МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»
Институт математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
протокол № 9
от 8 мая 2025 г.

Зав. кафедрой

М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО
на заседании
научно-
методического
совета ИМФИ
протокол № 8
от 14 мая 2025 г.
Председатель

Е.А. Аешина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине
«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО»
Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование,

Квалификация: бакалавр

Составители: Багачук А.В., доцент кафедры математики и МОМ

1. Назначение фонда оценочных средств.

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Теория функций действительного переменного» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Теория функций действительного переменного» **задачи**:

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

1.3. **ФОС разработан на основании нормативных документов**:

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (уровень магистратуры);
- основной профессиональной образовательной программы высшего образования;
- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева и его филиалах.

2. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного»

- способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач (ПК-1).

3.2.2. Фонд оценочных средств (контрольно-измерительные материалы)

1.0. Примерный вариант теста (входной контроль).
1.1. Вопросы к коллоквиуму по модулю 1.
1.2. Проверочная работа №1 по модулю 1.
1.3. Проектное задание по модулю 2.
1.4. Проверочная работа №2 по модулю 3.
1.5. Вопросы к зачету.

6.0. Тест (входной контроль)

1. Формула $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \le -3, \\ 9-x^2, & \text{если} -3 \le x \le 3, \\ -x, & \text{если } x \ge 3 \end{cases}$

а) задает функцию на $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$;

б) не задает функцию на $(-\infty; +\infty)$;

в) задает функцию на $(-\infty; +\infty)$;

г) задает функцию на $[-3; 3]$.

2. Функция $f(x)=\dfrac{\sin 10x - 2\cos 3x}{6+\mathrm{ctg}^2 x}$

а) ограничена сверху, но не ограничена снизу;

б) ограничена;

в) не ограничена ни сверху, ни снизу;

г) ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3. Если последовательность (y_n) – бесконечно большая и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d,\ d \ne 0$, то

а) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ – бесконечно большая;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = d$;

в) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ – ограничена;

г) ничего определенного о последовательности $(x_n \cdot y_n)$ сказать нельзя.

4. Если (x_n) и (y_n) – бесконечно большие последовательности, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ равен:

а) ∞;

б) 0;

в) некоторому числу $a \ne 0$;

г) ничего определенного об этом пределе сказать нельзя.

5. Число А называется пределом функции f при $x \to \infty$, если:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > c$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < c$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$;

в) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c > 0$ и x, такие, что как только $|x| > c$, так $|f(x)-A|<\varepsilon$;

г) для $\varepsilon > \frac{1}{2}$ существует такое $c > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > c$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

6. Функция f, заданная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

а) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \Delta y$;

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = 0$;

в) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$;

г) $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} (f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)) = 0$.

7. Функция $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ если } x < 0, \\ x^2 + 1, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$

а) непрерывна только слева;

б) непрерывна только справа;

в) разрывна;

г) непрерывна.

8. Не вычисляя интегралов, а исходя из условий интегрируемости, убеждаем-

ся, что будет корректно поставить вопрос о вычислении интеграла

$\int_{-3}^{3} f(x)dx$ для функции

а) $f(x) = \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;

г) $f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } -1 \le x \le 0, \\ \ln x, \text{если } 0 < x \le 3. \end{cases}$

9. Число I называется определенным интегралом от функции f по отрезку [a; b] , если

а) $\forall$ ε>0, $\forall$ δ>0 и при любом разбиении отрезка [a; b] на части, лишь бы λ<δ, и произвольном выборе точек $\xi_к$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

б) $\forall$ ε>0, $\exists$ δ>0 такое, что при любом разбиении отрезка [a; b] на части, лишь бы λ≥δ, и произвольном выборе точек $\xi_к$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

в) $\forall$ ε>0 и при любом разбиении отрезка [a; b] на части и произвольном выборе точек $\xi_к$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$;

г) $\forall$ ε>0, $\exists$ δ>0 такое, что при любом разбиении отрезка [a; b] на части, лишь бы λ<δ, и произвольном выборе точек $\xi_к$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

10. Основываясь на геометрическом смысле определенного интеграла, убеждаемся, что интеграл $\int_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}\, dx$ равен

а) $\frac{25}{2}\pi$;

б) $\frac{25}{4}\pi$;

в) 10π;

г) 5π.

11. Выберите условия, являющиеся существенными в определении определенного интеграла:

а) произвольность выбора точек $\xi_к$;

б) непрерывность подынтегральной функции;

в) произвольность разбиения отрезка интегрирования на части;

г) ограниченность подынтегральной функции.

12. Среднее значение функции $y = -3x^2 + 4x$ на отрезке [0; 3] равно

а) –3;

б) –9;

в) 3;

г) 9.

13. Сравните: $\int_a^b h dx$ и $\int_a^b dx \int_0^h dy$

а) >;

б) <;

в) =;

г) зависит от значений a, b, h.

14. Если функции f(x,y,z) интегрируема в области D, то она в D:

а) непрерывна;

б) ограничена;

в) имеет непрерывные частные производные ;

г) дифференцируема.

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание основных понятий математического анализа; умение их использовать при решении практических задач. ОК-4, ОПК-1.

6.1. Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие метрического пространства. Примеры (R^n, $C_{[а,в]}$).

2. Окрестность точки в метрическом пространстве. Предел последовательности точек в метрическом пространстве. Основные свойства предела последовательности.

3. Открытые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.

4. Замкнутые множества в метрическом пространстве, их основные свойства.

5. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображений.

6. Линейные нормированные пространства. Примеры. Метризуемость линейного нормированного пространства. Норма и метрика.

7. Компактные множества, их основные свойства.

8. Непрерывные отображения компактных множеств.

9. Полные метрические пространства. Примеры.

10. Принцип сжимающих отображений и его применения.

6.2. Проверочная работа № 1

(Раздел1)

Вариант № 1

1. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества является открытым множеством.
2. Является ли фундаментальной последовательность $y_n(x) = x^n$ в пространстве $C_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]}$?
3. Докажите, что уравнение $x - \varepsilon \sin x = m$ при любом m и $0 < \varepsilon < 1$ имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.
4. Приведите пример замкнутого множества в R^2.

Вариант № 2

1. Докажите, что расстояние $\rho(x; y)$ есть непрерывная функция от переменных x и y.

2. Является ли полным пространство натуральных чисел с метрикой $\rho(m;n) = \dfrac{|m-n|}{mn}$?
3. Является ли отображение $f(x) = \sin x$ числовой прямой в себя сжимающим?
4. Приведите пример замкнутого множества в $C_{[a;b]}$.

6.3. Проектное задание

(Раздел2)

Тема 1. Монотонные функции

Цель: изучив свойства монотонной функции, описать их доказательства и показать применение свойства монотонности функции при решении некоторых математических задач.

Примерное содержание. Свойства монотонной функции: множество точек разрыва, интегрируемость, дифференцируемость, интегрируемость производной (и другие, которые студент может выбрать самостоятельно).

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.; 1970.
3. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М.; 1968.

Тема 2. Функции с конечным изменением

Цель: изучив основные свойства функции с конечным изменением, описать их доказательства.

Примерное содержание. Связь с ограниченностью, арифметические операции над функциями с конечным изменением, свойства вариации функции с конечным изменением, связь с монотонными функциями, множество точек разрыва, множество точек дифференцируемости, непрерывные функции с конечными изменениями.

Геометрическое приложение класса функций с ограниченным изменением – спрямляемость непрерывной кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

Тема 3. Абстрактная мера Лебега

Цель: построить и описать лебегову меру как продолжение меры по схеме Лебега.

Примерное содержание. Доказательство всех теорем на пути построения меры m: $\sigma \to R_+$; m - σ - аддитивная мера на полукольце σ с единицей:

1) продолжить m (m^1) на R (σ) – минимальное кольцо над полукольцом σ. Доказать единственность продолжения. Доказать σ-аддитивность продолжения m^1;
2) продолжить m^1 (с R (σ) на булиан единицы полукольца) до внешней меры μ^*;
3) построить лебегову меру μ как сужение μ^* на класс измеримых множеств.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.
2. Толстов Г.П. Мера и интеграл. М.; 1974.

Тема 4. Функции, суммируемые с квадратом

Цель: описать пространство суммируемых с квадратом функций.

Примерное содержание. L_2 – гильбертово пространство. Последовательное доказательство того, что L_2 – линейное пространство, L_2 – евклидово пространство (т.е. пространство со скалярным произведением), L_2 – полное пространство, L_2 – сепарабельное пространство. Доказательство существования счетного базиса и построение ряда Фурье для $f \in L_2$ по этому базису с применением общей теории гильбертовых пространств.

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.; 1972.

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание свойств измеримых множеств, измеримой по Лебегу функции; умение конструировать измеримые по Лебегу множества, доказывать различные свойства измеримых функций. ОК-4, ОПК-1, ОПК-5.

6.4. Проверочная работа №2

(Раздел3)

Вариант № 1

1. Покажите, что если функция $y = f(x)$ измерима на множестве E, то и функция $y = k\,f(x)$ также измерима на этом множестве.
2. Докажите, что следующие функции интегрируемы по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и вычислите интегралы: а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in J, \\ 2, & x \in Q \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 2, & x \in CK \end{cases}$, где K - канторово множество, а CK - его дополнение до всего отрезка $[0,1]$

Вариант № 2

1. Покажите, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ измеримы на множестве E, то и функция $y = f(x) \pm g(x)$ также измерима на этом множестве.
2. Докажите, что следующие функции интегрируемы по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и вычислите интегралы: а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q, \\ -x^2, & x \in J \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in A, \\ \sin \pi x, & x \in [0,1] \cap CA \end{cases}$, где A множество алгебраических чисел, а $CA = R^1 \setminus A$.

Проверяемые знания, умения, компетенции. Знание способа конструирования интеграла Лебега, его основных свойств, связи между интегралами Римана и Лебега; умение вычислять интеграл Лебега. ОК-5, ОПК-1, ОПК-5, ПК-2.

6.5. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Докажите, что если A измеримое множество положительной меры, то в нем существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми рационально.
2. Множества A и B измеримы по Лебегу, причем $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что для любого множества Е верно равенство $m^*(E \cap (A \cup B)) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$.

3. Множества A и B измеримы по Лебегу, причем $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что для любого множества E верно равенство $m_*(E \cap (A \cup B)) = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B)$.

4. Докажите, что для любых измеримых по Лебегу множеств F G справедливо соотношение $m(F \cup G) = m(F) + m(G) - m(F \cap G)$.

5. Является ли измеримой функцией сумма сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда измеримых функций?

6. Пусть $x = \varphi(t)$ - измеримая на множестве E функция, $E_1 = \varphi(E)$ - множество ее значений, а $y = f(x)$ - функция, непрерывная на E_1. Выясните, является ли измеримой на множестве E сложная функция $y = f(\varphi(t))$.

7. Пусть $y = f(x)$ измерима на множестве E, E_0 - измеримое подмножество множества E. Обязано ли множество $f(E_0)$ быть измеримым? Если нет, то приведите соответствующий пример.

8. Пусть $x = \varphi(t)$ - функция, непрерывная на отрезке $E = [\alpha, \beta]$, $E_1 = \varphi(E)$ - множество ее значений, а $y = f(x)$ - функция, измеримая на E_1. Обязана ли быть измеримой на множестве E сложная функция $y = f(\varphi(t))$?

9. Покажите, что если $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $f(x) \geq 0$ на отрезке $[0, 1]$, то $f(x) = 1$ почти всюду.