

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**  
**«Красноярский государственный педагогический университет**  
**им. В.П. Астафьева»**  
**(КГПУ им. В.П. Астафьева)**

## ПРЕДМЕТНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ

### Дифференциальная геометрия

#### рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	<b>D10 Математики и методики обучения математике</b>		
Учебный план	44.03.01 Математика (з, 2025).plx 44.03.01 Педагогическое образование Направленность (профиль) образовательной программы Математика		
Квалификация	<b>бакалавр</b>		
Форма обучения	<b>заочная</b>		
Общая трудоемкость	<b>2 ЗЕТ</b>		
Часов по учебному плану	72	Виды контроля в семестрах: экзамены 9	
в том числе:			
аудиторные занятия	20		
самостоятельная работа	43		
контактная работа во время промежуточной аттестации (ИКР)	0		
часов на контроль	8,67		

#### Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	<b>9 (5.1)</b>		Итого	
	13 4/6			
Неделя	уп	рп	уп	рп
Лекции	8	8	8	8
Лабораторные	12	12	12	12
Контроль на промежуточную аттестацию (экзамен)	0,33	0,33	0,33	0,33
Итого ауд.	20	20	20	20
Контактная работа	20,33	20,33	20,33	20,33
Сам. работа	43	43	43	43
Часы на контроль	8,67	8,67	8,67	8,67
Итого	72	72	72	72

Программу составил(и):

*д-н, профессор, Майер Валерий Робертович* \_\_\_\_\_

Рабочая программа дисциплины

**Дифференциальная геометрия**

разработана в соответствии с ФГОС ВО:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 121)

составлена на основании учебного плана:

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы Математика

утвержденного учёным советом вуза от 25.06.2025 протокол № 8.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

**D10 Математики и методики обучения математике**

Протокол от 07.05.2025 г. № 8

Зав. кафедрой Шашкина Мария Борисовна

Согласовано с представителями работодателей на заседании НМС УГН(С), протокол № \_\_\_ от \_\_\_ \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Председатель НМС УГН(С)

\_\_\_\_\_ 2025 г.

### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Обеспечить развитие у будущего преподавателя достаточно широкого взгляда на геометрию и вооружить его конкретными знаниями, дающими ему возможность преподавать математику в основной, общеобразовательной (базовой) и профильной школе, квалифицированно вести факультативные и элективные курсы по профильной геометрии.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Цикл (раздел) ОП:	Б1.В.02.ДВ.01
<b>2.1</b>	<b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>
2.1.1	Знание основных положений аналитической геометрии, векторной алгебры и математического анализа
2.1.2	
2.1.3	Алгебра
2.1.4	Геометрия
2.1.5	Математический анализ
<b>2.2</b>	<b>Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b>
2.2.1	Научно-исследовательская работа
2.2.2	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работе и проектной деятельности)
2.2.3	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

### 3. ФОРМИРУЕМЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ И ИНДИКАТОРЫ ИХ ДОСТИЖЕНИЯ

**ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач**

**ПК-1.1: Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)**

**Знать:**

Уровень 1	структуру, состав и дидактические единицы разделов дифференциальной геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	структуру, состав и дидактические единицы разделов дифференциальной геометрии в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	структуру, состав и дидактические единицы разделов дифференциальной геометрии в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

**Уметь:**

Уровень 1	применять теоретические знания о структуре, составе и дидактических единицах дифференциальной геометрии в других предметах и на практике в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	применять теоретические знания о структуре, составе и дидактических единицах дифференциальной геометрии в других предметах и на практике, допуская неточности (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	решать простейшие типовые задачи геометрии по заданному алгоритму (правильно выполнено более 60% заданий)

**Владеть:**

Уровень 1	
Уровень 2	
Уровень 3	

**ПК-1.2: Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО**

**Знать:**

Уровень 1	теоретический материал разделов дифференциальной геометрии и владеет умением осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в школьных элективных курсах в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	теоретический материал разделов дифференциальной геометрии и владеет умением осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в школьных элективных курсах в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	теоретический материал разделов геометрии, имеющий отношение к школьному курсу геометрии в полном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

**Уметь:**

Уровень 1	осуществлять отбор теоретического материала для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в полном объеме
-----------	--

	(правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	осуществлять отбор теоретического материала для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	осуществлять отбор теоретического материала для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)
<b>Владеть:</b>	
Уровень 1	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов дифференциальной геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в полном объеме (правильно выполнено более 90% заданий)
Уровень 2	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов дифференциальной геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в достаточном объеме (правильно выполнено более 80% заданий)
Уровень 3	навыками дидактического анализа учебного содержания разделов дифференциальной геометрии для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО в неполном объеме (правильно выполнено более 60% заданий)

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература и эл. ресурсы	Инте ракт.	Примечание
	<b>Раздел 1. Раздел 1. Линии в евклидовом пространстве</b>						
1.1	Вектор-функции одного скалярного аргумента. Гладкие линии. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.2	Вектор-функции одного скалярного аргумента. Гладкие линии. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.3	Касательная прямая к линии. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.4	Касательная прямая к линии. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой. /Лаб/	9	2		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.5	Трехгранник Френе. Кривизна кривой. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.6	Трехгранник Френе. Кривизна кривой. /Лаб/	9	2		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.7	Формулы Френе. Кручение. Строение кривых. Натуральные уравнения. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.8	Формулы Френе. Кручение. Строение кривых. Натуральные уравнения. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
1.9	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	9	18		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
	<b>Раздел 2. Раздел 2. Поверхности в евклидовом пространстве</b>						
2.1	Вектор-функции двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Линии на поверхности. Касательная плоскость, нормаль. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.2	Вектор-функции двух скалярных аргументов. Гладкие поверхности. Линии на поверхности. Касательная плоскость, нормаль. /Лаб/	9	2		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.3	Первая квадратичная форма поверхности, ее приложения. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.4	Первая квадратичная форма поверхности, ее приложения. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		

2.5	Внешняя геометрия поверхностей. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна кривой. Линии на поверхности с общей касательной. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.6	Внешняя геометрия поверхностей. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна кривой. Линии на поверхности с общей касательной. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.7	Классификация точек поверхности. Формула Эйлера. Средняя и полная кривизны поверхности. /Лек/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.8	Классификация точек поверхности. Формула Эйлера. Средняя и полная кривизны поверхности. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.9	Внутренняя геометрия поверхности. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические линии. Кратчайшие. Теорема Гаусса-Бонне. /Лек/	9	0		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.10	Внутренняя геометрия поверхности. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические линии. Кратчайшие. Теорема Гаусса-Бонне. /Лаб/	9	1		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.11	Самостоятельная работа по разделу /Ср/	9	25		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.12	Экзамен /КРЭ/	9	0,33		Л1.1 Л1.2 Л1.3		
2.13	Контроль на промежуточную аттестацию /Экзамен/	9	8,67		Л1.1 Л1.2 Л1.3		

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 5.1. Контрольные вопросы и задания

Примерный перечень вопросов для проведения курсового экзамена

1. Вектор-функции одного скалярного аргумента. Вектор-функции постоянной длины.
2. Годограф, регулярные и гладкие линии. Касательная прямая к линии.
3. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой.
4. Трёхгранник Френе. Уравнения граней и рёбер трёхгранника.
5. Кривизна кривой, вычисление кривизны, геометрический смысл. Критерий принадлежности линии одной прямой.
6. Кручение кривой, формулы Френе.
7. Геометрический смысл кручения кривой, вычисление кручения. Критерий принадлежности линии одной плоскости.
8. Вектор-функции двух скалярных аргументов. Регулярные и гладкие поверхности, касательная плоскость, нормаль.
9. Первая квадратичная форма поверхности, свойства.
10. Длина дуги кривой на поверхности.
11. Угол между кривыми на поверхности.
12. Площадь фрагмента поверхности.
13. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна.
14. Линии на поверхности, имеющие общую касательную. Плоские сечения поверхности. Теорема Менье.
15. Индикатриса Дюпена. Уравнение индикатрисы Дюпена.
16. Классификация точек поверхности, главные направления и главные кривизны.
17. Формула Эйлера.
18. Средняя и полная кривизны поверхности. Классификация точек поверхности в зависимости от значений полной и средней кривизн поверхности.

### 5.2. Темы письменных работ

Индивидуальная домашняя работа №1

Линия  $\Gamma$  задана своим векторным уравнением от переменной  $t$ , точка  $P$  принадлежит линии  $\Gamma$ . В точке  $P$  найти:

- а) уравнением касательной;
- б) уравнение бинормали;
- в) уравнение главной нормали;
- г) уравнение соприкасающейся плоскости;
- д) уравнение нормальной плоскости;
- е) уравнение спрямляющей плоскости;
- ж) координаты базисных векторов естественного трёхгранника;

<p>з) кривизну; и) кручение. ВАРИАНТЫ: 1. <math>(2t; \ln t; t^2); P(2; 0; 1)</math> 2. <math>(t^2/2; 2t^3/3; t^4/2); P(1/2; -2/3; 1/2)</math> 3. <math>(t; t^2/2; t^3/6); P(1; 1/2; 1/6)</math> 4. <math>(t; t^3/3; 1/(2t)); P(1; 1/3; 1/2)</math></p> <p>Индивидуальная домашняя работа №2 Поверхность <math>\Phi</math> задана своим векторным уравнением от переменных <math>u</math> и <math>v</math>, точка <math>P</math> принадлежит <math>\Phi</math>. а) найдите криволинейные координаты точки <math>P</math>; б) докажите, что в окрестности точки <math>P</math> поверхность <math>\Phi</math> гладкая. В точке <math>P</math> найдите: в) уравнение касательной плоскости; г) уравнение нормали; д) коэффициенты первой квадратичной формы; е) угол между <math>u</math>- и <math>v</math>-линиями; ж) коэффициенты второй квадратичной формы; з) нормальные кривизны в направлении <math>u</math>- и <math>v</math>-линий; и) полную и среднюю кривизну; к) определить тип точки <math>P</math>. ВАРИАНТЫ: 1. <math>(u + v; u - v; u^2 + v^2); P(2; 0; 2)</math> 2. <math>(u^2; uv; v^2); P(1; 1; 1)</math> 3. <math>(u^3; v^3; u+v); P(1; 1/2; 1/6)</math> 4. <math>(3u + 3v; 3u^2 + 3v^2; 2u + 2v^3); P(6; 6; 4)</math></p>
<b>5.3. Фонд оценочных средств</b>
Фонд оценочных средств прилагается
<b>5.4. Перечень видов оценочных средств</b>
Индивидуальные домашние задания №1 и №2

<b>6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>			
<b>6.1. Рекомендуемая литература</b>			
<b>6.1.1. Основная литература</b>			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Кузовлев В. П.	Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии: учебное пособие	Москва: Физматлит, 2012
Л1.2	Будак Б. А., Золотарева Н. Д., Федотов М. В., Федотов М. В.	Геометрия: углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие	Москва: Лаборатория знаний, 2018
Л1.3	Львова, Людмила Викторовна	Основания геометрии : учебное пособие для мат. специальностей пед. вузов : доп. УМО вузов РФ	Барнаул : [б. и.], 2008
<b>6.3.1 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства</b>			
Для освоения дисциплины необходим компьютер с графической операционной системой, офисным пакетом приложений, интернет-браузером, программой для чтения PDF-файлов, программой для просмотра изображений и видеофайлов и программой для работы с архивами.			
<b>6.3.2 Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем</b>			
1. Elibrary.ru: электронная библиотечная система : база данных содержит сведения об отечественных книгах и периодических изданиях по науке, технологии, медицине и образованию. Адрес: <a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a> . Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.			
2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн». Адрес: <a href="https://biblioclub.ru">https://biblioclub.ru</a> . Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.			
3. Электронно-библиотечная система издательства «ЛАНЬ». Адрес: <a href="http://e.lanbook.com">e.lanbook.com</a> . Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.			
4. Образовательная платформа «Юрайт». Адрес: <a href="https://urait.ru">https://urait.ru</a> . Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.			
5. ИС Антиплагиат: система обнаружения заимствований. Адрес: <a href="https://krasspu.antiplagiat.ru">https://krasspu.antiplagiat.ru</a> . Режим доступа: Индивидуальный неограниченный доступ.			

## 7. МТО (оборудование и технические средства обучения)

Перечень учебных аудиторий и помещений закрепляется ежегодным приказом «О закреплении аудиторий и помещений в

### 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

По организации работы студента на лекциях

Во время лекций по «Дифференциальной геометрии» студент должен уметь сконцентрировать внимание на рассматриваемых проблемах и включить в работу все виды памяти: словесную, образную и моторно-двигательную. Для этого ему необходимо конспектировать материал, излагаемый преподавателем. Во время конспектирования в работу включается моторно-двигательная память, позволяющая эффективно усвоить лекционный материал. Каждому студенту необходимо помнить о том, что конспектирование лекции – это не диктант. Студент должен уметь выделять главное и фиксировать основные моменты «своими словами». Это гораздо более эффективно, чем запись «под диктовку».

По организации работы студента на практических занятиях

Наряду с прослушиванием лекций по курсу «Дифференциальная геометрия» важное место в учебном процессе занимают практические занятия, призванные закреплять полученные студентами теоретические знания.

Перед практическим занятием студенту необходимо восстановить в памяти теоретический материал по теме практического занятия. Для этого следует обратиться к соответствующим главам учебника, конспекту лекций.

Каждое занятие начинается с повторения теоретического материала по соответствующей теме. Студенты должны уметь чётко ответить на вопросы, поставленные преподавателем. По характеру ответов преподаватель делает вывод о том, насколько тот или иной студент готов к выполнению упражнений.

После такой проверки студентам предлагается выполнить соответствующие задания и задачи. Что касается типов задач, решаемых на практических занятиях, то это различные задачи на усвоение студентами теоретического материала.

По организации самостоятельной работы студентов.

Индивидуальная домашняя работа №1:

Перед выполнением заданий убедитесь, что точка  $P$  принадлежит линии, найдите значение параметра  $t$ , которому соответствует точка  $P$ ;

Найдите значения первой, второй и третьей производных данной вектор-функции, соответствующие найденному параметру  $t$ .

Найдите уравнения всех рёбер и граней трёхгранника Френе, вычислите кривизну и кручение кривой в точке  $P$ .

Используя среду Живая математика, постройте фрагмент кривой в некоторой окрестности точки  $P$ , изобразите единичные векторы репера Френе. Изменяя значения параметра  $t$ , добейтесь анимационного перемещения точки  $P$  вместе с единичными векторами трёхгранника Френе по кривой.

Индивидуальная домашняя работа №2:

Перед выполнением заданий убедитесь, что точка  $P$  принадлежит поверхности, найдите криволинейные (Гауссовы) координаты  $P$ , т.е. значения параметров  $u$  и  $v$ , которым соответствует точка  $P$ ;

Найдите значения частных производных данной вектор-функции, соответствующих найденным криволинейным координатам точки  $P$ .

Найдите уравнения касательной плоскости и нормали, вычислите значения коэффициентов первой и второй квадратичных форм, полную и среднюю кривизны поверхности в точке  $P$ , определите тип точки  $P$ .

Используя среду Живая математика, постройте фрагмент поверхности в некоторой окрестности точки  $P$ , изобразите единичные векторы для  $u$ - и  $v$ -линий, единичный вектор нормали. Изменяя значения параметров  $u$  и  $v$ , добейтесь анимационного перемещения точки  $P$  вместе с касательной плоскостью и единичным вектором нормали по  $u$ - и  $v$ -линиям поверхности.