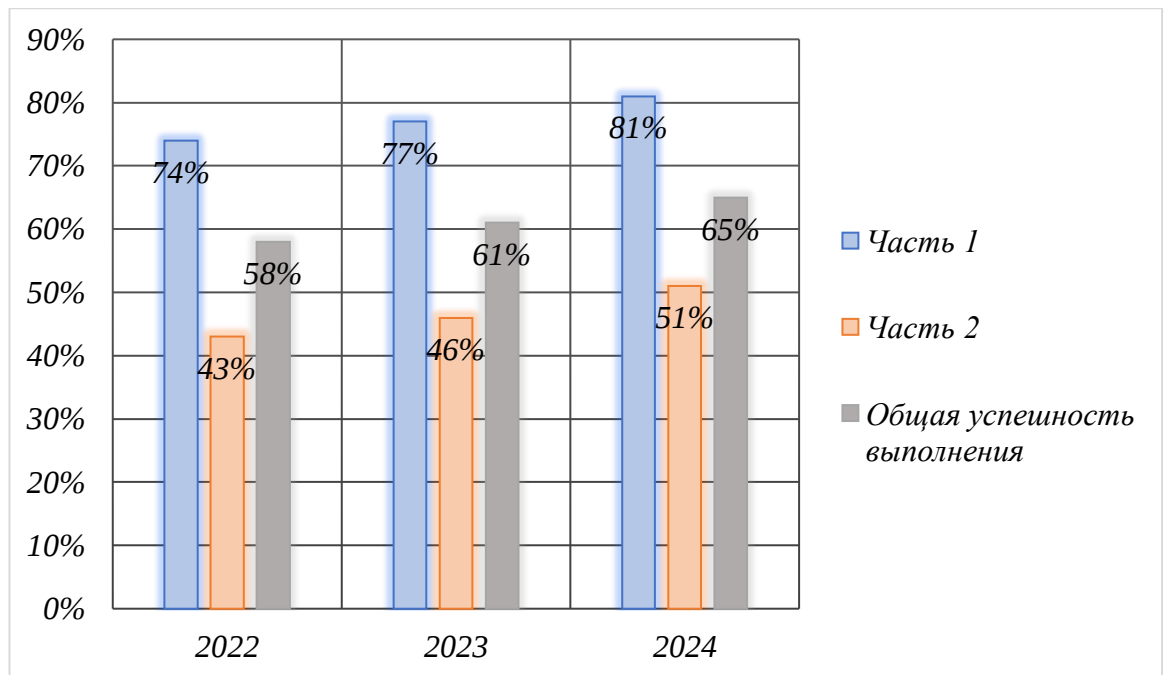


Рисунок 1. Динамика успешности выполнения заданий по тригонометрии (2022–2024 годы)

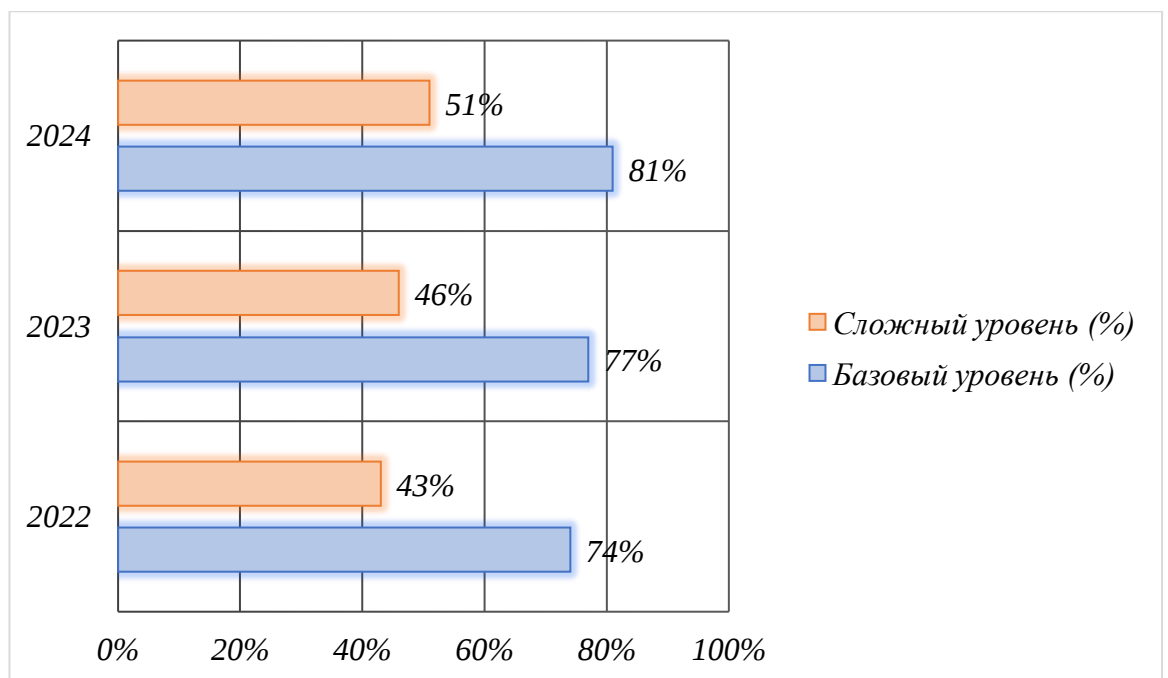


Рисунок 2. Разрыв между успешностью выполнения базовых и сложных заданий

На рисунке 2 можно отметить, что успешность в решении базовых заданий традиционно выше (почти в два раза), что связано с меньшей сложностью базовых уравнений.

Анализ данных [25]:

1. Повышение успешности выполнения задач базового уровня.

С 2022 по 2024 годы наблюдается стабильный рост успешности выполнения базовых заданий с применением тригонометрии: с 74% до 81%.

Основная причина – лучшее усвоение алгоритмов решения простейших тригонометрических уравнений. Учебные пособия и подготовительные курсы уделяют особое внимание этим заданиям из-за их высокой предсказуемости.

2. Медленный рост успешности выполнения сложных заданий.

Выполнение сложных заданий (Часть 2) также улучшилось, но темпы роста гораздо ниже: с 43% в 2022 году до 51% в 2024 году.

Основные трудности:

- применение сложных тригонометрических тождеств;
- решение уравнений с параметрами;
- анализ множества решений, особенно с использованием графических методов.

3. Общая успешность выполнения.

Общий уровень успешности выполнения заданий на тригонометрические уравнения вырос с 58% до 65% за три года.

Это указывает на постепенное улучшение подготовки школьников, но сохраняется разрыв между базовыми и сложными заданиями.

Для успешного решения задач на тригонометрические уравнения и минимизации ошибок учащимся рекомендуется:

1. Повторение базовых знаний:

1.1. Освежить в памяти основные тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) и их свойства.

1.2. Регулярно повторять таблицу значений тригонометрических функций для углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90° .

1.3. Уделить внимание основным тригонометрическим тождествам:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Практика решения типовых задач:

2.1. Отработать алгоритм нахождения общего решения для уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$ и $\operatorname{tg} x = a$.

2.2. Решать задачи на нахождение корней тригонометрических уравнений в ограниченных интервалах.

2.3. Практиковаться в использовании формул приведения и преобразования сложных выражений.

3. Работа с нестандартными задачами:

3.1. Изучить методы решения уравнений с параметрами.

3.2. Проводить анализ уравнений с использованием графиков тригонометрических функций.

4. Использование графических методов:

4.1. Научиться строить графики функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и их модификаций.

4.2. Практиковаться в нахождении точек пересечения графиков для анализа количества решений.

5. Разбор заданий из ЕГЭ прошлых лет:

5.1. Решение задач из реальных вариантов ЕГЭ поможет учащимся привыкнуть к структуре экзамена и требованиям к оформлению.

6. Работа с ошибками:

6.1. После решения задачи важно не только проверить конечный ответ, но и проанализировать все этапы решения. Это позволяет выявить слабые места и избежать их повторения.

7. Использование цифровых инструментов:

7.1. Программы и приложения, такие как GeoGebra и Desmos, помогут наглядно изучать графики тригонометрических функций и проверять правильность решений [26].

Для учителей и методистов важно разработать эффективную стратегию подготовки учащихся к решению тригонометрических уравнений. Она должна включать:

1. Модульный подход:

Обучение теме "Тригонометрические уравнения" следует разделить на модули:

- 1.1. Знакомство с основными тригонометрическими функциями.
- 1.2. Изучение простейших тригонометрических уравнений.
- 1.3. Работа с тригонометрическими тождествами.
- 1.4. Решение сложных уравнений и уравнений с параметрами.
- 1.5. Графический анализ решений.

2. Дифференцированный подход:

Уровень подготовки учащихся может существенно различаться. Поэтому важно использовать задания разной сложности:

- 2.1. Для слабых учащихся – отработка базовых навыков (решение простейших уравнений).
- 2.2. Для средне подготовленных – задачи среднего уровня сложности (уравнения с использованием тождеств).
- 2.3. Для сильных учащихся – сложные задачи, включая уравнения с параметрами и исследовательские задания.

3. Интеграция межпредметных связей:

Демонстрация прикладного значения тригонометрии в физике, астрономии и инженерии позволит учащимся лучше понять значение изучаемого материала.

4. Использование обратной связи:

Регулярное проведение тестов и контрольных работ поможет учителю выявить типичные ошибки и скорректировать процесс обучения.

Тригонометрические уравнения являются важной частью профильного ЕГЭ по математике. Они проверяют не только знание тригонометрических функций и тождеств, но и способность учащихся анализировать, преобразовывать выражения и находить решения в заданных интервалах [27].

Типичные ошибки учащихся, такие как неправильное применение тождеств, пропуск серий решений или ошибки в интервалах, связаны с недостаточным закреплением базовых знаний и недостаточной практикой. Для их устранения требуется систематическая работа, включающая повторение теории, решение типовых задач, использование графических методов и анализ ошибок [28].

Выводы по главе 1

Анализ исторического развития школьного курса математики показал, что тригонометрические уравнения занимают значимое место в образовательной программе старших классов. Изучение теоретических источников позволило определить особенности исторического включения данной темы в школьный курс математики, начиная с античных времен до современного этапа. Тригонометрические уравнения изначально рассматривались как прикладной раздел, связанный с решением практических задач, но со временем стали важной частью общей математической подготовки, направленной на развитие логического и аналитического мышления учащихся.

Анализ современной учебной литературы и ФГОС позволил выделить основные подходы к изучению тригонометрических уравнений в школьной программе. В частности, было установлено, что изучение этой темы направлено не только на освоение теоретического материала, но и на развитие метапредметных компетенций, таких как критическое мышление, способность к анализу и синтезу информации, применение математических знаний в нестандартных ситуациях. Особое внимание уделяется подготовке учащихся к выполнению заданий ЕГЭ, где тригонометрические уравнения являются важным элементом профильного уровня.

Путем анализа типичных ошибок учащихся при решении тригонометрических уравнений были выявлены основные трудности, связанные с недостаточным знанием тригонометрических тождеств, сложностями в графическом анализе и пропусками корней в заданных интервалах.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1. Основные методические принципы подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения»

Подготовка к ЕГЭ по математике требует системного подхода, особенно в части изучения тригонометрических уравнений. Эти уравнения являются одними из самых сложных для учащихся из-за многообразия методов решений, необходимости владения тригонометрическими тождествами и умения анализировать решения на соответствие области определения [29].

1. *Принцип системности и последовательности.*

Тригонометрические уравнения в ЕГЭ профильного уровня представлены заданиями базового и повышенного уровней сложности.

Базовый уровень: простейшие уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = c$, $\operatorname{ctg} x = d$.

Повышенный уровень: комбинированные уравнения, требующие:

- приведения к квадратным уравнениям;
- разложения на множители;
- использования универсальной подстановки;
- применения методов оценки (например, $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$).

Методические рекомендации:

- постепенное усложнение задач (от решений вида $\sin x = \frac{1}{2}$ до уравнений с параметрами);
- использование таблиц основных тригонометрических значений и свойств функций;

- введение алгоритмов решения каждого типа уравнений (например, универсальный алгоритм для уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$).

2. Принцип наглядности.

Графический метод помогает визуализировать решения и понять их множественность.

- Построение графиков функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и их преобразований.

- Анализ решений на единичной окружности.

Пример. Для уравнения $\cos 2x = \frac{1}{2}$:

- построить графики $y = \cos 2x$ и $y = \frac{1}{2}$.

- определить точки пересечения и записать общее решение:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Принцип дифференцированного подхода.

Учет индивидуальных особенностей учащихся:

- для слабых учеников: упор на базовые уравнения и их графическую интерпретацию;

- для сильных учеников: задачи с параметрами (например, «Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin^2 x + a \sin x + 1 = 0$ имеет решения»).

4. Принцип практической направленности.

Подготовка должна включать:

- типовые задания ЕГЭ;

- контекстные задачи (например, гармонические колебания в физике);

- задания с развёрнутым ответом, требующие обоснования каждого шага.

5. Принцип повторения и закрепления.

- Повторение формул: основные тождества, формулы двойного угла, понижения степени.

- Тренировочные тесты с ограничением времени (например, 30 минут на 5 уравнений).

- Разбор ошибок: анализ типичных недочетов (потеря корней, не учёт ОДЗ).

6. Принцип вариативности решений.

Учащимся необходимо показать, что одно уравнение может решаться разными методами:

- метод замены переменной (например, $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0$ сводится к квадратному);

- факторизация (например, $\sin x - \sin 3x = 0$ через разность синусов);

- оценочный метод для уравнений вида $\sin x + \cos x = 2$ (решений нет, так как максимум функции $\sqrt{2}$).

7. Принцип контроля и обратной связи.

- Проведение диагностических работ с анализом ошибок.

- Использование онлайн-тренажёров (например, «РешуЕГЭ») для автоматической проверки.

- Разбор реальных работ ЕГЭ прошлых лет.

8. Принцип интеграции с другими разделами математики.

Тригонометрические уравнения не существуют изолированно, а взаимосвязаны с другими темами курса алгебры и начала анализа. Для эффективной подготовки необходимо показывать:

1) алгебраизацию тригонометрических задач.

Пример: Решение уравнения $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$ сводится к квадратному через подстановку $t = \tan x$:

$$t^2 + 3t + 2 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Важно: Учет области определения ($\cos x = 0$).

2) связь с математическим анализом: исследование функций на монотонность и экстремумы помогает анализировать количество решений.

Например, уравнение $\sin x + \cos x = a$ имеет решения только при $|a| \leq \sqrt{2}$.

3) границы применения методов: разбор случаев, когда решение уравнений возможно только численными методами (например, $x + \sin x = 2$).

9. Принцип использования исторического контекста.

История развития тригонометрии как науки может мотивировать учащихся и помочь запомнить ключевые понятия.

Практические задачи древности: измерение расстояний до звезд (Гиппарх, II в. до н.э.) через формулы сферической тригонометрии.

Эволюция обозначений: от хорд (Птолемей) до современных $\sin$ и $\cos$ (Леонард Эйлер, XVIII век).

Методический приём:

- проведение мини-лекций с историческими справками перед изучением новых тем;
- использование старинных задач для практики (например, восстановление метода Архимеда для вычисления π).

10. Принцип систематической диагностики и коррекции.

Для устойчивого освоения темы необходимо регулярно отслеживать прогресс и корректировать методы обучения:

а) формы контроля:

- срезы знаний (проверка усвоения формул и базовых алгоритмов);
- пробные ЕГЭ (симуляция экзаменационных условий);
- самооценивание: работа с чек-листами, где ученик отмечает освоенные методы;

б) анализ ошибок. Типичные ошибки в ЕГЭ:

- потеря корней (например, не учёт периода 2π при решении уравнения $\sin x = 0$);
- неверный учёт ОДЗ (деление на $\cos x$ без проверки условия $\cos x \neq 0$);
- неправильное применение формул (ошибки в знаках при использовании формул приведения);

в) коррекционные меры:

- индивидуальные консультации для разбора ошибок;
- дополнительные упражнения на проблемные места.

11. *Принцип адаптивности и дифференциации.*

Подходы к обучению должны учитывать индивидуальные особенности учащихся. Важно использовать:

а) групповую работу.

Деление класса на группы по уровню подготовки: базовый уровень (отработка простейших уравнений); продвинутый уровень (решение задач с параметрами).

б) индивидуальные траектории:

- персонифицированные домашние задания с подбором задач по уровню сложности (платформы типа Uchi.ru);
- использование «метода лестницы» (постепенное усложнение от $\sin x = \frac{1}{2}$ до комбинированных уравнений).

12. *Применение современных образовательных технологий.*

- Дистанционные курсы: онлайн-платформы (Stepik, Coursera) с интерактивными тренажерами;
- VR-лаборатории: визуализация решений в 3D-пространстве (например, графики в виртуальной реальности).

Эффективная подготовка к ЕГЭ требует:

- систематизации знаний (от базовых уравнений до сложных комбинаций);
- практики с акцентом на типичные ошибки;
- индивидуализации (учет особенностей каждого ученика);
- интеграции с реальными науками и технологиями.

2.2. Методы, приемы и средства обучения решению тригонометрических уравнений

Формирование умений по решению тригонометрических уравнений – одна из ключевых задач методики обучения математике в средней и старшей школе. Эффективное обучение строится на балансе классических приёмов, современных графических и цифровых решений. В данном параграфе рассматриваются методические приёмы, обеспечивающие развитие умений решать тригонометрические уравнения, начиная от базовых алгебраических методов до комплексных кейсов с параметрами и производной [30].

Один из базовых методов обучения — системное использование алгебраических преобразований. Такие задачи закрепляют умение применять теорему о нуле произведения: если $P(x)Q(x) = 0$, то $P(x) = 0$ или $Q(x) = 0$ [31].

Методика работы по этому направлению включает подготовительный этап (повторение формул сокращённого умножения, примеры разложения трехчленов), далее – отработка на простых и комбинированных примерах, и только потом – расширение на уравнения, требующие специальных формул (например, понижения степени) [32]:

$$\text{Пример: } 4 \sin^2 x - 3 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

На заключительном этапе акцент делается на типичных ошибках – например, некорректном сокращении на тригонометрическую функцию, что позволяет избежать потери корней и неверного перехода к следующему шагу.

Особое внимание уделяется разбору типичных ошибок в ЕГЭ – например, пропуску корней, анализу ОДЗ. На заключительном этапе вводится система самопроверки и проверки ответов (подстановка, сравнение множеств решений).

Алгебраические методы систематизируют решение типовых уравнений, формируют логический фундамент и позволяют последовательно усложнять задачи за счёт комбинирования приёмов [33].

Второй принципиально важный подход – систематизация методов замены переменных. Это позволяет переходить от тригонометрических уравнений к рациональным и использовать наработанные навыки решения алгебраических примеров.

Используются практические карточки по видам замены (линейная, квадратная, универсальная), критерии выбора наиболее эффективного способа представлены в виде чек-листов для самостоятельной тренировки. Особую дидактическую ценность имеет «матч замен»: серия упражнений на распознавание и применение подходящей замены.

Применение метода замены переменной значительно расширяет круг решаемых задач. Такой подход позволяет переходить от тригонометрических уравнений к рациональным, использовать уже отработанные алгебраические навыки.

Классификация замен:

- линейная аргументация;
- квадратичная замена;
- универсальная подстановка;

Критерии выбора формализуются в специальных карточках, а гибкая система упражнений – в «матче замен», где ученики тренируются выявлять наиболее эффективную замену и осуществлять обратную проверку каждой из них [9].

Данная методика позволяет быстро и осознанно переходить от сложных уравнений к стандартным видам, поддерживает развитие алгебраического мышления [5].

Использование графических методов не только соответствует требованиям ФГОС по формированию функциональной грамотности, но и визуализирует множество решений, что особенно важно при работе с

параметрами и периодическими функциями. Методика включает поэтапное построение графиков обеих частей уравнения, поиск точек пересечения и запись полного многообразия решений с учётом периодичности [15].

Графические методы расширяют репертуар средств решения, помогают увидеть структуру решения и снизить «барьер страха» перед нестандартными задачами [4].

Важной частью эффективного обучения является метод оценки области возможных значений. Обучающиеся учатся распознавать ситуации, когда задача заведомо не имеет решений, если правая часть выходит за пределы значений синуса или косинуса. Регулярное составление «карт ограничений» и анализ граничных случаев (например, при работе с параметрами в заданиях ЕГЭ) способствует развитию математической интуиции и гибкости мышления [7].

Оценочный метод способствует формированию культуры проверки смысла вычислений и экономит время на экзамене.

Реальные задачи часто требуют сочетания алгебраических, графических, оценочных методов и работы с параметрами. Такой интегративный стиль методики не только воспитывает гибкое мышление, но и готовит к решению олимпиадных и нестандартных задач.

Методика:

- задача разбивается на подпроблемы;
- последовательно решаются алгебраический и параметрический случаи;
- сравниваются результаты, проверяется согласованность личного и формального мышления.

Обучение комбинированным методам позволяет перейти к навыку самостоятельного анализа уникальных уравнений и проявлять инициативу в поиске решения.

Современное обучение невозможно без внедрения инновационных педагогических технологий и цифровых инструментов, которые повышают

мотивацию, позволяют индивидуализировать подход и многократно расширять возможности для самопроверки.

Комплекс инновационных педагогических средств отображён на рисунке 3.

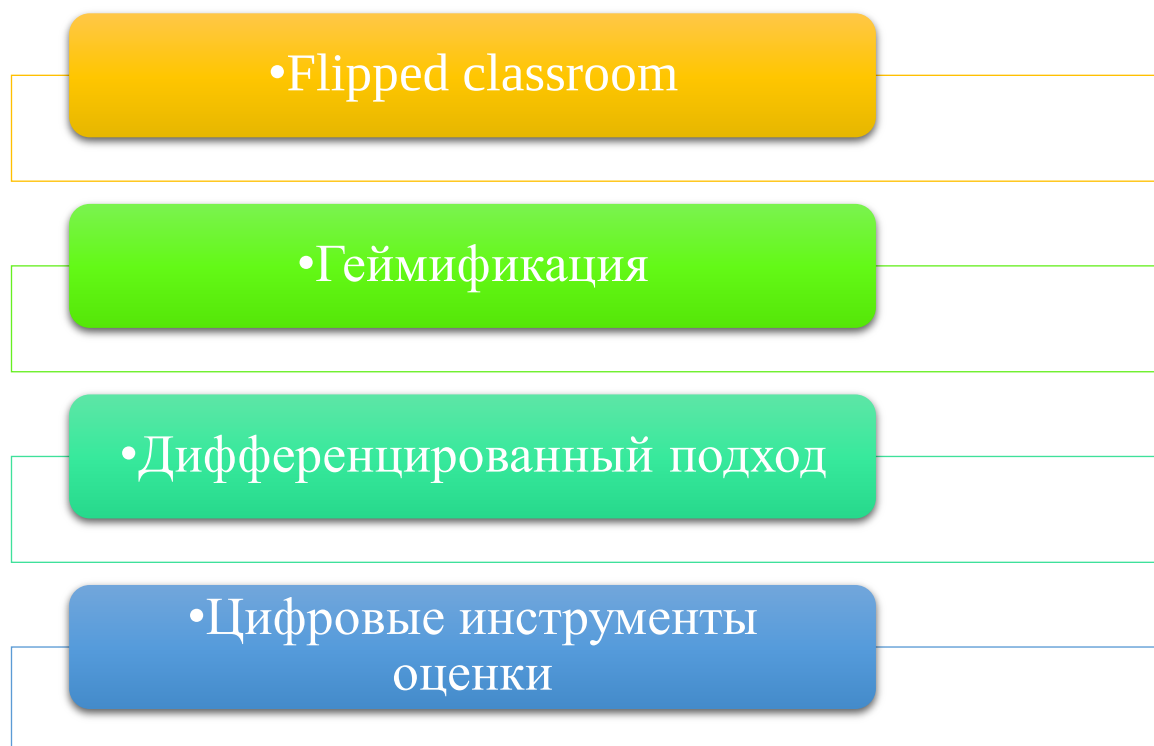


Рисунок 3. Инновационные педагогические технологии обучения решению тригонометрических уравнений

Рассмотрим инновационные педагогические технологии:

- Flipped classroom («перевернутый класс»): предварительное знакомство с теорией дома (видеоуроки), а на уроке – активная практическая работа и индивидуальные консультации для каждого ученика.
- Геймификация: внедрение математических квестов с тригонометрическими уравнениями, система бейджей и соревновательные элементы.

- Дифференцированный подход: трёхуровневая система (базовые – комбинированные – олимпиадные задачи) позволяет учитывать индивидуальный уровень и темп освоения материала.

- Цифровые инструменты оценки: автоматизированные системы проверки решений, аналитика ошибок на основе искусственного интеллекта и персонализация обратной связи.

Отдельного внимания заслуживает комплексная система тренинга: 8-недельный интенсив с чередованием теоретических спринтов, массовых практик и аналитических разборов. Чёткая структура каждого занятия включает разминку, работу в основном блоке и итоговое обсуждение ошибок; домашние задания подбираются с учётом сложности и повторяемости типов задач.

Постоянный контроль эффективности реализуется через разбор типичных ошибок и динамическую корректировку индивидуальной образовательной траектории.

Такой дифференцированный и поэтапно усложняющийся подход позволяет охватить весь спектр тригонометрических задач: от простейших, с прямым алгебраическим решением, до творческих олимпиадных и исследовательских задач с параметрами. Комплекс приёмов и технологий в сочетании с системой тренинга обеспечивает формирование не только знаний, но и умений самостоятельно выбирать оптимальный способ решения, критически оценивать промежуточные результаты и доводить рассуждение до математически грамотного ответа.

Внедрение данной системы способствует:

1. Устойчивому формированию навыков решения объявленного спектра уравнений.
2. Осознанному выбору метода с опорой на анализ структуры задания.
3. Развитию культуры проверки, математической грамотности и самостоятельности.

4. Росту мотивации через чередование традиционных и современных педагогических средств, интеграцию цифровых инструментов и игровых форм.

5. Гибкой адаптации содержания под требования ЕГЭ и олимпиадной математики.

Системный подход к обучению решению тригонометрических уравнений, включающий последовательное освоение методов, внедрение современных образовательных технологий и апробацию на уроках с разной структурой и типом задач, позволяет не только усваивать материал, но и формирует у учащихся важные исследовательские, оценочные и рефлексивные компетенции.

2.3. Модель системы заданий для подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения»

Эффективная подготовка к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения» невозможна без продуманной системы заданий. Система заданий – это комплекс разноуровневых упражнений, охватывающий весь спектр уравнений, встречающихся на экзамене, отражающий типовые ошибки учащихся, учитывающий частотность заданий в КИМах и предполагающий индивидуальные траектории подготовки.

Задачи такой системы:

- ✓ Освоение стандартных приёмов и алгоритмов.
- ✓ Развитие гибкого мышления и самостоятельности.
- ✓ Ориентация на реальные экзаменационные задачи.
- ✓ Диагностика и коррекция учебных дефицитов.

Принципы построения системы задач:

1. Системность – охват всех видов встречающихся уравнений.
2. Разноуровневость – дифференциация заданий по сложности.

3. Методическая целостность – согласование содержимого с методами.
4. Актуальность – использование материалов ЕГЭ последних лет и анализа типичных ошибок.
5. Модульность – четкая внутренняя структура каждого блока.
6. Ориентация на результат – задачи для формирования конкретных умений.

Модель системы заданий представляет собой комплексную структуру, объединяющую теоретический, практический, контрольно-диагностический и коррекционно-развивающий модули, направленную на эффективное изучение тригонометрии и подготовку к решению тригонометрических уравнений в ЕГЭ. Модель изображена на рисунке 4.

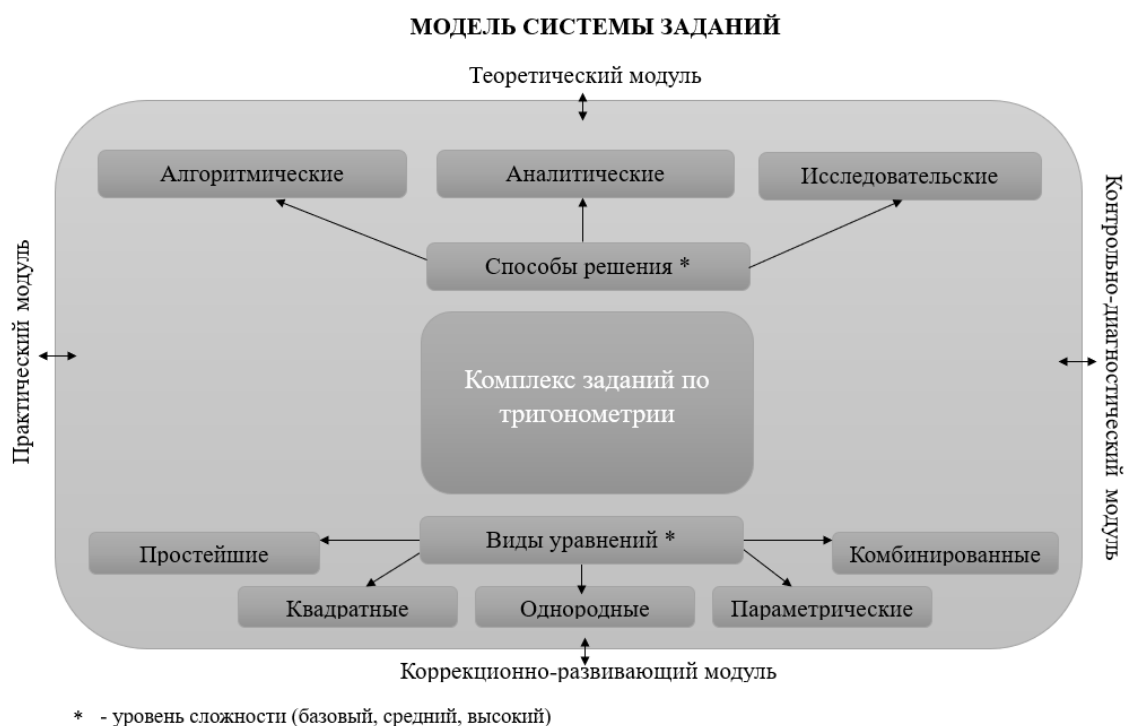


Рисунок 4. Модель системы заданий

Центральным элементом модели является комплекс заданий по тригонометрии, который формируется с учетом различных видов уравнений и способов их решения.

1. Теоретический модуль является основой для формирования знаний и включает в себя формулы, алгоритмы и схемы решения по каждому классу тригонометрических уравнений.

2. Практический модуль ориентирован на применение теоретических знаний на практике через выполнение заданий на трёх уровнях сложности, самостоятельная тренировка.

3. Контрольно-диагностический модуль обеспечивает проверку и оценку усвоения материала, позволяя выявлять пробелы и корректировать учебный процесс, включает в себя мини-диагностику, мини-ЕГЭ.

4. Коррекционно-развивающий модуль направлен на развитие познавательных навыков и устранение затруднений, возникающих при изучении тригонометрии, обеспечивая индивидуальный подход к обучению: индивидуальные подборки заданий по «слабым» местам, разбор ошибок, методические советы.

В теоретическом модуле представлены алгоритмы решения тригонометрических уравнений разных видов, от простейших до параметрических. Также туда входят формулы, которые понадобятся при решении уравнений разных уровней сложности. Пример карточки с алгоритмом решения представлен на рисунке 5.

Уравнения, сводимые к квадратным

1. Привести уравнение к виду:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

или

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

2. Ввести замену $t = \cos x$ или $t = \sin x$.

3. Решить квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0$$

4. Вернуть замену: $t = \cos x$ или $t = \sin x$.

5. Решить простые уравнения $\cos x = t$ или $\sin x = t$.

Рисунок 5. Карточка с алгоритмом решения уравнений, сводимых к квадратным

В практический модуль входят задания, разделённые на три уровня сложности (базовый, средний и высокий). В каждом уровне приведены различные виды тригонометрических уравнений, подходящих под этот уровень. В дополнение к этим заданиям в блоке находятся карточки для самостоятельной работы. Пример задания на среднем уровне сложности представлен на рисунке 6.

Средний уровень

Квадратные/уравнения, сводящиеся к квадратным

- а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Рисунок 6. Пример задания на среднем уровне сложности

В контрольно-диагностический модуль входит мини-диагностика, которая позволяет выявить пробелы у обучающихся и скорректировать учебный процесс, а также «мини-ЕГЭ», состоящее из трёх заданий, взятых из открытых банков заданий, для контроля изучения темы «Тригонометрические уравнения». Пример мини-диагностики показан на рисунке 7.

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \sin x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.
3. При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет решений?

Рисунок 7. Мини-диагностика 2 вариант

Контрольно-развивающий модуль необходим для устранения затруднений, возникающих при изучении тригонометрии. В данном модуле

используются карточки заданий по ошибкам. Помимо карточек с заданиями на отработку ошибок есть карточки-помощники для дальнейшего избегания подобных ошибок. Пример карточки-помощника продемонстрирован на рисунке 8.

Карточка 2. Работа с Областью Допустимых Значений (ОДЗ)

Метод: ОДЗ – это твой друг!

Как работает:

1. Определи ОДЗ сразу после постановки уравнения.
2. Учитывай ограничения:
 - $\sin x$ и $\cos x \in [-1, 1]$
 - $\operatorname{tg} x: x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
3. Следи за ограничениями при преобразованиях (деление, возведение в квадрат).
4. При замене переменной учитывай ОДЗ для новой переменной.
5. Всегда проверяй корни на принадлежность ОДЗ.
6. Используй графический анализ для контроля.

Зачем: не получить посторонние решения.

Пример: в уравнении $\frac{1}{\cos x} = 2, \cos x \neq 0$.

Рисунок 8. Карточка-помощник

Полный перечень заданий для подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения» представлен в Приложении А. Систему заданий можно применять на разных типах уроков. Примеры технологических карт с использованием разработанных заданий описаны в Приложениях Б и В.

В результате апробации разработанной модели системы заданий для подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения» на базе МАОУ СШ №150 им. В.С. Молокова и МБОУ Лицея № 8 были получены экспертные оценки от учителей, использовавших в учебном процессе задания из модели (Приложения Г и Д).

Экспертные оценки положительные и подчеркивают актуальность, комплексность и эффективность методической разработки по теме «Тригонометрические уравнения» для подготовки к ЕГЭ по математике. Учителя отметили эффективность предложенной системы, её структурированность и возможность индивидуализации обучения.

Разработанная и апробированная система заданий по теме «Тригонометрические уравнения» доказала свою эффективность в подготовке к ЕГЭ по следующим параметрам:

- ✓ Существенное сокращение типичных ошибок при решении задач всех классов.
- ✓ Формирование у учащихся устойчивых, гибких умений по выбору стратегий решения.
- ✓ Возможность адресной коррекции учебных дефицитов: каждый ученик способен шаг за шагом ликвидировать свои пробелы.
- ✓ Повышение интереса и мотивации школьников к предмету благодаря включению творческих задач.

При использовании данной модели рекомендуется:

1. Учитывать индивидуальные особенности учащихся при выборе уровня сложности заданий.
2. Регулярно проводить диагностику знаний учащихся и корректировать методику обучения в соответствии с результатами диагностики.
3. Создавать на уроках атмосферу сотрудничества и взаимопомощи, чтобы учащиеся не боялись задавать вопросы и делиться своими знаниями.

Таким образом, построенная и апробированная модель системы задания для подготовки к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения» отличается продуманной модульной структурой, многоуровневостью, постоянной диагностикой и гибкой индивидуализацией. Она обеспечивает качественный рост компетентностей каждого ученика – от базовых навыков до исследовательских умений и олимпиадных достижений.

Выводы по главе 2

Проведенный анализ методических подходов к изучению тригонометрических уравнений в контексте подготовки к ЕГЭ позволил выявить ключевые принципы, методы и средства, обеспечивающие эффективное освоение учащимися данной темы. На основе интеграции когнитивно-деятельностного, контекстного и системно-деятельностного подходов была разработана многоуровневая методическая система, обладающая значительным потенциалом для повышения качества обучения.

Системный анализ существующих методик изучения тригонометрических уравнений показал, что наиболее эффективное обучение достигается при сочетании:

- алгоритмического подхода, обеспечивающего четкое понимание последовательности действий;
- визуализации решений с использованием тригонометрической окружности и графиков;
- дифференцированного подхода к отбору задач с учетом уровня подготовки учащихся;
- постоянного контроля и коррекции типичных ошибок.

Особое значение в подготовке к ЕГЭ имеют методические инструменты, такие как:

- алгоритмические тренажеры с пошаговой проверкой решений;
- система диагностики пробелов в знаниях с автоматической генерацией индивидуальных заданий;
- интерактивные задания с визуализацией, помогающие понимать геометрический смысл уравнений.

Преимущества разработанной методической системы:

1. Комплексность — охватывает все типы тригонометрических уравнений, встречающихся в ЕГЭ.

2. Адаптивность — позволяет корректировать траекторию обучения на основе диагностики.

3. Наглядность — использование графических методов и анимационных моделей повышает понимание абстрактных концепций.

4. Практическая ориентированность — задания максимально приближены к формату ЕГЭ, что способствует лучшей подготовке к экзамену.

Перспективы развития методики:

- внедрение интеллектуальных систем адаптивного обучения;
- разработка мобильных приложений для самостоятельной тренировки;
- углубленная интеграция графических методов в процесс изучения тригонометрических уравнений.

Таким образом, представленная в главе модель системы заданий не только решает актуальные задачи подготовки к ЕГЭ, но и создает основу для дальнейшего совершенствования преподавания тригонометрии в школе, способствуя развитию математической культуры учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование было посвящено актуальной проблеме совершенствования системы методической подготовки школьников к решению тригонометрических уравнений в контексте подготовки к ЕГЭ по математике. В ходе работы была детально проанализирована теоретическая база, рассмотрены современные подходы к организации учебного процесса и разработана модель системы заданий для формирования устойчивых навыков решения тригонометрических уравнений.

В процессе исследования были достигнуты все поставленные задачи:

- ✓ Проведён анализ исторических, дидактических и методических аспектов изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики. Показана эволюция взглядов на методы преподавания и выявлены наиболее эффективные подходы, представленные в трудах ведущих педагогов и методистов.

- ✓ Систематизированы существующие трудности в усвоении темы обучающимися: сложность восприятия тригонометрических преобразований, недостаточная отработанность стандартных алгоритмов, неприменение графических и аналитических способов отбора корней. Особое внимание уделено анализу результатов экзаменационных работ выпускников.

- ✓ Разработана многоуровневая система заданий, ориентированная на поэтапное формирование навыков решения тригонометрических уравнений – от простейших до параметрических и исследовательских. Система интегрирует алгоритмические, аналитические и творческие задания, а также инструменты самодиагностики и коррекции ошибок.

- ✓ Описаны современные методы, средства и приёмы обучения. Обоснована необходимость сочетания традиционного изложения материала с использованием интерактивных и визуальных технологий, обеспечивающих более глубокое понимание и прочное закрепление навыков.

✓ Предложенная система была апробирована в школьной практике. По итогам апробации зафиксировано повышение среднего уровня успешности решения тригонометрических уравнений и снижение количества типовых ошибок. Ученики отметили рост уверенности, интереса к предмету и мотивации к самостоятельной тренировке.

Подводя итог, подчеркнём, что все задачи исследования решены, а цель достигнута.

Практическая значимость исследования заключается в возможности интеграции предложенной модели заданий не только в рамках подготовки к экзамену, но и в общем курсе математики, а её элементы могут быть использованы для развития исследовательской деятельности обучающихся и повышения интереса к предмету, как на уроках, так и во внеурочной работе.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением системы задач, созданием цифровых тренажёров, внедрением дистанционного контроля и развитием дифференцированной подготовки на основе анализа индивидуальных образовательных траекторий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. [и др.]. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углублённый уровни. Ч. 1. 2019. 255 с.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Поздняк Е.Г., Юдина И.И. Геометрия: учебник для общеобразоват. Учреждений. 10–11 кл. М.: Просвещение, 2013. 255 с.
3. Башмаков М.И., Нусинова С.И. Тригонометрия: учеб. Пособие для средней школы. М.: Просвещение, 2002. 188 с.
4. Бурда М.И., Тарасенкова Н.А. Математика: Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 кл. Харьков: Ранок, 2017. 352 с.
5. Волкова С.А., Запорожец М.И. Практикум по решению тригонометрических уравнений. М.: Академия, 2011. 159 с.
6. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: справочные материалы: книга для учащихся. М.: Просвещение, 1990. 416 с.
7. Гусев В.В. Решение тригонометрических уравнений и неравенств с параметром // Математика в школе. 2011. № 2. С. 24–27.
8. Денищева Л.О., Корешкова Т.А. Обучение решению тригонометрических уравнений в школе: типичные ошибки и пути их преодоления // Математика в школе. 2012. № 7. С. 15–19.
9. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 кл. М.: Просвещение, 2009. 302 с.
10. Евстропова С.В. Тригонометрические уравнения. Решение типовых заданий ЕГЭ. М.: Легион, 2021. 128 с.
11. Интерактивная программа Desmos [Электронный ресурс]. URL: <https://www.desmos.com> (дата обращения: 30.03.2025).
12. Интерактивная программа GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: <https://www.geogebra.org> (дата обращения: 30.03.2025).

13. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Киселёв А.К. Математика: алгебра и начала анализа: учебник для общеобразоват. Учреждений. 10–11 кл. М.: Просвещение, 2005. 426 с.
14. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Поляков С.Б. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 кл. М.: Просвещение, 2013. 399 с.
15. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 224 с.
16. Муравина О.В., Муравин Г.К. Использование прикладных задач при изучении тригонометрии в средней школе // Математика в школе. 2015. № 12. С. 22–24.
17. Онлайн-ресурс mathprofi.ru [Электронный ресурс]. URL: <http://mathprofi.ru/> (дата обращения: 30.03.2025).
18. Онлайн-ресурс online.math-spbu.ru [Электронный ресурс]. URL: <https://online.math-spbu.ru/> (дата обращения: 30.03.2025).
19. Петерсон Л.Г. Методические рекомендации по преподаванию математики: интегративный подход, использование компьютерных технологий. М.: Ювента, 2010. 231 с.
20. Полотовский Г.М. Очерки истории российской математики. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2015. 320 с.
21. Поляков С.Б. Решение тригонометрических уравнений: от элементарных к сложным // Математика в школе. 2010. № 9. С. 12–18.
22. Сайт Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) [Электронный ресурс]. URL: <https://fipi.ru/> (дата обращения: 30.03.2025).
23. Сайт Федерального государственного образовательного стандарта [Электронный ресурс]. URL: <https://fgosreestr.ru/> (дата обращения: 30.03.2025).

24. Справочник школьника по математике / под ред. Ященко И.В. М.: Эксмо, 2023. 384 с.
25. Соловьёв Э.Ю., Федорова Н.К. Технологии подготовки к ЕГЭ по математике. М.: Народное образование, 2019. 174 с.
26. Тригонометрия: учебник для вузов / под ред. А.П. Кисселя. М.: Академия, 2012. 352 с.
27. Утиханович Е.А. Практика подготовки к решению уравнений в ЕГЭ // Математическое образование. 2022. № 4. С. 44–49.
28. Ященко И.В. ЕГЭ. Математика-2025. Банк заданий. 4000 задач. Базовый и профильный уровни. Закрытый сегмент. М.: Национальное образование, 2024. 658 с.
29. Connally E., Hughes-Hallett D., Gleason A.M. Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus. Hoboken: John Wiley & Sons, 2019. 656 p.
30. Fisher R.A. Trigonometric Equations and Identities. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 160 p.
31. Justine C. Smith. Trigonometry Demystified. New York: McGraw-Hill, 2005. 352 p.
32. Ryan M. Geometry Workbook For Dummies. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014. 408 p.
33. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. Boston: Cengage, 2015. 1368 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Модель системы заданий для подготовки к ЕГЭ

по теме «Тригонометрические уравнения»

Теоретический модуль

Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение	Решения
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Уравнения, сводимые к квадратным - Привести уравнение к виду: $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ или $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$ - Ввести замену $t = \cos x$ или $t = \sin x$. - Решить квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$ - Вернуть замену: $t = \cos x$ или $t = \sin x$. - Решить простые уравнения $\cos x = t$ или $\sin x = t$.	Однородные тригонометрические уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$ — общий вид однородного уравнения 1-й степени. $a \sin 2x + b \sin x \cos x + c \cos 2x = 0$ — общий вид однородного уравнения 2-й степени. - Проверьте, что $\cos x \neq 0$; если $\cos x = 0$, проверьте отдельно. - Разделите уравнение на $\cos x$, чтобы получить уравнение относительно $\operatorname{tg} x$. - Решите уравнение по $\operatorname{tg} x$ (линейное или квадратное). - Найдите x, соответствующие значениям $\operatorname{tg} x$. - Проверьте решения в исходном уравнении. - Отберите корни, подходящие по условиям (например, по интервалу).
Комбинированные - Приведите уравнение к форме с одной переменной (например, $\sin x$ или $\cos x$). - Упростите с помощью тригонометрических тождеств. - Введите замену $t = \sin x$ или $t = \cos x$ - Разложите левую часть на	Параметрические - Упростите уравнение с помощью тригонометрических тождеств, выразив функцию через параметр. - Введите замену для перехода к алгебраическому уравнению. - Учитывайте область определения функций и ограничения параметра. - Решите уравнение относительно

множители. 5. Решите простейшие уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. 6. Проверьте решения и учтите периодичность функций.	переменной, зависящей от параметра. 5. Примените формулы решения простейших тригонометрических уравнений. 6. Отберите решения, удовлетворяющие дополнительным условиям (например, по промежутку). 7. Проанализируйте зависимость решений от параметра и определите допустимые интервалы его значений.
---	---

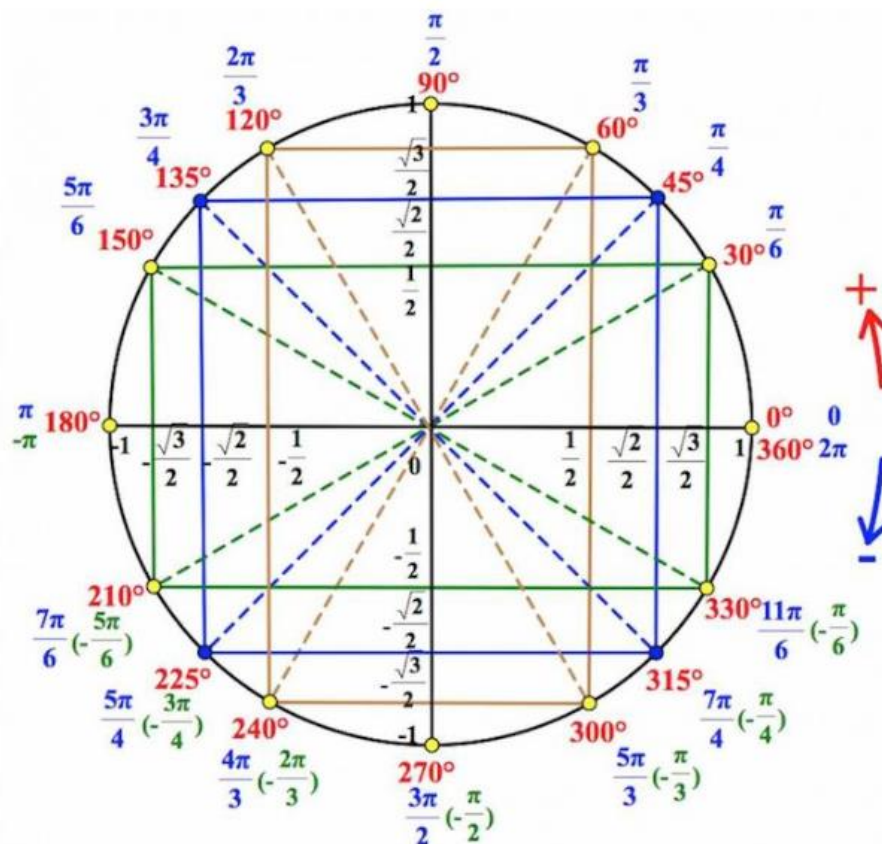
Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$ $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1;$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$ $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$	Формулы сложения $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$
Формулы тригонометрических функций двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$	Формулы понижения степени $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$ $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha};$

Формулы приведения

Функция	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin(t)$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos(t)$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg}(t)$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(t)$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Алгоритм решения (чек-листы для учеников):

1. Привести уравнение к базовой функции.
2. Проанализировать ОДЗ (указать ограничения переменной).
3. Преобразовать уравнение (разложение, формулы).
4. Выписать общий вид решения (с учётом периодичности).
5. Сделать отбор корней на указанном промежутке.
6. Провести обратную подстановку для проверки.



Методы решения:

Карточка 1. Метод разложения на множители ✦ Шаг 1: Перенеси все в одну часть: $\sin x \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (\cos x - 1) = 0$ ✦ Шаг 2: примени теорему о нуле произведения: $\sin x = 0$ или $\cos x - 1 = 0$ ✦ Шаг 3: Реши уравнения отдельно: $\sin x = 0 \rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = 1 \rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ Важно!: Проверь, не теряются ли корни при сокращении!	Карточка 2. Оценочный метод ✦ Шаг 1: Оцени границы функций: $\sin x + \cos x = 2$ Максимум левой части: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2$ ✦ Шаг 2: Сравни с правой частью: $\sqrt{2} \approx 1.414 < 2 \rightarrow$ Решений нет.
Карточка 3. Метод замены переменной Увидел – сложную функцию Заменил – новым символом (t) Решил – относительно (t) Вернулся – к исходной переменной Проверил – корни (ОДЗ) Пример: $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$ Пусть $t = \cos(x)$. Важно!: Ограничения на (t), если есть! ($\cos x \leq 1$).	Карточка 4. Универсальная подстановка Для уравнений: $a \sin x + b \cos x = c$ Алгоритм: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ - Подставить $\rightarrow$ решить алгебраическое уравнение Пример: $\sin x + \cos x = 1$ Решение: $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \rightarrow t = 0, t = 1$ Ответ: $x = 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ Важно!: Проверь корень $x = \pi + 2\pi n$ отдельно!

Практический модуль

Базовый уровень

Простейшие

- а) Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
- а) Решите уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 0]$.
- а) Решите уравнение $\cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.
- а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -1$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.

Квадратные

- а) Решите уравнение $2 \cos^2 x - 1 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.
- а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.
- а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.
- а) Решите уравнение $6 \cos^2 x - \cos x - 4 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
- а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 3$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

Однородные

- а) Решите уравнение $5 \sin x + 3 \cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
- а) Решите уравнение $2 \sin x - 5 \cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.
- а) Решите уравнение $\cos x - 3 \sin x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $4 \cos x + 2 \sin x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.
- а) Решите уравнение $2 \sin x - 7 \cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.
- а) Решите уравнение $3 \cos x + 3 \sin x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Средний уровень

Квадратные/уравнения, сводящиеся к квадратным

- а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
- а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 15 \sin(\frac{3\pi}{2} + x) - 12 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
- а) Решите уравнение $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.
- а) Решите уравнение $6 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

Комбинированные

- а) Решите уравнение $(2 \sin x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $(\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-6 \sin x} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7} \sin x} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x \cos x} = \cos x$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{ctg} x} \left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right) = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Высокий

Однородные

- а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 3$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
- а) Решите уравнение $\sin 2x + 2 \cos^2 x + \cos 2x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.
- а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \cos^2 x) = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.
- а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 4 + 3 \cos 2x$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$

Параметрические

1. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\sin 5x - p \cos 3x - \sin x = 0$ имеет на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ не менее трёх корней.
2. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(\sin 3x \cos x - \sin 2x)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$ имеет ровно три корня.

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решение.

Карточки для самостоятельной тренировки

Карточка БАЗОВЫЙ:

1. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.
2. Решите уравнение $4 \sin^2 x - 1 = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
3. Решите уравнение $4 \sin^2 x = 3$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Карточка СРЕДНИЙ:

1. Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
2. Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Карточка ВЫСОКИЙ:

1. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет два корня на $[0; 2\pi]$?
2. При всех значениях $a \in [-2; 2]$ решите уравнение $a \cos^2 x - (a + 1) \sin x + 2 = 0$.

Контрольно-диагностический модуль

Мини-диагностика.

1 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \cos x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.
2. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
3. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ не имеет решений?

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \sin x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.
3. При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет решений?

Мини-ЕГЭ.

1 вариант:

1. а) Решите уравнение $\cos x \cos 2x - \sin^2 x - \cos x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
2. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. а) Решите уравнение $4\sqrt{3} \cos^2 x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \cos^3 x = \sqrt{2} \sin x + 2 \cos x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.
2. а) Решите уравнение $3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = \sqrt{3} \sin x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.
3. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + \cos x - 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Коррекционно-развивающий модуль

Пропуск корня $2 \sin x - 1 = 0$ $\cos 2x = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$	Неверная работа с ОДЗ $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$ $\sqrt{\operatorname{tg} x} = 2$ $\frac{2 \sin^2 x + 3 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} = 0$
Ошибки отбора на промежутке 1. а) Решите уравнение $2 \sin x - 5 \cos x = 0$. Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. 2. а) Решите уравнение $\cos 2x = 0$. Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$. 3. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x \cos x} = \cos x$. Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$	Нарушение периодичности 1. Решите уравнение и запишите общее решение: $6 \cos^2 x - \cos x - 4 = 0$. 2. Решите уравнение и запишите общее решение: $\cos 3x = -1$. 3. Решите уравнение и запишите общее решение: $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

Карточки-помощники

Карточка 1. Общие правила и проверка корней Метод: всегда проверяй! Как работает: 1. Проверь область определения (ОДЗ) исходного уравнения и всех подстановок. 2. Учитывайте все возможные случаи при преобразованиях. 3. Проверь полученные корни в исходном уравнении. (Особенно после возведения в квадрат или деления) 4. Вернись к исходной переменной после замены и учти периодичность. 5. Сохрани все промежуточные вычисления. 6. Будь внимателен к ограничениям при универсальной замене $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Зачем: избежать потери или появления посторонних корней. Пример: при замене $t = \sin x$, убедись, что $t \in [-1, 1]$.	Карточка 2. Работа с Областью Допустимых Значений (ОДЗ) Метод: ОДЗ – это твой друг! Как работает: 1. Определи ОДЗ сразу после постановки уравнения. 2. Учитывай ограничения: • $\sin x$ и $\cos x \in [-1, 1]$ • $\operatorname{tg} x: x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ 3. Следи за ограничениями при преобразованиях (деление, возведение в квадрат). 4. При замене переменной учитывай ОДЗ для новой переменной. 5. Всегда проверяй корни на принадлежность ОДЗ. 6. Используй графический анализ для контроля. Зачем: не получить посторонние решения. Пример: в уравнении $\frac{1}{\cos x} = 2$, $\cos x \neq 0$.
---	--

Карточка 3. Отбор Корней на Промежутке Метод: визуализация на окружности! Как работает: 1. Пойми: углы – это значения x в заданном интервале (например, $[0; 2\pi)$). 2. Запиши общее решение с учётом периодичности. 3. Определи все корни, попадающие в промежуток, подставляя k. 4. Визуализируй на единичной окружности: определи основное решение и дополнительные. 5. Запиши корни в порядке возрастания (если нужно). 6. Проверь корни на соответствие ОДЗ. Зачем: получить все решения в заданном интервале. Пример: для $\cos x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi)$, корни: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.	Карточка 4. Периодичность – это важно! Метод: учитывай период всегда! Как работает: 1. Запомни периоды: • $\sin x, \cos x: 2\pi$ • $\operatorname{tg} x: \pi$ 2. При записи общего решения обязательно добавляй период с параметром $k \in \mathbb{Z}$. 3. Не ограничивайся одним решением. 4. Будь внимателен при замене переменных и преобразованиях. 5. При аргументе, умноженном на число, корректно учитывай период (например, для $\sin 3x$ период равен $\frac{2\pi}{3}$). 6. Используй графики для визуализации. Зачем: получить все решения в заданном интервале. Для $\cos x = \frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi)$, корни: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.
--	---

Цифровые технологии:

- Интерактивная программа GeoGebra: <https://www.geogebra.org>
- Интерактивная программа Desmos: <https://www.desmos.com>
- Онлайн-школа NeoFamily: <https://neofamily.ru/>
- Платформа Wordwall: <https://wordwall.net/ru>
- Платформа LearningApps: <https://learningapps.org/>
- Платформа DiaClass: <https://app.diaclass.ru/>

Технологическая карта урока

Тема урока: Тригонометрические уравнения

Тип урока: Урок общеметодологической направленности

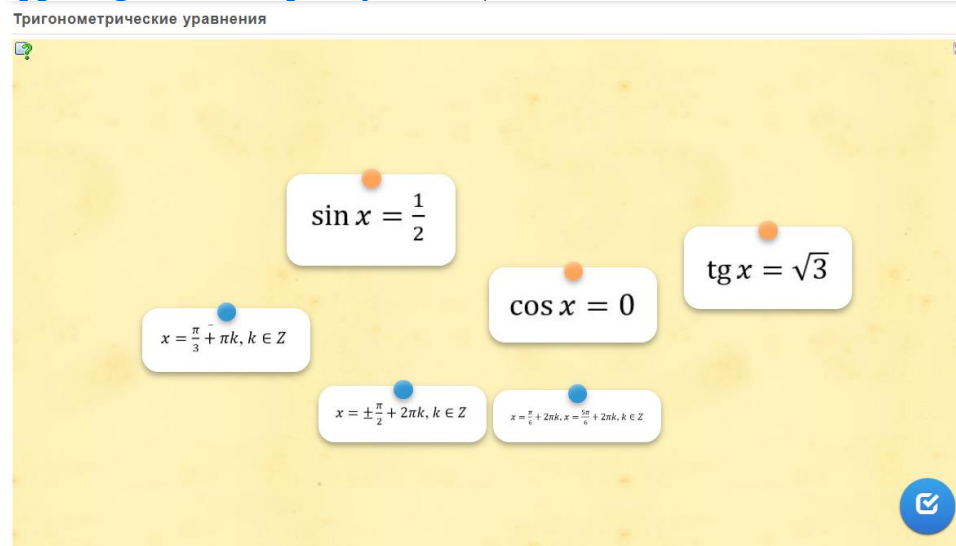
Методы и формы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Доска
<i>Этап 1: Мотивация к учебной деятельности</i> <i>Цель этапа: создание условий для возникновения у учеников внутренней потребности включения в учебную деятельность</i>			
Фронтальная работа	Здравствуйте, дети! Присаживайтесь. Мы продолжаем повторять виды и методы решения тригонометрических уравнений. Какую цель на сегодняшний урок вы поставите?	Здравствуйте. (Говорят цели)	-
<i>Этап 2: Актуализация знаний</i> <i>Цель этапа: повторение изученного материала</i>			
Фронтальная работа	Начнем наш урок с повторения. На доске перед вами тригонометрические уравнения. Какие это уравнения? Решите их. Проверим с вами решения. Нужно соотнести ответы и уравнения. Ученик А, сделай это. Остальные проверяют. У всех так? Теперь необходимо отобрать корни на заданных промежутках. (Открывает на интерактивной доске окружности с заданием). Ученик Б, пойдет к доске и отберет	Простейшие. (Решают) (Соотносит) Да.	Приложение 1 Приложение 2

	корни для $\sin x = \frac{1}{2}$ $x \in [0; 2\pi]$. Все согласны? Ученик В выполнит задание $\cos x = 0$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. У всех так? Ученик Г, тебе достается $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ $x \in [0; \pi]$. Правильно?	(Выполняет задание) $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ Да. (Выполняет задание) $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$ Да. (Выполняет задание) $x = \frac{\pi}{3}$ Да.	Приложение 3 Приложение 4 Приложение 5
<i>Этап 3: Закрепление знаний и умений</i> <i>Цель этапа: систематизация и применение знаний при решении задач</i>			
Фронтальная работа, Индивидуальная работа	Сейчас я на доске запишу уравнения. Сначала нужно найти общее решение, а затем корни, принадлежащие заданному промежутку. Ученик Г пойдет решать первое уравнение, остальные решают в тетрадях. Кто сделает, может решать следующее. Ученик Д, твое второе уравнение. Ну и третье пойдет решать ученик Е. Теперь повторим с вами некоторые свойства тригонометрических функций. Какая область определения у синуса? У косинуса? Верно. Как пользоваться формулами приведения?	(Решает с объяснением) (Решает с объяснением) (Решает с объяснением) От -1 до 1. И косинуса от -1 до 1. Если к углу прибавляется или отнимается $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ и т.д., то исходную функцию меняем на противоположную. Если же прибавляется или отнимается $\pi, 2\pi$ и т.д., то функция не меняется. Знак может поменяться, надо смотреть	$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ $x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ $\sin 2x = \cos(x + \pi)$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ $\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$ $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

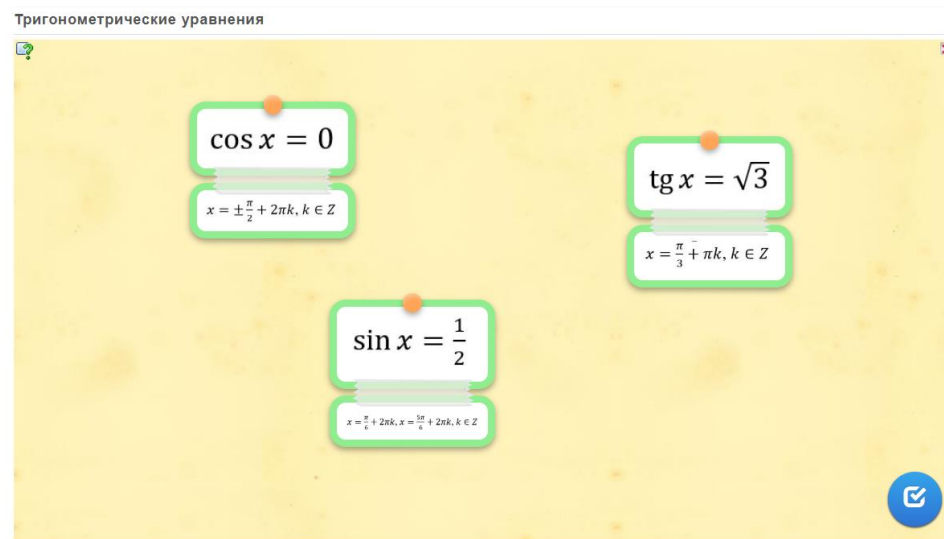
	Что ещё? Верно. В каких четвертях синус положительный, а в каких отрицательный? А косинус? Как мы «ходим» по окружности? Все эти знания вам сейчас понадобятся для решения небольшой проверочной.	на исходную функцию и на то в какой четверти находится первоначальный угол. Положительный в 1 и 2 четвертях, а отрицательный в 3 и 4. Положительный в 1 и 4 четвертях, а отрицательный в 2 и 3 четвертях. Против часовой стрелки.	
<i>Этап 4: Самостоятельная работа</i> <i>Цель этапа: применение знаний при решении задач</i>			
Индивидуальная работа, Взаимопроверка	Сейчас я каждому раздам карточку с похожими заданиями. У вас будет 15 минут, чтобы её решить. Затем вы обменяетесь листочками с решениями с соседом по парте, проверите работу и выставите оценку. (Раздает карточки Приложение 6). Приступайте. Время вышло, поменяйтесь листочками, на доске представлены решения заданий. Оцените работу товарища. А теперь передайте листочки мне.	(Решают задания) (Оценивают) (Передают)	Приложение 7
<i>Этап 5: Рефлексия</i> <i>Цель этапа: подведение итогов урока</i>			
Фронтальная работа	Подведем итоги сегодняшнего урока.		

	Что мы с вами сегодня повторили? С какими тригонометрическими тождествами вы сегодня работали? Достигли ли вы поставленной цели? Перед вами QR-код, просканируйте его. Каждому нужно ввести по 1 слову или словосочетанию, связанных с тригонометрическими уравнениями. Так мы с вами получим облако слов. Урок окончен. До свидания!	Решение тригонометрических уравнений. С формула двойного угла, с формулами приведения. Также работа с тригонометрической окружностью. Решали уравнение с параметром. Да. (Пишут слова) До свидания!	Приложение 8
--	---	--	--------------

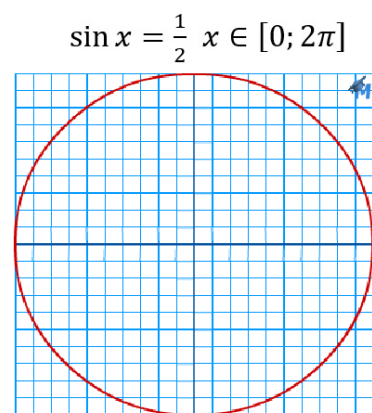
Приложение 1 (<https://learningapps.org/watch?v=p9dvy7di525>)



Приложение 2

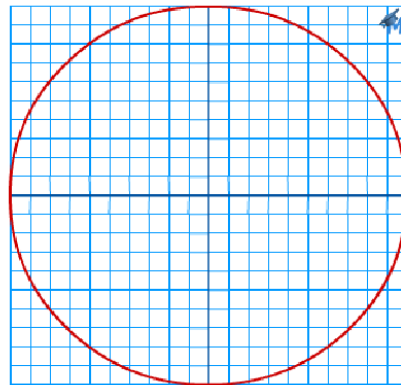


Приложение 3



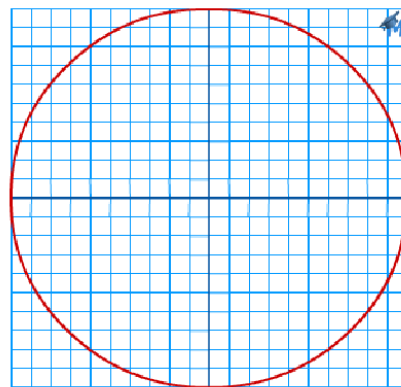
Приложение 4

$$\cos x = 0 \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



Приложение 5

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad x \in [0; \pi]$$



Приложение 6

1 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

2. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

3. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ не имеет решений?

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.

3. При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет решений?

Приложение 7

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0, \pi]$.

1 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + \cos x = 0$.

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0$$

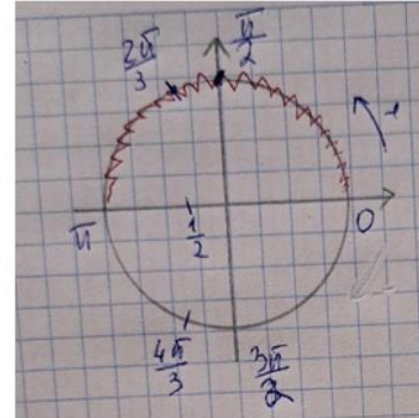
$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$1) \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ или } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ или } x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$

2. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \sin^2 x = \cos x$$

$$1 - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$1 - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$1 - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

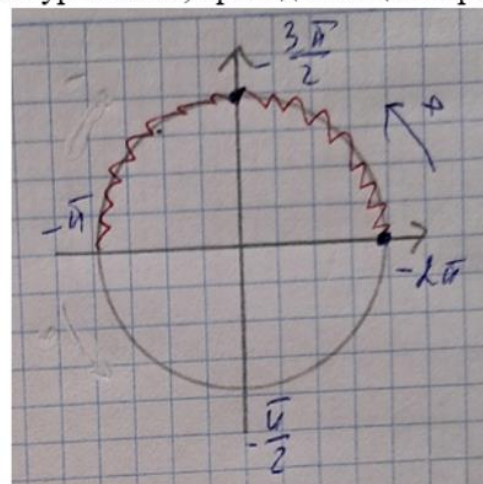
$$\cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ или } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.



Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, -2\pi$

3. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ не имеет решений?

$$\sin x \in [-1; 1]$$

Нет решения, если $\sin x < -1$ или $\sin x > 1 \Rightarrow a < -1$ или $a > 1$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \sin x = 0$.

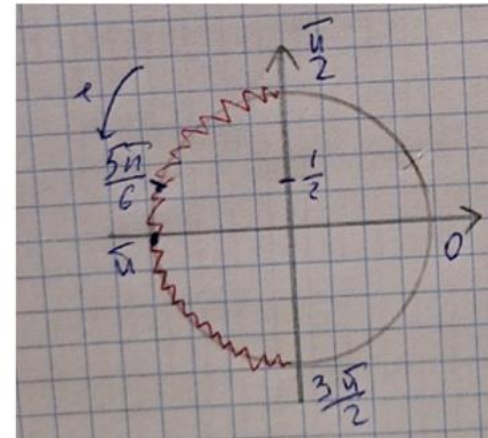
$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $\frac{5\pi}{6}, \pi$

2. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

$$\sin 2x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

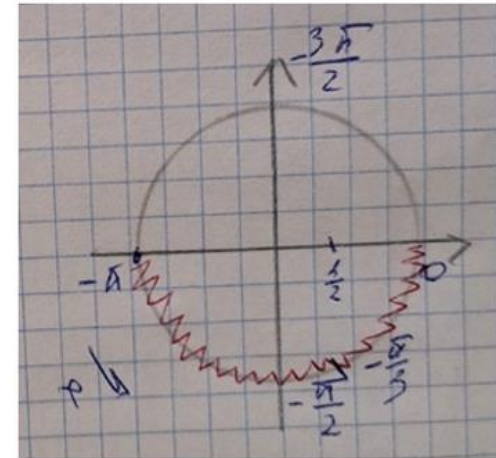
$$\sin x = 0 \text{ или } 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$1) \ x = \pi k \text{ или } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \ x = \pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.



Ответ: $-\pi, 0, -\frac{\pi}{3}$

3. При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет решений?

$$\cos x \in [-1; 1]$$

Нет решения, если $\cos x < -1$ или $\cos x > 1 \Rightarrow a < -1$ или $a > 1$

Приложение 8 (<https://app.diaclass.ru/share/9761cb758bd14dbc94d292fa0c63e970>)



Для подключения:
app.diaclass.ru/
presentation/1E3090

Скопировать

Ответов:
0 / 0

Тригонометрические уравнения

× | ≡ | < | 1 | > | 😊

💬 | 👤 0/

Технологическая карта урока

Тема урока: Тригонометрические уравнения

Тип урока: Урок развивающего контроля

Методы и формы обучения	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Доска
<i>Этап 1: Мотивация к учебной деятельности</i> <i>Цель этапа: создание условий для возникновения у учеников внутренней потребности включения в учебную деятельность</i>			
Фронтальная работа	Здравствуйте, дети! Присаживайтесь. Сегодня вы напишите проверочную работу. Какую цель вы поставите на этот урок?	Здравствуйте. (Говорят цели)	-
<i>Этап 2: Актуализация знаний</i> <i>Цель этапа: повторение изученного материала</i>			
Фронтальная работа	Сегодня вам предстоит написать мини-ЕГЭ. В нем будет 3 задания, содержащие разные виды тригонометрических уравнений. Повторим с вами алгоритмы решения. Как решается тригонометрическое уравнение, которое сводится к квадратному? Отлично. Какая схема действия при однородном тригонометрическом уравнении? Если же дано комбинированное тригонометрическое уравнение?	Через замену, например $t = \cos x$ или $t = \sin x$, не забывая про ограничения. Решаем квадратное уравнение относительно t, а потом делаем обратную замену и решаем простые тригонометрические уравнения. Сначала нужно проверить, что $\cos x \neq 0$. Потом делим на него, решаем уравнение относительно тангенса. Привести уравнение к одной переменной, например, к синусу или косинусу. Упростить с помощью	-

	Как отбираются корни на заданном промежутке? Молодцы!	тождеств, разложить на множители, решить простейшие уравнения. Нужно изобразить единичную тригонометрическую окружность, отметить на ней промежуток и общее решение, далее посмотреть какие корни подходят, учитывая периодичность.	
<i>Этап 3: Закрепление знаний и умений</i> <i>Цель этапа: применение знаний при решении задач</i>			
Индивидуальная работа	Сейчас я вам раздам задания, у вас будет 25 минут на решение трех тригонометрических уравнений. Мы с вами такие уравнения решали. (Раздает карточки Приложение 1). Приступайте. Время вышло, сдаем работы.	(Решают карточки) (Сдают листочки)	-
<i>Этап 4: Рефлексия</i> <i>Цель этапа: подведение итогов урока</i>			
Фронтальная работа	Как вы оцениваете свои результаты после проверочной? Что показалось для вас трудным при решении данных тригонометрических уравнений? Урок окончен. До свидания! (После проверки работы, учитель проведет индивидуальные консультации с каждым, чтобы разобрать ошибки и дать карточку на отработку этой ошибки, а также даст карточку-помощник как избежать этой ошибки)	(Отвечают на вопросы учителя) До свидания!	-

Приложение 1

1 вариант:

1. а) Решите уравнение $\cos x \cos 2x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

2. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $4\sqrt{3} \cos^2 x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

2 вариант:

1. а) Решите уравнение $2 \cos^3 x = \sqrt{2} \sin x + 2 \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

2. а) Решите уравнение $3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = \sqrt{3} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

3. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + \cos x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

**Экспертная оценка на методическую разработку
обучающегося института математики, физики и информатики
КГПУ им. В.П. Астафьева
Кожура Ирины Александровны**

Оцениваемая методическая разработка Кожура И.А. представляет собой систему заданий по теме «Тригонометрические уравнения» для подготовки к профильному ЕГЭ по математике. Отмечу комплексный и систематизированный подход к построению системы задачного материала. Она включает в себя: теоретические и диагностические материалы; задания, разделенные на базовый, средний и продвинутый уровни сложности, которые охватывают все типы тригонометрических уравнений, встречающихся на ЕГЭ; подборку цифровых ресурсов.

Несомненна ценность методической разработки в систематизированном представлении материала, использовании современных образовательных технологий (QR-коды, геймификация) и реализации принципа индивидуализации обучения. Материал изложен последовательно и доступно, что облегчает его восприятие учениками. Использование разнообразных методов и приемов (например, графических иллюстраций, интерактивных заданий) способствует повышению интереса к предмету. Предусмотрен дифференцированный подход, позволяющий учитывать индивидуальные особенности учащихся. Особо следует отметить наличие системы работы над ошибками.

Методическая разработка представляет собой ценный ресурс для подготовки к ЕГЭ, сочетающий теорию, практику и анализ ошибок. Материал структурирован логично, соответствует ФГОС и потребностям современной школы. Оцениваемая модель системы заданий может быть рекомендована учителям математики старших классов как ценный ресурс для эффективной подготовки учащихся к ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения».

Учитель математики
МАОУ СШ №150 имени
Героя Советского Союза В.С. Молокова
Хотенко Ирина Валерьевна

23.05.2025 
дата, подпись

**Экспертная оценка на методическую разработку студентки института
математики, физики и информатики
КГПУ им. В.П. Астафьева
Кожура Ирины Александровны**

В условиях современных требований к подготовке выпускников, тема «Тригонометрические уравнения» является одной из ключевых и сложных в курсе математики средней школы. Разработка эффективных методик подготовки к ЕГЭ по данной теме представляется весьма актуальной задачей.

Модель системы заданий для подготовки к ЕГЭ по математике по теме «Тригонометрические уравнения», разработанная Кожура Ириной Александровной, представляет собой комплексный подход к изучению тригонометрических уравнений. Она включает в себя:

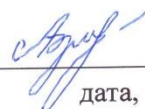
1. Систематизированный теоретический материал.
2. Разноуровневую систему заданий.
3. Диагностические материалы.
4. Подборку цифровых ресурсов.
5. Технологические карты уроков.

Разработанная модель соответствует требованиям ФГОС и формату ЕГЭ по математике. Особое внимание уделяется развитию у учащихся умений решать задачи различных типов, что необходимо для успешной сдачи экзамена. В частности, модель включает в себя задания, направленные на формирование умения решать задачи с параметрами, которые традиционно вызывают затруднения у выпускников.

Внедрение данной модели в учебный процесс показало повышение уровня знаний и умений учащихся в области тригонометрических уравнений. Также отмечу повышение познавательной активности и самостоятельности учащихся. Ученики стали более уверенно решать задачи, анализировать свои ошибки и самостоятельно искать пути решения.

Оцениваемая модель системы заданий является ценным ресурсом для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике по теме «Тригонометрические уравнения». Она может быть рекомендована для использования учителями математики в старших классах общеобразовательных школ.

Учитель математики
МБОУ Лицея № 8
Брюханова Светлана Александровна

 22.05.2025
дата, подпись