

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет
им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра-разработчик математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО

На заседании кафедры
Протокол № 8 от «07» мая 2025
Зав кафедрой М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО

на заседании НМСС(Н) ИМФИ
протокол № 8 от 14 мая 2025
Председатель Е.А. Аёшина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации обучающихся

по дополнительным главам математического анализа

наименование дисциплины /практики/модуля

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование «математика», 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) «математика» и «информатика», 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) «физика» и «математика» реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию «Ядра высшего педагогического образования»

Квалификация: бакалавр

Составители: М.Б. Шашкина, доцент
(ФИО, должность)
Н.А. Журавлева, доцент
(ФИО, должность)

Красноярск 2025

Фонд оценочных средств по дисциплине
«Дополнительные главы математического анализа»

Тест входного контроля

1. Формула $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x^2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$ задает функцию на:

- а) $(-\infty; 0]$;
- б) $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$;
- в) $[2; +\infty)$;
- г) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Число a называется пределом числовой последовательности x_n , если

- а) для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;
- б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;
- в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что для всех четных $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$;
- г) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n < a + \varepsilon$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$ равен: а) 0; б) 2; в) 4; г) 1.

4. Функция f , определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если:

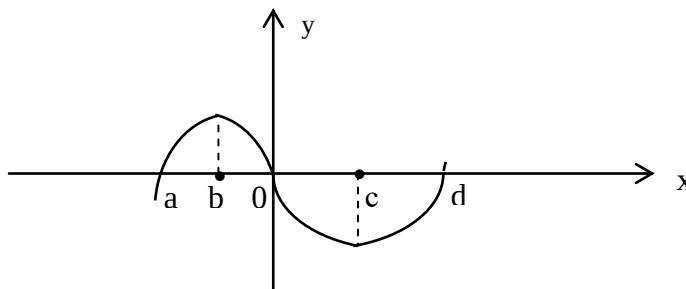
- а) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ и такие x , что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует справедливость неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- в) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- г) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

5. Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 4x - 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$

- а) имеет две точки разрыва;
- б) непрерывна в области определения;

- в) имеет точку разрыва второго рода;
 г) имеет точку разрыва первого рода.
6. Каким условием является непрерывность функции для ее дифференцируемости?
 а) необходимым и достаточным; в) необходимым;
 б) достаточным; г) ни необходимым, ни достаточным.

7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Производная этой функции $y' = 0$ в точках
 а) a, o, d ;
 б) b, c ;
 в) b, o, c ;
 г) a, b, c, d .



8. Угловым коэффициентом касательной, проведенной к кривой $y = \frac{2x+1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ равен: а) 0; б) 1; в) -1; г) 3.

9. Дифференциал функции $y = \arcsin 2x$ равен
 а) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\frac{dx}{2\sqrt{1-4x^2}}$; г) $\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. В какой точке функция $y = x^2 \cdot e^{-x}$ имеет минимум?

а) $(-2; 4e^2)$; б) $(1; \frac{1}{e})$; в) $(2; \frac{4}{e^2})$; г) $(0; 0)$.

11. Первообразной для функции $y = \operatorname{ctg} x$ в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ является функция

а) $y = -\ln \cos x$; б) $y = \ln \cos x$; в) $y = \ln \sin x$; г) $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

12. В семействе интегральных кривых функции $y = \sqrt{x}$ через точку $M(9;18)$ проходит кривая

а) $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$; б) $y = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{56}{3}$; в) $y = x\sqrt{x} - 9$; г) $y = \sqrt{x} + 15$.

13. Для интегрируемости функции на отрезке условие ее непрерывности на нем является:
 а) необходимым; б) необходимым и достаточным;
 в) достаточным; г) ни необходимым, ни достаточным.

14. Площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = x$ от параболы $y = 2x - x^2$ равна

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{9}{2}$.

15. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$, где a_0 и q фиксированные действительные числа сходится, если:

- а) $q = \pm 1$; в) $|q| < 1$;
б) $|q| > 1$; г) расходится при всех q .

16. Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ равна:

- а) $+\infty$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2.

17. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$ равен:

- а) $\frac{1}{3}$; б) 3; в) $+\infty$; г) 0.

18. Если у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то верно утверждение:

- а) ряд сходится; б) ряд расходится;
в) ничего определенного о сходимости или расходимости ряда сказать нельзя;
г) сумма ряда может равняться нулю.

Проверочная работа № 1 по разделу «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Найти частные производные и дифференциал функции $z = \frac{x^3 + y^2}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке (1;1).

2. $U(x, y) = \ln \cos \frac{xy}{x+y}$, $x = t + s$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$.

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^3 + y + 2x - 3y \text{ в точке } (0;0;0).$$

4. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y - 3 = 0$.

6. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $f(x, y) = x^2 y^2$ в точке (2,2), если $\Delta x = 0,01$ и $\Delta y = -0,02$, сравнить их.

**Проверочная работа № 2 по разделу «Интегральное исчисление
функций нескольких переменных»**

1. Изменить порядок интегрирования и построить область интегрирования:

$$a) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy; \quad б) \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y f(x, y) dx.$$

2. Вычислить интегралы:

$$a) \iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D: y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2};$$

$$б) \int_L (xy - y^2) dx + x dy, \quad L: \text{дуга параболы } y=2x^2 \text{ от } A(0;0) \text{ до } B(1;2).$$

3. С помощью формулы Грина преобразовать данный криволинейный интеграл к двойному (не вычислять): $\oint_L \frac{\ln x}{x} \cdot y^2 dx + (x^2 \ln y + \ln^2 x) dy.$

4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$

5. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь фигуры, лежащей в первой координатной четверти и ограниченной частью эллипса: $x=3\cos t, y=2\sin t.$

Индивидуальное задание по разделу «Ряды Фурье»

Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$

1. $f(x) = x + 1.$

2. $f(x) = 5x + 2.$

3. $f(x) = 7 - \frac{3}{2}x.$

4. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$

5. $f(x) = 9 - 4x.$

6. $f(x) = x^2.$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x) = |x|.$

9. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ -2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

11. $f(x) = |\sin x|.$

12. $f(x) = \sin a x.$

13. $f(x) = \cos a x.$

Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$.

14. $f(x) = x^2.$

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

$$16. f(x) = |x|.$$

$$17. f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

19. Функцию $f(x) = x$ разложить в ряды Фурье на отрезке $[0; \pi]$ по синусам и по косинусам.

20. Функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ разложить в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по синусам.

21. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье в промежутке $[0; \pi)$ по синусам.

Функцию $y = f(x)$ разложить в ряд Фурье в указанном промежутке.

$$22. f(x) = x^2 + 1, \quad (-2; 2).$$

$$23. f(x) = |x| + 1, \quad (-1; 1)$$

$$24. f(x) = 10 - x, \quad (5; 15).$$

$$25. f(x) = |1 - x|, \quad (-2; 2).$$

$$26. f(x) = x - 1, \quad (-1; 1).$$

$$27. f(x) = x^2, \quad (0; 2\pi).$$

$$28. f(x) = e^x, \quad (-e; e).$$

29. Разложить в ряд Фурье по синусам и по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

30. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{e}{2}, \\ e - x, & \frac{e}{2} \leq x \leq e. \end{cases}$$

Написать формулу Парсеваля.

Вопросы к зачету

1. Понятие функций нескольких переменных. Предел функций двух переменных.
2. Понятие непрерывности функций двух переменных, непрерывность сложной функции. Основные теоремы о непрерывных функциях двух переменных.
3. Определение частной производной. Теорема смешанных производных.
4. Производные сложных функций нескольких переменных.
5. Полное приращение и полный дифференциал функций двух переменных.
6. Дифференциалы высших порядков, нарушение инвариантности их формы.
7. Задача об объеме цилиндрического тела.

8. Понятие о двойном интеграле, его геометрический смысл.
9. Условия существования и свойства двойного интеграла.
10. Вычисление двойных интегралов (случай прямоугольной и криволинейной области).
11. Замена переменных в двойных интегралах.
12. Двойной интеграл в полярных координатах.
13. Понятие о тройных интегралах и их вычисление.
14. Криволинейные интегралы по координатам, свойства криволинейного интеграла.
15. Вычисление криволинейных интегралов.
16. Приложение криволинейного интеграла к вычислению площади плоской фигуры. Примеры.
17. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
18. Связь двойного и криволинейного интеграла. Формула Грина-Остроградского.
19. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
20. Задача о разложении функции в ряд по данной ортогональной системе функций. Ряд Фурье.
21. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.