МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА

(КГПУ им. В.П.Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
Кафедра Алгебры, геометрии и методики их преподавания
Специальность 050201 «Математика»

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой Алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

(подпись) В.Р.Майер
(И.О.Фамилия)

«20» декабря 2015г.

Выпускная квалификационная работа

Элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ

Выполнил студент группы 61
(номер группы)

С.В.Панина 15.12.2015
(И.О. Фамилия) (подпись, дата)

Форма обучения заочное

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры, геометрии и МП В.В. Абдулкин 15.12.2015
(ученая степень, должность, И.О.Фамилия)) (подпись, дата)

Рецензент
к.п.н., ст. преподаватель кафедры алгебры, геометрии и МП Е.А. Аёшина 16.12.2015
(ученая степень, должность, И.О.Фамилия)) (подпись, дата)

Дата защиты 23.12.2015
Оценка отлично

Красноярск
2015

Оглавление

Введение 3
Глава 1. Теоретические основы создания элективного курса по математике для подготовки к профильному ЕГЭ 6
1.1. Основные функции элективных курсов и их классификация 6
1.2. Преимущества использования элективных курсов в профильном обучении 16
1.3. Особенности внедрения элективных курсов по математике для подготовки к профильному ЕГЭ 20
1.4. Принципы подбора содержания элективного курса по математике 22
1.5. Особенности конструирования содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ 31
Выводы к первой главе: 37
Глава 2. Элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ 40
2.1. Содержание задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ 40
2.2. Программа элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов 42
2.2.1. Пояснительная записка 42
2.2.2. Структура курса 46
2.2.3. Учебно-тематический план 48
2.2.4. Содержание курса. 49
2.2.5. Методические рекомендации 141
2.2.6. Рекомендуемая литература 144
Выводы ко второй главе: 145
Заключение 147
Список использованной литературы 151

Введение

Актуальность темы исследования. Основной целью системы современного образования является воспитание личности, способной не только самостоятельно выбирать объем необходимых знаний, использовать широкий спектр средств освоения сведений, формировать новые навыки и умения, но и иметь личностную потребность в самообразовании. Анализ методологических и теоретических проблем общего среднего образования свидетельствует о росте необходимости в повышении адаптации выпускников школы к изменениям в социальных и экономических условиях современной жизни. Именно поэтому профильная подготовка становится тем средством, которое поможет использовать образовательные ресурсы индивидуально, что особенно важно при подготовке к Единому государственному экзамену (ЕГЭ).

Обновление содержания профильного ЕГЭ является неотъемлемым элементом процесса реформирования всего национального образования, и предусматривает его согласование с требованиями настоящего и потребностями будущего сегодняшних школьников. Поэтому введение профильного обучения в старшей школе обусловило дифференциацию содержания обучения математики в соответствии с базовым и профильным уровнем. Одним из важных компонентов профильного обучения математике является особое внимание к каждому заданию ЕГЭ и именно элективные курсы дополнят и расширят содержание профильного предмета.

Особенности подготовки к Единому государственному экзамену по математике изучены И.Р. Высоцким, В.А. Далингер, С. Г. Кузьмина, А. Л. Семеновой, И. В. Ященко и др.. Проблемы профильного обучения и значение элективных курсов показаны в работах Д.А. Ершова, А.А. Зубрилина, П.С. Ленера, А.А. Никитина, Е.Г. Шаина и др.. Однако, элективный курс по подготовке к решению геометрической задачи в профильном ЕГЭ не был создан, что представляет собой важную научную задачу.

Цель исследования: разработать элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

В целях исследования сформулированы следующие задачи:

1. Раскрыть теоретические основы создания элективного курса по математике для подготовки к профильному ЕГЭ.

2. Провести анализ методических особенностей создания элективного курса по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

3. Создать элективный курса по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

4. Провести оценку эффективности элективного курса по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

Объект исследования – процесс обучения решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

Предмет исследования составляет методическая система создания элективного курса по математике для подготовки к профильному ЕГЭ.

Для достижения цели и выполнения определенных задач использованы следующие методы исследования: анализ психолого-педагогической и учебно-методической литературы, сравнение, синтез, систематизация и обобщение теории и практики, педагогическое наблюдение, беседы с учащимися и учителями.

Теоретическое значение исследования заключается в том, что в рамках данной работы представлен полноценный элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ.

Практическое значение полученных результатов исследования заключается в том, что по результатам теоретических обобщений и выводов созданный элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ может быть внедрен в процесс обучения математике учащихся при подготовке к ЕГЭ.

Глава 1. Теоретические основы создания элективного курса по математике для подготовки к профильному ЕГЭ

1.1. Основные функции элективных курсов и их классификация

Экономическое, политическое и культурное развитие России, реформирование системы образования обусловливают дифференциацию общего образования по ведущим предметам. Изменения, которые происходят в образовательной среде, не оставили в стороне и вопрос профильного обучения посредством элективных курсов.

В современных условиях модернизации школьного образования элективные курсы (ЭК) являются одним из важных составляющих профильного обучения учащихся старших классов [27, С. 12].

Профильные предметы обеспечивают углубленное изучение отдельных предметов и ориентированы, в первую очередь, на подготовку выпускников к дальнейшему профессиональному обучению. Профильное обучение в старшей школе внедряется через такую форму образовательной деятельности как элективные курсы (курсы по выбору). Элективные курсы – это новый элемент учебного плана, который дополняет содержание профиля. Они являются новым механизмом актуализации и индивидуализации процесса обучения. С основательно разработанной системой элективных курсов каждый ученик сможет получить образование с определенным наклоном в той или иной области знаний.

В общей структуре профильного обучения в старших классах можно выделить по содержанию три основных блока: базовый (общеобразовательный стандарт), профильный (профильный образовательный стандарт) и элективный (курсы по выбору) [41]. Соотношение объема учебного времени по указанным блоками составляет: (в %) 50:30:20 [18, С. 112].

Базовые общеобразовательные предметы отражают обязательную для всех учеников инвариантную составляющую часть образования и направлены на завершение подготовки учащихся.

Профильные курсы обеспечивают углубленное изучение отдельных предметов и ориентированы, в первую очередь, на подготовку выпускников школы к будущей профессионального образования [33, С. 15].

Элективные курсы – это курсы профильного дополнения, которые углубляют и расширяют границы профильных предметов, развивают и дополняют их содержание.

Элективные курсы – это обязательные курсы по выбору учащихся из компонента учебного заведения, которые входят в состав профиля обучения [11, С. 15]. Элективные курсы по ИМ призваны способствовать самоопределению старшеклассника по выбору ним дальнейшей профессиональной деятельности; создавать положительную мотивацию обучения по запланированному учеником профилю; знакомить учащихся с ведущими видами деятельности в выбранной научной области; активизировать познавательную деятельность учащихся; повышать уровень знаний и готовности к сдачи ЕГЭ.

Концепция профильного обучения, дифференциация содержания обучения в старших классах осуществляется на основе соотношения базовых и профильных предметов, курсов по выбору [34, С. 18]. Каждый из них выполняет определенную роль в реализации задач профильного обучения. Однако можно выделить отдельные функции для курсов каждого типа.

Курсы по выбору (элективные курсы) (от лат. electus - избранный) - это компонент вариативной части содержания образования в старших классах, направленный на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей каждого школьника. Это обязательный атрибут профильной подготовки и профильного обучения [39, С. 21]. Именно они являются важнейшим средством построения индивидуальных образовательных программ, так как непосредственно связаны с выбором школьниками содержания обучения в зависимости от его интересов, способностей, жизненных планов [11, С. 40].

Курсы по выбору выполняют несколько функций:

- «надстройка» профильного курса - такой дополнительный профильный курс становится в полном объеме углубленным;
- способствуют развитию содержания одного из базовых курсов, изучение которого осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет поддерживать изучение смежных учебных предметов на профильном уровне или получить дополнительную подготовку для сдачи ЕГЭ выбранного предмета;
- способствуют удовлетворению познавательных интересов, потребностей и склонностей учащихся;
- являются площадкой для создания и экспериментальной проверки учебников и учебных материалов нового поколения [16, С. 74].

Различают допрофильные и профильные курсы по выбору. Основная роль допрофильных элективных курсов – помочь учащимся основной школы выбрать профиль дальнейшего обучения. В связи с этим допрофильные элективные курсы рассчитаны на относительно небольшое количество часов. Это позволяет школьникам в течение года испытать себя в различных видах деятельности в соответствии с предложенными профилями. Классификация допрофильных элективных курсов, как любая другая классификация, является относительной. Большинство ученых выделяют общеориентационные, предметноориентационные, межпредметные элективные курсы.

Общеориентационные элективные курсы призваны информировать учеников о различных профилях обучения в старшей школе, специфике видов деятельности, ознакомить и с миром профессий, помочь выбрать профиль обучения с учетом своих индивидуальных особенностей, позволяющих осуществить профессиональные пробы и проектировать профессиональную карьеру.

Предметноориентационные элективные курсы направлены на осуществление допрофильной подготовки и по определенному учебному предмету. Учителя стремятся создать такой элективный курс, который побуждает ученика к дальнейшему изучению предмета в классе данного профиля. Другой особенностью предметноориентационных допрофильных курсов является желание к углубленному изучению отдельных тем и разделов учебных курсов основной школы, выходящих за рамки школьной программы.

В свою очередь, предметноориентационные элективные курсы можно разделить на несколько групп:

- элективные курсы повышенного уровня, направленные на углубление того или иного учебного предмета. Выбор такого элективного курса позволит изучить выбранный предмет не на профильном уровне, а на углубленном. В таком случае все разделы курса углубляются равномерно;
- элективные спецкурсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, которые входят в программу данного предмета. В элективных курсах такого типа выбранная тема изучается более глубоко, чем это возможно при выборе элективного курса типа «курс повышенного уровня»;
- элективные курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, которые не входят в обязательную программу данного предмета.
- прикладные элективные курсы, цель которых – познакомить учащихся с важными путями и методами применения знаний на практике, развивать интерес учащихся к прикладным аспектам предмета;
- элективные курсы, посвященные изучению методов познания природы;
- элективные курсы посвященные истории предмета;

- элективные курсы, посвященные методам решения задач, составлению и решению задач на основе физического, химического, биологического, географического эксперимента.

Межпредметные элективные курсы в системе предпрофильной подготовки не только ориентируют ученика в на изучение конкретного учебного предмета на профильном уровне, но и раскрывают специфику его изучения во взаимосвязи с другими профильными предметами. Они предлагают выход за рамки традиционных предметов, знакомят учащихся с комплексными задачами, которые требуют синтеза знаний из ряда учебных их предметов, формируют общеучебные, общекультурные знания, умения и навыки; коммуникативные и социальные компетентности. Такие элективные курсы следует называть профильноориентационными, поскольку они в полной мере реализует саму идею предпрофильной подготовки. Примерами межпредметных элективных курсов могут быть: «Естествознание», «Основы биогеографии».

Профильные элективные курсы – дополняют содержание профильного курса, развивают содержание одного из базовых курсов, удовлетворяющих разнообразные познавательные интересы школьников, которые выходят за рамки выбранного им и профиля [21, С. 22].

Классификация профильных элективных курсов:

- предметные – углубление и расширение знаний по предмету, который входит в базовый учебный план школы;
- межпредметные – интеграция знаний учащихся о природе и обществе, например, «Естествознание», «Основы биотехнологии», «Основы космонавтики»;
- элективные курсы по предметам, не входящим в базисный учебный план – это курсы, посвященные психологическим, социальным, культурологическим, искусствоведческие проблемам. Примерами таких курсов могут быть «Проблемы экологии», «Эффективное поведение в конфликте», «Условия успешной коммуникации», «География человеческих

перспектив», «Основы зеленого дизайна», «Введение в современные социальные проблемы» и другие [32, С, 15].

Формы обучения в процессе изучения курсов по выбору могут быть как академическими (урок, практикум, лекция, семинар и т.д.), так и ориентированными на инновационные педагогические технологии (коммуникативные методы, групповые, исследовательская деятельность, метод проектов, разработка индивидуальных учебных планов и т.д.) [42, С. 12].

Факультативный (лат. Facultas - возможный, необязательный, данный на выбор) курс – курс, который выбирают ученики для углубления и расширения знаний по определенному предмету, а темы или вопросы – в соответствии с желаниями и интересами. Они предназначены для построения индивидуальной образовательной программы ученика. Ученику предлагается набор таких курсов, и он может выбрать (или не выбрать) один из предложенных факультативных курсов.

Цель факультативных курсов:

- углубленное изучение предметов;
- профессиональная ориентация;
- развитие познавательных интересов;
- выравнивание [17, С. 50].

Факультативные курсы обеспечивают углубленное изучение понятий, которые изучаются в основном курсе, объем знаний ограничен школьной программой. При преподавании факультативных курсов применяются формы и методы, характерные для внеклассных занятий.

Различают такие типы факультативных курсов:

- систематические (углубляют основной материал школы);
- внепрограммные (спецкурсы);
- прикладные;
- межпредметные;
- особенная группа (кружки, секции, творческие объединения).

Разница между элективных и факультативными курсами представлена в виде таблицы.

Таблица 1. Разница между элективных и факультативными курсами

Элективные куры	Факультативные курсы
ОБЩЕЕ	
Цель: углубление знаний, развитие интересов, способностей, наклонностей и профессиональное самоопределение	
Выбираются учащимися на основе собственных интересов	
Отсутствие стандартов и экзаменов	
Составляющие вариативной части учебного плана	
РАЗЛИЧНОЕ	
Выбирается каждым учеником	Выбирается только частью учеников
Включены в расписание, как другие уроки	Занятия вынесены за сетку часов в расписании
Обязательные для посещения, контроль знаний	Необязательны для посещения, не оценивается
Продолжительность от 8-9 ч., 16-17 час. Могут быть рассчитаны на четверть, семестр	Продолжительность - 34 ч. Занятия планируются на весь учебный год
Должно быть предложено значительное количество курсов по каждому предмету	Может быть предложен один курс по одному предмету

Внедрение элективных и факультативных курсов обеспечивает:

- гибкость структуры школьных учебных планов;
- интеграцию смежных предметов;
- дифференциацию (включая различные варианты блоков учебного плана, вариации состава предметов и времени на их изучение)
- унификацию (содержание и объем отдельных предметов разрабатывается в зависимости от функционального значения для определенного профиля)

- гуманизацию (ориентация на знания не как на самоцель, а как условия для развития ребенка) [22, С. 22].

Результаты обучения должны быть значимыми прежде всего для самих учащихся. Они должны быть сформулированы в программах под рубрикой: ученик должен: а) знать; б) уметь. В частности, знать программный материал, уметь работать с информацией, решать практические проблемы, связанные с данным элективных курсов [18, С. 180].

Для контроля уровня достижений ученика можно использовать такие способы, как наблюдение за его активностью на занятиях, беседы с ним, его родителями, экспертные оценки педагогов по другим предметам (особенно из курсов, которые направлены преимущественно на личностный рост ученика), анализ творческих исследовательских работ, результатов выполнения диагностических задач, анкетирование, тестирование. Итоговая оценка может быть накопительной (результаты выполнения всех задач оцениваются и суммируются с окончанием курса), рейтинговой (сравнительная оценка определяется в зависимости от уровня достижений других учеников еще до окончания курса), учитывается и портфель достижений, результаты тестирования.

Отечественная школа имеет хороший опыт осуществления системы факультативных занятий. Созданы десятки программ различных факультативных курсов и, хотя не все из них стали массовыми, но среди них было много достойных, к тому же обеспеченных учебными пособиями для учащихся и методическими пособиями для учителей.

К сожалению, учителя не имеют опыта работы по элективным курсам. Они не ознакомлены с особенностями разработки элективных курсов, не все понимают место их в учебном плане образовательного учреждения, особенности методик и технологии реализации, их суть и назначение. Отсутствует банк данных элективных курсов [22, С. 18].

Элективные курсы могут касаться любой тематики, лежащий в пределах общеобразовательной программы (они также могут выходить и за ее пределы).Элективные курсы в основной школе должны помочь учащимся сформировать культуру выбора образовательного профиля. Эта роль принадлежит курсам, с которыми учащиеся знакомятся в 8-9 классах основной школы. Элективные курсы для старшей (профильной) школы должны выполнять функцию углубления знаний (в этом их сходство с факультативами). С другой стороны, элективные курсы продолжают формировать образовательно-профессиональную траекторию каждого ученика.

Ученикам иногда трудно осуществить выбор того или иного курса. Часто рядом этот выбор делают за них педагоги. Типичная также ситуация, когда ученики свой выбор связывают не с и содержанием профиля, не со своими собственными способностями и ценностными ориентирами, а с личностью учителя-предметника. Уважение к учителю, его авторитет иногда является решающим фактором для ученика.

Большую роль в выборе учениками элективного курса играет его название. Если большинство факультативных курсов носит академическое название, то название элективных курсов должно иметь рекламный аспект. Оно должно быть доступным, понятным, поощряемым, интересным, прежде всего, для учеников [18, С. 58].

Элективные курсы должны быть кратковременными. Это дает возможность ученикам в течение учебного года ознакомиться с несколькими элективными курсами. Это фактор вариативности информации [18, С. 60].

Взяв за основу типовые учебные программы, учителя могут самостоятельно разработать авторские и модифицированные программы элективных курсов предпрофильной подготовки и профильного обучения.

Элективные курсы как наиболее дифференцированная вариативная часть школьного образования потребует новых организационных решений. Широкий спектр и разнообразный характер элективных курсов может поставить отдельную школу в затруднительное положение, определяемое нехваткой педагогических кадров, отсутствием учебно-методического обеспечения.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- профильные курсы выполняют следующие функции: обеспечивают углубленное изучение отдельных предметов; ориентированы на подготовку выпускников школы к будущей профессионального образования; углубляют и расширяют границы профильных предметов, развивают и дополняют их содержание; призваны способствовать самоопределению старшеклассника по выбору ним дальнейшей профессиональной деятельности; создавать положительную мотивацию обучения по запланированному учеником профили; знакомить учащихся с ведущими видами деятельности в выбранной научной области; активизировать познавательную деятельность учащихся; повышать уровень знаний и готовности к сдачи ЕГЭ; способствуют удовлетворению познавательных интересов, потребностей и склонностей учащихся; являются площадкой для создания и экспериментальной проверки учебников и учебных материалов нового поколения;

- анализ теоретических основ позволил определить, что на сегодняшний день различают допрофильные и профильные курсы по выбору. Классификация допрофильных элективных курсов: общеориентационные, предметноориентационные, межпредметные элективные курсы. Профильные курсы делятся на: предметные, межпредметные, элективные курсы по предметам, не входящим в базисный учебный план.

Итак, создание элективных курсов – важная составляющая обеспечения ведения предпрофильной подготовки и профильного обучения. К элективным курсам предъявляются особые требования, направленные на активизацию самостоятельной деятельности учащихся, поскольку эти курсы не связаны с рамками образовательных стандартов и с любыми экзаменационными материалами.

1.2. Преимущества использования элективных курсов в профильном обучении

На современном этапе в системе школьного образования состоялось важное преобразование: в старшей школе введено профильное обучение, которое формируется под знаком гуманитаризации, приоритета и свободы личности.

Профильное обучение как вид предпрофессиональной подготовки призвано обеспечить углубленную подготовку старшеклассников по выбранным дисциплинам, облегчить ориентацию в выборе профиля обучения, смягчить социализацию выпускников с соблюдением принципа индивидуализации, то есть расширить возможности ученика выстроить индивидуальную образовательную программу с целью максимальной профессиональной реализации ее в будущем [17, С. 47].

Профильное обучение призвано обеспечить углубленную подготовку старшеклассников по выбранным дисциплинам, облегчить ориентацию в выборе профиля обучения, смягчить социализацию выпускников с соблюдением принципа индивидуализации [4, С. 16], то есть расширить возможности ученика выстроить индивидуальную образовательную траекторию с целью максимальной профессиональной реализации ее в будущем.

Важнейшим из перечисленного элементом профильного обучения и способом максимальной индивидуализации возможностей каждого ученика должны стать элективные курсы, проблема введения которых еще мало разработана в теории и практике. Элективные курсы по сравнению с профильными предметами имеют большую вариативность содержания, усиливают практическую и опытно-экспериментальную составляющую профильного обучения, характеризуются нестандартностью, учетом региональных условий. Они помогут устранить противоречия между образовательными потребностями молодежи и существующим традиционным «ассортиментом» учебных предметов в школе.

Сейчас наблюдается тенденция к сокращению объема инвариантных учебных предметов и увеличению вариативности обучения за счет расширения спектра учебных курсов по выбору учащихся (элективных курсов) [5, С. 72].

Элективные курсы наряду с базовыми общеобразовательными и профильными предметами могут составлять индивидуальную образовательную программу для каждого школьника. Она поможет реализовать его способности и потребности, создаст возможность дальнейшего профессионального образования и трудоустройства.

Элективные курсы связаны, прежде всего, с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Именно они являются важным средством построения индивидуальных образовательных программ, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, следующих жизненных планов. Элективные курсы как бы «компенсируют» в некоторой степени достаточно ограниченные возможности базовых и профильных предметов в удовлетворении разносторонних образовательных потребностей старшеклассников.

В высшей школе сформировалось устойчивое мнение о необходимости дополнительной специализированной подготовки старшеклассников для прохождения экзаменов и дальнейшего получения высшего образования. А большинство учеников убеждена, что нынешнее общее образование не дает возможностей для успешного обучения в высших учебных заведениях и построения дальнейшей профессиональной карьеры [27, С. 13].

Анализ зарубежного опыта показывает, что общее образование на старшей ступени во всех развитых странах является профильным. Таким образом, для того, чтобы ученики углубленно осваивали нужные им предметы, а также успешно проходили итоговый контроль и сдавали экзамены в высшие учебные заведения и не имели больших трудностей при обучении в нем, необходим переход на профильную школу, то есть профильное обучение должно иметь актуальный характер.

Меняется жизнь и меняется школа. Современные преобразования, которые происходят в общеобразовательной школе, выдвинули на первый план проблему поиска путей профессионального самоопределения старшеклассников. Одним из приоритетных направлений для формирования профессионального самоопределения в старшей школе является введение профильного обучения, основная функция которого должна заключаться в профессиональной ориентации и до профессиональной подготовке учащихся к дальнейшему освоению выбранной профессии [32, С. 14].

Современное школьное образование не всегда предоставляет большинству учащихся благоприятные условия для максимального проявления своих возможностей, интереса к учебе, способствует профессиональному самоопределению и повышению уровня самостоятельности. Ученик, который закончил школу, должен научиться получать новые знания и применять их на практике, уметь ориентироваться в мире современных профессий и стремиться повышать свою квалификацию.

Потому переход к профильному обучению предполагает создание таких преимуществ и перспектив:

- обеспечение углубленного изучения отдельных дисциплин программы полного образования;

- создание условий для дифференциации содержания обучения старшеклассников (использование индивидуальных образовательных программ);

- обеспечение равного доступа к полноценному образованию разным категориям обучающихся в соответствии с их индивидуальными способностями и потребностями;

- расширение возможностей социализации учащихся, обеспечение преемственности между общим и профессиональным образованием, более эффективную подготовку выпускников к освоению программ высшего профессионального образования [1, С. 92].

Именно поэтому будущее профильного обучения составляют элективные курсы. Они углубляют и расширяют границы профильных предметов, развивают и дополняют их содержание (некоторые из них интегрируют содержание). Элективные курсы обязательны для изучения, но их направленность школьник выбирает самостоятельно. Они не должны повторять программу базового среднего образования или так называемых профильных курсов. Схема обучения на элективных курсах достаточно проста. Учитель предлагает ученикам выбрать несколько предметов, после чего подростки получают необходимый багаж знаний из направлений, которые им интересны [26, С. 65].

Элективные курсы предусматривают изучение старшеклассниками тем, что их интересуют, или разделов науки на качественно ином уровне. Предоставляется больше внимания лабораторно-практическим и творческим работам, проектной и исследовательской деятельности учащихся, требующих другой организации учебно-предметной среды.

Итак, курсы по выбору в рамках профильной подготовки создают такие перспективные направления развития образования в целом, как:

- содействие в выборе направления или профиля обучения в старшей школе (через прохождение курсов по выбору на допрофильном уровне ученик имеет возможность сознательно выбрать профиль обучения);
- углубление знаний по профильным предметам;
- помощь в профессиональном самоопределении выпускникам;
- стимулирование развития профессиональных умений и навыков учащихся;
- подготовка к ЕГЭ, реализация интереса к предмету.

Программы элективных курсов включают углубление отдельных тем базовых общеобразовательных предметов, а также расширение за счет тем, выходящих за их рамки.

Элективные курсы рядом с базовыми общеобразовательными и профильными предметами могут составлять индивидуальную образовательную программу для каждого школьника. Она поможет реализовать его способности и потребности, создаст возможность дальнейшего профессионального образования и трудоустройства. Элективные курсы положительно влияют на мотивацию при выборе жизненного пути, имеют большой потенциал для профильного самоопределения школьника, им принадлежит будущее в профильном обучении.

На основании вышеуказанного можно сделать вывод: элективные курсы играют большую роль в совершенствовании школьного образования. Они позволяют производить поиски и экспериментальную проверку нового содержания и методов обучения, а также варьировать объем и сложность изучаемого материала.

Итак, на современном этапе развития средней общеобразовательной школы вектор дифференциации, индивидуализации обучения должен быть направлен на дальнейшую разработку и внедрение в практику элективных курсов, которые были ориентированы на запросы учащихся. К направлениям дальнейшего исследования относим теорию и практику создания элективных курсов учителями математики.

1.3. Особенности внедрения элективных курсов по математике для подготовки к профильному ЕГЭ

За последние годы в социальной жизни общества произошли значительные изменения, требующие пересмотра системы образования. Ее переориентируют в сторону демократизации и гуманизации образования, которая направлена на воспитание, прежде всего, личности, функционально грамотной и методологически компетентной, владеющей информационными технологиями, способной адаптироваться к окружающей среде, к анализу и самоанализу, к сознательному выбору и к ответственности за него. В связи с этим появились различные типы учебных заведений, внесены изменения в учебные программы и учебные планы. Целью изменения системы образования является, прежде всего, ее ориентация на учеников, на удовлетворение их индивидуальных образовательных потребностей.

Значительное место в учебном пособии для курсов по выбору по математике в профильной школе занимает система задач. Среди требований к системе упражнений следующие:

• упражнения должны быть средством установления взаимосвязей между темами, разными понятиями, утверждениями основного курса математики и элективного курса;

• задачи должны служить как целью, так и средством обучения курса;

• система упражнений должна обеспечивать межпредметные связи;

• обеспечение вариативности методов выполнения и результативности задач;

• система упражнений должна формировать у учащихся исследовательские и эвристические умения (побудить к аналогии, сравнению, исследованию смежных случаев, наблюдению, интуиции, использованию предыдущего опыта и т.д.) [30, С. 47].

Модернизация образования предусматривает создание в средней школе системы профильного обучения, которая призвана максимально дифференцировать обучение, о чем уже говорилось ранее. Элективные курсы положительно влияют на мотивацию при выборе жизненного пути, имеют большой потенциал для профильного самоопределения школьника, им принадлежит будущее в профильном обучении. Таким образом, вопрос внедрения в учебный процесс элективных курсов является актуальным вопросом методики обучения математике с целью реализации профильной дифференциации в старших классах.

Таким образом, можно выделить следующие основные особенности внедрения элективных курсов по математике для подготовки к профильному ЕГЭ: индивидуализация обучения, целеполагание в рамках основной программы, вариативность методов и использование итогового контроля как средства анализа не только знаний, умений и навыков, но и потенциала учащихся.

1.4. Принципы подбора содержания элективного курса по математике

Элективные курсы не являются принципиально новым образовательным компонентом как по содержанию, так и по форме обучения. Отечественная школа накопила значительный опыт преподавания предметных факультативов. Профилирование старшей школы в России, по сути, началась еще в 70-е гг. прошлого века именно с углубленного обучения старшеклассников математике. Содержание факультативов, их место в учебном плане и методика преподавания не были четко нормируемыми. Именно поэтому для реализации концепции профильной школы проблема определения и обоснования принципов отбора содержания учебного пособия для курсов по выбору по математике является актуальной.

Модернизация школьного образования обусловлена фундаментальной зависимостью современного общества от способностей и качеств личности, которые формируются прежде всего в образовании. В условиях современного развития техники и технологий, форм организации труда нужны специалисты с развитым творческим и гибким мышлением. Динамический мир требует от молодого поколения творческих инициатив, способности самостоятельного приобретения новых знаний из глобальных источников, их трансформации в инновационные технологии, мотивации к обучению на протяжении всей жизни [25, С. 65].

Процессуальный характер образования приводит к противоречию между имеющимся содержанием, формами и методами обучения и требованиями общества к образовательным достижениям выпускников. Концепция профильного образования в старшей школе определяет, в частности, круг мероприятий по решению указанных проблем[35, С. 212]. Основополагающим является принцип дифференцированной реализуемости обучения, который имеет целью:

- формирование творческого, интеллектуального, профессионального потенциала общества с целью рационального использования возможностей каждого члена общества в его взаимоотношениях с социумом (социальный аспект);

- решение насущных проблем школы путем создания новой дидактической системы дифференцированного обучения учащихся на принципиально новой мотивационной основе (дидактический аспект);

- индивидуализация обучения, основанная на создании оптимальных условий для выявления способностей, интересов и потребностей каждого ученика (психолого-педагогический аспект) [35, С. 213].

Педагогическая целесообразность профильной дифференциации в старших классах следует из:

- наличия у большинства старшеклассников устойчивого интереса к определенным видам деятельности;

- необходимости учета устойчивых интересов учащихся в формировании целей обучения и воспитания;

- потребности создания благоприятных условий для максимального развития задатков и способностей учащихся;

- необходимости профессиональной ориентации учащихся.

В обучении математике дифференциация приобретает особое значение благодаря специфике этого предмета. Математика объективно является одной из самых сложных школьных дисциплин и вызывает субъективные трудности у многих школьников. В то же время имеется большое количество учащихся с явно выраженными способностями к этому предмету. Уже несколько лет подряд воплощается идея отечественных и зарубежных педагогов-методистов (Н.Бурда, З.И. Слепкань, А.М. Капиносов, В.В. Фирсов, Е. Дорофеев, С.Б. Суворова, Л. Кузнецова и др.) по углубленному обучению математике учащихся, начиная с 8-го класса с целью зарождения интереса к математике, его развития до познавательного уровня и создание оснований для выбора математики как профильного предмета[29, С. 28]. Созданы учебники нового поколения по математике для профильной школы на основе двухуровневой дифференциации. Успешной практикой является внедрение курсов по выбору по математике как в основной, так и в старшей школе.

Курсы по выбору (элективные курсы) - это учебные курсы, которые входят в состав профиля обучения. Их основные функции: углубление и расширение содержания профильных предметов или обеспечения профильной прикладной и начальной профессиональной специализации обучения. Возможности учета интересов и потребностей учащихся у элективных курсов значительно выше, чем в других составляющих профильного обучения [9, С. 73].

Наличие большого количества авторских программ курсов по выбору по математике для основной и профильной школы обусловила необходимость научного обоснования принципов отбора содержания элективных курсов [15, С. 98].

Подбирая элективные курсы по математике, нужно учитывать профили обучения в старшей школе, роль математических знаний для изучения профильных предметов, а также типы самих курсов. Как уже говорилось ранее, согласно общей типологии элективных курсов, курсы по выбору по математике для профильной школы можно условно разграничить на:

1) предметные, целью которых является углубление и расширение знаний по математике. Среди них:

- курсы по математике повышенного уровня, которые согласуются с программными темами предмета «Математика» на том или ином профиле и периодом их изучения;

- курсы, при которых углубляется изучение отдельных разделов, входящих в обязательную программу по математике, на математическом профиле или профиле, где математика является инструментарием исследования процессов науки профильному предмету;

- курсы, с помощью которых изучаются отдельные разделы, которые не входят в обязательную программу по математике на математическом профиле;

- прикладные курсы по выбору по математике, имеющие целью ознакомить учащихся с путями и методами применения математических знаний на практике, развития интереса учащихся к сфере современного производства и техники;

- курсы, посвященные изучению математических методов познания окружающего мира;

- курсы, посвященные истории математики;

- курсы по выбору по изучению методов решения задач;

- межпредметные элективные курсы по математике, задачами которых является интеграция математических знаний с другими учебными предметами;

2) внепредметные, то есть элективные курсы, содержание которых не относится ни к одному учебному предмету базового учебного плана, однако в определенной степени связаны с математикой (имеет инструментарий математики и содержит математические объекты) [3, С. 152].

Курсы по выбору должны выполнять функции:

- «надстройки» курса математики как профильному предмету;

- развития курса математики как предмета, который является инструментом для изучения профильного предмета;

- содействия развитию учеников и удовлетворению их интересов в различных сферах познания, выходящие за пределы выбранного профиля.

Реализация функций элективных курсов по математике в профильном обучении зависит от: наличия у учащихся знаний, умений и навыков по математике, необходимых для усвоения соответствующего элективного курса; мотивации изучения курса (удовлетворение личных потребностей учащихся, интерес к предлагаемому содержанию и т.д.) [18, С. 80].

Разработанные принципы отбора содержания курсов по выбору по математике основываются на современных целях и требованиях к знаниям учащихся профильной школы по математике, принципах отбора содержания математического образования [2; 4], особенностях учебной познавательной деятельности учащихся соответствующего возраста. Рассмотрим некоторые из них:

1. Принцип прогнозируемости и социальной эффективности. Содержание курсов по выбору и их результативность должны быть актуальными для старшеклассников. Нужно учитывать современные потребности в знаний и практических умений, а также тенденции развития общества. Набор элективных курсов должен удовлетворять запросам старшеклассников, учитывая их индивидуальные возможности и потребности, а также региональные особенности учебных заведений.

Социальную эффективность содержания курса по выбору обеспечивает его способность реализации развивающей функции обучения. Ожидания старшеклассников будут связаны также с некоторыми метапредметными учебными достижениями (например, с овладением способом получения и анализа информации, создания презентаций, навыков решения проблем и совместной деятельности). При подборе содержания курса по выбору следует учитывать соответствие объема содержания учебном времени, отведенном на его усвоение. Уменьшение объемов курсов по математике возможно за счет качественной переработки содержания [31, С. 136].

Традиционный подход к конструированию содержания учебных предметов основывается на логике базовой науки. Другой подход может заключаться в отборе проблем, явлений, процессов, ситуаций, изучение которых соответствовало бы познавательным запросам учащихся [23, С. 25].

Такой подход может способствовать формированию старшеклассников как субъектов образовательной деятельности, способствовать их развитию, формировать умение решать учебные и жизненные проблемы, учить учиться.

2. Принцип научности.

Учебный материал пособия для курсов по выбору по математики в профильной школе должен:

- соответствовать уровню современной математической науки, подаваться в соответствии с научной системой в определенной последовательности;

- сохранять связи понятий, тем, разделов внутри каждого курса, между курсами, а также межпредметные связи;

- показывать перспективы развития науки, знакомить с историей открытий и ценным практическим опытом человечества.

3. Модульный принцип отбора содержания.

Учебный материал для курсов по выбору по математики в профильной школе состоит из модулей, содержащих завершенные порции учебного материала, подобранного и структурированного в соответствии с этапами учебного процесса.

Должна быть возможность варьировать порядок изучения независимых по содержанию модулей, конструировать курс профильного предмета с помощью различных наборов элективных курсов.

Объем содержания курса должен быть рассчитан на краткосрочное изучение (17-34 часа).Результативность курса должна обеспечиваться перечнем соответствующих требований к знаниям учащихся.

4. Принцип преемственности.

Преемственность в содержании, методах и формах организации курсов по выбору по математике в профильной школе определяется целями обучения математике, всестороннего развития и воспитания старшеклассников. Содержание курсов должно основываться на понятиях, известных ученикам по базовым предметам, но качественно отличаться от содержания школьной математики. Результатом изучения элективных курсов должно быть, в частности, развитие у учащихся умственных и личностных качеств, систематизацию представлений об окружающем мире, полученных при изучении обязательных предметов. Содержание курса по выбору по математике должно задавать рациональную последовательность получения новых знаний - изучение нового материала должен опираться на только пройденный материал, который легко восстанавливается в памяти. Несмотря на то что содержание элективных курсов по математике не стандартизируется, необходимо, чтобы сам курс работал на достижение целей образования, определенных в стандарте [10, С. 401].

5. Принцип мотивации.

Содержание курса по выбору в процессе его изучения должно помочь учащимся оценить свои потребности и возможности и сделать обоснованный выбор своего дальнейшего образовательного пути после окончания школы. Название курса, его содержание должны быть привлекательными для старшеклассников, ведь его выбирают. Желательно наличие ссылок на внешкольные источники и опыт ученика. Важна методика проведения курса.

Интересное изложение материала помогает раскрыть содержание сложных научных понятий и проблем, идей и методов математической науки, активизирует умственную и творческую деятельность. Цель учителя - добиться понимания учащимися того, что они подготовлены к работе над сложными проблемами, но для этого нужны заинтересованность предметом, трудолюбие, владение навыками организации своей работы.

6. Принцип доступности.

Содержание курса по выбору по математике должен быть доступным для его изучения школьниками соответствующей возрастной категории с учетом имеющихся знаний и умений. Однако, следует обеспечить материал для учебной деятельности учащихся в зоне их ближайшего развития.

Программу курса по выбору по математике желательно сориентировать на конкретный профиль обучения. Количество учебных часов, отведенных на выполнение программы курса, должно соответствовать возможностям качественного усвоения знаний учениками и получения запланированных учебных достижений. Темп изучения курса (распределение содержания по темам, параграфам) должно быть адекватным сложности и актуальности учебного материала – на каком материале сосредоточиться, а что рассмотреть вскользь.

7. Принцип вариативности форм и методов обучения.

Цели образования достигаются в условиях реализации личностно-деятельностного подхода в обучении, поэтому в рамках любого курса по выбору по математике должны быть смещены акценты на формирование знаний и умений через активную самостоятельную деятельность учащихся: задача на проектную и исследовательскую работу, практические и лабораторные занятия, дискуссии и т.д.

При подборе методов и приемов обучения курсов по выбору, как уже отмечалось, необходимо учитывать содержание курса, уровень развития и подготовленности учащихся, их познавательные интересы и возрастные особенности. Одним из важнейших требований к выбору методов является активизация мышления учащихся, развитие самостоятельности в разных формах ее проявления. Применение лекционно-семинарской системы соответствует психологическим особенностям старшеклассников, их возможностям усваивать учебный материал большими блоками и позволяет высвободить время для самостоятельного закрепления и углубления теоретического материала.

На семинарских занятиях ученикам следует предоставить возможность повторять, углублять и обобщать пройденный материал. Если элективный курс касается вопросов истории математики, полезной формой работы является подготовка учениками рефератов. Выполнение таких задач способствует формированию навыков самообразования, удовлетворению индивидуальных интересов учащихся. В то же время тематика рефератов должна быть ценной для всех учеников, изучающих определенный курс.

Эффективной формой исследовательской работы учащихся на семинарах является эвристическая беседа. Полезно организовать процесс высказывания учащихся о возможном способе поставленной проблемы (например, доведение свойства), поиск дедуктивных обоснований и выводов, обобщение, анализ прикладных возможностей. Однако, процесс многоэтапной поисковой творческой деятельности учащихся учитель должен эффективно организовывать. На практических занятиях формируются умения и навыки решения основных типов задач курса. Эффективным приемом организации учебной деятельности является показ новых идей и методов курса в действии, в применении к решению задач, которые традиционными (программными) методами решаются гораздо сложнее.

Итак, содержание курсов по выбору по математике в профильной школе должно строиться на основе научно обоснованных принципов с учетом: полученных знаний, а также умений и навыков, приобретенных учащимися в процессе изучения математики на предыдущих ступенях общеобразовательной школы, их опыта взаимодействия с окружающим миром, а также принципов отбора инвариантного содержания математики в профильной школе; индивидуальных особенностях и потребностях учащихся; современных социальных заказов по личным качествам выпускников, способных эффективно взаимодействовать в выполнении социальных, производственных и экономических задач.

1.5. Особенности конструирования содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ

Переход к профильному обучению и введение элективных курсов в 10-11-х классах общеобразовательных учебных заведений как обязательных элементов учебного плана ставит перед всеми работниками образования целый ряд важных задач, которые должны быть решены в ближайшее время. Несмотря на то, что сегодня о элективных курсах много написано, школьная практика показывает, что учитель часто недостаточно информировано требованиях, критериях, предъявляемых к программам и учебным пособиям элективных курсов; не обладает практическим опытом конструирования программ; не заинтересован в качественной реализации программ элективных курсов.

Исследователи в течение последних лет профилирования старшей школы создали концепцию профильного обучения для подготовки к ЕГЭ учащихся старших классов, разработали программы обучения математике на профильном уровне, подготовили рекомендации по их преподаванию в старших классах различных профилей. Кроме того, ими создаются теоретические основы, а также практические разработки элективных курсов по математике для подготовки к ЕГЭ.

Несмотря на очевидную значимость элективных курсов по математике для подготовки к ЕГЭ, теория и технология их создания до сих пор не исследованы должным образом. Есть только отдельные исследования на основе конкретных практических разработок элективных курсов, осуществлена классификация типов элективных курсов в системе школьного образования, описана организация учебных занятий в пределах элективных курсов для учащихся, выбравших математический профиль специализации. Кроме того, существуют исследования, посвященные созданию элективных курсов для высших учебных заведений. Анализ этих работ показал, что сегодня существуют отдельные подходы к разработке элективных курсов по математике для подготовки к ЕГЭ, но полученных результатов недостаточно для формулирования универсальных основ создания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ, основанный на личностноориентированном и компетентностном подходе к математической подготовке старшеклассников.

Сегодня профильная подготовка старшеклассников немыслима без интенсификации и оптимизации процесса обучения. Создание учебных планов по элективным курсам, по математике для подготовки к ЕГЭ в том числе, позволяет учащимся не только овладевать предметным аспектом математики (основы научных знаний, общая подготовка к практической деятельности в будущем, формирование научных убеждений), но и личностным аспектом (развитие умения мыслить, развитие творческих и познавательных способностей, развитие воображения, памяти и внимания, формирование потребностей, мотивов поведения и системы ценностей). Введение элективных курсов в процесс обучения математике позволяет ученикам повышать свою подготовку к ЕГЭ, а учителям - интенсифицировать и оптимизировать образовательный процесс.

Элективный курс как новый элемент учебного плана, который дополняет содержание профильной подготовки старшеклассников, способствует индивидуализации процесса обучения, позволяя ученику получить специализацию в той или иной области знаний в соответствии с его индивидуальными учебными интересами, потребностями и наклонностями [11, С. 90].

В процессе научных исследований удалось установить, что элективные курсы для подготовки к ЕГЭ компенсируют во многих случаях несколько ограниченные возможности профильного курса по математике в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Содержанием деятельности учителя является определение основных понятий элективного курса, форм организации занятий, списка литературы для учащихся, информационно-компьютерной базы к элективному курсу; разработки тематики проектов, создание фонда творческих задач и т.д. Результат предполагает выделение основных понятий элективного курса; учебно-тематическое планирование; определение форм организации занятий; разработка и отбор заданий, текстов и пр.[43].

Конструирование содержания элективного курса реализуется в нашем исследовании с помощью педагогической технологии, которая является деятельностью по выполнению задач на каждом из следующих этапов: аналитического, конструктивного, оценочного и этапа экспертизы.

На аналитическом этапе определяются образовательные запросы ученика и цели профиля элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ, устанавливается взаимосвязь между содержанием профильного курса и возможностям элективного курса.

Основными задачами конструктивного этапа является разработка содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ на основе совокупности принципов и источников, отражающих сущность профильного обучения математики. Для этого следует определить основные понятия элективного курса, разработать тематику учебного пособия, подобрать тесты [28], разработать упражнения и задания.

Оценочный этап (при его реализации определяется формы и методы оценки уровня усвоения учащимися содержания элективного курса, а его результатом – подготовка пакета контрольно-измерительных материалов и разработка критериев оценки усвоения учащимися содержания элективного курса) и этап экспертизы (задачей которого будет определения качества подготовленного учебного пособия и его соответствия разработанной программой элективного курса и целям профиля и потребностям учащихся, а результатом – коррекция и утверждение учебного пособия) являются следующими задачами исследования, которые будут выполняться в пределах плановой научно-исследовательской работы.

Анализ литературы по проблеме этапов конструирования содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ позволяет сконструировать методическую модель его организации (см. Рис. 1), которая состоит из трех компонентов:

1. Разработка учебной программы элективного курса с определением целей, задач и требований к элективных курсов по математике для подготовки к ЕГЭ.

2. Учет особенностей конструирования содержания элективного курса, связанных:

а) со спецификой образовательной отрасли (подготовка к ЕГЭ);

б) с уровнем психо-физиологического развития старшеклассников;

в) с уровнем предметной подготовки учащихся по математике.

3. Результат прохождения элективного курса, который состоит из уровня приобретенных знаний, навыков и умений, и возможно документа (свидетельства, справки, портфолио и т.п.), который засвидетельствует окончание элективного курса.

Остановимся подробнее на содержании каждого из компонентов.

Организация элективного курса начинается с создания программы, в который определяются цели, содержание, задачи, содержательные единицы, а также требования к усвоению материала.

Основная цель элективного курса в пределах профильной подготовки - расширить знания в конкретной области и помочь с выбором будущей профессии.

Элективный курс по математике для подготовки к ЕГЭ поможет выполнить следующие задачи:

- создание условий, которые будут способствовать осознанному выбору направлений дальнейшего обучения учащихся 10-11-х классов, связанного с выбранным профилем (в нашем случае - это математический профиль);

- создание условий для осознанного выбора старшеклассниками направления будущей профессиональной деятельности;

- создание условий для успешной сдачи экзаменов.

Рисунок 1. Методическая модель организации элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ

Элективный курс должен отвечать ряду требований:

1. Полнота - одно из главных требований. Элективные курсы в пределах конкретной образовательной области должны быть представлены для всех имеющихся профилей. Набор предлагаемых курсов должен быть вариативным, то есть для каждого профиля их количество должно быть избыточным для обеспечения реальной свободы выбора курсов учениками.

2. Содержание элективного курса должно быть привлекательным для учеников. Это означает, что при выборе курса, они должны ориентироваться на следующие параметры:

- личностная самореализация;

- ознакомление с определенной профессиональной отраслью;

- развитие общих (базовых, универсальных) умений, которые могут быть реализованы в широкой сфере деятельности.

Научный по содержанию материал нужно представить в интересной форме с включением оригинальных, важных ведомостей для учащихся.

3. Элективные курсы не должны быть длительными. Продолжительность курса может быть разной - четверть, полгода, год - в зависимости от целей, задач и содержания.

Для проведения итоговой аттестации по результатам элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ может быть использована специальная зачетная работа (тест).

Итоговая оценка может также быть «накопительной» - результаты выполнения всех предложенных заданий будут оцениваться в баллах, которые будут суммироваться по окончанию курса.

Поскольку целью является освещение особенностей конструирования содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ для учащихся 10-11-х классов профильной школы, остановимся более подробно на этом вопросе.

Специфика интегрированного обучения в рамках математических элективных курсах обусловливает особенности целей, содержания и принципов обучения в рамках этих курсов. Постановка целей и задач, отбор содержания обучения элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ осуществлялись с позиций реального использования математики как в условиях ЕГЭ, так и в ситуациях опосредованного обучения.

Таким образом, основные требования к конструированию содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ следующие:

а) личностно-актуальная и социально значимая тематика;

б) поддержка базовых курсов, а также возможность для углубления профилирования и выбора индивидуальной траектории обучения; опора на методы и формы организации обучения, которые соответствуют образовательным потребностям учащихся и учителя, а также адекватным будущей профессиональной деятельности старшеклассников;

в) обеспечение формирования и развитие первоначальных, интеллектуальных и организационных способностей и навыков для подготовки к ЕГЭ;

г) система диагностики и оценки, которая стимулирует стремление к личностному росту и профессиональному самоопределению.

Выводы к первой главе:

В рамках данной главы были рассмотрены теоретические основы создания элективного курса по математике для подготовки к профильному ЕГЭ и сделаны следующие выводы:

- профильные курсы выполняют следующие функции: обеспечивают углубленное изучение отдельных предметов; ориентированы на подготовку выпускников школы к будущему профессиональному образованию; углубляют и расширяют границы профильных предметов; способствуют удовлетворению познавательных интересов, потребностей и наклонностей учащихся; являются площадкой для создания и экспериментальной проверки учебников и учебных материалов нового поколения и пр.;

- анализ теоретических основ позволил определить, что на сегодняшний день различают допрофильные и профильные курсы по выбору. Классификация допрофильных элективных курсов: общеориентационные, предметноориентационные, межпредметные элективные курсы. Профильные курсы делятся на: предметные, межпредметные, элективные курсы по предметам, не входящим в базисный учебный план;

- создание элективных курсов – важная составляющая обеспечения ведения предпрофильной подготовки и профильного обучения. К элективным курсам предъявляются особые требования, направленные на активизацию самостоятельной деятельности учащихся, поскольку эти курсы не связаны с рамками образовательных стандартов и с любыми экзаменационными материалами;

- элективные курсы позволяют производить поиск и экспериментальную проверку нового содержания и методов обучения, а также варьировать объем и сложность изучаемого материала;

- можно выделить следующие основные особенности внедрения элективных курсов по математике для подготовки к профильному ЕГЭ: индивидуализация обучения, целеполагание в рамках основной программы, вариативность методов и использование итогового контроля как средства анализа не только знаний, умений и навыков, но и потенциала учащихся.

- основные требования к конструированию содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ следующие:

а) личностно-актуальная и социально значимая тематика;

б) поддержка базовых курсов, а также возможность для углубления профилирования и выбора индивидуальной траектории обучения; опора на методы и формы организации обучения, которые соответствуют образовательным потребностям учащихся и учителя, а также адекватным будущей профессиональной деятельности старшеклассников;

в) обеспечение формирования и развитие первоначальных, интеллектуальных и организационных способностей и навыков для подготовки к ЕГЭ;

г) система диагностики и оценки, которая стимулирует стремление к личностному росту и профессиональному самоопределению.

Итак, содержание курсов по выбору по математике в профильной школе должно строиться на основе научно обоснованных принципов с учетом: полученных знаний, а также умений и навыков, приобретенных учащимися в процессе изучения математики на предыдущих ступенях общеобразовательной школы, их опыта взаимодействия с окружающим миром, а также принципов отбора инвариантного содержания математики в профильной школе; индивидуальных особенностях и потребностях учащихся; современных социальных заказов по личным качествам выпускников, способных эффективно взаимодействовать в выполнении социальных, производственных и экономических задач.

Глава 2. Элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ

2.1. Содержание задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ

Согласно Концепции изучения математики, ЕГЭ по математике 2016 – один из двух обязательных экзаменов, сдавать который придется каждому выпускнику. В 2016 году впервые экзамен по математике будет разделен на две составные части – базовую и профильную, и сделано это в соответствии с принятой в РФ Концепцией развития математического образования. Если выпускник школы планирует поступать в ВУЗ, у которого перечень вступительных испытаний на курсы бакалавриата и специалитета не содержит предмет «Математика», ему достаточно будет сдать ЕГЭ по математике базового уровня. Экзамен профильного уровня придется сдавать, если вы намерены поступать в ВУЗ, имеющий в перечне своих вступительных испытаний математику [8, С. 47]. К обоим уровням можно подготовиться на онлайн курсе ЕГЭ по математике.

На решение экзаменационных задач учащимся отводится 180 минут. В базовом уровне - 20 заданий, на которые нужно дать краткий ответ в виде одного числа, целого или десятичной дроби [14, с. 50-51]. Некоторые задания предусматривают ответ в виде последовательности цифр. Профильный курс подготовки к ЕГЭ по математике онлайн состоит из двух частей. В первой содержится девять заданий невысокой сложности, требующие краткого ответа, вторая часть состоит из 12 вопросов. На пять из них ответ краток, на остальные – развернутый.

Задания к ЕГЭ по математике 2016 (они называются КИМ, контрольные измерительные материалы) были разработаны специально для испытания 2016 года сотрудниками ФИПИ, за основу была взята школьная программа. Подготовка к экзамену вполне допустима по традиционным школьным учебникам (если они рекомендованы и допущены к использованию Минобрнауки России). В случае необходимости нужно консультироваться с учителем математики или репетитором [7, С. 40].

«Углы и расстояния в пространстве» - тема задания 16 ЕГЭ по математике. В экзаменационном билете рассматривается значительное количество учебного материала. К примеру, вам может быть предложено найти угол между скрещивающимися прямыми [19]. Чаще всего вы будете искать угол между прямыми на геометрических телах (кубе, пирамиде, призме, параллельном параллелепипеде) – между их ребрами, сторонами оснований, высотами сторон. Записать ответ вас попросят либо в градусах, либо в виде косинуса, синуса или тангенса искомого угла.

Еще одна тема задания № 16 ЕГЭ по математике – «Угол между прямой и плоскостью». Построение тестов – такое же, вы будете рассматривать геометрические тела и искать угол между их элементами. Такого же типа вопросы встретятся вам в теме «Угол между плоскостями». Ответ нужно будет написать либо в натуральной значении угла (в градусах), либо найти его косинус, тангенс или синус [12, С. 88].

Следующий тип вопросов в задании 16 ЕГЭ по математике – определение расстояний. Все исходные значения в условиях задач даны в величинах без единиц измерения, к примеру, «Длина ребра АВ равна 1». Вы должны учитывать это при ответе и указывать его тоже исключительно одним числом. В некоторых заданиях в условии может встретиться буквенное выражение: «Длина ребра ВС равна а» [13, С. 116]. При решении задач этого типа вы будете находить расстояние от точки до прямой и до плоскости, а также расстояние между прямыми и плоскостями.

Часть вопросов экзаменационного билета посвящена вычислению площадей элементов геометрических тел – всей их поверхности, отдельной грани, основания, а также площади сечения тел плоскостью, проходящей через определенные точки. Некоторые варианты задания предлагают определить объем многогранников, а также значения отдельных элементов круглых тел – цилиндра, конуса, шара.

На основе описанной выше структуры далее предложим программу элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов, состоящую из 2 блоков:

1 – общие вопросы;

2 – решение типовых задач по ЕГЭ по направлениям:

- углы и расстояния в пространстве;
- угол между прямой и плоскостью;
- определение расстояний;
- вычисление площадей элементов геометрических тел.

Таким образом, на основании вышеперечисленных требований и после анализа содержания задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ было определено, что часть вопросов экзаменационного билета посвящена вычислению площадей элементов геометрических тел – всей их поверхности, отдельной грани, основания, а также площади сечения тел плоскостью, проходящей через определенные точки. Некоторые варианты задания предлагают определить объем многогранников, а также значения отдельных элементов круглых тел – цилиндра, конуса, шара.

2.2. Программа элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов

2.2.1. Пояснительная записка

Программа элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов разработана на основе методических разработок доктора педагогических наук Алексея Анатольевича Журина [18]

Название элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень).

Назначение: программа курса по выбору для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учебных заведений.

Цель курса - систематизация и обобщение знаний, полученных в процессе изучения геометрии в 7-10 классах, повторение основных опорных фактов и методов решения задач.

Задачи курса:

- способствовать систематизации и обобщению знаний, умений и навыков по геометрии, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности в объемах, достаточных для продолжения образования;

- повышать математическую культуру, развивать логическое, абстрактное мышление, пространственное воображение учащихся;

- развивать способности учащихся к решению задач по геометрии;

- подготовить учащихся к государственной итоговой аттестации и ЕГЭ.

В ходе реализации ЭК учащиеся будут:

Знать:

- Геометрические фигуры на плоскости и их свойства;
- Свойства треугольников, четырехугольников, правильных многоугольников, углов
  свойства вписанного и описанного треугольников;
- Признаки треугольников;
- Формулы площадей фигур;
- Формулы для исчисления площадей поверхностей и объемов;
- Определение основных элементов.

Уметь:

- Характеризовать геометрические фигуры на плоскости и их свойства;
- Объяснять свойства треугольников, четырехугольников, правильных многоугольников, углов;
- Называть свойства вписанного и описанного треугольников;
- Характеризовать признаки треугольников;

- Объяснять нахождение неизвестных элементов с помощью тригонометрических функций;
- Находить неизвестные элементы с известными радиусами вписанных и описанных кругов;
- Описывать построение вписанного и описанного круга;
- Объяснять формулы площадей фигур;
- Использовать формулы для исчисления площадей поверхностей и объемов;
- Выделять основные элементы в условии задачи;
- Объяснять использование формул;
- Обосновывать основные построения при изображении комбинации тел и построении сечений.

Приобретут навыки:

- Решения задач на доказательство, вычисление, исследования и построение, описывает построение и исследования;
- Использования теоремы Пифагора, синусов, косинусов для решения треугольников;
- Решения задач на вычисление площадей и происхождение элементов фигур по известной площади;
- Решения задач на вычисление площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения;
- Решения задач на построение и вычисление площадей сечений многогранников и тел вращения; на комбинацию геометрических тел;
- Решения типовых задач, входящих в задание 16 профильного ЕГЭ.

Таким образом, цель курса – не только подготовить учащихся выпускных классов к ЕГЭ (Единому государственному экзамену), но и облегчить будущим первокурсникам период адаптации к обучению в вузе.

Как известно, самым тяжелым для студентов является именно первый год обучения. По статистике на конец первого курса приходится 60-70% отчислений из рядов студентов [40, С. 31]. Проблемы адаптации первокурсников связаны, прежде всего, с большой разницей требований и умений при обучении в школе и вузе. Например, от студентов по сравнению со школьниками, требуется совсем другой уровень логического и абстрактного мышления, умение концентрироваться (следить за изложением теоретического материала не 15-20 минут, а в течение пары), умение самостоятельно анализировать лекционной материал и формулировать вопросы, способности к самостоятельной работе с литературой, самоконтроля и т.п. Меняется и насыщенность, темп представления лекционного материала (теперь никто не показывает и не объясняет несколько раз), а преподавание математических дисциплин происходит на другом, значительно высшем уровне абстракции, чем в школе.

Отличие между учебным процессом в школе и высших учебных заведениях с каждым годом увеличивается. Поэтому важно поднимать вопрос о трансформации школьного математического образования, чтобы посмотреть на этот вопрос с другой стороны.

В нашей стране происходят процессы демократизации в школьном образовании. Школа отказывается от принудительной формы обучения, в том числе и по математике. Ученики и их родители сегодня имеют право выбора какие именно учебные предметы изучать на углубленном уровне. Для этого существуют лицеи, гимназии, классы с углубленным изученности тех или иных дисциплин, в том числе и математики, а в общеобразовательных школах – система факультативных занятий и курсов по выбору, которые сопровождают профильное обучение.

Поэтому предлагаемый курс направлен не только на то, чтобы предоставить возможность как можно большему количеству школьников успешно решить одну из сложнейших задач по математике в рамках сдачи ЕГЭ, но и получить качественное дополнительное образование, развить навыки, которые станут опорой для получения высшего образования в дальнейшем.

2.2.2. Структура курса

Курс рассчитан на 34 академических часа, 1 занятие 2 раза в неделю. Длительность – 2 учебных четверти.

Концепция подобного дополнительного образования особенно актуальна для тех школьников, которые по каким-либо причинам имеют низкие показатели по направлению «Геометрия».

Структура элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) представлена следующими уровнями:

1 – общие вопросы

Первый этап обучения имеет целью обобщение и углубление знаний учащихся по традиционному школьному курсу математики, то есть формирование базовых знаний, умений и навыков, понимания сущности профильных заданий по ЕГЭ, навыков необходимых для дальнейшего обучения в вузе, в том числе последовательные обработки тем, что способствует формированию у учащихся мышления разветвления, абстрактного и графического мышления, умение моделировать задачу. Это повторение теории из планиметрии и геометрические задачи (планиметрия), которые позволят последовательно перейти к модулю 2 - решению типовых задач по стереометрии. [20]

2 – решение типовых задач по ЕГЭ по направлениям:

- углы и расстояния в пространстве;
- угол между прямой и плоскостью;
- определение расстояний;
- вычисление площадей элементов геометрических тел.

На втором этапе обучения предлагается продолжить углублять знания учащихся по четырем основным темам задания 16 профильного уровня ЕГЭ по математике. Тут также продолжится развитие навыков самообучения и саморазвития, которые важны для учащихся.

Заметим, что полученные в течении обучения по данной программе знания ученики и абитуриенты могут применять на ЕГЭ или другой форме вступительных экзаменов для использования более рациональных способов решения задач. При этом основные формулы предлагаемого курса (например, расстояние от точки до прямой или плоскости, уравнение прямой в отрезках, определенные площади фигуры и т.п.) можно пользоваться без доказательства.

Также в структуру элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) входит подготовительное занятие, направленное на объяснение структуры ЕГЭ по математике. с этой целью, кроме объяснения целей и задач курса, ученикам предлагается к просмотру и обсуждению презентация, представленная на Рис. 2 (см. Приложение 2).

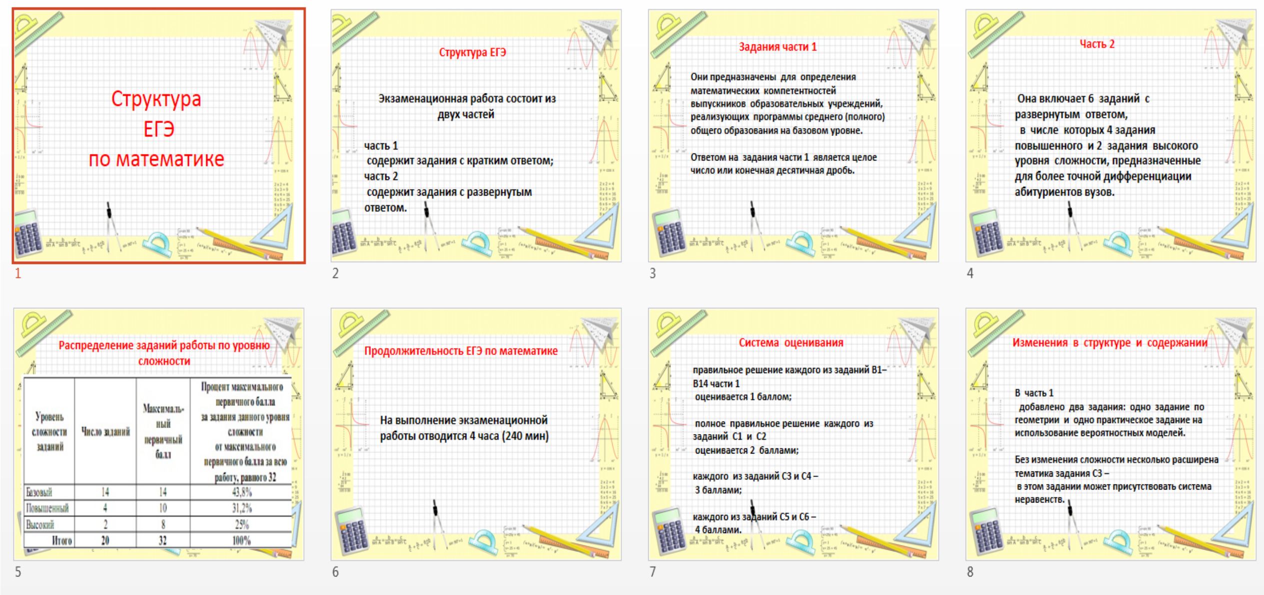


Рисунок 2. Презентация для вводного занятия

Особенностью данного курса являются то, что обучение ориентируется на самостоятельную работу учащихся с современной литературой и специально предложенными видео [6] и медиа-ресурсами. Это будет способствовать формированию у них соответствующих типов самостоятельного мышления, способности самостоятельно работать с литературой и глобальной системой информации. Для этого в программе указано, что именно ученику надо повторить для отработки определенной темы на занятии.

Для отработки тем второго блока, которые требуют от школьника тщательной систематической работы, целесообразно использовать предложенные презентации (см. Приложение 3) и видео для самообучения (см. Приложение 4). Это поможет ученику пройти от простейших понятий и задач определенной тематики к задачам, сложность которых соответствует профильному уровню ЕГЭ или вступительному экзамену по математике в технический вуз, способствует развитию мышления и личных качеств, без которых невозможно дальнейшее обучение.

2.2.3. Учебно-тематический план

Учебно-тематический план элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) представлена в виде таблицы, которая содержит ориентировочный раздел часов по темам. Содержание курса с теорией и предлагаемыми задачами представлено в разделе 2.2.4.

Предлагаемое распределение часов, как и тематическое планирование и последовательность изучения тем является условной. Учитель может корректировать их зависимых от потребностей и возможностей каждой конкретной группы учеников.

Заметим, если учащиеся имеют повышенный уровень математической подготовки, например, благодаря определенному факультативному курсу, предлагаемый курсы подготовки к ЕГЭ может быть ограничен только вторым модулем.

Таблица 2. Ориентировочное распределение учебного времени, содержание учебного материала и требования к знаний учащихся.

№ п/п	Наименование темы	Количество часов
1.	Вводное занятие	1
Модуль 1. Общие вопросы		
2.	Тема 1. Треугольники. Вписанные и описанные треугольники. Теорема Пифагора и ее следствия.	2
3.	Тема 2. Тригонометрические функции угла. Решение треугольников.[43].	2
4.	Тема 3. Четырехугольники и их свойства.	2
5.	Тема 4. Окружность и ее элементы.	2
6.	Тема 5. Площади геометрических фигур[37]	2
7.	Тема 6. Многогранники	2
8.	Тема 7. Площади поверхностей и объемы многогранников.	2
9.	Тема 8. Тела вращения	2
10.	Тема 9. Комбинация шара с призмой, пирамидой, усеченной пирамидой, с круглыми телами [38].	2
МОДУЛЬ 2. Решение типовых задач № 16 в профильном ЕГЭ		
11.	Тема 10. Углы и расстояния в пространстве	3
12.	Тема 11. Угол между прямой и плоскостью	3
13.	Тема 12. Определение расстояний	3
14.	Тема 13. Метод координат	3
15.	Тема 14. Вычисление площадей элементов геометрических тел	3

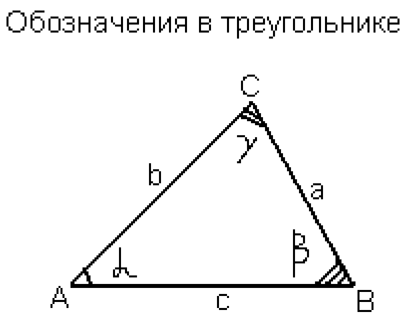
2.2.4. Содержание курса.

Тема 1. Треугольники.

Треугольник - это фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами.

Раздел математики, посвященный изучению закономерностей треугольников — тригонометрия.

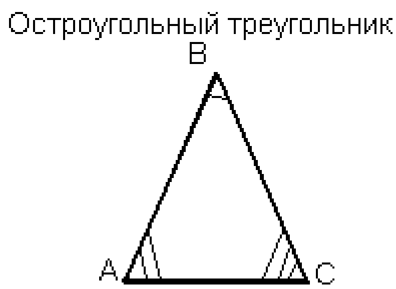
Сумма всех углов в треугольнике равна 180°.



Вершины треугольника обычно обозначаются заглавными латинскими буквами (A, B, C), величины углов при соответственных вершинах — греческими буквами (α, β, γ), а длины противоположных сторон — прописными латинскими буквами (a, b, c).

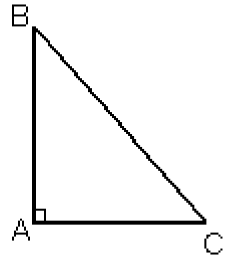
Виды треугольников:

(по величине углов)



Остроугольный треугольник - это треугольник, в котором все три угла острые, т.е. меньше 90°.

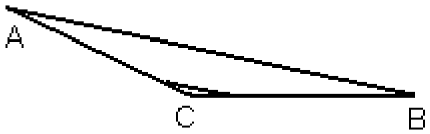
Прямоугольный треугольник



Прямоугольный треугольник - это треугольник, содержащий прямой угол.

Две стороны, образующие прямой угол, называются *катетами* (АС и АВ), а сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой* (ВС).

Тупоугольный треугольник

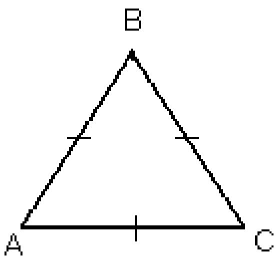


Тупоугольный треугольник - это треугольник, содержащий тупой угол, т.е. один из его углов лежит в пределах между 90° и 180°.

(по числу равных сторон)

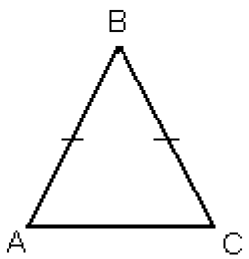
(по соотношению сторон)

Равносторонний треугольник



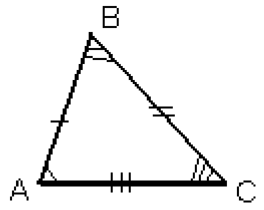
Равносторонний (правильный) треугольник - это треугольник, у которого все стороны и все углы равны (каждый угол равен 60°).

Равнобедренный треугольник



Равнобедренный треугольник - это треугольник, у которого два угла и две стороны равны.

Разносторонний треугольник

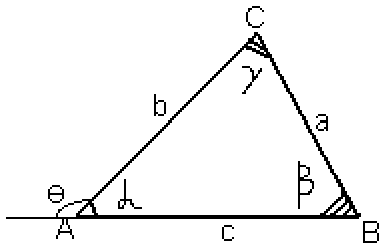


Разносторонний треугольник - это треугольник, в котором все углы, а значит и все стороны попарно различны.

(Разносторонний треугольник может быть остроугольным, прямоугольным и тупоугольным).

Рассмотрим рис. ниже.

Внеший угол в треугольнике



Углы α, β, γ называются внутренними углами треугольника.

Угол Θ - называется внешним углом треугольника, он равен сумме двух противолежащих ему внутренних углов, т.е. $\Theta = \beta + \gamma$

$(a+c+b)$ - периметр треугольника.

Угол α, называется смежным по отношению к углу Θ. $(\alpha + \Theta) = 180°$ (развернутый угол)

Основные свойства треугольников.

В любом треугольнике:

Против большей стороны лежит больший угол, и наоборот.

Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот. (В частности, все углы в равностороннем треугольнике равны.)

Сумма углов треугольника равна 180 ° (Из двух последних свойств следует, что каждый угол в равностороннем треугольнике равен 60 °).

Продолжая одну из сторон треугольника (AB), получаем внешний угол Θ.

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности

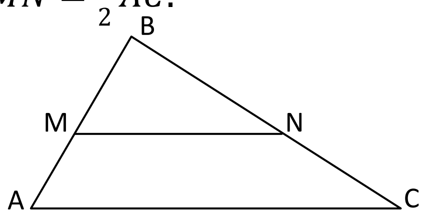
$a < b + c, a > b - c;$

$b < a + c, b > a - c;$

$c < a + b, c > a - b.$

Теорема о средней линии треугольника:

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны, т.е. если MN - средняя линия ΔABC, то $MN || AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.



Задача для устного решения: Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.

Вписанные и описанные треугольники.

Вписанный треугольник — треугольник, все вершины которого лежат на окружности. Тогда окружность называется описанной вокруг треугольника.

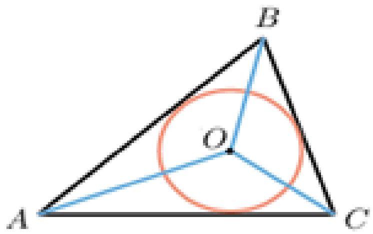
Очевидно, расстояние от центра описанной окружности до каждой из вершин треугольника одинаково и равно радиусу этой окружности.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.

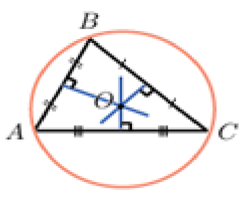
Окружность вписана в треугольник, если она касается всех его сторон. Тогда сам треугольник будет описанным вокруг окружности. Расстояние от центра вписанной окружности до каждой из сторон треугольника равно радиусу этой окружности.

В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну.

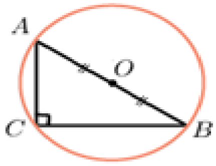
В любой треугольник можно вписать окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис треугольника.



Вокруг любого треугольника можно описать окружность. Ее центр - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Иногда говорят, что окружность описана около треугольника. Это означает то же самое - все вершины треугольника лежат на окружности.



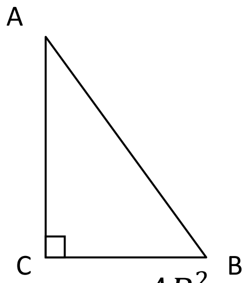
У прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.


A
O
C
B

Теорема Пифагора и ее следствия.

Теорема Пифагора.

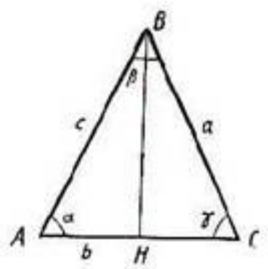
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Следствия из теоремы Пифагора:

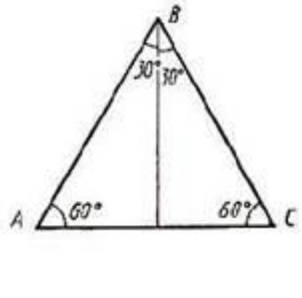
Теорема Пифагора для равнобедренного треугольника.



$$m_b = h_b = l_b = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}, S = \frac{bh_b}{2} = \frac{a^2 \sin\beta}{2}$$

Теорема Пифагора для равностороннего треугольника.



$$m = h = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r = a\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 2r$$

$$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Задачи по теме "Теорема Пифагора и следствия из неё":

1) Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны: $3, 4, 5$?

2) Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, и $AC = 3$, $BC = 4$. Найдите длину AB.

3) В треугольнике ABC угол BAC прямой, длины сторон AB и BC равны соответственно 1 и 3. Точка K делит сторону AC в отношении $7:1$, считая от точки A. Что больше: длина AC или длина BK?

Примеры задач по теме 1:

1) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Доказать, что конец D отрезка BD, выходящего из вершины B, параллельного основанию и равного боковой стороне треугольника, является центром вневписанной окружности треугольника.

2) Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если $BC = 12$.

3) Длины двух сторон треугольника равны a, а длина третьей стороны равна b. Вычислите радиус его описанной окружности.

4) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

5) В треугольнике ABC сторона AB равна BC. На стороне BC взята точка К так, что $\text{BK}:\text{KC} = 1:4$. В каком отношении отрезок АК, пересекаясь, делит высоту треугольника, опущенную из вершины В на АС?

6) В равнобедренной трапеции АВСD AD – основание, равное 2, а угол А равен $60°$. Биссектриса угла, диагональ ВD и высота СМ пересекаются в одной точке. Найти ВС.

7) В треугольнике ABC $\text{AB} = 5$, $\text{BC} = 10$, $\text{AC} = 3\sqrt{5}$. АН – высота, АМ – медиана, ВК – биссектриса. Найдите площадь треугольника, образованного АН, АМ, и ВК.

8) На сторонах АВ и АС треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$$

Отрезки BN и СМ пересекаются в точке К. Найти отношения отрезков $\frac{BK}{KN}$ и $\frac{CK}{KM}$

9) В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD, равная 6, перпендикулярна основаниям $AD = 3$ и $DC = 12$. Найдите сумму тупых углов B и D.

10) Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, площадь которого в 8 раз меньше площади оставшейся части. Периметр большего треугольника равен 27. Найдите периметр меньшего треугольника.

11) Трапеция разделена диагоналями на четыре части. Определить ее площадь, если известны площади ее частей, прилежащих к основаниям S_1 и S_2.

12) В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из середины D стороны AB проведён перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E. Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC.

13) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD – периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = BO$.

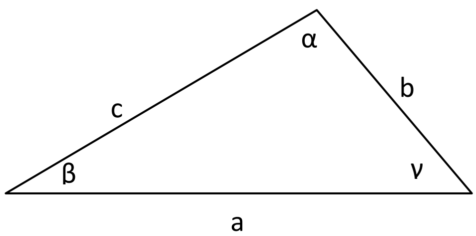
14) Укажите неравносторонний треугольник, который можно разделить на три равных треугольника.

15) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты такие точки M и N, что $BC = BM$ и $AC = AN$. Докажите, что $\angle MCN = 45°$

Тема 2. Тригонометрические функции угла.

Теорема косинусов.

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Зная две стороны треугольника и угол между ними мы всегда можем найти третью сторону.

Если нам будут известны все три стороны треугольника, то всегда можно найти любой угол:

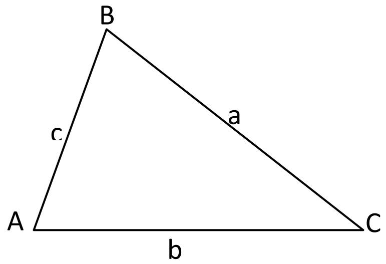
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Теорема синусов.

Теорема синусов — теорема, которая устанавливает зависимость: стороны треугольника - противолежащие им углы.

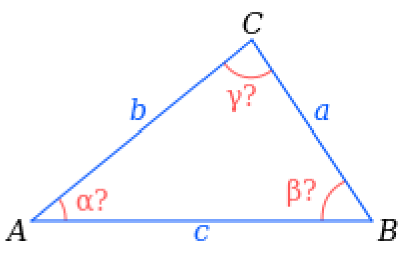


$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R, \text{где } R - \text{радиус описанной окружности}$$

Решение треугольников.

Решение треугольников - термин, означающий решение главной тригонометрической задачи: по известным данным о треугольнике (стороны, углы и т. д.) найти остальные его характеристики. Существуют также обобщения этой задачи на случай, когда заданы другие элементы треугольника (например, медианы, биссектрисы, высоты, площади и т. д.)

Три стороны (ССС).



Пусть заданы длины всех трёх сторон a, b, c. Условие разрешимости задачи — выполнение неравенства треугольника, то есть каждая длина должна быть меньше, чем сумма двух других длин:

$$a < b + c; b < a + c; c < a + b$$

Чтобы найти углы α, β, надо воспользоваться теоремой косинусов:

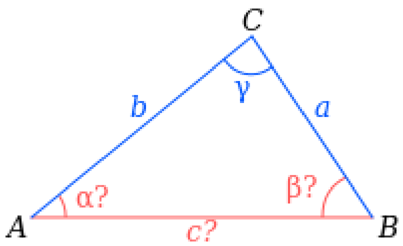
$$\alpha = arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\beta = arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Третий угол сразу находится из правила, что сумма всех трёх углов должна быть равна 180°:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

Две стороны и угол между ними (СУС).



Пусть для определённости известны длины сторон a, b и угол γ между ними. Этот вариант задачи всегда имеет единственное решение. Для определения длины стороны c вновь применяется теоремой косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

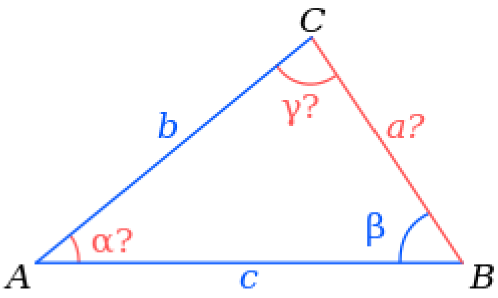
Фактически задача сведена к предыдущему случаю. Далее ещё раз применяется теорема косинусов для нахождения второго угла:

$$\alpha = arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = arccos\frac{b - a\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}$$

Третий угол находится из теоремы о сумме углов треугольника:

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

Две стороны и угол напротив одной из них (УСС).



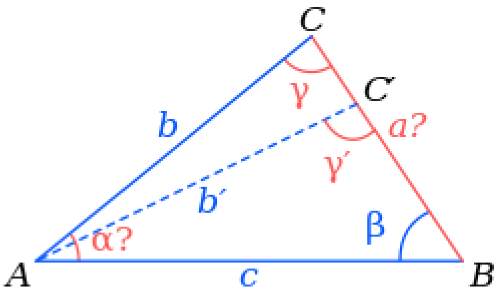
В этом случае могут существовать два решения, единственное решение или вообще не быть решений. Пусть, например, известны две стороны b, c и угол β. Уравнение для угла γ найдём из теоремы синусов:

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta$$

Для краткости обозначим $D = \frac{c}{b}\sin\beta$ (правая часть уравнения). При решении уравнения возможны 4 случая.

1) Задача не имеет решения (сторона b «не достаёт» до линии BC) в двух случаях: если $D > 1$ или если угол $\beta \geq 90°$ и при этом $b \leq c$.

2) Если $D = 1$, существует единственное решение, причём треугольник прямоугольный, $\gamma = 90°$.



Два возможных решения

3) Если $D < 1$, , то возможны 2 варианта.

3.1) Если $b < c$, то угол γ имеет два возможных значения: острый угол $\gamma = arcsinD$ и тупой угол $\gamma^{'} = 180° - \gamma$. На рисунке справа первому значению соответствуют точка C, сторона b и угол γ, а второму значению — точка C', сторона $b^{'} = b$ и угол γ'.

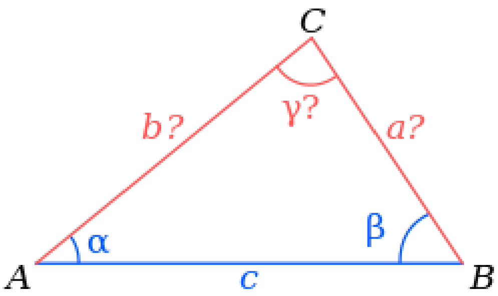
3.2) Если $b \geq c$, то $\beta \geq \gamma$ (как известно, большей стороне треугольника соответствует больший противолежащий угол). Поскольку в треугольнике не может быть двух тупых углов, тупой угол для γ исключён, и решение $\gamma = arcsinD$ единственно.

Третий угол определяется по формуле $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

Третью сторону можно найти по теореме синусов:

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Сторона и два прилежащих угла (УСУ).



Пусть задана сторона c и два угла. Эта задача имеет единственное решение, если сумма двух углов меньше 180°. В противном случае задача решения не имеет.

Вначале находим третий угол. Например, если даны углы α, β, то $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Далее обе неизвестные стороны находятся по теореме синусов:

$$a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}; b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Примеры задач по теме 2:

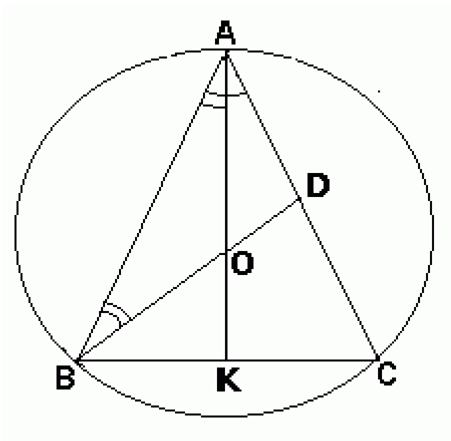
1. Дано:$a = 20, \alpha = 75°, \beta = 60°$

Найти: γ, b, c

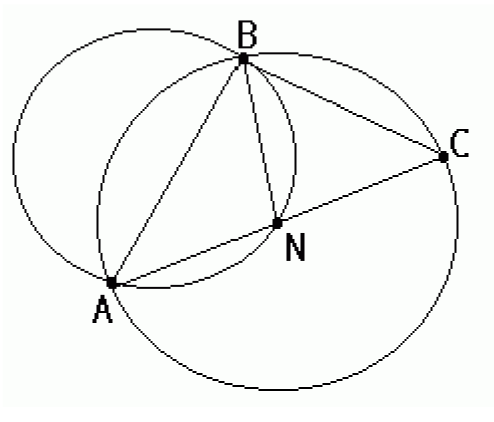
2. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны

AB, пересекает продолжение стороны BC в точке M, причём $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{5}$ Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N, причём $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Найдите углы треугольника ABC.

3. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и $AC = b$, угол при вершине $A = 2\alpha$. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка BD.



4. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $AN: AC = n$.



5. Сторона треугольника равна 21, а две другие стороны образуют угол в $60°$ и относятся как $3: 8$. Найдите эти стороны.

6. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на продолжении гипотенузы AB за точку B отложен отрезок BD, равный BC, и точка D соединена с C. Найдите стороны треугольника ADC, если катет $BC = a$.

7. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении $2:1$.

8. Площадь треугольника ABC равна S, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Найдите AB.

9. В треугольнике ABC известно, что $\angle CAB = 75°$, $\angle ABC = 45°$. На стороне CA берется точка K, причём $CK:AK = 3$. На стороне CB берется точка M. Найдите $KM:AB$, если известно, что это отношение меньше $\frac{3}{4}$ и что прямая MK отсекает от треугольника ABC треугольник, ему подобный.

10. В треугольнике ABC угол A равен α, $AB = AC = b$. Через вершину B и центр описанной окружности проведена прямая до пересечения с прямой AC в точке D. Найдите BD.

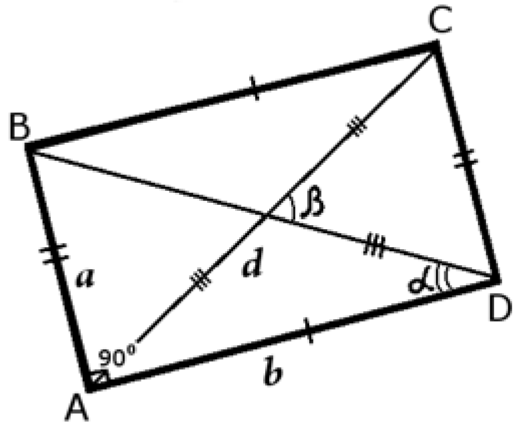
11. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D, а на стороне AC – точка M, причём CD – биссектриса треугольника ABC, $DM||BC$ и $AM = a$. Найдите CM.

Тема 3.

Четырехугольники и их элементы.

Прямоугольник и его свойства

Прямоугольник - параллелограмм с прямыми углами, равными 90°и двумя противоположными равными сторонами.



В евклидовой геометрии для того, чтобы четырехугольник оказался прямоугольником, нужно, чтобы хотя бы 3 угла были прямыми. Четвертый угол также будет равен 90°, исходя из теоремы о сумме углов многоугольников.

Свойства прямоугольника:

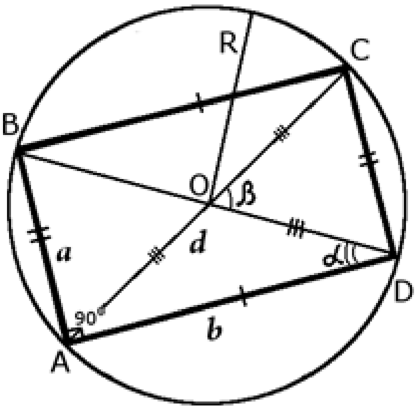
Кроме параллелограмма прямоугольником могут быть еще квадрат и ромб.

- Прямоугольник - это параллелограмм. Противолежащие стороны параллельны друг другу.

- Стороны прямоугольника – это его же высоты.

- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов 2-х смежных сторон (из теоремы Пифагора).

- Вокруг всякого прямоугольника легко описать окружность, при этом диагональ прямоугольника будет равной с диаметром окружности, которая описана (тогда радиус окружности будет равен полудиагонали прямоугольника).



- У противоположных сторон прямоугольника одинаковая длина, т.е. стороны равны:

$$AB = CD, BC = AD$$

- Противолежащие стороны прямоугольника параллельны друг другу:

$$AB || CD, BC || AD$$

- Прилегающие стороны прямоугольника перпендикулярны:

$$AB \perp BC, BC \perp CD, CD \perp AD, AD \perp AB$$

- Каждый их четырех углов прямоугольника прямой:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$$

- Сумма углов прямоугольника составляет 360°:

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360°$$

- Диагонали прямоугольника имеют одинаковые длины:

$$AC = BD$$

- Сумма квадратов диагонали прямоугольника равна сумме квадратов сторон:

$$2d^2 = 2a^2 + 2b^2$$

- Все диагонали прямоугольника делят прямоугольник на 2 одинаковые фигуры (на прямоугольные треугольники).

- Диагонали прямоугольника пересекаются, деля друг друга на 2 равные части:

$$AO = BO = CO = DO = \frac{d}{2}$$

- Точку пересечения диагоналей называют центром прямоугольника, кроме того она есть центр описанной окружности.

- Диагональ прямоугольника есть диаметр окружности описанной.

- Около прямоугольника легко описать окружность, т.к. сумма противолежащих углов равна 180°:

$$\angle ABC = \angle CDA = 180° \angle BCD = \angle DAB = 180°$$

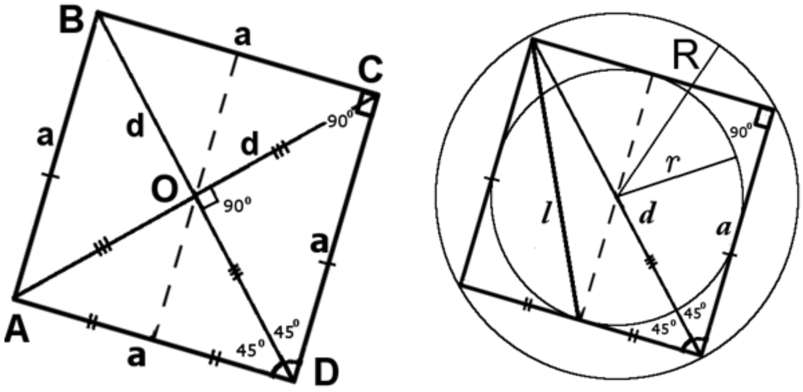
- В прямоугольник с неравной длиной и шириной, никак не вписать окружность, т.к. сумма противоположных сторон не равна между собой (вписать окружность получится лишь в частный случай прямоугольника - квадрат).

Квадрат и его свойства.

Квадрат — правильный четырёхугольник. У квадрата все углы и стороны одинаковы.

Квадраты различаются лишь длиной стороны, а все 4 угла прямые и равны 90°.

Квадратом может стать параллелограмм, ромб либо прямоугольник, когда у них одинаковые длины диагоналей, сторон и равные углы.



Свойства квадрата**.**

- у всех 4-х сторон квадрата одинаковая длина, т.е. стороны квадрата равны:

$$AB = BC = CD = AD$$

- противолежащие стороны квадрата параллельны:

$$AB || CD, BC || AD$$

- каждый угол квадрата прямой:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$$

- сумма углов квадрата равна 360°:

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360°$$

- каждая диагональ квадрата имеет такую же длину, как и другая:

$$AC = BD$$

- каждая из диагоналей квадрата делит квадрат на 2 одинаковые симметричные фигуры.

- угол пересечения диагоналей квадрата равен 90°, пересекая друг друга, диагонали делятся на две равные части:

$$AC \perp BD; AO = BO = CO = DO = \frac{d}{2}$$

- точку пересечения диагоналей называют **центр квадрата** и она оказывается центром вписанной и описанной окружностей.

- все диагонали делят угол квадрата на две равные части, таким образом, они оказываются биссектрисами углов квадрата:

$$\Delta ABC = \Delta ADC = \Delta BAD = \Delta BCD$$

$$\angle ACB = \angle ACD = \angle BDC = \angle BDA = \angle CAB = \angle CAD = \angle DBC = \angle DBA = 45°$$

- диагонали делят квадрат на 4 одинаковых треугольника, кроме того, полученные треугольники в одно время и равнобедренные и прямоугольные:

$$\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta DOA$$

Диагональю квадрата является всякий отрезок, который соединяет 2-е вершины противолежащих углов квадрата.

Диагональ всякого квадрата больше стороны этого квадрата в $\sqrt{2}$ раз.

Формулы для определения длины диагонали квадрата:

1. Формула диагонали квадрата через сторону квадрата:

$$d = a\sqrt{2}$$

2. Формула диагонали квадрата через площадь квадрата:

$$d = \sqrt{2S}$$

3. Формула диагонали квадрата через периметр квадрата:

$$d = \frac{P}{2\sqrt{2}}$$

4. Сумма углов квадрата = 360°:

$$d = 2R$$

5. Диагонали квадрата одной длины:

$$d = D_0$$

6. Все диагонали квадрата делят квадрат на 2-е одинаковые фигуры, которые симметричны:

$$d = 2r\sqrt{2}$$

7. Угол пересечения диагоналей квадрата равен 90°, пересекая друг друга, диагонали делятся на две равные части:

$$d = D_{\text{в}}\sqrt{2}$$

8. Формула диагонали квадрата через длину отрезка l:

$$d = l\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

9. Формула диагонали квадрата через радиус вписанной окружности:

$$d = \sqrt{2} \cdot D = 2\sqrt{2} \cdot R$$

R - радиус вписанной окружности;

D - диаметр вписанной окружности;

d - диагональ квадрата.

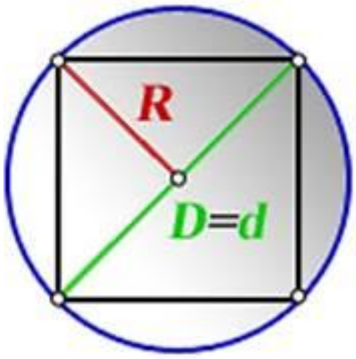
10. Формула диагонали квадрата через радиус описанной окружности:

$$d = D = 2R$$

R – радиус описанной окружности;

D – диаметр описанной окружности;

d – диагональ.

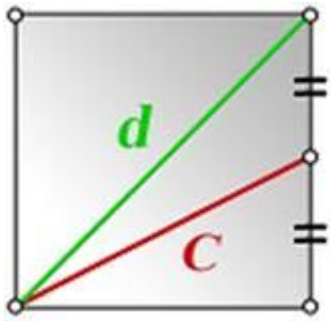


11. Формула диагонали квадрата через линию, которая выходит из угла на середину стороны квадрата:

$$d = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot C$$

C – линия, которая выходит из угла на середину стороны квадрата;

d – диагональ.



Вписанный круг в квадрат – это круг, примыкающий к серединам сторон квадрата и имеющий центр на пересечении диагоналей квадрата.

Радиус вписанной окружности - сторона квадрата (половина).

Площадь круга вписанного в квадрат меньше площади квадрата в $\frac{\pi}{4}$ раза.

Круг, описанный вокруг квадрата - это круг, который проходит через 4-ре вершины квадрата и который имеет центр на пересечении диагоналей квадрата.

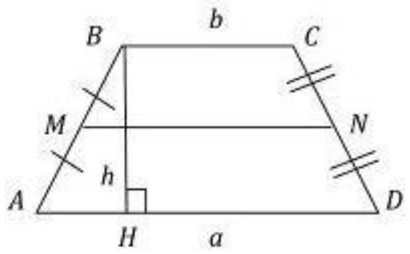
Радиус окружности описанной вокруг квадрата больше радиуса вписанной окружности в $\sqrt{2}$ раз.

Радиус окружности описанной вокруг квадрата равен 1/2 диагонали.

Площадь круга описанного вокруг квадрата большая площадь того же квадрата в $\frac{\pi}{2}$ раз.

Трапеция и ее свойства

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две стороны параллельны, а две другие не параллельны.



$AD = a, BC = b$ - основания; AB, CD - боковые стороны; $BH = h$ - высота; $AD||BC$; MN-средняя линия трапеции, где M-середина AB, N-середина CD.

Свойства трапеции:

-сумма углов, прилежащих к одной боковой стороне, равна 180°;

-биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, перпендикулярны;

-средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$MN||BC; MN||AD; MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Прямоугольная трапеция - трапеция, в которой один из углов прямой.

Равнобедренная трапеция - трапеция, у которой боковые стороны равны.

Свойства равнобедренной трапеции:
-диагонали равны;

-углы при основании равны;

-середины сторон являются вершинами ромба.

Примеры задач по теме 3:

1) Диагонали ромба равны 24 и 70. Найдите сторону ромба.
2) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$.
3) Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие – на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна a.
4) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников AOB и COD равны. Докажите, что $ABCD$ - трапеция.
5) На плоскости дан квадрат и точка P. Могут ли расстояния от точки P до вершин квадрата оказаться равными $1, 1, 2$ и 3?
6) Существует ли трапеция, в которой каждая диагональ разбивает ее на два равнобедренных треугольника?
7) Через вершины A и B треугольника ABC проведены две прямые, которые разбивают его на четыре фигуры (три треугольника и один четырёхугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковую площадь. Докажите, что одна из этих фигур – четырёхугольник.

8) Из четырёх палочек сложен контур параллелограмма. Обязательно ли из них можно сложить контур треугольника (одна из сторон треугольника складывается из двух палочек)?

9) Даны выпуклый многоугольник и квадрат. Известно, что как ни расположи две копии многоугольника внутри квадрата, найдётся точка, принадлежащая обеим копиям. Докажите, что как ни расположи три копии многоугольника внутри квадрата, найдётся точка, принадлежащая всем трём копиям.

10) В треугольнике ABC угол C равен $135°$. На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O. Найдите OC, если $AB = 6$.

Тема 4.

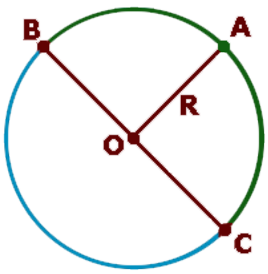
Окружность и ее элементы.

Окружность — это линия на плоскости, каждая точка которой расположена на одинаковом расстоянии от центра окружности. Это расстояние называется радиус и в записях обозначается буквой R .

Центр окружности обозначают буквой O.

Окружность разделяет плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю. Внутренняя часть, включающая саму окружность, называется кругом.

Точка O — это центр и круга и окружности.



Отрезки OA, OB, и OC — это радиусы, их длины равны. Отрезок BC, проходящий через центр окружности (круга) называется диаметром и обозначается буквой D.

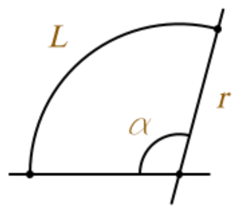
Диаметр разделяет круг на два полукруга, а окружность на две полуокружности.

Диаметр равен двум радиусам.

$BC = OC + OB$, так как $BC = D$, а $OC = OB = R$, то $D = 2R$.

Точки A и B делят окружность на две части, которые называются дугами, а точки A и B концами этих дуг.
Дуга окружности — это часть окружности ограниченная двумя точками.

На рисунке точки B и C разделили окружность на две дуги, голубую и зеленую.
Записать их названия мы можем так:
$\smile BC$ (дуга BC) — в данном случае речь может идти как о голубой так и о зеленой;
$\smile BAC$ (дуга BAC) — в данном случае речь идет именно о зеленой дуге.
Расчет длины дуги производится по следующей формуле:



$$L = \frac{\pi r \alpha}{180°}$$

r – радиус окружности

α – угол

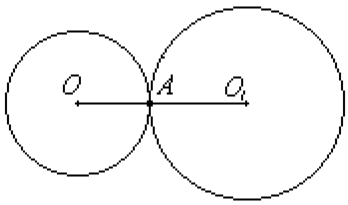
L – длина дуги

$\pi = 3.14$

Основные свойства окружности:
Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).

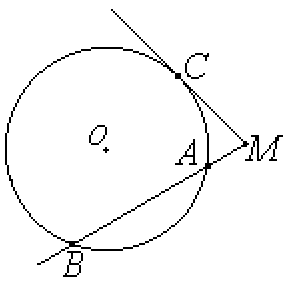
Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.



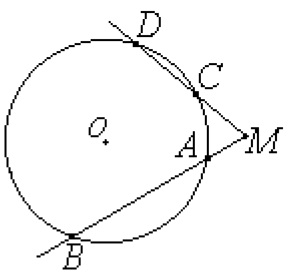
Теорема о касательной и секущей

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $MC^2 = MA \cdot MB$.



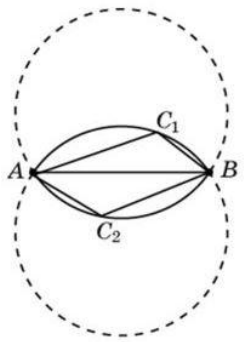
Теорема о секущих

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



Замечательное свойство окружности: Геометрическое место точек, из которых отрезок АВ виден под прямым углом, есть окружность с диаметром

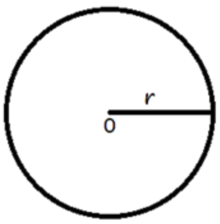
AB без точек A и B.



Площадь круга равна произведению полуокружности на радиус.

Формулы для расчета площади круга.

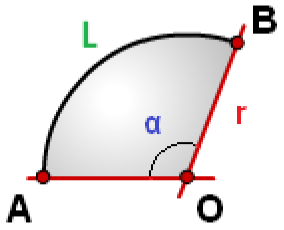
$S = \pi r^2$, $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, где S - площадь круга, r - радиус круга, d - диаметр круга, $\pi = 3.141592$.



Формула длины окружности (периметра круга):

$$P = \pi d = 2\pi r$$

Площадь сектора круга



r - радиус круга

L - длина дуги AB

α - угол сектора круга AOB в градусах

$$\pi \approx 3.14$$

Формула площади сектора круга (S), через длину дуги (L):

$$S = \frac{1}{2}Lr$$

Формула площади сектора круга (S), через угол (α):

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$$

Примерные задачи к теме 4:

1) Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l. На этой прямой взяты еще две точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках P и Q, вторая — в точках M и N. Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что $AR = AS$.

2) Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник. Докажите, что $AC > BD$ тогда и только тогда, когда $(AD - BC)(AB - CD) > 0$.

3) Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2n$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные – в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

4) В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K – середина дуги BC, не содержащей точку A, N – середина отрезка AC, M – точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90°$.

5) Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $cos\angle A + cos\angle B = 1$.

6) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны его вершинам B и C относительно прямых AC и AB соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABB$'$ и ACC', вторично пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP проходит через центр O окружности, описанной около треугольника ABC.

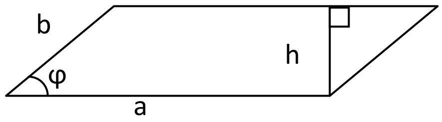
7) В круговой сегмент AMB вписана трапеция $ACDB$, у которой $AC = CD$ и $\angle CAB = 51°20'$. Найдите угловую величину дуги AMB.

8) В круговом секторе OAB, центральный угол которого равен $45°$, расположен прямоугольник $KMPT$. Сторона KM прямоугольника лежит на радиусе OA, вершина P — на дуге AB, вершина T — на радиусе OB. Сторона KT на 3 больше стороны KM. Площадь прямоугольника $KMPT$ равна 18. Найдите радиус.

Тема 5.

Площади геометрических фигур.

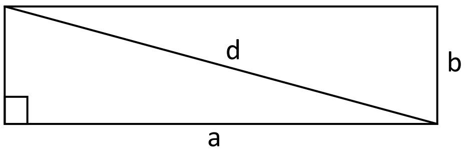
Формулы площади параллелограмма



$$S = a \cdot h$$

$$S = a \cdot b \cdot \sin\varphi\,, h\text{-высота}$$

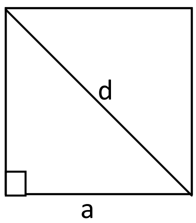
Формула площади прямоугольника



$$S = a \cdot b$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Формула площади квадрата

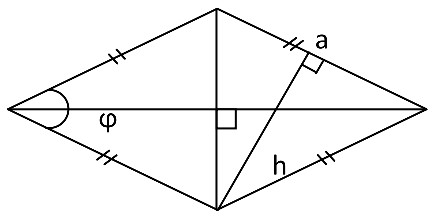


$$S = a^2$$

$$P = 4a, P - \text{сумма сторон фигуры}$$

$$d = a\sqrt{2}, d - \text{длина диагонали}$$

Формулы площади ромба

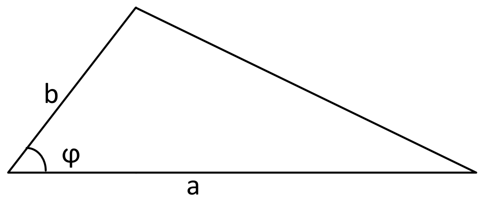


$$S = a \cdot h$$

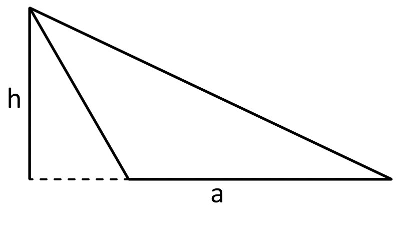
$$S = a^2 \cdot \sin\varphi\text{, где } h - \text{высота}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2\text{, где } d_1 \text{ и } d_2 - \text{ диагонали}$$

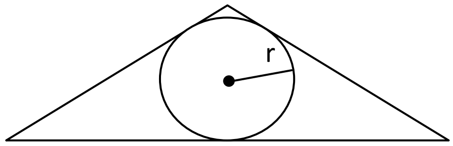
Формулы площади треугольников



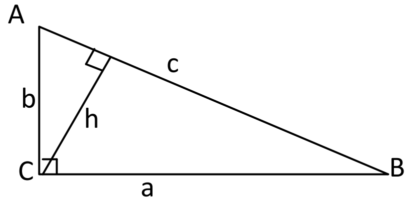
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi$$



$$S = p \cdot r, \text{где } p - \text{полупериметр}, r - \text{радиус вписаной окружности}$$

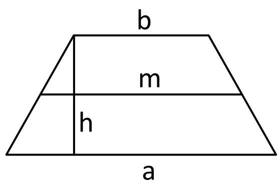


$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

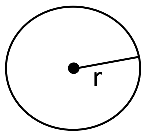
Формулы площади трапеции



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h, \text{где } a, b - \text{основания}, h - \text{высота}$$

$$m = \frac{a + b}{2} - \text{ средняя линия}$$

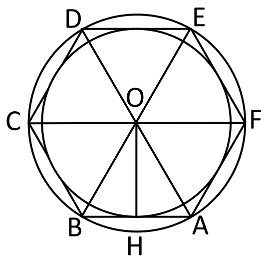
Формула площади круга



$$S = \pi R^2$$

$$L = 2\pi R = \pi D, \text{где } D - \text{диаметр}, L - \text{длина окружности}$$

Формула площади правильных многоугольников



$$S = \frac{1}{2}Pr, \text{где } R - \text{радиус описаной окружности } (OA),$$

$$r - \text{радиус вписаной окружности } (OH),$$

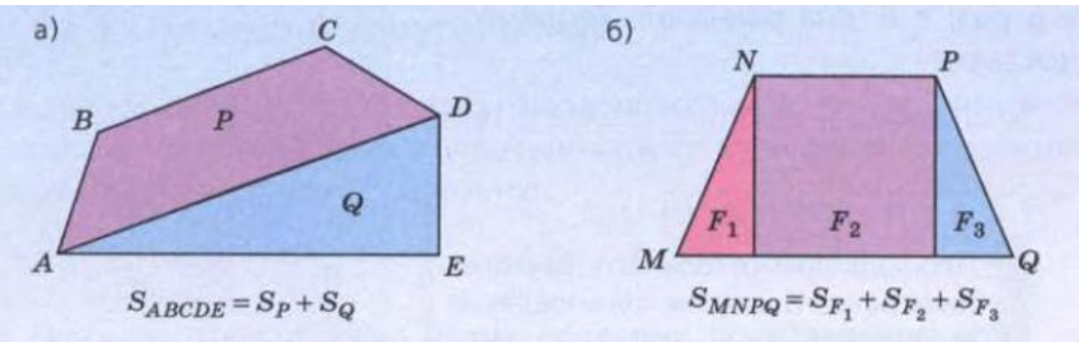
$$a_n - \text{сторона правильного } n - \text{угольника } (AB),$$

$$S - \text{площадь правильного многоугольника,}$$

$$P - \text{периметр}$$

Нахождение площади многоугольника методом сложения площадей:

Данная фигура разбивается с помощью вертикальных и горизонтальных отрезков так, чтобы многоугольник полностью (без отверстий и наложений) заполняли получившиеся при разбиении прямоугольники и прямоугольные треугольники. Сумма всех площадей фигур, полученных в результате такого разбиения равна площади данного многоугольника.



Примерные задачи по теме 5:

1) Центр O окружности, описанной около четырёхугольника ABCD, лежит внутри него. Найдите площадь четырёхугольника, если $\angle \mathrm{BAO} = \angle DAC$, $AC = m$, $BD = n$.

2) Египтяне вычисляли площадь выпуклого четырёхугольника по формуле $(a+c)(b+d)/4$, где a, b, c, d — длины сторон в порядке обхода. Найдите все четырёхугольники, для которых эта формула верна.

3) В остроугольном треугольнике ABC $(AB > BC)$ проведены высоты AM и CN. Точка O – центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

4) На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S. Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S.

5) Точка M расположена на стороне AB параллелограмма $ABCD$, причём $BM{:}MA = 1{:}2$. Отрезки DM и AC пересекаются в точке P. Известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Найдите площадь четырёхугольника $BCPM$.

6) Правильный треугольник со стороной 1 разрезан произвольным образом на равносторонние треугольники, в каждый из которых вписан круг. Найдите сумму площадей этих кругов.

7) На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причём $BA_1{:}A_1C = CB_1{:}B_1A = AC_1{:}C_1B = 2{:}3$. Найдите площадь треугольника, образованного пересечениями прямых AA_1, BB_1 и CC_1, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1.

8) Внутри прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка P, из которой опущены перпендикуляры PK и PM на катеты AC и BC соответственно. Прямые AP и BP пересекают катеты в точках A' и B' соответственно. Известно, что $SAPB'$: $SKPB' = m$. Найдите $SMPA'$: $SBPA'$.

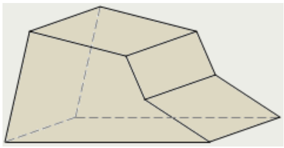
9) В треугольнике ABC известны стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и площадь S. Биссектрисы BL и AK пересекаются в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $CKOL$.

10) Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.

Тема 6.

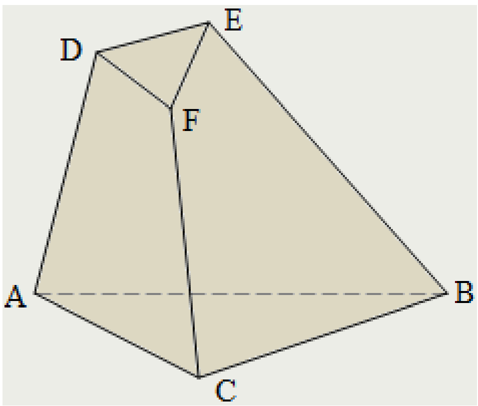
Многогранники.

Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.



Выпуклым называется многогранник, если он расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника:



$ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD$ – грани;

$AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF$ – рёбра;

A, B, C, D, E, F – вершины многогранника $ABCDEF$.

Теорема Эйлера для многогранников:

Если V — число вершин выпуклого многогранника, R — число его ребер и G — число граней, то верно равенство:

$$V - R + G = 2$$

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники, о которых шла речь, называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие их соответствующие вершины – боковыми рёбрами призмы.

Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.

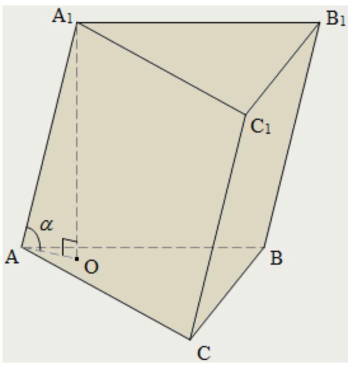
Боковые рёбра призмы равны и параллельны.

Поверхность призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности.

Боковая поверхность любой призмы состоит из параллелограммов, у каждого из которых две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми рёбрами.

Высотой призмы называется любой из перпендикуляров, проведённых из точки одного основания к плоскости другого основания призмы.

Призма называется n-угольной, если её основание – n-угольник.



$\mathrm{ABC}A_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ – треугольная призма;

$\Delta\mathrm{ABC}$ и $\Delta A_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$– основания;

$\mathrm{A}A_1, \mathrm{B}B_1, \mathrm{CC}_1$ – боковые рёбра;

$\mathrm{A}A_1\mathrm{B}_1\mathrm{B}, \mathrm{A}A_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}, \mathrm{BB}_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$ – боковые грани;

A_1O – высота призмы;

α – угол наклона бокового ребра к основанию призмы.

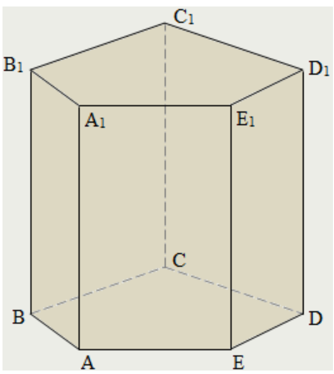
Призма называется прямой, если её рёбра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется наклонной.

Боковые грани прямой призмы – прямоугольники.

Боковое ребро прямой призмы является её высотой.

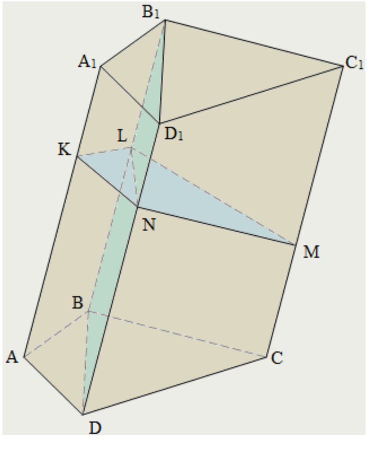
Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S\text{б} = P\text{осн} \cdot \mathrm{AA}_1$$



Прямая призма называется правильной, если её основания являются правильными многоугольниками.

Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым рёбрам, являются параллелограммами.



В частности, параллелограммами являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими, через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани:

BB_1D_1D – диагональное сечение.

Если в произвольной наклонной призме провести сечение, перпендикулярное боковым рёбрам и пересекающее все боковые рёбра, и площадь этого сечения обозначить $S\perp$, а периметр – $\mathrm{P}\perp$, тогда:

для боковой поверхности призмы верно: $S\text{б} = \mathrm{P}\perp\cdot \mathrm{AA1}$;

для объёма призмы верно: $V = S\perp\cdot \mathrm{AA}_1$.

В прямой призме:

$S\perp = S\text{осн}$, $\mathrm{P}\perp = P\text{осн}$.

В любой призме площадь полной поверхности считается как сумма площади боковой поверхности и удвоенной площади основания:

$$S\text{п} = S\text{б} + 2\cdot S\text{осн}.$$

Параллелепипед.

Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется параллелепипедом.

У параллелепипеда все грани – параллелограммы.

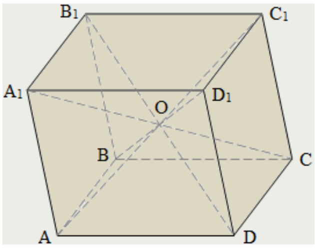
Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими.

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Диагональю параллелепипеда, как и многогранника вообще, называется отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не лежащие в одной его грани.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

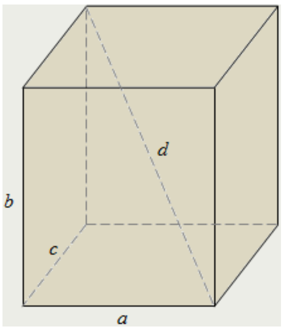


Прямоугольным параллелепипедом называется такой прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник.

Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями или линейными размерами.

У прямоугольного параллелепипеда три измерения.



В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

В прямоугольном параллелепипеде верно:

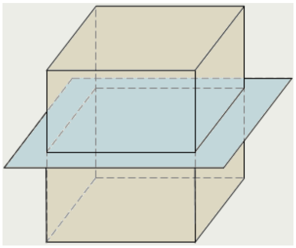
для площади полной поверхности:

$S\text{п} = 2 \cdot (ab + bc + ac);$

для объёма:

$V = abc.$

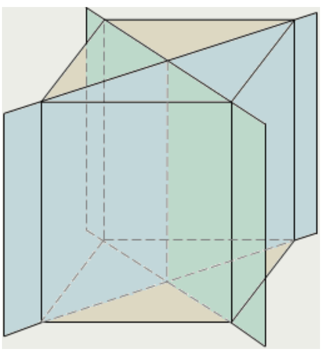
В прямоугольном параллелепипеде, как и во всяком параллелепипеде, есть центр симметрии – точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно парам противолежащих граней.



На первом рисунке, приведённом выше, показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда.

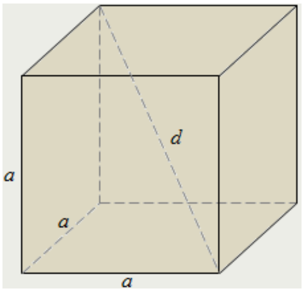
Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме трёх названных.

Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то есть он является правильной четырёхугольной призмой, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на рисунке ниже.



Куб.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.



Диагональ куба в квадратный корень из трёх раз больше его стороны:

$$d = a\sqrt{3}$$

В кубе верно:

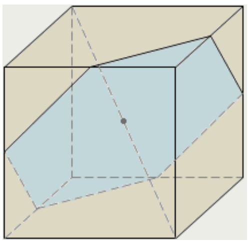
для площади полной поверхности:

$S\text{п} = 6 \cdot a^2, S\text{п} = 2 \cdot d^2,$

для объёма:

$V = a^3, V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками – эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его диагоналям.

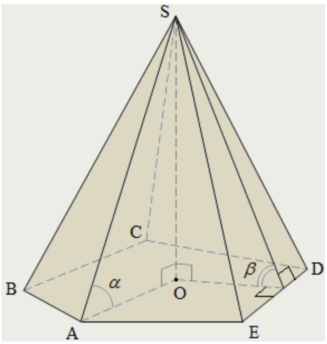


У куба девять плоскостей симметрии:

три из них, проходя через середины четырёх параллельных ребер куба, дают в сечениях квадраты;

остальные шесть – это все плоскости диагональных сечений куба.

Пирамида.



Пирамидой (например, $SABCDE$) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (пятиугольник $ABCDE$) – основания пирамиды, точки (S), не лежащей в плоскости основания,– вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки (SA, SB, SC, SD, SE), соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания (пятиугольник $ABCDE$) и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды:

$\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDE, \Delta SEA$ – боковые грани.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

α – угол наклона бокового ребра SA пирамиды к плоскости её основания;

β – угол наклона боковой грани (SED) пирамиды к плоскости её основания.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

все боковые ребра равны;

боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;

боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом;

высоты боковых граней равны;

боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

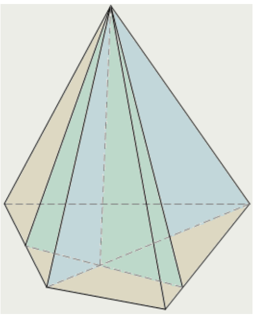
Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S\text{осн} \cdot h$$

Площадь полной поверхности любой пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания:

$$S\text{п} = S\text{б} + S\text{осн}$$

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники.

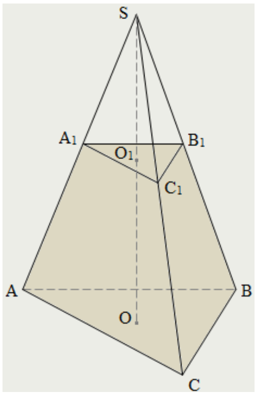


В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.

Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части:

пирамиду, подобную данной ($SA_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$) и

многогранник, называемый усеченной пирамидой ($A\mathrm{BC}A_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$).



Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях ($\Delta\mathrm{ABC}$ и $\Delta A_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$), называются основаниями, остальные грани ($\mathrm{A}A_1\mathrm{B}_1\mathrm{B}$, $\mathrm{A}A_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$, $\mathrm{BB}_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$) называются боковыми гранями.

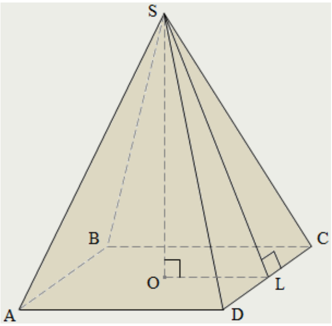
Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.

Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.

Если S_1 и S_2 – площади оснований усечённой пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

Пирамида (например, $SABCD$) называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник ($ABCD$ – квадрат), а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (О – центр описанной и вписанной окружностей основания).



Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.

Боковые ребра правильной пирамиды равны.

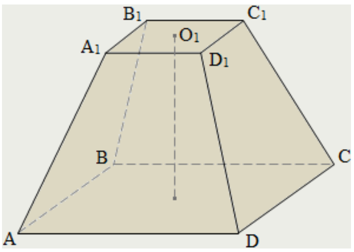
Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:

$$S\text{б} = \frac{1}{2} P\text{осн} \cdot SL$$

Усеченная пирамида (например, $\mathrm{ABC}DA_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.



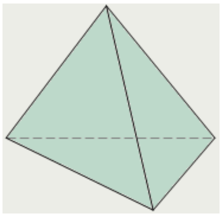
Боковые грани правильной усеченной пирамиды ($\mathrm{A}A_1\mathrm{B}_1\mathrm{B}$, $\mathrm{A}A_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$, $DD_1\mathrm{C}_1\mathrm{C}$, $\mathrm{A}A_1D_1D$) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.

Правильные многогранники

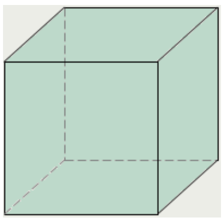
Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

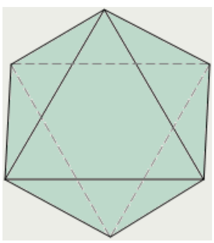
У правильного тетраэдра грани – правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



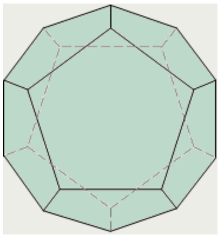
У куба (правильный гексаэдр) все грани – квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.



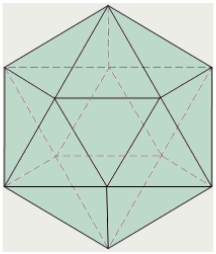
У октаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.



У додекаэдра грани – правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.



У икосаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.



Примерные задачи к теме 6:

1) На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

2) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA . Найдите площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

3) Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 1, а боковая грань равновелика диагональному сечению, проведённому через большую диагональ основания.

4) Найдите боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если её высота равна 4, а апофема равна 8.

5) Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

6) В треугольной пирамиде периметры всех её граней равны. Найти площадь полной поверхности этой пирамиды, если площадь одной её грани равна S.

7) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB , точку B_1 и точку K, лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK:KC = 1:3$. Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна a, а высота призмы равна $2a$.

8) Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 1$, $AD = 5$, $\angle BAD = arctg\frac{3}{2}$. Плоскость, перпендикулярная прямой A_1D, пересекает рёбра AD и A_1D_1 в точках E и F соответственно, причём $AE = FD_1 = \frac{5}{3}$. Найдите периметр сечения призмы этой плоскостью.

9) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота равна $4\sqrt{3}$. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней тетраэдра проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найдите длину ребра тетраэдра.

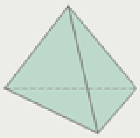
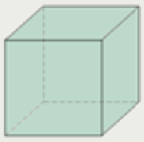
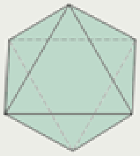
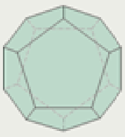
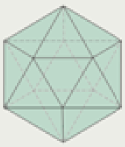
10) Найдите расстояние между серединами двух скрещивающихся рёбер куба, полная поверхность которого равна 36.

11) Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, сторона которого равна 60. Плоскость диагонального сечения, проходящая через большую диагональ основания, перпендикулярна плоскости основания. Площадь этого сечения равна 7200. Найдите меньшую диагональ основания, если боковое ребро равно 80 и образует с плоскостью основания угол $60°$.

12) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD основания $ABCD$ пересекаются в точке M, $\measuredangle AMB = \alpha$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $B_1M = b$, $\measuredangle BMB1 = \beta$.

Тема 7.

Площади поверхностей и объемы правильных многогранников.

Некоторые характеристики правильных многогранников									
Многогранники	1 – число сторон у каждой грани 2 – число вершин 3 – число рёбер 4 – число граней 5 – число рёбер при вершине				*a* – длина ребра многогранника S – площадь полной поверхности V – объём многогранника R – радиус описанной сферы r – радиус вписанной сферы				
	1	2	3	4	5	S	V	R	r
	3	4	6	4	3	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$
	4	8	12	6	3	$6a^2$	a^3	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$
	3	6	12	8	4	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$
	5	20	30	12	3	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}}$
	3	12	30	20	5	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{4\sqrt{3}}(3+\sqrt{5})$

Примеры задач по теме 7:

1) В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5, а высота равна 12. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 и диагональю 8. Найдите боковую поверхность и объём параллелепипеда.

2) Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, площади боковых граней равны 9, 10 и 17. Найдите объём призмы.

3) Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найдите объём пирамиды $ABCC_1$.

4) Найдите высоту треугольной пирамиды, боковые рёбра которой попарно перпендикулярны и равны 2, 3 и 4.

5) На боковом ребре пирамиды взяты две точки, делящие ребро на три равные части. Через них проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите объём части пирамиды, заключённой между этими плоскостями, если объём всей пирамиды равен 1.

6) Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит её объём на две равные части. В каком отношении эта плоскость делит боковые рёбра пирамиды?

7) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Отрезок MN параллелен одной из сторон шестиугольника, равен его стороне и расположен на расстоянии h от его плоскости. Найдите объём многогранника $ABCDEFMN$.

8) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{5\pi}{13}$. Найдите объём пирамиды.

9) Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность правильной $2n$-угольной призмы, но не пересекающая её оснований, делит ось призмы, её боковую поверхность и объём в одном и том же отношении.

10) Основание прямой призмы $PQRP_1Q_1R_1$ – треугольник PQR, в котором $PQR = 90°$, $PQ: QR = 1: 3$. Точка K – середина катета PQ и LM призмы. Ребро AB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ (A – вершина) лежит на прямой PR, вершины C и D – на прямых P_1K и QQ_1 соответственно. Найдите отношение объёмов призмы и пирамиды, если $AB: CD = 2: 3$.

11) Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S – её вершина). Ребро SC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_2CA_2B_2S$ (A_1A_2, B_1B_2 и CS – боковые рёбра, а A_1B_1C – одно из оснований). Вершины призмы A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды. Какую долю от объёма всей пирамиды составляет объём части пирамиды, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра призмы к длине стороны её основания равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

12) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD||BC$, $AD: BC = n > 1$. Параллельно диагонали B_1D проведены плоскость через ребро AA_1 и плоскость через ребро BC; параллельно диагонали A_1C проведены плоскость через ребро DD_1 и плоскость через ребро B_1C_1. Найдите отношение объёма треугольной пирамиды, ограниченной этими четырьмя плоскостями, к объёму призмы.

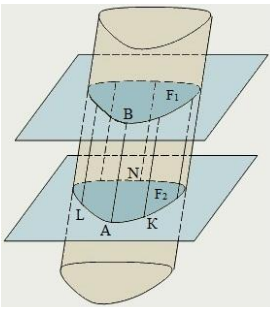
Тема 8.

Тела вращения.

Тела вращения — объёмные тела, возникающие при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости.

Цилиндр.

Цилиндрическая поверхность – поверхность, образуемая движением прямой (в каждом своём положении называемой образующей) вдоль кривой (называемой направляющей) так, что прямая постоянно остаётся параллельной своему начальному положению.



Прямая АВ – образующая;

кривая $AKNLA$ – направляющая.

Бесконечный цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью.

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её.

Часть поверхности цилиндра, ограниченная цилиндрической поверхностью, называется боковой поверхностью цилиндра.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

Другая часть, ограниченная параллельными плоскостями – это основания цилиндра.

Отрезок AB – образующая;

фигуры F_1 и F_2 – основания.

У цилиндра:

основания равны;

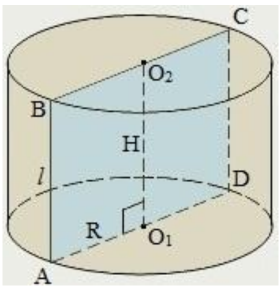
образующие параллельны и равны.

Боковая поверхность всякого цилиндра равна произведению образующей на периметр перпендикулярного сечения.

Объём всякого цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = SH$$

Цилиндр, у которого основания перпендикулярны образующим и являются кругами, называется прямым круговым цилиндром (часто, и далее, – просто цилиндром).



Прямой круговой цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры его оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. Осевым сечением цилиндра (прямого кругового цилиндра) является прямоугольник.

AO_1 – радиус цилиндра;

AB, CD – образующие цилиндра;

O_1O_2 – ось цилиндра;

AB, CD, O_1O_2 – высоты цилиндра;

$ABCD$ – осевое сечение цилиндра.

Боковая поверхность прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту:

$$S\text{бок} = 2\pi RH$$

Полная поверхность цилиндра вычисляется по формуле:

$$S\text{п} = S\text{бок} + 2S\text{осн} = 2\pi R(H + R)$$

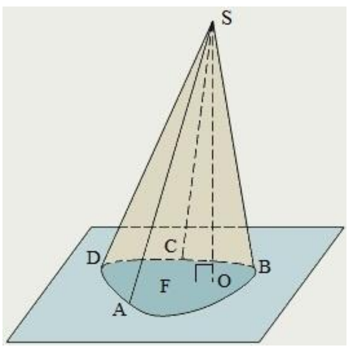
Для объёма прямого кругового цилиндра верно:

$$V = \pi R^2 H$$

Конус

Конической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой, проходящей всё время через неподвижную точку вдоль данной линии.

Эта линия называется направляющей, двигающаяся прямая, в каждом своём положении, – образующей, а неподвижная точка – вершиной.



Конусом называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью, пересекающей все образующие этой полости и не проходящей через вершину.

Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется основанием конуса.

Высота конуса – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания.

Часть конической поверхности, расположенная между вершиной и плоскостью основания, называется боковой поверхностью конуса.

Кривая $ABCDA$ – направляющая;

прямая SA – образующая;

точка S – вершина;

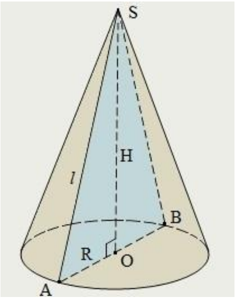
отрезок SO – высота;

фигура F – основание конуса.

Конус называется прямым круговым, если его направляющая – окружность, а вершина ортогонально проектируется в его центр.

В элементарной геометрии прямой круговой конус часто называют просто конусом.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет опишет основание конуса, а гипотенуза – боковую поверхность.



Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса.

Боковая поверхность прямого кругового конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую:

$$S\text{бок} = \pi R l$$

Полная поверхность прямого кругового конуса вычисляется по формуле:

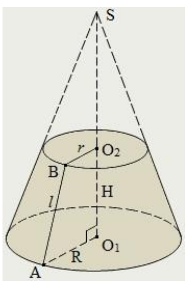
$$S\text{п} = S\text{бок} + S\text{осн} = \pi R(l + R)$$

Для объёма прямого кругового конуса верно:

$$V = \frac{(\pi R^2 H)}{3}$$

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус, гомотетичный данному, причём центром гомотетии служит вершина конуса.

Часть конуса, ограниченная его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усечённым конусом.



Отрезок AB – образующая усечённого конуса;

отрезок O_1O_2 – высота усечённого конуса;

отрезки AO_1 и BO_2– радиусы оснований.

Для усечённого конуса верно:

$$l^2 = (R - r)^2 + H^2$$

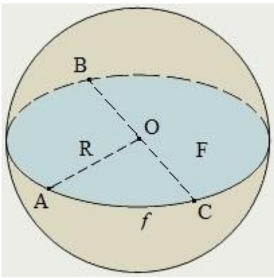
$$S бок = \pi(R + r)l$$

$$S п = \pi(R^2 + r^2 + Rl + rl)$$

$$V = \frac{\pi H(R^2 + Rr + r^2)}{3}$$

Шар, части шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки.



Эта точка называется центром шара (на рисунке – это точка O), а данное расстояние (на рисунке – R) – радиусом шара.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси.

Граница шара называется шаровой поверхностью или сферой. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок (OA), соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром (BC). Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара (точки B и C).

Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называется большим кругом (фигура F), а сечение сферы –большой окружностью (линия f на рисунке).

Любая плоскость, проходящая через центр шара, является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

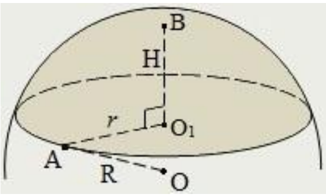
Площадь сферы и объём шара можно найти по формулам:

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$$

$$V = \frac{(4\pi R^3)}{3} = \frac{(\pi D^3)}{6}$$

где R – радиус, D – диаметр сферы и шара.

Шаровой сегмент – это часть шара, которая отсекается секущей плоскостью.



Справедливы следующие формулы:

$$r^2 = H(2R - H)$$

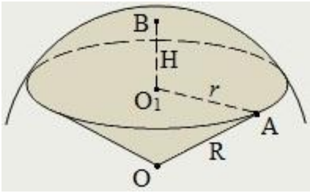
$$S\text{бок} = 2\pi RH = \pi(r^2 + H^2)$$

$$S\text{п} = \pi(2RH + r^2) = \pi(2r^2 + H^2)$$

$$V = \pi H^2(R - \frac{H}{3}) = \frac{\pi H(H^2 + 3r^2)}{6}$$

где R – радиус шара, r – радиус основания и H – высота шарового сегмента.

Шаровой сектор – это геометрическое тело, получающееся при вращении кругового сектора около одного из его радиусов.



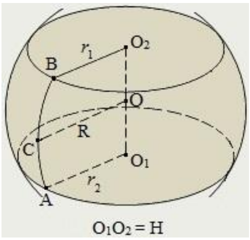
Для площади поверхности и объёма шарового сектора верны формулы:

$$S = \pi R(2\mathrm{H} + r)$$

$$V = \frac{(2\pi R2H)}{3}$$

где R – радиус шара, r – радиус и Н – высота шарового сегмента, содержащегося в секторе.

Шаровой слой – часть шара, которая содержится между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.



Основания шарового слоя это сечения шара, образовавшиеся в результате пересечения шара двумя параллельными плоскостями.

Высота шарового слоя это расстояние между основаниями слоя.

O_1O_2 – высота шарового слоя;

АO_1 и ВO_2 – радиусы оснований шарового слоя;

OC – радиус шара.

Площадь боковой поверхности шарового слоя, сферического пояса, зависит только от высоты слоя и радиуса шара:

$$S\text{бок} = 2\pi RH$$

Объём шарового слоя:

$$V = \frac{\pi H(H^2 + 3{r_1}^2 + 3{r_2}^2)}{6}$$

где r_1 и r_2 – радиусы оснований, H – высота шарового слоя.

Примерные задачи по теме 8:

1) Основания трапеции равны 8 и 2. Углы, прилежащие к большему основанию, равны по $45°$. Найдите объем тела, образованного вращением трапеции вокруг большего основания.

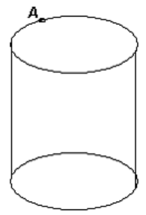
2) В шаре радиуса $\sqrt{3}$ просверлено цилиндрическое отверстие; ось цилиндра проходит через центр шара, а диаметр основания цилиндра равен радиусу шара. Найдите объём оставшейся части шара.

3) Найдите площадь осевого сечения тела, полученного при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, проходящей через его центр параллельно одной из сторон.

4) Ромб, меньшая диагональ которого равна его стороне, равной 1, вращается около прямой, проходящей через конец большей диагонали перпендикулярно этой диагонали. Найдите объём полученного тела вращения.

5) Высота цилиндра равна h. В каждое основания вписан правильный треугольник со стороной a, причём один из этих треугольников повернут относительно другого на угол $60°$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются все вершины этих треугольников.

6) Точка A лежит на окружности верхнего основания прямого кругового цилиндра (см. рисунок), B – наиболее удаленная от нее точка на окружности нижнего основания, C – произвольная точка окружности нижнего основания. Найдите AB, если $AC = 12$, $BC = 5$.



7) Вершины A, B_1, C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежат на боковой поверхности цилиндра, вершины B и C – на окружности одного основания, вершина A_1 – в плоскости другого основания. Плоскость A_1BC перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Найдите отношение объёмов цилиндра и призмы.

8) Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

9) Найдите ребро куба, одна грань которого принадлежит основанию конуса, а остальные расположены на его боковой поверхности, если радиус основания конуса равен r, а высота равна h.

10) Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

Тема 9.

Комбинация шара с призмой, пирамидой, усеченной пирамидой, с круглыми телами.

Некоторые определения:

1. Шар называется вписанным в многогранник, а многогранник описанным около шара, если поверхность шара касается всех граней многогранника.

2. Шар называется описанным около многогранника, а многогранник вписанным в шар, если поверхность шара проходит через все вершины многогранника.

3. Шар называется вписанным в цилиндр, усеченный конус (конус), а цилиндр, усеченный конус (конус) – описанным около шара, если поверхность шара касается оснований (основания) и всех образующих цилиндра, усеченного конуса (конуса).

(Из этого определения следует, что в любое осевое сечение этих тел может быть вписана окружность большого круга шара).

4. Шар называется описанным около цилиндра, усеченного конуса (конуса), если окружности оснований (окружность основания и вершина) принадлежат поверхности шара. (Из этого определения следует, что около любого осевого сечения этих тел может быть описана окружность большего круга шара).

Замечания о положении центра шара.

1. Центр шара, вписанного в многогранник, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника. Он расположен только внутри многогранника.

2. Центр шара, описанного около многогранника, лежит в точке пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих

через их середины. Он может быть расположен внутри, на поверхности и вне многогранника.

Комбинация шара с призмой

1. Шар, вписанный в прямую призму.

Теорема 1. Шар можно вписать в прямую призму в том и только в том случае, если в основание призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности.

Следствие 1. Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит в середине высоты призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание.

Следствие 2. Шар, в частности, можно вписать в прямые: треугольную, правильную, четырехугольную (у которой суммы противоположных сторон основания равны между собой) при условии $\mathrm{H} = 2r$, где H – высота призмы, r – радиус круга, вписанного в основание.

2. Шар, описанный около призмы.

Теорема 2. Шар можно описать около призмы в том и только в том случае, если призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

Следствие 1. Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр круга, описанного около основания.

Следствие 2. Шар, в частности, можно описать: около прямой треугольной призмы, около правильной призмы, около прямоугольного параллелепипеда, около прямой четырехугольной призмы, у которой сумма противоположных углов основания равна $180°$.

Из учебника Л.С. Атанасяна на комбинацию шара с призмой можно предложить задачи № 632, 633, 634, 637(а), 639(а,б).

Комбинация шара с пирамидой.

1. Шар, описанный около пирамиды.

Теорема 3. Около пирамиды можно описать шар в том и только в том случае, если около ее основания можно описать окружность.

Следствие 1. Центр шара, описанного около пирамиды лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию пирамиды, проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру, проведенной через середину этого ребра.

Следствие 2. Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равно наклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар. Центр этого шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

Следствие 3. Шар, в частности, можно описать: около треугольной пирамиды, около правильной пирамиды, около четырехугольной пирамиды, у которой сумма противоположных углов равна $180°$.

2. Шар, вписанный в пирамиду.

Теорема 4. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар.

Следствие 1. Центр шара, вписанного в пирамиду, у которой боковые грани одинаково наклонены к основанию, лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, стороной которого служит высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.

Следствие 2. В правильную пирамиду можно вписать шар.

Из учебника Л.С. Атанасяна на комбинацию шара с пирамидой можно предложить задачи № 635, 637(б), 638, 639(в),640, 641.

Комбинация шара с усеченной пирамидой.

1. Шар, описанный около правильной усеченной пирамиды.

Теорема 5. Около любой правильной усеченной пирамиды можно описать шар. (Это условие является достаточным, но не является необходимым)

2. Шар, вписанный в правильную усеченную пирамиду.

Теорема 6. В правильную усеченную пирамиду можно вписать шар в том и только в том случае, если апофема пирамиды равна сумме апофем оснований.

На комбинацию шара с усеченной пирамидой в учебнике Л.С. Атанасяна есть всего лишь одна задача (№ 636).

Комбинация шара с круглыми телами.

Теорема 7. Около цилиндра, усеченного конуса (прямых круговых), конуса можно описать шар.

Теорема 8. В цилиндр (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если цилиндр равносторонний.

Теорема 9. В любой конус (прямой круговой) можно вписать шар.

Теорема 10. В усеченный конус (прямой круговой) можно вписать шар в том и только в том случае, если его образующая равна сумме радиусов оснований.

Из учебника Л.С. Атанасяна на комбинацию шара с круглыми телами можно предложить задачи № 642, 643, 644, 645, 646.

Для более успешного изучения материала данной темы можно включать в ход уроков устные задачи:

1. Ребро куба равно а. Найти радиусы шаров: вписанного в куб и описанного около него. ($r = \frac{a}{2}, R = a\sqrt{3}$)

2. Можно ли описать сферу (шар) около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) наклонного параллелепипеда, в основании которого лежит прямоугольник; г) прямого параллелепипеда; д) наклонного параллелепипеда? (а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) нет)

3. Справедливо ли утверждение, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу? (Да)

4. Можно ли описать сферу около любой четырехугольной пирамиды? (Нет, не около любой четырёхугольной пирамиды)

5. Какими свойствами должна обладать пирамида, чтобы около нее можно было описать сферу? (В её основании должен лежать многоугольник, около которого можно описать окружность)

6. В сферу вписана пирамида, боковое ребро которой перпендикулярно основанию. Как найти центр сферы? (Центр сферы – точка пересечения двух геометрических мест точек в пространстве. Первое – перпендикуляр, проведённый к плоскости основания пирамиды, через центр окружности, описанной около него. Второе – плоскость перпендикулярная данному боковому ребру и проведённая через его середину)

7. При каких условиях можно описать сферу около призмы, в основании которой – трапеция? (Во-первых, призма должна быть прямой, и, во-вторых, трапеция должна быть равнобедренной, чтобы около неё можно было описать окружность)

8. Каким условиям должна удовлетворять призма, чтобы около нее можно было описать сферу? (Призма должна быть прямой, и её основанием должен являться многоугольник, около которого можно описать окружность)

9. Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы? (Тупоугольный треугольник)

10. Можно ли описать сферу около наклонной призмы? (Нет, нельзя)

11. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находится на одной из боковых граней призмы? (В основании лежит прямоугольный треугольник)

12. Основание пирамиды – равнобедренная трапеция .Ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания – точка, расположенная вне трапеции. Можно ли около такой трапеции описать сферу? (Да, можно. То что ортогональная проекция вершины пирамиды расположена вне её основания, не имеет значения. Важно, что в основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция – многоугольник, около которого можно описать окружность)

13. Около правильной пирамиды описана сфера. Как расположен ее центр относительно элементов пирамиды? (Центр сферы находится на перпендикуляре, проведенном к плоскости основания через его центр)

14. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, лежит: а) внутри призмы; б) вне призмы? (В основании призмы: а) остроугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник)

15. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Вычислите радиус сферы. (1,5 дм)

16. В какой усеченный конус можно вписать сферу? (В усечённый конус, в осевое сечение которого можно вписать окружность. Осевым сечением конуса является равнобедренная трапеция, сумма её оснований должна равняться сумме её боковых сторон. Другими словами, у конуса сумма радиусов оснований должна равняться образующей)

17. В усеченный конус вписана сфера. Под каким углом образующая конуса видна из центра сферы? (90°)

18. Каким свойством должна обладать прямая призма, чтобы в нее можно было вписать сферу? (Во-первых, в основании прямой призмы должен лежать многоугольник, в который можно вписать окружность, и, во-вторых, высота призмы должна равняться диаметру вписанной в основание окружности)

19. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу? (Например, четырёхугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник или параллелограмм)

20. В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли в эту призму вписать сферу? (Нет, нельзя, так как около ромба в общем случае нельзя описать окружность)

21. При каком условии в прямую треугольную призму можно вписать сферу? (Если высота призмы в два раза больше радиуса окружности, вписанной в основание)

22. При каком условии в правильную четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать сферу? (Если сечением данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания перпендикулярно ей, является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность)

23. В треугольную усеченную пирамиду вписана сфера. Какая точка пирамиды является центром сферы? (Центр вписанной в данную пирамиду сферы находится на пересечении трёх биссектральных плоскостей углов, образованных боковыми гранями пирамиды с основанием)

24. Можно ли описать сферу около цилиндра (прямого кругового)? (Да, можно)

25. Можно ли описать сферу около конуса, усеченного конуса (прямых круговых)? (Да, можно, в обоих случаях)

26. Во всякий ли цилиндр можно вписать сферу? Какими свойствами должен обладать цилиндр, чтобы в него можно было вписать сферу? (Нет, не во всякий: осевое сечение цилиндра должно быть квадратом)

27. Во всякий ли конус можно вписать сферу? Как определить положение центра сферы, вписанной в конус? (Да, во всякий. Центр вписанной сферы находится на пересечении высоты конуса и биссектрисы угла наклона образующей к плоскости основания)

Тема 10.

Углы и расстояния в пространстве

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Из курса планиметрии известно, что две прямые в плоскости могут пересекаться (имеют общую точку) или быть параллельными (не имеют общую точку).

В пространстве мы можем представить ситуацию, когда две прямые не пересекаются, но они и не параллельны.

Одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой

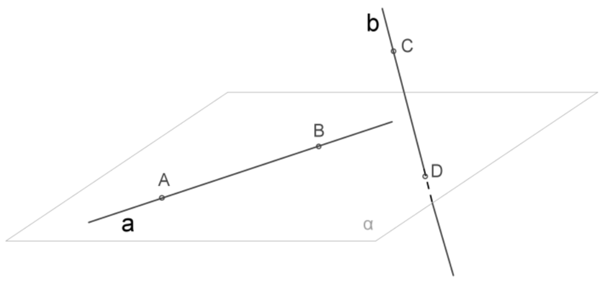
Кабели моста

Горизонтальные линии крыши и вертикальные линии стен

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

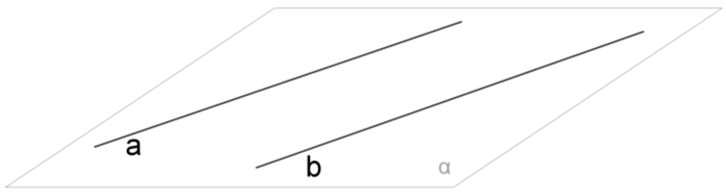
Теорема "Признак скрещивающихся прямых"

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

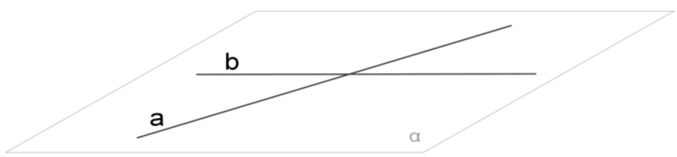


В пространстве прямые расположены следующим образом:

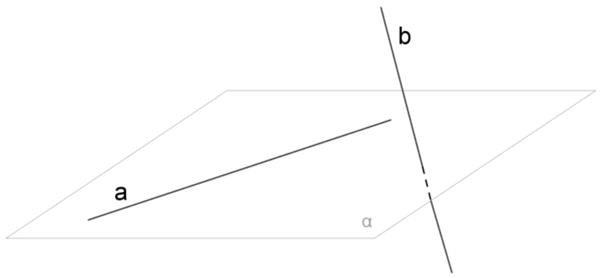
1. Параллельны



2. Пересекающиеся



3. Скрещивающиеся



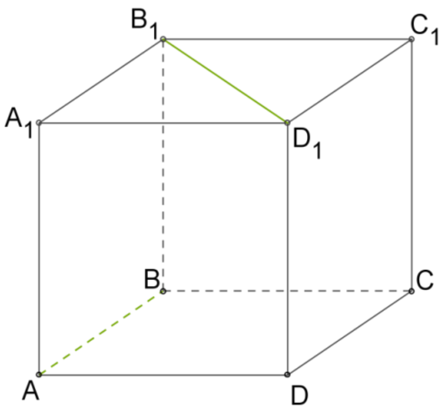
Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Углы между прямыми

1. Если прямые параллельны, то угол между ними 0°.
2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол 90°).
3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися прямым.

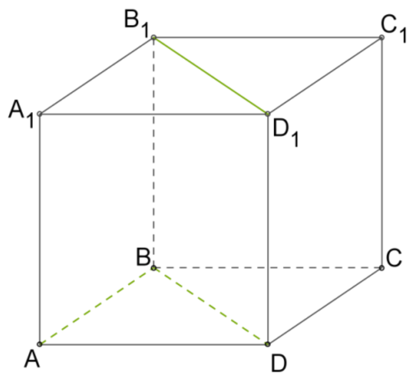
Пример:

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$



Найти угол между AB и B_1D_1.

Выберем точку B на прямой AB и проведём через B прямую BD параллельно B_1D_1



Угол между AB и BD $45°$ так как $ABCD$ квадрат.

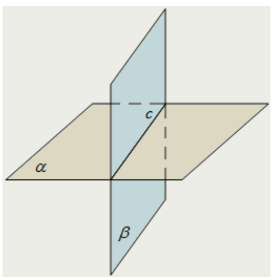
Соответственно, угол между AB и B_1D_1тоже $45°$

Угол между плоскостями

Говорят, что две плоскости пересекаются, если в одной из них существуют точки как принадлежащие другой плоскости, так и не принадлежащие ей.

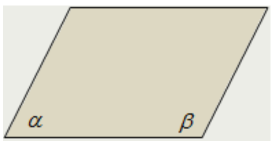
Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку:

$\alpha \cap \beta =$ с.



Говорят, что две плоскости совпадают, если каждая точка одной плоскости является точкой другой, и наоборот:

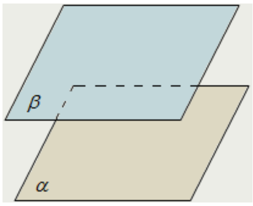
$\alpha \cap \beta = \alpha$ или $\alpha \cap \beta = \beta$.



Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек:

$\alpha || \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$.

Через точку вне плоскости можно провести плоскость параллельную данной и притом только одну.



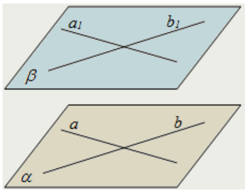
Признак параллельности плоскостей:

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

$$a \in \alpha, b \in \alpha, a1 \in \beta, b1 \in \beta, a \cap b$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha || \beta.$$



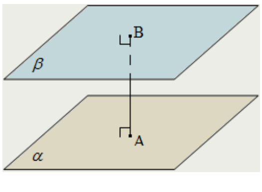
Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Длина некоторого отрезка выражает расстояние между двумя параллельными плоскостями, если этот отрезок является общим перпендикуляром этих плоскостей:

$$\mathrm{A} \in \alpha, \mathrm{B} \in \beta, \mathrm{AB} \perp \alpha, \mathrm{AB} \perp \beta$$

$$\Downarrow$$

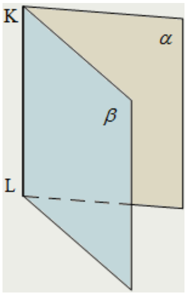
$$\mathrm{AB} - \text{ расстояние от } \alpha \text{ до } \beta.$$



Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.

Полуплоскости, о которых шла речь, называются гранями двугранного угла, а прямая – ребром двугранного угла:

α и β – грани, KL – ребро двугранного угла.

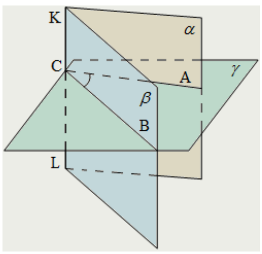


Плоскость γ, перпендикулярная ребру двугранного угла KL, пересекает его грани α и β по двум полупрямым: СА и СВ. Угол АВС, образованный этими полупрямыми, называется линейным углом двугранного угла.

Все линейные углы данного двугранного угла совмещаются параллельным переносом и равны.

Мера линейного угла служит мерой и двугранного угла, которому этот линейный угол соответствует.

Линейные углы, соответствующие равным двугранным углам, равны. И наоборот: равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.



Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьшая из мер двухгранных углов, образованных этими плоскостями.

Две плоскости называются перпендикулярными ($\alpha \perp \beta$), если угол между ними равен 90°.

Угол между параллельными плоскостями считается равным 0°.

Если φ – величина угла между некоторыми двумя плоскостями, то

$0º \leq \varphi \leq 90º$.

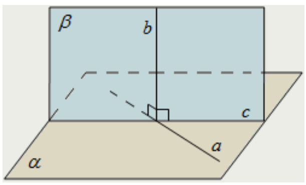
Признак перпендикулярности плоскостей:

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны:

$b \in \beta, b \perp \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

Прямая, проведённая в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно линии их пересечения, перпендикулярна другой плоскости:

$b \in \beta$, $\alpha \perp \beta$, $b \perp$ c, c $= \alpha \cap \beta \Rightarrow b \perp \alpha$.

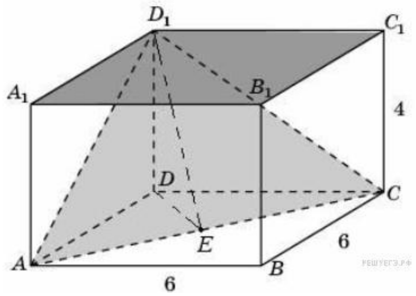


Примерные задачи к теме 10:

1) Дан прямоугольный параллелепипед $\mathrm{ABC}DA_1B_1C_1D_1$, в котором $\mathrm{AB} = 2$, $AD = 3$, $\mathrm{AA}_1 = 7$ и точка E делит сторону AA_1 в отношении $4:3$, считая от точки А. Найдите угол между плоскостями ABC и $\mathrm{BE}D_1$.

2) В пространстве взяты точки A, B, C и D, для которых $AD = BD = CD$, $\measuredangle ADB = 90°$, $\measuredangle ADC = 50°$, $\measuredangle BDC = 140°$. Найдите углы треугольника ABC.

3) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у которого $AB = 6, BC = 6, CC_1 = 4$. Найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$



4) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 4$, $SC = 7$.

5) Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом $60°$. Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

6) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. взята точка E так, что $A1E:EA = 3:4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

7) Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12, AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину

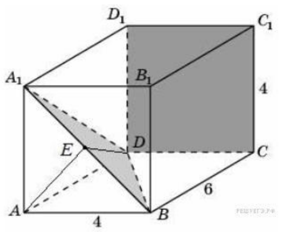
ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

8) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

9) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

10) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MC. Найдите угол между плоскостями MLC и MBC, где L — середина AB.

11) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у которого $AB = 4, BC = 6, CC_1 = 4$. Найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.



12) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC, точка M - середина ребра SA, точка K - середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $BC = 4$.

13) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1 , а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

14) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между BD и SA.

15) В треугольной пирамиде $SABC$ ребро AS перпендикулярно основанию ABC, треугольник ABC равносторонний, ребро $SB = 6$, $AB = 4$. На ребрах AC, BC и SC взяты соответственно точки P,T и M так, что $PC = TC = 3$, $SM = 4$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки P, T и M.

16) Сторона основания треугольной пирамиды равна a, прилежащие к ней углы основания равны α и β. Все боковые ребра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол φ. Найдите объем пирамиды.

Тема 11.

Угол между прямой и плоскостью

Фрагменты учебного материала по изучению темы «Угол между прямой и плоскостью» представлены в Приложении 1.

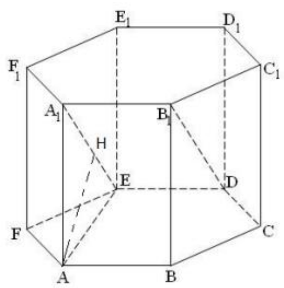
Тема 12.

Определение расстояний

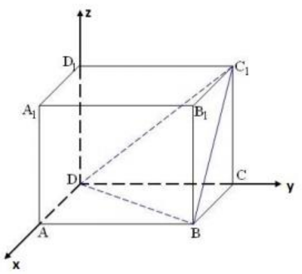
Решение типовых задач

Примеры задач по теме 12:

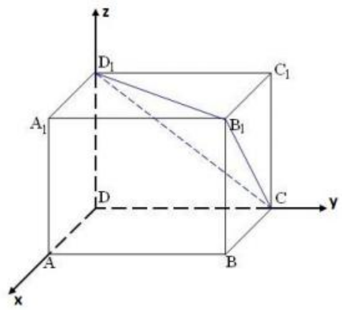
1) В правильном шестиугольнике $A..F1$ найти расстояние от точки A до плоскости A_1EB_1D.



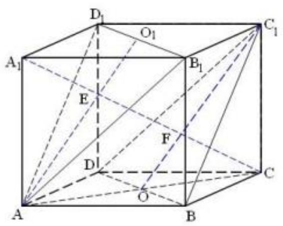
2) В кубе $A..D1$ все ребра равны 1. Найти расстояние от точки A до плоскости BDC_1.



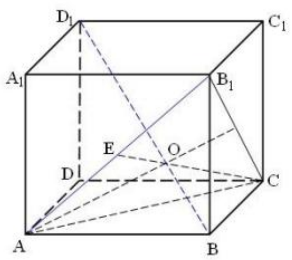
3) В кубе $A..D_1$ найти расстояние от точки А до плоскости D_1B_1C.



4) В единичном кубе $A..D_1$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

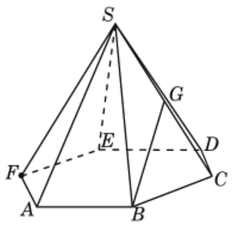


5) В единичном кубе $A..D_1$. Найдите расстояние между прямыми AB и BD_1.

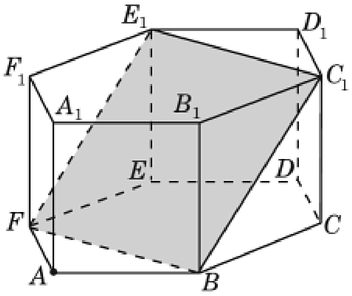


6) В кубе $A \ldots D_1$точки E, F - середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

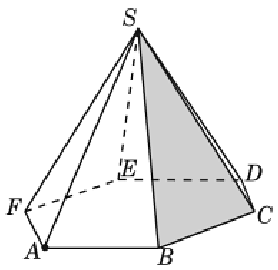
7) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G - середина ребра SC.



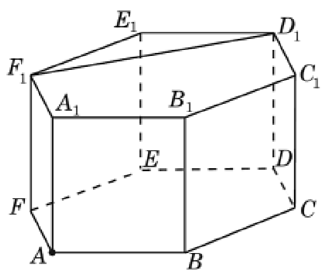
8) В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.



9) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.



10) В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1.



Тема 13.

Векторы и метод координат.

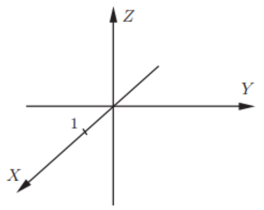
Существует два способа решения задач по стереометрии.

Первый - классический с использованием аксиом и теорем стереометрии, умением построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Такой способ хорошо развивает мозги и пространственное воображение.

Второй метод - применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила.

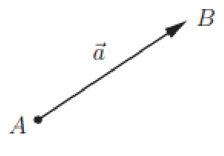
Система координат в пространстве.

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z. Зададим удобный масштаб.



Получилась система координат в трехмерном пространстве. Теперь каждая его точка характеризуется тремя числами — координатами по X, Y и Z. Например, запись $M(-1;\ 3;\ 2)$ означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна -1, координата по Y (ордината) равна 3, а координата по Z (аппликата) равна 2. Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x, y и z: $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$.

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$$

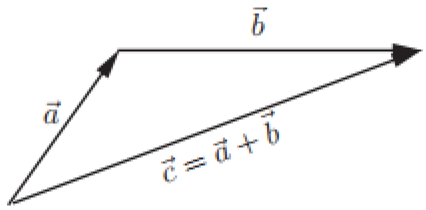
Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ в пространстве - это расстояние между точками A и B. Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

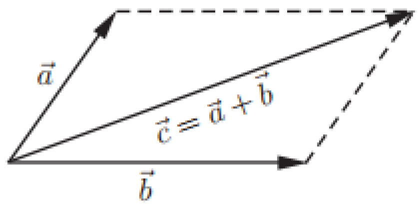
$$\overrightarrow{|a|} = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2 + {z_a}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Пусть точка M - середина отрезка AB. ЕЕ координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Для сложения векторов применяем правило треугольника и правило параллелограмма.





Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три.

Возьмем векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$.

Сумма векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$$

Разность векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{p}(\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$$

Скалярное произведение векторов:

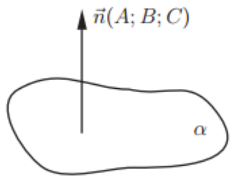
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{|a|} \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\overrightarrow{|a|}\cdot\overrightarrow{|b|}} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b}{\sqrt{{x_a}^2+{y_a}^2+{z_a}^2}\cdot\sqrt{{x_b}^2+{y_b}^2+{z_b}^2}}$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве, особенно если эти прямые - скрещиваются.

Плоскость в пространстве задается уравнением: Ax + By + Cz + D = 0. Здесь числа A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости. Его называют нормалью к плоскости.

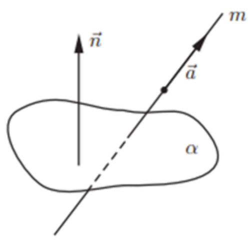


Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

Угол между прямой m и плоскостью α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов.

Пусть $\vec{a}$ - вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$ - нормаль к плоскости α.



Находим синус угла между прямой m и плоскостью α по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$$

Расстояние от точки М с координатами x_0, y_0 и z_0 до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Примерные задачи по теме 13:

1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

2) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, K — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

3) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

4) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F - середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1.Найдите тангенс угла между плоскостями AEF *и* BDD_1.

5) Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5, AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

6) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E - середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

7) В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{10}, AD = 3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1DB.

8) Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота - 4. Точка E - середина отрезка CD, точка F - середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.

9) Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра DC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

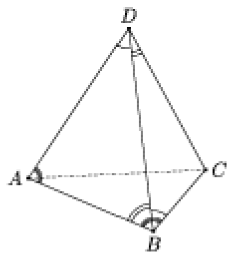
10) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и AA_1, равны 1, а ребро $AD = 2$. Точка E - середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB_1C.

Тема 14. Вычисление площадей элементов геометрических тел.

Данная тема посвящена вычислению площадей элементов геометрических тел – всей их поверхности, отдельной грани, основания, а также площади сечения тел плоскостью, проходящей через определенные точки. Некоторые варианты задания предлагают определить объем многогранников, а также значения отдельных элементов круглых тел – цилиндра, конуса, шара.

Примерные задачи по теме 14:

1) Дана пирамида ABCD (см. рис.). Известно, что $\Delta ADB = \Delta DBC$;
$\Delta ABD = \Delta BDC$;
$\Delta BAD = \Delta ABC$.
Найдите площадь поверхности пирамиды (сумму площадей четырех треугольников), если площадь треугольника ABC равна 10 см^2.



2) Расстояние между любыми двумя боковыми рёбрами наклонной треугольной призмы равно a . Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите площадь полной поверхности призмы.

3) В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AB = AC = 10,\ BC = 16$. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, проходит через вершину B и равна 4. Найдите полную поверхность пирамиды и радиус шара, вписанного в пирамиду.

4) Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причём $EF = 3,\ BC = 5$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE, BE, CF, DF, EF касаются некоторого шара. Найдите площадь поверхности этого шара.

5) На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь поверхности части сферы, лежащей внутри конуса, равна площади части поверхности конуса, лежащей внутри сферы. Найдите угол в осевом сечении конуса.

6) Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в единичный куб так, что ось цилиндра лежит на диагонали куба, а каждое основание касается трёх граней куба в их центрах.

7) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

8) Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.

9) Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

10) Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.

11) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1:4$, считая от вершины D. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1.

12) Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

2.2.5. Методические рекомендации

По темам 10-13 даны мультимедийные подсказки и предоставляется видео для самостоятельного повторения и/или обучения.

Итак, программа данного уровня структурирована в соответствии с последовательностью учения основных тем школьного курса по геометрии и концентрирует внимание учащихся на основных понятиях и методах решения геометрических задач.

Занятия целесообразно строить таким образом, чтобы основное учебное время использовалось для актуализации опорных фактов и решения геометрических задач, а теоретический материал повторялся с использованием опорных таблиц и обобщающих схем.

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности. Основные формы проведения занятий: беседа, дискуссия, консультация, практическое занятие, защита проекта. Особое значение отводится самостоятельной работе учащихся, при которой учитель на разных этапах изучения темы выступает в разных ролях, чётко контролируя и направляя работу учащихся.

Предполагаются следующие формы организации обучения: индивидуальная, групповая, коллективная, взаимное обучение, самообучение.

Средства обучения: дидактические материалы, творческие задания для самостоятельной работы, мультимедийные средства, справочная литература.

Технологии обучения: информационные, проектные, исследовательские. Занятия носят проблемный характер. Предполагаются ответы на вопросы в процессе дискуссии, поиск информации по смежным областям знаний.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля: самостоятельная работа, практикумы, тестирование.

На основе описанной выше структуры далее предложим программу элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов. Также в структуру элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) входит подготовительное занятие, направленное на объяснение структуры ЕГЭ по математике. С этой целью, кроме объяснения целей и задач курса, ученикам предлагается к просмотру и обсуждению презентация.

Для обработки тем второго блока, которые требуют от школьника тщательной систематической работы, целесообразно использовать предложенные презентации и видео для самообучения. Это поможет ученику пройти от простейшей понять и задач определенной тематики к задачам, сложность которых соответствует профильному уровню ЕГЭ или вступительного экзамена по математике в технический вуз, способствует развитию мышления и личных качеств, без которых невозможно дальнейшее обучение.

2.2.6. Рекомендуемая литература

В рамках изучения материала по представленному элективному курсу рекомендуется использоваться следующую литературу:

1. Видеоуроки. ЕГЭ по математике. Профильный уровень. Задание 16 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://reshimvse.com/mathege/?type=mc4

2. Журин А.А. Программы элективных курсов для средней (полной) общеобразовательной школы. - М.: Дрофа, 2015. - 234 с.

3. Задание 16 (профильный уровень) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://reshimvse.com/mathege/?type=mc4

4. Задание 14 из ЕГЭ 2016 по математике (профильный уровень) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://examer.ru/ege_po_matematike/2016/zadanie_14/

5. ЕГЭ: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И. В. Ященко, И.Р. Высоцкий; ред. А. Л. Семенов, И. В. Ященко.- М.: АСТ: Астрель, 2014. – 128 с.

6. "ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания. 30 вариантов. Базовый уровень" Ященко, Некрасов. Издательство: Экзамен, 2014. – 168 с.

7. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2015. – 126 с.

8. Математика. Типовые тестовые задания. /И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов и др. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 128 с.

9. Рекомендации по выполнению типовых вариантов заданий по математике ЕГЭ – 2014/ Сост. Березовская Т.Н. – 2014. – 142 с.

10. Рязановский А.Р. и др. ЕГЭ 2012. Математика: решение задач– М.: Эксмо, 2013. – 496 с.

11. Семенов А. Л. ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 192 с.

Выводы ко второй главе:

В рамках данной главы предложена программа элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов. Название элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень).

Назначение: программа курса по выбору для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учебных заведений.

Курс рассчитан на 34 академических часа, 1 занятие 2 раза в неделю. Длительность – 2 учебных четверти.

Цель курса - систематизация и обобщение знаний, полученных в процессе изучения геометрии в 7-10 классах, повторение основных опорных фактов и методов решения задач.

Программа состоит из 2 блоков:

1 – общие вопросы;

2 – решение типовых задач по ЕГЭ по направлениям:

- углы и расстояния в пространстве;
- угол между прямой и плоскостью;
- определение расстояний;
- вычисление площадей элементов геометрических тел.

Также в структуру элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) входит подготовительное занятие, направленное на объяснение структуры ЕГЭ по математике. с этой целью, кроме объяснения целей и задач курса, ученикам предлагается к просмотру и обсуждению презентация.

Для обработки тем второго блока, которые требуют от школьника тщательной систематической работы, целесообразно использовать предложенные презентации и видео для самообучения. Это поможет ученику пройти от простейшей понять и задач определенной тематики к задачам, сложность которых соответствует профильному уровню ЕГЭ или вступительного экзамена по математике в технический вуз, способствует развитию мышления и личных качеств, без которых невозможно дальнейшее обучение.

На основании вышеперечисленных требований и после анализа содержания задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ было определено, что часть вопросов экзаменационного билета посвящена вычислению площадей элементов геометрических тел – всей их поверхности, отдельной грани, основания, а также площади сечения тел плоскостью, проходящей через определенные точки. Некоторые варианты задания предлагают определить объем многогранников, а также значения отдельных элементов круглых тел – цилиндра, конуса, шара.

Основные формы итогового контроля: накопительная система баллов по решению итоговой задачи по каждой теме. Также показателем эффективности следует считать повышающийся интерес к математике, творческую активность учащихся.

Заключение

В современных условиях модернизации школьного образования элективные курсы (ЭК) являются одним из важных составляющих профильного обучения учащихся старших классов.

Элективные курсы связаны, прежде всего, с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Именно они являются важным средством построения индивидуальных образовательных программ, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, следующих жизненных планов. Элективные курсы как бы «компенсируют» в некоторой степени достаточно ограниченные возможности базовых и профильных предметов в удовлетворении разносторонних образовательных потребностей старшеклассников.

Вопросы внедрения в учебный процесс элективных курсов является актуальным вопросам методики обучения математике с целью реализации профильной дифференциации в старших классах.

За последние годы в социальной жизни общества произошли значительные изменения, требующие пересмотра системы образования. Ее переориентируют в сторону демократизации и гуманизации образования, которая направлена на воспитание, прежде всего, личности, функционально грамотной и методологически компетентной, владеющей информационными технологиями, способной адаптироваться к окружающей среде, к анализу и самоанализу, к сознательному выбору и к ответственности за него. В связи с этим появились различные типы учебных заведений, внесены изменения в учебные программы и учебных планов. Целью изменения системы образования является, прежде всего, ее ориентация на учеников, на удовлетворение их индивидуальных образовательных потребностей.

Значительное место в учебном пособии для курсов по выбору по математике в профильной школе занимает система задач.

Программа курса по выбору по математике желательно сориентировать на конкретный профиль обучения. Количество учебных часов, отведенных на выполнение программы курса, должно соответствовать возможностям качественного усвоения знаний учениками и получения запланированных учебных достижений. Темп изучения курса (распределение содержания по темам, параграфами) должен быть адекватным сложности и актуальности учебного материала – на каком материале сосредоточиться, а то рассмотреть вскользь.

Итак, содержание курсов по выбору по математике в профильной школе должно строиться на основе научно обоснованных принципов с учетом: полученных знаний, а также умений и навыков, приобретенных учащимися в процессе изучения математики на предыдущих ступенях общеобразовательной школы, их опыта взаимодействия с окружающим миром, а также принципов отбора инвариантного содержания математики в профильной школе; индивидуальных особенностях и потребностях учащихся; современных социальных заказов по личным качествам выпускников, способных эффективно взаимодействовать в выполнении социальных, производственных и экономических задач.

В исследовании были определены основные требования к конструированию содержания элективного курса по математике для подготовки к ЕГЭ следующие:

а) личностно-актуальная и социально значимая тематика;

б) поддержка базовых курсов, а также возможность для углубления профилирования и выбора индивидуальной траектории обучения; опора на методы и формы организации обучения, которые соответствуют образовательным потребностям учащихся и учителя, а также адекватным будущей профессиональной деятельности старшеклассников;

в) обеспечение формирования и развитие первоначальных, интеллектуальных и организационных способностей и навыков для подготовки к ЕГЭ;

г) система диагностики и оценки, которая стимулирует стремление к личностному росту и профессиональному самоопределению.

На основании вышеперечисленных требований и после анализа содержания задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ было определено, что часть вопросов экзаменационного билета посвящена вычислению площадей элементов геометрических тел – всей их поверхности, отдельной грани, основания, а также площади сечения тел плоскостью, проходящей через определенные точки. Некоторые варианты задания предлагают определить объем многогранников, а также значения отдельных элементов круглых тел – цилиндра, конуса, шара.

На основе описанной выше структуры далее предложим программу элективного курса по математике для учащихся 10-11 классов, состоящую из 2 блоков:

1 – общие вопросы;

2 – решение типовых задач по ЕГЭ по направлениям:

- углы и расстояния в пространстве;
- угол между прямой и плоскостью;
- определение расстояний;
- вычисление площадей элементов геометрических тел.

Также в структуру элективного курса: «Решаем геометрические задачи по ЕГЭ на отлично» (профильный уровень) входит подготовительное занятие, направленное на объяснение структуры ЕГЭ по математике. с этой целью, кроме объяснения целей и задач курса, ученикам предлагается к просмотру и обсуждению презентация.

Для обработки тем второго блока, которые требуют от школьника тщательной систематической работы, целесообразно использовать предложенные презентации и видео для самообучения. Это поможет ученику пройти от простейшей понять и задач определенной тематики к задачам, сложность которых соответствует профильному уровню ЕГЭ или вступительного экзамена по математике в технический вуз, способствует развитию мышления и личных качеств, без которых невозможно дальнейшее обучение.

Таким образом, цель исследования достигнута – разработан элективный курс по подготовке к решению задания 16 (геометрическая задача) в профильном ЕГЭ. Перспективы исследования видятся в создании методического пособия по реализации предложенного курса.

Список использованной литературы

1. Алсынбаева Л.Г., Савеленко В.В. Эффективность применения технологий электронного обучения на завершающем этапе подготовки к ЕГЭ по математике // Вестник БФУ им. И. Канта . - 2013. - №11. - С. 90-97.

2. Артыкбаева З.А. Методика обучения решению геометрических задач // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук . - 2015. - №2-2. - С. 59-63.

3. Атанасян С.Л., Кузуб Н.Н. Элективные курсы по математике и организация самостоятельной деятельности учащихся // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки . - 2014. - №4. - С.- 150-156.

4. Ахмадуллина Х.М., Ахмадуллин У.З. Влияние образовательной среды на здоровье школьников // Межотраслевой научно-информационный центр. - Пенза, - 2015. - С. 15-24.

5. Броневщук С.Г. Профильное обучение в школе. Вопросы организации и содержания. - М.: Радуга, 2011. - 258 с.

6. Видеоуроки. ЕГЭ по математике. Профильный уровень. Задание 16 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://reshimvse.com/mathege/?type=mc4

7. Высоцкий И.Р. и др. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ : Математика. - М.:А:Астрель,2013.-(ФИПИ). – 89с.

8. Высоцкий И.Р. Единый государственный экзамен. Универсальные материалы для подготовки учащихся (ФИПИ-М.: Интеллект-Центр, 2014) . – 144 с.

9. Глухова О.Ю. Методы обучения в элективных курсах по математике // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - 2014. - № 7-2. - С. 72-74.

10. Далингер В.А., Кузьмин С. Г. Результаты и анализ причин ошибок в решении геометрических задач единого государственного экзамена

по математике // Международный журнал экспериментального образования . - 2015. - №3-3. - С. 401-403.

11. Ершов Д.А. Элективные курсы профориентационной направленности: Для учащихся 10-11 классов гуманитарного профиля обучения. Учебно-методическое пособие / Д.А. Ершов. - М.: Глобус, 2007. - 154 с.

12. ЕГЭ: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; ред. А.Л. Семенов, И.В. Ященко.- М.: АСТ: Астрель, 2014. – 128 с.

13. ЕГЭ. Математика. 1000 задач с ответами и решениями. Все задания части 2 "Закрытый сегмент"" Сергеев, Панферов. Издательство: Экзамен, 2014. – 304 с.

14. "ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания. 30 вариантов. Базовый уровень" Ященко, Некрасов. Издательство: Экзамен, 2014. – 168 с.

15. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2015. – 126 с.

16. Ермаков Д.С. Психолого-педагогические проблемы профильного обучения // Профильная школа - 2005. - №1. - с. 34-40.

17. Жафяров А.Ж. Концепция и учебные планы пропедевтики предпрофильного обучения // Профильная школа. - 2015. - №1. - С. 47-53.

18. Журин А.А. Программы элективных курсов для средней (полной) общеобразовательной школы. - М.: Дрофа, 2015. - 234 с.

19. Задание 16 (профильный уровень) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://reshimvse.com/mathege/?type=mc4

20. Задание 14 из ЕГЭ 2016 по математике (профильный уровень) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://examer.ru/ege_po_matematike/2016/zadanie_14/

21. Зильберберг Н.И. Профильное обучение: проблемы и решения. - Псков, 2003. - 65 с.

22. Зубрилин А.А. О некоторых проблемах внедрения элективных курсов // Педагогика. - 2014. - №7. - С. 32.

23. Кибирев В.В. Обучение методам решения геометрических задач // Вестник БГУ . - 2014. - №15. - С. 24-28.

24. Кочагин В.В. ЕГЭ. Математика: сборник заданий – М.: Эксмо, 2014. – 120 с.

25. Кочухова И.М. Использование цифровых образовательных ресурсов во внеклассной работе по математике // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. - 2011. - № 3. - С. 63-71.

26. Клековкин Г.А. Школьное геометрическое образование: вопросы преемственности // Инновационные проекты и программы в образовании . - 2014. - №5. - С. 38-43.

27. Ленер П.С. Роль элективных курсов в профильном обучении // Профильная школа - 2011. - №3. - С. 12-15.

28. Математика. Типовые тестовые задания. /И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов и др. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 128 с.

29. Никитин А.А. Профильное обучение в специализированных и заочных школах России // Профильная школа - 2011. - №3. - С. 25-29.

30. Никифорова О.А., Заруба Н.А., Навалихина В.И., Морозова Н.И. Психолого-педагогическое и медико-биологическое обеспечение профильного обучения // Валеология - 2011. - №4. - С. 45-48.

31. Перегудов А.В. Система интегрированных курсов как средство обеспечения преемственности обучения математике // Сибирский педагогический журнал . - 2012. - №6. - С. 135-140.

32. Петутин О. Профильное обучение: дидактическое обеспечение // Учитель - 2011. - №4. - С. 12-20.

33. Попова Е.И. Первые шаги в будущее // Эффективная педагогика - 2011. - №6. - С. 24-27.

34. Попырин А. В., Савина Л. Н. Игры с бесконечностью. об одной тренировочной задаче ЕГЭ // Современные проблемы науки и образования . - 2013. - №5. - С. 260.

35. Пушкарева Т.П. Принципы построения методической системы обучения математике с позиций информационного подхода // Сибирский педагогический журнал . - 2012. - №8.- С. 212-216.

36. Рахымбек Д., Юнусов А. А., Юнусова А. А., Айтбаева Н. Ж. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство различными способами // Международный журнал экспериментального образования . - 2013. - №4-2. - С. 48-53.

37. Семенов А. Л. ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 192 с.

38. Рекомендации по выполнению типовых вариантов заданий по математике ЕГЭ – 2014/ Сост. Березовская Т.Н. – 2014. – 142 с.

39. Чистякова С.Н. Проблема самоопределения старшеклассников при выборе профиля обучения // Педагогика - 2005. - №1. - С. 19-27.

40. Фаргиева З.С., Аушева М.А. Математическое образование в школе. Реализация проекта профилизации школы для успешной сдачи профильного ЕГЭ по математике // Europeanresearch . - 2015. - №8 (9). - С. 31-34.

41. ФГОС-3 плюс 2013: проект. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://window.edu.ru/recommended/37

42. Шаин Е.Г. Профильное обучение как педагогическое явление // Эффективная педагогика - 2011. - №6. - С. 11-12.

43. Школьный А.В. Особенности решения тестовых заданий по математике // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук . - 2015. - №2-2. - С. 162-172.