

Осенняя научная сессия  
КГПУ им. В.П. Астафьева  
«Система педагогического образования –  
ресурс развития общества»

# **МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ**

Материалы XIII Всероссийской  
с международным участием  
научно-методической конференции

Красноярск, 14–15 ноября 2024 г.

*Электронное издание*

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В.П. Астафьева»

Осенняя научная сессия КГПУ им. В.П. Астафьева  
«Система педагогического образования –  
ресурс развития общества»

# **МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ**

**Материалы XIII Всероссийской с международным участием  
научно-методической конференции**

Красноярск, 14–15 ноября 2024 г.

*Электронное издание*

КРАСНОЯРСК  
2024



**Редакционная коллегия:**

*В.Р. Майер* (отв. ред.)

*Г.Н. Гиматдинова*

*Е.Н. Михалкин*

*М.Б. Шапкина*

**М 34 Математика и математическое образование в эпоху цифровизации:** материалы XIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 14–15 ноября 2024 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2024. – Систем. требования: РС не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-722-5

Представлены статьи секций «Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике», «Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке студентов и школьников», «Информационные технологии в школьной математике» и «Современные подходы и технологии обучения математике в эпоху цифровизации».

Предназначены специалистам в области математики и математического образования, а также всем интересующимся данными проблемами.

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-722-5

(Осенняя научная сессия  
КГПУ им. В.П. Астафьева  
«Система педагогического образования –  
ресурс развития общества»)

© Красноярский государственный  
педагогический университет  
им. В.П. Астафьева, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

Дураков Е.Б., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Кравцова О.В. ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА БОРИСА КОНСТАНТИНОВИЧА ДУРАКОВА (К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ) .....	11
--	----

### СЕКЦИЯ 1

#### Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике (посвящается памяти профессора Б.К. Дуракова)

Антипова И.А., Чувашов С.Ю. О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДИСКРИМИНАНТНОГО МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЛОРАНА .....	21
Анфиногенова В.П. О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ .....	25
Волк А.М. ОЦЕНКА ПЕРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ .....	29
Дураков Е.Б., Кравцова О.В., Подуфалов Н.Д., Шевелёва И.В. ПРОБЛЕМА ХЬЮЗА В КОНЕЧНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ .....	35
Кобычева В.С., Михалкин Е.Н. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ МНОГОЧЛЕНОВ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ .....	40
Ковальчук С.В. СИСТЕМА МАГМА КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ .....	43
Лейнартас Е.Д. КРАТНОЕ СУММИРОВАНИЕ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ .....	46
Леонов А.В. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И РЕМОНТА ОБОРУДОВАНИЯ .....	50
Лисицына М.А., Щербина П.А. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ .....	54
Осипов Н.Н. ГИПОТЕЗЫ И ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ С СОИЗМЕРИМЫМИ УГЛАМИ .....	58
Пукита М.Г., Шакирзянова А.А. СРАВНЕНИЕ БИБЛИОТЕКИ SYMPY (PYTHON) С ПРОГРАММНЫМИ ПАКЕТАМИ СКА .....	66
Рожков А.В., Барсукова В.Ю. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТОЛБЦОВ В АЛГОРИТМЕ AES .....	69

<b>Рожков А.В., Жадан М.С.</b> ВТОРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА AES .....	74
<b>Рожков А.В., Захарьянц А.А.</b> МНОГОЧЛЕНЫ КАК ГЕНЕРАТОРЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.....	79
<b>Рожков А.В., Клигин Е.С.</b> БИНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА .....	82
<b>Рожков А.В., Овчинникова А.А.</b> АЛГОРИТМ RSA УТОЧНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ В СРЕДЕ JULIA .....	89
<b>Сенашов В.И.</b> СЛОЙНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ И ГРУППЫ СО СЛОЙНО КОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ.....	94
<b>Сенашов В.И., Сенашова А.В.</b> ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....	99
<b>Тришин П.В.</b> О ВОПРОСЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ.....	104
<b>Шумакова Е.О.</b> ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГОВ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ФРОБЕНИУСА .....	108
<b>Phan Quang Khanh</b> ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДВУХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	112

## СЕКЦИЯ 2

### Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке студентов и школьников

<b>Бородатова А.С.</b> ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКЕ .....	119
<b>Бочкарева Д.В.</b> О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ КОНСТРУКТОРОВ-МОДЕЛЬЕРОВ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ.....	124
<b>Вохтомина Е.Д., Троицкая О.Н.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ «1С:УРОК» ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ВУЗА ДИСЦИПЛИНЕ «АДАПТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ».....	127
<b>Давыдовская В.В., Кохан П.А., Абчинец Д.Н.</b> ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MATHCAD .....	132
<b>Ефременко А.А.</b> AR-ТЕХНОЛОГИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.....	137

<b>Иконникова Т.К., Крупицын Е.С.</b> ОБ «ЭЛЛИПСЕ, ВПИСАННОМ В РОМБ».....	140
<b>Кабакова Т.Б.</b> ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ БИБЛИОТЕКИ «1С:УРОК» В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ 6-х КЛАССОВ .....	146
<b>Котельников Е.В.</b> КУРС «МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДАННЫХ» В МАГИСТРАТУРЕ ПО МАШИННОМУ ОБУЧЕНИЮ И АНАЛИЗУ ДАННЫХ .....	150
<b>Мещеркин А.И.</b> ОБЗОР ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ПОДГОТОВКЕ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ .....	153
<b>Назаров А.П.</b> НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ .....	157
<b>Нигматулин Р.М.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GeoGebra ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	162
<b>Петров В.И., Ступак Е.В.</b> ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ «GeoGebra» ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В 9 КЛАССЕ.....	168
<b>Полторацкая Т.Б.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАНДАРТНЫХ СРЕДСТВ ОФИСНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КУРСА ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ .....	174
<b>Рахимова М.А.</b> СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПАКЕТ MATHEMATICA И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ МНОГОЧЛЕНОВ .....	177
<b>Саая С.К.</b> ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GeoGebra В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ-БИЛИНГВОВ .....	182
<b>Сабитова Н.Р.</b> СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GeoGebra .....	186
<b>Сарыглар С.В.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛЬБОМА АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ УЧЕНИКОВ-БИЛИНГВОВ 7 КЛАССА .....	190
<b>Смолягина В.Д.</b> ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ.....	193
<b>Троицкая О.Н.</b> ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОНЛАЙН-ТРЕНАЖЕРОВ СРЕДСТВАМИ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР» ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВУЗА ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» .....	196

<b>Туктамышева Е.Р.</b> РОЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ В ФОРМИРОВАНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ У СТУДЕНТОВ .....	202
<b>Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Жучков И.А.</b> К ВОПРОСУ О ПОБУЖДЕНИИ КУРСАНТОВ ВОЕННОГО АВИАЦИОННОГО ВУЗА К УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ .....	205
<b>Уродова Д.С., Троицкая О.Н.</b> СОЗДАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПЛАКАТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕСУРСОВ «1С:УРОК» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ 9-х КЛАССОВ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ .....	212
<b>Федотова В.С.</b> ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ СРЕДСТВАМИ СРЕДЫ GeoGebra .....	217
<b>Хотенко И.В.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПРИЕМОВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ОТКРЫТОГО ТИПА .....	223
<b>Ястребов А.В.</b> ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО .....	226

### СЕКЦИЯ 3

#### Информационные технологии в школьной математике

<b>Дроздова А.В., Павлова М.А.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GeoGebra В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ .....	234
<b>Дюкина Н.Г.</b> НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ .....	241
<b>Дюкина Н.Г., Некрасова Д.М.</b> ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРАКТИВНОЙ ОНЛАЙН-ДОСКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 10–11 КЛАССАХ .....	245
<b>Королева А.С.</b> КРУЖОК «ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ С GeoGebra» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6 КЛАССОВ НА БАЗЕ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ .....	248
<b>Кочкин С.А., Патронова Н.Н.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА R ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ В РАМКАХ КУРСА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ .....	253
<b>Кузнецов И.Р., Судочакова А.С.</b> РАЗРАБОТКА ИГРЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ» .....	259
<b>Майер В.Р., Копытов Л.Ю.</b> АНИМАЦИОННЫЕ ЧЕРТЕЖИ В ЗАДАНИЯХ ПО МЕТОДАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА КОМБИНАЦИЮ СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКА .....	262

<b>Макаров А.М., Макарова О.Н.</b> ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ .....	268
<b>Мочалова Л.С., Фомина А.В.</b> СОВРЕМЕННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ПОДХОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБУЧАЮЩЕГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ, НА ПЛАТФОРМЕ STERIK .....	271
<b>Никиченко Ю.В., Павлова М.А.</b> ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ X ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ .....	277
<b>Павлова М.А.</b> ИТОГИ ВТОРОГО КОНКУРСА ЭКСПОНАТОВ ДЛЯ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ .....	283
<b>Сарыглар С.В., Монгуш Е.Ч.</b> ТРЕНАЖЕР ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧЕНИКОВ-БИЛИНГВОВ МЛАДШИХ КЛАССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ .....	288
<b>Семкина В.М., Сивухина Е.А.</b> СВЯЗЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С КВАДРАТАМИ ДЛИН СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	292

#### **СЕКЦИЯ 4**

#### **Современные подходы и технологии обучения математике в эпоху цифровизации**

<b>Азимова Н.С.</b> АКСИОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ .....	297
<b>Аниськин В.Н., Галиева Е.В., Евелина Л.Н.</b> ГОДИЧНАЯ ПРАКТИКА КАК ФОРМА ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ИХ ДЕФИЦИТА В ШКОЛАХ.....	302
<b>Ашихмин А.С., Макеева О.В.</b> ИНСТРУМЕНТ LaTeX В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СТУДЕНТА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА .....	308
<b>Бадак Б.А.</b> О ФОРМАХ И МЕТОДАХ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЦИФРОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ.....	313
<b>Бекешева И.С., Бобылева О.В., Донакай А.Р.</b> ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ .....	317
<b>Будневич В.С.</b> РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У КУРСАНТОВ.....	322
<b>Бурбужук Д.Э.</b> ЭЛЕКТРОННЫЙ РУССКО-ТУВИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ЗНАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ.....	327

<b>Вагина М.Ю., Севостьянова С.А., Мартынова Е.В.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В 7–9 КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ .....	330
<b>Гагарина С.И., Рощина Г.А., Шпилова О.Г.</b> РАЗВИТИЕ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ РАБОТУ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛУБОВ.....	334
<b>Гиматдинова Г.Н., Помельцева М.В.</b> ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ .....	338
<b>Гиматдинова Г.Н.</b> ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ ДЛЯ ПРОЕКТНОГО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ.....	342
<b>Гостевич Т.В., Лобанок И.П.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ MOODLE ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ .....	347
<b>Далингер В.А.</b> МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ОБОБЩАЮЩИХ ПОВТОРЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ .....	352
<b>Домненко Т.А., Кулешова И.Г.</b> ОРГАНИЗАЦИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ИГР В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 5–6 КЛАССАХ.....	357
<b>Евсеева Е.Г., Скворцова Д.А.</b> ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРИКИ.....	361
<b>Журавлева Н.А., Ганжа Е.И.</b> ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТА И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОЛИМПИАДЫ ПО МОЛНИЕНОСНОМУ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ «СТРЕКОЗА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ .....	367
<b>Ильина К.А., Сабирова Э.Г.</b> ИНТЕРНЕТ-САЙТЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО ПЕРВОКЛАССНИКА.....	373
<b>Кисельников И.В.</b> ПОГРЕШНОСТИ В ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ОБУЧЕНИЯ УЧАСТНИКОВ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В АЛТАЙСКОМ КРАЕ .....	377
<b>Козловская И.С.</b> СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ» .....	382
<b>Косачевский В.А.</b> О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ .....	386

<b>Костин С.В.</b> ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АВТОНОМНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМ И СТУДЕНТАМ.....	392
<b>Кузнецова И.С., Никишина Т.Г., Цветкова И.В.</b> ПРИМЕНЕНИЕ КОНТЕКСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ .....	398
<b>Куликова Ю.Д.</b> МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ .....	402
<b>Лапшина Е.М., Кечина О.М.</b> ЦИФРОВОЙ РАБОЧИЙ ЛИСТ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ.....	406
<b>Лозовая Н.А.</b> ОСОБЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ .....	411
<b>Могилева А.М.</b> «ОЖИВЛЕНИЕ» УРОКОВ МАТЕМАТИКИ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ .....	414
<b>Пашковская О.В.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ LMS MOODLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ .....	418
<b>Позднякова Е.В.</b> РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕСУРСОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ .....	423
<b>Поличка А.Е.</b> ВАРИАНТ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО МЕТАКОМПЛЕКСА ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОДГОТОВКИ В ВУЗЕ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ .....	428
<b>Путинцева И.В.</b> ЭЛЕКТРОННЫЙ КУРС КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА .....	431
<b>Скафа Е.И., Ганжа А.А., Веселовская А.С.</b> СОЗДАНИЕ КОЛЛЕКЦИИ ЦИФРОВЫХ ИГР ПО ПЛАНИМЕТРИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ИЗУЧЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ.....	434
<b>Смолина Ю.А., Фельбрина С.В.</b> СИСТЕМА ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ» В 10–11 КЛАССАХ.....	439
<b>Табинова О.А., Шашкина М.Б.</b> ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ: КАК УЧИТЬ СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ? .....	446



<b>Тимофеева Л.Н.</b> К ВОПРОСУ ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ.....	451
<b>Хлобыстова И.Ю., Кузнецова К.А.</b> ФОРМИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ .....	454
<b>Шутрова И.В., Безумов А.А.</b> МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО БАНКА СКВОЗНЫХ КОНТЕКСТНЫХ ЗАДАЧ НА ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ.....	457
РЕЗОЛЮЦИЯ КОНФЕРЕНЦИИ.....	463
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....	464

# ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА БОРИСА КОНСТАНТИНОВИЧА ДУРАКОВА (К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

IN MEMORY OF PROFESSOR  
BORIS KONSTANTINOVICH DURAKOV  
(FOR THE 75-TH ANNIVERSARY OF HIS BIRTH)

Е.Б. Дураков, В.Р. Майер,  
Н.Д. Подуфалов, О.В. Кравцова

E.B. Durakov, V.R. Mayer,  
N.D. Podufalov, O.V. Kravtsova

*Жизнь и творчество, теория групп, конечные проективные плоскости, математическое образование.*

Статья посвящена краткой биографии кандидата физико-математических наук, профессора Дуракова Бориса Константиновича, его научно-методической деятельности как ученого, преподавателя и автора статей, учебников и учебно-методических пособий.

*Life and creativity, group theory, finite projective planes, mathematical education.*

The article is devoted to a brief biography of Boris Konstantinovich Durakov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, his scientific and methodological activities as a scientist, teacher and author of articles, textbooks and teaching aids.

**Б**орис Константинович Дураков родился 21 февраля 1949 г. в Игарке на севере Красноярского края в семье участника Великой Отечественной войны Константина Ивановича Дуракова и его жены Анны Антоновны, школьного учителя математики. В семье росла и его младшая сестра Вера.



Когда Борису исполнилось 14 лет, семья переехала в город Енисейск, который, как и Игарка, находится на берегу Енисея. С восьмого по десятый класс Борис обучался в одном из старейших образовательных учреждений края Енисейской средней школе № 1.

Интерес и любовь к математике у него проявлялись уже в школьные годы. Учителя математики не всегда были готовы к тому, чтобы дать исчерпывающие ответы на многочисленные вопросы любопытного ученика. Вспоминается один эпизод, о котором рассказывал сам Борис. В процессе изучения в школьном курсе математики темы, посвященной тригонометрическим функциям, его заинтересовал вопрос, связанный с изображением синусоиды. В соответствии с определением синуса он понимал, что наибольшее значение этой функции равно единице, а насколько ее график должен быть растянут вдоль оси абсцисс?

Насколько «крутыми» надо рисовать в тетради волны синусоиды? Учитель убеждала его, что степень крутизны может быть любой, главное, чтобы высота волн не превышала единицу по оси ординат. И отчасти она была права, если не требовать выбора на осях  $Ox$  и  $Oy$  единичных отрезков одинаковой длины. Однако именно это требование в объяснении учителя отсутствовало. Бориса такой ответ не устраивал. Он несколько месяцев искал консультанта среди преподавателей Енисейского педагогического института. Познакомился со старшим преподавателем О.Г. Широколовым, который разъяснил ему связь формы графика синусоиды с измерением углов в радианах.

Высшее образование Борис получил на математическом факультете Красноярского государственного университета, официальное открытие которого состоялось в 1969 г., когда он учился на третьем курсе. После окончания университета поступил в аспирантуру по алгебре к Бусаркину Виктору Михайловичу, выпускнику Уральского государственного университета, работавшему проректором университета в Красноярске. Тема диссертационного исследования была связана с актуальной в то время и всемирно известной проблемой описания всех конечных простых групп, т.е. групп, не содержащих неединичные нормальные подгруппы, отличные от самой группы. На университетских семинарах, которые проходили под руководством Виктора Михайловича, его аспирантами были проштудированы многие известные теоремы, лежащие в основе так называемого метода четной характеристики конечных простых групп, т.е. изучение конечных групп по свойствам их подгрупп четного порядка.

Однако исследования конца шестидесятых и начала семидесятых годов прошлого столетия показали, что наиболее важные результаты в теории конечных простых групп получаются благодаря использованию наряду с методами четной характеристики, так называемых методов нечетной характеристики. Основное содержание этих методов заключается в получении глобальных свойств группы, исходя из строения и вложения ее некоторых подгрупп, порядок которых делится на фиксированное нечетное простое число. Поскольку почти все известные к тому времени простые неабелевы группы имели порядки, кратные 3 (исключение составляла лишь серия групп Судзуки), то естественно возникла проблема разработки методов 3-характеристики групп.

На Международном конгрессе математиков в Ванкувере (21–29 августа 1974) Г. Хигманом были сформулированы задачи, связанные с описанием конечных простых групп, содержащих абелеву подгруппу  $A$  порядка, кратного 3, для которой централизатор любого ее элемента порядка 3 совпадает с  $A$ . При этом накладывались некоторые дополнительные ограничения на нормализатор подгруппы  $A$ .

Г. Хигман сообщил участникам конгресса, что ему и его ученикам удалось решить некоторые из этих задач, например, для случаев, когда порядок подгруппы  $A$  равен 3, 6, 9 или 15. Три аспиранта В.М. Бусаркина, среди которых вместе с Борисом были и два автора этой статьи, активно приступили к освоению методов нечетной характеристики групп и описанию с их помощью конечных простых групп, удовлетворяющих тем или иным ограничениям на подгруппы, порядок

которых делится на 3. Так, основным результатом кандидатской диссертации Б.К. Дуракова было решение задачи, близкой к задачам Г. Хигмана, а именно описаны конечные группы, содержащие такую подгруппу  $A$  порядка  $6k$ ,  $k$  – нечетно, что централизатор любого элемента нечетного порядка из  $A$  содержится в  $A$ , причем  $|N(A):C(A)| = 2$ . Среди конечных простых неабелевых групп таковыми оказались лишь группы  $PSL(2, q)$ ,  $q$  – нечетно. Защита диссертации успешно прошла в феврале 1976 г. в Новосибирске в диссертационном совете Института математики Сибирского отделения АН СССР. Основные результаты диссертации были опубликованы в статьях и препринтах [1], [2], [5] и [6]. Отметим, что с момента формулировки задач их автором в Ванкувере до решения Б.К. Дураковым задачи, близкой к ним по содержанию, прошло менее двух лет.

После окончания аспирантуры основная трудовая деятельность Бориса Константиновича была связана с кафедрой высшей математики Красноярского политехнического института, который затем получил статус университета, а позднее вошел в состав Сибирского федерального университета. В его послужном списке – практически все кафедральные должности, начиная с ассистента и заканчивая заведующим кафедрой, профессором. А что же с наукой? Как известно, в 1983 г. Дэниел Горенштейн объявил, что все конечные простые группы были классифицированы. Несмотря на то что скрупулезное многостраничное (несколько десятков тысяч страниц) доказательство классификационной теоремы оформлялось еще достаточно продолжительное время (до 2004), интерес к конечным группам заметно снизился. В связи с этим В.М. Бусаркин и его ученики переключились на исследования конечных геометрий, проблемы вузовского и школьного математического образования.

Конечная проективная геометрия – пограничная область, в которой применяются методы теории групп, теории колец и полей, методы линейной алгебры, геометрии и вычислительной математики. Эта область одновременно представляет интерес для новейших исследований в криптографии и кодировании и имеет богатую историю с множеством нерешенных проблем.

Наиболее полный обзор результатов о конечных проективных плоскостях трансляций представлен в 2007 г. в обширной монографии (861 стр.) Н. Джонсона с соавторами [17]. В списке источников этой монографии и статья Бориса Константиновича о дважды транзитивных группах автоморфизмов [16].

Совместные исследования Б.К. Дуракова и его учеников были посвящены путям решения известной проблемы Хьюза. К середине прошлого века было выделено несколько классов конечных проективных плоскостей, координатизируемых полуполями (неассоциативными кольцами с делением). Все эти полуполевыми плоскостями обладали общим свойством: они имели разрешимую группу коллинеаций (автоморфизмов). Этот факт позволил Дэниелу Хьюзу в 1959 г. выдвинуть гипотезу о разрешимости полной группы коллинеаций произвольной конечной недезарговой полуполевыми плоскости. Гипотеза была подтверждена рядом исследователей в 1960–1990 гг. для плоскостей с отдельными ограничениями, но общего подхода предложено не было.

В 1990 г. Н.Д. Подуфаловым проблема разрешимости группы коллинеаций полуполевого плоскости была включена в Коуровскую тетрадь (сборник нерешенных проблем теории групп). В период 1990–2000 гг. участниками научного семинара в г. Красноярске было получено несколько значимых результатов.

В 2016 г. на Международной XI школе-конференции по теории групп в совместном докладе Б.К. Дуракова и О.В. Кравцовой был предложен подход к проблеме Хьюза, основанный на классификации конечных простых неабелевых групп. В предположении неразрешимости полной группы коллинеаций простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Непосредственный перебор всех вариантов из списка Дж. Томпсона простых неабелевых групп приводит к большому объему исследований. Было предложено проверить существование подгруппы полной группы коллинеаций, изоморфной знакопеременной группе  $A_5$  (подгруппе значительного количества простых неабелевых групп). В статье [14] был доказан результат, который позднее позволил полностью исключить эту знакопеременную группу из числа возможных подгрупп коллинеаций для полуполевого плоскостей нечетного порядка, а вместе с ней и целую серию простых неабелевых групп. Этот перспективный подход развивается и в настоящее время.

Работая в Красноярском государственном техническом университете (далее – КГТУ) в должности заведующего кафедрой высшей математики, Борис Константинович каждый год сталкивался с проблемами набора в вуз. Кафедра была вовлечена в работу приемной комиссии и в профориентационную деятельность. По поручению ректора КГТУ А.М. Ставера была разработана система тестирования абитуриентов и соответствующая программа обработки данных, которая впоследствии была адаптирована и для проведения олимпиад. В 1995 г. Федеральный центр тестирования начал проведение на всей территории России Централизованного тестирования (ЦТ), результаты которого вузы имели право засчитывать в качестве вступительных экзаменов, а школы учитывать при итоговой аттестации. Борис Константинович с командой единомышленников включается в эту работу – в КГТУ был организован Центр тестирования, который занимался, в частности, организацией и проведением ЦТ. Благодаря тесному взаимодействию со школами Борису Константиновичу удалось достигнуть в проведении этого тестирования значительных успехов. Например, в 2002 г. Центром тестирования КГТУ было проведено более 57000 тестирований. За развитие тестовых технологий Борис Константинович был награжден золотым значком и в 2000 г. Почетной грамотой Министерства образования Российской Федерации.

Когда в 2002 г. Красноярский край включился в эксперимент по проведению ЕГЭ, Совет ректоров края рекомендовал Министерству создать региональный центр обработки ЕГЭ на базе Центра тестирования КГТУ, которым руководил Борис Константинович. В этом же году за успешное проведение обработки материалов ЕГЭ Борис Константинович был повторно награжден Почетной грамотой Министерства образования Российской Федерации. Работа по развитию



тестовых технологий была сопряжена с развитием сети опорных пунктов КГТУ в крае – в 2002 г. их количество превысило 100. Коллективом программистов Центра тестирования КГТУ была написана программа, которая позволяла визуализировать результаты ЕГЭ и ЦТ. Борис Константинович и его коллеги регулярно участвовали в работе конференций разного уровня с докладами по вопросам развития тестовых технологий и анализа качества подготовки школьников. Результатом этой работы стал государственный контракт на разработку для нужд Главного управления образования Красноярского края Краевой информационной автоматизированной системы управления образованием (КИАСУО). Эта система в крае функционирует во всех школах и в настоящее время.

Большой опыт работы в системе довузовской подготовки и организации нового набора студентов позволили в 2007 г. коллективу, возглавляемому Борисом Константиновичем, разработать программу АИС «Абитуриент», которая успешно использовалась до 2022 г. В настоящее время программа переписана на более современной платформе.

В 2017–2018 гг. Борис Константинович в среде преподавателей математики и ученых-математиков неоднократно инициировал обсуждение проблем преподавания математики в технических вузах, возникших в связи с заметным снижением качества и уровня знаний математических дисциплин у выпускников общеобразовательных школ. Он эмоционально реагировал на негативные явления и пытался найти разумный выход из постепенно усугубляющейся ситуации. В качестве одних из основных причин этого явления рассматривались одновременное уменьшение учебного времени, отводимого на изучение школьного курса математики, и усложнение его содержания за счет включения в программу достаточно большого объема элементов высшей математики, а также заметное смещение интересов учащихся из сферы математических и естественно-научных дисциплин в сферу гуманитарных и финансово-экономических знаний.

Одним из результатов таких обсуждений стало понимание системного и комплексного характера возникших проблем и необходимости проведения более глубокого их изучения. Можно сказать, что «спусковым крючком» в развитии дальнейших событий стала статья [15], опубликованная в журнале «Педагогика», одним из авторов которой был Б.К. Дураков. В ней была дана достаточно острая оценка происходящих процессов в преподавании математических дисциплин и обозначены некоторые подходы к исправлению ситуации.

Вместе с этим одним из препятствий на пути повышения качества школьного математического образования было отсутствие консолидированного мнения среди преподавателей и специалистов в области математики по его содержанию и прежде всего по объемам и содержанию разделов высшей математики, включенных в школьный курс. Это в существенной степени снизило эффективность реформы школьного математического образования в 60-е гг. и привело к ряду негативных последствий.

Стало понятно, что для принятия решений о внесении существенных изменений в процесс преподавания математических дисциплин в общеобразовательной школе была необходима разработка системы оценки качества и результативности преподавания математики, позволяющей объективно и детально анализировать качество знаний учащихся и динамику его изменения во времени в разрезе отдельных разделов и тем курса школьной математики. Существующая система экзаменов, включая ЕГЭ, не позволяла этого делать.

Таким образом, Б.К. Дураков с коллегами пришли к идее создания системы тестирования «остаточных» знаний, т.е. системы, которая позволяла бы в разрезе отдельных тем и разделов курса школьной математики изучать динамику изменения уровня знаний молодых людей в течение двух-трех лет после завершения изучения этих разделов. Понятно, что по различным причинам в полном объеме решить эту задачу весьма сложно. Поэтому вначале в ряде статей были разработаны методологические и методические подходы к решению этой задачи и постепенно сформировался коллектив для ее решения. Подключился Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, начала активно заниматься разработкой системы тестирования и непосредственно тестированием студентов первого курса вузов Красноярска группа преподавателей СФУ в составе О.В. Кравцовой, Е.Б. Дуракова, Д.В. Семеновой и И.В. Шевелевой.

Координирующую роль в решении стоящих задач стал играть Красноярский научно-образовательный математический центр, созданный Минобрнауки России при СФУ (руководитель доктор физико-математических наук, профессор А.К. Цих), с участием ученых Российской академии образования. В 2023 г. благодаря энергичной позиции Б.К. Дуракова, его настойчивости и целеустремленности коллектив приступил к тестированию учащихся ряда общеобразовательных школ Красноярского края. Большую помощь в этом вопросе оказал коллектив Красноярского краевого института повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования, возглавляемый ректором института Е.А. Чигановой.

Учитывая сложность стоящих задач и невозможность их эффективного решения в рамках одного субъекта Российской Федерации, коллектив исследователей регулярно участвовал в научных и научно-методических мероприятиях различного уровня. В частности, по проблеме качества школьного математического образования и задачах организации тестирования остаточных знаний по математике неоднократно делались доклады и выступления. Здоровье не всегда позволяло Борису Константиновичу лично выступать с докладами, но в тексте каждого из них всегда присутствовали его идеи, мысли и рекомендации. Приведем те мероприятия, в которых Б.К. Дураков принимал участие в качестве докладчика или содокладчика.

Наиболее часто использовалась площадка Московского педагогического государственного университета (МПГУ), главного педагогического вуза страны. Из большого числа конференций, проводимых МПГУ, направлению исследований группы больше всего соответствовала ежегодная Международная научно-

практическая интернет-конференция «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе». Участникам этой конференции в разные годы были представлены доклады: «О формировании перечня, содержания и требований к уровню знаний выпускников средней школы в области математики» (2019), «О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике» (2021г), «О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике» (2022), «О некоторых итогах тестирования остаточных знаний по математике в 2022 г.» (2023). Также материалы исследований докладывались на Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 23–24 ноября 2023 г., Москва).

Два доклада были представлены на пленарных заседаниях конференций в КГПУ им. В.П. Астафьева. Один по теме «Результаты входного тестирования по математике студентов первого курса» (2022) на VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты». Второй доклад «Об итогах тестирования первокурсников по школьному курсу математики в 2022 г.» (2023) на XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании».

Результаты работы группы обсуждались и с учителями края. Так, первый доклад «Обсуждение и анализ результатов исследования остаточных знаний по математике у студентов первого курса» (2022) был сделан на круглом столе Красноярского краевого института повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования. Второй доклад «О состоянии математического школьного образования» (2022) – на Красноярском краевом форуме учителей математики и информатики «Единое образовательное пространство: возможности для повышения качества школьного математического образования».

После ухода из жизни Б.К. Дуракова научный коллектив, созданный по его инициативе, продолжает решение рассмотренных выше задач. Из основных его работ, опубликованных по данной проблематике, отметим [11], [12] и [13]. Также Борис Константинович уделял большое внимание разработке учебников и учебно-методической литературы. Им и его коллегами были подготовлены и изданы шесть учебников и учебных пособий: [3], [4], [7], [8], [9], [10].

Борис Константинович был настолько предан любимой математике и математическому образованию, что в дискуссиях любого уровня, начиная с семейных полемик о том, на кого учиться его детям и внукам, заканчивая любым совещанием по проблемам науки и образования, связанным с оценкой влияния математики, математического просвещения и образования на развитие сибирских регионов и всей страны, его точка зрения становилась не только услышанной, но по эмоциям и ораторскому мастерству на порядок превосходящей любое альтернативное мнение.





Краткая биография Б.К. Дуракова была бы неполной, если бы мы обошли молчанием его увлечения, не относящиеся к науке и работе в вузе. Борис Константинович был большим любителем сибирской природы, охотником, рыбаком, сборщиком ягод, грибов, кедровых орехов, других даров тайги. В отличие от огромного числа любителей лесной романтики, его «ореол обитания» был

практически не связан с опушками, полянами и речками, находящимися в непосредственной близости к краевому центру. Подготовка к встрече с тайгой и само пребывание в тайге представляли собой целый ритуал.

Ранней весной с ослаблением сибирских морозов по зимнику вдоль одной из рек, впадающих близ поселка Ярцево в Енисей, завозились на машинах «УАЗ» необходимое оборудование, горючее, соль, крупы, консервы и другие грузы. Конечным пунктом была охотничья избушка семьи Бориса Константиновича, расположенная на расстоянии нескольких десятков километров от ближайшего населенного пункта. Сама же охота, рыбалка и сбор дикоросов происходили в один из самых урожайных периодов года, в первый месяц осени. Компанию Борису Константиновичу, как правило, составляли его жена Светлана, сын Евгений, внуки Борис, Евгений и Матвей, его коллега и друг Панферов Петр. Рядом с ним всегда были его верные охотничьи лайки.

Борис Константинович был замечательным рассказчиком, любил и умел так рассказывать о своих многочисленных приключениях, которые случались с ним в тайге, на Енисее и его притоках, при встрече с лосем или медведем, в процессе экстремальных путешествий по заснеженным лесам, бурным рекам и болотистым топям, что казалось, будто это все происходит не только с ним, но и непосредственно с самим слушателем. Память о Борисе Константиновиче, об этом уникальном человеке, ученом, педагоге и нашем друге, мы будем хранить долгие годы.

### **Библиографический список**

1. Бусаркин В.М., Дураков Б.К. Об одном классе конечных неразрешимых групп // Алгебра и логика. 1974. № 2. С. 153–167.
2. Бусаркин В.М., Дураков Б.К. Конечные простые группы с циклическими централизаторами элементов нечетного порядка // Алгебра и логика. 1974. № 2. С. 256–264.
3. Григорьева Т.В., Дураков Б.К. Математика в помощь абитуриенту: учеб. пособие: в 2 ч. / КГТУ. Красноярск: Горница, 1994. 225 с.
4. Григорьева Т.В., Дураков Б.К. Математика в примерах и задачах: учеб. пособие / КГТУ. Красноярск, 1994. 224 с.

5. Дураков Б.К. Конечные группы с заданными централизаторами элементов порядка 3. I. Редколлегия Сиб. мат. журнала СО АН СССР. Новосибирск, 30 октября 1975 г. № 3140-75 Деп. 35 с.
6. Дураков Б.К. Конечные группы с заданными централизаторами элементов порядка 3. II. Редколлегия Сиб. мат. журнала СО АН СССР. Новосибирск, 30 октября 1975 г. № 3141-75 Деп. 34 с.
7. Дураков Б.К. Комплексные числа и многочлены: учеб. пособие. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. 76 с.
8. Дураков Б.К. Краткий курс высшей алгебры. М.: Физматлит, 2006. 232 с.
9. Дураков Б.К. Краткий курс высшей алгебры и аналитической геометрии: учебник. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017. 422 с.
10. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Шевелева И.В. Высшая алгебра и аналитическая геометрия: сб. задач. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017. 176 с.
11. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике // Известия РАО. 2021. № 3 (55). С. 105–119.
12. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике // Педагогика. 2022. № 5. С. 57–68.
13. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В., Шевелева И.В. О тестировании остаточных знаний по математике в 2022 году // Педагогика. 2023. № 1. С. 51–59.
14. Кравцова О.В., Дураков Б.К. Полуполевыe плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную  $A_5$  // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 396–411.
15. Подуфалов Н.Д., Дураков Б.К. Математическое образование в контексте методологических проблем развития российской системы образования // Педагогика. 2018. № 7. С. 3–12.
16. Durakov B.K. Finite translation planes that admit a collineation group that acts doubly transitively on a translation line, Discrete Mathematics (Russian), Krasnoyarsk. Gos. Tekh. Univ., Krasnogorsk, 1996. P. 32–39.
17. Johnson N.L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. Chapman and Hall, Boca Raton. London, New York, 2007. 861 p.

## Секция 1

---

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ,  
СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ  
В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ  
*(ПОСВЯЩАЕТСЯ ПАМЯТИ  
ПРОФЕССОРА Б.К. ДУРАКОВА)***

---

# О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДИСКРИМИНАНТНОГО МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЛОРАНА

## ON PROPERTIES OF THE PARAMETERIZATION FOR THE DISCRIMINANT LOCUS OF THE LAURENT POLYNOMIAL SYSTEM

И.А. Антипова, С.Ю. Чувашов

I.A. Antipova, S.Yu. Chuvashov

*Полином Лорана, дискриминантное множество, A-дискриминант, вырожденный кратный корень.*

Исследуется критическое множество параметризации системы  $n$  полиномов Лорана от  $n$  неизвестных. В специальном случае ( $n = 3$ ) построен пример системы, соответствующей особой точке дискриминантного множества и имеющей вырожденный кратный корень.

*Laurent polynomial, discriminant locus, A-discriminant, degenerate multiple root.*

The critical set of the parameterization of the system of  $n$  Laurent polynomials of  $n$  variables is studied. In the special case ( $n = 3$ ), an example of the system corresponding to a singular point of the discriminant set and having a degenerate multiple root is constructed.

**Р**ассмотрим систему полиномов Лорана в которой коэффициенты  $a_\lambda^{(i)}$

$$f_i(y) := \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

изменяются в векторном пространстве  $\mathbb{C}_a^N$ , множества показателей мономов  $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$  фиксированы и порождают решетку как аддитивную группу. Решения  $y := (y_1, \dots, y_n)$  рассматриваются в комплексном алгебраическом торе  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ , поэтому без потери общности будем предполагать, что все множества  $A^{(i)}$  содержат нулевой элемент  $\bar{0}$ , и будем отождествлять их с множествами мономов  $y^\lambda := y_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot y_n^{\lambda_n}, \lambda \in A^{(i)}$ . Обозначим через  $\nabla^0$  множество всех коэффициентов, для которых отображение  $f = (f_1, \dots, f_n): (\mathbb{C}^n)^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , ассоциированное с системой (1), имеет кратные нули, то есть нули, в которых якобиан отображения  $f$  равен нулю. Дискриминантным множеством  $\nabla$  отображения  $f$  называют замыкание множества  $\nabla^0$  в пространстве коэффициентов  $\mathbb{C}_a^N$ . Множество  $\nabla$  уместно назвать  $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$  – дискриминантным множеством, по аналогии с  $A$  – дискриминантным множеством, рассмотренным в [3].

Система (1) допускает приведение посредством мономиальных преобразований коэффициентов таким образом, что в каждом уравнении два коэффициента фиксируются, а остальные остаются переменными. Носители уравнений  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  остаются без изменений. Под носителем полинома понимается множество показателей его мономов с ненулевыми коэффициентами. В каждом множестве  $A^{(i)}$  фиксируем элемент  $\omega^{(i)}$  и формируем матрицу  $\omega := (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$  со столбцами  $\omega^{(i)}$ . Матрица  $\omega$  предполагается невырожденной.

В результате дегомогенизации (приведения) системы (1) получаем *приведенную систему* следующего вида:

$$g_i(y) := y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

здесь  $\Lambda^{(i)} := A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – новые неизвестные,  $x = (x_\lambda^{(i)}) x = (x_\lambda^{(i)})$  – переменные комплексные коэффициенты.

Рассмотрим параметризацию дискриминантного множества  $\nabla'$  системы (2), исследованную в статье [1]. Будем называть его *приведенным дискриминантным множеством*. Обозначим через  $\Lambda$  дизъюнктное объединение множеств  $\Lambda^{(i)}$ ,  $N' := \Lambda$ . Множество коэффициентов системы 2 пробегает векторное пространство  $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^{N'}$ , в котором координаты точек  $x = (x_\lambda)$  индексируются элементами  $\lambda \in \Lambda$ . Множество  $\Lambda$  запишем как матрицу  $\Lambda = (\Lambda^{(1)} | \dots | \Lambda^{(n)})$ .

Определим многозначное алгебраическое отображение  $h: \mathbb{C}P_s^{N'-1} \rightarrow \mathbb{C}_x^{N'}$ , полагая, что

$$x_\lambda^{(i)} = -\frac{s_\lambda^{(i)}}{\langle \varphi_i, s \rangle} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\langle \varphi_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\phi_{k\lambda}}, \lambda \in \Lambda^{(i)}, i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $\varphi_k, \varphi_k$  – строки матриц  $\Phi := \omega^{-1}\Lambda$  и  $\Phi := \Phi - \chi$  соответственно,  $\chi$  – блочная матрица, состоящая из 0 и 1,  $i$ -я строка которой представляет индикатор подмножества  $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda \subset \Lambda$ .

Следуя [1], предполагаем, что дискриминантное множество  $\nabla'$  зависит от всех групп переменных коэффициентов  $x_\lambda$ , то есть оно не факторизуется в виде  $\nabla' \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(i)}}$ , где  $\nabla'$  – алгебраическое подмножество в  $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \dots [i] \dots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$ .

Будем говорить, что система из  $k$  полиномов Лорана существенно зависит от  $k + 1$  переменных, если совокупность всех показателей системы не лежит в  $k$ -мерной плоскости. Назовем это условием (\*).

**Теорема 1** [1]. *Если в системе (2) каждая подсистема удовлетворяет условию (\*) (в частности, если многогранники Ньютона всех уравнений полномерны), то дискриминантное множество  $\nabla'$  параметризуется отображением (3).*

Многогранником Ньютона полинома Лорана называется выпуклая оболочка его носителя в  $\mathbb{R}^n$ . Полномерность многогранников Ньютона означает, что показатели мономов каждого уравнения системы (2) не лежат в гиперплоскости. Выполнение этого условия автоматически влечет за собой существенную зависимость всех подсистем от нужного числа переменных.

Напомним понятие логарифмического отображения Гаусса гиперповерхности:  $\nabla' = \{D(x) = 0\} \subset (\mathbb{C})^{N'}$ . Это отображение  $\gamma: \nabla'_{reg} \rightarrow \mathbb{C}P_s^{N'-1}$ , определенное в координатах  $(x_1, \dots, x_{N'}) \in (\mathbb{C})^{N'}$  формулой

$$(x_1, \dots, x_{N'}) \mapsto (x_1 D'_{x_1}, \dots, x_{N'} D'_{x_{N'}}).$$

Здесь  $\nabla'_{reg}$  – множество регулярных точек  $\nabla'$ .

**Теорема 2** [1]. *Если дискриминантное множество  $\nabla'$  системы (2) является неприводимой гиперповерхностью, зависящей от всех групп переменных, то параметризация (3) является обращением логарифмического отображения Гаусса.*



Заметим, что если матрицы  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  не содержат нулевых элементов, то  $\nabla$  является гиперповерхностью [1].

Исследуем критические точки отображения (3) для системы вида

$$y^{\omega^{(i)}} + x^{(i)}y^\lambda - 1 = 0, i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

в которой количество переменных коэффициентов равно количеству уравнений. Матрицу  $\omega$  из показателей  $\omega^{(i)}$  предполагаем невырожденной, а систему (4) удовлетворяющей условию (\*). Мономиальная замена  $y = t^{\omega^{-1}}$  приводит ее к виду

$$t_i + x^{(i)}t^{\varphi^{(i)}} - 1 = 0, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где множество показателей мономов с переменными коэффициентами есть множество столбцов матрицы  $\Phi$ .

Введем необходимые обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_i[i] &:= (\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(i-1)}, \varphi_i^{(i+1)}, \dots, \varphi_i^{(n)}), \\ s[i] &:= (s_i, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n), \\ \langle \varphi_i[i], s[i] \rangle &:= \sum_{j \neq i} \varphi_i^{(j)} s_j. \end{aligned}$$

Здесь и далее по тексту символ  $[i]$  обозначает пропуск  $i$ -го элемента.

Рассмотрим матрицу

$$M^{(n)}(s) := \begin{pmatrix} \langle \varphi_1[1], s[1] \rangle & -\varphi_1^{(2)} s_1 & \dots & -\varphi_1^{(n)} s_1 \\ -\varphi_2^{(1)} s_2 & \langle \varphi_2[2], s[2] \rangle & \dots & -\varphi_2^{(n)} s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_n^{(1)} s_n & -\varphi_n^{(2)} s_n & \dots & \langle \varphi_n[n], s[n] \rangle \end{pmatrix}. \quad (6)$$

**Лемма 1.** Минор  $M_{j,j}^{(n)}(s)$  матрицы  $M^{(n)}(s)$ , полученный исключением  $j$ -й строки и  $j$ -го столбца, допускает факторизацию:

$$M_{j,j}^{(n)}(s) = s_j l_j(s),$$

здесь  $l_j(s)$  – однородный полином степени  $(n-2)$  переменных  $s_1, \dots, s_n$ .

Доказательство Леммы 1 приведено в статье [2].

Далее для нас представляют интерес однородные полиномы  $l_j(s)$ ,

$j = 1, \dots, n$ , которые определяются формулами:

$$l_j(s) = \frac{1}{s_j} M_{j,j}^{(n)}(s). \quad (7)$$

**Теорема 3.** Множество критических точек параметризации (3) дискриминантной гиперповерхности  $\nabla'$  системы (5) задается в виде:

$$\mathcal{L} = \{l_1(s) = \dots = l_n(s) = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n-1}, \quad (8)$$

где  $l_1(s) = \dots = l_n(s)$  определены формулами (7).

Доказательство Теоремы 3 приведено в статье [2].

**Пример 1.** Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} t_1 + x^{(1)} t_1^3 t_2 t_3 - 1 = 0, \\ t_2 + x^{(2)} t_1 t_2^3 t_3 - 1 = 0, \\ t_3 + x^{(3)} t_1 t_2 t_3^3 - 1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Параметризация Горна-Капранова для системы (9) имеет вид:

$$\begin{aligned}x^{(1)}(s) &= \frac{-s_1}{\langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle} \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle}{\langle \varphi_1, s \rangle} \right)^3 \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle}{\langle \varphi_2, s \rangle} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle}{\langle \varphi_3, s \rangle} \right), \\x^{(2)}(s) &= \frac{-s_2}{\langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle} \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle}{\langle \varphi_1, s \rangle} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle}{\langle \varphi_2, s \rangle} \right)^3 \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle}{\langle \varphi_3, s \rangle} \right), \\x^{(3)}(s) &= \frac{-s_3}{\langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle} \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle}{\langle \varphi_1, s \rangle} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle}{\langle \varphi_2, s \rangle} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle}{\langle \varphi_3, s \rangle} \right)^3,\end{aligned}\tag{10}$$

здесь  $s = (s_1 : s_2 : s_3)$  – однородные координаты в  $\mathbb{C}P^2$ , а

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1, s \rangle &= 3s_1 + s_2 + s_3, & \langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle &= 2s_1 + s_2 + s_3, \\ \langle \varphi_2, s \rangle &= s_1 + 3s_2 + s_3, & \langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle &= s_1 + 2s_2 + s_3, \\ \langle \varphi_3, s \rangle &= s_1 + s_2 + 3s_3, & \langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle &= s_1 + s_2 + 2s_3.\end{aligned}$$

Дискриминантное множество  $\nabla'$ , заданное параметризацией (10), является гиперповерхностью, поскольку матрицы  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  не содержат нулей.

Множество критических точек параметризации (10) представляет собой плоскость  $\mathcal{L} = \{s_1 + s_2 + s_3 = 0\}$ . Множество критических значений  $\mathcal{C}$  – это точка  $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)})$  с координатами

$$x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = -\frac{1}{2^5}.$$

Точка  $x_0$  является особой точкой дискриминантной гиперповерхности  $\nabla'$ , в ней не определено логарифмическое отображение Гаусса.

Значения отображения  $\tau(s): \mathbb{C}P^2 \rightarrow (\mathbb{C})^3$  с координатами

$$\tau_1(s) = \frac{\langle \varphi_1, s \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_1, s \rangle}, \tau_2(s) = \frac{\langle \varphi_2, s \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_2, s \rangle}, \tau_3(s) = \frac{\langle \varphi_3, s \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_3, s \rangle}$$

определяют кратный корень системы (9). Если  $x_0 = x(s)|_{\mathcal{L}}$  – критическое значение параметризации (10), то  $u = \tau(s)|_{\mathcal{L}} = (2, 2, 2)$  – вырожденный кратный корень системы (9).

Вычисления, проведенные в системе компьютерной алгебры SageMath, показывают, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^5 t_1 + t_1^3 t_2 t_3 - 2^5 = 0, \\ 2^5 t_2 + t_1 t_2^3 t_3 - 2^5 = 0, \\ 2^5 t_3 + t_1 t_2 t_3^3 - 2^5 = 0 \end{cases}$$

имеет 20 изолированных корней, из них 16 простых корней и корень  $u = (2, 2, 2)$  кратности 4, который является вырожденным.

### Библиографический список

1. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы  $m$  полиномов Лорана от  $n$  переменных // Изв. РАН. Сер матем. 2012. Т. 76, № 5. С. 29–56. URL: <https://doi.org/10.4213/im6990>
2. Irina A. Antipova, Semyon Yu. Chuvashov. Singularities of Discriminant Loci of Laurent Polynomial System (в печати).
3. Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Cambridge, USA, MA, Birkhäuser Boston Publ., 1994. 523 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1>

# О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## ON CONVERGENCE OF THE MELLIN–BARNES INTEGRAL FOR SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

В.П. Анфиногенова

V.P. Anfinogenova

*Интеграл Меллина–Барнса, приведенная система, определитель, критерий сходимости, система уравнений, матрица показателей, сходимость.*

В современных исследованиях математического анализа значительное внимание уделяется вопросам сходимости интегралов, особенно в контексте преобразований и обобщенных функций. Одним из таких важнейших инструментов является интеграл Меллина–Барнса, который находит применение в различных областях науки и техники. В данной работе рассматривается вопрос сходимости данного интеграла для системы двух тринomialных уравнений. В ходе вычислительного эксперимента было установлено, что для таких систем общего положения всегда существует такое приведение, при котором интеграл Меллина–Барнса имеет непустую область сходимости.

*The Mellin-Barnes integral, the reduced system, the determinant, convergence criterion, the system of equations, the matrix of degrees, convergence.*

In modern research in mathematical analysis, significant attention is given to the convergence of integrals, especially in the context of transformations and generalized functions. One of the most important tools in this area is the Mellin-Barnes integral, which finds applications in various fields of science and engineering. This paper examines the convergence of this integral for a system of two trinomial equations. Through computational experiments, it was established that for such systems in general position, there always exists a transformation under which the Mellin-Barnes integral has a non-empty region of convergence.

В работе Меллина (1921) приводится решение приведенного алгебраического уравнения в виде гипергеометрического интеграла [5], который впоследствии получит название интеграла Меллина–Барнса. Позже (2007, [6]) этот подход и результаты были расширены на случай систем алгебраических уравнений. В случае одного алгебраического уравнения полученный интеграл имеет непустую область сходимости, когда в уравнении в приведенном виде заморожен коэффициент при младшей степени.

В случае системы алгебраических уравнений существует процесс приведения системы вида

$$\sum_{\lambda \in A^{(j)}} a_{\lambda}^{(j)} y^{\lambda} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

с неизвестными  $y = (y_1, \dots, y_n)$  и переменными коэффициентами  $a_{\lambda}^{(j)}$ , где  $A^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n$  – и переменными коэффициентами – фиксированные конечные подмножества целочисленной решетки,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), y^{\lambda} = (y_1^{\lambda_1}, \dots, y_n^{\lambda_n})$



к виду

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_{\lambda}^{(j)} y^{\lambda} - 1 = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (0.2),$$

где матрица из столбцов выделенных показателей  $(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) = \omega$  невырожденная, а  $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}^N$ .

Полученную систему уравнений (0.3) назовем *приведенной*.

Основным инструментом приведения системы (0.1) к виду (0.2) является свойство полиоднородности решения

$$y \left( \dots t^{(i)} \Gamma^{\lambda} a_{\lambda}^{(i)} \dots \right) = \left( l_1^{-1} y_1(\dots a_{\lambda}^{(i)}), \dots, l_n^{-1} y_n(\dots a_{\lambda}^{(i)}) \right),$$

где  $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(n)})$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ .

В случае  $\omega = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_n \end{pmatrix}$  интеграл для монома функции решение будет иметь вид:

$$y^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod_{j=1}^n \prod_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \Gamma(u_{\lambda}^{(j)}) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j} \langle \varphi_j, u \rangle\right)}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j} \langle \varphi_j, u \rangle + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} u_{\lambda}^{(j)} + 1\right)} Q(u) x^{-u} du, \quad (0.3)$$

где  $\varphi_j$  – строки матрицы  $\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)})$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в работе [3] были сформулированы условия на сходимости интеграла (0.3), и не является очевидным, для любой ли системы общего вида можно выбрать приведение, при котором интеграл будет иметь непустую область сходимости.

Критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса зависит только от выбора одного из двух коэффициентов для заморозки, поэтому для нашей задачи для системы из двух тринomialных уравнений

$$\begin{cases} a_1 y_1^{\omega_1^{(1)}} y_2^{\omega_2^{(1)}} + a_2 y_1^{\lambda_1^{(1)}} y_2^{\lambda_2^{(1)}} + a_3 y_1^{\eta_1^{(1)}} y_2^{\eta_2^{(1)}} = 0, \\ a_4 y_1^{\omega_1^{(2)}} y_2^{\omega_2^{(2)}} + a_5 y_1^{\lambda_1^{(2)}} y_2^{\lambda_2^{(2)}} + a_6 y_1^{\eta_1^{(2)}} y_2^{\eta_2^{(2)}} = 0 \end{cases}$$

нужно рассмотреть только 9 приведений.

Рассмотрим пример того, как происходит процесс приведения системы. Пусть нам дана следующая система из двух тринomialных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 y_1 y_2^8 + a_2 y_1^7 y_2^8 + a_3 y_1^8 y_2^9 = 0 \\ a_4 y_1^9 y_2^3 + a_5 y_1^2 y_2^8 + a_6 y_1^4 y_2^7 = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Для нее матрица показателей строится следующим образом: в первую строку выписываем показатели  $y_1$  первого и второго уравнения, отделяя их прямой чертой. Аналогично выписываем показатели для  $y_2$  во вторую строку матрицы. В итоге матрица показателей системы уравнений (0.4) будет иметь следующий вид:

$$\Lambda = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 8 & 9 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 9 & 3 & 8 & 7 \end{array} \right).$$

Для системы вида (0.5) существует 36 различных способов приведения. Приведем один из таких вариантов, поделив первое уравнение из системы на  $y_1^8 y_2^9$ , и второе уравнение этой системы на  $y_1^2 y_2^8$ , получим:

$$\Lambda' = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -7 & -1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

При таком приведении интеграл Меллина–Барнса будет иметь непустую область сходимости, так как определители, составленные из ненулевых столбцов различных блоков  $\Lambda'$ , будут одного и того же знака:

$$\left| \begin{array}{cc} -7 & 7 \\ -1 & -5 \end{array} \right| > 0, \left| \begin{array}{cc} -7 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right| > 0, \left| \begin{array}{cc} -1 & 7 \\ -1 & -5 \end{array} \right| > 0, \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right| > 0.$$

Приведем также вариант, при котором область сходимости будет пустой, поделив в исходной системе уравнений первое уравнение на  $y_1^8 y_2^9$  и второе уравнение этой системы на  $y_1^4 y_2^7$ :

$$\Lambda' = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -7 & -1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

В данном случае определители будут разных знаков:

$$\left| \begin{array}{cc} -7 & 5 \\ -1 & -4 \end{array} \right| > 0, \left| \begin{array}{cc} -7 & -2 \\ -1 & 1 \end{array} \right| < 0, \left| \begin{array}{cc} -1 & 5 \\ -1 & -4 \end{array} \right| > 0, \left| \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{array} \right| < 0.$$

Рассмотрим общий случай системы двух триномиальных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2} + a_{12}y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2} - 1 = 0 \\ a_{21}y_1^{\gamma_1}y_2^{\gamma_2} + a_{22}y_1^{\delta_1}y_2^{\delta_2} - 1 = 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

Здесь без ограничения общности один из мономов в каждом уравнении берем в степени 0.

Исходя из этого, можно сформулировать следующую **гипотезу**: для невырожденной системы двух триномиальных алгебраических уравнений существует приведенный вид (0.5), для которого интеграл Меллина–Барнса будет иметь непустую область сходимости.

### Библиографический список

1. Антипова И.А., Клещикова Е.А., Куликов В.Р. Аналитические продолжения решений систем триномиальных алгебраических уравнений // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2020. Т. 13, вып. 1. С. 114–130.
2. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных // Известия Российской академии наук. Сер.: Математика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 29–56.
3. Куликов В.Р. Критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса для решения системы алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 3. С. 632–640.

4. Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014. С. 215–218.
5. Mellin H.J. Resolution de l'equation algebrigue generale a l'aide de la fonction gamma. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. 1921. V. 172. P. 658–661.
6. Антипова И.А. Обращение многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Математический сборник. 2007. Т. 198, вып. 4. С. 3–20.

# ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## ESTIMATES OF PARAMETERS OF THE GENERALIZED GAMMA DISTRIBUTION

А.М. Волк

A.M. Volk

*Обобщенное гамма-распределение, физические процессы, теория надежности, оценка параметров, метод наибольшего правдоподобия, матрица информации Фишера, асимптотическая эффективность, единственность*

Рассмотрено обобщенное гамма-распределение. Данное распределение обобщает распределения класса гамма и имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, дистанционном зондировании, теории надежности, при описании дисперсного состава частиц дробления. Методом наибольшего правдоподобия получены уравнения для оценки параметров данного распределения. Для полученных оценок найдена матрица информации Фишера, показана ее знакоположительность, что доказывает их состоятельность, асимптотически-эффективность и единственность.

*Generalized Gamma distribution, physical processes, reliability theory, estimation of parameters, best likelihood method, Fisher information matrix, asymptotic efficiency, uniqueness.*

A generalized gamma distribution is considered. This distribution generalizes Gamma class distributions and has wide application in statistical methods of investigation of physical processes, in remote sensing, in reliability theory, in description of disperse composition of crushing particles. Equations for estimation of the parameters of this distribution have been obtained by the method of greatest likelihood method. The Fisher information matrix was found for the obtained estimations, its sign-positivity was shown, which proves their consistency, asymptotically-efficiency and uniqueness.

**О** бобщенное гамма-распределение, имеющее функцию плотности

$$f(x) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right), \quad (1)$$

было рассмотрено в работе [1]. Данное распределение изучалось ранее и было переоткрыто позднее другими исследователями [2].

Гамма-распределения более полутора столетий используются при моделировании реальных процессов и явлений: в теории надежности, при прогнозировании продолжительности лечения и затрат на медицинское обслуживание, в расчетах инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), при обработке изображений и дистанционном зондировании, в качестве моделей распределения доходов [3].

Популярность рассматриваемого распределения обуславливается как гибкостью и многообразием параметров, так и возможностью использовать его в качестве адекватных асимптотических аппроксимаций во многих предельных схемах [4].

Обобщенное гамма-распределение удобно применять при описании дисперсного состава частиц дробления [5; 6]. При этом сложной остается задача статистической оценки его параметров.

Исследованию свойств и применению обобщенного гамма-распределения посвящено большое количество работ [7]. Тем не менее и в настоящее время актуальной остается задача статистической оценки параметров обобщенного гамма-распределения и исследование их свойств.

Рассмотрим обобщенное гамма-распределение некоторой случайной величины  $\xi$ , заданное функцией плотности (1).

Отметим, что  $\theta$  является параметром масштаба, а параметры  $b$  и  $c$  определяют форму распределения.

Выполним переход к безразмерной случайной величине  $\eta = \xi / \theta$  и получим функцию плотности:

$$f(t; \theta, p, c) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{p}{c}\right)} t^{p-1} \exp(-t^c) \quad (2)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины  $\eta$

$$F(t) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^t \tau^{b-1} \exp(-\tau^c) d\tau \quad (3)$$

сводится к неполной гамма-функции [8].

Если  $c > 0$ , то

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right), \quad (4)$$

а при  $c < 0$

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right). \quad (5)$$

Выполним статистическую оценку параметров распределения (1) методом наибольшего правдоподобия [9].

Пусть имеется некоторая выборка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  генеральной совокупности случайной величины  $x$ , имеющей функцию плотности распределения (1). Рассмотрим функцию правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}. \quad (6)$$

Прологарифмируем данную функцию

$$L_n = \ln L = n \left[ \ln \frac{|c|}{\theta} - \ln \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \right]$$

и найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial L_n}{\partial \theta} = -\frac{nb}{\theta} + \frac{c}{\theta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c; \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b} = -\frac{n}{c} \psi\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial c} = \frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}. \quad (9)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения статистических оценок параметров распределения:

$$b - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c = 0; \quad (10)$$

$$\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{1}{c} + \frac{b}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнений (10)–(12) дает статистическую оценку параметров исследуемого распределения (1).

Условия существования и свойства статистических оценок определяются выполнением условий регулярности [10], основным из которых является знакоположительность матрицы информации Фишера для параметров  $b$  и  $c$ :

$$I_n(b, c) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Вычислим производные второго порядка прологарифмированной функции правдоподобия  $L_n$ , обозначим  $b/c = k$  и получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} &= -\frac{n}{c^2} \psi' \left( \frac{b}{c} \right) = -\frac{n}{c^2} \psi'(k); \\ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} &= \frac{n}{c^2} \psi \left( \frac{b}{c} \right) + \frac{nb}{c^3} \psi' \left( \frac{b}{c} \right) = \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)]; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial b} &= \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} = \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)]; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} &= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nb}{c^3} \psi \left( \frac{b}{c} \right) - \frac{nb^2}{c^4} \psi' \left( \frac{b}{c} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} = \\ &= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nk}{c^2} \psi(k) - \frac{nk^2}{c^2} \psi'(k) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta}.\end{aligned}$$

Математическое ожидание величин, независящих от переменных  $x_i$ , равно этим величинам. Оценки максимального правдоподобия удовлетворяют условиям регулярности. При этих условиях элементы матрицы информации Фишера равны для независимых случайных величин.

$$\begin{aligned}E \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\theta} \right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} \right) &= nE \left( \left( \frac{x}{\theta} \right)^c \ln^2 \frac{x}{\theta} \right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma \left( \frac{b}{c} \right)} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{\theta} \right)^c \ln^2 \left( \frac{x}{\theta} \right) \left( \frac{x}{\theta} \right)^{p-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\theta} \right)^c \right\} d \left( \frac{x}{\theta} \right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{c+b-1} \ln^2 t \exp \{ -t^c \} dt = |t^c = z| = \frac{n}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} z^k \ln^2 z \exp(-z) dz = \\ &= \frac{n}{\Gamma(k)} \frac{\partial^2 \Gamma(k+1)}{\partial b^2} = \frac{n\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k)} = \frac{nk\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k+1)} = \frac{nk}{c^2} [\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)].\end{aligned}$$

Находим матрицу информации Фишера

$$I_n(k, c) = \frac{n}{c^2} \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $D = 1 + 2k\psi(k) + k^2\psi'(k) + k[\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]$

Рассмотрим матрицу

$$I(k) = \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Логарифмическая производная  $\psi(k)$  гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна на интервале  $(0, +\infty)$  и принимает значения в пределах  $(-\infty, +\infty)$  [10]. Поэтому  $k\psi'(k)$  принимает положительные значения на интервале  $(0; +\infty)$ .

Определитель матрицы (18) в общем виде будет:

$$\det I(k) = \psi'(k)D - [\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]^2. \quad (16)$$

График значений определителя матрицы (16), полученный численными методами, представлен на рисунке. Определитель принимает положительные значения при  $k > 0$ .

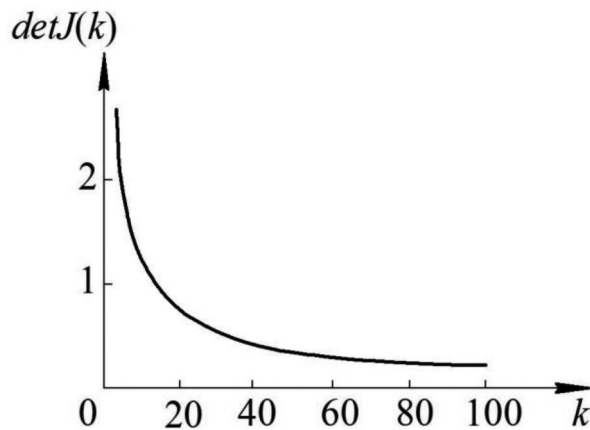


График значений определителя матрицы (16)

Матрица (15) будет знакоположительной.

Матрица информации Фишера  $I_n(k, c)$  (14) отличается от матрицы (15) на положительный множитель и также будет знакоположительной.

Решение уравнений (10)–(12) дает статистическую оценку параметров распределения (1), для которых будут выполняться условия регулярности.

Данные оценки являются состоятельными, асимптотически-несмещенными, эффективными, асимптотически-нормальными и ассимптотически-эффективными [12]. При условии эффективности оценок система (10)–(12) имеет единственное решение [11].

**Заключение.** Исследованное обобщенное гамма-распределение имеет широкую область применения в силу своей универсальности. Но его использование ограничивалось отсутствием способов достоверной оценки параметров на основании статистических данных.

Предложенный метод наибольшего правдоподобия, полученные уравнения (10)–(12), знакоположительность матрицы информации Фишера позволяют получить состоятельные, ассимптотически-эффективные статистические оценки параметров распределения, что доказывают их единственность.



## Библиографический список

1. Stacy E.W. A generalization of the gamma distribution // *Ann. Math. Statistics*. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
2. Кудрявцев А.А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // *Информатика и ее применения*. 2019. Т. 13, вып. 4. С. 76–80.
3. Королев В.Ю., Крылов В.А., Кузьмин В.Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // *Информатика и ее применения*. 2011. Т. 5, вып. 1. С. 31–38.
4. Закс Л.М., Королев В.Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // *Информатика и ее применения*. 2013. Т. 7, вып. 1. С. 105–115.
5. Коузов П.А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1987.
6. Левданский Э.И., Волк А.М., Плехов И.М. О законе распределения частиц при дроблении // *ТОХТ*. 1986. № 5. С. 672–677.
7. Джонсон Н.Л., Коц С, Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения: в 2 ч. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. Ч. 1.
8. Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.
9. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Мир, 1975.
10. Леман Э. Теория точечного оценивания: пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.

# ПРОБЛЕМА ХЬЮЗА В КОНЕЧНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## HUGHES PROBLEM IN FINITE PROJECTIVE GEOMETRY

Е.Б. Дураков, О.В. Кравцова,  
Н.Д. Подуфалов, И.В. Шевелёва

E.B. Durakov, O.V. Kravtsova,  
N.D. Podufalov, I.V. Sheveleva

*Полуполевая проективная плоскость, проблема Хьюза, группа автоморфизмов, теорема Томпсона.*

Хорошо известна гипотеза Д.Р. Хьюза (1959): группа автоморфизмов конечной недезарговой полуполековой плоскости разрешима. К настоящему моменту эта гипотеза подтверждена только для специальных классов полуполековых плоскостей рядом исследователей. Представлен краткий обзор результатов вместе с перспективным подходом к решению проблемы Хьюза.

*Semifield projective plane, Hughes problem, autotopism group, Thompson's theorem.*

It is well-known hypothesis (D. R. Hughes, 1959) that the automorphism group of any finite non-Desarguesian semifield plane is solvable. Now this hypothesis is confirmed only for special classes of semifield planes by the number of authors. We present the brief review of results together with the perspective approach to solving Hughes problem.

### *Памяти Бориса Константиновича Дуракова*

**П**онятие проективной плоскости сформировалось еще в XIX веке. Известно, что дезаргова проективная плоскость координатизируется телом, а при условии конечности – даже полем. Ее группа коллинеаций является неразрешимой в силу основной теоремы проективной геометрии.

Проективной плоскостью  $\pi$  называют тройку  $\langle \mathcal{P}, \mathcal{L}, I \rangle$ , где  $\mathcal{P}$  – множество точек,  $\mathcal{L}$  – множество прямых,  $I$  – отношение инцидентности между точками и прямыми условиями:

- 1) любые две различные точки инцидентны с единственной прямой;
- 2) любые две различные прямые инцидентны с единственной точкой;
- 3) существует невырожденный четырехугольник, то есть четыре различные точки такие, что никакие три из них неинцидентны с одной прямой.

Проективную плоскость  $\pi$  считают конечной, если хотя бы одна ее прямая (тогда и любая) инцидентна конечному числу  $N + 1$  точек. Число  $N$  называют *порядком* плоскости  $\pi$ . Изоморфизм проективной плоскости  $\pi$  на себя называют *коллинеацией*. Все коллинеации плоскости образуют группу  $Aut \pi$ .

Для конечных проективных плоскостей обычно используют определенную координатизацию. Схема координатизации подробно приведена в [1] (метод Хьюза) и [2] (метод Холла). Связь геометрических свойств плоскости трансляций и алгебраических свойств координатирующего квазиполя отражена в монографии [1]. Для координатизации недезарговых проективных плоскостей

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20117).

трансляций с начала прошлого века применяют понятия *полуполя* (отказываясь в понятии поля от коммутативности и ассоциативности) и *квазиполя* (ослабляется также двусторонняя дистрибутивность до односторонней), см. работы Л. Диксона, О. Веблена, Дж. Веддерберна 1905–1907 гг.

Если  $\pi$  – дезаргова проективная плоскость, то она может быть определена с помощью трехмерного линейного пространства  $V$  над телом  $K$  при помощи однородных координат (подробно см. [1]). Группа коллинеаций плоскости  $\pi = \mathcal{P}(V)$  описана **основной теоремой проективной геометрии** для случая геометрической размерности два:

*Группа всех автоморфизмов проективной плоскости  $\mathcal{P}(V)$  индуцируется группой всех невырожденных полулинейных преобразований пространства  $V$ .*

Отсюда  $\text{Aut } \pi \cong PGL(V)$  и если  $K \cong GF(q)$ , то  $\text{Aut } \pi \cong PGL(3, q)$ . Поскольку  $PSL(3, q)$  – простая неабелева группа, то  $\text{Aut } \pi$  – неразрешимая группа, группа коллинеаций конечной дезарговой плоскости неразрешима.

Центральной в настоящем обзоре является записанная в 1959 г. гипотеза Дэниела Хьюза [3] о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевогой плоскости. В гипотезе Хьюза условие «полуполевогой» на плоскость существенно. Это показывают найденные конечные плоскости трансляций  $\pi$ , допускающие неразрешимые линейные группы степени 2 (Бартолоне С., Остром Т., 1986; Кантор У., 1982; Мурхауз Э., 1989; Фоулсер Д., Джонсон Н., Остром Т., 1983), а также  $PSL(2, 7)$  при  $|\pi| = 16$  (Джонсон Н., Остром Т., 1979) и  $SL(2, 5)$  при  $|\pi| = 81$  (Джа В., Джонсон Н., Принс А., 2005), степени 3 (Демпволф У., 1985; Хо С., Гонсалвес А., 1987; Мурхауз Э., 1987; Билиотти М., Монтинаро А., 2008) и другие.

Ситуация меняется, если мы рассматриваем конечную недезарговую полуполевогой плоскость. Все примеры конечных недезарговых полуполевогой плоскостей, построенных к середине 1950-х гг., имели разрешимую группу коллинеаций. В 1959 г. Д. Хьюз в своем докладе перечислил некоторые известные классы конечных проективных плоскостей и отметил существование плоскостей трансляций с неразрешимой группой коллинеаций – плоскостей Холла. Он выделил также три класса полуполевогой плоскостей, группа коллинеаций которых разрешима. Это плоскости, координатизируемые скрученными полями (А. Алберт, 1952–1959), полунуклеарными полу полями (semi-nuclear division rings, Д. Хьюз, Э. Клейнфилд, 1960), коммутативными полу полями Диксона (А. Алберт, 1952). Подчеркнув «фрагментарность знаний» о некоторых других конечных полу полях и полуполевогой плоскостях, Д. Хьюз отметил, тем не менее, разрешимость группы коллинеаций и предположил, что это свойство может быть присуще всем недезарговым полуполевогой плоскостям. Учитывая перечисленные результаты, он выдвинул *гипотезу о разрешимости группы автоморфизмов конечного (неассоциативного) полу поля* (эквивалентно, группы коллинеаций недезарговой полуполевогой проективной плоскости).

*Автоморфизмом полу поля  $\langle Q, +, \cdot \rangle$  называется тройка  $(\alpha, \beta, \gamma)$  автоморфизмов аддитивной группы  $\langle Q, + \rangle$  с условием  $x^\alpha \cdot y^\beta = (x \cdot y)^\gamma$  для всех  $x, y \in Q$ . Автоморфизмом полуполевогой плоскости называется коллинеация, стабилизирующая треугольник, одной стороной которого является трансляционная прямая, одной*

вершиной – трансляционная точка (подробно в [1]). Группа автотопизмов полуполевого пространства (для фиксированного автотопного треугольника) изоморфна группе автотопизмов координатизирующего полуполя. Проблема разрешимости  $\text{Aut } \pi$  редуцируется к исследованию разрешимости группы автотопизмов:

*Группа коллинеаций конечной недезарговой полуполевого пространства разрешима тогда и только тогда, когда разрешима группа автотопизмов.*

Возможность дальнейшей редукции предоставляет особая роль *бэровских коллинеаций*, фиксирующих поточечно подпространство порядка  $\sqrt{|\pi|}$  (бэровскую подпространство). В силу теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости всех групп нечетного порядка для решения проблемы Хьюза достаточно рассматривать лишь полуполевого пространства, в группе автотопизмов которых содержатся бэровские инволюции.

Перечислим некоторые результаты, полученные в 1960–2000 гг. и подтверждающие гипотезу Хьюза для отдельных классов полуполевого пространства. М. Ганли (1974), Д. Хьюз и М. Каллахер (1980) изучили полуполя размерности два над ядрами:

**Теорема 1.** Пусть  $Q$  – полуполевого пространства порядка  $2^s$ . Если  $Q$  имеет размерность два над одним из своих ядер, то его группа автотопизмов разрешима.

**Теорема 2.** Пусть  $Q$  – полуполевого пространства порядка  $p^s$  ( $p$  – простое). Если  $Q$  имеет размерность два над двумя из своих ядер, то его группа автотопизмов разрешима.

М. Ганли и В. Джа (1986) доказали разрешимость  $\text{Aut } \pi$  при условии транзитивности подгруппы коллинеаций:

**Теорема 3.** Пусть  $\pi$  – конечная плоскость трансляций, которая допускает группу коллинеаций, фиксирующую точку  $(\infty)$  и действующую дважды транзитивно на оставшихся точках прямой  $[\infty]$ . Тогда  $\pi$  – полуполевого пространства и ее группа коллинеаций разрешима.

Доказана разрешимость группы автотопизмов для конечных коммутативных полуполей Диксона (Р. Сандлер, 1962, и др.), для обобщенных плоскостей Холла нечетного порядка (Н. Джонсон, 1981), для  $p$  – примитивных полуполевого пространства порядка  $p^4$  (М. Кордеро, 1991), восьми полуполевого пространства Хуанга–Джонсона порядка 64 (Х. Хуанг, Н. Джонсон, 1990). Отметим также работы Д. Кнута (1965), Т. Острома (1979), М. Билиотти, Н. Джонсона, В. Джа и Д. Меничетти (1989). Эти результаты выделяют классы полуполевого пространства при ограничениях на их порядок или на коллинеации, для которых подтверждается гипотеза Хьюза.

Актуальность проблемы Хьюза и интерес к разработке новых подходов к ее решению подчеркивает записанный в 1990 г. в Коуровской тетради вопрос 11.76 Н.Д. Подуфалова. Вместе с ним это направление в 1990–2000 гг. активно разрабатывала группа красноярских математиков (Б.К. Дураков, И. В. Бусаркина (Шевелева), Е.Б. Дураков, О.В. Кравцова), см. обзор [4]. Как указано в обзоре, разрешимость группы коллинеаций недезарговой полуполевого пространства  $\pi$  была доказана авторами при выполнении одного из следующих условий:

- 1)  $\pi$  имеет ранг 2 или 4 над полем  $GF(q)$  четного порядка  $q = 2^n$ ;
- 2)  $\pi$  имеет четный порядок  $q^2$  и правое ядро порядка  $q$ , где  $q = 2^n$ ;

3)  $\pi$  является примитивной полуполевыми плоскостью ( $p > 2$  – простое) и удовлетворяет определенным условиям на регулярное множество.

Активное использование вычислительной техники приводит к публикации работ, перечисляющих полуполевыми плоскости фиксированных малых порядков вместе с их группами автотопизмов. Отметим работы о полуполях и полуполевыми плоскостях порядков 64, 81, 243 И. Руа и других (2004–2012).

Обсудим возможный путь решения проблемы Хьюза. Программа впервые была представлена Б.К. Дураковым и О.В. Кравцовой на Международной XI школе-конференции по теории групп (Красноярск, 2016).

«В предположении неразрешимости полной группы коллинеаций простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Непосредственный перебор всех вариантов из списка простых неабелевых групп приводит к очень большому количеству исследований. Предлагается проверить существование подгруппы полной группы коллинеаций, изоморфной знакопеременной группе  $A_5$  (подгруппе значительного количества простых неабелевых групп)».

Принципиально важным представляется сначала исключение случаев, когда группа автотопизмов содержит подгруппу, являющуюся простой группой. Полное описание минимальных конечных простых групп получено Дж. Томпсоном в 1968 г. [5]:

**Теорема 4.** Каждая минимальная простая группа изоморфна одной из следующих минимальных простых групп:

- (a)  $PSL(2, 2^p)$ ,  $p$  любое простое;
- (b)  $PSL(2, 3^p)$ ,  $p$  любое нечетное простое;
- (c)  $PSL(2, p)$ ,  $p$  любое простое более 3,  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;
- (d)  $Sz(2^p)$ ,  $p$  любое нечетное простое;
- (e)  $PSL(3, 3)$ .

С учетом классификации минимальных конечных простых групп интерес привлекает к себе прежде всего ситуация, когда группа автотопизмов имеет подгруппу или сечение, изоморфное знакопеременной группе  $A_5$  или диэдральной группе  $D_8$  порядка 8, поскольку они являются подгруппами значительного количества простых неабелевых групп. Использование метода исследований с применением регулярных множеств (spreadsets) представляет реальный путь исключения таких групп из списка возможных подгрупп автотопизмов.

Перечислим основные результаты, полученные в рамках описанного подхода. Пусть  $\pi$  – недезаргова полуполевыми проективная плоскость порядка  $p^N$ , где  $p$  – простое число и  $N = 2^m \cdot s$ , где  $s$  нечетно.

1. При  $p > 2$  в группе автотопизмов плоскости  $\pi$  нет подгрупп, изоморфных знакопеременной группе  $A_5$ . Если  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , причем  $m \leq 1$  или  $N = 4$ , то нет и подгрупп, изоморфных  $SL(2, 5)$ .

2. При  $p > 2$  в группе автотопизмов плоскости  $\pi$  нет подгрупп, изоморфных группе Судзуки  $Sz(2^n)$  для всех  $n > m$ .

3. При  $p \equiv 1 \pmod{4}$  в группе автотопизмов плоскости  $\pi$  нет диэдральной группы порядка 8 без центральных коллинеаций.



4. При  $p \not\equiv -1 \pmod{4}$  в группе автоморфизмов плоскости  $\pi$  нет подгрупп, изоморфных  $PSL(2, q)$ , где  $q \equiv 1 \pmod{2^{m+2}}$ .

Первый и наиболее значимый результат о знакопеременной группе  $A_5$  был получен на основе совместных результатов Б.К. Дуракова и О.В. Кравцовой [6]. Для недезарговой полуполевого плоскости нечетного порядка вместе с  $A_5$  из числа возможных подгрупп автоморфизмов исключается бесконечная серия простых неабелевых групп, содержащих  $A_5$  (симметрические, знакопеременные, некоторые линейные группы).

В случае  $p \equiv 1 \pmod{4}$  из результатов Д. Голдшмидта о сильнозамкнутых подгруппах следует, что группа автоморфизмов не содержит простых неабелевых подгрупп, за исключением, возможно, следующих:  $PSL(2, 2^n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $PSU(3, 2^n)$ ,  $PSU(3, 2^n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $n > 1$  нечетно,  $PSL(2, q)$ ,  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ,  $J_1$  или  ${}^2G_2(3^n)$ ,  $n > 1$  нечетно.

Доказательство перечисленных результатов основано на построении матричного представления регулярного множества полуполевого плоскости при ограничениях на подгруппу автоморфизмов. Этот метод позволяет также [7] пополнить перечень полуполевого плоскостей, для которых справедлива гипотеза Хьюза:

**Теорема 5.** Пусть  $\pi$  – полуполевого плоскости порядка  $4^n$ , где  $n > 2$  – простое. Если все бэровские подплоскости плоскости  $\pi$  недезарговы, то группа коллинеаций  $Aut \pi$  разрешима.

Программа исследований по проблеме Хьюза на ближайшее время включает изучение условий существования диэдральных и кватернионных подгрупп группы автоморфизмов при условии  $p \not\equiv 1 \pmod{4}$ , а также разработку техники исследования фактор-групп в группе автоморфизмов.

## Библиографический список

1. Hughes D.R., Piper F.C. Projective planes. Springer–Verlag New–York Inc., 1973, 292 p.
2. Холл М. Теория групп. М.: Госиноиздат, 1962, 468 с.
3. Hughes D.R. Review of some results in collineation groups // Proc. Sympos. Pure Math., American Mathematical Society, Providence, R.I., v. 1 (1959), p. 42–55.
4. Podufalov N.D., Durakov B.K., Busarkina I.V., Kravtsova O.V., Durakov E.B. Some results on finite projective planes // Journal of Mathematical Sciences, vol. 102 (2000), no. 3, p. 4032–4038.
5. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc., vol. 74 (1968), p. 383–437.
6. Кравцова О.В., Дураков Б.К. Полуполевого плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автоморфизмов, изоморфную  $A_5$  // Сиб. матем. журн. Т. 59 (2018), № 2. С. 396–411.
7. Kravtsova O.V. 2-elements in an autotopism group of a semifield projective plane // Известия Иркутского государственного университета. Сер.: Математика. Т. 39 (2022). С. 96–110.

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ МНОГОЧЛЕНОВ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ

## COEFFICIENTS FOR SOME TYPES OF POLYNOMIALS WITH MULTIPLE ROOTS

В.С. Кобычева, Е.Н. Михалкин

V.S. Kobychева, E.N. Mikhalkin

*Дискриминант, дискриминантное множество, приведенный многочлен, многочлен с кратными корнями.*

В статье получены параметризации дискриминантных множеств для редуцированных тетраномического, пентаномического и гексаномического многочленов. Результаты имеют фундаментальный характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях теории классических дискриминантов и решении алгебраических уравнений.

*Discriminant, discriminant set, reduced polynomial, polynomial with multiple roots.*

In the article, parameterizations of discriminant sets for reduced tetronomial, pentonomial and hexanomial polynomials are obtained. The results are of fundamental nature and can be used in further studies of the theory of classical discriminants and solving algebraic equations.

**Д**искриминантом многочлена степени  $n$  называется неприводимый полином

$$f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n$$

$$\Delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

обращающийся в ноль тогда и только тогда, когда  $f$  имеет кратные корни. Существует несколько способов вычисления дискриминанта полинома. Наиболее распространенные из них связаны с использованием матрицы Сильвестра или определителя Вандермонда [1], [2], [3].

Иногда бывает полезно знать зависимости коэффициентов многочлена от его кратного корня, значение которого выбирается произвольно. Приведем примеры параметризации дискриминантных множеств редуцированных тетраномического, пентаномического и гексаномического многочленов:

$$f_{(a,b)}(t) = t^n + at^m + bt^k \tag{1}$$

где  $n > m > k > 0$ ,

$$f_{(a,b,c)}(t) = t^n + at^m + bt^k + ct^l \tag{2}$$

где  $n > m > k > l > 0$  и

$$f_{(a,b,c,d)}(t) = t^n + at^m + bt^k + ct^l + dt^s + 1, n > m > k > l > s > 0, \tag{3}$$

на основе идеи, сформулированной в [4].

**Утверждение 1.** Заданное  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  является кратным корнем полинома (1) при следующих условиях для коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{-\binom{n}{m}t_0^m}{\binom{n}{k}t_0^k}, \quad b = \frac{m - (n-m)t_0^n}{(k-m)t_0^k}. \tag{4}$$

**Утверждение 2.** Заданный корень  $t_0 \in C \setminus \{0\}$  является корнем кратности не менее 3-х полинома (2) при условиях для его коэффициентов  $a, b$  и  $c$ :

$$a = \frac{-kl - (n-k)(n-l)t_0^n}{(m-k)(m-l)t_0^m}, \quad b = \frac{-ml - (n-m)(n-l)t_0^n}{(k-m)(k-l)t_0^k},$$

$$c = \frac{-km - (n-k)(n-m)t_0^n}{(l-k)(l-m)t_0^l}.$$

**Утверждение 3.** Заданное значение  $t_0 \in C \setminus \{0\}$  является корнем кратности не менее 4-х полинома (3) при следующих условиях для коэффициентов  $a, b$  и  $c$ :

$$a = \frac{lks - (n-k)(n-l)(n-s)t_0^n}{(m-k)(m-l)(m-s)t_0^m}, \quad b = \frac{lms - (n-s)(n-m)(n-l)t_0^n}{(k-m)(k-s)(k-l)t_0^k},$$

$$c = \frac{kms - (n-m)(n-k)(n-s)t_0^n}{(l-m)(l-k)(l-s)t_0^l}, \quad d = \frac{mkl - (n-m)(n-k)(n-l)t_0^n}{(s-m)(s-k)(s-l)t_0^s}.$$

Доказательства сформулированных утверждений можно найти в работе [5].

Идея доказательства следующая. Действительно, если  $t_0 \in C \setminus \{0\}$  – кратный корень полинома (1), то он же является корнем и его производной, поэтому формулы для коэффициентов можно получить из условия

$$f_{(a,b)}(t) = f'_{(a,b)}(t) = 0. \quad (5)$$

Аналогично, формулы утверждения 2 получены в результате решения уравнений  $f_{(a,b,c)}(t) = f'_{(a,b,c)}(t) = f''_{(a,b,c)}(t) = 0$ , которые задают условие наличия у полинома (2) корня кратности не меньше 3-х, а формулы утверждения 3 получены из решения уравнений  $f_{(a,b,c,d)}(t) = f'_{(a,b,c,d)}(t) = f''_{(a,b,c,d)}(t) = f'''_{(a,b,c,d)}(t) = 0$ .

**Замечание 1.** Полином (1) имеет корень кратности не менее 3-х при тех же полученных ранее значениях коэффициентов  $a$  и  $b$  (4), однако, в отличие от первоначальной ситуации,  $t_0$  уже не является произвольным, так как выражается через показатели степеней в связи с дополнительным к (5) условием  $f'''_{(a,b)}(t) = 0$ :

$$t_0 = \sqrt[n]{\frac{km}{(n-m)(k-n)}}, \quad \text{при нечетных } n,$$

$$t_0 = \pm \sqrt[n]{\frac{km}{(n-m)(k-n)}}, \quad \text{при четных } n.$$

Причем в последнем случае  $t_0$  является комплексным числом с ненулевой мнимой частью, так как множитель  $(k-n)$  даст отрицательное значение подкоренному выражению. Тогда сопряженным корням  $t_{0,1,2}$  при нечетных значениях  $n$  или  $k$  будут соответствовать два разных полинома вида (1).

**Замечание 2.** Полином (2) имеет кратный корень  $t_0 \in C \setminus \{0\}$  при следующих условиях для коэффициентов:

$$a = \frac{k + (k-n)t_0^n + c(k-l)t_0^l}{(m-k)t_0^n}, \quad b = \frac{m + (m-n)t_0^n + c(m-l)t_0^l}{(k-m)t_0^k},$$

где  $c \in C$ , полученных из уравнений  $f_{(a,b,c)}(t) = f'_{(a,b,c)}(t) = 0$ . Здесь уже каждому произвольно взятому  $t_0$  соответствует бесконечно много многочленов вида (2) в силу



того, что коэффициент  $\tilde{h}$  может принимать любые значения. Поэтому случаи, рассмотренные в замечаниях 1 и 2, особого интереса не представляют.

Вероятно, верна следующая

**Гипотеза.** Многочлен

$$f_{(a_1, a_2, \dots, a_p)}(t) = 1 + a_1 t^{l_1} + a_2 t^{l_2} + \dots + a_p t^{l_p} + t^{l_{p+1}},$$

где  $l_1 < l_2 < \dots < l_p < l_{p+1}$ , имеет корень  $t \in \mathbb{C}$  кратности не менее  $p$  при следующих значениях коэффициентов:

$$a_s = \frac{(-1)^p \prod_{\mu=1}^p \prod_{s \neq \mu} l_\mu - \prod_{\mu=1}^p \prod_{s \neq \mu} (l_s - l_\mu) t_0^{l_{p+1}}}{\prod_{\mu=1}^p \prod_{s \neq \mu} (l_s - l_\mu) t_0^{l_s}},$$

$s = 1, 2, \dots, p$ .

Например, для  $s = 1$  и  $s = p$  имеем:

$$a_1 = \frac{(-1)^p \prod_{\mu=2}^p l_\mu - \prod_{\mu=2}^p (l_{p+1} - l_\mu) t_0^{l_{p+1}}}{\prod_{\mu=2}^p (l_1 - l_\mu) t_0^{l_1}}, \quad a_p = \frac{(-1)^p \prod_{\mu=1}^{p-1} l_\mu - \prod_{\mu=1}^{p-1} (l_{p+1} - l_\mu) t_0^{l_{p+1}}}{\prod_{\mu=1}^{p-1} (l_p - l_\mu) t_0^{l_p}}.$$

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2024-1429).

### Библиографический список

1. Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkh"auser: Boston. 1994. 523 p.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов/ М.: Лань, 2024. 432 с.
3. Прасолов В.В. Многочлены: монография. 3-е изд., исправленное. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. 336 с.
4. Осипов Н.Н. Теоретико числовые аспекты в некоторых задачах алгебраической геометрии // По материалам семинара «Многомерный комплексный анализ и алгебраическая геометрия» от 25 мая 2023 / Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики.
5. Кобычева В.С. О дискриминантах многочленов и их многогранниках Ньютона: магистерская диссертация. Красноярск, СФУ, 2024. 44 с.

# СИСТЕМА MAGMA КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ

## MAGMA SYSTEM AS A TOOL FOR FUNDAMENTAL AND APPLIED RESEARCH IN MATHEMATICS

С.В. Ковальчук

S.V. Kovalchuk

*Система Magma, современный, актуальность, возможности, точность вычислений, применение Magma, научные исследования, математическая среда.*

В статье рассматриваются особенности использования компьютерной системы Magma при решении задач алгебры, в частности при работе с кватернионами. Актуальность использования данного ПО заключается в его широких возможностях для выполнения сложных вычислений и алгебраических манипуляций, что делает его особенно полезным в исследованиях и учебном процессе.

*Magma system, modern, relevance, capabilities, computational accuracy, Magma application, scientific research, mathematical environment.*

The article deals with the peculiarities of using Magma computer system in solving algebra problems, in particular, in working with quaternions. The relevance of using this software lies in its wide possibilities for performing complex calculations and algebraic manipulations, which makes it especially useful in research and teaching process.

**А**ктуальность прикладных компьютерных систем обусловлена их способностью эффективно справляться с вычислительными задачами, требующими значительных ресурсов. Такие системы позволяют автоматизировать процессы анализа и упрощения сложных алгебраических выражений. Современные программные комплексы предоставляют возможности для работы с абстрактными математическими структурами, что делает их незаменимыми инструментами для научных и инженерных исследований.

Одной из таких систем является Magma – мощный программный пакет, играющий ключевую роль в решении сложных задач из различных областей математики, таких как теория чисел, алгебраическая геометрия и комбинаторика. Magma создает математически строгую среду для вычислений с теоретико-числовыми и комбинаторными структурами, что позволяет решать задачи как теоретического, так и прикладного характера. Особое значение имеет использование Magma для работы с кватернионами и для решения задач линейной алгебры, где точность и вычислительные возможности системы оказываются особенно востребованными [1]. В этой связи Magma становится незаменимым инструментом:

1. Специализированный тип кватернионов.

Magma предоставляет специальный тип данных для кватернионов, который позволяет эффективно и оптимизированно выполнять все основные операции с ними, включая умножение, инверсию и конъюгацию.

## 2. Обширная библиотека функций.

Пакет предлагает целый набор инструментов и алгоритмов, разработанных специально для арифметики. Таким образом, появляется больше возможностей для работы с выражениями и операциями.

## 3. Высокая точность вычислений.

В основе Magma лежат передовые методы точной арифметики, что обеспечивает надежные и точные результаты даже при выполнении сложных расчетов. Благодаря этим возможностям Magma выделяется среди других систем компьютерной алгебры, предоставляя средства для работы с широким классом математических структур и решения задач высокой вычислительной сложности. [2]

## 4. Символические манипуляции.

Magma поддерживает символические вычисления, что дает возможность исследовать алгебраические свойства кватернионов, выявлять различные идентичности и проводить упрощение выражений.

## 5. Интеграция с другими алгебраическими структурами.

Magma позволяет легко объединять кватернионы с такими структурами, как матрицы, полиномы и поля чисел, что открывает новые пути для решения задач, связанных со смешанными алгебраическими структурами.

Рассмотрим пример нахождения собственных значений и собственных векторов для матрицы  $M$  размерностью 3 на 3, элементы которой – кватернионы. Эта задача сложна, так как стандартные методы линейной алгебры не всегда прямо применимы к кватернионным матрицам из-за особенностей их умножения и некоммутативности.

Итак, у нас есть матрица  $M=(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 q_8 q_9)$ , где  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9$  – это кватернионы.

Решение в Magma:

```
Q := QuaternionAlgebra(Rationals());
q1 := Q!<1, 2, 3, 4>;
q2 := Q!<0, 1, 1, 0>;
q3 := Q!<3, 0, 2, 1>;
q4 := Q!<1, 3, 1, 1>;
q5 := Q!<2, 0, 0, 2>;
q6 := Q!<1, 2, 1, 0>;
q7 := Q!<4, 1, 1, 3>;
q8 := Q!<0, 2, 3, 1>;
q9 := Q!<1, 0, 0, 1>;
M := Matrix(Q, 3, 3, [q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7, q8, q9]);
Eigensystem(M);
```

Пояснение:

1. Определяем кватернионное поле и описываем элементы матрицы  $M$  как кватернионы.

2. Функция `Eigensystem(M)` возвращает два объекта: список собственных значений и матрицу собственных векторов. Это работает аналогично традиционной линейной алгебре, но адаптировано для работы с кватернионами.

В результате работы программы мы получаем:

Собственные значения:

$$\lambda_1=2+i+2j+k,$$

$$\lambda_2=1+3i+j,$$

$$\lambda_3=4+2i+3j+k$$

Собственные векторы:

$$v_1=(1+i; 0; 1+j),$$

$$v_2=(2+j; 1+i; 0),$$

$$v_3=(1; 1+k; 3i+j)$$

Этот пример демонстрирует, как Magma справляется с вычислением собственных значений и собственных векторов для матрицы, состоящей из кватернионов – задача, которая сложна для традиционных численных методов. Специализированные алгоритмы Magma позволяют работать с кватернионными структурами эффективно, обеспечивая точные результаты даже для сложных матричных операций.

Программный комплекс Magma предоставляет уникальную среду для работы с абстрактными математическими объектами, что делает ее полезной в различных прикладных и научных исследованиях [3]. Система оснащена высокоэффективными алгоритмами для работы с кватернионами, матрицами, полиномами и другими фундаментальными структурами, что позволяет решать задачи, недоступные традиционным методам.

Особенно значимым является применение Magma в сочетании с суперкомпьютерными вычислениями. Это позволяет выполнять сложные символьные и численные операции в более сжатые сроки, обрабатывая гигантские объемы данных. В результате открываются новые возможности для решения задач в области теории чисел, алгебраической геометрии и комбинаторики, которые требуют как высокой точности вычислений, так и огромных вычислительных ресурсов.

## Библиографический список

1. Bosma, W., Cannon, J., & Playoust, C. The Magma algebra system. I. The user language, 1997.
2. Потемкин А.К., Гронский Е.А. Программные средства для исследования алгебраических структур // Вестник Тамбовского университета. 2013.
3. Смирнов А.Н. Компьютерная алгебра: Теория и практика. 2012.

# КРАТНОЕ СУММИРОВАНИЕ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ

## MULTIPLE SUMMATION ON PARALLELEPIPEDS

Е.Д. Лейнартас

E.D. Leinartas

*Эйлер-Маклорен, основная теорема, разностные уравнения, суммирование функций, кратные корни, рациональная функция, характеристическое множество.*

Рассмотрен новый вариант решения задач суммирования, использующий основную теорему теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, сформулирована и доказана соответствующая теорема.

*Euler-Maclaurin, fundamental theorem, difference equations, summation of functions, multiple roots, rational function, characteristic set.*

A new approach to solving the problem of summation has been considered, utilizing the fundamental theorem of the theory of linear difference equations with constant coefficients. The corresponding theorem has been formulated and proven.

### 1. Введение

**З**адача суммирования относится к числу основных задач теории конечных разностей и решает ее знаменитая формула Эйлера–Маклорена, полученная Эйлером в 1732 г., а Маклореном – в 1735 г. [6].

Подход Эйлера состоит в отыскании дискретной первообразной и построении дискретного аналога формулы Ньютона–Лейбница [2; 4].

В данной работе рассматривается новый вариант решения задачи суммирования, использующий основную теорему теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами [3].

Приведем необходимые определения и обозначения и сформулируем основные результаты.

Пусть  $\delta_j$  оператор сдвига по переменной  $x_j$ .

$$\delta_j f(x) = \delta_j f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n).$$

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n), \delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_n^{\alpha_n}, \alpha \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$$

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$Q(\delta) = \sum_{0 \leq \alpha \leq d} c_\alpha \delta^{d-\alpha}, (1)$$

где  $c_\alpha \in \mathbf{C}$  – некоторые постоянные, а запись  $\alpha \geq \beta$  для мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  означает, что  $\alpha_j \geq \beta_j, j = 1, 2, \dots, n$ .

Характеристическим многочленом для разностного уравнения

$$Q(\delta)f(x) = 0, x \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n (2)$$

назовем многочлен

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq d} c_\alpha z^{d-\alpha} = Q(z), (3),$$

где  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n, z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}, c_0 = 1, c_d \neq 0$ .

Нули многочлена  $Q$  называют **характеристическими корнями**, а множество

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(z) = 0\}$$

всех этих нулей  $Q$  – характеристическим множеством уравнения (2).

Рассмотрим набор многочленов  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  вида

$$Q_i(z) = \sum_{0 \leq \alpha \leq d^i} c_{\alpha}^i z^{d^i - \alpha}, i = 1, 2, \dots, n, (4),$$

где  $d^i$  – векторы из  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Будем считать, что  $c_0^i = 1, c_{d^i}^i \neq 0$ .

Обозначим через  $V_Q$  множество нулей системы уравнений

$$(Q_1(z) = Q_2(z) = \dots = Q_n(z) = 0, \#) (5),$$

которую будем называть характеристической.

## 2. Формулировка основного результата

В данной работе будем рассматривать системы разностных уравнений вида (2), которые удовлетворяют следующим условиям:

– характеристическое множество  $V_Q$  дискретно, характеристические корни не лежат на координатных плоскостях;

– корни  $a \in V_Q$  характеристической системы (5) удовлетворяют следующим свойствам: для некоторого  $d_a = d_{1,a}, \dots, d_{n,a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  выполняются соотношения:

$$\frac{\partial^\alpha Q_i}{\partial z^\alpha}(a) = 0 \text{ для } 0 \leq \alpha \leq d_a - 1, i = 1, 2, \dots, n, (6)$$

$$\Delta_{d_a}(z) = \det \left\| \frac{\partial^{d_{l,\alpha}} Q_i(z)}{\partial z_l^{d_{l,\alpha}}} \right\|_{z=a} \neq 0. (7)$$

В формуле (7) индексы  $l$  и  $i$  пробегает значения  $1, 2, \dots, n$ .

Для  $d_a = I = (1, \dots, 1)$  это условия того, что точка  $z = a$  является простым корнем характеристической системы уравнения (5).

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  удовлетворяет системе разностных уравнений

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq d^i} c_{\alpha}^i \delta^{d^i - \alpha} f(\alpha) = 0, i = 1, 2, \dots, n, (8),$$

тогда для суммы  $S(y) = \sum_{0 \leq x \leq y} f(x)$  справедлива формула

$$S(y) = \sum_{j=1}^m \sum_{0 \leq k < d_{(j)}} p_k^{(j)} \sum_{0 \leq x \leq y} x^k \gamma_{(j)}^x. (9)$$

## 3. Доказательство

Для начала приведем здесь формулировку многомерного варианта основной теоремы теории линейных разностных уравнений.



**Теорема.** Для функции  $f(\alpha) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n): \mathbf{z}_2^n \rightarrow \mathbf{c}$  следующие условия равносильны:

i. Производящий ряд для  $f(x)$  представляет рациональную функцию вида

$$F(\alpha) = \sum_{x \geq 0} f(\alpha) z^x = \sum_{j=1}^m \frac{b_j(z)}{(I - \gamma_{(j)} z)^{d_{(j)}}},$$

где  $b_j(z)$  – некоторые многочлены вида  $\sum_{0 \leq \alpha < d_{(j)}} b_{\alpha}^j z^{\alpha}$ , а

$$(I - \gamma_{(j)} z)^{d_{(j)}} = (1 - \gamma_{(j),1} z_1)^{d_{(j),1}} (1 - \gamma_{(j),2} z_2)^{d_{(j),2}} \dots (1 - \gamma_{(j),n} z_n)^{d_{(j),n}};$$

ii. Функция  $f(x)$  удовлетворяет системе разностных уравнений

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq d^i} c_{\alpha}^i f(x + d^i - \alpha) = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

характеристические корни которой удовлетворяют условиям (6), (7).

iii. Функция  $f(x)$  имеет вид экспоненциального многочлена

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^m c_j(\alpha) \gamma_{(j)}^x,$$

где  $\gamma_{(j)}^x = \gamma_{(j),1}^{x_1} \dots \gamma_{(j),n}^{x_n}$ , а  $c_j(\alpha)$  – многочлены вида  $\sum_{0 \leq k < d_{(j)}} m_k^{(j)} x^k$ .

**Доказательство.** Согласно основной теореме условие (iii)

$f(\alpha) = \sum_{j=1}^m P_j(\alpha) \gamma_{(j)}^x$ , где  $P_j(\alpha)$  – многочлены вида  $\sum_{0 \leq k < d_{(j)}} p_k^{(j)} x^k$ . Тогда

$$S(y) = \sum_{0 \leq x \leq y} \sum_{j=1}^m \sum_{0 \leq k < d_{(j)}} p_k^{(j)} x^k \gamma_{(j)}^x = \sum_{j=1}^m \sum_{0 \leq k < d_{(j)}} p_k^{(j)} \sum_{0 \leq x \leq y} x^k \gamma_{(j)}^x. \quad (11)$$

Нужно доказать, что сумму  $\sum_{0 \leq x \leq y} x^k \gamma_{(j)}^x$  можно выразить через конечное число слагаемых, не зависящее от  $x$ .

Для  $n = 1$  и  $k = 0$   $\sum_{0 \leq x \leq y} \gamma_{(j)}^x = \frac{\gamma^{y+1} - 1}{\gamma - 1}$ , для  $n = 1$  и  $k = 1$   $\sum_{0 \leq x \leq y} x \gamma_{(j)}^x = \gamma \frac{d}{d\gamma} \frac{\gamma^{y+1} - 1}{\gamma - 1}$ .

Обозначим  $\Theta = \gamma \frac{d}{d\gamma} \frac{\gamma^{y+1} - 1}{\gamma - 1}$  и  $F_k(\gamma; y) = \Theta \sum_{0 \leq x \leq y} x^k \gamma_{(j)}^x$ .

Вычисляя последовательно  $F_k(\gamma; y)$ , убеждаемся, что это – рациональные функции со знаменателем  $\frac{1}{(\gamma - 1)^{k+1}}$ , а число слагаемых в сумме зависит только от  $y$ .

Для  $n > 1$  в силу перестановочности операторов  $\Theta$  доказательство аналогично после упорядочения  $k = (k_1, \dots, k_n)$ .

## Библиографический список

1. Stanley R., Enumerative combinatorics, Vol. 1, 1986, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California.
2. Gelfond A.O., Calculus of finite differences. Hindustan Publishing.
3. Evgeny D. Leinartas, August K. Tsikh On a multidimensional version of the principal theorem of difference equations with constant coefficients // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 15:1 (2022), p. 125–132.
4. Shishkina Olga A., Leinartas Evgeny K. The Euler-Maclaurin Formula in the Problem of Summation over Lattice Points of a Simplex // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 15:1 (2022), p. 108–113.
5. Grigoryev Andrey A., Leinartas Evgeny K. Lyapin Alexander P. Summation of Functions and Polynomial Solutions to a Multidimensional Difference Equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 16:2 (2023–2024), p. 153–161.
6. G. Hardy, Divergent series, Oxford University Press, London, 1949.
7. Lyapin A.P., Cuchta T. Sections of the Generating Series of a Solution to a Difference Equation in a Simplicial Cone // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 42 (2022), 75–89. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.42.75
8. O.A. Shishkina, Multidimensional Analog of the Bernoulli Polynomials and its Properties // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 9 (2016), No. 3, 376–384.

# РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И РЕМОНТА ОБОРУДОВАНИЯ

## DEVELOPMENT OF STOCHASTIC MODELING ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF EQUIPMENT MAINTENANCE AND REPAIR PROCESSES

А.В. Леонов

A.V. Leonov

*Стохастическое моделирование, техническое обслуживание и ремонт, оптимизация, алгоритмы, деградация оборудования, динамическое программирование.*

В статье представлена концепция разработки алгоритмов стохастического моделирования для оптимизации процессов технического обслуживания и ремонта (ТОИР) технологического оборудования. Предложена расширенная стохастическая модель деградации оборудования, учитывающая многофакторность воздействий и нелинейный характер процессов износа. Описан адаптивный метод решения задачи оптимизации ТОИР на основе стохастического динамического программирования. Представлены концептуальные основы алгоритмов построения стохастических моделей и расчета остаточной погрешности прогнозирования.

*Stochastic modeling, maintenance and repair, optimization, algorithms, equipment degradation, dynamic programming.*

This article presents a concept for developing stochastic modeling algorithms to optimize equipment maintenance and repair (M&R) processes. An extended stochastic model of equipment degradation is proposed, taking into account multi-factor impacts and the non-linear nature of wear processes. An adaptive method for solving the M&R optimization problem based on stochastic dynamic programming is described. Conceptual foundations of algorithms for constructing stochastic models and calculating residual prediction error are presented.

Эффективное техническое обслуживание и ремонт (ТОИР) сложного технологического оборудования играет ключевую роль в обеспечении бесперебойной работы современных предприятий. Стохастическое моделирование процессов ТОИР позволяет учитывать неопределенности, связанные с износом и отказами оборудования, что способствует оптимизации планирования и проведения ремонтных работ [1].

Существующие подходы к моделированию процессов ТОИР имеют ряд ограничений, включая недостаточный учет нелинейности процессов деградации, сложность адаптации к изменяющимся условиям эксплуатации и трудности в интеграции с системами управления предприятием [2]. Целью данной работы является разработка концепции алгоритмов стохастического моделиро-

вания, позволяющих преодолеть указанные ограничения и повысить эффективность процессов ТОИР.

Расширенная стохастическая модель деградации оборудования.

В основе предлагаемых алгоритмов лежит расширенная стохастическая модель деградации оборудования, описываемая следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dX(t) = \mu(X(t), t, \theta(t))dt + \sigma(X(t), t, \theta(t))dW(t) + J(X(t), t)dN(t), \quad (1)$$

где  $X(t)$  – расширенный вектор состояния оборудования;  $\theta(t)$  – вектор внешних факторов;  $\mu(X(t), t, \theta(t))$  – нелинейная функция дрейфа;  $\sigma(X(t), t, \theta(t))$  – нелинейная функция диффузии;  $W(t)$  – многомерный винеровский процесс;  $J(X(t), t)$  – функция, описывающая скачкообразные изменения состояния;  $N(t)$  – пуассоновский процесс.

Данная модель обобщает классические модели деградации и позволяет учесть сложные нелинейные взаимодействия между различными факторами, влияющими на состояние оборудования [3]. Ключевым преимуществом предложенной модели является возможность адаптации к изменяющимся условиям эксплуатации за счет динамического обновления параметров функций  $\mu$  и  $\sigma$ .

Концепция алгоритма адаптивной оптимизации ТОИР.

Для решения задачи оптимизации ТОИР предлагается концепция адаптивного алгоритма на основе стохастического динамического программирования. Алгоритм основан на решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$-\partial V/\partial t = \min[w_1 C_1(x, u, t) + w_2 C_2(x, u, t) + (\partial V/\partial x)^T f(x, u, t, \theta) + 1/2 \text{tr}(g(x, u, t, \theta)g(x, u, t, \theta)^T (\partial^2 V/\partial x^2)) + \int (V(x + J(x, t), t, \theta) - V(x, t, \theta))\lambda(t)dt], \quad (2)$$

где  $V(x, t, \theta)$  – функция ценности;  $C_1, C_2$  – компоненты целевой функции;  $w_1, w_2$  – весовые коэффициенты;  $f, g$  – функции дрейфа и диффузии;  $\lambda(t)$  – интенсивность пуассоновского процесса [4].

Концептуальная схема алгоритма включает следующие основные этапы:

1. Инициализация функции ценности.
2. Итеративное решение уравнения (2) с использованием методов численного интегрирования.
3. Вычисление оптимального управления на основе полученной функции ценности.
4. Адаптация параметров модели на основе новых данных о состоянии оборудования.
5. Повторение шагов 2–4 до достижения сходимости или выполнения заданного числа итераций.

Данный подход позволяет учитывать стохастическую природу процессов деградации оборудования и адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации.

Концепция алгоритма построения стохастических моделей.

Предлагается концепция алгоритма построения стохастических моделей процессов деградации оборудования, включающая следующие этапы:

1. Сбор и предварительная обработка данных.
2. Идентификация структуры модели на основе анализа характеристик процесса деградации.
3. Оценка параметров модели с использованием методов максимального правдоподобия или байесовского вывода.
4. Валидация модели с применением кросс-валидации и анализа остатков.

Для оценки параметров модели предлагается использовать метод максимального правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия для обобщенной модели (1) может быть представлена в виде:

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln p(X(t_i) | X(t_{i-1}), \theta), \quad (3)$$

где  $\theta$  – вектор параметров модели,  $p(\cdot | \cdot)$  – условная плотность вероятности перехода [5].

Концепция алгоритма расчета остаточной погрешности прогнозирования.

Для повышения точности прогнозирования состояния оборудования предлагается концепция алгоритма расчета остаточной погрешности, учитывающего различные факторы влияния. Остаточная погрешность может быть вычислена по формуле:

$$\Delta X_{\text{ост}}(t) = X_{\text{изм}}(t) - (X_{\text{прог}}(t) + \Delta W + \Delta O + \Delta E + \Delta M), \quad (4)$$

где  $X_{\text{изм}}(t)$  – измеренное значение;  $X_{\text{прог}}(t)$  – прогнозируемое значение;  $\Delta W$ ,  $\Delta O$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta M$  – поправки на износ, режим работы, внешние условия и проведенное обслуживание соответственно [6].

Концептуальная схема алгоритма включает следующие этапы:

1. Расчет прогнозируемого значения на основе стохастической модели (1).
2. Оценка поправок  $\Delta W$ ,  $\Delta O$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta M$  с учетом текущих условий эксплуатации и истории обслуживания.
3. Вычисление остаточной погрешности по формуле (4).
4. Анализ статистических характеристик остаточной погрешности для выявления систематических отклонений и корректировки модели.

Предложенный подход позволяет адаптировать модель к изменяющимся условиям эксплуатации и повысить точность прогнозирования состояния оборудования.

Представленная концепция алгоритмов стохастического моделирования для оптимизации процессов ТОИР создает теоретическую основу для разработки эффективных систем управления техническим состоянием оборудования. Предложенные подходы позволяют учесть сложные нелинейные взаимодействия между факторами, влияющими на деградацию оборудования, и адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку методов эффективной численной реализации предложенных алгоритмов, их интеграцию с системами промышленного интернета вещей (IIoT) и создание методов автоматической адаптации моделей к изменяющимся условиям производства.

### **Библиографический список**

1. Jardine A.K.S., Lin D., Banjevic D. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006. Vol. 20, № 7. P. 1483–1510. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.09.012> (дата обращения: 12.09.2024).
2. Alaswad S., Xiang Y. A review on condition-based maintenance optimization models for stochastically deteriorating system // *Reliability Engineering & System Safety*. 2017. Vol. 157. P. 54–63. URL: <https://doi.org/10.1016/j.res.2016.08.009> (дата обращения: 14.09.2024).
3. Yu Wang, Siu-Kui Au. Spatial distribution of water supply reliability and critical links of water supply to crucial water consumers under an earthquake // *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 94, Issue 2, February 2009, P. 534–541. URL: <https://doi.org/10.1016/j.res.2008.06.012> (дата обращения: 15.09.2024).
4. Bertsekas D.P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 4th ed. Athena Scientific, 2017. 576 p. URL: <http://www.athenasc.com/dpbook.html> (дата обращения: 21.09.2024).
5. Si X.-S., Wang W., Hu C.-H., Zhou D.-H. Remaining useful life estimation – A review on the statistical data driven approaches // *European Journal of Operational Research*. 2011. Vol. 213, No 1. P. 1–14. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.11.018> (дата обращения: 23.09.2024).
6. Zio E., Compare M. Evaluating maintenance policies by quantitative modeling and analysis // *Reliability Engineering & System Safety*. 2013. Vol. 109. P. 53–65. URL: <https://doi.org/10.1016/j.res.2012.08.002> (дата обращения: 27.09.2024).



# КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

## COMPUTER TOOLS FOR STUDYING PERFECT COLORINGS OF CIRCULANT GRAPHS

М.А. Лисицына, П.А. Щербина

M.A. Lisitsyna, P.A. Shcherbina

*Совершенная раскраска, бесконечный циркулянтный граф, k-тестовый фрагмент, временная сложность алгоритма, Python.*

Пусть  $G = (V, E)$  – произвольный транзитивный граф. Раскраску  $\varphi$  вершин  $G$  называют совершенной, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения. Подмножество вершин  $T$  множества вершин  $V(G)$  является  $k$ -тестовым фрагментом, если для любой совершенной  $k$ -раскраски  $\varphi$  графа  $G$  найдется такое положение этого фрагмента, частичная раскраска которого позволяет восстановить всю  $\varphi$ .

Бесконечный циркулянтный граф с набором дистанций  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  – это граф Кэли группы  $Z$  с системой образующих  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Обозначается такой граф через  $C_{\infty}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

В работе рассматривается алгоритм, который позволяет перечислить все совершенные раскраски графа  $C_{\infty}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  в  $k$  цветов. Приведенный алгоритм реализован на языке Python. Время работы полученной программы зависит от  $|T|^k$ , где  $|T|$  – длина  $k$ -тестового фрагмента исследуемого графа, и она зависит от максимальной дистанции  $d_n$ .

*Perfectcoloring, equitable partition, infinitecirculant graph, k-testfragment, time complexity, Python.*

Let  $G = (V, E)$  be a transitive graph. A coloring of a graph vertex set is called perfect if the multiset of colors of all neighbors of every vertex depends only on its own color. A subset  $T$  of the vertex set  $V(G)$  is a  $k$ -test fragment if for every perfect  $k$ -coloring  $\varphi$  of the graph  $G$  there exists a position of this fragment, whose partial coloring allows to reconstruct the whole  $\varphi$ .

An infinite circulant graph with distances  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  is a Cayley graph of  $Z$  with the set of generators  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . We denote this graph  $C_{\infty}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

We consider an algorithm that allows us to list all perfect colorings of the graph  $C_{\infty}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  in  $k$  colors. This algorithm is programmed in Python. The time complexity of the program depends on  $|T|^k$ , where  $|T|$  is the length of the  $k$ -test fragment of the graph under consideration, and it depends on the maximum distance  $d_n$ .

Рассмотрим обыкновенный неориентированный граф  $G = (V, E)$  с множествами вершин  $V$  и ребер  $E$ . Элементы конечного множества  $I = \{1, 2, \dots, k\}$  будем называть цветами. Функция  $\phi: V \rightarrow I$  называется совершенной  $k$ -раскраской с матрицей параметров  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^k$ , если она сюръективна, и для всех  $i$  и  $j$  для любой вершины цвета  $i$  количество ее соседей цвета  $j$  равно  $m_{ij}$ . На рис. 1 изображена совершенная раскраска графа с матрицей параметров

$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Первый цвет представлен белым, второй – серым, а третий –

черным, в соответствии с возрастанием интенсивности цвета.

Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$  – это граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, причем вершины  $i$  и  $j$  соединены ребром, если  $|i - j| \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Обозначается такой граф через  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Граф  $C_\infty(\tilde{n}) \cong C_\infty(1, 2, \dots, n)$  называется бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций (рис.).

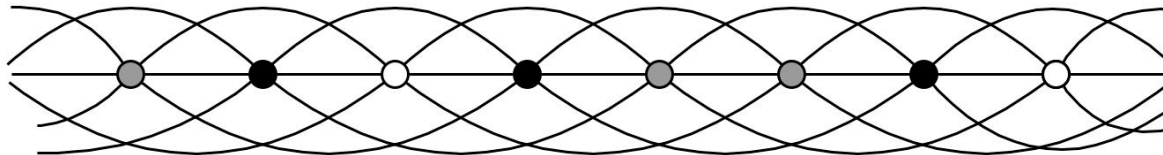


Рис. Совершенная раскраска графа  $C_\infty(1, 2, 3)$

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д.Б.Хорошиловой [5; 6]. В [6] доказано, что любая совершенная раскраска бесконечного циркулянтного графа является периодической. Совершенные 2-раскраски графов  $C_\infty(\tilde{n})$  и  $C_\infty(1, 2, \dots, 2n - 1)$  получены в [4] и [8] соответственно. В [3] описаны совершенные  $k$ -раскраски для графа  $C_\infty(1, 2)$  и произвольного конечного  $k$ .

Фрагмент  $T$  графа  $G$  будем называть  $k$ -тестовым, если для любой совершенной  $k$ -раскраски  $\varphi$  этого графа найдется автоморфизм  $\pi$  такой, что сужение раскраски на  $\pi(T)$  позволяет эту раскраску однозначно восстановить. Везде в дальнейшем в качестве  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  будем рассматривать целочисленные отрезки.

В [2] получены верхние оценки на длины минимальных  $k$ -тестовых фрагментов графа  $C_\infty(\tilde{n})$  для произвольных  $n$  и  $k$ . Там же найдена верхняя оценка и для общего случая – для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Понятие  $k$ -тестового фрагмента является ключевым в алгоритме отыскания всех совершенных  $k$ -раскрасок заданного бесконечного циркулянтного графа. Перейдем к его описанию.

#### Алгоритм перечисления совершенных $k$ -раскрасок графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Пусть  $\Phi_k(T)$  – множество всех раскрасок минимального  $k$ -тестового фрагмента  $T$  графа  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$  в  $k$  цветов.

1. Положим  $\Phi = \Phi_k(T)$ .
2. Для каждой раскраски  $\varphi \in \Phi$  выполнить:
  - 1) восстановить элементы матрицы параметров раскраски, доступные для восстановления;
  - 2) продолжать  $\varphi(T)$  влево и вправо согласно полученным параметрам до тех пор, пока не будет получен период совершенной раскраски или противоречие (невозможность совершенного продолжения);
  - 3)  $\Phi_{||} (:=) \Phi \setminus \{\varphi\}$ .

Таким образом, получим все совершенные  $k$ -раскраски графа с точностью до эквивалентности (для получения всех раскрасок достаточно к описанным применить вышеупомянутые автоморфизмы). Приведенный алгоритм реализован в программе на языке Python.

Раскраски графа  $C_{\infty}(\tilde{n})$  с периодами

$$S_{1_1}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2] \quad (1)$$

$$S_{1_2}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2] \quad (2)$$

$$S_{2_1}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1] \quad (3)$$

$$S_{2_2}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1] \quad (4)$$

$$S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k] \quad (5)$$

будем называть *орбитными*.

В [7] выдвинута гипотеза о том, что совершенные раскраски графов  $C_{\infty}(\tilde{n})$  в произвольное количество цветов исчерпываются орбитными и совершенными раскрасками с периодами  $2n$ ,  $2n+1$  и  $2n+2$ . С помощью программы авторами получен контрпример с периодом  $[0\ aa\ 1\ bb\ 2\ aa\ 0\ bb\ 1\ aa\ 2\ bb]$ . Далее он был обобщен в серию совершенных раскрасок графов  $C_{\infty}(\tilde{n})$  для  $n = 3m + 1$  с периодами длины  $4n + 2$ , опровергающую гипотезу [9].

В случае большого числа цветов программа контрпримеров к гипотезе обнаружила, что стало мотивацией к поиску доказательства ее утверждения в асимптотической форме. Впоследствии в [1] доказано, что для  $k > 3n + 3$  все совершенные раскраски графа  $C_{\infty}(\tilde{n})$  в  $k$  цветов исчерпываются периодами (1)-(5), т.е. гипотеза верна.

*Вывод.* Время работы приведенного алгоритма имеет порядок  $|T|^k$ , где  $T$  – минимальный  $k$ -тестовый фрагмент графа  $C_{\infty}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Для небольших  $k$  и  $|T|$  программа перечисляет все периоды совершенных  $k$ -раскрасок исследуемого графа за разумное время. Для больших  $k$  применение программы позволяет получить материал для дальнейшего обобщения.

## Библиографический список

1. Лисицына М.А., Августинович С.В. Совершенные раскраски циркулянтных графов в большое число цветов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 188–195.
2. Лисицына М.А., Августинович С.В. Тестовые фрагменты совершенных раскрасок циркулянтных графов // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, №2. С. 638–645.
3. Лисицына М.А., Паршина О.Г. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 20–34.
4. Паршина О.Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 76–83.

5. Хорошилова Д.Б. О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 82–89
6. Хорошилова Д.Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
7. Parshina O.G. Perfect  $k$ -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata. 2015. P. 80.
8. Parshina O.G., Lisitsyna M.A. The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. Т. 17. С. 590–603.
9. Plaksina V.D., Shcherbina P.A. New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. Т. 18, № 1. P. 530–533.

# ГИПОТЕЗЫ И ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ С СОИЗМЕРИМЫМИ УГЛАМИ

## HYPOTHESES AND THEOREMS ABOUT TRIANGLES WITH COMMENSURABLE ANGLES

Н.Н. Осипов

N.N. Osipov

*Треугольники с соизмеримыми углами, тригонометрические диофантовы уравнения, система компьютерной алгебры Maple, система динамической геометрии GeoGebra.*

Рассматриваются некоторые задачи о треугольниках с соизмеримыми углами: задача о треугольниках Шарыгина, задача о треугольниках с равными биссектрисами, задача об albime-треугольниках. Такие задачи сводятся к решению тригонометрических диофантовых уравнений. Приводятся примеры доказанных теорем о треугольниках с соизмеримыми углами, а также формулируются некоторые недоказанные гипотезы.

*Triangles with commensurable angles, trigonometric Diophantine equations, Maple CAS, GeoGebra software.*

Some problems about triangles with commensurable angles are studied: the problem about Sharygin triangles, the problem about triangles with equal bisectors and the problem about albime triangles. Such problems are reduced to solving trigonometric Diophantine equations. Examples of theorems concerning triangles with commensurable angles are given, as well as some unproven hypotheses.

**В** элементарной планиметрии существует множество задач и теорем, в которых фигурируют различные элементы треугольника (медианы, высоты, биссектрисы и т.п.). Особенно интересными и неожиданными обычно оказываются теоремы, в которых участвуют биссектрисы. Вот пример такой теоремы: для любых трех отрезков всегда найдется треугольник, для которого эти отрезки служат биссектрисами (см., например, [2]). Для медиан или высот аналогичное утверждение было бы неверным (скажем, набор медиан реального треугольника таков, что из них самих можно составить треугольник).

Далее мы рассмотрим три конкретные задачи: задачу о треугольниках Шарыгина, задачу о треугольниках с равными биссектрисами и задачу об albime-треугольниках (соответствующие определения будут даны ниже). Первые две задачи можно найти в статьях И.Ф. Шарыгина в журнале «Квант» [3; 4] (а также в его задачнике [5]), а третью – в статьях [6; 11].

Во всех трех задачах существует бесконечно много попарно не подобных искомым треугольников, описать которые, как правило, не составляет особого труда. Гораздо интереснее решать эти задачи при следующих дополнительных ограничениях:

- А. Искомые треугольники имеют соизмеримые стороны.
- В. Искомые треугольники имеют соизмеримые углы.

Наиболее распространенной оказывается версия А. В этой версии задача сводится к отысканию рациональных точек на соответствующей *эллиптической кривой* и фактически перестает быть элементарной-геометрической (см., например, [6; 11; 12]). В данной работе мы будем решать указанные задачи в версии В, что встречается в литературе гораздо реже. Это не менее интересно, чем в версии А, но теперь нам придется иметь дело с *тригонометрическими диофантовыми уравнениями*. Примеры решения таких уравнений читатель может найти в статьях [8; 10], а также [9], где тригонометрические диофантовы уравнения исследуются на систематической основе. Прежде чем решать тригонометрическое диофантово уравнение, его нужно составить, исходя из геометрического условия задачи. С этой целью мы применяем *специальные параметризации* треугольника из статьи [13], где в роли параметров выступают комплексные числа, по модулю равные единице.

Перейдем к точным определениям и аккуратным постановкам задач. Начнем с задачи о треугольниках Шарыгина, имеющей весьма богатую историю (она довольно подробно освещена в статье [12]). Для неравностороннего треугольника  $ABC$  пусть  $A_1, B_1, C_1$  – основания соответствующих внутренних биссектрис и, аналогично,  $A_2, B_2, C_2$  – основания внешних биссектрис.

**Определение 1.** Треугольник вида  $A_i B_j C_k$ , где  $\{i, j, k\} = \{1, 1, 1\}$  или  $\{1, 2, 2\}$ , называется *биссектральным треугольником* для треугольника  $ABC$ .

Очевидно, всего имеется четыре биссектральных треугольника. В качестве примера на рис. 1 изображен биссектральный треугольник  $A_2 B_2 C_1$  (здесь и далее все рисунки сделаны с помощью системы динамической геометрии *GeoGebra*).

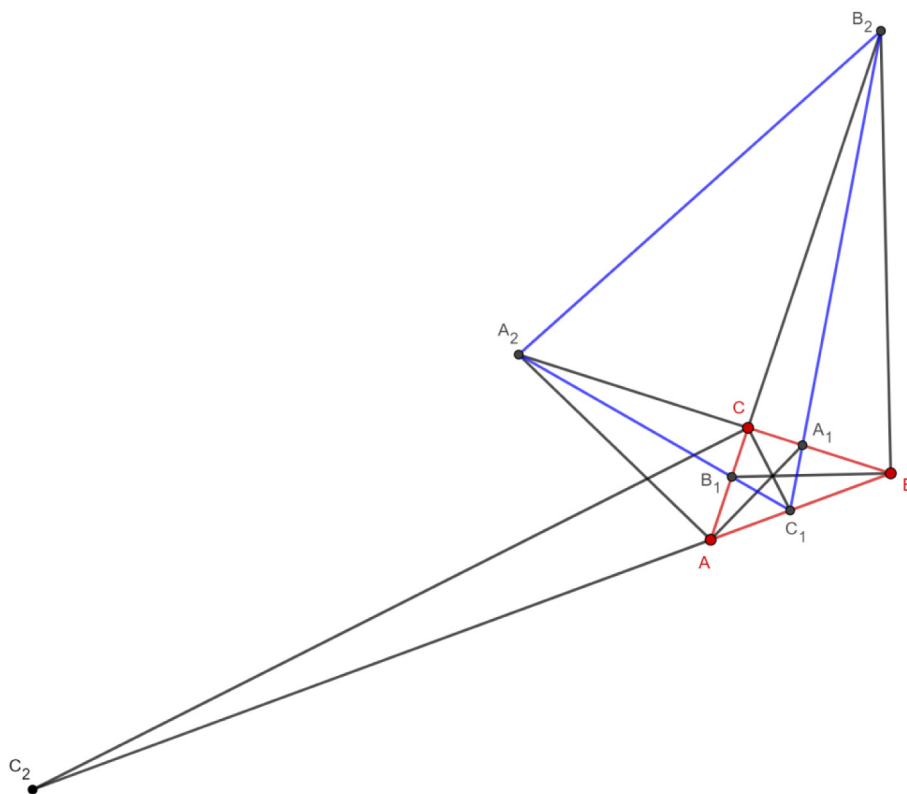


Рис. 1



**Определение 2.** Треугольник  $ABC$  называется *треугольником Шарыгина*, если он сам неравносторонний, однако один из его биссектральных треугольников является равносторонним.

Задача состоит в том, чтобы описать все треугольники Шарыгина. Условие равносторонности биссектрального треугольника  $A_1B_1C_1$  можно записать, например, так:

$$C_1A_1 = C_1B_1 \quad (1)$$

(поскольку этот биссектральный треугольник образован только основаниями внутренних биссектрис, неважно, какое из них принято за вершину). Условие равносторонности для остальных биссектральных треугольников записывается двумя способами: либо за вершину принимается основание внутренней биссектрисы, например

$$C_1A_2 = C_1B_2, \quad (2)$$

либо за вершину берется основание внешней биссектрисы, например

$$C_2A_1 = C_2B_2. \quad (3)$$

В версии А задача о треугольниках Шарыгина полностью решена в статье [12]. Соответствующая эллиптическая кривая задается уравнением

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$$

(здесь  $a = BC$  и т.д. – длины сторон треугольника  $ABC$ ) и имеет ранг 1, что дает бесконечно много попарно не подобных треугольников Шарыгина с соизмеримыми (можно считать, целочисленными) сторонами. В частности, наименьший треугольник Шарыгина, длины сторон которого выражаются целыми числами, таков:

$$(a, b, c) = (1481089, 18800081, 19214131).$$

Рассмотрим задачу о треугольниках Шарыгина в версии В. Здесь одним из решений является так называемый *гептагональный треугольник*  $ABC$  с углами

$$\angle A = \frac{\pi}{7}, \angle B = \frac{2\pi}{7}, \angle C = \frac{4\pi}{7}, \quad (4)$$

что впервые было обнаружено, по-видимому, в статье [7] (позднее этот факт неоднократно переоткрывался разными авторами). Гептагональный треугольник  $ABC$  имеет целых три равносторонних биссектральных треугольника  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_1$  и  $A_2B_1C_2$  (рис. 2).

Но есть и другие решения: это *первый пентадекагональный треугольник*  $ABC$  с углами

$$\angle A = \frac{11\pi}{15}, \angle B = \frac{\pi}{15}, \angle C = \frac{\pi}{5}, \quad (5)$$

а также *второй пентадекагональный треугольник*  $ABC$  с углами

$$\angle A = \frac{2\pi}{15}, \angle B = \frac{7\pi}{15}, \angle C = \frac{2\pi}{5}. \quad (6)$$

(рис. 3 и 4). Каждый из пентадекагональных треугольников имеет ровно по одному равнобедренному биссектральному треугольнику (это  $A_2B_2C_1$  и  $A_1B_2C_2$  соответственно).

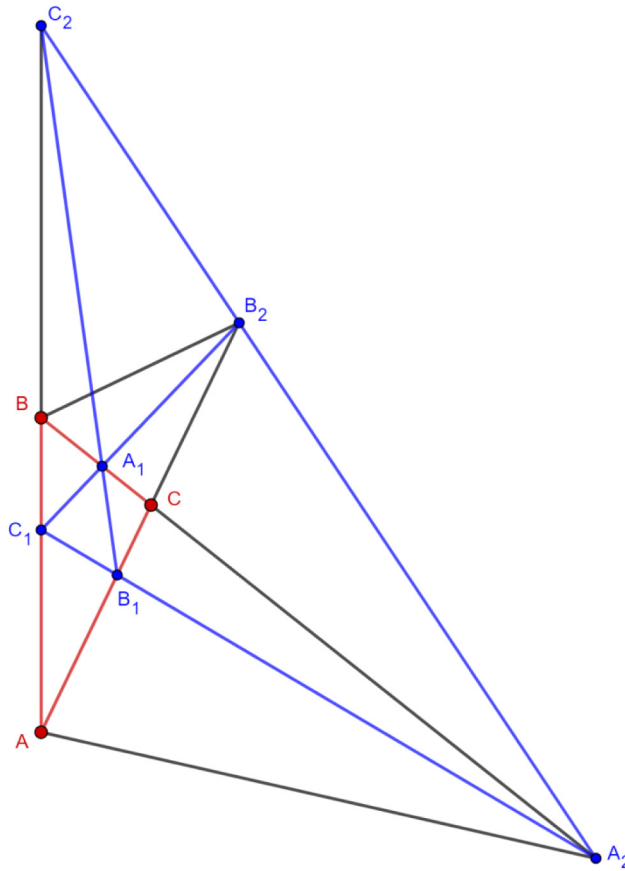


Рис. 2

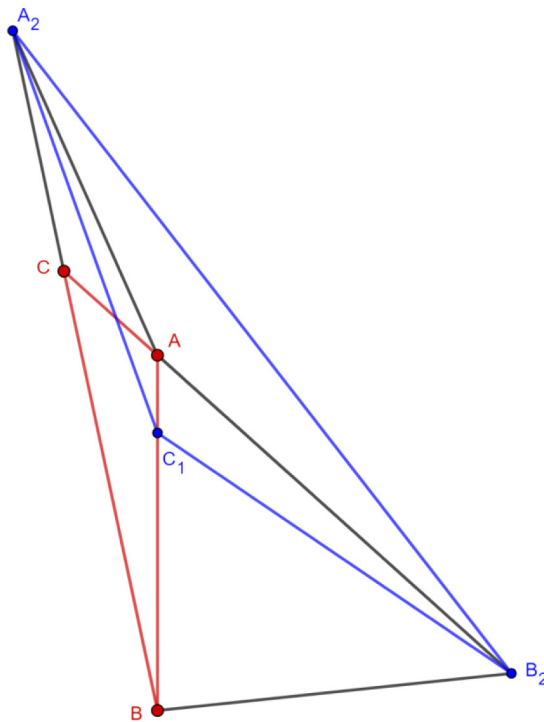


Рис. 3.

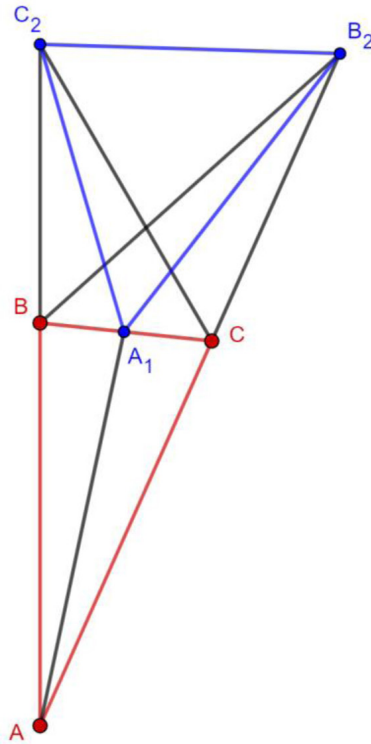


Рис. 4.

**Теорема 1.** Кроме гептагонального с углами (4) и двух пентадекагональных треугольников с углами (5) и (6), других треугольников Шарыгина с соизмеримыми углами не существует.

Доказательство теоремы 1 мы здесь не приводим, заинтересованный читатель найдет его по ссылке <https://arxiv.org/pdf/2408.02968>. Основную часть доказательства теоремы 1 занимает решение тригонометрического диофантова уравнения

$$1 + x + y + x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y^3 = 0, \quad x^N = y^N = \mathbf{1} \text{ для некоторого } N \in \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{N}$  обозначает множество натуральных чисел (здесь  $x$  и  $y$  – неизвестные комплексные числа; это уравнение обслуживает сразу все три типа условия равнобедренности (1) – (3)). Найденный способ решения не является элементарным, он опирается на свойства *круговых полей* и *сумм Рамануджана*, а также использует *систему компьютерной алгебры Maple* для вычисления *базисов Гребнера* в своей технической части. Из теоремы 1 вытекает справедливость следующей гипотезы из статьи [12]: в классе неравнобедренных треугольников  $ABC$  с соизмеримыми углами только у гептагонального треугольника биссектральный треугольник  $A_1B_1C_1$  будет равнобедренным.

Перейдем ко второй задаче – о треугольниках с равными биссектрисами. Как известно, если треугольник имеет две равные внутренние биссектрисы, то он равнобедренный (*теорема Штейнера – Лемуса*). А что будет, если рассматривать и внешние биссектрисы тоже? Присмотревшись к пентадекагональным треугольникам (рис. 3 и 4), можно обнаружить, что имеет место равенство

$$AA_2 = BB_2 \tag{7}$$

для первого пентадекагонального треугольника, а также равенство

$$AA_1 = BB_2 \quad (8)$$

для второго такого треугольника. Отсюда следует, что задача отыскания неравнобедренных треугольников с равными биссектрисами (двух внешних или одной внутренней и одной внешней) разрешима в версии В. Отметим попутно, что эта же задача в версии А решений не имеет (ранг соответствующей эллиптической кривой равен нулю).

**Теорема 2.** Кроме пентадекагональных треугольников с углами (5) и (6), других неравнобедренных треугольников с соизмеримыми углами и равными биссектрисами, не существует.

Для доказательства теоремы 2 также приходится решать соответствующее тригонометрическое диофантово уравнение, но оно весьма удачным образом сводится к уже исследованному уравнению Гордана

$$2 + x + x^{-1} + y + y^{-1} + z + z^{-1} = 0, \quad x^N = y^N = z^N = 1 \text{ для некоторого } N \in \mathbf{N}$$

(см. оригинальную статью [10]; более простой способ решить уравнение Гордана можно найти по ссылке <https://smc.nsu.ru>, задача 5 для студентов 2–6 курсов, Сибирская математическая олимпиада 2023 года). Еще одно наблюдение состоит в том, что условия (7) и (8) выполняются для пентадекагональных треугольников с избытком: на самом деле имеем:

$$AA_2 = BB_2 = AB \quad (9)$$

для первого пентадекагонального треугольника и аналогично

$$AA_1 = BB_2 = AB$$

для второго. Интересно отметить, что в задачнике [5] первый пентадекагональный треугольник все-таки указывается в явном виде (см. решение задачи 879), но именно как неравнобедренный треугольник, удовлетворяющий всем условиям (9) (можно показать, что в таком случае он определен однозначно с точностью до подобия).

В нашей заключительной задаче – об albime-треугольниках – в первую очередь нужно объяснить сам термин albime, впервые предложенный в статье [6]. Для треугольника  $ABC$  положим:  $AA_1$  – биссектриса из одной вершины,  $BB'$  – медиана из другой вершины и  $CC''$  – высота из третьей вершины.

**Определение 2.** Треугольник  $ABC$  называется *albime-треугольником*, если прямые  $AA_1$ ,  $BB'$  и  $CC''$  пересекаются в одной точке.

Таким образом, термин albime расшифровывается как (al)titude+(bi)sector+(me)dian. Тривиальным примером albime-треугольника является равносторонний треугольник. Задача состоит в том, чтобы описать все albime-треугольники. В версии А эта задача полностью решена в статье [6] (см. также [11]). В статье [6] можно прочитать про многолетнюю и весьма интригующую историю этой задачи, в которой имели место даже неверные, но при этом опубликованные решения. Например, как минимум дважды предпринимались попытки «доказать»

(причем разными способами!), что albime-треугольников с целыми длинами сторон не существует (кроме, разумеется, равностороннего треугольника). Пример albime-треугольника со сторонами

$$(a, b, c) = (13, 12, 15)$$

моментаально опровергает любое «доказательство» такого рода. Как и в задаче о целочисленных треугольниках Шарыгина, здесь также имеется бесконечно много попарно не подобных albime-треугольников с целочисленными сторонами – снова по той причине, что ранг соответствующей эллиптической кривой оказывается равным 1.

Что касается этой задачи в версии В, то она также нетривиально разрешима: решением будет albime-треугольник  $ABC$  с углами

$$\angle A = \frac{\pi}{4}, \angle B = \frac{\pi}{8}, \angle C = \frac{5\pi}{8}. \quad (10)$$

Для данного треугольника  $ABC$  прямые  $AA_2$ ,  $BB''$  и  $CC'$  также пересекаются в одной точке (рис. 5).

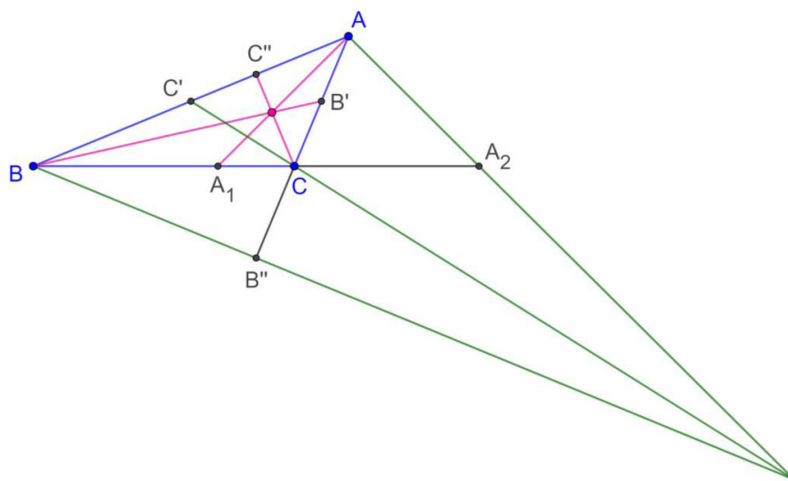


Рис. 5

**Теорема 3.** Кроме треугольника с углами (10), других albime-треугольников с соизмеримыми углами, отличных от равностороннего, не существует.

Доказательство теоремы 3 также основывается на сведении к тригонометрическому диофантову уравнению. Благодаря удачному стечению обстоятельств, это уравнение удастся решить тем же методом, что и уравнения, возникающие в теоремах 1 и 2.

В заключение приведем пример схожего утверждения, которое пока не удалось доказать. Речь идет об отыскании неравносторонних треугольников, для которых окружность, проходящая через основания внутренних биссектрис, касается одной из сторон (данная задача обсуждается, например, в статьях [1; 4]). Можно показать, что в версии А эта задача имеет бесконечно много решений, наименьшее из которых есть

$$(a, b, c) = (154449, 58747931, 58863869).$$

Что касается версии В, то на данный момент есть только следующая гипотеза.

**Гипотеза.** Задача о треугольниках с касающейся окружностью в версии В не имеет решений.

Вероятно, для доказательства этой гипотезы придется прибегнуть к нетривиальной общей теории тригонометрических диофантовых уравнений из статьи [9].

### Библиографический список

1. Куланин Е. Об одной трудной геометрической задаче // Квант. 1992. № 7. С. 46–50.
2. Осипов Н.Н. Задача о треугольнике с заданными длинами биссектрис // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 30. М.: МЦНМО, 2023. С. 209–224.
3. Шарыгин И.Ф. Вокруг биссектрисы // Квант. 1983. № 8. С. 32–36.
4. Шарыгин И.Ф. Откуда берутся задачи // Квант. 1991. № 9. С. 42–49.
5. Шарыгин И.Ф.. Геометрия 9–11: От учебной задачи к творческой: учебное пособие. М.: Дрофа, 1996.
6. Bakker E., Chahal J.S., Top J. Albime triangles and Guy's favourite elliptic curve // Expo. Math. 2016. V. 34. P. 82–94.
7. Bankoff L., Garfunkel J. The Heptagonal Triangle // Math. Mag. 1973. V. 46. No. 1. P. 7–19.
8. Coxeter H., Crosby W. A Trigonometric Equation // Amer. Math. Monthly. 1946. V. 53. P. 103–107.
9. Conway J., Jones A. Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity) // Acta Arithm. 1976. V. 30. P. 229–240.
10. Gordan P. Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen // Math. Ann. 1877. V. 12. P. 23–46.
11. Guy R.K. My favorite elliptic curve: a tale of two types of triangles // Amer. Math. Monthly. 1995. V. 102. P. 771–781.
12. Netay I.V., Savvateev A.V. Sharygin triangles and elliptic curves // Bull. Korean Math. Soc. 2017. V. 54. P. 1597–1617.
13. Osipov N.N. Mechanical Proof of Planimetric Theorems of Rational Type // Programming and Computer Software. 2014. V. 40. No. 2. P. 71–78.



# СРАВНЕНИЕ БИБЛИОТЕКИ SYMPY (PYTHON) С ПРОГРАММНЫМИ ПАКЕТАМИ СКА

## COMPARISON OF SYMPY (PYTHON) LIBRARY WITH CAS SOFTWARE PACKAGES

М.Г. Пукита, А.А. Шакирзянова

M.G. Pukita, A.A. Shakirzyanova

*Системы компьютерной алгебры, математические вычисления, программное обеспечение, Mathcad, SciLab, библиотека SymPy, функция, расчеты.*

Исследуется вопрос возможности полной замены классических систем компьютерной алгебры на узкоспециализированную библиотеку языка программирования Python (SymPy). Появившийся позже, этот инструмент покрывает все возможности СКА, а также имеет преимущества в виде удобной встраиваемости в другие системы и простоты синтаксиса языка Python, который распространен в научной среде.

*Computer algebra systems, mathematical computing, software, Mathcad, SciLab, SymPy library, function, calculus.*

The question of the possibility of complete replacement of classical computer algebra systems by a highly specialized library of the Python programming language (SymPy) is investigated. Appeared later, this tool covers all possibilities of CAS, and also has advantages in the form of convenient embeddability in other systems and simplicity of Python syntax, which is common in scientific environment.

**С**истемы компьютерной алгебры (сокр. СКА) – это высокопроизводительные системы программного обеспечения, разработанные для выполнения символьных вычислений. Они нашли применение во многих областях точных наук, от решения дифференциальных уравнений до оптимизации. Автоматизация позволяет значительно ускорить прогресс в различных областях, поэтому значимость СКА нельзя преуменьшать. Помимо применения в работе инженеров и аналитиков, компьютерная алгебра становится важным аспектом в обучении математике студентов и школьников. К настоящему времени появилось много программных пакетов СКА. Принципы работы у всех остаются общими, однако под узкоспециализированные задачи бывает необходимо подобрать конкретный продукт. Настоящее исследование актуально, поскольку количество наименований существующих СКА постоянно растет. В связи с этим выбор подходящего обеспечения становится труднее. Данная статья рассматривает возможность перехода на библиотеку SymPy для языка программирования Python вместо использования отдельных систем, например, SciLab и Mathcad, через сопоставление представленного в них функционала. Будут приведены аргументы в пользу подобного перехода, а также рассмотрены недостатки этой замены.

Для более объективного сравнения необходимо сперва составить список ключевых функций традиционных пакетов СКА на примере SciLab и Mathcad. Они включают в себя:

– Символьное интегрирование и дифференцирование

- Решение линейных и нелинейных уравнений
- Работа с матрицами (обращение, факторизация)
- Построение графиков функций в 2D и 3D
- Статистические вычисления
- Символьное решение систем уравнений
- Работу с единицами измерения
- Упрощение математических выражений

Все эти инструменты незаменимы, и поэтому были реализованы еще в первых версиях данных программных пакетов [1; 2].

В то же время SymPy – это относительно новый инструмент. Он обладает рядом аналогичных функций: символьное интегрирование (метод `integrate`) и дифференцирование (метод `diff`), решение линейных и нелинейных, а также дифференциальных уравнений (метод `dsolve`) и др. Кроме того, SymPy позволяет гибко настроить точность чисел и предоставляет возможность работы с некоммутативными выражениями [3, 4].

При сравнении эффективности пакетов программного обеспечения SciLab, Mathcad с библиотекой SymPy стоит учитывать несколько факторов:

#### 1. Быстродействие:

- SciLab и Mathcad разработаны с нуля специально для выполнения численных расчетов. Алгоритмы, лежащие в основе их работы, по некоторым параметрам лучше оптимизированы.

- SymPy является библиотекой Python – интерпретируемого языка программирования. Таким образом, вычисления на его основе могут быть медленнее при выполнении сложных символьных операций.

#### 2. Простота в изучении:

- Mathcad имеет собственный интерфейс WYSIWYG, который позволяет интуитивно взаимодействовать с СКА без программирования.

- SciLab требует больше знаний о программировании, поскольку для внедрения недоступных функций необходимо запрограммировать их на одном из доступных языков (например, C, C++, Fortran).

- SymPy требует знания Python, но это позволяет использовать его вместе с другими библиотеками, расширяя функциональность. Например, для визуализации можно использовать библиотеку Matplotlib.

Можно выделить и другие критерии сравнения рассматриваемых СКА. Вынесем их в таблицу (таблица).

### Сравнение Mathcad, SciLab, SymPy

Критерий	Mathcad	SciLab	SymPy
Тип	Программное обеспечение	Программное обеспечение	Библиотека
Лицензия	Коммерческая	Открытый код	Открытый код
Символические вычисления	Да	Ограниченно	Да
Численные вычисления	Да	Да	Ограниченно
Визуализация	Да	Да	Да, через Matplotlib

Проанализировав данные из вышеприведенной таблицы, можно прийти к выводу, что выбор подходящей СКА напрямую зависит от условий работы и конкретных потребностей. SymPy является собой конкурентоспособную альтернативу традиционным системам компьютерной алгебры. Он обладает такими недостатками, как медленная работа с большим объемом данных, необходимость подключения дополнительного модуля для визуализации графиков, необходимость знания языка программирования Python. В то же время его выделяет среди конкурентов ряд преимуществ: возможность интеграции в любую программу, написанную на Python, совместное использование с другими библиотеками для адаптации под конкретные нужды, отсутствие необходимости скачивать отдельный программный пакет, легковесность. Дополнительным плюсом является его открытый исходный код и одновременно с этим хорошая документация, охватывающая все аспекты использования библиотеки [3, 4].

Mathcad является классическим решением потребности в компьютерных вычислениях. Зарекомендовавшая себя десятилетиями программа позволяет проводить вычисления без владения программированием. Однако он распространяется на коммерческой основе, из-за чего может стать неподходящим вариантом для пользователей с финансовыми ограничениями [2].

SciLab является бесплатной альтернативой с открытым исходным кодом. Наравне с Mathcad, данная СКА производит вычисления быстрее, чем SymPy. Система позволяет добавлять пользовательские функции, реализованные на различных языках программирования. Однако использование может быть затруднено необходимостью осваивать целый программный пакет [1].

Замена традиционных СКА на SymPy может быть оправдана в случаях, когда необходима большая гибкость проводимых вычислительных процессов или доступ к современным инструментам программирования. Однако для пользователей, ориентированных на высокую производительность в численных расчетах или предпочитающих визуальные интерфейсы, традиционные системы станут лучшей альтернативой.

## Библиографический список

1. Справка SciLab // SciLab. 2022. URL: [https://help.scilab.org/docs/6.1.1/ru\\_RU/index.html](https://help.scilab.org/docs/6.1.1/ru_RU/index.html) (дата обращения: 06.11.2024).
2. PTCMathcadSupport. 2024. URL: [https://support.ptc.com/help/mathcad/r10.0/en/index.html#page/PTC\\_Mathcad\\_Help/about\\_the\\_mathcad\\_help\\_center.html#](https://support.ptc.com/help/mathcad/r10.0/en/index.html#page/PTC_Mathcad_Help/about_the_mathcad_help_center.html#) (дата обращения: 6.11.2024).
3. SymPy 1.13.3 documentation // SymPy. 2024. URL: <https://docs.sympy.org/latest/index.html> (дата обращения: 6.11.2024).
4. Meurer A., SymPy: symbolic computing in Python / Meurer A., Smith C.P., Paprocki M. // PeerJ Comput. Sci., 2017. 27 с.

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТОЛБЦОВ В АЛГОРИТМ MEAES

## COLUMN CONVERSION IN THE AES ALGORITHM

А.В. Рожков, В.Ю. Барсукова

A.V. Rozhkov, V.Yu. Barsukova

*Алгебра, теория чисел, фактор-кольца, многочлены, криптография.*

Изучается преобразование столбцов в раундовом преобразовании алгоритма шифрования AES.

*Algebra, number theory, quotient rings, polynomials, cryptography.*

The transformation of columns in the round-robin transformation of the AES encryption algorithm is studied.

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТОЛБЦОВ В АЛГОРИТМ AES

Работа выполнена в рамках проекта, развиваемого в [1; 2], и поддержанная грантом Потанина 2021–2022 гг. Отметим, что в учебной литературе данный вопрос не освещен, хотя представляет интерес как приложение линейной алгебры к вопросам криптографии.

В шифрсистеме AES применяется функция перемешивания столбцов. Перестановка элементов в столбцах. При этом на столбец, а он состоит из 4-х элементов, мы смотрим как на многочлен 3-й степени над полем  $GF(2^8)$ . Этот многочлен умножается на фиксированный многочлен  $h(x) = (\omega + 1)x^3 + x^2 + x + \omega$ , где  $GF(2^8) = \{\sum_{i=0}^7 a_i \omega^i \mid a \in \{0,1\}\}$ ,  $\omega$  – в свою очередь, корень неприводимого над  $GF(2)$  многочлена  $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ , и результат приводится по модулю многочлена  $x^4 + 1 = (x + 1)^4$ .

Таким образом, мы находимся в фактор-кольце  $GF(2^8)/\text{ид}(x + 1)^4$ .

**Предложение 1.** 1) Мультипликативная группа фактор-кольца  $GF(2^8)/\text{ид}(x + 1)^4$  имеет порядок 8 и изоморфна  $Z_4 \oplus Z_2$ .

2) Мультипликативная группа фактор-кольца  $GF(2^8)/\text{ид}(x + 1)^4$  имеет порядок  $(2^8)^4 - (2^8)^3 = 255 \cdot 2^4 = 4278190080$  и период  $255 \cdot 4 = 1020$ . При этом всякий обратимый элемент  $y$  этого фактор кольца однозначно записывается в виде  $y = \alpha \cdot (1 + (x + 1)(\beta x^2 + \gamma x + \delta))$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in GF(2^8)$ ,  $\alpha \neq 0$ . Порядок элемента  $y$  равен  $4 \cdot |\alpha|$  или  $2 \cdot |\alpha|$ , где  $|\alpha|$  – порядок элемента  $\alpha$  в поле Галуа  $GF(2^8)$ .

**Доказательство.** 1). Элементами нашего фактор кольца можно считать все многочлены степени не выше 3. Таких многочленов, очевидно, 16 штук. При этом обратимы по умножению только те многочлены, которые взаимно просты с многочленом  $x + 1$ . Таких многочленов ровно 8 штук. В качестве порождающих элементов можно взять многочлены  $x, x^3 + x + 1$ . Первый из них имеет порядок 4, а второй порядок 2, т.к.  $(x^3 + x + 1)^2 = x^6 + x^2 + 1 = x^2 + x^2 + 1 = 1$ , поскольку  $x^4 = 1$ . Перечислим все обратимые элементы нашего фактор-кольца:

$$1, x, x^2, x^3, x^3 + x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + 1, x^3 + x^2 + x.$$

2). Элементы фактор-кольца – многочлены, степень которых не превосходит 3. Таких над полем  $GF(2^8)$  ровно  $(2^8)^4$ . Обратимыми являются многочлены, взаимно простые с многочленом  $x + 1$ , поэтому их можно представить в виде  $y = \alpha \cdot (1 + (x+1)(\beta x^2 + \gamma x + \delta))$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in GF(2^8)$ ,  $\alpha \neq 0$ . Поэтому их ровно  $(2^8)^3 \cdot (2^8 - 1) = 255 \cdot 2^{24}$ . Поскольку поле  $GF(2^8)$  имеет характеристику 2, то для его элементов выполняется равенство  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$ . В силу этого

$$y^2 = \alpha^2 \cdot (1 + (x^2 + 1)(\beta^2 x^4 + \gamma^2 x^2 + \delta^2)) = \alpha^2 \cdot (1 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \cdot x^2),$$

$$y^4 = \alpha^4 \cdot (1 + (x^4 + 1)(\beta^2 x^4 + \gamma^2 x^2 + \delta^2)^2) = \alpha^4.$$

Мультипликативная группа конечного поля  $GF(2^8)$  циклическая и имеет порядок  $2^8 - 1 = 255$ . Поскольку числа 4 и 255 взаимно простые, то  $|\alpha^4| = |\alpha|$ . **Предложение доказано.**

**Следствие.** Порядок многочлена  $h(x)$ , участвующего в реализации функции перемешивания столбцов как элемента мультипликативной группы фактор-кольца  $GF(2^8)/\text{id}(x + 1)^4$  равен 4.

**Доказательство.** Разделим наш многочлен на многочлен  $x + 1$ , чтобы получить стандартный вид для элементов мультипликативной группы:

$$h(x) = (\omega + 1) \cdot x^3 + x^2 + x + \omega = (x + 1)((\omega + 1) \cdot x^2 + \omega \cdot x + \omega + 1) + 1.$$

Таким образом, элемент  $\alpha = 1 \Rightarrow |h(x)| = 2$  или  $\alpha = 1 \Rightarrow |h(x)| = 4$ . Однако порядок 2 исключается, т.к.  $x^6 = x^2$ , поэтому возведение в квадрат не дает единичного элемента.

Прямое вычисление дает тот же результат:

$$(h(x))^4 = (\omega + 1)^2 \cdot x^6 + x^4 + x^2 + \omega^2)^2 = (\omega^2 + 1) \cdot x^2 + x^2 + \omega^2 + 1)^2 =$$

$$= (\omega^2 \cdot x^2 + \omega^2 + 1)^2 = \omega^4 \cdot x^4 + \omega^4 + 1 = 1.$$

**Следствие доказано.**

Изучим более подробно умножение на многочлен  $h(x) = (\omega + 1)x^3 + x^2 + x + \omega$ . Очевидно, указанное умножение является линейным преобразованием 4-мерного линейного пространства над полем  $GF(2^8)$ . Если в качестве базисных векторов взять стандартный базис кольца многочленов  $1, x, x^2, x^3$ , то матрицей преобразования, заданного умножением на многочлен  $h(x)$ , будет матрица

$$H = \begin{pmatrix} \omega & \omega + 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega + 1 \\ \omega + 1 & 1 & 1 & \omega \end{pmatrix}.$$

Это циркулянт. Найдем его характеристический многочлен. В данном случае матрица имеет размерность 4 и вполне можно провести ручные вычисления:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{vmatrix} x+\omega & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+\omega & \omega+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\omega & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+\omega & \omega+1 & 1 \\ 0 & x+\omega+1 & x+1 & \omega \\ 0 & (\omega+1)x+\omega^2+\omega+1 & \omega^2 & x+1 \end{vmatrix} = \\
 &= (x+\omega) \begin{vmatrix} x+\omega & \omega+1 & 1 \\ x+\omega+1 & x+1 & \omega \\ (\omega+1)x+\omega^2+\omega+1 & \omega^2 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega+1 & 1 & 1 \\ x+\omega+1 & x+1 & \omega \\ (\omega+1)x+\omega^2+\omega+1 & \omega^2 & x+1 \end{vmatrix} = \\
 &= (x+\omega)\{(x+\omega)(x+1)^2 + (x+\omega+1)\omega^2 + \omega(\omega+1)((\omega+1)x+\omega^2+\omega+1) + \\
 &(x+1)((\omega+1)x+\omega^2+\omega+1) + \omega^3(x+\omega) + (\omega+1)(x+1)(x+\omega+1)\} + \\
 &+ \{(\omega+1)(x+1)^2 + \omega^2(x+\omega+1) + \omega((\omega+1)x+\omega^2+\omega+1) + (x+1)((\omega+1)x+\omega^2+\omega+1) + \\
 &+ \omega^3(\omega+1) + (x+1)(x+\omega+1)\}.
 \end{aligned}$$

Вычисления получаются весьма громоздкими. Поэтому попробуем вычислить детерминант разложением по 1-й строчке, не производя предварительных преобразований. При этом, как в предыдущих вычислениях, так и в последующих, мы будем активно пользоваться тем, что поле, в котором мы производим вычисления, имеет характеристику 2, поэтому  $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ , а  $-\mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{vmatrix} x+\omega & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+\omega & \omega+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = (x+\omega) \begin{vmatrix} x+\omega & \omega+1 & 1 \\ 1 & x+\omega & \omega+1 \\ 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} + (\omega+1) \begin{vmatrix} 1 & \omega+1 & 1 \\ 1 & x+\omega & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} 1 & x+\omega & 1 \\ 1 & 1 & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x+\omega & \omega+1 \\ 1 & 1 & x+\omega \\ \omega+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+\omega)\{(x+\omega)^3 + (\omega+1)^2 + 1 + (x+\omega)\} + \\
 &+ (\omega+1)\{(x+\omega)^2 + (\omega+1)^3 + 1 + \omega+1\} + \{x+\omega + (\omega+1)^2(x+\omega) + 1 + (x+\omega)^2\} + \\
 &+ \{1 + \omega+1 + (\omega+1)(x+\omega)^2 + (\omega+1)^2\} = (x+\omega)(x^3 + \omega x^2 + (\omega^2+1)x + \omega^3 + \omega^2 + \omega) + \\
 &+ (\omega+1)(x^2 + \omega^3 + 1) + (x^2 + \omega^2 x + \omega^3 + \omega^2 + 1) + ((\omega+1)x^2 + \omega^3 + \omega+1) = \\
 &= x^4 + (\omega+\omega)x^3 + (\omega^2 + \omega^2 + 1 + \omega+1 + 1 + \omega+1)x^2 + (\omega^3 + \omega^2 + \omega + \omega^3 + \omega + \omega^2)x + \\
 &+ (\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega+1 + \omega^3 + \omega^2 + 1 + \omega^3 + \omega+1) = x^4 + 1 = (x+1)^4
 \end{aligned}$$

Таким образом, и второе перемешивающее преобразование имеет очень простой вид, поскольку его характеристический многочлен полностью разлагается на линейные множители даже над полем вычетов из двух элементов.

Найдем жорданову форму преобразования, заданного многочленом  $h(x)$ . Для этого решим однородную систему линейных уравнений над полем Галуа из 256 элементов.

Таким образом, собственный вектор единственный. Тем самым нами доказано следующее предложение.



**Предложение 2.** Жорданова форма преобразования, заданного умножением на многочлен  $h(x) = (\omega + 1)x^3 + x^2 + x + \omega$ , имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем его жорданов базис. Сделать это будет проще, чем для отображения, перемешивающего байты, поскольку у нас всего одна жорданова клетка. Для этого найдем подпространство корневых векторов высоты не более 3, т.к. максимальная высота корневых векторов, очевидно, равна 4. Следовательно, мы опять воспользуемся способом Е.И. Хухро [3]. Предварительно возведем соответствующую матрицу в 3-ю степень:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \omega+1 & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega+1 & \omega+1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega+1 & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & 1 & \omega+1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \omega+1 & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega+1 & \omega+1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega+1 & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & 1 & \omega+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \ 1 \ 1 \ 1). \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что базисом подпространства корневых векторов высоты 3 будет следующее множество векторов  $\langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$ . Столь же очевидно, что в качестве вектора, дополняющего это множество до базиса всего пространства, можно взять, например,  $v_1 = (1,0,0,0)$ . Теперь, действуя на этот вектор отображением с матрицей  $H$ , последовательно получим:

$$v_2 = Hv_1 = (\omega + 1, 1, 1, \omega + 1), v_3 = Hv_2 = (\omega^2, 0, \omega^2, 0), v_4 = Hv_3 = (\omega^3, \omega^3, \omega^3, \omega^3).$$

Теперь мы можем указать жорданов базис и матрицу перехода к этому базису.

**Предложение 3.** Жордановым базисом преобразования, заданного умножением на многочлен  $h(x) = (\omega + 1)x^3 + x^2 + x + \omega$ , является множество векторов  $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$ , определенные выше, а матрица перехода будет матрица  $T$  над полем  $GF(2^8)$

$$T = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^2 & \omega+1 & 1 \\ \omega^3 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^3 & \omega^2 & 1 & 0 \\ \omega^3 & 0 & \omega+1 & 0 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega+1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^3 & 0 & \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 \end{pmatrix}.$$

Прямая проверка показывает, что на самом деле имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 T^{-1}HT &= \frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega+1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^3 & 0 & \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega & \omega+1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega+1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 & 1 & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^2 & \omega+1 & 1 \\ \omega^3 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^3 & \omega^2 & 1 & 0 \\ \omega^3 & 0 & \omega+1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 + \omega + 1 & \omega^2 & 1 \\ 0 & \omega^3 + \omega^2 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^4 + \omega^3 & \omega^4 & \omega^4 + \omega^3 \\ \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 & \omega^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^2 & \omega+1 & 1 \\ \omega^3 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^3 & \omega^2 & 1 & 0 \\ \omega^3 & 0 & \omega+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Библиографический список

1. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее. Материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.
3. Хухро Е.И. Жорданова форма матриц (геометрический метод): методические указания. Новосибирск: РИО НГУ, 1990. 16 с.

# ВТОРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА AES

## THE SECOND TRANSFORMATION OF THE AES ALGORITHM

А.В. Рожков, М.С. Жадан

A.V. Rozhkov, M.S. Zhadan

*Алгебра, теория чисел, криптография, язык программирования Julia.*

Изучается линейное раундовое преобразование алгоритма AES. Приводятся примеры вычислений в новом языке программирования Julia.

*Algebra, number theory, cryptography, Julia programming language.*

The linear round-robin transformation of the AES algorithm is studied. Examples of calculations in the new Julia programming language are given.

### ВВЕДЕНИЕ

Нижеследующие исследования соответствуют стратегии, изложенной в работах [1; 2] и поддержанные фондом Потанина в 2021–2022 гг., речь идет об экспериментальной теории чисел и ее приложениях в криптографии.

В настоящее время шифр AES де-факто является мировым стандартом шифрования несекретной информации, поэтому мы его изучим максимально глубоко. В данной работе изучается его линейное преобразование.

### ВТОРОЕ РАУНДОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В этом случае элементы  $s_{ij}$  открытого текста

$$\begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & s_{03} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{30} & s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

представляют собой 8-мерные вектора над полем GF(2).

Само преобразование имеет вид:  $s \mapsto As + b$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  – циркулянт, каждая строка является сдвигом предыдущей.

Нам нужно найти жорданову форму матрицы  $A$ . Сделаем это средствами языка Julia и ее пакетов Nemo, LinearAlgebra, SymPy.

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН

Вначале создадим пространство матриц размера 8 на 8 над полем GF(2) и пространство вектор столбцов над этим же полем

```
S = MatrixSpace(GF(2),8,8)
```

```
T = MatrixSpace(GF(2),8,1)
```

Теперь зададим матрицу A. Зададим построчечно, так меньше писать знаков препинания, и столбец вектора сдвига b:

```
A=[1 0 0 0 1 1 1 1;1 1 0 0 0 1 1 1;1 1 1 0 0 0 1 1;1 1 1 1 0 0 0 1;1 1 1 1 1 0 0 0;0 1 1 1 1 0 0 0;0 0 1 1 1 1 1 0;0 0 0 1 1 1 1 1]
```

```
b = [1,1,0,0,0,1,1,0]
```

По умолчанию – это целые числа Int64, а нам нужны остатки по модулю 2. Поэтому укажем, какому пространству матриц они принадлежат

```
A = S(A) b = T(b).
```

Теперь создадим единичную матрицу

```
E=Matrix{Int64}(I,8,8)
```

И переформатируем ее в матрицу над полем GF(2): E = S(E).

После этого можно вычислить характеристический многочлен, задав предварительно переменную “x”:

```
@vars x
```

```
p(x)=det(x*E-A)
```

```
p(x)
```

Однако, к сожалению, SymPy в Julia пока не вычисляет характеристические многочлены над полем Галуа.

Но наши старания не совсем напрасны. Вычислять преобразование  $s \mapsto As + b$  мы можем сразу над полем GF(2).

**Пример 1.** Преобразования вида  $s \mapsto As + b$ .

Положим,  $s=[1,0,1,0,1,0,1,0]$ . Переформатируем  $s=T(s)$  и выполним операцию  $A*s+b$ .

**Решение** запишем в виде вектор-строки ( $[0], [1], [1], [0], [1], [1], [0], [0]$ ).

Нули и единицы в квадратных скобках означают, что это не числа, а остатки по модулю 2.

Поэтому вычислим характеристический многочлен по умолчанию в формате Int64. Имеем:

```
julia>@varsx
```

```
(x,)
```

```
julia>p(x)=det(x*E-A)
```

```
p (generic function with 1 method)
```

```
julia>p(x)
```

```
8 7 6 5 4 3 2
```

```
x - 8?x + 24?x - 64?x + 114?x - 104?x + 48?x - 16?x + 5
```

Над полем рациональных чисел получился характеристический многочлен  $x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 64x^5 + 114x^4 - 104x^3 + 48x^2 - 16x + 5 \equiv x^8 + 1 \pmod{2} \equiv (x+1)^8$ .

Над полем GF(2) характеристический многочлен имеет единственный корень 1 кратности 8.

## НАХОЖДЕНИЕ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ

Вычислим значение характеристической матрицы при  $x = 1$ . Снова выполним все вычисления в using Nemo, SymPy, LinearAlgebra:

```
S = MatrixSpace(GF(2),8,8)
A=[1 0 0 0 1 1 1 1;1 1 0 0 0 1 1 1;1 1 1 0 0 0 1 1;1 1 1 1 0 0 0 1;1 1 1 1 1 0 0 0;0 1
1 1 1 1 0 0;0 0 1 1 1 1 1 0;0 0 0 1 1 1 1 1]
E=Matrix{Int64}(I,8,8)
A = S(A); E = S(E); B=A+E
julia> A = S(A); E = S(E); B=A+E
[0 0 0 0 1 1 1 1]
[1 0 0 0 0 1 1 1]
[1 1 0 0 0 0 1 1]
[1 1 1 0 0 0 0 1]
[1 1 1 1 0 0 0 0]
[0 1 1 1 1 0 0 0]
[0 0 1 1 1 1 0 0]
[0 0 0 1 1 1 1 0]
```

Итак, матрица B задает систему линейных уравнений, фундаментальная система решений которой дает нам базис собственных векторов. Систему решаем методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, система имеет три свободных переменных, и мы получаем 3 линейно независимых собственных вектора.

$$e_1 = (1,1,0,0,1,1,0,0), e_2 = (1,0,1,0,1,0,1,0), e_3 = (1,0,0,1,0,0,1).$$

**Пример 2.** Применение собственных векторов к анализу шифра.

Пусть  $V_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  – подпространство, порожденное собственными векторами. Так как собственное значение, которому отвечают эти собственные векторы, равно 1, то под действием линейного отображения, задаваемого матрицей A, все векторы из V не изменяются. Следовательно,

$$\forall x \in V, f(x) = Ax + b = x + b.$$

Теперь выясним – существуют ли элементы векторного пространства, которые остаются неподвижными под действием преобразования  $f(x)$ .

Решим уравнение

$$f(x) = Ax + b = x, \text{ следовательно } (A-E)x = -b.$$

Поскольку характеристика равна 2, то получаем следующую расширенную матрицу исследуемой системы, которую решаем методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из-за последнего уравнения система несовместна. Если бы такие решения были, то это было бы слабостью шифра. Пример закончен.

Вернемся к поиску жордановой формы матрицы A. Поскольку собственных векторов 3, то и жордановых клеток будет 3. Найдем их размер

julia>B^2

[1 0 1 0 1 0 1 0]

[0 1 0 1 0 1 0 1]

[1 0 1 0 1 0 1 0]

[0 1 0 1 0 1 0 1]

[1 0 1 0 1 0 1 0]

[0 1 0 1 0 1 0 1]

[1 0 1 0 1 0 1 0]

[0 1 0 1 0 1 0 1]

Получаем систему:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, пространство решений имеет размерность 6. Поэтому, раз собственных векторов 3, то корневых векторов высоты 2 тоже 3. Значит жордановы клетки имеют размерности или 4 + 2 + 2 или 3 + 3 + 2.

Первый случай имеет место только тогда, когда  $B^3 \neq 0$ . Однако это не так, julia>B^3 – нулевая матрица, мы для экономии места ее не приводим.



Следовательно, жорданова форма матрицы  $A$  над полем  $GF(2)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Продолжая вычисления в Julia, получаем:

`julia>A^3`

```
[0 0 1 0 0 1 0 1]
[1 0 0 1 0 0 1 0]
[0 1 0 0 1 0 0 1]
[1 0 1 0 0 1 0 0]
[0 1 0 1 0 0 1 0]
[0 0 1 0 1 0 0 1]
[1 0 0 1 0 1 0 0]
[0 1 0 0 1 0 1 0]
```

`julia>A^4` – единичная матрица

Следовательно, обратной матрицей к  $A$  будет  $A^3$ , поэтому процедура расшифрования будет выглядеть так:  $s' = As + b \Rightarrow A^3(s' - b) = A^3 s' - A^3 b$ .

### Библиографический список

1. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее. Материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.

# МНОГОЧЛЕНЫ КАК ГЕНЕРАТОРЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

## POLYNOMIALS AS GENERATORS OF PRIME NUMBERS

А.В. Рожков, А.А. Захарьянц

A.V. Rozhkov, A.A. Zakharyants

*Алгебра, теория чисел, криптография, язык программирования Julia.*

Изучается семейство многочленов, сходных с многочленом Эйлера, как генераторы простых чисел.

*Algebra, number theory, cryptography, Julia programming language.*

A family of polynomials similar to the Euler polynomial is studied as generators of prime numbers.

### ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЭЙЛЕРА И ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, МЕНЬШИЕ $f(p-1)$

Работа выполнена в рамках проекта, изложенного в [1–3], поддержанного в 2021–2022 гг. грантом фонда Потанина. Речь идет об экспериментальной теории чисел и ее применении в криптографии.

Многочлен Эйлера  $x^2 + x + 41$  известен тем, что задает простые числа для всех  $x = 0, 1, 2, \dots, 39$ . Хотелось бы найти многочлен вида  $f(x) = x^2 + x + p$  такой, что простые числа получаются при всех  $x = 0, 1, 2, \dots, p-2$ .

Таковыми  $p$  являются  $\{3, 5, 11, 17, 41\}$ . Других простых чисел с таким свойством пока не найдено. Мы провели численный эксперимент и проверили для первых 10 тыс. простых чисел  $p$ , какая часть чисел  $f(0), f(1), \dots, f(p-2)$  является простыми.

**Результаты вычислений.** Выяснилось, что максимальные значения достигаются при  $p=101 - 0.68$  и при  $p=107 - 0.67$ . Следовательно, 68 из 100 и 71 из 106 чисел являются простыми.

Минимальные значения достигаются при  $p=59053 - 0.0417$  и при  $p=90403 - 0.0419$ . В обоих случаях простыми являются только одно число из 25.

В среднем же простыми являются примерно каждое 6–7 число.

Ниже приведена программа на Julia, которая позволила получить эти результаты. Первый модуль Ros1 создает массив простых чисел  $P$ , взятых из интервала  $(2m, 2n+2)$ . Модуль Ros2, используя массив  $P$ , подсчитывает и выводит на печать искомую долю простых чисел, меньших  $f(p-1)$ .

```
using Nemo
function Ros1(m,n)
    P = []
    for i= m:n
        if isprobable_prime(ZZ(2*i+1))
            P = push!(P,2*i+1)
        end
    end
    return P
end
P=Ros(m,n)
function Ros2(P)
    for p in P
        t=1
        for i in 1:(p-1)
            q=i^2+i+p
            if isprobable_prime(ZZ(q))
                t=t+1
            end
            if i%(p-1)== 0
                println("p=",p,",",t/(p-1))
            end
        end
    end
end
```

Рис. 1. Код модулей Ros1 и Ros2

## ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЭЙЛЕРА И ЕГО ПРОСТЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Прямое сравнение частот, появление простых чисел в последовательностях  $[1, 2, \dots, n]$  и  $[f(0), f(1), \dots, f(n)]$  имеет существенный изъян. Конечно, множества  $[1, 2, \dots, n]$ ,  $[f(0), f(1), \dots, f(n)]$  равномощны, но натуральные числа  $[1, 2, \dots, n]$  ограничены числом  $n$ , а значения многочлена  $[f(0), f(1), \dots, f(n)]$  числом  $n^2$ .

Однако, в районе  $n^2$  согласно теореме Чебышева, простые числа встречаются в 2 раза реже, чем вблизи  $n$ . Поэтому значения многочлена находят простые числа в тех местах, где их в 2 раза меньше, чем там, где их ищет натуральный ряд  $[1, 2, \dots, n]$ .

Поэтому рассмотрим модель, более правильно отражающую реальную плотность распределения простых чисел.

Доля простых чисел, меньших  $n^2$ , среди всех натуральных чисел, составляет согласно теореме П.Л. Чебышева  $\frac{1}{\ln(n^2)-1} = \frac{1}{2\ln(n)-1}$ , а среди нечетных в 2 раза больше, т.е.  $\frac{2}{2\ln(n)-1}$ . Поэтому, если выбрать наугад  $n$  нечетных чисел, меньших  $n^2$ , то простых среди них будет  $\frac{2n}{2\ln(n)-1}$ . Поэтому отношение плотности распределения простых чисел на значениях многочлена и на натуральном ряде нужно искать по формуле:

$$T = t : \frac{2n}{2\ln(n)-1} = \frac{t(2\ln(n)-1)}{2n}, \text{ а было } T = \frac{t(\ln(n)-1)}{2n},$$

где  $t$  – число простых чисел среди членов последовательности  $[f(0), f(1), \dots, f(n)]$ .

То есть существуют заданные многочленом 2-й степени последовательности натуральных чисел, где простые числа встречаются в 4 раза чаще, чем в натуральном ряде. Это полезно для практики.

Компьютерная программа, вычисляющая новую функцию  $T$ , состоит из двух модулей. Первый `ros1`, приведенный выше, создает массив  $P$  простых чисел. Модуль `ros3` производит реальные вычисления.

```
function ros3(m,n,P)
    for p in P
        t=0
        for i = m:n
            q=i^2+i+p
            if isprobable_prime(ZZ(q))
                t=t+1
            end
        end
        T= t*(2*log(n)-1)/(2*n)
        if T > 3.5
            println("p=",p," ", "T=",T)
        end
    end
end
```

Рис. 2. Вывод на печать значений  $T > 3.5$

**Результаты вычислений.** Были проверены все простые числа до 8 млн, их примерно 540 тыс. Для каждого простого числа  $p$  вычислялось 1 млн первых значений многочлена  $f(x) = x^2 + x + p$ .

а) Функция  $T_p$  приняла значение больше 3.5 для 528 простых чисел, т.е. примерно для одного числа из тысячи.

б) Для  $p=41$  новая функция  $T$  равна 3.44.

в) Максимум функции  $T$  (до 8 млн) равен  $T=4.18$ ,  $p=1544987$ .

г) Функция  $T > 4$  для 12 простых чисел, примерно одно число на 45 тыс. простых чисел.

д) Для  $p = 55661$  получилось  $T = 3.9$ .

Всего было проверено на простоту примерно 500 млрд чисел.

## ВЫВОДЫ

Мы планируем проводить дальнейшие вычислительные эксперименты в трех направлениях. Искать простые числа среди значений:

1. многочленов вида  $f(x) = x^2 + x + p$ , при  $p$  больше 8 млн;
2. других квадратных многочленов;
3. многочленов произвольной степени;
4. произвольных функций  $f : N \rightarrow N$ , где  $N$  – множество натуральных чисел.

## Библиографический список

1. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее. Материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.
3. Рожков А.В. Экспериментальная математика в КубГУ – первые результаты // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы XIV междунар. науч.-практ. конф. Екатеринбург: РГППУ, 2021. С. 163–172.

# БИНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

## GOLDBACH'S BINARY PROBLEM

А.В. Рожков, Е.С. Клигин

A.V. Rozhkov, E.S. Kligin

*Алгебра, теория чисел, простые числа, многочлены, криптография.*

Изучаются разные подходы к изучению аддитивной теории чисел на примере проблемы Гольдбаха.

*Algebra, number theory, prime numbers, polynomials, cryptography*

Different approaches to the study of additive number theory are studied using the example of the Goldbach's problem.

### ВВЕДЕНИЕ

Работа выполнена в рамках проекта, изложенного в [1; 2], поддержанного в 2021–2022 гг. грантом фонда Потанина. Речь идет об экспериментальной теории чисел и ее применении в криптографии.

Это знаменитая и до сих пор не решенная проблема первого российского криптографа Гольдбаха, пригласившего в Россию Л. Эйлера.

**Гипотеза Гольдбаха в изложении Эйлера.** Любое четное число  $n$  можно представить в виде суммы двух простых чисел  $n = p + q$ . Такая сумма называется разложением Гольдбаха.

Вычисления по проблеме Гольдбаха производились в пакете компьютерной алгебры GAP <https://www.gap-system.org/>

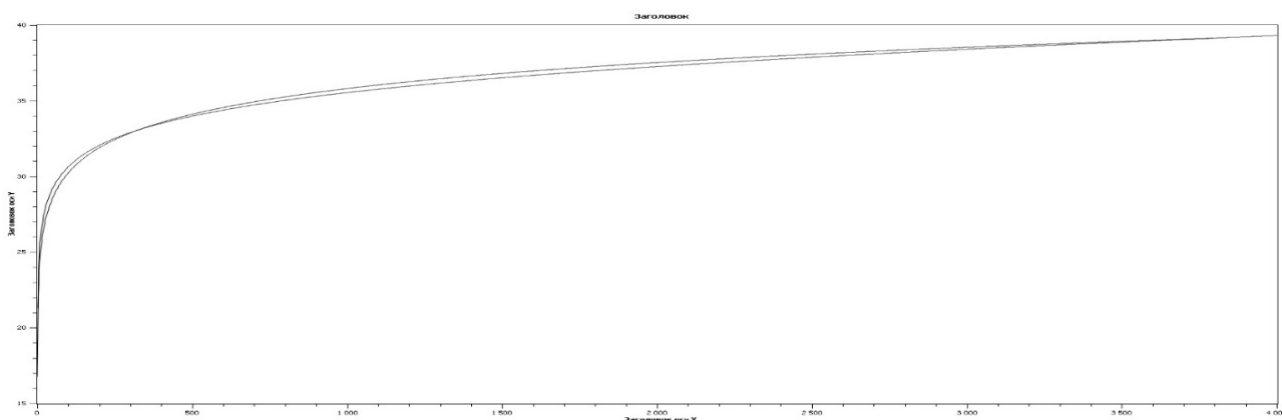


Рис. 1. Рост среднего значения минимального слагаемого в сумме  $n = p + q$  до 4 млрд хорошо аппроксимируется логарифмической функцией

На рисунке изображено реальное значение минимального слагаемого и функция  $\frac{5}{2} \ln(n) - 16$

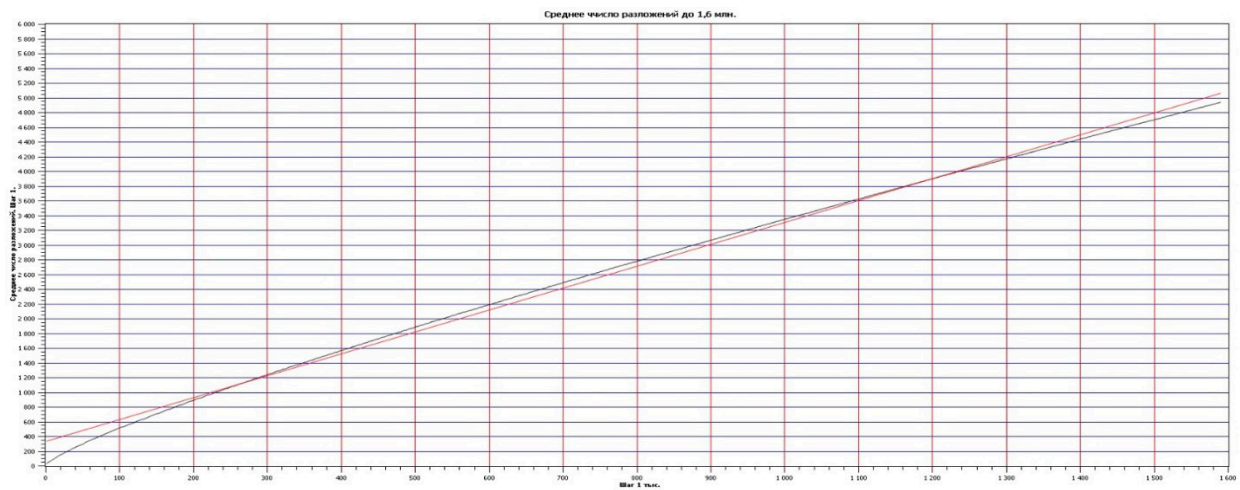


Рис. 2. Среднее число разложений до 1.5 млн хорошо аппроксимируется линейной функцией. Черным выделено реальное число разложений, а красным линейная функция  $0.003 \cdot x + 325$

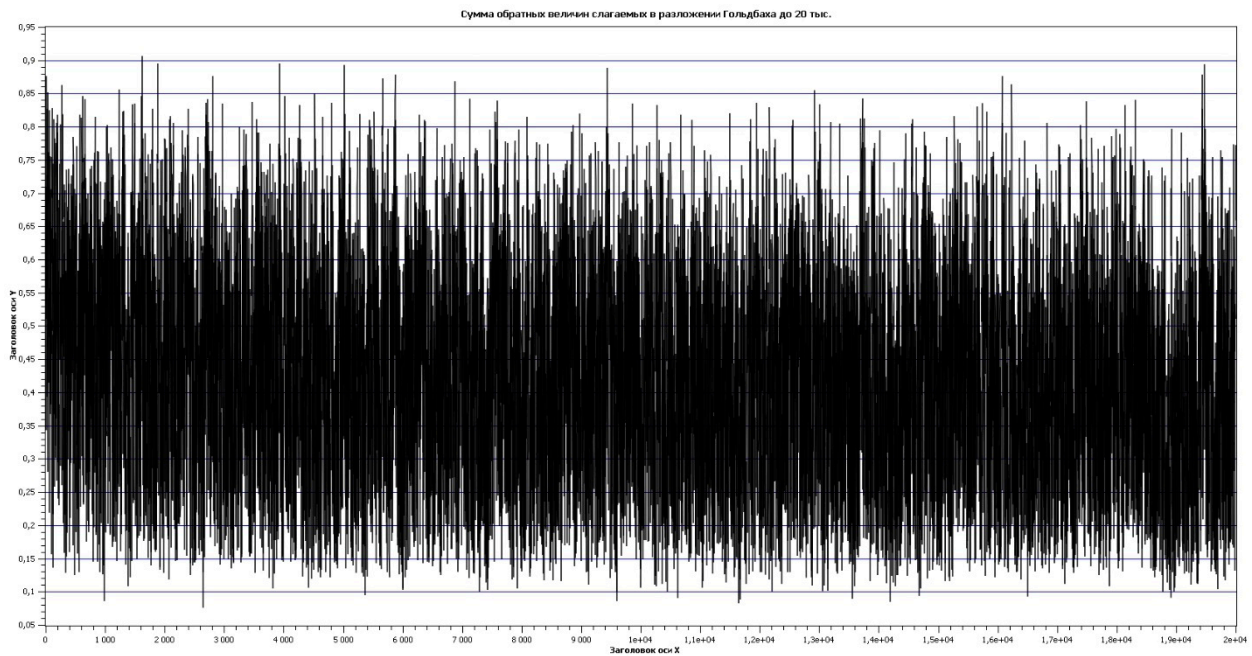


Рис. 3. Сумма обратных величин  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  всех разложений Гольдбаха для числа  $n = p + q$ , до  $n = 20000$

## ИЗМЕНЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА В СУММЕ ГОЛЬДБАХА

```

LogTo("GoldOneMax1.txt");
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,M;
l:=100;
#M:=[];
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then

```



```

if 2*j+1 >= l then
Print("i=",2*i,"->",2*j+1, "\n");
l:= 2*j+1;
fi;
#
# Print(2*j+1, "\n");
break;
fi;
od;
od;
return(1);
end;

```

Результат вычислений. График построен средствами программы <http://scidavis.sourceforge.net/>

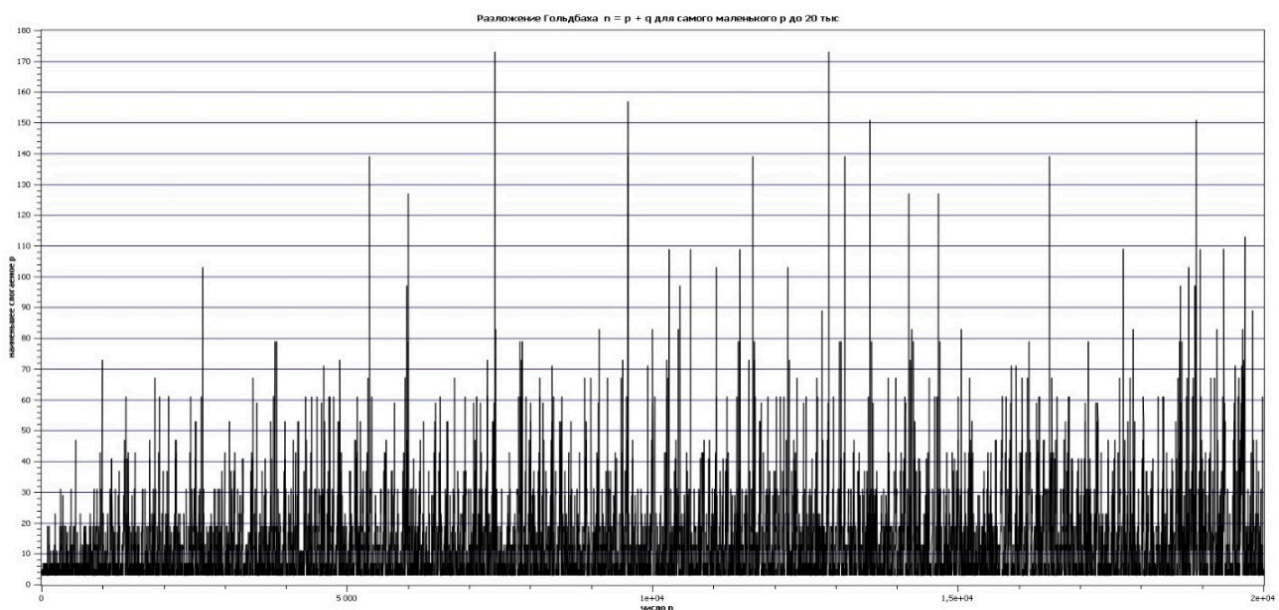


Рис. 4. Разложение Гольдбаха  $n = p + q$  для наименьшего  $p$  до 20 тыс.

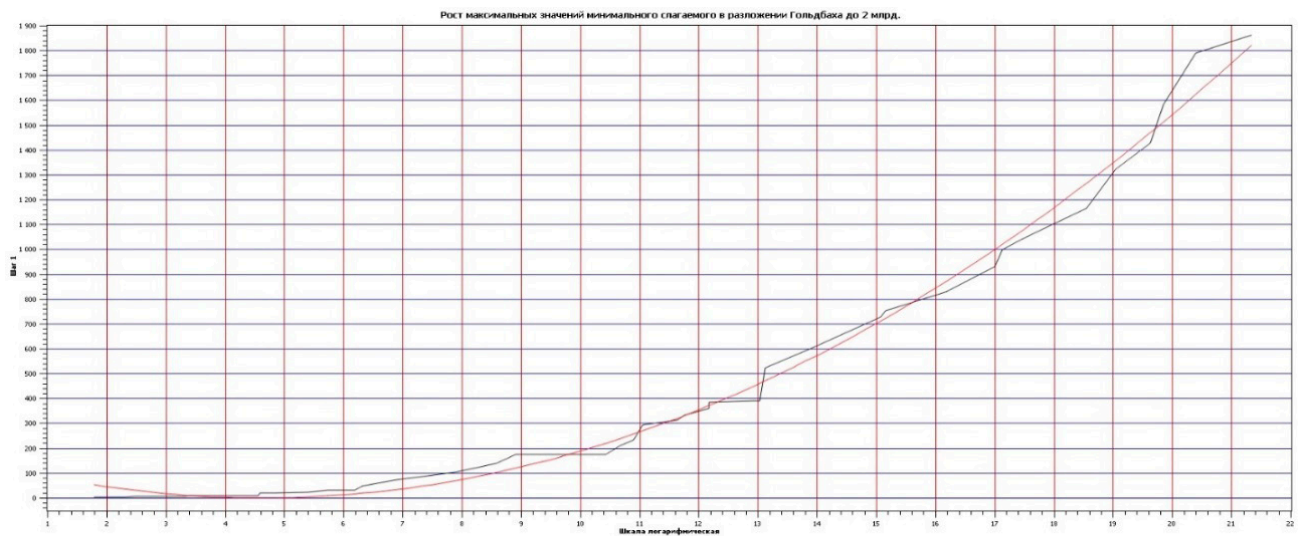


Рис. 5. Рост максимальных значений минимального слагаемого в разложении Гольдбаха до 2 млрд

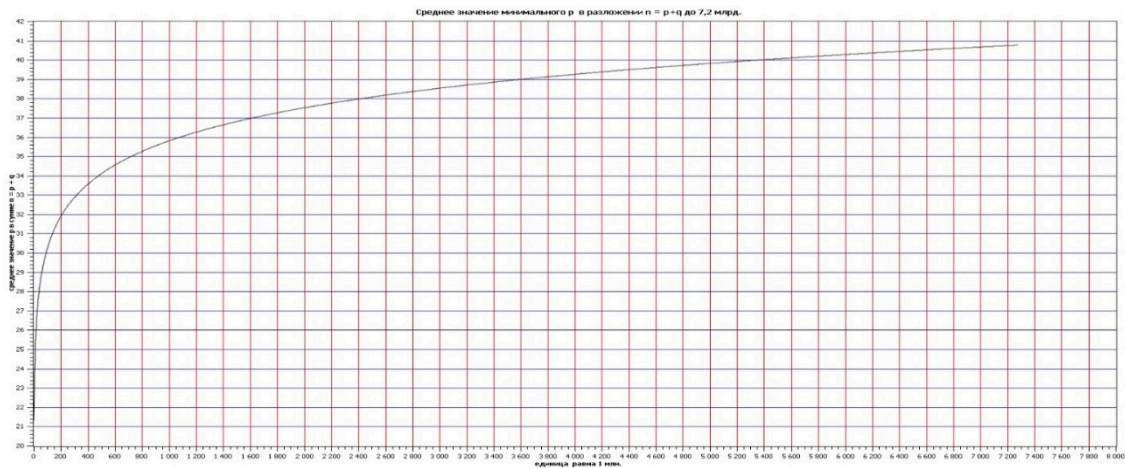


Рис. 6. Среднее значение минимального  $p$  в разложении  $n = p + q$  до 7,2 млрд

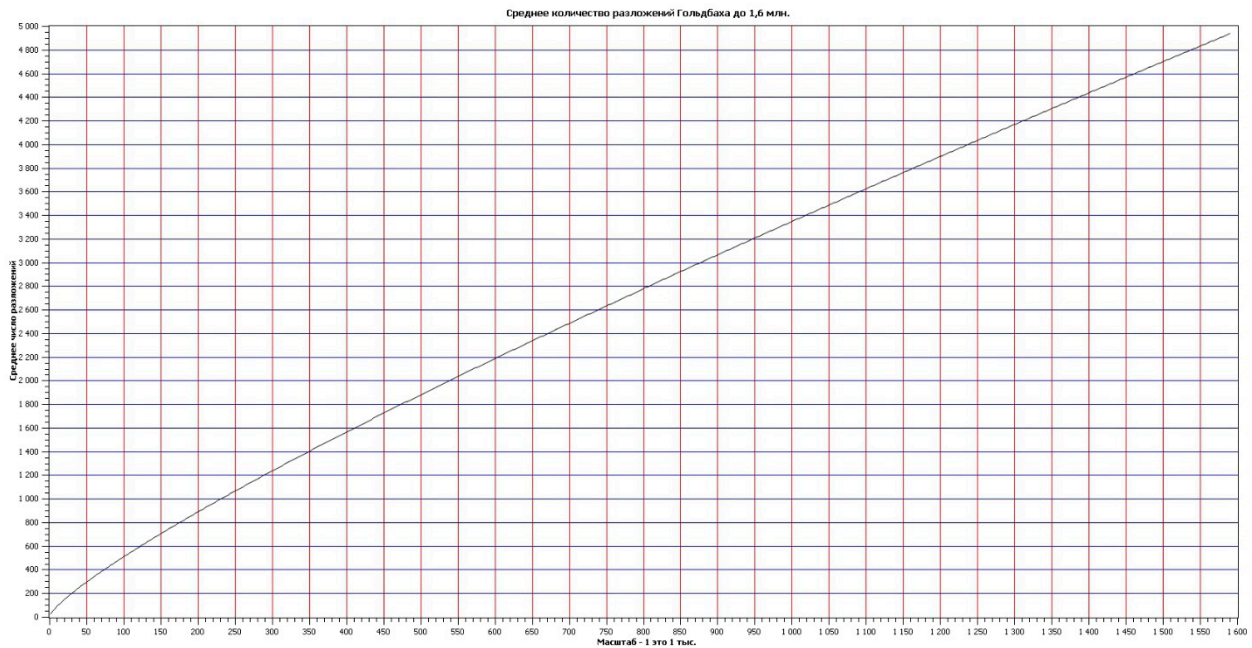


Рис. 7. Среднее количество разложений Гольдбаха до 1,6 млн.

```

LogTo("GoldNM-3.txt");
GoldNM:=function(m,n)
local i,j,k,l,t,M,L;
l:=0;
t:=2.0*m/(Log(2.0*m)-1.0)^2;
M:=[]; L:=[];
for k in [m..n] do
M[k]:=0;
od;
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
M[j]:=M[j]+1; l:=l+1;
Print("i=",2*i,"->", 2*j+1,"+",2*i-2*j-1, "\n");
fi;
od;
od;

```

```

L[1]:=M;
L[2]:= Minimum(M);
L[3]:= Maximum(M);
L[4]:= 1.0*I/(n-m+1);
L[5]:=t/L[2];
L[6]:=t/L[3];
L[7]:=t/L[4];
return(L);
end;

```

Вычисления подсказали

**Гипотеза.** Для любого четного числа  $N > 20\,000$ , при его разложении в сумму двух простых чисел, в эту сумму может входить как минимум каждое 20-е простое число  $N$ , меньшее  $N$ , но не больше, чем каждое 5-е простое число, меньшее  $N$ , а в среднем каждое 12-е.

## МИНИМАЛЬНОЕ И МАКСИМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛЬДБАХА

```

LogTo("GoldOne.txt");
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,M;
l:=0.0;
for i in [m..n] do
  for j in [1..Int((i-1)/2)] do
    if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
      l:=l + 2*j+1;
      break;
    fi;
  od;
  if i mod 10^6 = 0 then
    Print( 1.0*I/(i)- (5/2)*Log(2.0*i)+16.0,"","\\n");
    fi;
od;
l:=1.0*I/(n-m+1);
return(l);
end;
L:=Gold(1,10^10);

```

## ПОИСК КАЖДОГО ПЕРВОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ГОЛЬДБАХА

```

LogTo("Gold1.txt");
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,M,L;
l:=0;
M:=[]; L:=[];
for k in [m..n] do
  M[k]:=0;
od;
for i in [m..n] do
  for j in [1..Int((i-1)/2)] do
    if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then

```

```

M[i]:=M[i]+1; l:=l+1;
Print("i=",2*i,"->", 2*j+1,"+",2*i-2*j-1, "\n");
fi;
od;
od;
L[1]:=M;
L[2]:= l;
L[3]:= 1.0*l/(n-m);
return(L);
end;

```

## ПОИСК ВСЕХ РАЗЛОЖЕНИЙ ГОЛЬДБАХА

```

LogTo("GoldSumm5.txt");
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,l1,l2,L,S;
l:=0; l1:=0.0; l2:=0.0; L:=0.0; S:=0.0;
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
L:=L + 1.0/(2*j+1) + 1.0/(2*i-2*j-1);
fi;
od;
S:=S+L;
if i mod 10 = 0 then
Print(S/(i-m+1), "\n");
fi;
# if l>= L then
# Print(i," ",l,"\n"); L:=l;
# fi;
L:=0.0;
od;
# l:=1.0*l/(n-m+1);
return(1);
end;

```

## СУММА ОБРАТНЫХ ВЕЛИЧИН РАЗЛОЖЕНИЙ ГОЛЬДБАХА

```

LogTo("GoldOneS6.txt");
Gold:=function(m,n)
local i,j,k,l,l1,l2,L;
l:=0; l1:=0.0; l2:=0.0; L:=0.0;
for i in [m..n] do
for j in [1..Int((i-1)/2)] do
if IsProbablyPrimeInt(2*j+1) and IsProbablyPrimeInt(2*i-2*j-1) then
l:=l+1;
l1:=l1 + 2*j+1;
Print("i=",2*i,"->",2*j+1, "\n");
Print(2*j+1, "\n");
break;
fi;

```

```

od;
l2:=l2+l1/l;
L:= L+l;
l:=0;
l1:=0.0;
if i mod 1000 = 0 then
Print( "l2=",Int(l2/(i-m+1)),"->", "L=",Int(L/(i-m+1)),"\n");
Print( L/(i-m+1),"\n");
fi;
od;
l:=1.0*l/(n-m+1);
return(1);
end;

```

При дальнейших исследованиях все программы будут переписаны на языке Julia.

### **Библиографический список**

1. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.

# АЛГОРИТМ RSA УТОЧНЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ В СРЕДЕ JULIA

## THE RSA ALGORITHM FOR REFINEMENT AND CALCULATION IN THE JULIA

А.В. Рожков, А.А. Овчинникова

A.V. Rozhkov, A.A. Ovchinnikova

*Алгебра, теория чисел, криптография, язык программирования Julia.*

Излагаются особенности обоснования алгоритма RSA. Приводятся примеры вычислений в новом языке программирования Julia.

*Algebra, number theory, cryptography, Julia programming language.*

The features of the justification of the RSA algorithm are described. Examples of calculations in the new Julia programming language are given.

### СЛОЖНОСТИ ОБОСНОВАНИЯ КОРРЕКТНОСТИ АЛГОРИТМА RSA

Данное исследование соответствует стратегии, поддержанной грантом фонда Потанина 2012–2022 гг. Речь идет об экспериментальной теории чисел и ее применении в криптографии.

Алгоритм RSA создан в 1977 г. Это один из первых и самых знаменитых не-симметричных криптографических алгоритмов.

**Описание алгоритма RSA.** Введем 6 параметров  $p, q, n, m, e, d$  – его ключи. Пусть  $p$  и  $q$  – простые числа:  $n = p \cdot q, m = \varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$ ,  $\varphi$  – функция Эйлера.

$$n = |Z_n|, m = \varphi(n) = |Z_n^*|, Z_n^* \cong Z_p^* \times Z_q^*.$$

Введем последние два параметра  $e$  и  $d$ :  $\gcd(e, m) = 1, ed = 1 \pmod{m}$ .

Открытый текст – это целое число  $0 < M < n$ .

Шифр текст – это целое число  $0 < C < n$ .

Алгоритм зашифрования  $E(M) = M^e \pmod{n} = C$ .

Алгоритм расшифрования  $D(C) = C^d \pmod{n} = M^{ed} \pmod{n}$ .

Открытый ключ  $\{e, n\}$ . Секретный ключ  $\{d, p, q, m\}$ .

### ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ АЛГОРИТМА RSA

Процесс проверки у разных авторов имеет ряд разночтений, например, о необходимом и допустимом уровне математической строгости. Для программирования, зная, что формула правильная, – это не важно. Для математики строгость доказательства важна всегда.

**Проверка корректности.** Нужно убедиться, что  $M^{ed} = M \pmod{n}$ . Рассмотрим два случая.

а) Пусть  $M \in Z_n^*$ . По условию,  $ed = 1 \pmod{m} \Rightarrow ed = rm + 1$ . Так как порядок группы  $Z_n^*$  равен  $m$ , то по теореме Лагранжа

$$M^m = 1 \pmod{n} \Rightarrow M^{ed} = M^{rm+1} = (M^m)^r \cdot M = M \pmod{n}.$$



б) Пусть простое число  $p$  делит  $M$  (если  $q$  делит  $M$ , то все аналогично). Отметим, что одновременно  $p$  и  $q$  не могут делить  $M$ , т.к.  $M < n = pq$ .

В этом случае  $M \notin Z_n^*$  и предыдущие рассуждения не применимы.

### Разночтения и интерпретации

В некоторых книгах этот случай не рассматривается, будто бы он вообще невозможен. Примеры – очень хорошие учебники [1; 2].

Или же этот случай сознательно исключается – примеры учебники [3; 4].

Но авторы успокаивают читателя, что вероятность исключаемого события ничтожна, если простые числа 256-битные:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2^{256}} + \frac{1}{2^{256}} = \frac{1}{2^{128}} < 10^{-38}.$$

Это, конечно, правильно. Но математику все же интересно – расшифровывается или нет? А может, расшифровывается, но не всегда?

В [5] дается ответ «Да, и всегда!» Вот доказательство из книги:

$$\begin{aligned} C^d &= (M^e)^d = M^{ed} = M^{r\varphi(n)+1} = M^{r(p-1)(q-1)+1} = \\ &= M^{rp(q-1)} \cdot M^{-rq+r+1} = (M^p)^{r(q-1)} \cdot M^{-rq+r+1} \equiv \\ &\equiv M^{r(q-1)} \cdot M^{-rq+r+1} \equiv M \pmod{p}. \end{aligned}$$

Но для нашего случая, когда  $p \mid M$ , эти выкладки не корректны. А именно нижеследующий переход никогда невозможен:

$$M^{r(p-1)(q-1)+1} = M^{rp(q-1)} \cdot M^{-rq+r+1}.$$

Неравенство  $-rq+r+1 < 0$  равносильно неравенству  $r(q-1) > 1$ . А оно верно всегда, т.к.  $q$  – простое число, а  $r$  – целое положительное число.

Пусть  $k = rq-r-1 > 0$ , тогда элемент  $M^{-rq+r+1} = (M^{-1})^k$  кольца вычетов  $Z_n$  просто не существует. Поскольку  $p \mid M$ , то  $M$  не обратим в кольце  $Z_n$ , и запись  $M^{-1}$  – просто запись, не имеющая математического смысла.

### Аккуратное изложение проблемного случая, когда $p \mid M$

В Википедии доказательство правильное. Но ссылаться, как они это делают, на китайскую теорему об остатках необязательно.

Так как  $p \mid M$ , то  $M = 0 \pmod{p}$  и  $M^{ed} = 0 \pmod{p}$ , следовательно,  $M^{ed} = M \pmod{p}$ .

Поскольку  $q$  не делит  $M$ , то по модулю  $q$  число  $M$  обратимо и по теореме Эйлера  $M^{q-1} = 1 \pmod{q}$ , значит,

$$M^{ed} = M^{rm+1} = M^{r(p-1)(q-1)+1} = (M^{q-1})^{r(p-1)} \cdot M = 1^{r(p-1)} \cdot M = M \pmod{p}$$

Итак, имеем  $M^{ed} = M \pmod{p}$  и  $M^{ed} = M \pmod{q}$ . Поэтому  $M^{ed} - M$  делится на  $p$  и на  $q$ . Так как  $p$  и  $q$  простые числа, то  $M^{ed} - M$  делится на  $pq = n$ .

Значит,  $M^{ed} = M \pmod{n}$ .

То есть расшифрование всегда происходит корректно.

## ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЯЗЫКЕ JULIA

Нижеследующая тематика продолжает исследования, заявленные в [6; 7].

**Пример 1.** Рассмотрим систему RSA:  $p=29$ ,  $q=53$ ,  $n=1537$ ,  $m=1456$  и подберем подходящие ключи зашифрования  $e$  и расшифрования  $d$ .

**Решение.** Опять применим язык Julia и подключим пакет Nemo.

```
julia>using Nemo
```

```
Welcome to Nemo version 0.47.2
```

```
julia>factor(ZZ(28*52))
```

```
1 * 13 * 7 * 2^4
```

Мы, пока не поняли, как Nemo упорядочивает разложение на простые множители, и зачем вначале пишет 1.

Главное, что  $1456=2^4*7*13$  и самое маленькое число, с ним взаимно простое, – это  $e=3$ . Теперь найдем  $d$ :

```
julia>F=ResidueRing(ZZ, 1456)
```

```
Integers modulo 1456
```

```
julia>F(3)^(-1)
```

```
971
```

Итак,  $d=971$ ,

Поскольку  $\text{НОД}(p-1,q-1)=\text{НОД}(28,52)=4$ , то разных ключей расшифрования должно быть 4.

Согласно теории, решать уравнения нужно по модулю  $1456/4=364$ .

```
julia>F1=ResidueRing(ZZ, 364)
```

```
Integers modulo 364
```

```
julia>F1(3)^(-1)
```

```
243
```

Итак,

$$d_0 = 243 \Rightarrow K = \{243, 243 + 364, 243 + 2 * 364, 243 + 3 * 364\} = \{243, 607, 971, 1335\}$$

Проверим, что все эти ключи расшифровывают правильно.

Возьмем наугад какое-нибудь число, например, «самое случайное» 1234,

Зашифруем его на ключе  $e=3$

```
julia>1234^3%1537
```

```
36
```

Наш шифр текст – это  $C = 36$ ,

А теперь расшифруем его 4-мя разными ключами

```
julia>F2=ResidueRing(ZZ, 1537)
```

```
Integers modulo 1537
```

```
julia>for i in [243,607,971,1335]
```

```
    print(F2(36)^i,",";")
```

```
end
```

```
1234;1234;1234;1234.
```

Пример закончен.

## Пример 2.

Еще одна слабость RSA – это выбор близких простых чисел. В этом случае можно подобрать нужное разложение.

Здесь даже в учебных целях очень маленькими числами не обойтись.

Но и 150-значные числа ничему не учат, их длина просто лишает нас всякой надежды на успех.

Ограничимся 5-значными числами. Опять же руками ничего считать не будем, а для поиска простых чисел подключим пакет Primes.

```
julia>usingPrimes
```

```
julia>p=prime(1959)
```

```
16987
```

```
julia>q=prime(1975)
```

```
17137
```

```
julia>n=p*q
```

```
291106219
```

```
julia>m=(p-1)*(q-1)
```

```
291072096
```

```
julia>factor(m)
```

```
2^5 ? 3^3 ? 7 ? 17 ? 19 ? 149
```

Итак,  $m = 291072096 = 2^5 * 3^3 * 7 * 17 * 19 * 149$ .

```
julia>p=prime(1959)
```

```
16987
```

```
julia>q=prime(1975)
```

```
17137
```

```
julia>n=p*q
```

```
291106219
```

```
julia>m=(p-1)*(q-1)
```

```
291072096
```

```
julia>factor(m)
```

```
2^5 ? 3^3 ? 7 ? 17 ? 19 ? 149
```

Итак,  $m = 2^5 * 3^3 * 7 * 17 * 19 * 149$

Самое маленькое подходящее число шифрования – это  $e=5$ .

## Взлом шифра

Если из неких источников *highly likely* известно, что числа  $p$  и  $q$  близки друг к другу и у нас есть примерно 1000 попыток подобрать разложение  $n = p*q$ .

а) Начальные данные  $n = 291106219$ ,

значит,

```
julia>n = 291106219
```

```
291106219
```

```
julia>sqrt(n) # извлекаем квадратный корень
```

```
17061.835159208404
```

Самое простое решение – это начиная с числа 17063 (все простые числа нечетные), подниматься вверх, разыскивая наименьший простой множитель, как результат деления на наибольший.

```
julia>for i in 17063:2:18000
    println(291106219/i)
end
```

Прогон этой программы даст требуемый ответ.

### **Библиографический список**

1. Харин Ю.С. и др. Математические основы криптологии. БГУ, 1999, и 2-е изд. 2003.
2. Рябко Б.Я. Криптография в информационном мире. Горячая линия. 2018.
3. Фомичев В.М. Дискретная математика и криптология. МИФИ, 2003.
4. Фомичев В.М., Мельников Д.А. Криптографические методы защиты информации. Юрайт, 2017. Ч. 2.
5. Алферов А.П. и др. Основы криптографии. 2-е изд. Гелиос АРВ, 2002.
6. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286-295.
7. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы II Международной научной конференции. 2017. С. 198–203.

# СЛОЙНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ И ГРУППЫ СО СЛОЙНО КОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

## LAYER-FINITE GROUPS AND GROUPS WITH A LAYER-FINITE PERIODIC PART

В.И. Сенашов

V.I. Senashov

*Группа, слой, периодичность, группа Шункова, черниковские группы, периодическая часть, условия конечности.*

Изучаются бесконечные группы с условиями конечности для бесконечной системы подгрупп. Изучаются группы с условием: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы является слойно конечной группой или нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет слойно конечную периодическую часть. Результаты для почти слойно конечных групп и групп с почти слойно конечной периодической частью переносятся на слойно конечные группы и группы со слойно конечной периодической частью. Получены новые характеристики слойно конечных групп и групп со слойно конечной периодической частью.

*Group, layer, periodicity, Shunkov group, Chernikov groups, periodic part finiteness conditions.*

Infinite groups with finiteness conditions for an infinite system of subgroups are studied. Groups with a condition: the normalizer of any non-trivial finite subgroup is a layer-finite group or the normalizer of any non-trivial finite subgroup has a layer-finite periodic part are studied. Results for almost layer-finite groups and groups with almost layer-finite periodic part are transferred to layer-finite groups and groups with layer-finite periodic part. New characterizations of layer-finite groups and groups with layer-finite periodic part are obtained.

**A** *layer-finite group* is a group whose set of elements of any given order is finite.

This concept was first introduced by S.N. Chernikov in his work [1]. Layer-finite groups were studied by S.N. Chernikov, R. Baer, Kh.Kh. Mukhamedzhan, Ya.D. Polovitsky, and others.

An *almost layer-finite group* is an extension of a layer-finite group by a finite group.

Almost layer-finite groups are a much broader class of groups than layer-finite groups, in particular, it includes all Chernikov groups.

Chernikov groups are not necessarily layer-finite.

Layer-finite groups were first studied by S.N. Chernikov in connection with the study of groups with a minimality condition in the case when the index of the center of the group is finite.

Recall that a group is called Chernikov if it is either finite or is a finite extension of a direct product of a finite number of quasicyclic groups.

The group  $G$  is called the *Shunkov group* if for any prime  $p$  and for every finite subgroups  $H$  from  $G$  any two conjugate elements of order  $p$  from the factor-group  $N_G(H)/H$  generate a finite subgroup.

Results on characterizations of layer-finite groups are available in the works of S.N. Chernikov, V.P. Shunkov, A.I. Sozutov, V.O. Gomer, M.N. Ivko, E.I. Sedova, S.I. Shakhova, V.I. Senashov.

Theorem (V.O. Gomer [2]). *Let  $G$  be a periodic binary solvable group,  $a$  its element of prime order  $p$ , such that:*

1) *in  $C_G(a)$  any locally finite subgroup is layer-finite and has finite Sylow  $q$ -subgroups for all primes  $q$ ;*

2) *any locally finite subgroup containing an element  $a$  is layer-finite.*

*Then  $G$  is a locally solvable (locally finite) layer-finite group.*

Theorem (A.I. Sozutov, S.I. Shakhova [3]). *For an infinite group  $G$ , all of whose proper subgroups are layer-finite, one of the following statements is true.*

1)  *$G$  is a layer-finite group;*

2)  *$G = P\lambda\langle a \rangle$ , where  $P$  is a Chernikov complete Abelian  $p$ -group that does not contain proper infinite  $\langle a \rangle$ -invariant subgroups,  $\langle a \rangle$  is a primary group, and  $|G:C_G(P)|$  is a prime number;*

3)  *$G/Z(G)$  is a simple non-locally finite group.*

Theorem (E.I. Sedova [4]). *A periodic residually finite  $F^*$ -group in which every locally finite subgroup is layer-finite is a locally finite layer-finite group.*

A group is called *residually finite* if for every distinct element of it there exists a homomorphism onto a finite group under which the images of these elements are also distinct.

A group  $G$  is called an  $F_q$ -group if for any finite subgroup  $K$  of it and any elements  $a, b$  of the same prime order  $q$  there exists an element  $c$  of  $T=N_G(K)/K$  such that  $\langle a, b^c \rangle$  is finite. If this property is inherited by subgroups of  $G$ , then it is called an  $F_q^*$ -group.

Theorem (E.I. Sedova [4]). *A periodic group is a locally solvable layer-finite group if and only if it is binary solvable and any of its locally solvable subgroups is layer-finite.*

Theorem (V.I. Senashov [5]). *Every conjugately biprimatively finite group with a strongly embedded subgroup is either almost layer-finite or contains a proper not almost layer-finite subgroup.*

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called strongly embedded in  $G$  if  $H$  is a proper subgroup of  $G$  containing involutions, and the intersection of  $H$  and  $x^{-1}Hx$  does not contain involutions for elements  $x$  from  $G \setminus H$ .

Another criterion for almost layer-finiteness of a group was obtained by M. N. Ivko.

Theorem (M.N. Ivko) [6]. *Let  $G$  be a periodic almost locally soluble group possessing an elementary abelian subgroup  $V$  of order  $p^2$ . If the centralizer in  $G$  of any non-identity element of  $V$  is layer-finite, then  $G$  is almost layer-finite.*

A number of results for almost layer-finite groups and groups with an almost layer-finite periodic part can easily be extended to layer-finite groups and groups with a layer-finite periodic part.

V.P. Shunkov proved the following theorem:

Theorem (V.P. Shunkov, Theorem 1 from [7]). *A locally finite group  $G$  is almost layer-finite if and only if it is almost layer-finite if  $G$  satisfies the condition: the normalizer of any non-trivial finite subgroup of  $G$  is an almost layer-finite group.*

Based on this result, the following can easily be proved



Theorem (V.I. Senashov, Theorem 2 from [8]). *A locally finite group  $G$  if and only if is layer-finite if  $G$  satisfies the condition: the normalizer of any non-trivial finite subgroup of  $G$  is a layer-finite group.*

Previously, the author characterized groups with a condition: the normalizer of any non-trivial finite subgroup of  $G$  is an almost layer-finite group or has an almost layer-finite periodic part.

A similar situation was studied when Shunkov groups are characterized by additional restrictions: either the periodic group contains a strongly embedded subgroup, or the periodic group does not contain subgroups of the form  $PSL_2(q)$ , or the mixed group contains a strongly embedded subgroup with Chernikov periodic part, the periodic group contains a strongly embedded almost layer-finite subgroup, or the group contains a strongly embedded subgroup with almost layer-finite periodic part.

Theorem (V.I. Senashov [9]). *Let a periodic Shunkov group  $G$  contain a strongly embedded subgroup. If the normalizer of any nontrivial finite subgroup in  $G$  is almost layer-finite, then the group  $G$  is almost layer-finite.*

We can formulate this theorem for layer-finiteness of the group and subgroups instead of almost layer-finiteness.

Theorem (V.I. Senashov [8]). *Let a periodic Shunkov group  $G$  contain a strongly embedded subgroup. If in  $G$  the normalizer of any non-trivial finite subgroup is layer-finite, then the group  $G$  is layer-finite.*

The following two theorems characterize almost layer-finite groups in the class of periodic Shunkov groups under additional restrictions: in the absence of elements of order three in the group and under a weaker restriction in the absence of subgroups of the form  $PSL_2(q)$  in the group.

Theorem (V.I. Senashov [10]). *Let  $G$  be a periodic Shunkov group without elements of order three. If the normalizer of any non-trivial finite subgroup in  $G$  is almost layer-finite, then the group  $G$  is also almost layer-finite.*

Theorem (V.I. Senashov [10]). *Let  $G$  be a periodic Shunkov group without subgroups of the form  $PSL_2(q)$ . If the normalizer of any non-trivial finite subgroup in  $G$  is almost layer-finite, then the group  $G$  is also almost layer-finite.*

These two theorems can be similarly reformulated for layer-finiteness of groups instead of almost layer-finiteness.

Theorem (V.I. Senashov [8]). *Let  $G$  be a periodic Shunkov group without elements of order three. If the normalizer of any nontrivial finite subgroup in  $G$  is layer-finite, then  $G$  is also layer-finite.*

Theorem (V.I. Senashov [8]). *Let  $G$  be a periodic Shunkov group without subgroups of the form  $PSL_2(q)$ . If the normalizer of any nontrivial finite subgroup in  $G$  is layer-finite, then  $G$  is also layer-finite.*

We present one more theorem for a Shunkov group with a strongly embedded subgroup with an almost layer-finite periodic part, in which the normalizer of any non-trivial finite subgroup has an almost layer-finite periodic part.

Three articles by the author [11–13] are devoted to proving the following theorem.

Theorem (V.I. Senashov). *Let a Shunkov group contain a strongly embedded subgroup with an almost layer-finite periodic part. If in the group the normalizer of any non-trivial finite subgroup has an almost layer-finite periodic part, then the group itself has an almost layer-finite periodic part.*

This theorem can be formulated for the layer-finiteness of periodic parts of the group and periodic parts of subgroups instead of their almost layer-finiteness.

Theorem (V.I. Senashov [8]). *Let a Shunkov group contain a strongly embedded subgroup with a layer-finite periodic part. If in a group the normalizer of any non-trivial finite subgroup has a layer-finite periodic part, then the group itself has a layer-finite periodic part.*

Similar results were previously obtained with restrictions on solvable subgroups. Without using the theorem, the proof of the theorem would be quite long (the proof of a similar theorem from [14] takes 12 journal pages). In [8] this theorem is proved in a few lines.

The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. 0287-2021-0002.

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

## Conclusion

In the report we include the results on the layer-finite groups and almost layer-finite groups from the Krasnoyarsk school of group theory. The paper presents results on the characterizations of layer-finite groups and groups with layer-finite periodic part.

## References

1. Chernikov S.N. To the theory infinite special  $p$ -groups // *Doclady of USSR Academy of Sciences*. 1945. P. 71–74.
2. Gomer V.O. On groups with elements of finite ranks // *Krasnoyarsk, Abstract of Ph.D. thesis, Novosibirsk: Institute of Mathematic of Siberian Division of Russian Academy of Sciences, 1992.*
3. Sozutov A.I., Shahova S.I. Structure of quasi-layer-finite groups // *Math. Notes*. 2002. Vol. 72, iss. 1. P. 118–130.
4. Sedova E.I. Periodic  $F^*$ -groups with additional finiteness conditions // *Krasnoyarsk, Ph.D. thesis, Krasnoyarsk State University, 1985.*
5. Senashov V.I. Groups with minimality condition for non-almost layer-finite subgroups // *Ukraine Math. Journ.* 1991. Vol. 43, no. 7–8. P. 1002–1008.
6. Ivko M.N. Characterizations of groups with layer-finite periodic parts // *Krasnoyarsk, Ph.D. thesis, Krasnoyarsk State University, 1991.*
7. Senashov V.I., Shunkov V.P. Almost layer-finiteness of a periodic part of a group without involutions // *Discrete Mathematics*. 2003. Vol. 15, no. 3. P. 91–104.

8. Senashov V.I. Layered finiteness in some groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2024. Vol. 48. P. 45–151.
9. Senashov V.I. Structure of an infinite Sylow subgroup in some periodic Shunkov groups // Discrete Math. 2002. Vol. 14. P. 133–152.
10. Senashov V.I. Characterization of Shunkov groups // Ukrainian math. Journal. 2008. Vol. 60. P. 1110–1118.
11. Senashov V.I. On Shunkov groups with a strongly embedded subgroup // Proceedings of IMM UrO RAN. 2009. Vol. 15. P. 203–210.
12. Senashov V.I. On Shunkov groups with a strongly embedded almost layer-finite subgroup // Proceedings of IMM UrO RAN. 2010. Vol. 16. P. 234–239.
13. Senashov V.I. On groups with a strongly embedded subgroup that has an almost layer-finite periodic part // Ukrainian math. Journal. 2012. Vol. 64. P. 384–391.
14. Senashov V.I. Groups with layer-finite periodic part // Siberian Math. J. 1997. Vol. 38. P. 1374–1386.

# ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## NUMERICAL SEQUENCES

В.И. Сенашов, А.В. Сенашова

V.I. Senashov, A.V. Senashova

*Последовательности, апериодическое слово, алфавит, локальная конечность, проблема Бернсайда, периодическая группа, конечная группа.*

В докладе сделан обзор результатов по распределению элементов в числовых последовательностях. Описаны различные варианты постановок проблем Бернсайда и сделан краткий обзор их решения. Показана связь между исследованием последовательностей и решением проблемы Бернсайда. Рассматривается распределение элементов в последовательностях для двухбуквенного и трехбуквенного алфавитов. В докладе будут представлены новые результаты по распределению элементов в последовательностях.

*Sequences, aperiodic word, alphabet, local finiteness, Burnside problem, periodic group, finite group.*

The report provides an overview of the results on numerical sequences. Various formulations of Burnside's problems are presented and a brief overview of their solutions is given. The connection between the study of sequences and the solution of Burnside's problem is presented. We consider the distribution of elements in sequences under two-letter and three-letter alphabets. The report will present new results on the distribution of elements in sequences.

**A**ny finite group satisfies some identity relation of the form  $x^n=1$ , where for  $n$  one can take the order of the group. The question naturally arises as to the correctness of the converse, that is: is any group satisfying an identity  $x^n=1$  locally finite? This problem was posed in 1902 by the well-known British mathematician W. Burnside in the following form [1]: Let  $a_1, a_2, \dots, a_m$  be independent elements generating a group  $G$  such that there identity  $x^n=1$  holds for any element  $x \in G$ , where  $n$  is a given integer. Is the group  $G$  always finite? And if so, then what is the order of  $G$ ?

In 1950 the Burnside problem gave rise to another problem on finite periodic groups, formulated by Magnus and called by him the restricted Burnside problem. It is called the Burnside–Magnus problem. In the Burnside problem the question of local finiteness of periodic groups of a given exponent was posed.

Negative answer for it was received in the articles of E.S. Golod. S.V. Aleshin, R.I. Hryhorczuk, V.I. Sushchanskii. W. Burnside [1] specifically noted the part of question on locally finiteness of group with the identity  $x^n=1$ .

In our time this question has the status of a Burnside problem.

Firstly, a negative answer to Burnside problem was received in 1968 in the works of P.S. Novikov – S.I. Adyan [2–4].

A positive answer to Burnside's main question is known only for very small values of the exponent  $n$ . In [1] Burnside proved local finiteness for  $n$  no more than 3, and the finiteness of the group  $B(2,4)$ . In [5] I.N. Sanov proved finiteness for  $n = 4$  and any  $m$ .

Finally, in 1958 Marshall Hall proved finiteness for  $n = 6$  and any  $m$  (see [6]). In 1905 (see [7]) Burnside proved that the periodic linear groups of any given exponent  $n$  are locally finite. Later, in 1911 I. Shur extended this result of Burnside to all periodic linear groups without any restriction on the periods of the elements (see [8]). The Burnside problem attracted the attention of many outstanding algebraists in different countries due to its very simple and natural formulation. Various versions of this problem for different algebraic systems were considered as well. For instance, A.G. Kurosh even introduced the term: ‘a Burnside-type problem’ (see [9]). But the problem itself in the original version remained open for many decades.

A.M. Shur found out which properties of ordinary words are preserved when moving to infinite ones, and which are modified, lost, or replaced by new ones, and studied the set of all cube-free  $Z$ -words in the two-letter alphabet [10–12].

Generalizations of aperiodicity, when not only the degrees of some subwords are excluded, were studied in [13].

Factor-group  $B(d, n) = F/F^n$ ,  $d > 1$  of the free group  $F = F(d)$  with  $d$  generators by the subgroup  $F^n$  generated by the  $n$ -th powers of all elements of  $F$ , now bears the name the free Burnside group of the period  $n$ . The positive decision of the Burnside problem for indicator greater than or equal to two and for odd number  $n \geq 4381$  was received by P.S. Novikov and S.I. Adian in 1967, and was published for odd number  $n \geq 665$  by S.I. Adian in 1975 [14].

Geometrical proof of A.Yu. Olshansky give the positive decision of the Burnside problem for odd big  $n$  [15] in 1989. He built for every prime number  $p$  more then  $10^{10}$  infinite group with all proper subgroups of the order  $p$ .

More detailed history of results on the Burnside problem can be found in the article by S.I. Adyan [16].

In relation with these results we consider on the distribution of elements in sequences under two-letter and three-letter alphabets.

There exists an infinite word in a given alphabet of two (or three) symbols that contains no subwords that are cubes (respectively, squares). This assertion was first proved by A. Thue in 1906 and has been reproved several times by different authors. The simplest example of such an infinite word in the free group  $F_2$  of rank 2 with two generators is given by the following result: In the free group of rank 2 with generators  $a_1$  and  $a_2$  one can construct an infinite sequence of reduced words  $C_i$  such that each  $C_i$  is a prefix of the next word  $C_{i+1}$  and none of them contain squares of words.

A. Thue proved [17] the existence of 3-aperiodic words of any length in an arbitrary alphabet with more than one character.

In 1975 S.I. Adian in the book ([14], page 13) brought the proof of S.E. Arshon of 1937 [18] of the result that in the alphabet of two letters there is an infinite set of arbitrarily long three-aperiodic words. He constructed infinite sequence under two symbols, for which in every finite beginning of the sequence there no nonempty subwords of the type  $E^3$ .



A.Yu. Olshansky [15] proved the infiniteness of the set of 6-aperiodic words and received a bottom bounding function for the number of words of a given length  $n$ : In the 2-letter alphabet there exist arbitrarily long 6-aperiodic words. The number  $f(n)$  of such words of length  $n$  is greater than  $(3/2)^n$ .

We will estimate the bottom bounding function for the number of  $n$ -aperiodic words under two-letter and three-letter alphabets.

V.I. Senashov in [19] generalized the result of A.Yu. Olshansky [15] for the number of 6-aperiodic words: In the 2-letter alphabet there are arbitrarily long 6-aperiodic words. Moreover, the number  $f(n)$  of such words of length  $n$  is greater than  $(x)^n$  for any  $n$  from the interval  $(1.3219635; 1.9221753)$  [10].

In [20] is established the local finiteness of a group of the period twelve without elements of order twelve. This result generalizes the results of I.N. Sanov [5] and M. Hall [21].

In [22] is proved that a group of the period twelve in which the order of the product of any two elements of the second order does not exceed four is locally finite. This result (from [22]) generalized the theorem of I.N. Sanov [5]: a group of the period twelve without six order elements is locally finite. In relation with these results we consider on the distribution of elements in sequences under two-letter and three-letter alphabets.

We consider the set of twelve-aperiodic words. The authors made a report «Aperiodic words» at the conference «Reshetnev readings» and at the conference [23] and in the paper [24] considers twelve-aperiodic words: In the alphabet  $\{a, b\}$  there are arbitrarily long twelve-aperiodic words. Moreover, the number  $f(n)$  of such words of length  $n$  is greater than  $1,99901766^n$ .

Word is called *periodic* with period  $H$  if it has no subword of the form  $H^p$  where  $p > 0$

Word is called *l-aperiodic* if it has no non-empty subword of the form  $Y^l$  this word.

Later we consider the same question under the three-letter alphabet:

In the article [25] was proved, that there are arbitrarily long 6-aperiodic words and the number  $f(n)$  of such words of length  $n$  is greater than  $(5/2)^n (\frac{5}{2})^n$  in the three-letter alphabet.

This result is then generalized to different periods:

In a three-letter alphabet there exist arbitrarily long  $m$ -aperiodic words for a number  $m$  not less than 4 and the number of such words of length  $n$  is greater than  $(5/2)^n$  [26].

The report provides an overview of the results on the distribution of elements in different sequences.

The report will present new results on the distribution of elements in sequences.

The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. 0287-2021-0002.

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2023-936).



## References

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure. Appl. Math. 1902. Vol. 33. P. 230–238.
2. Novikov P.S., Adyan S.I. On infinite periodic groups // Izv. AN SSSR, Ser. mat. 1968. No. 1 (32). P. 212–244 (In Russ.).
3. Novikov P.S., Adyan S.I. On infinite periodic groups // II. Izv. AN SSSR, Ser. mat. 1968. No. 2 (32). P. 251–524 (In Russ.).
4. Novikov P.S., Adyan S.I. On infinite periodic groups // III. Izv. AN SSSR, Ser. mat. 1968. No. 3 (32). P. 709–731.
5. Sanov I.N. Solving the Burnside problem for exponent 4 // Uch. zapp. LSU. 1940. Vol. 55. P. 166–170.
6. Hall M. Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2. P. 764–786.
7. Burnside W. On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions // Proc. London Math. Soc. 1905. Vol. 3. P. 435–440.
8. Schur I. Uber Gruppen periodischer linearer Substitutionen // Berl. Ber., 1911. P. 619–627.
9. Kurosh A.G. Problems in ring theory connected with the Burnside problem for periodic groups // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1941. Vol. 5. P. 233–240.
10. Shur A.M. Structure of the set of cubeless  $Z$ -words in a two-letter alphabet // Izv. RAS. Ser. Mat, 2000, volume 64, issue 4, 201–224.
11. Shur A.M. Overlap-free words and Thue-Morse sequences. Int. J. Alg. and et al. 1996. Vol. 6. P. 353–367.
12. Shur A.M. Binary words avoided by the Thue-Morse sequence // Semigroup Forum. 1996. Vol. 53. P. 212–219.
13. Bean D.R., Ehrenfeucht A., McNulty G.F. Avoidable patterns in strings of symbols // Pacific J. Math. 1979. No. 2 (85). P. 261–295.
14. Adyan S.I. Burnside Problem and Identities in Groups. Moscow: Science. 1975. 336 p.
15. Olshansky A.Yu. Geometry of defining relations in groups. Moscow: Science, 1989. 448 p.
16. Adyan S. I. Burnside problem and related issues // Uspekhi mat. nauk. 2010. Vol. 65, issue 5 (395). P. 5–60.
17. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.
18. Arshon S.E. Proof of existence of  $n$ -unit infinite asymmetric sequences // Math. sb. 1937. V. 2 (44), no. 4. P. 769–779.
19. Senashov V.I. Improved estimates of the number 6-aperiodic words of fixed length // Vestnik SibSAU. 2016. No. 2 (17). P. 168–172.
20. Mamontov A.S. Groups of period 12 without elements of order 12 // Siberian Math. Journal. 2013. No. 1 (54). P. 150–156 (In Russ.).

21. Hall M. Group theory. Moscow: Inostrannaia literature. 1962. 468 p. (In Russ.).
22. Lytkina D.V., Mazurov V.D. and Mamontov A.S. Local finiteness of some groups of the period 12 // Siberian Math. Zhurn. 2012. No. 6 (53). P. 1373–1378.
23. Senashov V.I. Aperiodic words // Reshetnevskiye chteniya: materialy XIX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., posvyashch. 55-letiyu Sib. gos. aerokosmich. un-ta im. akad. M.F. Reshetneva [Reshetnev Readings: materials of XIX Intern. scientific and practical. conf. for 55th anniversary of Sib. State. Aerokosmich. Univ. Acad. M.F. Reshetnev] (10-14 Nov. 2015, Krasnoyarsk): 2 parts / Under total. Ed. Y.Y. Loginov; Sib. State. Aerokosmich. Univ., Krasnoyarsk, 2015, part 2. P. 132–133.
24. Senashov V.I. Estimation of the number of 12-aperiodic words of fixed length // Vestnik SibGAU. 2017. No. 1 (18). P. 93–96.
25. Senashov V.I. 6-aperiodic words over the three-letter alphabet // Siberian Journal of Science and Technology. 2020. No. 3 (21). P. 333–336.
26. Senashov V.I.  $m$ -aperiodic words over a three-letter alphabet // Siberian Aerospace Journal. 2024. Vol. 25, № 2, pp. 176–181.

# О ВОПРОСЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

## ON THE QUESTION OF ALGORITHMIC SOLVABILITY ON THE EXAMPLE OF ONE PROBLEM

П.В. Тришин

P.V. Trishin

*Разностные уравнения, рациональные функции, алгоритмическая разрешимость, периодические полиномы.*

На примере задачи поиска рациональных решений разностных уравнений поднимается важный вопрос о правильной трактовке алгоритмической разрешимости задачи. Несмотря на общую алгоритмическую неразрешимость задачи в классе рациональных функций, для частного случая уравнений с постоянными коэффициентами удалось свести задачу к алгоритмическому поиску некоторой прямой. Это иллюстрирует необходимость тщательного анализа структуры задачи, выявления особенностей и возможных частных случаев, а также адекватного выбора представления данных для корректной оценки алгоритмической разрешимости.

*Difference equations, rational functions, algorithmic solvability, periodic polynomials.*

On the example of the problem of searching for rational solutions of difference equations we raise an important question about the correct treatment of algorithmic solvability of the problem. Despite the general algorithmic intractability of the problem in the class of rational functions, for the special case of equations with constant coefficients it was possible to reduce the problem to the algorithmic search for some straight line. This illustrates the necessity of careful analysis of the problem structure, identification of peculiarities and possible special cases, as well as adequate choice of data representation for correct estimation of algorithmic solvability.

**З**адача поиска рациональных решений разностных уравнений поставлена более 50 лет назад. В одномерном случае для постоянных и полиномиальных коэффициентов вопрос решен С.А. Абрамовым [1; 2].

Попытки обобщить результаты С.А. Абрамова на многомерный случай привели к существенным трудностям. В 2013 г. С.В. Парамонов привел пример разностного уравнения:

$$P(x_1 \Delta_1, \dots, x_n \Delta_n)R(z) = 0,$$

где  $\Delta_i R(z) = R(z_1, \dots, z_i + 1, \dots, z_n) - R(z)$ , а  $P$  – многочлен с целыми коэффициентами. Он показал, что решение этого уравнения в классе рациональных функций эквивалентно решению диофантового уравнения:

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ссылаясь на отрицательное решение десятой проблемы Гильберта, была доказана алгоритмическая неразрешимость проверки существования рациональных решений для разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами [3; 4].

Как отмечают Кауэрс и Шнайдер в своей работе [5], основную сложность при алгоритмическом поиске рациональных решений разностных уравнений представляют периодические множители знаменателя искомой рациональной функции.

**Определение.** Полином  $\Pi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  называется *периодическим*, если следующее множество бесконечно:

$$\text{Spread}(\Pi) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \text{НОД}(\Pi(z), \Pi(z + \alpha)) \neq 1\}$$

и *апериодическим* в противном случае.

Действительно, классический алгоритм Абрамова для поиска рациональных решений линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами обобщается на многомерный случай только для апериодических полиномов.

Рассмотрим в качестве примера простое двумерное разностное уравнение:

$$R(z_1, z_2) - R(z_1 + 1, z_2 + 1) = 0,$$

где  $R(z_1, z_2)$  – искомая рациональная функция двух переменных. Это уравнение имеет решением любую рациональную функцию вида:

$$\frac{N(z_1 - z_2)}{D(z_1 - z_2)^l}$$

где  $N$  и  $D$  – произвольные полиномы от одной переменной.

Как мы видим, периодические полиномы образуют достаточно сложную и обильную математическую структуру. Во-первых, множество периодических полиномов является бесконечным. Во-вторых, в этом множестве отсутствуют какие-либо выделенные или экстремальные представители, например, полином максимальной степени или минимальный по каким-либо другим критериям. Все периодические полиномы в определенном смысле равноправны и не обладают какими-либо особыми свойствами.

Такая ситуация представляет значительную сложность для любого алгоритма, поскольку он должен перебрать бесконечное множество периодических полиномов, не имея при этом никаких ориентиров или критериев для сужения поиска. Более того, отсутствие экстремальных представителей делает невозможным применение каких-либо стратегий, основанных на поиске максимумов или минимумов.

Таким образом, непосредственный алгоритмический поиск всех периодических полиномов, удовлетворяющих некоторым условиям, является крайне затруднительной задачей ввиду обильности и отсутствия выделенных элементов в данной структуре. Это и объясняет сложность нахождения рациональных решений разностных уравнений, содержащих периодические множители в знаменателе.

Как показал автор в работе [6], знаменатель  $D(z)$  рационального решения  $R(z) = N(z)/D(z)$  однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{\alpha \in A} p_{\alpha} R(z + \alpha) = 0 \tag{1}$$

обязательно является периодическим полиномом. Это значительно усложняет решение задачи нахождения такого рационального решения.

Однако, замечено, что с каждой  $k$ -мерной плоскостью  $l = \{x \in \mathbb{R}^n: L_i(x) = c_i, i = 1, \dots, n - k\}$ , где  $L_i(\cdot)$  – однородные линейные функции, можно ассоциировать множество периодических многочленов вида

$$D_l(L_1(z), \dots, L_{n-k}(z)).$$

Множество таких многочленов образует подкольцо  $\mathbb{C}_l[z]$  в кольце всех многочленов  $\mathbb{C}[z]$  от  $n$  комплексных переменных  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Важно отметить, что это подкольцо  $\mathbb{C}_l[z]$  не зависит от выбора набора однородных линейных функций  $L_1, \dots, L_{n-k}$ , определяющих плоскость  $l$ , а зависит только от самой плоскости  $l$ .

**Теорема.** Уравнение (1) разрешимо в классе рациональных функций тогда и только тогда, когда существует такая прямая  $l \subset \mathbb{R}^n$ , что для любого  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l+x) \cap A} p_\alpha = 0,$$

где  $l + x = \{y + x, y \in l\}$  – параллельный перенос прямой  $l$  на вектор  $x$ .

При этом решениями уравнения (1) будет множество функций

$$\frac{N(z)}{D_l(z)},$$

где  $D_l(z)$  – произвольный элемент из подкольца  $\mathbb{C}_l[z]$ , а числитель  $N(z)$  – некоторый универсальный полином, не зависящий от выбора знаменателя.

Отметим, что после нахождения вида периодического знаменателя  $D_l(z)$  рационального решения, числитель  $N(z)$  можно определить с помощью метода неопределенных коэффициентов [7], подставляя рациональную функцию в исходное разностное уравнение.

Таким образом, мы свели задачу поиска периодического знаменателя к простой алгоритмической операции, поиска плоскости, удовлетворяющей условию теоремы, что является конечной процедурой, состоящей из ряда вычислительных шагов.

В данной работе мы предложили простую конструкцию для нахождения периодических полиномов – подкольцо, ассоциированное с определенной прямой.

После того, как данное подкольцо найдено – вопрос со знаменателем решения оказывается решен, остается лишь найти числитель, используя известные инструменты, такие как метод неопределенных коэффициентов.

Вместо того, чтобы полагаться на традиционные алгоритмы, зачастую сталкивающиеся с существенными вычислительными трудностями, мы рассмотрели задачу с более широкой геометрической перспективой. Это позволило получить элегантное решение, заключающееся в поиске прямой, удовлетворяющей условиям задачи. Данная задача демонстрирует важные нюансы понятий алгоритмической разрешимости/неразрешимости поставленной задачи.

## Библиографический список

1. Абрамов С.А., Решение линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами в поле рациональных функций, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 14(1974), № 4, 1067–1070.
2. Абрамов С.А., Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 29(1989), № 11, 1611–1620.
3. Парамонов С.В., О рациональных решениях линейных уравнений с частными производными или разностями, Программирование, 1(2013), 11–14.
4. Матиясевич Ю.В., Десятая проблема Гильберта, М.: Наука, Физматлит, (1993), 223 с.
5. Kauers M., Schneider C., Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations, Proceedings of ISSAC'10, (2010), 211–218.
6. Trishin P.V., Necessary and sufficient conditions for the existence of rational solutions to homogeneous difference equations with constant coefficients, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 47 (2024), 47–62.
7. Sturmfels B, Solving Systems of Polynomial Equations, CBMS Regional Conferences Series, vol. 97. Amer. Math. Soc., Providence (2002).



# ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГОВ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ФРОБЕНИУСА

## CALCULATING THE RANKS OF GROUPS OF CENTRAL UNITS OF INTEGER GROUP RINGS OF FROBENIUS METACYCLIC GROUPS

Е.О. Шумакова

E.O. Shumakova

*Групповые кольца, группы центральных единиц, ранг группы, метациклическая группа Фробениуса, простое число, делители числа, организация циклов.*

В данной работе описан способ выполнения вычисления рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса порядка  $mn$  с ядром порядка  $m$  и дополнением порядка  $n$ . Формула вычисления ранга требует решения задачи поиска делителей числа  $m-1$  и организации вычислений ранга в зависимости от четности  $n$ . Указанные вычисления реализованы в системе компьютерной алгебры GAP4. Описаны результаты вычислений для простого и составного числа  $m$ .

*Group rings, groups of central units, group rank, metacyclic Frobenius group, prime number, number divisors, cycle organization.*

This paper describes a method for calculating the ranks of groups of central units of integer group rings of Frobenius metacyclic groups of order  $mn$  with a kernel of order  $m$  and a complement of order  $n$ . The rank calculation formula requires solving the problem of finding divisors of the number  $m-1$  and organizing rank calculations depending on the parity of  $n$ . These calculations are implemented in the GAP4 computer algebra system. The results of calculations for the prime and composite numbers  $m$  are described.

**В**озможности современных программных продуктов позволяют реализовать визуализацию различных геометрических объектов и графиков функций, выполнять объемные вычисления в фундаментальных математических исследованиях, создать условия для организации эффективной самостоятельной работы в учебном процессе.

Работа над исследовательскими задачами по геометрии проходит эффективнее при использовании программ «Живая математика» и GeoGebra. Моделирование с помощью онлайн-калькулятора Desmos часто используется в проектах по алгебре и математическому анализу [6]. Для вычислений в исследованиях по алгебре и теории чисел инструментом служит система компьютерной алгебры GAP [3; 7].

В работах Р.Ж. Алеева и его учеников были исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец для некоторых неразрешимых групп, таких как  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $PSL(2, q)$ ,  $PSL(2, 2^n)$ , и для циклических групп порядков 16, 32 и 64 [1; 2]. Е.О. Шумаковой изучены группы центральных единиц целочисленных групповых колец для диэдральных групп и их обобщений [8], а также получены основные результаты для метациклических групп Фробениуса [9–10].

Пусть  $G_{mn}$  – метациклическая группа, порожденная двумя элементами  $a$  и  $b$  с определяющими соотношениями:

$$\langle a, b | a^n = b^m, a^{-1}ba = b^q, q^n \equiv 1 \pmod{m} \rangle.$$

Будем обозначать  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  метациклическую группу Фробениуса порядка  $mn$  с ядром  $\langle b \rangle_m$  порядка  $m$  и дополнением  $\langle a \rangle_n$  порядка  $n$ . Особую роль при изучении группы центральных единиц целочисленных групповых колец играет ее ранг [3–5]. Е.О. Шумаковой ранее доказана следующая теорема [9]:

Теорема 1. Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  равен:

$$r = \begin{cases} \frac{m-1}{n} + \frac{n}{2} + 2 - \tau(m) - \tau(n), & \text{для четного } n, \\ \frac{m-1}{2n} + \frac{n-1}{2} + 2 - \tau(m) - \tau(n), & \text{для нечетного } n. \end{cases}$$

Функция  $\tau(n)$  показывает число всех натуральных делителей числа  $n$ . В следствиях [9] начато более подробное изучение рангов в случаях, когда число  $m$  простое.

Следствие 1. Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  с простым  $m$  равен:

$$r = \begin{cases} \frac{m-1}{n} + \frac{n}{2} + -\tau(n), & \text{для четного } n, \\ \frac{m-1}{2n} + \frac{n-1}{2} + -\tau(n), & \text{для нечетного } n. \end{cases}$$

В работе [7] вычислены ранги групп центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  с простым  $m$ , не превосходящим 100, в системе компьютерной алгебры GAP4 (Groups, Algorithms and Programming), которая является системой компьютерной алгебры, задуманной как инструмент вычислительной теории групп, впоследствии распространившейся на смежные разделы алгебры. GAP является свободно распространяемой, открытой и расширяемой системой. Система поставляется вместе с исходными текстами, которые написаны на двух языках: ядро системы написано на Си, а библиотека функций – на специальном языке, также называемом GAP, который по синтаксису напоминает Pascal. Работа в этой системе требует аккуратности, так как отсутствует возможность копирования блока команд, для внесения изменений необходимо повторить всю последовательность команд.

Преимуществом выполнения данных вычислений в системе компьютерной алгебры GAP4R4 является наличие списка Primes простых чисел до 1000, встроенных функций: Tau(i) вычисления количества делителей заданного числа  $i$ , IsInt(t/i) проверки деления без остатка, IsEvenInt(i) проверки, четное ли число  $i$ , IsOddInt(i) проверки, нечетное ли число  $i$ , а также возможности реализации циклов.

Вычисление реализовано в виде двух циклов, вложенных в третий. Внешний цикл выполняется по всем  $m$ , простым числам списка Primes, внутри него сначала создаем массив  $n$  всех делителей числа  $m-1$ , а затем выполняем вычисление ранга  $r$  для каждой пары  $m$  и  $n$  по формуле следствия 1.

Однако стоит отметить, что аналогичные вычисления могли быть реализованы и другими программными средствами.

В данной работе покажем в таблице результаты вычисления рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  в случаях, когда порядок ядра метациклических групп Фробениуса  $m$  является составным, не превосходящим 100. Вычисления выполнены по формуле теоремы 1.

**Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса**

m	n	r	m	n	r	m	n	r	m	n	r	m	n	r
9	4	0	35	17	5		3	6	77	19	7	87	43	18
	8	0		34	12		6	6		38	14		86	38
15	7	0	39	19	6	55	9	2		76	30		3	12
	14	2		38	14		18	4		4	16		5	7
21	4	2	45	4	6		27	8	81	5	5	91	6	12
	5	0		11	1		54	18		8	7		9	4
	10	1		22	5		4	11		10	6		10	8
	20	3		44	13		7	3		16	5		15	4
25	3	2	49	4	10	57	8	5		20	5		18	6
	4	4		8	5		14	5		40	11		30	8
	6	2		16	5		28	8		80	28		45	15
	8	2		3	6		56	19		3	11		90	32
	12	1		12	3		31	10		4	17		4	20
	24	4		24	5		62	24		6	11		23	9
27	13	3		48	9	63	4	13		7	5	93	46	19
	26	8		5	3		8	6		12	5		92	39
33	4	5	51	10	4	65	16	5	85	14	7	95	47	20
	8	2		25	8		32	10		21	6		94	42
	16	3		50	18		64	24		28	9		7	4
	32	9					75	37		13	42		13	49
						74	30		84	29		98	40	

Заметим, что для метациклических групп Фробениуса  $F_{mn} = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  число  $m$  обязательно нечетное и  $n$  делит  $m-1$ .

В случаях с  $n=2$  получаем, что метациклическая группа Фробениуса  $F_{mn} = \langle a, b | a^n = b^m, a^{-1}ba = b^a \rangle = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_n$  совпадает с группой диэдра  $D_{2m} = \langle a, b | a^2 = b^m, aba = b^{-1} \rangle = \langle b \rangle_m \rtimes \langle a \rangle_2$ , ранги которых ранее изучены в [8], поэтому не будем включать в таблицу случаи  $n=2$ .

Полученный результат позволяет выявить ситуации с рангом, равным нулю, это произошло только в четырех случаях:  $m=9, n=4$ ;  $m=9, n=8$ ;  $m=15, n=7$  и  $m=21, n=5$ . Ранг равен единице только в двух случаях:  $m=21, n=10$  и  $m=25, n=12$ .

### Библиографический список

1. Алеев Р.Ж. Единицы целочисленных групповых колец циклических  $p$ -групп // Мальцевские чтения. Тезисы докладов Международной конференции. Новосибирск, 2023. С. 147.
2. Алеев Р.Ж., Митина О.В., Ханенко Т.А. Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, № 4. С. 30–55.
3. Алеев Р.Ж., Каргаполов А.В., Соколов В.В. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 15–21.
4. Алеев Р.Ж., Митина О.В. Распределение рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции, Челябинск, 15–17 апреля 2014 года. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 7–12.
5. Алеев Р.Ж., Митина О.В. Теорема разложения и ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп  $PGL_2(q)$ ,  $q$  нечетно // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 652Ц672.
6. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 216–220.
7. Шумакова Е.О. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 частях / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. 2018. С. 132–136.
8. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп // Труды института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 172–184.
9. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 691–698.
10. Shumakova E.O. Groups of central units of rank 1 for integer group rings for Frobeniusmetacyclic groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18, No 1. С. 622–639. ISSN: 1813–3304.

# ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДВУХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## DOMAINS OF CONVERGENCE OF HYPERGEOMETRIC SERIES FOR SOLUTIONS OF SYSTEMS OF TWO ALGEBRAIC EQUATIONS

К.Х. Фан

Quang Khanh Phan

*Гипергеометрический ряд, универсальная система алгебраических уравнений, A-дискриминант, амёба, параметризация.*

Рассматриваются универсальные системы двух уравнений с двумя неизвестными. Приведенные варианты таких систем зависят от двух комплексных переменных  $a, b$ . Решения представляются рядами гипергеометрического типа. Для них описывается область сходимости  $D$  на основе двух подходов: один определяется описанием границы  $D$ , другой на языке неравенств  $\Delta_j(|a|, |b|) < 0$  для приведенных дискриминантов  $\Delta_j$ . Мы используем классические результаты Горна (1889) и Капранова (1991) об особенностях гипергеометрических функций и амёбы алгебраических поверхностей.

*Hypergeometric series, universal system of algebraic equations, A-discriminant, parametrization.*

We consider universal systems of two algebraic equations with two unknown. The reduced variant of such systems depends on two complex variables  $a, b$ . Their roots are represented by hypergeometric type series. We describe the convergence of these series in two approaches: description of the boundary of  $D$  and the language of inequalities  $\Delta_j(|a|, |b|) < 0$  for the given discriminants  $\Delta_j$ . We use the classical results of Horn (1889) and Kapranov (1991) on the singularities of hypergeometric functions and the amoebas of algebraic surfaces.

### 1. Введение

Рассматриваются универсальные системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a'_1 y^{\alpha_1} + a'_2 y^{\alpha_2} + a'_3 y^{\alpha_3} = 0, \\ b'_1 y^{\beta_1} + b'_2 y^{\beta_2} + b'_3 y^{\beta_3} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a'_j, b'_j \in \mathbb{C}$  и  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ ,  $y = (y_1, y_2)$  – неизвестные. Приведенные варианты таких систем:

$$\begin{cases} y_1^m + a y_1^p y_2^q - 1 = 0, \\ y_2^l + b y_1^u y_2^v - 1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $m, l \in \mathbb{Z}_{>0}$  и  $(p, q), (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ .

Мономы  $y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$  решений  $y = (y_1, y_2)$  системы (2) выражаются рядами

$$\sum c_\alpha a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}. \quad (3)$$

Для главного решения (когда  $y(0,0) = (1,1)$ ) коэффициенты  $c_\alpha$  определяются формулой В.А. Степаненко (см. [5]):

$$c_\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \Gamma_\alpha \cdot R_\alpha,$$

где

$$\Gamma_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\mu_1+m}{m} + \frac{p}{m}\alpha_1 + \frac{u}{m}\alpha_2) \Gamma(\frac{\mu_2+l}{l} + \frac{q}{l}\alpha_1 + \frac{v}{l}\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+1) \Gamma(\alpha_2+1) \Gamma(\frac{\mu_1+m}{m} + \frac{p-m}{m}\alpha_1 + \frac{u}{m}\alpha_2) \Gamma(\frac{\mu_2+l}{l} + \frac{q}{l}\alpha_1 + \frac{v-l}{l}\alpha_2)},$$

$$R_\alpha = \frac{(\mu_1 + u\alpha_2)(\mu_2 + q\alpha_1) - uq\alpha_1\alpha_2}{(\mu_1 + p\alpha_1 + u\alpha_2)(\mu_2 + q\alpha_1 + v\alpha_2)}.$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма функция Эйлера.

В этой статье вычисляется область сходимости  $D$  ряда (3) для мономиальной функции  $y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$  решений системы (2).

В 2004 г. Пассаре и Цих [6, Th. 1] обобщили результат Капранова и описали области сходимости для рядов Биркелана решений уравнение

$$a_0 + a_1 y + \dots + y^p + \dots + y^q + \dots + a_n y^n = 0, \quad (4)$$

где  $p$  и  $q$  – пара натуральных чисел:  $0 \leq p < q \leq n$ . Они предложили многозначное обращение логарифмического отображения Гаусса

$$\Psi_{pq}: \mathbb{C}P^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

из проективного пространства в пространство коэффициентов уравнения (4).

Черепанский и Цих (2020 г., см. [2]) вычислили области сходимости для гипергеометрических рядов, представляющих решения уравнений:

$$a_0 + a_1 y^l + a_m y^m + a_n y^n = 0, \quad (5)$$

где  $l, m, n$  – взаимно простые натуральные числа:  $l < m < n$ .

Все указанные результаты касались только *скалярных уравнений* (т.е. задаваемых одним алгебраическим уравнением с одним неизвестным  $y$ ).

Применительно к *системам уравнений* вопросы сходимости рядов, представляющих решения, не рассматривались раньше.

## 2. Параметризация дискриминантного множества

Пусть  $\nabla^0$  – множество всех  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , для которых система (2) имеет критические корни  $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$  (т.е. корни, в которых якобиан системы равен 0). Замыкание  $\nabla^0$  называется *дискриминантным множеством* и обозначается  $\nabla$ . Определяющий множество  $\nabla$  полином обозначается  $\Delta(a, b)$  и называется *дискриминантом*. Дискриминантное множество  $\{\Delta(a, b) = 0\}$  допускает параметризацию Антиповой–Циха [1]  $\Psi(s) := (a, b)$ , где

$$\begin{cases} a = -\frac{m}{(p-m)+us} \left(\frac{(p-m)+us}{p+us}\right)^{\frac{p}{m}} \left(\frac{q+(v-l)s}{q+vs}\right)^{\frac{q}{l}}, \\ b = -\frac{ls}{q+(v-l)s} \left(\frac{(p-m)+us}{p+us}\right)^{\frac{u}{m}} \left(\frac{q+(v-l)s}{q+vs}\right)^{\frac{v}{l}}. \end{cases}$$



### 3. Логарифмическая шкала

Амебой множества  $\nabla \subset \mathbb{C}^2$  называется образ  $\nabla$  относительно отображения  $\text{Log}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определенной формулой  $(z_1, z_2) \rightarrow (\log|z_1|, \log|z_2|)$ . Множество критических значений отображения  $\text{Log}: \nabla \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *контуром* амебы  $\mathcal{A}_\nabla$ , обозначенным  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\nabla$ . Для решения нашей задачи важную роль играет *вторичный дискриминант*:

$$c(s) = u^2 v(l-v)s^3 + qu^2(l-q-2v)s^2 + q^2 u(m-2p-u)s + pq^2(m-p).$$

Он ответственный за особые точки контура.

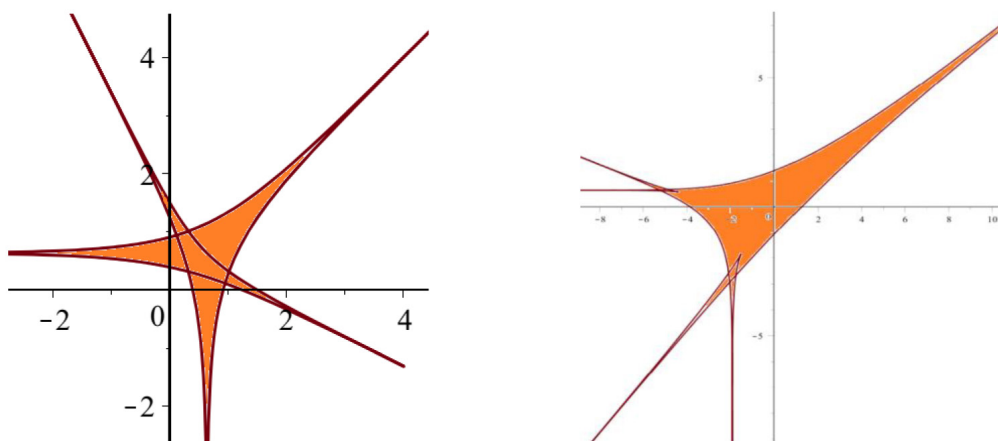


Рис. 1. В логарифмической шкале область сходимости показана темным цветом

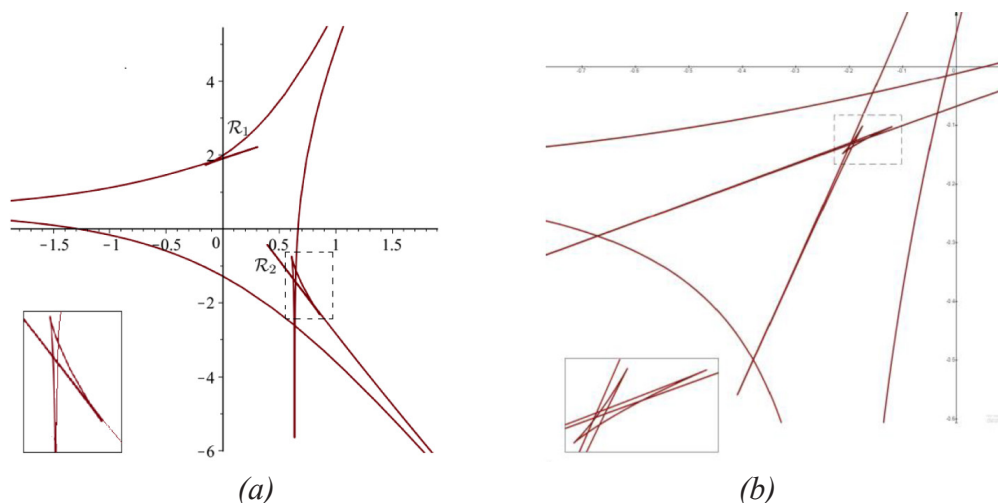


Рис. 2. Контурсы амеб для дискриминантных множеств систем:

$$(a) \begin{cases} y_1^3 + ay_1 y_2 - 1 = 0, \\ y_2^3 + by_1^2 y_2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad (b) \begin{cases} y_1^6 + ay_1^2 y_2^3 - 1 = 0, \\ y_2^7 + by_1^2 y_2^5 - 1 = 0. \end{cases}$$

### 4. Параметризация Горна

В 1889 г. [3] Горн описал области сходимости для *рядов* двух переменных  $x_1, x_2$

$$H(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+^2} \varphi(s_1, s_2) x_1^{s_1} x_2^{s_2} =: \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2} c_\alpha x^\alpha. \quad (6)$$

Рассматривается диагональный подряд

$$H_q(x_1, x_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_{qk} (x_1^{q_1} x_2^{q_2})^k.$$

при данном  $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}_+^2$  и  $c_{qk} = \varphi(kq_1, kq_2)$ . Согласно критерию Даламбера сходимости ряда подряд  $H_q$  сходит, если

$$|x_1^{q_1} x_2^{q_2}| < \rho_q,$$

где  $\rho_q$  – радиус сходимости. Другими словами,

$$q_1 \log|x_1| + q_2 \log|x_2| < \log \rho_q.$$

Оказывается, область сходимости ряда (6) в логарифмической системе координат огибается семейством прямых  $l_s$ , определяемых уравнениями

$$s_1 \log|x_1| + s_2 \log|x_2| = \log \rho_s,$$

где  $\rho_s$  – радиус сходимости,  $s$  – диагонального подряда ряда (6), определяемого условием  $\alpha = ks$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Рассматриваются пределы

$$\mathfrak{F}_j(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_j(s_1 k, s_2 k).$$

где  $R_j(s_1, s_2) = \frac{\ddot{o}(s + e_j)}{\ddot{o}(s)}$ ,  $j = 1, 2$  и  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ .

Функции  $\mathfrak{F}_j$  рациональные и однородные степени нуль, зависят только от отношения  $s = s_1 : s_2$ . Поэтому они принимаются как функции на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

**Определение 4.1.** *Отображение*

$$\frac{1}{\mathfrak{F}(s)} := \left( \frac{1}{\mathfrak{F}_1(s)}, \frac{1}{\mathfrak{F}_2(s)} \right) : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

назовем *параметризацией Горна*, связанной с рядом  $H(x_1, x_2)$ .

**Теорема 4.1.** ([4]:1991) *Параметризация Горна  $\frac{1}{\mathfrak{F}(s)}$  для рядов  $y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$  и параметризация  $\Psi(s)$  дискриминантного множества системы (2) совпадают:*

$$\Psi = \frac{1}{\mathfrak{F}}.$$

## 5. Основные результаты

Для рационального числа  $r = \frac{m}{n}$  мы обозначаем  $1^r = \sqrt[n]{1^m}$ .

**Теорема 5.1. (Фан-Цих).** *Граница  $\partial D$  области  $D$  покрывается не более чем тремя гиперповерхностями вида*

$$\Delta(1, \pm 1^{c_a} |a|, -1, 1, \pm 1^{c_b} |b|, -1) = 0,$$

определяемыми приведенными дискриминантами, где  $c_a$  и  $c_b$  – рациональные числа.

**Теорема 5.2. (Фан-Цих).** *Область сходимости  $D$  указанного ряда задается в виде не более трех неравенств вида*

$$\pm \Delta(1, \pm |a|, -1, 1, \pm |b|, -1) < 0. \quad (7)$$

Точнее:

1. Если  $c(s)$  имеет 2 положительных корня, то область сходимости  $D$  определяется тремя неравенствами вида (7).

2. Если  $c(s)$  имеет только 1 положительный корень, то область сходимости  $D$  определяется двумя неравенствами вида (7).

3. Если  $c(s)$  не имеет положительных корней, то область сходимости  $D$  определяется одним неравенством (когда  $c(s) < 0$  в  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ) и двумя неравенствами (когда  $c(s) < 0$  в  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ).

## 6. Пример

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1^2 + ay_1y_2 - 1 = 0, \\ y_2^2 + by_1y_2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ее дискриминант  $\Delta(a, b)$ :

$$-27 - 4a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - 4b^3 + a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4.$$

По теореме 2 область сходимости

$$D = \{\Delta(|a|, -|b|) < 0\} \cap \{\Delta(-|a|, |b|) < 0\}.$$

Вторичный дискриминант  $c(s) = 2s^2 + 2$  положителен на  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Поэтому согласно пункту 3 теоремы 2 мы получили два неравенства.

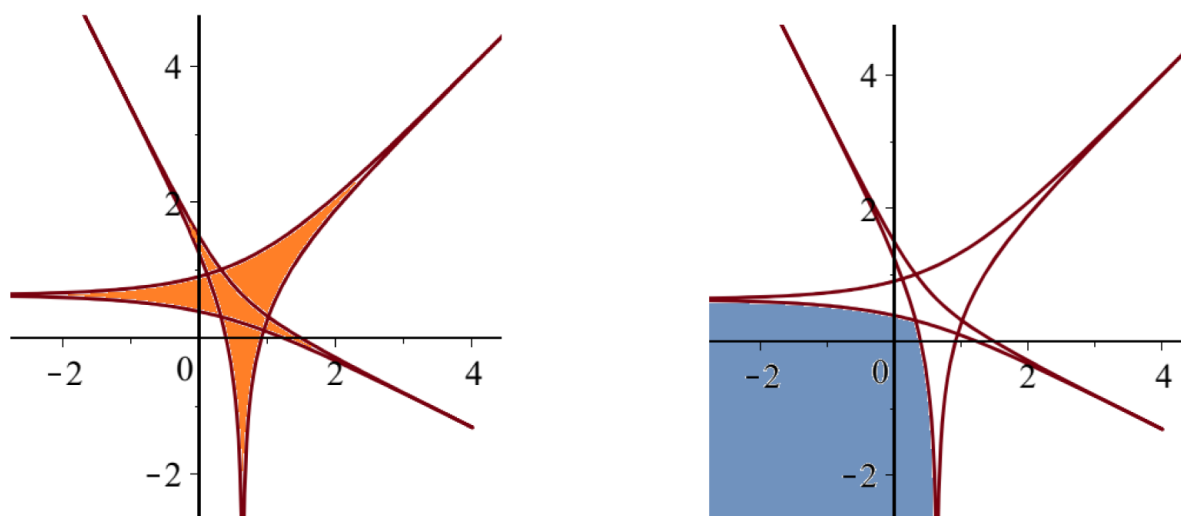


Рис. 3. В логарифмической шкале область сходимости показана темным цветом

## Библиографический список

1. Antipova I. A., Tsikh A.K. The discriminant locus of a system of  $n$  Laurent polynomials in  $n$  variables. Russian. В: Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. translation in Izv. Math. 76.5 (2012), 881–906. doi: 10.1070/IM2012v076n05ABEH002608.
2. Cherepanskiy A.N., Tsikh A.K. Convergence of two-dimensional hypergeometric series for algebraic functions. В: Integral Transforms and Special Functions 31.10 (2020), с. 838–855. doi: 10.1080/10652469.2020.1756794.

3. Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen. ger. B: *Mathematische Annalen* 34 (1889), c. 544–600. URL: <http://eudml.org/doc/157457>.
4. Kapranov M.M. A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map. B: *Math. Ann.* Vol. 290 (1991). P. 277–285.
5. Kulikov V.R., Stepanenko V.A. On solutions and Waring's formulas for systems of  $n$  algebraic equations for  $n$  unknowns. English. B: *St.Petersburg Mathematical Journal* Vol. 26, No. 5 (2015), c. 839–848. doi: 10.1090/spmj/1361.
6. Passare M., Tsikh A. Algebraic equations and hypergeometric series. *The Legacy of N.H. Abel*. Springer-Verlag, 2004. P. 653–672.

## Секция 2

---

# СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ

---

# ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКЕ

## APPLICATION OF INTERACTIVE LEARNING TOOLS IN PROBABILITY AND STATISTICS LESSONS

А.С. Бородатова

A.S. Borodatova

*Интерактивные средства обучения, интерактивный модуль «Игральные кости», STEAM-урок, вероятность и статистика.*

В статье рассматривается применение интерактивных средств обучения на уроках по вероятности и статистике. Представлен фрагмент урока по теме «Игральные кости в теории вероятностей», где обучающиеся самостоятельно, применяя интерактивное средство, могут проводить эксперименты, доказывать гипотезы. В рамках урока демонстрируется применение интерактивного модуля «Игральные кости» с помощью интерактивного метода «STEAM-урок».

*Interactive learning tools, interactive Dice module, STEAM lesson, probability and statistics.*

The article deals with the use of interactive learning tools in the lessons on probability and statistics. It presents a fragment of a lesson on the topic “Dice in probability theory”, where students can independently, using an interactive tool, conduct experiments, prove hypotheses. The lesson demonstrates the application of the interactive module “Dice” using the interactive method “STEAM-lesson”.

Главным компонентом учебно-воспитательного процесса на всех ступенях образования являются средства обучения. Стремительная интеграция информационных технологий в образование привела к появлению нового направления современных средств обучения – интерактивных. В связи с этим для повышения эффективности усвоения материала и развития универсальных учебных действий в организацию учебного процесса активно стали внедряться интерактивные средства обучения (ИСО).

Что же такое интерактивные средства обучения? Это совокупность технических средств (компьютер и его периферийные устройства, мобильные средства) и специализированного программного обеспечения к ним, а также дидактических средств (электронные образовательные ресурсы и ресурсы сети Интернет), которые дают возможность учителю в ходе интерактивного диалога активизировать познавательную деятельность обучающихся. Интерактивные средства обучения принято делить на две составляющие: интерактивный учебный комплект (интерактивный учебник, тетрадь, тренажер, практикум и т.д.) и интерактивное оборудование (интерактивная доска, проектор, плазменная панель и т.д.). Данные составляющие взаимосвязаны, так как эффективность интерактивных комплектов напрямую зависит от того, на каком оборудовании они представлены. Подать интерактивный материал без использования технического оборудования не представляется возможным [3].



В разработке интерактивных уроков следует учитывать не только интерактивные средства обучения, но и интерактивные методы обучения, поскольку они направлены на вовлечение учащихся в активное взаимодействие с учебным материалом и друг с другом. Интерактивные методы обучения (ИМО) – это методы, которые позволяют учителю организовать активное взаимодействие между учениками, тем самым вовлекая их в учебный процесс. Применение ИМО позволяет ученикам самостоятельно решать проблемные задачи, участвовать в социальных проектах, имитировать деятельность определенных ролей. ИМО включает в себя различные подходы к обучению, с помощью которых и происходит активное взаимодействие обучающихся. К данным подходам относятся: дискуссия, мозговой штурм, работа в группах, ролевые игры, проектная деятельность и т.д. Реализация таких подходов на практике требует применение соответствующих ИСО. Следовательно, ИСО и ИМО связаны между собой. Дополняя друг друга, они позволяют создать эффективную среду для обучения вероятности и статистике, что, в свою очередь, способствует повышению мотивации обучающихся. Поэтому при выборе подходящего ИСО на уроках стоит учитывать, с какими ИМО их следует использовать [1].

В данной статье мы рассмотрим, как происходит применение интерактивных средств обучения на уроках по вероятности и статистике через интерактивный метод – STEAM-урок. STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics) – это современный подход к обучению, который объединяет в себе несколько дисциплин: науку, технологии, инженерию, искусство и математику. Структура урока с помощью данного подхода состоит из нескольких этапов: практико-ориентированная проблемная ситуация, интегрированный поиск информации, экспериментальное исследование с математическим и IT-моделированием, проектно-технологическая часть, знакомство со STEAM-профессиями будущего. Обучение вероятности и статистике с помощью STEAM-подхода позволяет не только развивать практические навыки, но и межпредметные связи, что, в свою очередь, помогает ученикам лучше понимать мир вокруг себя. Реализация практической части в STEAM-уроке предполагает использование специальных программных комплектов для решения прикладных задач. В качестве основного источника выбора интерактивных средств для обучения вероятности и статистике был выбран электронный образовательный ресурс сети Интернет – сайт «Вероятность в школе» при поддержке МЦНМО (<https://ptlab.mcsme.ru/>). Данный сайт разработан для поддержки преподавания теории вероятностей и статистики в школе и рассчитан на учителей и школьников [4].

Приведем пример фрагмента урока с применением интерактивных средств обучения в практической части с помощью STEAM-подхода.

Тема «Игральные кости в теории вероятностей», 7 класс.

Тип урока: на открытие новых знаний.

Цель урока: формирование представлений у учащихся о роли игральной кости в теории вероятностей. У учащихся должно сложиться представление о разнице между настоящими и математическими игральными костями.

ИСО: интерактивный модуль «Игральные кости».

Интерактивный модуль «Игральные кости» [2] имитирует бросание кубика по заданному числу бросаний, позволяя менять комбинации. Программа показывает частоту событий и изменение относительных частот в виде гистограммы, а также есть возможность экспортировать эксперимент в MS Word и Excel (рис. 1).

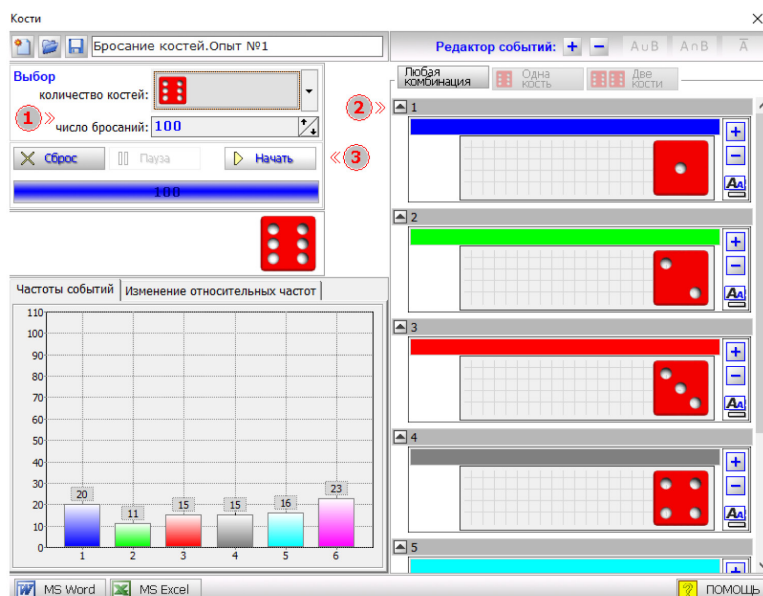


Рис. 1

Этап: экспериментальное исследование с математическим и IT-моделированием. На данном этапе обучающиеся выявляют закономерности с помощью IT-моделирования, которое предполагает использование специализированных программных комплексов для решения практических задач.

Работа происходит в парах. Необходимо подтвердить равные шансы выпадения каждой грани кубика. Для проведения эксперимента используется математическая модель кубика, интерактивный модуль «Игральные кости». Сначала обучающиеся запускают модель с одним кубиком при 100 бросков. Затем количество бросков постепенно увеличивается до 500, 3000 бросков. При 100 бросках частоты выпадения граней могут существенно отличаться (рис. 2).



Рис. 2

При 500 бросках частоты выпадения граней уже ближе друг к другу. Высоты столбиков постепенно выравниваются (рис. 3).

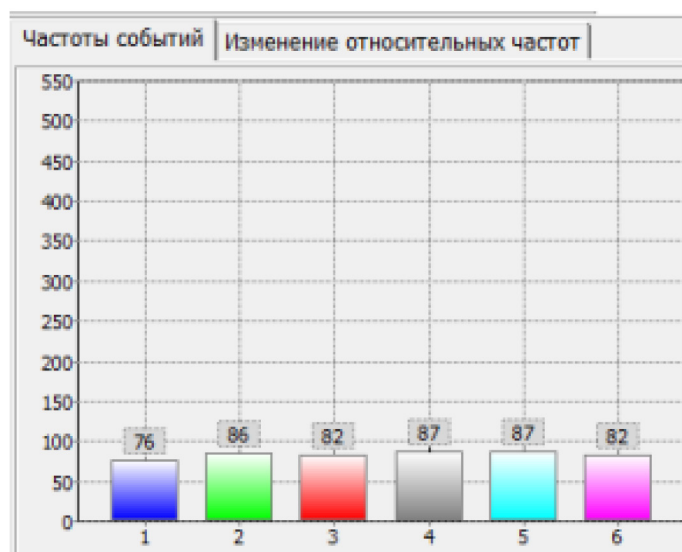


Рис. 3

В ходе эксперимента с помощью графика частот обучающиеся приходят к выводу, что с увеличением числа бросков графики частот выпадения каждой грани приближаются к прямой  $y = \frac{1}{6}$ . График строится во вкладке «Изменение относительных частот» (рис. 4).

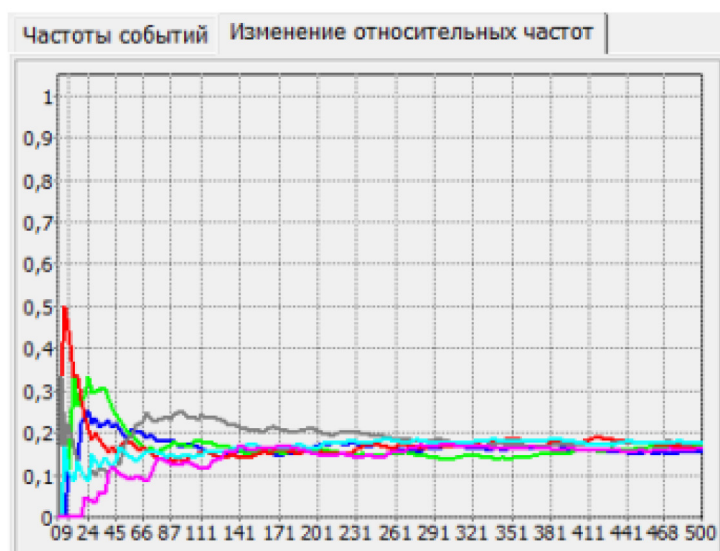


Рис. 4

Таким образом, данный фрагмент урока показывает, как обучающиеся самостоятельно, применяя интерактивные средства, могут проводить эксперименты, доказывать гипотезы. Обучающийся сам приходит к знанию через практическую деятельность, а не получает готовую информацию. Роль ученика меняется: он становится активным субъектом познания, тем самым способствуя развитию всех требуемых универсальных учебных действий.

## Библиографический список

1. Анохина И.В. Использование интерактивных средств обучения на уроках математики // Вопросы науки и образования. 2020. № 21. С. 71–75.
2. Вероятность в школе. Методическая консультация. URL: <https://ptlab.mcsme.ru/> (дата обращения 13.03.2024).
3. Кошкина В.А., Пазенко Е.А. Интерактивные средства обучения: классификация и потенциал // Мир науки. Педагогика и психология. 2021. № 3. С. 1–12.
4. Муравьева С.А. STEM-образование как вид проектной и исследовательской деятельности // Педагогическое искусство. 2022. № 1. С. 37–42.

# О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ КОНСТРУКТОРОВ-МОДЕЛЬЕРОВ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

## MATHEMATICAL TRAINING OF FASHION DESIGNER IN THE CONTEXT OF INFORMATIZATION OF EDUCATION

Д.В. Бочкарева

D.V. Bochkareva

*Обучение математике, среда GeoGebra, задачи профессиональной направленности, среднее профессиональное образование, геометрия.*

В статье рассматриваются возможности использования информационных технологий на занятиях по математике у групп швейного направления (конструкторов-модельеров). Применение информационных технологий, в частности системы динамической математики GeoGebra, может раскрыть эстетические и практико-ориентированные стороны преподаваемого математического материала.

*Teaching mathematics, GeoGebra environment, professionally oriented tasks, secondary vocational education, geometry.*

The article discusses the possibilities of using information technology in mathematics classes for sewing groups (fashion designer). The use of information technologies, in particular the dynamic mathematics system GeoGebra, can reveal the aesthetic and practice-oriented aspects of the taught mathematical material.

**В**ыпускники профессиональных образовательных учреждений должны обладать хорошими знаниями в области профильных дисциплин, но базой для них всегда остается знание основ общеобразовательного курса. Математические знания являются неотъемлемой основой как для технических, так и для творческих специальностей. На уровне среднего профессионального образования математические умения пригодятся дизайнерам, конструкторам-модельерам, портным и закройщикам и другим специалистам в сфере легкой промышленности.

Например, Н.А. Вострикова считает, что математическая готовность – одна из важнейших составляющих готовности к профессиональной деятельности, предполагающая не только владение необходимой суммой специальных знаний, умений, предметных навыков в сочетании с личными качествами, но и способность их эффективно использовать в решении творческих профессиональных задач дизайнерского проектирования [1].

Педагогическим работникам и обучающимся невозможно обойти стороной информатизацию образования. Так, Н.А. Казарян утверждает, что важнейшим путем информатизации математического образования является применение ИКТ в процессе обучения. Организованное применение ИКТ в процессе обучения математике важно также и с точки зрения повышения эстетической привлекательности. Так, например, внешние проявления прекрасного играют особую роль в сосредоточении внимания, повышении интереса учеников к математическому материалу, преподаваемому в процессе обучения математике [2].

Еще двадцать лет назад И.П. Иванова в своем исследовании дала пояснение о том, что компьютерные технологии в образовательном процессе выполняют несколько функций и реализуются как предмет изучения, как средство обучения, и как инструмент для решения профессиональных задач, что создает принципиально новую ситуацию в обучении: перед педагогическими коллективами профессионального образования встает задача интеграции педагогических и информационных технологий [3].

Математические задачи могут и должны быть ориентированы на практику и профессиональную деятельность, а также развивать эстетические способности.

Рассмотрим пример геометрической задачи профессиональной направленности для специальностей швейного направления, например «Конструирование, моделирование и технология изделий легкой промышленности». Допустим, необходимо сделать выкройку юбки-солнце. Для этого нужно изобразить окружность, обозначающую обхват талии. Затем отложить длину будущей юбки и провести вторую окружность, определяющую нижний край изделия.

С помощью системы GeoGebra такую простую выкройку можно сделать динамической: задавать обхват талии и длину юбки, меняя длину отрезков ВС и СА. Также, описав вокруг большей окружности квадрат, можно автоматически подсчитывать примерную площадь отреза ткани (рис.). Для выполнения данного чертежа нам понадобятся простые инструменты: окружность по центру и точке, отрезок, точка, многоугольник, расстояние или длина, площадь. А также такой динамический чертеж можно выполнить более изящно, чем на бумаге.



Рис. Выкройка юбки-солнце



В заключение можно сделать вывод, что математическое образование должно быть комплексным: необходимо изучать науку и саму по себе, и в контексте будущей профессии. Учащимся можно развивать свои творческие способности и эстетический вкус, овладевая знаниями и умениями. И все перечисленное в совокупности должно соответствовать современным тенденциям информационного общества.

### **Библиографический список**

1. Вострикова Н.А. О математической подготовке дизайнеров в условиях информатизации образования // Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия: Информатизация образования. 2010. № 2. С. 10–15. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-matematicheskoy-podgotovke-dizaynerov-v-usloviyah-informatizatsii-obrazovaniya/viewer> (дата обращения: 09.11.2023).
2. Казарян Н.А. Проблема формирования прекрасного в условиях информатизации математического образования // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы IV Междунар. науч. конф. Красноярск, 6–9 октября 2020 г.: в 2 ч. Красноярск: Сиб. федер. ун-т. 2020. Ч. 1. С. 139–143. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_44018871\\_55433633.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44018871_55433633.pdf) (дата обращения: 09.11.2023).
3. Иванова И.П. Система компьютерного моделирования в профессиональном образовании конструкторов-модельеров: автореф... дис. канд. пед. наук. Тольятти: Тольят. гос. ун-т, 2004. 24 с. URL: [https://static.freereferats.ru/\\_avtoreferats/01003297349.pdf](https://static.freereferats.ru/_avtoreferats/01003297349.pdf) (дата обращения: 09.11.2023).

# **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ «1С:УРОК» ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ВУЗА ДИСЦИПЛИНЕ «АДАПТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ»**

## **THE USE OF DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES «1С:LESSON» IN TEACHING UNIVERSITY STUDENTS THE DISCIPLINE «ADAPTIVE MATHEMATICS COURSE»**

**Е.Д. Вохтомина, О.Н. Троицкая**

**E.D. Vohtomina, O.N. Troitskaya**

*Обучение, студенты, вуз, математика, адаптивный, цифровые ресурсы, 1С:Урок.*

В статье обоснована необходимость применения цифровых образовательных ресурсов «1С:Урок» в процессе обучения студентов вуза дисциплине «Адаптивный курс по математике». Приведены примеры использования интерактивных материалов во время аудиторных занятий и в рамках самостоятельной работы первокурсников. В статье доказано, что включение цифровых ресурсов «1С:Урок» в систему средств обучения позволит не только повысить эффективность образовательного процесса, но и мотивацию к изучению «Адаптивного курса по математике».

*Education, students, university, mathematics, adaptive, digital resources, 1С:Lesson.*

The article substantiates the need to use digital educational resources «1С:Lesson» in the process of teaching university students the discipline «Adaptive mathematics course». Examples of using interactive materials during classroom lessons and as part of independent work of first-year students are given. The article proves that the inclusion of digital resources «1С:Lesson» in the system of teaching tools will not only increase the efficiency of the educational process, but also the motivation to study the «Adaptive mathematics course».

**У**чебным предметом, изучение которого происходит практически на протяжении всего процесса обучения каждого человека, является математика. Одиннадцатиклассники должны в обязательном порядке сдать Единый государственный экзамен по математике, выбирая базовый или профильный уровень. Далее в вузе продолжается изучение данной науки, исключения составляют только гуманитарные направления подготовки. В зависимости от особенностей учебного плана происходит изучение общей дисциплины «Высшая математика» или отдельных дисциплин «Математический анализ», «Геометрия», «Линейная алгебра» и т.п. Именно на первом курсе студенты начинают испытывать серьезные затруднения с пониманием математической науки. Причин этому множество: низкий уровень математической подготовки первокурсников, небольшое количество аудиторных часов и значительный объем самостоятельной работы, абстрактный характер понятий (предел, бесконечно большая функция, дифференциал и т.д.) [1]. Следствием становится не только плохая успеваемость у студентов в течение первого семестра, но и отчисление из вуза по причине академической задолженности по математике.

С целью преодоления описанных выше проблем в учебные планы ряда вузов страны введены специальные курсы. Так, например, департамент математики НИУ ВШЭ предлагает «Адаптационный курс математики. Углубленный уровень», содержание которого включает следующие вопросы: «Элементарная математика. Введение в математический анализ. Введение в вузовскую математику» [2]. Особенность этого курса состоит в том, что он, с одной стороны, содержит основные понятия школьного курса математики, а с другой стороны, позволяет повысить уровень математической подготовки студентов, которым предстоит изучать дисциплины, требующие сформированности умений применять знания математической теории в нестандартных ситуациях. Преподаватели кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета с целью повторения и систематизации математических знаний и умений первокурсников за курс общеобразовательной школы проводят практические занятия по дисциплине «Адаптивный курс математики». Студенты решают задания таких разделов, как «Уравнения», «Неравенства», «Элементарные функции», «Тригонометрия», «Геометрия на плоскости и в пространстве» [3]. Обучающиеся ИТ-направлений подготовки РГУ имени С.А. Есенина изучают в течение первого семестра «Вводный курс математики», что позволяет им успешно подготовиться к освоению специализированных дисциплин старших курсов [4].

В САФУ имени М.В. Ломоносова первокурсники получают возможность повторить ключевые разделы школьного курса математики и ликвидировать пробелы в своей математической подготовке благодаря «Адаптивному курсу по математике», реализованному с веб-поддержкой. Лекции размещены на платформе электронного обучения Sakai [5] в виде текстовой информации и визуальных материалов (мультимедийные презентации, ссылки на видеоролики, охватывающие целую тему или отдельные ее части). Несмотря на небольшое количество часов, отведенных на проведение лекционных занятий, онлайн-формат позволяет студентам вспомнить ключевой теоретический материал. Далее на практических занятиях первокурсники учатся самостоятельно выбирать методы и алгоритмы решения математических задач. Преподаватели, ориентируясь на различные уровни освоения учебного материала, осуществляют подбор заданий для каждой группы студентов. Кроме того, преподаватели проводят консультации как в очном формате (в аудитории), так и в онлайн-формате на платформе BigBlueButton системы дистанционного обучения Sakai.

К сожалению, поскольку «Адаптивный курс по математике» является факультативной дисциплиной, далеко не все студенты первого курса с низким уровнем базовой математической подготовки посещают соответствующие занятия. Они относят ее к числу необязательных для изучения, поэтому мотивация к выполнению заданий у них отсутствует. Кроме того, общее количество аудиторных часов составляет 36 (это 1 зет), и в ситуации, когда у первокурсника серьезные пробелы в знаниях по той или иной теме школьного курса математики, этих часов недостаточно.

Поэтому мы предлагаем использовать в качестве дополнительных средств обучения цифровые образовательные ресурсы портала «1С:Урок». Их применение позволит не только повысить эффективность образовательного процесса, но и мотивацию к изучению «Адаптивного курса по математике».

В таблице приведены примеры, иллюстрирующие соответствие некоторых тем дисциплины и ресурсов «1С:Урок».

**Примеры ресурсов «1С:Урок»,  
соответствующих темам «Адаптивного курса по математике»**

Темы «Адаптивного курса по математике»	Ресурсы «1С:Урок»
Формулы сокращенного умножения	ЭОР 2.6. Формулы сокращенного умножения: квадрат двучлена, разность квадратов, куб суммы и разности, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_7/Algebraicheskie_vyrazheniya/199485.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_7/Algebraicheskie_vyrazheniya/199485.phd</a>
Свойства степеней	ЭОР 1.8. Степень с натуральным показателем, свойства степени, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_7/chisla_i_vychisleniya/199479.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_7/chisla_i_vychisleniya/199479.phd</a> ЭОР 2.1. Степень с целым показателем, свойства степени, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_8/stepen_s_celym_pokazatelem/199660.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_8/stepen_s_celym_pokazatelem/199660.phd</a>
Арифметическая прогрессия, определение и свойства	Т-1006. Арифметическая прогрессия из целых чисел, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/algebra_9/6_chislovye_posledovatelnosti/2_arifmeticheskaya_i_geometricheskaya_progressii/226343.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/algebra_9/6_chislovye_posledovatelnosti/2_arifmeticheskaya_i_geometricheskaya_progressii/226343.phd</a>
Иррациональные уравнения, область допустимых значений	ЭОР 4.5. Иррациональные уравнения. Решение иррациональных уравнений, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/arifmetich_koren/200910.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/arifmetich_koren/200910.phd</a>
Иррациональные неравенства и их системы	ЭОР 4.6. Иррациональные неравенства. Решение иррациональных неравенств, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/arifmetich_koren/200911.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/arifmetich_koren/200911.phd</a>
Тригонометрические уравнения	ЭОР 6.5. Решение тригонометрических уравнений, ссылка: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/trigonometriya/200928.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Algebra_10/trigonometriya/200928.phd</a>

Так как сегодня все аудитории университета оснащены проекторами и компьютерами для преподавателей, то становится возможным применение цифровых образовательных ресурсов «1С:Урок» непосредственно на аудиторных занятиях. Например, на практическом занятии по теме «Графики элементарных функций» преподаватель совместно со студентами может провести исследования с применением интерактивных заданий «Степенная функция», «Квадратичная функция», «Дробно-рациональная функция», «Тригонометрические функции» [6]. С целью закрепления теоретических знаний следует предложить студентам в рамках самостоятельной работы ознакомиться с видеофрагментами. Они представлены на сайте в разделах «Лекции по математике. Алгебра» [7] и «Лекции по математике.

Геометрия» [8]. Например, видеофрагмент «Определение модуля» [9] позволит первокурсникам не только повторить определение и свойства модуля числа, но и проверить себя в процессе выполнения интерактивных заданий (рисунок 1). В случае неправильного ответа обучающийся получит комментарий с объяснением причины ошибки.

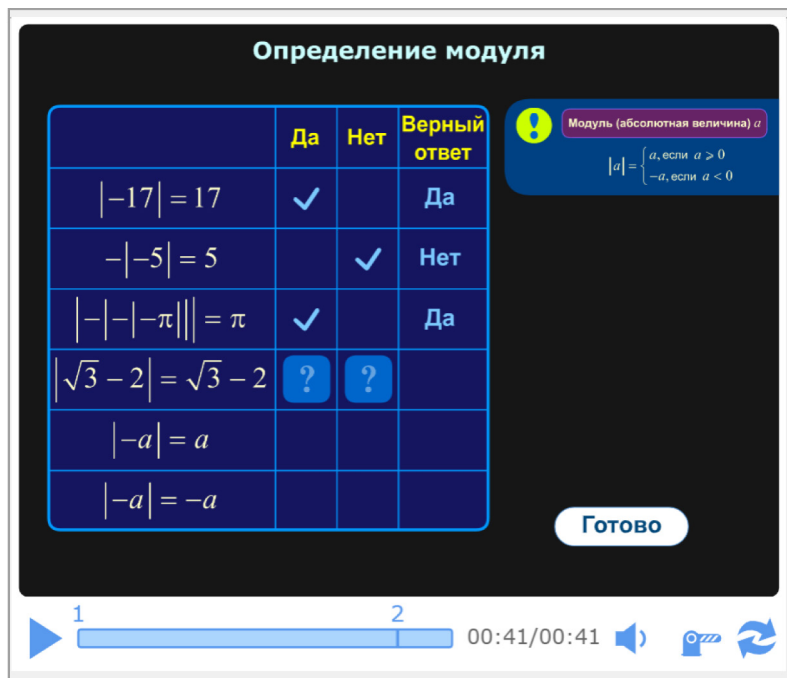


Рис. Интерактивный тест видеофрагмента «Определение модуля»

Использование цифровых образовательных ресурсов «1С:Урок» (модели, тесты, видеофрагменты, лабораторные работы) позволяет оптимизировать процесс обучения дисциплине «Адаптивный курс по математике» за счет рационального построения структуры лекционных и практических занятий, грамотного распределения учебного времени в рамках самостоятельной работы студентов, включения их в активную исследовательскую деятельность. Интерактивные материалы «1С: Урок» являются прежде всего средством учебной деятельности первокурсников, что повышает их мотивацию к изучению «Адаптивного курса по математике».

### Библиографический список

- 1 Пачикова Л.П., Куликова С.В. Проблемы качества базовой математической подготовки первокурсников // МНКО. 2023. №6 (103). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-kachestva-bazovoy-matematicheskoy-podgotovki-pervokursnikov>
- 2 Адаптационный курс математики. Углубленный уровень. URL: <https://www.hse.ru/edu/courses/795420496>
- 3 Рабочая программа. Адаптивный курс математики. URL: [https://cabinet.amursu.ru/uploads/sveden/edu\\_prog/Rab\\_prog\\_Code\\_Name\\_Date/64490/Rab\\_prog\\_09.03.01\\_Adaptivnyy\\_kurs\\_matematiki\\_05.08.2021.pdf](https://cabinet.amursu.ru/uploads/sveden/edu_prog/Rab_prog_Code_Name_Date/64490/Rab_prog_09.03.01_Adaptivnyy_kurs_matematiki_05.08.2021.pdf)

- 4 Кафедра математики. РГУ имени С.А. Есенина. URL: <https://www.rsu.edu.ru/main/structure/faculties/physical-faculty/kafedra-matematiki/>
- 5 Добро пожаловать на платформу Sakai САФУ. URL: <https://sakai.narfu.ru/portal>
- 6 Интерактивные исследования. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye\\_laboratorii\\_po\\_matematike\\_7\\_11\\_kl/grafiki\\_funktsiy/interaktivnye\\_issledovaniya/](https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy/interaktivnye_issledovaniya/)
- 7 Лекции по математике. Алгебра. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii\\_po\\_matematike\\_algebra/](https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii_po_matematike_algebra/)
- 8 Лекции по математике. Геометрия. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii\\_po\\_matematike\\_geometriya/](https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii_po_matematike_geometriya/)
- 9 Определение модуля. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii\\_po\\_matematike\\_algebra/5\\_moduli/5\\_1\\_prosteyshe\\_zadachi\\_s\\_modulyami/198751.phd](https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii_po_matematike_algebra/5_moduli/5_1_prosteyshe_zadachi_s_modulyami/198751.phd)



# ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MATHCAD

## CONSTRUCTION OF SECOND-ORDER SURFACES IN THE MATHEMATICAL PACKAGE MATHCAD

В.В. Давыдовская, П.А. Кохан,  
Д.Н. Абчинец

V.V. Davydovskaya, P.A. Kokhan,  
D.N. Abchinets

*Графическая визуализация, интегрированный пакет MathCAD, поверхность второго порядка, цилиндрические и сферические координаты.*

Рассматриваются возможности пакета MathCAD при построении трехмерной графики, в частности поверхностей второго порядка, использование которых носит актуальный характер при исследовании геометрических свойств поверхностей по их алгебраическим уравнениям. Пакет MathCAD позволяет отображать поверхности второго порядка в необходимом ракурсе, имеет множество настроек по их отображению, что способствует глубокому пониманию учащимися данной темы.

*Graphic visualization, integrated MathCAD package, second-order surface, cylindrical and spherical coordinates.*

The capabilities of the MathCAD package are considered in constructing three-dimensional graphics, in particular second-order surfaces, the use of which is relevant in the study of the geometric properties of surfaces using their algebraic equations. The MathCAD package allows you to display second-order surfaces in the required angle, has many settings for their display, which contributes to students' deep understanding of this topic.

**П**оверхностью второго порядка называется геометрическая фигура, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad (1)$$

При этом предполагается, что, по крайней мере, один из коэффициентов  $a_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) отличен от нуля [1].

Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка (включая их вырожденные случаи). Различают шесть типов поверхностей второго порядка:

1. сфера;
2. эллипсоиды;
3. гиперболоиды;
4. параболоиды;
5. конусы;
6. цилиндры.

Цилиндрические и сферические координаты представляют собой альтернативные системы координат, которые помогают упростить решение задач с определенной геометрической симметрией. Цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$

удобны для описания объектов с симметрией вокруг оси, что позволяет упростить вычисления при интегрировании. Сферические координаты  $(\rho, \varphi, \theta)$  идеально подходят для сферических форм, поскольку они упрощают расчеты, связанные с объемом и пределами интегрирования [2].

Если заданы сферические координаты точки  $(r, \theta, \varphi)$ , то переход к декартовым осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

Связь между цилиндрическими и декартовыми координатами описывается формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (3)$$

Встроенная функция `CreateMesh()` в MathCAD для построения графика поверхности создает массив, представляющий  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -координаты параметрической поверхности, заданной функцией  $F()$ . Далее создает сетку на поверхности определенной функции  $F()$  с параметрами, заданными аргументами [3].

$$M = \text{CreateMesh}(F, x_0, x_1, y_0, y_1, xgrid, ygrid),$$

где  $F$  – функция,

$x_0, x_1, y_0, y_1$  – диапазон изменения переменных  $x$  и  $y$ ,

$xgrid, ygrid$  – количество точек переменной  $x$  и количество точек переменной  $y$  (размеры сетки переменных), количество точек можно задать один раз [4].

### Построение эллипсоида в MathCAD

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

При построении эллипсоида удобнее перейти к сферическим координатам см. формулы (2):

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow x = a \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow y = b \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos^2 \theta = \frac{z^2}{c^2} \rightarrow z = c \cos \theta$$

a := 1    b := 2    c := 2

$$G(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} a \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ b \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ c \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

M := CreateMesh(G, 0, 2·π, 0, 2·π, 50, 50)

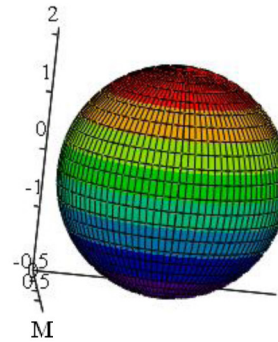


Рис. 1. Построение эллипсоида в MathCAD

### Построение однополостного гиперboloида в MathCAD

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Перейдем к цилиндрическим координатам, см. формулы (3):

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

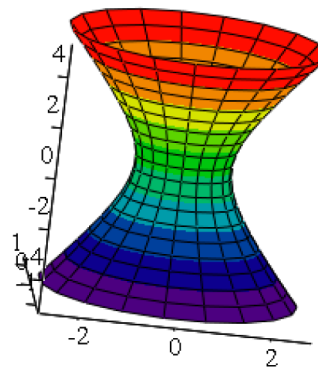
$$\rho^2 = 1 + \frac{z^2}{c^2} \rightarrow \rho = \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \rho^2 \cos^2 \varphi \rightarrow x = \frac{\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{a} \cos \varphi$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \sin^2 \varphi \rightarrow y = \frac{\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}}{b} \sin \varphi$$

a := 1    b := 2    c := 2

$$G(z, \varphi) := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1 + \frac{(z)^2}{c^2}}}{a} \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{\sqrt{1 + \frac{(z)^2}{c^2}}}{b} \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$



S

S := CreateMesh(G, -5, 5, 0, 2·π)

Рис. 2. Построение однополостного гиперboloида в MathCAD

## Построение двуполостного гиперboloида в MathCAD

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Перейдем к сферическим координатам, см. формулы (2):

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow x = a \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow y = b \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{z^2}{c^2}$$

$$-1 + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \cos^2 \theta$$

$$z = \pm c \sqrt{2 - \cos^2 \theta}$$

$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 2$$

$$G1(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} a \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ b \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ c \cdot \sqrt{2 - \cos^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

$$M := \text{CreateMesh}(G1, 0, 2 \cdot \pi, 0, 2 \cdot \pi, 50, 50)$$

M, -M

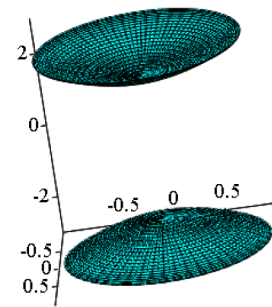


Рис. 3. Построение двуполостного гиперboloида в MathCAD

## Построение конуса в MathCAD

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Перейдем к сферическим координатам, см. формулы (2):

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow x = a \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow y = b \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \cos^2 \varphi$$

$$z = \pm c \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

```

a := 1      b := 1      c := 2
G(θ, φ) := ( a sin(θ) · cos(φ)
             b sin(θ) · sin(φ)
             c · √(1 - cos(θ)²) )
G := CreateMesh(G, 0, 2·π, 0, 2·π, 50, 50)

```

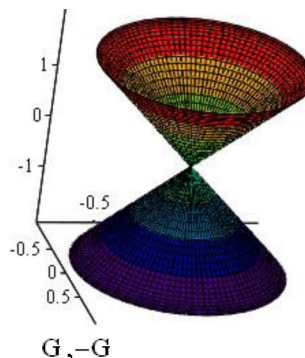


Рис. 4. Построение конуса в MathCAD

В данной статье были рассмотрены возможности применения пакета MathCAD при изучении теории поверхностей второго порядка. Показана возможность классификации поверхностей путем перехода к новой системе координат.

Материал статьи может быть использован в высших учебных заведениях при изучении начертательной геометрии и инженерной графики на основе современных компьютерных технологий.

### Библиографический список

1. Чудинов А.В. Начертательная геометрия с элементами инженерной графики: сборник учебных заданий: учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.
2. Чекмарев А.А. Инженерная графика: учебник для немаш. спец. Вузов. 8-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2007.
3. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12. М.: НТ Пресс, 2006.
4. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009.

# AR-ТЕХНОЛОГИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

## AR-TECHNOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION

А.А. Ефременко

A.A. Efremenko

*Компьютерная анимация, программное средство GeoGebra, математическое образование, AR-технология, интерактивное обучение, динамическая геометрия.*

Одним из ведущих требований в современном обучении является использование компьютерных технологий. Цифровизация образования в современных условиях проявляется в интенсивности применения программного обеспечения информационных технологий, используемых в процессе обучения, где основная задача учителя заключается в необходимости освоения такой среды, в которой материал будет не только наглядным и запоминающимся, но и разнообразным по технике выполнения задач, направленным на модификацию.

*Computer animation, the software GeoGebra, the mathematical education, AR technology, interactive learning, dynamic geometry.*

One of the leading requirements in modern teaching is the use of computer technologies. Digitalization of education in modern conditions is manifested in the intensity of application of information technology software used in the learning process, where the main task of the teacher is the need to master such an environment in which the material will not only be visual and memorable, but also diverse in the technique of tasks, aimed at modification.

**AR** – это аббревиатура от «Augmented Reality», что означает «дополненная реальность». Это технология, которая позволяет дополнять реальный мир виртуальными объектами или элементами, создавая таким образом интерактивную и реалистичную среду. AR используется в различных областях, включая образование, медицину, развлечения и многие другие.

AR-технология в образовании используется для улучшения обучающего процесса путем добавления виртуальных объектов или информации в реальную среду. Это может помочь обучающимся лучше понимать концепции и процессы, а также повысить их интерес к обучению. Кроме того, AR может использоваться для создания виртуальных лабораторий или симуляций, которые могут быть более безопасными и доступными, чем реальные эксперименты.

Одной из программ по реализации AR-технологий в образовании является компьютерная среда GeoGebra.

Реализация AR-технологии в образовании с помощью компьютерной среды GeoGebra осуществляется за счет использования вспомогательных инструментов для AR. Из всего разнообразия внутренних платформ компьютерной среды GeoGebra будем использовать платформу GeoGebra 3D Calculator. GeoGebra 3D Calculator – это бесплатное программное обеспечение для динамического моделирования и алгебры, которое позволяет учащимся создавать геометрические фигуры, графики и диаграммы в 2D и 3D. Оно используется для обучения геометрии, алгебре, тригонометрии и другим предметам. GeoGebra также может быть использована для исследования математических концепций и проведения экспериментов.



Рассмотрим пример построения сферы в рамках реализации AR-технологии на платформе GeoGebra 3D Calculator.

Для этого необходимо установить соответствующие сервисы и программные обеспечения на мобильное устройство или планшетный компьютер.

На рабочем поле платформы GeoGebra 3D Calculator построим сферу, используя инструмент СФЕРА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ (рис. 1).

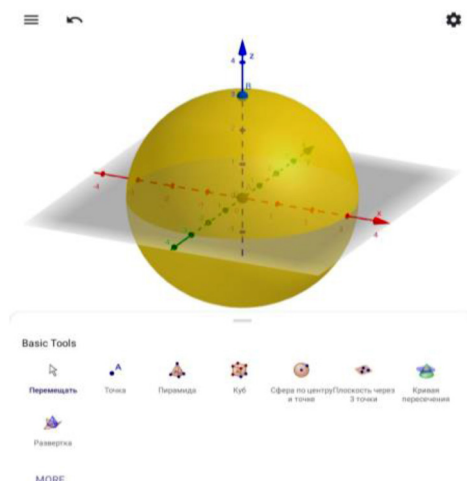


Рис. 1. Анимационный рисунок сферы

Затем нажмите кнопку AR (в правом нижнем углу панели 3D-графики). Заметим, что включилась камера мобильного устройства без отображения анимационного рисунка. Для того, чтобы откалибровать AR и отобразить анимационный рисунок, необходимо направить камеру мобильного устройства на пол. После автоматической калибровки платформа отображения AR подсветится для отображения на ней готового анимационного рисунка сферы (рис. 2), для этого необходимо коснуться любого места на экране мобильного устройства – это виртуально «поместит» объект(ы), которые вы просматривали, в вашу среду.

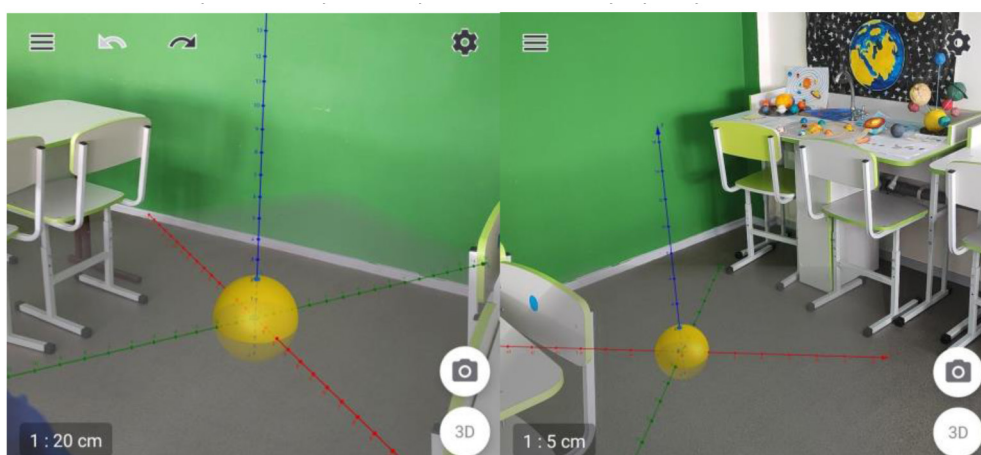


Рис. 2. Анимационный рисунок сферы с использованием AR-технологий

После отображения анимационного рисунка в качестве AR можно рассматривать объект, перемещаясь по комнате, или перемещать пальцами на экране мобильного устройства.

Таким образом, применение AR-технологии в обучении математике гарантирует представление материала наглядным, запоминающимся и разнообразным по технике выполнения задач, направленным на модификацию.

### **Библиографический список**

1. GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата обращения: 20.08.2024).
2. Черкасов К.В., Чистякова Н.С., Чернов В.В. Применение дополненной реальности в образовании // Проблемы педагогики. 2019.

## ОБ «ЭЛЛИПСЕ, ВПИСАННОМ В РОМБ»

### ABOUT THE “ELLIPSE INSCRIBED IN A RHOMBUS”

Т.К. Иконникова, Е.С. Крупицын

T.K. Ikonnikova, E.S. Krupitsyn

*Эллипс, овал, наглядная геометрия, геометрические построения, геометрическое место точек, математическое образование, программное средство GeoGebra.*

Рассматривается подход к изучению понятий «эллипс» и «овал» с использованием системы динамической математики GeoGebra. Предлагаются задачи, демонстрирующие различия этих фигур, которые можно рассматривать в рамках курса «Наглядная геометрия», а также использовать в качестве материала для проектов в более старшем возрасте.

*Ellipse, oval, visual geometry, geometric constructions, the geometric location of the points, mathematical education, GeoGebra software.*

An approach to the study of the concepts of ellipse and oval using the GeoGebra system of dynamic mathematics is considered. Tasks are proposed that demonstrate the differences between these figures, which can be considered within the framework of the course “Visual Geometry” and also used as material for projects at an older age.

**Н**а протяжении долгого времени в кругах, связанных с математическим образованием, обсуждается вопрос полезности и даже необходимости введения курса наглядной геометрии как пропедевтического курса. Ряд авторов (например, [3], [4], [5], [6]) издали учебники и учебные пособия, которые отличаются друг от друга и в вопросах содержания, и в расстановке акцентов, однако сходятся в идее именно наглядности предлагаемого курса. На практике, как родители ученицы 5 класса, в 2023–2024 учебном году мы столкнулись со следующей ситуацией: после очередного урока наглядной геометрии ребенок рассказал, что на уроке ученикам было предложено повторить построение, продемонстрированное в видеоролике, а именно начертить эллипс, вписанный в ромб; у половины класса он в ромб не вписался, и учительница поставила этой половине оценку «3». Предлагаемый алгоритм был таков:

1. С помощью угольника изобразить ромб  $ABCD$ ;
2. С помощью линейки найти середины его сторон:  $N$  – середина  $AB$ ,  $M$  – середина  $BC$ ,  $L$  – середина  $CD$ ,  $H$  – середина  $DA$ ;
3. Построить точки пересечения  $I$  и  $K$  отрезков  $CH$  и  $CN$  с диагональю  $DB$ ;
4. Провести дугу окружности с центром в точке  $C$  от точки  $N$  до точки  $H$ ;
5. Провести дугу окружности с центром в точке  $A$  от точки  $L$  до точки  $M$ ;
6. Провести дугу окружности с центром в точке  $J$  от точки  $H$  до точки  $L$ ;
7. Провести дугу окружности с центром в точке  $K$  от точки  $M$  до точки  $N$ .

Опустим педагогическую сторону этого вопроса, разберемся в математической. Итак, «А был ли эллипс»? Удручает, что некоторые школьные учителя подменяют термин «овал» термином «эллипс», не поясняя разницы. В математической энциклопедии под редакцией И.М. Виноградова [2] читаем, что «Овал – замкнутая,  $C^2$  – гладкая линия в  $R^2$ ». В учебнике черчения, например [1], можно

прочитать, что «овал – замкнутая выпуклая плоская кривая, образованная сопряжением дуг окружностей разных радиусов (внутреннее сопряжение)». Эллипс же в математике определяется как геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек одинаково, или как алгебраическая линия, имеющая уравнение  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Таким образом, любой эллипс – это овал, но не любой овал – эллипс. Сопряжение в черчении означает, что обе кривые, соединяющиеся в данной точке, имеют в ней одинаковую касательную. Очевидно, что фигура, описанная в [1], удовлетворяет определению овала, но, как и эллипс, лишь является его частным случаем. Но, даже переформулировав задание «постройте овал, вписанный в ромб по данному алгоритму», приходится констатировать, что половина класса не справилась бы с поставленной задачей, получив чертежи, подобные этому:

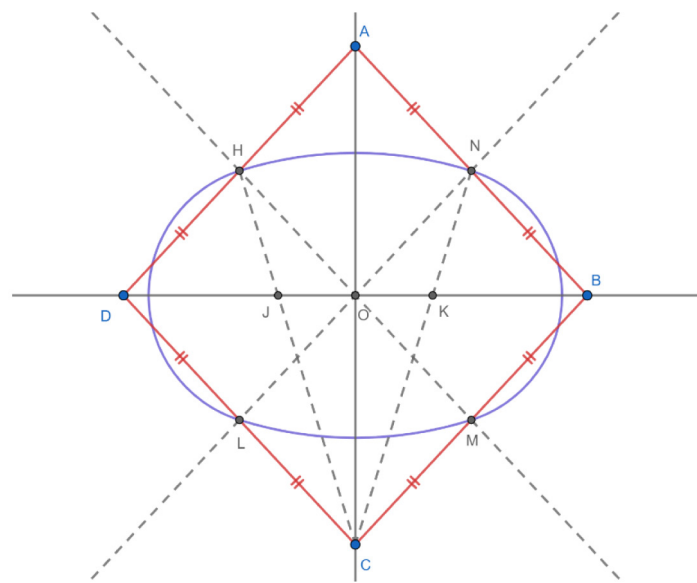


Рис. 1. Предполагаемый детский чертеж

Так в чем же дело? Ответ прост: всему виной человеческий фактор, или, в данном случае, учительский фактор. С большой долей вероятности эта задача была взята учителем со «всемогущих просторов Интернета» и не была достаточно обдумана. В сети действительно есть короткие видео (одно из которых и были предложено детям в качестве алгоритма), демонстрирующие изображение овала, вписанного в ромб. Данное построение принято в черчении при изображении окружностей, вписанных в грани куба в изометрической проекции. Как известно, в изометрической проекции угол между осями составляет 120 градусов, т.е. острый угол ромба, изображающего квадратную грань, равен 60 градусам. Центры строящихся окружностей и точка их пересечения лежат на одной прямой, поэтому сопряжение дуг происходит и эта прямая, в случае ромба с углом 60 градусов, перпендикулярна стороне ромба, поэтому овал оказывается вписанным в ромб. Если же угол изменить, то перпендикулярность нарушится и вписанного овала не получится. Поскольку входной информации о том,

что угол ромба должен быть равен 60 градусам, не было, естественно, все учащиеся начертили произвольный ромб и не получили ожидаемого результата.

Однако проблема не только в этом. Заглянув в вышеуказанные учебники, обнаруживаем, что в [3] и [4] вопросов эллипса и овала не касаются, в [6] приведено определение эллипса и классический способ его изображения, в то время как в [5] термины «овал» и «эллипс» применяются к одному объекту в одинаковом значении, кроме того, указан следующий способ построения эллипса:

Нарисовать эллипс можно, используя вспомогательный прямоугольник (рис. 147, а). Достаточно последовательно плавной линией соединить середины его сторон (рис. 147, б), а затем стереть этот прямоугольник (рис. 147, в). Но можно изготовить трафарет или воспользоваться специальной линейкой. В Приложении (с. 110) представлена таблица. В её строках расположены эллипсы, которые могут быть

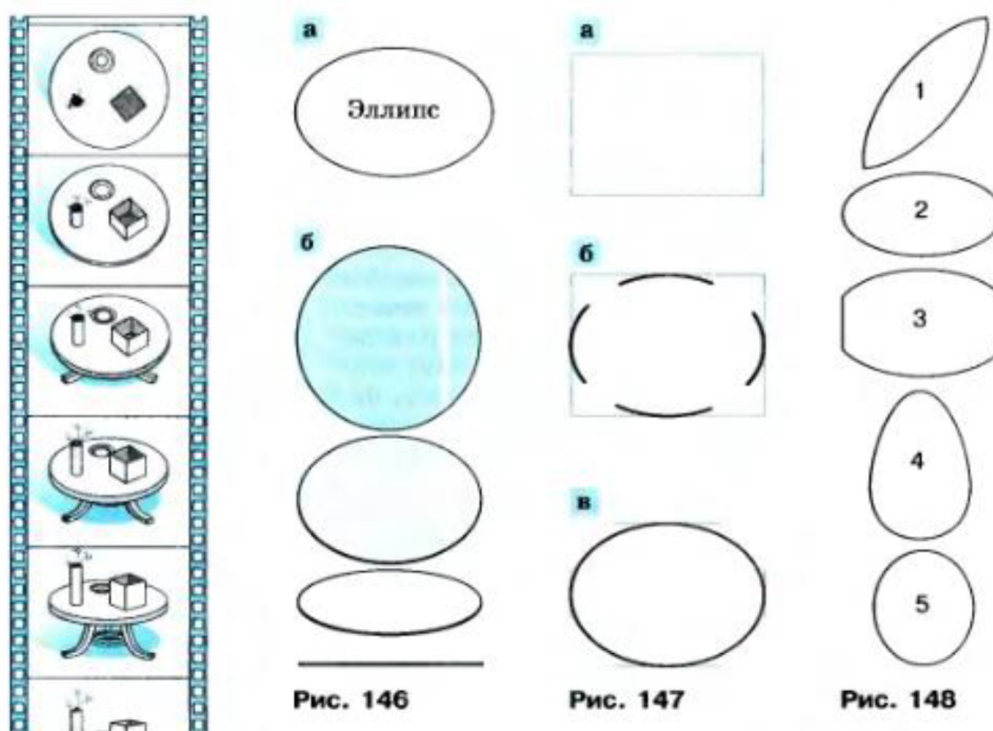


Рис. 2. [5], страница 44

Напомним, что целью пропедевтического курса «Наглядная геометрия» является именно наглядное знакомство с геометрическими объектами. Эллипс и овал, на наш взгляд, вполне достойны рассмотрения в рамках этого курса, однако средства для знакомства были выбраны крайне неудачно. Полезнее было бы знакомить детей с эллипсом посредством всем известного способа двух кнопок и веревки, демонстрирующего определение эллипса. Но, учитывая современные реалии и вектор трансформации нашей системы образования в сторону подключения различных цифровых средств, вполне оправданно их применение в данном вопросе. Перечислим задачи, связанные с эллипсом и овалом, которые, на наш взгляд, полезно исследовать с помощью системы GeoGebra:

– рассмотрение вариаций впишется/не впишется овал, построенный по предлагаемому алгоритму, в данный ромб;



- построение овалов, вписанных в данный ромб, методом сопряжения дуг;
- построение овалов по заданным полуосям методом сопряжения дуг;
- сравнение эллипса и овалов с одинаковыми полуосями;
- построение точек эллипса.

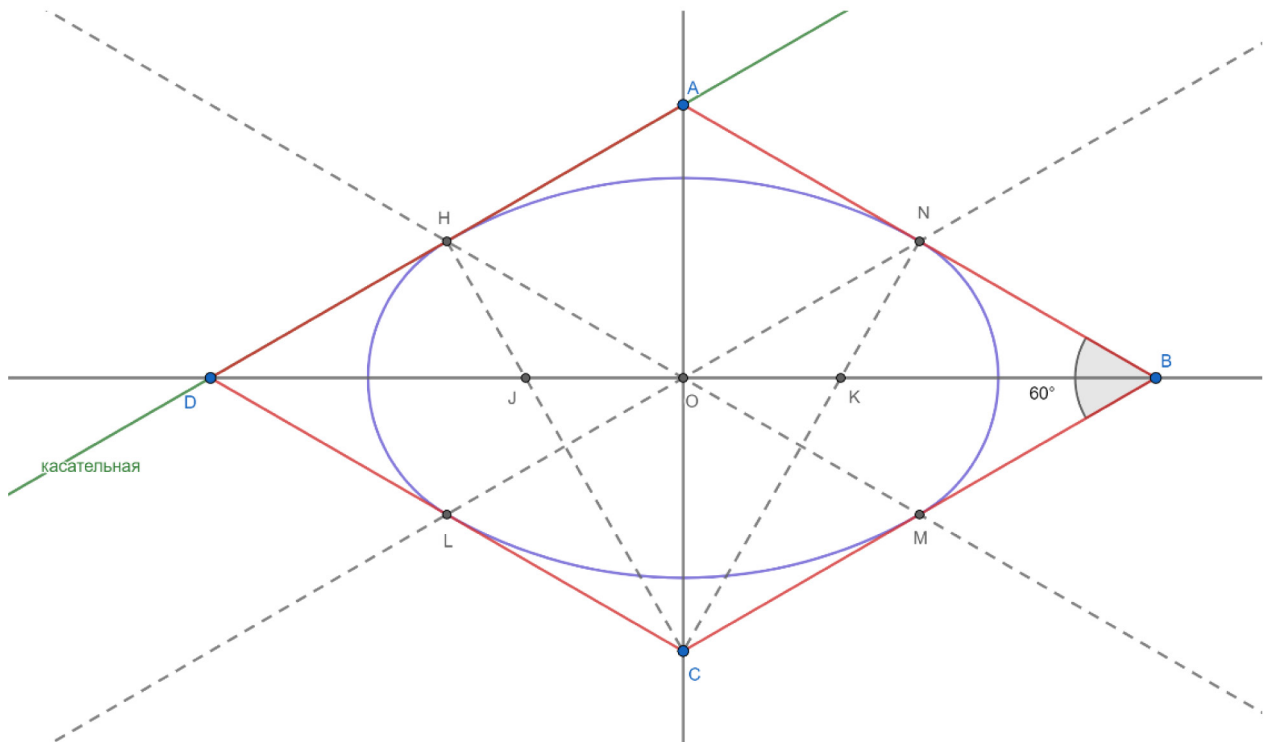


Рис. 3. Угол ромба 60 градусов

Так, при изучении предлагаемого алгоритма явно видим «правильную картинку», если взять угол  $60^\circ$ .

И «неправильные картинки» при всех остальных вариантах угла.

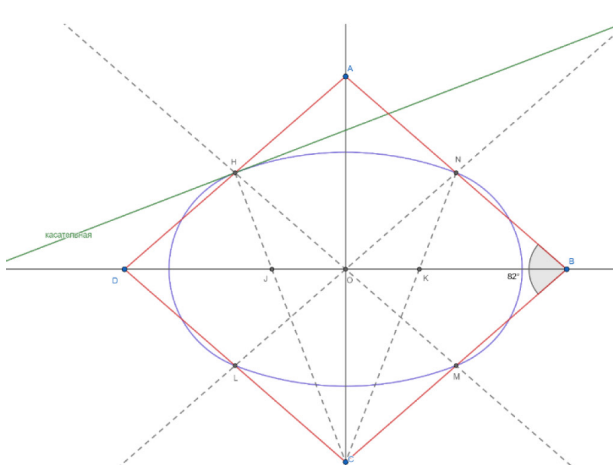


Рис. 4. Угол больше 60 градусов

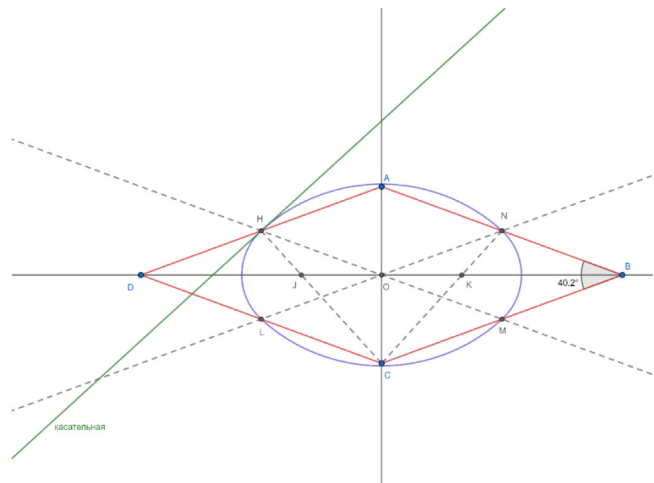


Рис. 5. Угол меньше 60 градусов

Однако никто не мешает изменить построение, чтобы оно подходило для любого ромба. Для этого нужно изменить точки **J** и **K**. Итак, находим точки **J** и **K** как точки пересечения прямых, перпендикулярных **AD** и **AB** соответственно,



с прямой  $DB$ , а все остальные шаги построения оставляем без изменения. Можно наблюдать, как меняется форма овала, но он по-прежнему остается сопряжением дуг и вписанным в ромб.

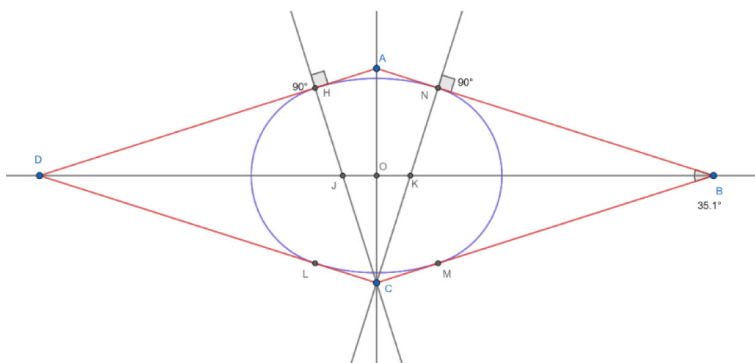


Рис. 6. Овал, вписанный в ромб с углом, меньшим 60 градусов

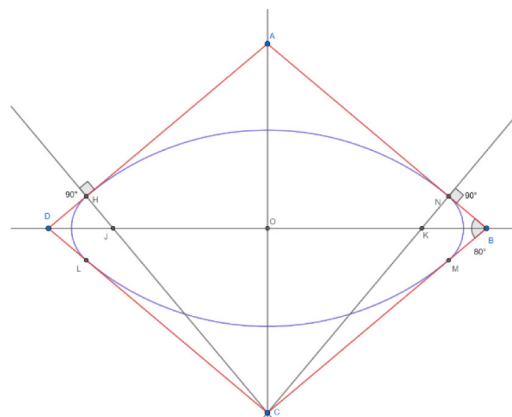


Рис. 7. Овал, вписанный в ромб с углом, большим 60 градусов

При изучении вопроса о сравнении эллипса и овалов с одинаковыми полуосями можно в динамике, меняя полуоси и радиус одной из окружностей, видеть, насколько эти фигуры различаются и сколько существует овалов с данными полуосями, являющихся сопряжением двух пар дуг.

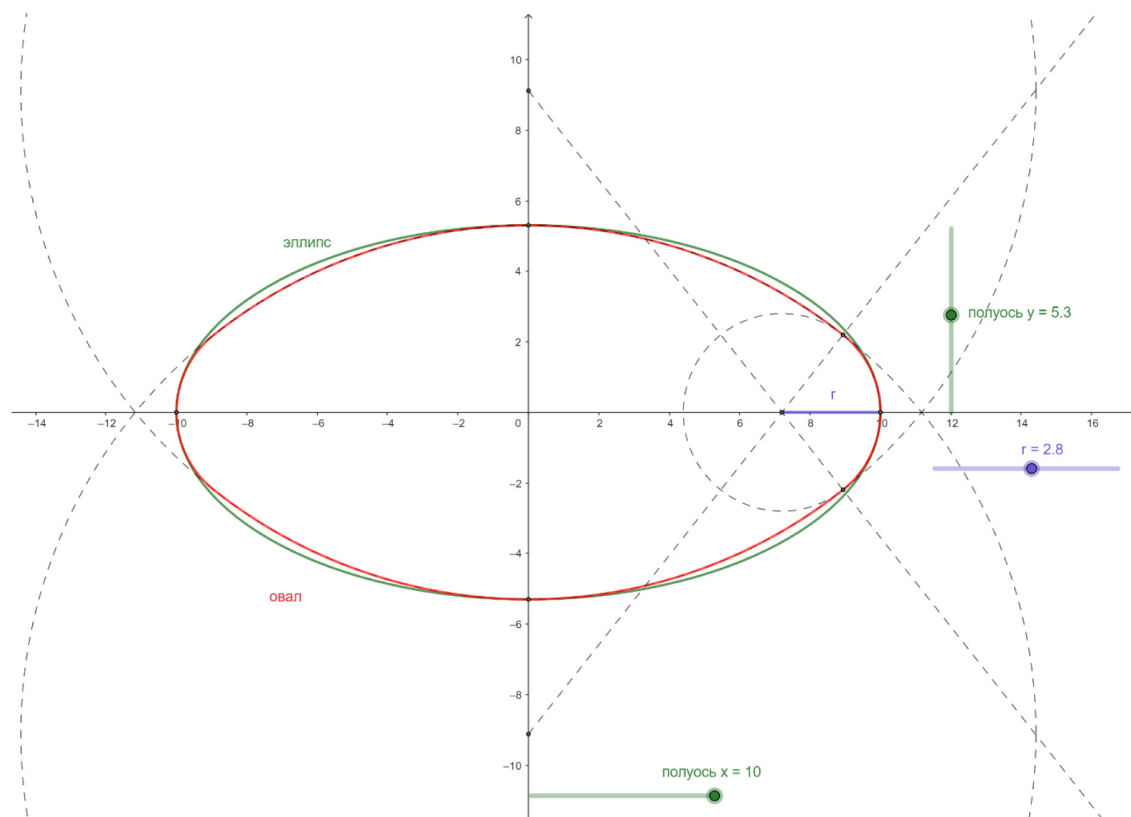


Рис. 8. Сравнение эллипса и овалов с одинаковыми полуосями

С помощью оставления следа точки и увеличения количества точек можно видеть, как множество точек становится все больше похоже на эллипс.

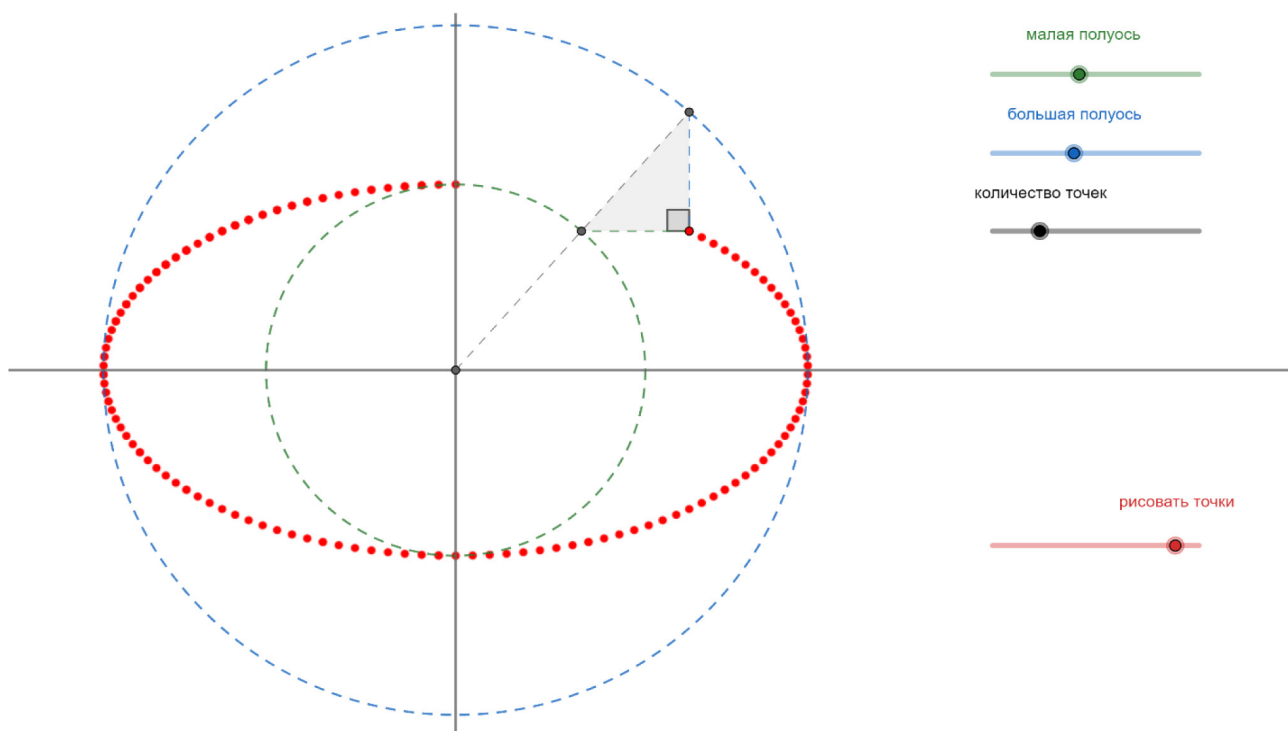


Рис. 9. Изображение точек эллипса

В заключение хотелось бы отметить, что задачи про эллипс и овал являются многослойными и могут быть рассмотрены с разных ракурсов, в разных объемах и на разных этапах освоения геометрии: и как в качестве темы для урока наглядной геометрии в 5–6 классах, и в качестве темы проекта для более старшего возраста. В обоих случаях система динамической математики GeoGebra выступает отличным наглядным средством, а значит, полезным инструментом исследования задачи.

### Библиографический список

1. Геометрические построения кривых линий: для студентов технических специальностей очной и заочной форм обучения, выполняющих графическое задание «Построение плоских кривых»: учебно-методическое пособие / сост. Т.В. Шустикова, И.В. Сергеева; Инженерная школа ДВФУ. Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2019.
2. Математическая энциклопедия / под ред. И.М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1985.
3. Панчищина В.А., Гельфман Э.Г., Ксенева В.Н. Математика. Наглядная геометрия. 5–6 классы: учебник. ФГОС. М.: Просвещение, 2023.
4. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Яценко И.В. Наглядная геометрия. 5 класс: учебное пособие. ФГОС. М.: Мнемозина, 2021.
5. Ходот Т.Г., Ходот А.Ю., Велиховская В.Л. Математика. 5 класс. Наглядная геометрия. Базовый уровень. ФГОС. М.: Просвещение, 2023.
6. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Математика. Наглядная геометрия. 5–6 класс. М.: Просвещение, 2023.

# **ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ БИБЛИОТЕКИ «1С:УРОК» В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ 6-х КЛАССОВ**

## **APPLICATION OF DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES OF THE LIBRARY «1С:LESSON» IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS TO 6TH GRADE STUDENTS**

**Т.Б. Кабакова**

**T.B. Kabakova**

*Обучение, математика, цифровые образовательные ресурсы, «1С:Урок», модуль числа.*

В статье обоснована необходимость применения цифровых образовательных ресурсов в процессе обучения математике учащихся 6-х классов. Описаны дидактические возможности, предоставляемые интерактивными материалами портала «1С:Урок». Представлен пример использования цифровых образовательных ресурсов «1С:Урок» на уроках математики в процессе формирования понятия «модуль числа» и умений оперировать им при решении математических задач.

*Education, mathematics, digital educational resources, «1С:Lesson», modulus of a number.*

The article substantiates the need to use digital educational resources in the process of teaching mathematics to 6th grade students. It describes the didactic opportunities provided by the interactive materials of the «1С:Lesson» portal. The article presents an example of using digital educational resources «1С:Lesson» in mathematics lessons in the process of forming the concept of «modulus of a number» and the ability to operate it in the process of solving mathematical problems.

**П**рименение цифровых образовательных ресурсов в процессе обучения математике обусловлено требованиями федеральных государственных образовательных стандартов и федеральных рабочих программ. Так, во ФГОС основного общего образования указано, что всем участникам образовательного процесса должна быть предоставлена возможность безопасно использовать верифицированные образовательные ресурсы цифровой образовательной среды. К ним относят «мультимедийные программы, электронные учебники и задачки, электронные библиотеки, виртуальные лаборатории, игровые программы, лекции цифровых образовательных ресурсов» [1]. Федеральная рабочая программа основного общего образования по математике и для базового, и для углубленного уровней регламентирует применение обучающимися цифровых ресурсов при решении математических задач. Например, учащиеся в 5 классе должны уметь «моделировать в графической, предметной форме, с помощью компьютера понятия и свойства, связанные с обыкновенной дробью; ...; проводить исследования свойств дробей, опираясь на числовые эксперименты (в том числе

с помощью компьютера)», в 6 классе – «находить расстояние между двумя точками, от точки до прямой, длину пути на квадратной сетке, в том числе используя цифровые ресурсы; ...; конструировать геометрические конфигурации, используя свойство симметрии, в том числе с помощью цифровых ресурсов» [2]. Таким образом, применение цифровых образовательных ресурсов в процессе обучения математике обеспечивает включение учащихся в различные виды продуктивной деятельности.

Как отмечают Л.А. Булатова и А.Р. Нафикова в [3], задача учителя состоит в определении цели использования цифровых материалов и соответствующих этапов урока математики. Проведенный авторами статьи анализ интернет-ресурсов («Учи.ру», «ЯКласс», «Яндекс. Учебник» и др.) позволил прийти к выводу о том, что включение их в систему средств обучения позволит педагогу сформировать у учащихся интерес к изучению математики и умения применять ее аппарат при решении практических проблем. Л.В. Пожидаева в [4] подчеркивает значение цифровых образовательных ресурсов при объяснении сложных концепций. По ее мнению, благодаря интерактивным визуализациям и графикам учитель может разнообразить и индивидуализировать образовательный процесс.

Широкие дидактические возможности предоставляют интерактивные материалы портала «1С:Урок». Их роль в процессе организации учебно-исследовательской деятельности учащихся на уроках математики подчеркивают Н.В. Эйрих [5], В.Д. Романюк [6], В.А. Булычев [7] и другие методисты. Рассмотрим особенности применения цифровых образовательных ресурсов библиотеки «1С:Урок» в процессе обучения математике учащихся шестых классов.

На сайте в разделе «Математика, 6 класс (ЭОР 1.1)» [8] представлены ресурсы, направленные на формирование знаний (лекции в двух форматах: анимированные слайды с теоретическим материалом и анимированные слайды с голосовым сопровождением теоретического материала) и умений учащихся применять теоретический материал в процессе решения практических заданий (динамические модели и задания, интерактивные тесты, интерактивные тренажеры). В соответствии с изучаемой темой учитель может выбрать и далее использовать цифровые ресурсы в учебной и внеучебной деятельности. Например, на этапе формирования знаний учащихся о понятии «модуль числа» у учителя есть возможность использовать анимированные слайды с теоретическим материалом. Два слайда-резюме комплекса «Модуль числа, геометрическая интерпретация модуля» позволяют уточнить содержание и объем данного понятия (рисунок 1).

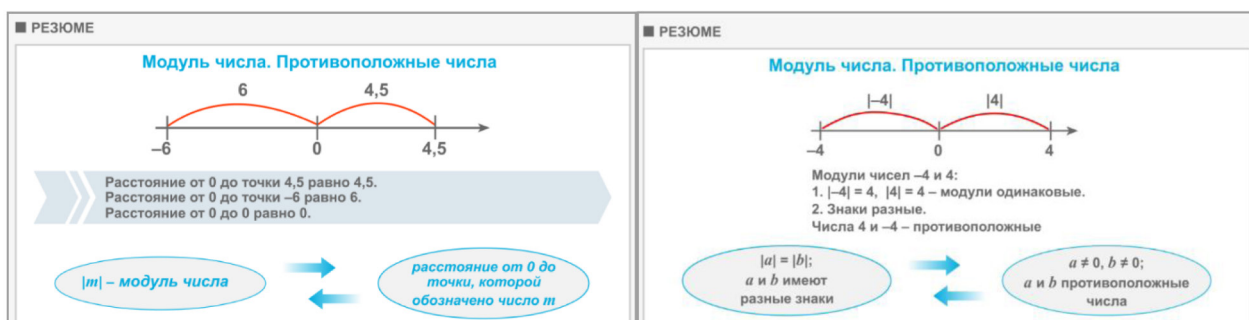


Рис. 1. Слайды-резюме [9]

Математический диктант, предлагаемый разработчиками «1С:Урок», включает учащихся в деятельность осознания геометрического смысла модуля числа. Дальнейшая работа с проблемами-упражнениями рассматриваемого комплекса обеспечит формирование умений применять модуль числа при решении различных типов заданий (рис. 2). Шестиклассники могут проверить полученные ими ответы, используя кнопку «Подтвердить ответ».

№ 1. Какое отрицательное число имеет модуль 15,92?

Ответ.

№ 2. Решите уравнения:

а)  $|x| = 3,2$ ; б)  $|y| = 0$ ; в)  $|b| = |-4,41|$ .

Ответ.

а)  $x =$   ;  $x =$   ;

б)  $y =$   ;

в)  $b =$   ;  $b =$  .

№ 3. Установите, являются ли противоположными числа:

а) 0,5 и  $-\frac{1}{2}$ ; б) 0,2 и  $\frac{1}{5}$ ; в) 5 и  $-\frac{1}{5}$ .

Ответ.

а) модули , числа ;

б) модули , числа ;

в) модули , числа .

Сбросить    Показать ответ    ?   

Рис. 2. Примеры проблем-упражнений [9]

На этапе определения уровня сформированности у обучающихся умений оперировать понятием «модуль числа» учитель предлагает школьникам выполнить задания двух самостоятельных работ (базового и повышенного уровня сложности). Дальнейшая работа с цифровыми образовательными ресурсами «1С:Урок» происходит при выполнении шестиклассниками домашнего задания. С целью закрепления знаний о понятии «модуль числа» учащимся предлагается перейти по ссылке [10] и ознакомиться с видеотреугольником, в рамках которого следует выполнить задания интерактивного теста (рис. 3).

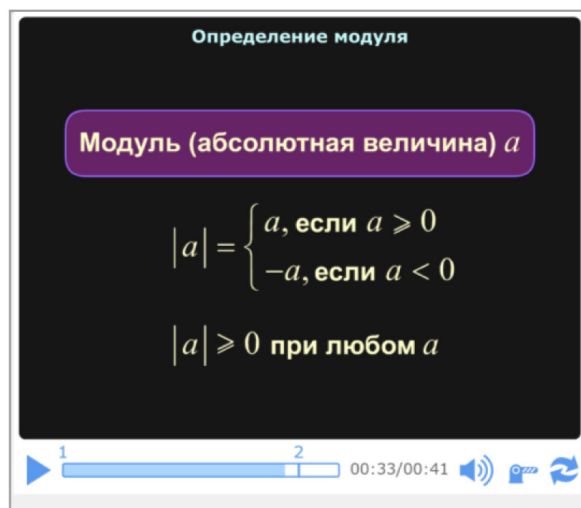


Рис. 3. Видеотреугольник «Модуль числа» [9]

Применение цифровых образовательных ресурсов библиотеки «1С:Урок» в процессе обучения математике учащихся 6-х классов обеспечит развитие их интеллектуальных способностей, исследовательских умений, интереса к изучению математики. Шестиклассники будут вовлечены в активную учебную деятельность за счет перехода от пассивного восприятия учебного материала к активному, осознанному овладению знаниями и умениями.

### Библиографический список

1. ФГОС. Основное общее образование. URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/>
2. Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень). URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13\\_ФРП\\_Математика\\_5-9-классы\\_база.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf)
3. Булатова Л.А., Нафикова А.Р. Использование цифровых образовательных ресурсов на уроках математики // Вестник Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. 2022. № 4 (65). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-tsifrovyyh-obrazovatelnyh-resursov-na-urokah-matematiki-1>
4. Пожидаева Л.В. Влияние цифровых образовательных ресурсов на процесс обучения математике в школе. URL: <https://1-sept.ru/component/djclassifieds/?view=item&cid=4:publ-ssh-bf&id=2165:влияние-цифровых-образовательных-ресурсов-на-процесс-обучения-математике-в-школе&Itemid=464>
5. Эйрих Н.В. Организация учебно-исследовательской деятельности на уроках математики с использованием виртуальных лабораторий портала «1С:Урок» // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. 2023. № 3 (52). С. 75–91. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=59464123>
6. Романюк В.Д. Использование виртуальной лаборатории портала «1С:Урок» для геометрических построений // В сборнике: Молодежные исследования и инициативы в науке, образовании, культуре, политике: сборник материалов XVIII Всероссийской молодежной научно-практической конференции. Биробиджан, 2023. С. 61–66. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55362122>
7. Булычев В.А. Элементы математического моделирования в школе на базе интерактивной среды «1С: Математический конструктор» // В сборнике: Новые информационные технологии в образовании: сборник научных трудов XXIII Международной научно-практической конференции. М., 2023. С. 270–274.
8. Математика, 6 класс (ЭОР 1.1). URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron\\_resursy\\_FGOS\\_2022\\_5-11\\_kl/Matematika\\_6/](https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Matematika_6/)
9. Модуль числа, геометрическая интерпретация модуля. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron\\_resursy\\_FGOS\\_2022\\_5-11\\_kl/Matematika\\_6/polozhit\\_i\\_otcateln\\_chilsa/200048.phd](https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Matematika_6/polozhit_i_otcateln_chilsa/200048.phd)
10. Определение модуля. URL: [https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii\\_po\\_matematike\\_algebra/5\\_moduli/5\\_1\\_prosteyshe\\_zadachi\\_s\\_modulyami/198751.phd](https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektsii_po_matematike_algebra/5_moduli/5_1_prosteyshe_zadachi_s_modulyami/198751.phd)



# КУРС «МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДАННЫХ» В МАГИСТРАТУРЕ ПО МАШИННОМУ ОБУЧЕНИЮ И АНАЛИЗУ ДАННЫХ

## “DATA VISUALIZATION METHODS” IN THE MASTER’S PROGRAM IN MACHINE LEARNING AND DATA ANALYSIS

Е.В. Котельников

E.V. Kotelnikov

*Методы визуализации данных, машинное обучение, анализ данных, Python, matplotlib, seaborn, plotly.*

Предлагается разработка нового учебного курса «Методы визуализации данных» для магистерских программ в области машинного обучения и анализа данных. В курсе рассматриваются принципы визуализации, визуализация разных типов данных, применение методов визуализации в машинном обучении. Курс позволит обучающимся ориентироваться в большом количестве методов и инструментов визуализации, понять принципы их работы и осуществлять осознанный выбор инструментов для решения прикладных задач.

*Data visualization methods, machine learning, data analysis, Python, matplotlib, seaborn, plotly*

The development of a new course “Data Visualization Methods” for master’s degree programs in machine learning and data analysis is proposed. The course covers the principles of visualization, visualization of different types of data, application of visualization methods in machine learning. The course will allow students to navigate through a large number of visualization methods and tools, understand the principles of their work and make a conscious choice of tools for solving practical problems.

**В** современной науке и индустрии постоянно возникает потребность в визуализации – в ходе анализа данных для описания, исследования и обобщения результатов, в процессе разработки новых и применения известных методов машинного обучения, при подготовке научных статей, отчетов и докладов. Точное и наглядное представление информации во всех этих случаях является важным этапом, влияющим на восприятие результатов и формирование выводов. Поэтому необходимо хорошо понимать принципы визуализации данных и уметь эффективно использовать соответствующие инструменты.

В России и за рубежом существуют учебные курсы по методам визуализации, однако они не покрывают все важные аспекты этой области. Например, в курсе рассматривается визуализация количественной информации, но отсутствуют методы представления других типов данных. Или курс направлен на изучение одного конкретного инструмента визуализации (часто платного) без изложения основ восприятия информации и описания других доступных инструментов.

Поэтому является актуальной проблема разработки курса «Методы визуализации данных», содержащего целостное представление принципов, методов и открытых инструментов визуализации, с возможностью применения полученных знаний для решения конкретных задач на лабораторных работах.

Предлагаемый курс должен встраиваться в магистерские программы по машинному обучению и анализу данных. В качестве пререквизитов к нему необходимы курсы по программированию на языке Python, методологии научных исследований, математическим основам анализа данных и основам машинного обучения. После освоения нового курса студенты смогут осознанно применять рассмотренные методы и инструменты в ходе производственных практик и выполнения ВКР.

Лекционный раздел курса включает следующие темы:

1) принципы визуализации – основы визуального восприятия, координатные системы, масштабы и проекции, цветовые шкалы, виды данных и диаграмм [1; 2; 3];

2) инструменты визуализации – библиотеки Matplotlib [6], Seaborn [8], Plotly [7], Vokeh [4] и Folium [5];

3) визуализация разных типов данных – визуализация количественных данных и пропорций, корреляций, распределений, графов, текстовых данных, временных рядов, геопространственных данных, качественных данных;

4) визуализация в машинном обучении – методы снижения размерности, визуализация методов машинного обучения, интерпретация моделей на основе визуализации.

Лабораторный раздел сопровождает лекционный материал и содержит задания по всем основным темам. Материалы лабораторных работ оформляются в виде Jupyter-ноутбуков – файлов, включающих одновременно исполняемый программный код на Python, текст, формулы, рисунки и таблицы, которые можно просматривать и выполнять в специальных программных средах (локально или в Интернете).

Основными программными инструментами в курсе являются язык программирования Python и ряд библиотек для визуализации данных: Matplotlib, Seaborn, Plotly, Vokeh и Folium. Все указанные программы являются открытыми и могут быть установлены на компьютерах вуза. Также могут быть использованы облачные сервисы для вычислений.

Таким образом, предлагаемый курс позволит обучающимся ориентироваться в большом количестве методов и инструментов визуализации, понять принципы их работы и осуществлять осознанный выбор инструментов для решения прикладных задач. Освоенные инструменты будут использоваться студентами для анализа данных и представления результатов исследований в других учебных дисциплинах, а также при подготовке выпускных квалификационных работ и курсовых проектов, в ходе производственной практики и в НИР.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Фонда Потанина.

## Библиографический список

1. Rougier N.P. Scientific Visualization: Python + Matplotlib. 2021.
2. Schwabish J.A. Better Data Visualization. A Guide for Scholars, Researchers, and Wonks. New York: Columbia University Press, 2021.
3. Tufte E.R. The Visual Display of Quantitative Information. 2<sup>nd</sup> ed. Graphics Press, 2001.
4. Библиотека визуализации данных Bokeh. URL: <http://bokeh.org> (дата обращения: 12.11.2024).
5. Библиотека визуализации данных Folium. URL: <https://python-visualization.github.io/folium> (дата обращения: 12.11.2024).
6. Библиотека визуализации данных Matplotlib. URL: <https://matplotlib.org> (дата обращения: 12.11.2024).
7. Библиотека визуализации данных Plotly. URL: <https://plotly.com/python> (дата обращения: 12.11.2024).
8. Библиотека визуализации данных Seaborn. URL: <https://seaborn.pydata.org> (дата обращения: 12.11.2024).

# ОБЗОР ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ПОДГОТОВКЕ К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ

## REVIEW OF DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN TEACHING MATHEMATICS AND PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAMINATION

А.И. Мещеркин

A.I. Mescherkin

*Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), онлайн-платформы, тестирование, Единый государственный экзамен.*

Статья посвящена возможностям использования цифровых образовательных ресурсов и онлайн-платформ учителем на уроках математики, а также при подготовке к Единому государственному экзамену. Приведен обзор основных ресурсов, которые может использовать учитель математики в своей работе.

*Digital educational resources (DCS), online platforms, testing, Unified State Exam.*

The article is devoted to the possibilities of using digital educational resources and online platforms by a teacher in mathematics lessons and in preparation for the Unified State Examination. It gives an overview of the main resources that can be used by a math teacher in their work.

**И**нновационные методы обучения требуют включения новых способов вовлечения обучающихся в образовательный процесс. В настоящее время интерес школьников к обучению снижается, что влечет за собой снижение результатов Единого государственного экзамена за последние несколько лет. В Красноярском крае «за счет увеличения доли участников с высоким уровнем подготовки по математике (профильный уровень) естественным образом произошло уменьшение количества участников со средними баллами. К ним отнесем участников экзамена, набравших от минимального балла до 60 баллов: 2022 год – 47,69%, 2023 год – 48,35%, 2024 год – 44,97%. Также уменьшилась доля участников, набравших от 61 до 80 баллов: 2022 год – 39,43%; 2023 год – 38,86%; 2024 год – 34,08%» [2].

Наблюдается заинтересованность подростков в применении цифровых технологий, которые они используют в качестве развлечений или изучений какой-либо сферы, которая интересна школьникам. Именно поэтому использование цифровых технологий в образовании имеет серьезный потенциал в части роста вовлеченности обучающихся в образовательный процесс. Использование информационных технологий в рамках образовательного процесса – идея далеко не новая, однако при этом не так часто реализуемая в школах на данный момент.

Работа с цифровыми образовательными ресурсами (ЦОР) на уроке может не только больше заинтересовать обучающихся, но и создать более комфортную среду для работы. Например, при использовании ЦОР на уроках геометрии

появляется возможность выполнять построения быстрее и точнее. Если при изучении раздела стереометрии использовать ЦОР для построения многогранников, то можно повысить уровень понимания темы со стороны обучающихся, которым сложно даются представления тел в пространстве.

При использовании ЦОР для педагога крайне важно уделить внимание нормам СанПиН, в которых прописано, как долго обучающийся определенной возрастной категории может использовать компьютер на уроке [4]. Педагог должен разработать такой формат урока с использованием ЦОР, который соответствует нормам СанПиН. Кроме того, использование ЦОР должно быть уместным: при злоупотреблении применением ИКТ может лишь снизить уровень понимания, так как в работе с некоторыми средами действия обучающихся выполняются компьютером, что влечет за собой отсутствие выработки навыка. Поэтому использование ЦОР должно быть лишь одним из способов работы над учебными задачами, но далеко не основным видом деятельности на уроке.

Поскольку работа учителя математики – это объемный и трудоемкий процесс, то рассмотрим ресурсы, интуитивно понятные не только для обучающихся, но и для учителей, которые будут занимать минимальное количество времени при подготовке к занятиям.

«**Российская электронная школа**» (РЭШ) – это полный школьный курс уроков; это информационно-образовательная среда, объединяющая ученика, учителя, родителя [6]. На этой платформе для учителя предоставляется возможность подготовить учебные задания на урок, который будет интересен для обучающихся, так как это современный подход – использовать цифровые технологии. Вся информация по разделам школьного курса математики представлена в виде конспектов и предоставляется видеоразбор почти по каждой теме, что помогает учителю, в классе которого обучающиеся имеют разный тип восприятия информации (информация с проговариванием во внешней речи для аудиалов, сопровождается рисунками для визуалов и рассматривается на конкретном примере для кинестетиков). РЭШ представляет собой сборник информации для учителей и обучающихся, которые представлены в удобной структуре.

Эту платформу можно использовать для проверки уровня усвоения материала, закрепления или обобщения изученного, а также обучающиеся могут выполнять дома задания, предоставленные на этой платформе.

Кроме работы на уроке, учителю необходимо давать обучающимся домашнее задание на закрепление материала и проверить их выполнение. В этом поможет цифровая образовательная платформа «**Облако знаний**». Эта платформа оснащена теорией и заданиями по программам школьных учебников, а также включает в себя материалы для подготовки к ЕГЭ и развивает функциональную грамотность [3]. Учитель, используя эту платформу во время урока, повышает интерес к предмету, так как на этой платформе разработана система достижений с пятью уровнями. Удобства для учителя заключается еще и в проверке домашнего задания, которое можно дать обучающимся на этой платформе: «Учителю больше не нужно тратить время на проверку типовых заданий, а задания с развернутым ответом проверяются в удобном формате [5]», то есть выполнение домашнего



задания обучающимися прослеживается платформой и результаты выполнения выводятся у учителя. Эти результаты учитель может проанализировать и составить работу на устранение индивидуальных затруднений.

Для обучающихся данный цифровой образовательный ресурс предоставляет обратную связь сразу после выполнения работы: «Ученик сразу после выполнения работы видит отметку и какие задания он сделал хорошо, а над какими нужно поработать» [3].

Чтобы составить тест из своих вопросов в интересном формате, можно воспользоваться платформой **OnlineTestPad**, в которой учитель может проводить тестирование, составленное им интуитивно понятном конструкторе. Кроме того, после прохождения тестов образовательный ресурс незамедлительно предоставляет отчет по прохождению тестов с указанными ошибками учителю и обучающимся. Благодаря этому учитель может проводить анализ проведенной работы обучающимися и определить места, в которых у них возникают трудности.

Кроме тестов, эта платформа предоставляет конструктор опросников и кроссвордов. Если у учителя возникают трудности с составлением той или иной формы контроля знаний, то образовательный ресурс предоставляет навигацию пользования конструкторами.

Помимо проведения различных форм контроля знаний, учителю нужно проводить уроки в дистанционном формате. Существует большое количество платформ, в которых можно проводить уроки дистанционно, но у большинства ресурсов есть определенные ограничения, которые так или иначе препятствуют проведению занятий.

«Сферум» – это образовательная платформа для коммуникации между учителями, учениками и родителями. В данной платформе учитель может проводить конференции, транслировать что-либо, скидывать в чат материалы к уроку и записывать конференцию. Эту функцию можно использовать тогда, когда у некоторых обучающихся отсутствует возможность присутствовать на уроке, и они могут просмотреть то, что было на этом уроке.

Создание конференции и пользование функциями платформы интуитивно понятны и доступны без ограничений. Интерактивная доска оснащена большим количеством функционала, что поможет сделать урок насыщенным визуальными материалами, а также позволяет обучающимся воздействовать на доске самостоятельно.

На данный момент эта платформа находится в доработке, поскольку появилась она недавно. Тем не менее на платформе можно проводить занятия в режиме лекций, а также контроль знаний в форме вопрос-ответ и загружать учебные материалы в чат с обучающимися.

**GeoGebra** является математическим программным обеспечением, которое разрабатывали специально для образовательных учреждений. Ее работа поддерживается пакетом Java, который необходимо установить для корректного пользования данной платформой.

GeoGebra дает возможность для работы с геометрическими телами, алгебраическими выражениями, таблицами, графиками и прочее. Платформа имеет большое количество функций, которые доступны для понимания как ими



пользоваться. Эта платформа является инструментом проведения интересных уроков, в которые обучающиеся будут вовлечены.

Как пример, можно привести сайт, который разработала Елена Александровна Стародубцева, которая пишет, что: «На сайте вы найдете тренажеры, которые помогут освоить темы школьного курса математики, “набить руку” в решении типовых заданий, подготовиться к контрольным и экзаменам, и я постаралась сделать обучение интересным и нескучным. А раздел “Задачник” поможет создать индивидуальные работы для проверки знаний каждого ученика» [7]. Этот сайт предоставляет возможность решать типовые задания ЕГЭ в интересной форме, которые созданы на платформе GeoGebra. Эти задания можно выводить на интерактивную доску и решать их совместно с обучающимися. Задания в форме конструктора – одно из преимуществ платформы GeoGebra. Эти задания удерживают внимание и мотивацию в изучении и подготовке к экзаменам.

Таким образом, ЦОРы являются хорошими помощниками учителя в процессе обучения математике, их применение показывает высокую эффективность как на уроках, так и во внеурочной деятельности [1]. Они также в полной мере развивают ИКТ-компетенции педагогов и приобщает педагога с обучающимися. ЦОРы открывают возможность в разнообразии изучения разделов математики, а также удерживают мотивацию обучающихся, которые планируют сдавать Единый государственный экзамен.

### **Библиографический список**

1. Большова Е.А. Web-квест как инновационная форма организации дифференцированной домашней работы школьников при обучении математике в условиях единой цифровой информационной образовательной среды // Балтийский гуманитарный журнал. 2018. Т. 7, № 4 (25). С. 218–222.
2. Методические отчеты о результатах ЕГЭ 2024 в Красноярском крае по предмету математика (профильный уровень). URL: <https://clck.ru/3E6jXx> (дата обращения: 19.10.2024).
3. Облако знаний. URL: <https://oblakoz.ru/> (дата обращения: 19.10.2024).
4. Постановление об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи». М., 2020.
5. Примерная рабочая программа среднего общего образования учебного предмета «Математика» (углубленный уровень) для 10–11 классов образовательных организаций. URL: <https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-uglublennyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii> (дата обращения: 19.10.2024).
6. Российская электронная школа [Электронный ресурс]. URL: <https://resh.edu.ru/> (дата обращения: 19.10.2024).
7. Сайт Стародубцевой Е.А. [Электронный ресурс]. URL: <https://sites.google.com/view/trainers-in-matem/> (дата обращения: 21.10.2024)

# НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## FINDING AN APPROXIMATE SOLUTION TO AN ALGEBRAIC EQUATION USING A PROGRAMMING LANGUAGE

А.П. Назаров

A.P. Nazarov

*Численные методы, уравнение, приближенное решение уравнения, корень уравнения, электронные таблицы, программирование, единичные отрезки.*

В данной работе представлен метод приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Показано применение электронных таблиц и программирования. Соответствующая компьютерная программа создается с использованием современного языка программирования PascalABC.Net. Представлен результат работы такой программы.

*Numerical methods, equation, approximate solution of the equation, root of the equation, spreadsheets, programming, unit segments.*

This paper presents method for approximate solving algebraic and transcendental equations. The use of spreadsheets and programming is demonstrated. A computer program is created using a different method in the modern programming language PascalABC.Net. The result of the program is presented.

С различными видами уравнений и методами их решения обучающиеся впервые знакомятся в школьном курсе математики. В частности, они изучают и осваивают точный метод решения квадратного уравнения, который является начальной ступенью формирования знаний о квадратном уравнении и его решениях. В теории и методике обучения такой метод нередко называют аналитическим способом решения уравнения. Как известно, решение уравнения таким способом связано с необходимостью вычисления квадратного корня. По этой причине в большинстве случаев найденные таким способом решения будут являться приближенными [1], [2]. Недостаток аналитического способа – далеко не для каждого уравнения существует готовая формула, которая позволяет найти даже его приближенное решение.

Что касается графического способа решения квадратного уравнения или другого уравнения, то он не всегда дает однозначный ответ, корни уравнения вычисляются таким способом иногда с большой погрешностью. Однако полезным является уже то, что для многих уравнений, решаемых графически, мы можем убедиться в том, что решение существует и принадлежит тому или иному отрезку или интервалу. Рассмотрим далее более универсальный цифровой подход к решению алгебраических уравнений.

Предположим, что необходимо найти приближенный корень алгебраического или трансцендентного уравнения, заданного в общем виде  $f(x)=0$ . Алгоритм решения данного уравнения можно представить в виде двух шагов: первый шаг – нахождение отрезка, содержащего корень уравнения, при этом желательно, чтобы отрезок был не более единичного; второй шаг – нахождение приближенного решения уравнения с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon$ , используя для этого произвольный численный метод. Для выполнения первого шага, то есть нахождения единичного отрезка, содержащего корень уравнения, составляется таблица значений функции. В прежних технологиях таблица значений функции создавалась вручную [5]. В наше время, в зависимости от достижений информатики, первый шаг выполняется с использованием электронных таблиц, в том числе электронных таблиц MS Excel [2, с. 239], [3].

В качестве примера рассмотрим приближенное решение следующего уравнения:

$$\sin x + \lg(x + 1,2) = x^{1,3} \quad (1)$$

В уравнении (1) перенесем все в левую часть равенства, получим уравнение

$$\sin x + \lg(x + 1,2) - x^{1,3} = 0 \quad (2)$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части равенства (2), как функцию

$$f(x) = \sin x + \lg(x + 1,2) - x^{1,3}$$

В ЭТ Excel составим таблицу значения функций на отрезке  $[-3; 8]$  (рис. 1). В некоторых ячейках отображается сообщение “#ЧИСЛО!”, что не считается ошибкой. Это означает, что значение аргумента  $x$  не находится в области допустимых значений заданной функции.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	f(x)	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,079	0,184	-1,048	-3,407	-6,104	-8,27	-9,693	-10,98	-12,98	

Рис. 1

Второй шаг – нахождение приближенного решения уравнения с любой заданной точностью  $\varepsilon$  с помощью программирования. Информатика в этой области имеет много достижений, разработано большое количество современных языков программирования, позволяющих решать подобные задачи. В данной работе мы будем использовать современный язык программирования PascalABC.Net [4].

Язык программирования PascalABC.Net предлагает программистам множество отличных возможностей. В частности, функцию  $f(x)$  можно описать как подпрограмму-функцию одной строкой (минимум три строки в старой версии или других языках программирования). Например, для уравнения (2) запишем в программе его подпрограмму-функцию в следующем виде:

***Function muod(c:real):=sin(c)+log10(c+1.2)-c\*\*1.3;***

Как видим, в данном случае использовался только один оператор [4, с. 511, 514].

Параметры начала и конца единичного отрезка, которые были определены заранее, и точность решения уравнения вводятся с клавиатуры. Если обозначить концы отрезка через  $a$  и  $b$ , то оператор ввода для этой компьютерной программы примет следующий вид:

***Var (a,b,eps) := ReadReal3('a,b,eps=');***

Как видим, язык программирования PascalABC.Net имеет большие возможности, а описание переменных, отражение вспомогательного текста и включение значения аргументов осуществляется через клавиатуру с одним оператором. Является оператором кортежного ввода [4, с. 87], [2, с. 313].

Необходимо проверить правильность введенных значений концов отрезка, т.е. уточнить, действительно ли в этом единичном отрезке лежит какой-либо корень уравнения. Проверка выполняется с помощью условного оператора. В этом случае необходимо проверить выполнение логической операции  $f(a)*f(b)>0$ . Если это условие выполнено (значение логической операции становится True), то концы отрезка выбраны неправильно и уравнение не имеет решения на этом отрезке. Компьютерная программа сообщит об этом и прекратит работу. Такой оператор имеет следующую форму в тексте программы:

***If f(a)\*f(b)>0 Then Begin WriteLn('Порча нодуруст аст'); exit end;***

Если логическая операция  $f(a)*f(b)>0$  не выполняется (т.е. верно неравенство  $f(a)*f(b)\leq 0$ ), то уравнение (2) на этом отрезке имеет решение. Корень уравнения может лежать на одном или обоих концах отрезка, а может лежать и внутри отрезка. Эти условия необходимо запрограммировать, чтобы сделать компьютерную программу более совершенной. Проверка условия  $f(a)*f(b)=0$  показывает, что корень уравнения лежит на одном из концов отрезка. Может быть, и на обоих концах отрезка есть у него два корня. После вывода корня или корней уравнения работа компьютерной программы прекращается (завершается). Эта часть текста программы принимает следующий вид:

***If f(a)\*f(b)=0 Then Begin***

***If f(a)=0 Then PrintLn('Решение уравнения a=',a,f(a));***

***If f(b)=0 Then PrintLn('Решение уравнения b=',b,f(b)); exit end;***

Если условие  $f(a)*f(b)=0$  не выполняется, то компьютерная программа продолжает работу, ищет корень уравнения в заданном единичном отрезке и определяет его с заданной точностью. Было апробировано большое количество численных методов нахождения корня уравнения внутри единичного отрезка, включая метод деления отрезка пополам [1], [5], [6], метод простых итераций [1], [5], [7], метод хорд [5], [6], [8]. Данная работа посвящена началу изучения приближенного решения уравнений и выходит за рамки этих методов. Здесь мы создадим еще один приближенный численный метод решения уравнения с использованием метода пошагового суммирования. Шаг – заданная точность  $\epsilon$ .

Начнем расчеты с левого конца известного единичного отрезка и продолжим до правого конца. При вводе через клавиатуру значений  $a$  и  $b$  они могут поменяться местами. Из них мы выбираем наименьшее и продолжаем считать до большего. С помощью условного оператора мы определяем его наименьшее число, точнее  $a$ , как:

***If a>b Then Swap(a,b);***

В этом методе мы принимаем заданное точное значение  $\epsilon$  как шаг. Одним из других условий, когда оно считается корнем уравнения с такой точностью, является условие  $|f(a)| \leq \epsilon$ . То есть аппроксимация решения уравнения и выявление его корня рассматриваются до тех пор, пока не будет выполнено условие  $|f(a)| > \epsilon$ . Учитывая все эти подтверждения, пишем последние строки текста компьютерной программы:

***While Abs(f(a))>10\*Eps Do Begin a+=Eps; PrintLn(a,f(a)) end;***

***PrintLn('Решаю модуля =', a, f(a));***

Полный текст компьютерной программы имеет следующий вид:

***##***

***Function f(c:real):=sin(c)+log10(c+1.2)-c\*\*1.3;***

***Var (a,b,eps) := ReadReal3('a,b,eps=');***

***If f(a)\*f(b)>0 Then Begin PrintLn('Не верный отрезок'); exit end;***

***If (f(a)=0) Or (f(b)=0) Then Begin***

***If f(a)=0 Then PrintLn('Решение уравнения a=',a,f(a));***

***If f(b)=0 Then PrintLn('Решение уравнения b=',b,f(b)); exit end;***

***If a>b Then Swap(a,b);***

***While Abs(f(a))>Eps Do Begin a+=Eps; PrintLn(a,f(a)) end;***

***PrintLn('Решение уравнения =', a, f(a));***

Подготовим программу к работе и введем значения запрошенных аргументов, то есть концов единичного отрезка и  $\epsilon$ , которые для уравнения (2) равны соответственно 1, 2 и 0,001 (рис. 2). Приведем результат работы компьютерной программы (промежуточные результаты не показаны, поскольку состоят из множества строк):

***Решение уравнения = 1.251 0.00071***

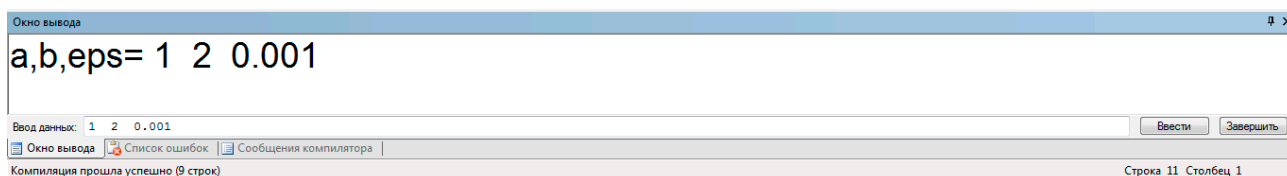


Рис. 2

Или, если принять значение  $\epsilon$  за 0,01, то получим следующий результат:

*Решение уравнения = 1.25 0.00161.*

**Вывод.** В данной статье был разработан приближенный метод решения алгебраических и трансцендентных уравнений. На основе разработанного метода создана компьютерная программа, которая обеспечивает процесс численного приближенного решения уравнений более высоким качеством.

### **Библиографический список**

1. Алиев Б.А., Ашуров М.А. Численные методы: учебник для вузов. Душанбе: Типография ТНУ, 2010. 155 с.
2. Назаров А.П. Методика преподавания информатики: учебник для вузов. Душанбе: Мехродж-Граф, 2019. 462 с.
3. Назаров А.П. Основы компьютерной технологии: учебное пособие. Душанбе, Типография ТГПУ имени С. Айни. 2010. 170 с.
4. Назаров А.П. Программирование и программный дизайн на языке PascalABC.Net: учебник для вузов и сузов. Душанбе: Мехродж-Граф, 2021. 756 с.
5. Джураев Х.Ш. Численные методы: учебное пособие. Душанбе: ТНУ. 2022. Ч. 1. 205 с.
6. Хасанов Ю.Х., Одиназода С.О., Нейматов Г.Н. Методы вычисления: учебное пособие. Душанбе, 2022. 227 с.
7. Слабнов В.Д.. Численные методы и программирование: учебное пособие для СПО. СПб.: Лань, 2021. 460 с.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 386 с.
9. Абдукаримов М.Ф. Лабораторные работы по численным методам: учебное пособие. Душанбе, 2014. 137 с.



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GeoGebra ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

USING THE DYNAMIC ENVIRONMENT GeoGebra  
TO DEVELOP STUDENTS' RESEARCH SKILLS THROUGH  
EXPERIMENTAL PROBLEM-SOLVING IN GEOMETRY

Р.М. Нигматулин

R.M. Nigmatulin

*Экспериментальная математика, исследовательские умения, обучение студентов, компьютерные эксперименты, системы динамической математики, GeoGebra.*

В статье обсуждаются возможности использования системы динамической математики GeoGebra для формирования исследовательских умений студентов – будущих учителей математики в процессе выбора содержания и конструирования исследовательских геометрических задач, а также их экспериментального решения. Приводится пример задачи, обсуждается ее экспериментальное решение в GeoGebra.

*Experimental mathematics, research skills, student learning, computer experiments, dynamic mathematics systems, GeoGebra.*

The article discusses the possibilities of using the dynamic mathematics system GeoGebra to develop research skills in students – future mathematics teachers in the process of selecting the content and designing research-based geometry problems, as well as their experimental solution. An example of a problem is given, and its experimental solution in GeoGebra is discussed.

**Б**ыстро меняющиеся информационные технологии и процессы цифровизации различных сфер деятельности человека оказывают постоянное воздействие на современное образовательное пространство. В связи с этим успешное обучение математике в настоящее время трудно представить без активного применения систем динамической математики, например, таких как GeoGebra. За последние два десятилетия вместе с бурным развитием различных компьютерных инструментов и цифровых приложений заметно менялась, дополнялась, совершенствовалась методика их применения в системе математического образования. основополагающие результаты по широкому кругу проблем использования систем динамической математики в математическом образовании в школе и в вузе представлены в работах В.Р. Майера, М.В. Шабановой, А.В. Ястребова, С.В. Ларина, В.И. Рыжика, С.Г. Иванова, М.А. Павловой и др. [3–7, 9].

Новые ФГОС ВО и их обновление в соответствии с методическими рекомендациями («Ядро высшего педагогического образования») отводят особую роль учебно-исследовательской и проектной деятельности в подготовке будущего учителя как в рамках изучения дисциплин, так в процессе учебных и производственных практик.

Несмотря на большое внимание в многочисленных публикациях к проблеме формирования исследовательских компетенций студентов, разработке различных моделей организации исследовательской деятельности, создании организационно-методических условий для формирования исследовательских умений студентов, следует отметить отсутствие комплексного анализа и обобщения передового опыта, лучших практик, отсутствие методики по отбору содержания и конструирования исследовательских и квазипрофессиональных задач, по сопровождению деятельности студентов в процессе решения таких задач с использованием систем динамической математики [2, 3, 5–7, 10].

Поэтому для формирования исследовательских умений у студентов – будущих учителей математики в контексте цифровизации образовательной среды необходимо создавать условия для получения опыта экспериментального изучения математических понятий и фактов посредством использования систем динамической математики.

Эффективное использование систем динамической математики делают обучение математике не только наглядным, динамичным, но и открывают возможности для проведения компьютерных математических экспериментов, способствуя развитию исследовательских умений как у школьников, так и у студентов. Динамические чертежи и компьютерная анимация радикально меняют подходы к изучению фактов и понятий, к решению задач, связанных с геометрическими фигурами, графиками функций и их преобразованиями. В новых условиях обучающиеся могут активно взаимодействовать с геометрической фигурой, графиком функции, не только меняя их положение на плоскости или в пространстве, но и подвергая их различным преобразованиям для обнаружения каких-либо свойств, связей или закономерностей.

Одним из определяющих факторов успешного формирования исследовательских умений у студентов – будущих учителей математики является предметный содержательный компонент. Он включает в себя тот теоретический материал и систему задач (как по различным разделам математики, так и квазипрофессиональных), которые будут обеспечивать наполнение исследовательской деятельности студентов. Отбор такого содержания и разработка заданий различных типов, решений которых предполагает применение GeoGebra, является существенной проблемой для преподавателя университета. Сформулируем требования к содержательному компоненту, которые, на наш взгляд, позволят организовать продуктивную деятельность по формированию исследовательских умений у будущих учителей математики. Содержательный компонент должен:

1. Соответствовать содержанию профильных математических дисциплин, устранять межпредметную изолированность математических дисциплин в предметной подготовке студента.

2. Быть в тесной связи с содержанием учебных курсов по математике в школе (в соответствии с федеральными рабочими программами).

3. Расширять математический кругозор, знакомить с новыми математическими понятиями и фактами на доступном уровне.

4. Демонстрировать историческое развитие математических теорий, фактов, понятий, а также практическую направленность.

5. Обеспечивать возможность постановки исследовательских задач, формулировки гипотез, применению различных методов исследования (в том числе экспериментальных) и решения задач.

Приведем пример разработки содержательного компонента для проведения практических занятий бакалавров педагогического образования (профили «Математика» и «Информатика») по дисциплине «Методы исследовательской/проектной деятельности».

Теоретический материал составляют темы по геометрии о равносторонних и равновеликих фигурах, площадях фигур. Эти темы в полной мере соответствуют требованиям 1 и 2, сформулированным выше.

Требования 3 и 4 обеспечиваются включением материала, например, о квадрисекции треугольника [1]. Квадрисекцией треугольника называется его разбиение на 4 равновеликие части перпендикулярными прямыми. Решение этой задачи восходит к работам Я. Бернулли (1687) и Л. Эйлера (1779). В статье [1] приведено полное описание квадрисекций треугольника.

Практическую составляющую можно продемонстрировать следующим примером практико-ориентированной задачи.

**Задача 1.** Владелец большого земельного участка решил продать его половину. Участок имеет треугольную форму, а на самом участке установлен столб ЛЭП (рис. 1).



Рис. Участок треугольной формы

Для межевания новых участков необходимо обеспечить прямой доступ к столбу с каждого из них. Какие варианты для такого разбиения участка можно предложить?

Формулировка этой задачи позволяет поставить несколько исследовательских математических задач. Например, такую:

**Задача 2.** Сколько прямых можно провести через внутреннюю точку данного треугольника так, чтобы прямая разбивала его на две равновеликие части? Как разбиваются внутренние точки треугольника по этому свойству?

Покажем, как можно задействовать анимационные и визуальные возможности GeoGebra для экспериментального решения задачи 2 (а, значит, и задачи 1).

Построим динамический чертеж треугольника  $ABC$ . Выберем в нем произвольную (свободную) точку  $D$  и точку  $E$  на одной из сторон, например,  $BC$ . Чтобы определить, в каком соотношении прямая  $DE$  делит площадь треугольника, будем использовать визуальный подход. Откроем Полотно 2, отметим на нем свободную точку  $Q$ . Установим в качестве абсциссы точки  $Q$  значение  $x(E)-x(C)$ , а в качестве ординаты – отношение площади треугольника  $ABC$  к площади отсекаемой части, содержащей  $B$ . Для точки  $Q$  установим параметр «Оставлять след». Расположив два окна рядом и запустив анимацию для точки  $E$  на основном Полотне, наблюдаем на Полотне 2 вычерчивание точкой  $Q$  графика зависимости отношения  $\frac{S_{ABC}}{S_B}$  от абсциссы точки  $E$ . Изменяя положение точки  $D$ , можно заметить, что равенство  $\frac{S_{ABC}}{S_B} = 2$  может выполняться для одного, двух или трех разных положений точке  $E$ .

На рисунке 2 а) показано, что при выбранном положении точки  $D$  существует единственное положение точки  $E$ , при котором прямая  $DE$  разбивает треугольник на две равновеликие части.

На рисунке 2 б) показано, что при выбранном положении точки  $D$  существуют три положения точки  $E$ , при которых прямая  $DE$  разбивает треугольник на две равновеликие части.

Для получения разбиения точек треугольника в зависимости от количества отрезков разбиения, проходящих через эти точки, применим функции «Оставлять след» и «Анимация» (рис. 3). Положения концов таких отрезков связано формулой. Каждый отрезок при движении замечает некоторую область. Если область замечается только одним отрезком, то она соответствует множеству точек треугольника, через каждую из которых проходит только один отрезок разбиения.

Если области замечаются отрезками двух цветов, то она соответствует множеству точек треугольника, через каждую из которых проходит ровно два отрезка разбиения.

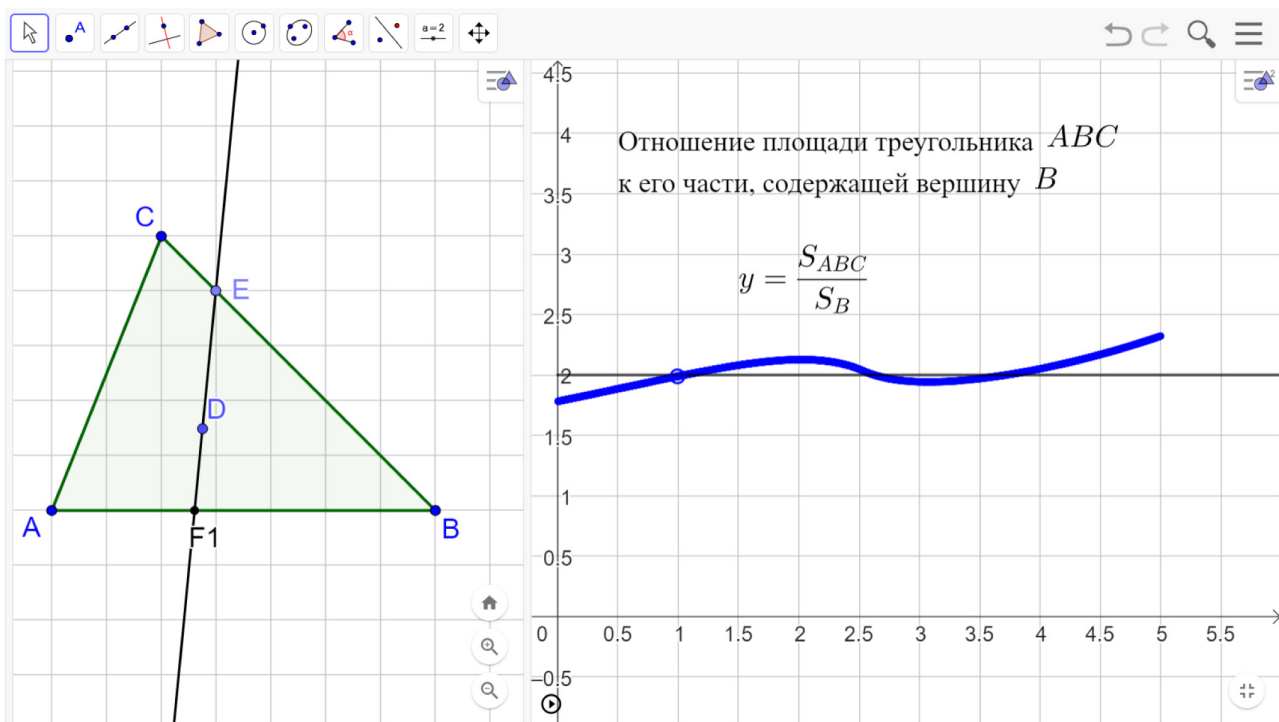
Если области замечаются отрезками трех цветов, то она соответствует множеству точек треугольника, через каждую из которых проходит ровно три отрезка разбиения.

Таким образом, в GeoGebra получено анимационное экспериментальное решение исследовательской геометрической задачи.

Представленный материал достаточно наглядно демонстрирует большой потенциал для организации исследовательской деятельности студентов и формирования у них исследовательских умений.



a)



б)

Рис. 2. Примеры двух различных положений точки  $D$  и соответствующий график зависимости отношения  $\frac{S_{ABC}}{S_B}$  от абсциссы точки  $E$



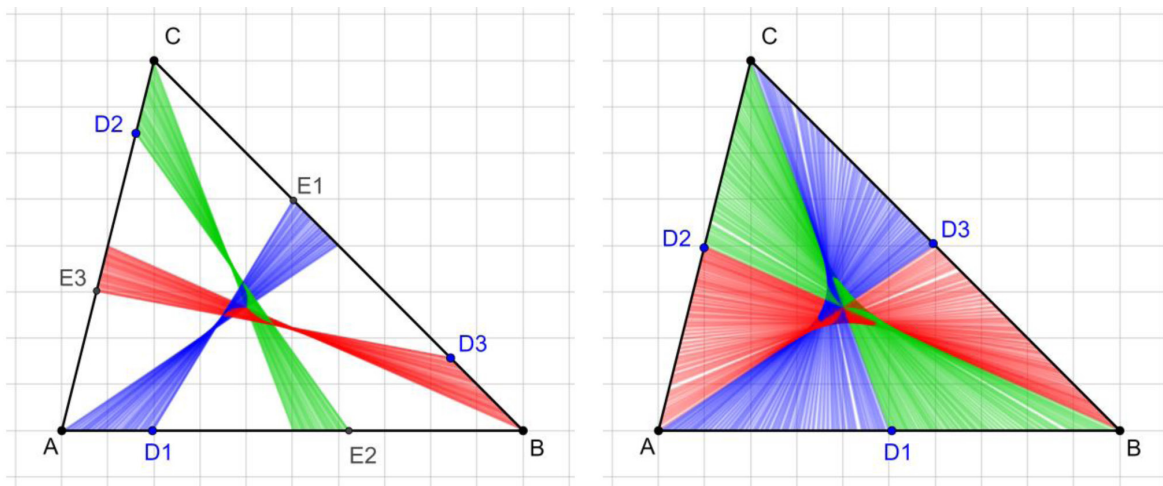


Рис. 3. Раскраска множества точек, заметаемых при движении трех отрезков разбиения треугольник  $ABC$

### Библиографический список

1. Eberhart C. Revisiting the Quadrisection Problem of Jacob Bernoulli. *Forum Geometricorum*, V. 18. 2018. P. 7–16.
2. Берсенева О.В. Формирование готовности будущих учителей математики к организации исследовательской деятельности школьников в условиях бинарного обучения математике в вузе: дис. ... канд. пед. наук. Красноярск: СФУ, 2017. 234 с.
3. Вендина А.А., Киричек К.А. Математический эксперимент в программе GeoGebra как одна из форм реализации интерактивного метода обучения (на примере подготовки студентов педагогического вуза) // *Мир науки, культуры, образования*. 2019. № 1 (74). С. 272–276.
4. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» // *Информатика и образование*. 2016. № 7. С. 45–48.
5. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе / Абдулкин В.В. и др. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019. 164 с.
6. Ларин С.В., Майер В.Р., Кочеткова Т.О., Карнаухова О.А. Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике // *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева*. 2020. № 1 (51). С. 6–14.
7. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева*. 2012. № 4. С. 22–27.
8. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. М.: МЦНМО, 2019. 184 с.
9. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / Шабанова М.В. и др. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.
10. Ястребов А.В. Обучение математике в вузе как модель научных исследований / М-во образования и науки Рос. Федерации, Ярослав. гос. пед. ун-т им. К.Д. Ушинского. Ярославль, 2017. 307 с.



# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ «GeoGebra» ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В 9 КЛАССЕ

## APPLICATION OF THE GeoGebra PROGRAM IN SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS IN THE 9TH GRADE

В.И. Петров, Е.В. Ступак

V.I. Petrov, E.V. Stupak

*Математическое образование, тренажеры, наглядность, математические задачи, GeoGebra, графики систем уравнений, алгебра, системы уравнений.*

В современное время математическое образование переживает небывалый подъем в использовании компьютерных средств. На помощь современному учителю математики приходят различные тренажеры, демонстрирующие наглядность при решении тех или иных математических задач, выходят приложения к учебникам, доступны интерактивные тесты в сети Интернет. Кроме того, разработчики ПО придумывают все более новые программы, так необходимые при решении задач. В частности, бесплатная кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования GeoGebra, появившаяся в 2001 г., позволяет решать задачи таких разделов математики, как геометрия, алгебра, графы, статистика и арифметика. В нашей статье речь пойдет о том, как использовать данную программу при решении систем уравнений.

*Mathematical education, simulators, visibility, mathematical problems, GeoGebra, graphs of systems of equations, algebra, systems of equations.*

In modern times, mathematical education is experiencing an unprecedented rise in the use of computer tools. Various simulators come to the aid of a modern mathematics teacher, demonstrating clarity in solving certain mathematical problems, applications to textbooks are released, interactive tests are available on the Internet. In addition, software developers are coming up with more and more new programs that are so necessary for solving problems. In particular, GeoGebra, a free cross-platform dynamic mathematical program for all levels of education, which appeared in 2001, allows you to solve problems in such branches of mathematics as geometry, algebra, graphs, statistics and arithmetic. In our article, we will talk about how to use this program when solving systems of equations.

**В** курсе алгебры 7 класса дается понятие систем уравнений с двумя переменными, а также способы их решений (способ подстановки, способ сложения). В 9 классе этот материал дается более расширенно, вводится новый метод решения систем уравнений – графический метод. Именно он и предлагается в программе GeoGebra.

В разных учебниках приводятся различные определения и понятия, связанные с решением систем уравнений. Приведем некоторые из них:

Пара чисел  $(x; y)$ , которая является решением одновременно всех уравнений, входящих в данную систему, называется решением системы уравнений.

Решить систему уравнений – найти все ее решения или доказать, что решений нет.

С учетом особенностей уровня обучения учащихся разобьем наше исследование на 2 части: исследуем решения систем на базовом уровне и разберем системы с параметром, а также нестандартные системы.

**Пример 1.** Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Если посмотреть внимательно на уравнения, входящие в систему, то можно заметить, что здесь можно выразить переменную  $y$  из обоих уравнений.

Выразим переменную  $y$  из первого уравнения. Получим уравнение  $y = x^2 - 4x + 3$ . Графиком этого уравнения является парабола.

Если выразить во втором уравнении  $y$ , то получим уравнение  $y = x - 1$ . Графиком этого уравнения является прямая линия [1].

Для решения данной системы будем использовать программу GeoGebra.

Интерфейс программы GeoGebra выглядит следующим образом (рис. 1).

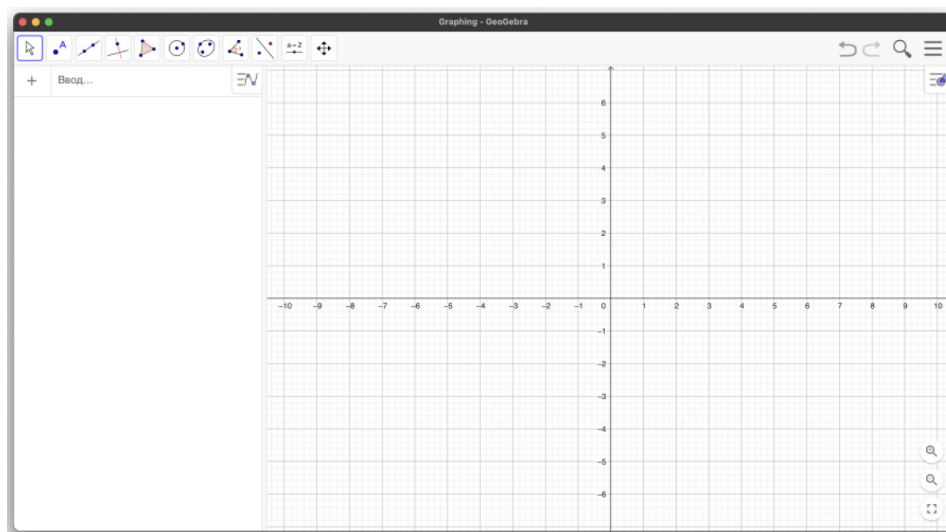


Рис. 1. Интерфейс программы GeoGebra

Слева находится ввод исходных данных (уравнения, функции и т.д.) (рис. 2).

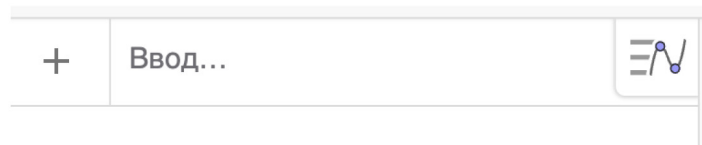


Рис. 2. Поле ввода данных

В левом верхнем углу располагается панель инструментов. Здесь находятся инструменты для создания объектов.

В нижней части располагается виртуальная клавиатура, позволяющая вводить те или иные данные (рис. 3).



Рис. 3. Виртуальная клавиатура

Самой основной частью программы является рабочая область. Именно здесь производятся различные построения (рис. 4).

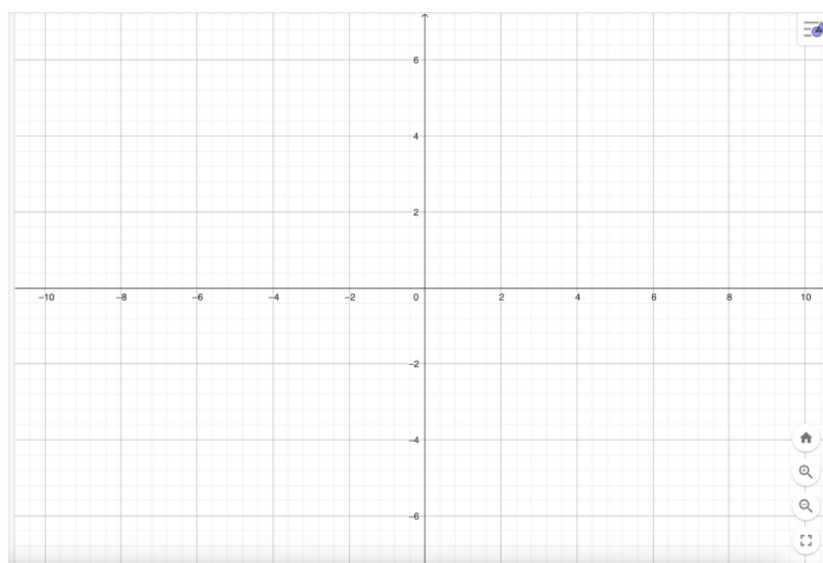


Рис. 4. Рабочая область

Вернемся к системе (1). В поле ввода, в каждую отдельную строку введем последовательно два уравнения системы. При правильном вводе в рабочей области получим график данной системы (рис. 5).

После того, как была построена система, необходимо указать, какие точки пересечения получились в результате решения систем уравнений. Для этого, в панели инструментов нужно последовательно выбрать опцию «Точка», далее выбрать «Пересечение». Здесь необходимо кликнуть последовательно на графики уравнений, после чего на рабочей области автоматически отобразятся точки пересечения с координатами, которые располагаются слева от рабочей области. В данном примере в результате построений получили координаты (4; 3) и (1; 0), они и будут решениями данной системы (рис. 5).

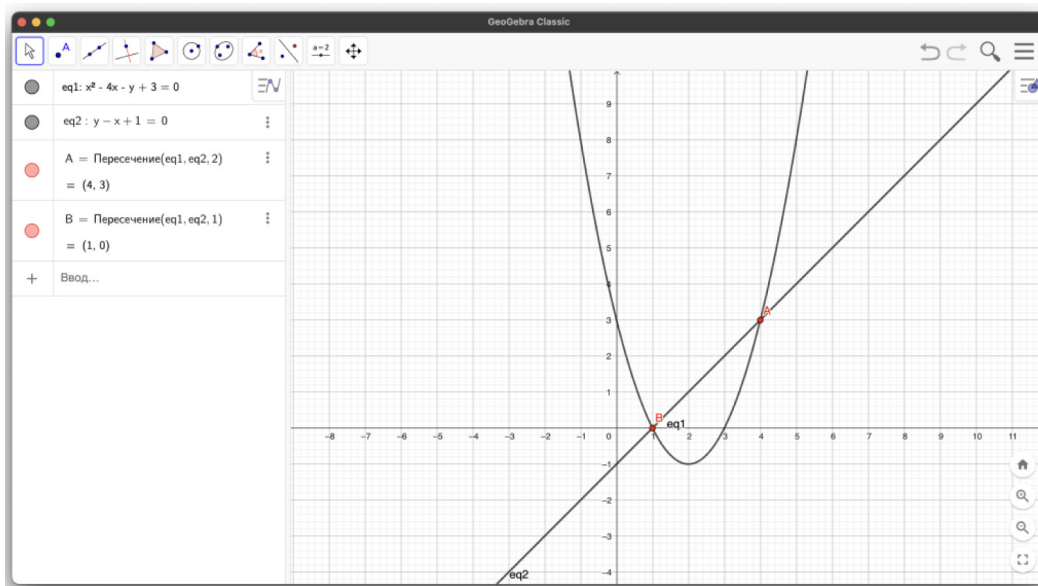
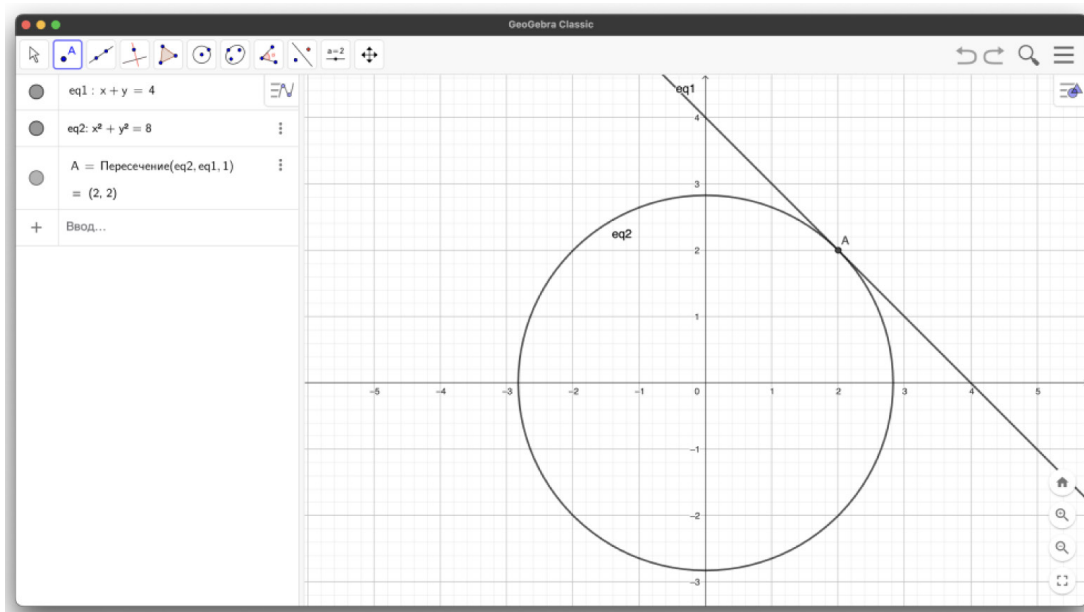


Рис. 5. Правильная запись графического метода решения системы уравнений

**Пример 2.** Решить графически систему уравнений [2]:

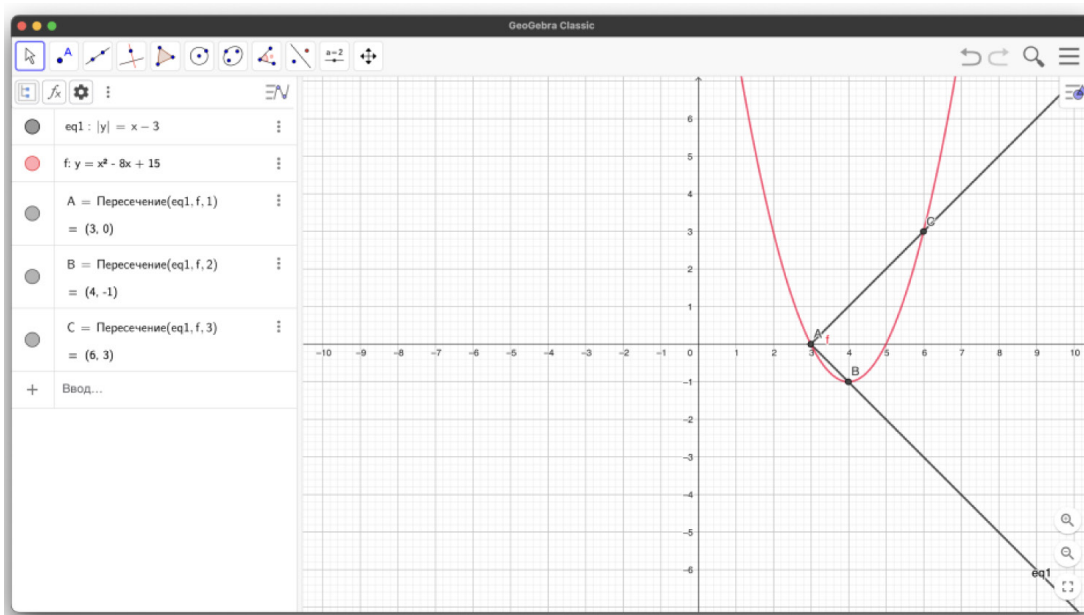
$$а) \begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} |y| = x - 3, \\ y = x^2 - 8x + 15; \end{cases} \quad в) \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$$

**Решение.** а) Графики уравнений изображены на рисунке 6. Решением будет являться пара чисел (2; 2).



*Рис. 6. Решение системы а) из примера 2*

б) Графики уравнений изображены на рисунке 7. Решениями будут являться пары чисел (3; 0), (4; -1), (6, 3).



*Рис. 7. Решение системы б) из примера 2*

в) Графики уравнений изображены на рисунке 8. Решениями будут являться пары чисел (-1; 2), (2; -1).

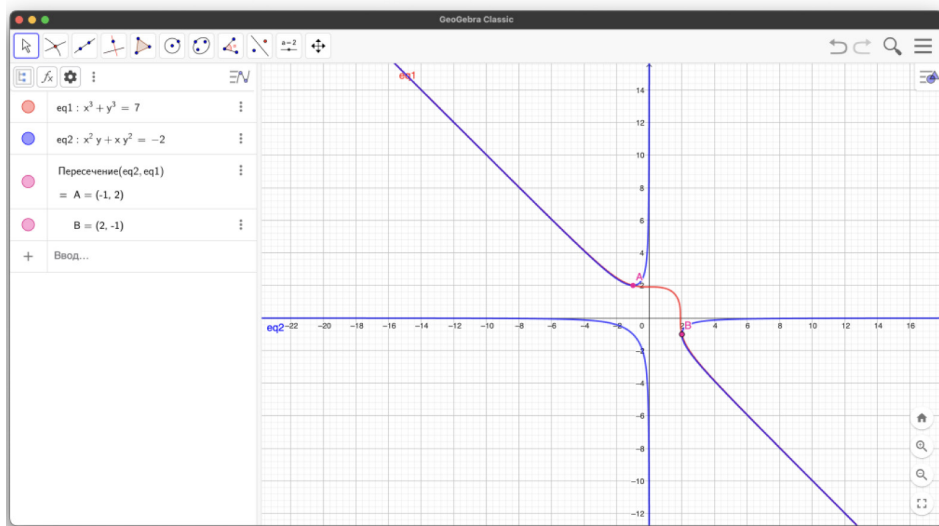


Рис. 8. Решение системы в) из примера 2

Программа GeoGebra позволяет решать не только обычные системы уравнений, но и системы, которые содержат в себе параметр. В этом случае добавляется ползунок, позволяющий смоделировать те решения, которые должны получить. Кроме того, в настройках данного ползунка можно отрегулировать промежуток, в котором этот ползунок должен работать, использовать свое обозначение точки, а также ее цвет.

**Пример 3.** При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 10 - a = 0, \\ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? Решите систему при найденных значениях  $a$  [3].

**Решение.** Единственным значением параметра, при котором будет хотя бы одно решение, является число 1. При  $a \neq 1$  решений нет, поскольку на графике нет пересечений.

При  $a = 1$  решением системы будет пара чисел (2; 1). Графическое решение изображено на рисунке 9.

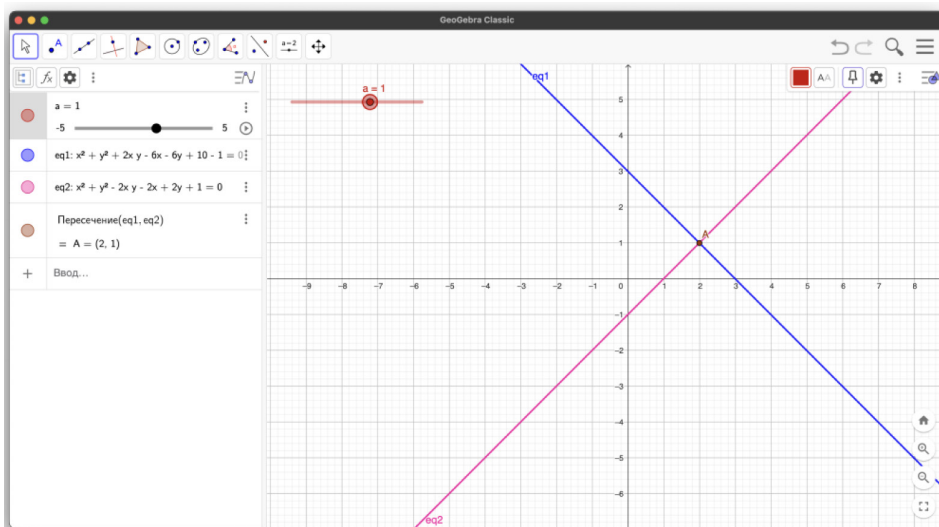


Рис. 9. Решение системы из примера 3

Таким образом, программу GeoGebra можно использовать на уроках математики, применять ее в качестве наглядной демонстрации решения систем уравнений. В рамках статьи невозможно отразить все многообразие систем рациональных уравнений, но мы постарались максимально наглядно показать все нюансы данной программы.

### **Библиографический список**

1. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра. 9 класс: учебник; под ред. В.Е. Подольского. М.: Просвещение, 2019.
2. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. 8–9 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2019.
3. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.Е., Феоктистов И.Е. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2018.



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАНДАРТНЫХ СРЕДСТВ ОФИСНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КУРСА ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

## USING STANDART OFFICE APPLICATION TOOLS TO SOLVE PROBLEMS IN DISCRETE MATHEMATICS COURSE

Т.Б. Полторацкая

T.B. Poltoratskaya

*Офисные приложения, табличный процессор, дискретная математика, алгоритм Форда–Беллмана.*

Рассматривается использование стандартных офисных приложений, а именно табличного процессора для реализации алгоритма поиска минимального пути в нагруженном ориентированном графе. Данный алгоритм изучается студентами в курсе дискретной математики. Показаны преимущества решения таких задач с использованием табличного процессора.

*Office applications, spreadsheet processor, discrete math, Ford-Bellman algorithm.*

We consider the use of standard office applications, namely a table processor to implement the algorithm for finding the minimum path in a loaded oriented graph. This algorithm is studied by students in the course of discrete mathematics. The advantages of solving such problems using a table processor are shown.

**И**спользование цифровых технологий в образовательном процессе повышает заинтересованность обучающихся, увеличивает количество активно участвующих в решении задач и обсуждении материала, способствует лучшему усвоению изучаемой дисциплины и облегчает понимание материала.

Чаще всего при этом используется специализированное программное обеспечение. Во многих разделах программ высшей математики не хватает наглядности для объяснения формул, понятий, решения задач, а ведь общеизвестно, что визуализация активизирует познавательную деятельность [2]. Широкий выбор систем компьютерной алгебры (computer algebra system, CAS) предлагает сеть Интернет. Однако для использования специализированного программного обеспечения его необходимо устанавливать, в некоторых случаях покупать лицензию, что требует дополнительных материальных и трудовых ресурсов [1]. В этой связи стоит обратить внимание на стандартные офисные приложения. Они также дают широкий спектр возможностей для визуализации постановки и решения математических задач. Например, для реализации алгоритмов на графах в курсе дискретной математики можно использовать табличный процессор.

В качестве примера рассмотрим алгоритм Форда–Беллмана поиска минимального пути в нагруженном орграфе [3]. Граф задан своей матрицей длин дуг:

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 3 & 2 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$
 Необходимо найти минимальный путь из вершины «1»

в вершину «б». В соответствии с алгоритмом, если не существует пути из вершины «1» в вершину «2», то длина минимального пути приравняется к  $\infty$ . Остальные длины заданы численно. Поскольку в алгоритме реализуется трудоемкое по вычислениям построение матрицы минимальных путей, оформим его в электронной таблице. В данном случае используется Microsoft Excel. Такой способ дает наглядное представление реализации алгоритма и упрощает вычисления. Поскольку в данном учебном примере, очевидно, что все длины меньше 13, в качестве бесконечности выберем число 100. При реализации аналогичных алгоритмов на языках программирования в качестве бесконечности используют число больше значения максимального пути. Данный способ решения готовит обучающихся в дальнейшем к написанию таких программ. Исходную матрицу назовем С и разместим в электронной таблице.

		С - матрица для дуг						Λ - матрица минимальных путей										
		C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	Λ <sub>1</sub>	Λ <sub>2</sub>	n	Λ <sub>3</sub>	n	Λ <sub>4</sub>	n	Λ <sub>5</sub>	n	Λ <sub>6</sub>	n
4	N	100	100	5	3	2	12	0	0		0		0		0		0	
5	2	100	100	100	100	100	2	100	100		5 4		5 4,3		5 4,3		5 4	
6	3	100	2	100	100	100	100	100	5 1		3 5		3 5		3 5		3 5	
7	4	100	2	100	100	5	100	100	3 1		3 1		3 1		3 1		3 1	
8	5	100	100	1	2	100	100	100	2 1		2 1		2 1		2 1		2 1	
9	6	100	100	100	100	100	100	100	12 1		12 1		7 2		7 2		7 2	

		Столбцы для вычисления элементов матрицы Λ																			
		Λ <sub>22</sub>	Λ <sub>23</sub>	Λ <sub>24</sub>	Λ <sub>25</sub>	Λ <sub>26</sub>	Λ <sub>32</sub>	Λ <sub>33</sub>	Λ <sub>34</sub>	Λ <sub>35</sub>	Λ <sub>36</sub>	Λ <sub>42</sub>	Λ <sub>43</sub>	Λ <sub>44</sub>	Λ <sub>45</sub>	Λ <sub>46</sub>	Λ <sub>52</sub>	Λ <sub>53</sub>	Λ <sub>54</sub>	Λ <sub>55</sub>	Λ <sub>56</sub>
13	N	Λ1+C2	Λ1+C3	Λ1+C4	Λ1+C5	Λ1+C6	Λ2+C2	Λ2+C3	Λ2+C4	Λ2+C5	Λ2+C6	Λ3+C2	Λ3+C3	Λ3+C4	Λ3+C5	Λ3+C6	Λ4+C2	Λ4+C3	Λ4+C4	Λ4+C5	Λ4+C6
14	1	100	5	3	2	12	100	5	3	2	12	100	5	3	2	12	100	5	3	2	12
15	2	200	200	200	200	102	200	200	200	200	102	105	105	105	105	7	105	105	105	105	7
16	3	102	200	200	200	200	7	105	105	105	105	5	103	103	103	103	5	103	103	103	103
17	4	102	200	200	105	200	5	103	103	8	103	5	103	103	8	103	5	103	103	8	103
18	5	200	101	102	200	200	102	3	4	102	102	102	3	4	102	102	102	3	4	102	102
19	6	200	200	200	200	200	112	112	112	112	112	112	112	112	112	112	107	107	107	107	107

		Λ <sub>62</sub>	Λ <sub>63</sub>	Λ <sub>64</sub>	Λ <sub>65</sub>	Λ <sub>66</sub>	Матрица номеров минимальных элементов					
		Λ5+C2	Λ5+C3	Λ5+C4	Λ5+C5	Λ5+C6	*	*	*	*	*	*
23	1	100	5	3	2	12	*	*	*	*	*	*
24	2	105	105	105	105	7	*	1	4	3	3	3
25	3	5	103	103	103	103	*	1	5	5	5	5
26	4	5	103	103	8	103	*	1	1	1	1	1
27	5	102	3	4	102	102	*	1	1	1	1	1
28	6	107	107	107	107	107	*	1	1	2	2	2

Рис. Алгоритм Форда–Беллмана для построения минимального пути в нагруженном орграфе

В соответствии с алгоритмом для построения матрицы минимальных путей необходимы вспомогательные столбцы. В табличной реализации есть возможность сложить два столбца одной формулой (одним действием). Поиск минимального элемента в столбце реализуется функцией табличного процессора. Самая сложная формула используется для поиска номера минимального элемента в столбце, но также этот номер можно занести в таблицу вручную. В алгоритме они важны, поэтому записаны в матрице минимальных путей как нижние индексы рядом с вычисленными минимальными значениями путей. Пример такой формулы, расположенной в ячейке I24:

I24:=ЕСЛИ(J6=В14;A14;ЕСЛИ(J6=В15;A15;ЕСЛИ(J6=В16;A16;ЕСЛИ(J6=В17;A17;ЕСЛИ(J6=В18;A18;ЕСЛИ(U16=В19;A19;»!»))))))

Также необходимо отметить, что в соответствии с алгоритмом Форда–Беллмана первая строка матрицы минимальных путей состоит из «0», а первый столбец из «∞», за исключением первого элемента.

В результате данной реализации алгоритма найден минимальный путь из вершины «1» в вершину «6». Его длина – это правое нижнее число матрицы  $\Lambda$  минимальных путей. В нашем случае это 7. Элемент с номером (6,6) соответствует вершине номер «6» исходного графа, следующая вершина ищется в соседнем 5-м столбце, ее номер соответствует индексу, записанному рядом с 7 – «2». Ищем второй элемент в 5-м столбце, это – 5. Значит, следующая вершина минимального пути «5». Индекс рядом с 5 показывает, что далее в 4-м столбце надо выбирать 3-й или 4-й элементы (вершины «3» или «4»). Из вершины «3» попадаем в «5», затем в «1». Из вершины «4» сразу в «1». Очевидно, что путь будет строиться в обратном направлении и в данной задаче два решения, два пути минимальной длины – 7. Но один из них меньше по количеству вершин и дуг. Итак, путь 1: «1»–«5»–«3»–«2»–«6». Путь 2: «1»–«4»–«2»–«6».

Необходимо отметить, что такой способ решения дает возможность решать задачи с различными исходными данными, то есть изменяется только исходная матрица длин дуг. Все остальные вычисления происходят автоматически, что также показывает обучающимся, что алгоритмы программируются один раз и в дальнейшем меняются только данные. Конечно, возможности электронной таблицы ограничены, нельзя автоматически изменять размерность матрицы длин дуг, но тем не менее здесь раскрывается суть дисциплины «Дискретная математика» как теоретической основы информационных технологий.

Преподавателям данный способ решения задачи дает возможность составлять задания для самостоятельной работы и сразу иметь готовый ответ для их проверки.

Это только один пример применения стандартных офисных приложений в изучении математических дисциплин. В действительности возможности, предоставляемые офисными программами для преподавания математики, широки и безграничны. Таким образом, не всегда необходимо в качестве цифровых технологий использовать специализированные системы компьютерной алгебры.

## Библиографический список

1. Богатова С.В. Использование программы GeoGebra на занятиях по математическому анализу // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе, 2020. № 8.
2. Рябоконт Е.А., Крецан З.В., Шмакова Л.Е. Визуализация учебной информации как средство активизации познавательной деятельности обучающихся // Вестник Кемеровского государственного университета. Серия: Гуманитарные и общественные науки. 2020. Т. 4, № 2. С. 126–136.
3. Смирнова Е.Л. Конспект лекций по дискретной математике // Военный инженерно-космический университет имени А.Ф. Можайского. СПб., 2000.

# СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПАКЕТ MATHEMATICA И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ МНОГОЧЛЕНОВ

## SPECIALIZED MATHEMATICAL PACKAGE MATHEMATICA AND ITS APPLICATION IN POLYNOMIAL THEORY

М.А. Рахимова

M.A. Rahimova

*Программное средство Mathematica, полином, простые множители, дополнительные функции, по модулю простого числа.*

Рассматривается специализированный математический пакет Mathematica для изучения действий над полиномами и его преимущества относительно других математических программных систем, а также его возможности. Применение специальных функций этого математического пакета упрощает такие действия, как умножения полиномов, разложение полиномов на множители, разложение полинома по модулю простого числа, нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного полиномов.

*Mathematica software, polynomial, prime factors, additional functions, modulo prime.*

The specialized mathematical package Mathematica is considered for studying operations on polynomials and its advantages relative to other mathematical software systems, as well as its capabilities. The use of special functions of this mathematical package simplifies such actions as multiplying polynomials, factoring polynomials, factoring a polynomial modulo a prime number, finding the greatest common divisor and the least common multiple of polynomials.

**В** настоящее время получили широкое развитие программные средства для численных расчетов – интегрированные системы символьной математики (компьютерной алгебры), такие как *Mathematica*, *MatLab*, *MathCAD*, *Maple* и другие.

Интегрированные системы компьютерной алгебры для персональных компьютеров (ПК) – отдельное направление в развитии программного обеспечения и применения ПК. В большей степени они ориентированы на сферы деятельности математиков – аналитиков и ученых, занятых решением научно-технических, в частности, математических задач.

*Mathematica* – одна из самых крупных и изодренных математических программных систем. По обилию встроенных в ядро системы функций *Mathematica* уступает системе *Maple*, но вместе с системой *Mathematica* поставляется множество внешних пакетов ее расширения, которые можно пополнять и модифицировать. С учетом включенных в них процедур и функций *Mathematica* почти не уступает *Maple*.

Если рассматривать систему *Mathematica* как язык программирования, то она относится к интерпретирующим системам. Как известно, такие системы последовательно анализируют (интерпретируют) каждое выражение и сразу же исполняют его. Таким образом, работа с системой происходит в интерактивном режиме – пользователь задает системе задание, а она тут же исполняет его. Система содержит достаточный набор управляющих структур для создания условных выражений, ветвления в программах, циклов и некоторых других.

Может показаться, что система *Mathematica* имеет диалог на более примитивном уровне, чем язык программирования интерпретирующего типа. В самом деле, работа с системой *Mathematica* напоминает работу с Бейсиком в режиме непосредственного исполнения команд – в ответ на каждый вопрос тут же следует результат вычислений.

Таким образом, *Mathematica* даже в ходе такого простейшего диалога предоставляет пользователю средства сверхвысокого уровня (например, аналитическое вычисление производных или интегралов), также система имеет все возможности для создания практически любых управляющих структур, организации ввода-вывода, работы с системными возможностями и т.д.

Более того, система имеет ядро, которое используется практически в любой ее реализации – от версий для персональных компьютеров до рабочих станций *Sun* и даже суперкомпьютеров. Это позволяет использовать систему на любой аппаратуре с одинаковым успехом с точки зрения конечных результатов. Таким образом, *Mathematica* состоит из общего для различных реализаций ядра (*Kernel*) и конкретной оболочки пользовательского интерфейса.

Компьютерная алгебра в *Mathematica* включает в себя следующие возможности:

- работа с выражениями;
- выделение и подстановка в функциях;
- рекурсивные функции;
- инверсные функции;
- задание математических отношений;
- упрощение выражений;
- раскрытие и расширение выражений;
- функции преобразования тригонометрических выражений;
- основные операции над многочленами;
- функции для расширенных операций с выражениями.

Математические выражения – основа описания алгоритмов вычислений. Фактически вся символьная математика основана на тех или иных видах преобразований выражений. Такие преобразования опишем в следующем параграфе.



Из школьного курса математики известно, что многочленом (полиномом) называют выражение вида  $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n$ , где  $a_i$  – фиксированные коэффициенты,  $x$  – переменная.

Хотя термин *полином* не очень прижился в отечественной математической литературе, оставим его здесь ввиду краткости и ради лучшего понимания синтаксиса функций системы, поскольку слова *poly* и *Polynomial* входят в параметры и имена многих функций. При этом полиномы мы будем кратко обозначать как *poly* или *pi* (здесь  $i$  – индекс, или порядковый номер, полинома).

Над полиномами можно выполнять обычные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

Для получения результата умножения полиномов в обычной форме следует использовать функцию расширения символьных выражений *Expand*. Если один полином делится на другой, то для получения результата надо использовать функцию *Simplify*. В общем случае при делении полиномов может оставаться остаток. Функция, обеспечивающая деление полиномов и вычисляющая остаток, описана ниже.

*Factor* – разложение полиномов. Разложение чисел, математических выражений и особенно полиномов на простые множители является столь же распространенной операцией, что и функции *Simplify*, *Collect* и *Expand*. Имеется целый ряд функций, в названии которых есть слово *Factor* и которые решают указанные задачи:

1. *Factor [poly]* – выполняет разложение полинома над целыми числами.
2. *Factor [poly, Modulus->p]* – выполняет разложение полинома по модулю простого числа  $p$ .
3. *FactorInteger [n]* – возвращает список простых множителей целого числа  $n$  вместе с их показателями степеней. Опция *FactorComplete* позволяет указать, следует ли выполнять полное разложение.
4. *FactorList [poly]* – возвращает список множителей полинома с их показателями степени. Опция *Modulus->p* позволяет представить множители полинома по модулю простого числа  $p$ .
5. *FactorSquareFree [poly]* – записывает полином в виде произведения множителей, свободных от квадратов. Опция *Modulus->p* позволяет представить разложение полинома по модулю простого числа  $p$ .
6. *FactorSquareFreeList [poly]* – возвращает список множителей полинома, свободных от квадратов, вместе с показателями степени. Может использоваться опция *Modulus->p*.
7. *FactorTerms [poly]* – извлекает общий числовой множитель в *poly*.
8. *FactorTermsList [poly]* – возвращает лист всех общих числовых множителей полинома *poly*.

Далее представлен ряд примеров применения этих функций.



Ввод (In)	Вывод (Out)
Factor $[x^3 - 6x^2 + 11x - 6]$	$(-3 + x)(-2 + x)(-1 + x)(-4 + x)$
Factor $[x^3 - 6x^2 + 21x - 52]$	$(13 - 2x + x^2)$
Factor $[x^5 + 8x^4 + 31x^3 + 80x^2 + 94x + 20, \text{Modulus} \rightarrow 3]$	$(1 + x)^2(2 + x)^3$
FactorList $[x^4 - 1, \text{Modulus} \rightarrow 2]$	$\{\{1, 1\}, \{1 + x, 4\}\}$
FactorSquareFree $[(x^2 + 1)(x^4 - 1)]$	$(-1 + x^2)(1 + x^2)^2$
FactorSquareFree $[(x^2 + 1)(x^4 - 1), \text{Modulus} \rightarrow 2]$	$(1 + x)^6$
FactorSquareFreeListt $(x^2 + 1)(x^4 - 1), \text{Modulus} \rightarrow 2]$	$\{\{1, 1\}, \{1 + x, 6\}\} 2(3 + 2x + x^2)$ $\{2, 3 + 2x + x^2\}$
FactorTerms $[2x^2 + 4x + 6]$	
FactorTermsList $[2x^2 + 4x + 6]$	
FactorInteger $[123456789]$	$\{\{3, 2\}, \{3607, 1\}, \{3803, 1\}\}$
FactorList $[x^4 - 1]$	$\{1, 1\}, \{-1 + x, 1\}, \{1 + x, 1\}, \{1 + x^2, 1\}\}$
FactorSquareFreeListt $[(x^2 + 1)(x^4 - 1)]$	$\{\{1, 1\}, \{-1 + x^2, 1\}, \{1 + x^2, 2\}\}$

Обычно функция *Factor* выявляет внутреннюю суть полинома, раскладывая его на множители, содержащие корни полинома. Однако в ряде случаев корни полинома удобнее получать в явном виде с помощью функции *Roots*. Ниже даны примеры использования функции.

Пример. Найти все корни уравнения  $x^3 - x - 7 = 0$ .

Решение данного примера в среде *Mathematica* будет следующим:  
`In[50]: = Roots[x^3 - x - 7 = 0, x]`

$$\text{Out}[50] = x = 1/3 \left( \frac{189}{2} - \frac{3\sqrt{3957}}{2} \right)^{1/3} + \frac{\left( \frac{1}{2}(63 + \sqrt{3957}) \right)^{1/3}}{3^{2/3}}$$

$$x = -1/6(1 + i\sqrt{3}) \left( \frac{189}{2} - \frac{3\sqrt{3957}}{2} \right)^{1/3} + \frac{(1 - i\sqrt{3}) \left( \frac{1}{2}(63 + \sqrt{3957}) \right)^{1/3}}{23^{2/3}}$$

$$x = -1/6(1 - i\sqrt{3}) \left( \frac{189}{2} - \frac{3\sqrt{3957}}{2} \right)^{1/3} + \frac{(1 + i\sqrt{3}) \left( \frac{1}{2}(63 + \sqrt{3957}) \right)^{1/3}}{23^{2/3}}$$

Пример. Решить уравнение  $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ .

Используя функцию *Roots*, получим следующее решение:

`In[64]: = Roots[6*x^4 + 19*x^3 - 7*x^2 - 26*x + 12 = 0, x]`

$$x1 = 1/3(-1 - \sqrt{13}), x2 = 1/3(-1 + \sqrt{13}), x3 = 1/2, x4 = -3.$$

Для работы с полиномами имеется еще ряд дополнительных функций.

1. *Decompose* [*poly*, *x*] – выполняет разложение полинома, если это возможно, на более простые полиномиальные множители.

2. *GroebnerBasis* [{*poly1*, *poly2*, ..., *polyn*}, {*x1*, *x2*, ..., *xn*}] – возвращает список полиномов, которые образуют базис Гробнера для идеала, порожденного полиномами *poly*.

3. *Polynomial-Division* [*p*, *q*, *x*] – возвращает список частного и остатка, полученных делением полиномов *p* и *q* от *x*.

4. *PolynomialGCD* [*poly1*, *poly2*, ..., *polyn*] – возвращает наибольший общий делитель ряда полиномов *poly1*, *poly2* и т.д. С опцией *Modulus->p* функция возвращает наибольший общий делитель по модулю простого числа *p*.

5. *PolynomialLCM* [*poly1*, *poly2*, ..., *polyn*] – возвращает наименьшее общее кратное полиномов *poly1*, *poly2* и т.д. С опцией *Modulus->p* функция возвращает наименьшее общее кратное по модулю простого числа *p*.

6. *PolynomialMod* [*poly*, *m*] – возвращает полином *poly*, приведенный по модулю *m*.

7. *PolynomialMod* [*poly*, {*m1*, *m2*, ..., *mn*}] – выполняет приведение по модулю всех *mi*.

8. *PolynomialQ* [*expr*, *var*] – возвращает значение *True*, если *expr* является полиномом от *var*, иначе возвращает *False*.

9. *PolynomialQ* [*expr*, {*var1*}] – проверяет, является ли *expr* полиномом от *vari*.

10. *PolynomialQuotient* [*p*, *q*, *x*] – возвращает частное от деления *p* и *q* как полиномов от *x*, игнорируя какой-либо остаток.

11. *PolynomialRemainder* [*p*, *q*, *x*] – возвращает остаток от деления *p* на *q* как полиномов от *x*.

12. *Resultant* [*poly1*, *poly2*, *var*] – вычисляет результат полиномов *poly1* и *poly2* по переменной *var*. С опцией *Modulus->p* функция вычисляет результат по модулю простого числа *p*.

Итак, работа с этими функциями, по существу, сводит операции с таким сложным видом символьных данных, как многочлены, к типовым алгебраическим операциям над обычными символьными переменными.

В последующих главах изложение математической теории сопровождается примерами задач, решенными с помощью универсального математического пакета *Mathematica* с применением вышеперечисленных дополнительных функций над многочленами.

### Библиографический список

1. Виленкина Н.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Просвещение, 1984. 192 с.
2. Бухбергера Б., Коллинза Дж., Лооса Р. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986. 392 с.
3. Девенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1991. 350 с.
4. Дьяконов В.П. Системы символьной математики Mathematica 2 и Mathematica 3. М.: СК-пресс, 1998. 318 с.
5. Кузнецова И.В., Костиков А.Н. Теория многочленов: учебное пособие. Архангельск: Поморский университет, 2006. 154 с.

# ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GeoGebra В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ-БИЛИНГВОВ

## THE POSSIBILITIES OF USING THE GeoGebra COMPUTER ENVIRONMENT IN THE PROCESS OF MATHEMATICS TRAINING OF BILINGUAL SCHOOL CHILDREN

С.К. Саая

S.K. Saaya

*Компьютерная среда GeoGebra, школьники-билингвы, математика, повышение качества математической подготовки, создание компьютерной анимации, современные информационные технологии, билингвизм.*

В данной статье рассматриваются некоторые возможности использования компьютерной среды GeoGebra в процессе математической подготовки школьников-билингвов. Для повышения качества математической подготовки школьников-билингвов важно учитывать и факторы, влияющие на успешность подготовки, и характерные особенности тувинско-русского билингвизма, связанные с разными уровнями владения неродным языком. Кроме этого, для изучения математики имеется возможность учителю математики применить современные информационные технологии с различными образовательными программными средами и обеспечениями.

*GeoGebra computer environment, bilingual schoolchildren, mathematics, improving the quality of mathematical training, creating computer animation, modern information technologies, bilingualism.*

This article discusses some of the possibilities of using the GeoGebra computer environment in the process of mathematical training of bilingual schoolchildren. To improve the quality of mathematical training of bilingual schoolchildren, it is important to take into account both the factors influencing the success of training and the characteristic features of Tuvan-Russian bilingualism associated with different levels of proficiency in a non-native language. In addition, to study mathematics, there is an opportunity for a mathematics teacher to apply modern information technologies with various educational software environments and software.

**К**ак известно, система образования нашей страны включает в себя разные компоненты, виды, ступени, формы получения образования. Несмотря на все эти составляющие, существуют определенные требования для исполнения социального заказа общества. Совокупность обязательных систем требований прописана в ФГОС, в том числе требование к получению качественного образования, в соответствии с целью образования с ключевой компетенцией – умением учиться [1].

Согласно поставленной цели «Концепции развития математического образования» следует отметить, что математика должна стать передовой и привлекательной областью знания и деятельности, получение математических знаний – осознанным и внутренне мотивированным процессом [2].

Заметим, что каждый ученик школы имеет возможность достижения соответствующего уровня подготовки с учетом его индивидуальных потребностей и способностей. При этом ему могут оказывать всестороннюю поддержку с помощью современных образовательных технологий.

При обучении математике на разных ступенях образования возникают трудности разного уровня. Особенно это наблюдается в процессе математической подготовки выпускников старших классов, а также школьников-билингвов национальных школ регионов страны. Многие обучающиеся четко осознают и понимают эти сложности, которые препятствуют успешному освоению школьной программы по математике. По этой причине у них не формируются такие качества личности, как целеустремленность и ответственность, зачастую снижается интерес к данному предмету и качество обучения, происходит отсутствие цели для продолжения обучения в вузе.

На изучение математики отводится немалое количество часов, особенно в классах с углубленным изучением математики. Роль и значение математики в повседневной жизни велики для каждого обучающегося, в том числе особое место имеет качество знаний учащегося.

Качество полученных математических знаний школьников напрямую зависит от правильно построенного учебного процесса по предмету, который направлен на развитие мотивации к изучению учебного материала, повышения интереса обучающихся и, как следствие, улучшения знаний. Рассмотрим математическую подготовку школьников-билингвов по математике на примере Республики Тыва. Отметим, что проблема повышения качества математических знаний остается актуальной для большинства школ республики.

Математическая подготовка школьников-билингвов имеет свои особенности, которые связаны со спецификой тувинско-русского билингвизма. Как показывает опыт работы, проблема, связанная с языковыми трудностями, влияет на недостаточный уровень математической подготовки школьников-билингвов малокомплектных школ республики. Языком обучения в общеобразовательных школах региона становится русский язык. В сельских малокомплектных школах отдаленных, труднодоступных районов (кожуунов) в основном уроки для учеников младших классов ведутся на родном тувинском языке, так как в республике 84 % школ являются сельскими, что составляет половину от общего числа.

Имеющаяся сложность обучения математике школьников-билингвов, их математическая подготовка тесно связана с вопросом, связанным с непониманием текста математической задачи. Проблема тувинско-русского билингвизма способствует слабому развитию коммуникации у школьников-билингвов. Это объясняется тем, что среди населения районов отсутствуют носители русского языка, поэтому общение происходит только на родном тувинском языке. У многих

школьников-билинггов наблюдается полное отсутствие практики общения, поскольку они получают знания русского языка только в школе во время уроков русского языка. Поэтому у обучающихся бедный словарный запас и, как следствие, слабое понимание многих математических задач.

Отметим, что исследований по подготовке школьников-билинггов в условиях тувинско-русского билингвизма с учетом региональных особенностей при обучении математике мало.

Важным вопросом является разработка методики обучения школьников, направленной на повышение качества математических знаний через преодоление языкового барьера. У школьников-билинггов имеются свои характерные психологические особенности, влияющие на развитие мышления, памяти, воображения, коммуникативных способностей и другие. Для более результативного усвоения математической теории, развития творческой способности, самостоятельности мышления у школьников-билинггов эффективно применять современные информационные технологии, способствующие визуальному представлению учебного материала. Это позволяет развить у них интерес к предмету математика, решить языковые проблемы на начальном этапе.

В процессе математической подготовки, а также при изучении школьного курса математики целесообразно применять различные математические программные средства и онлайн-сервисы. Так, например, компьютерная среда GeoGebra является очень удобным учебным инструментом. Данная среда доступна широкому числу пользователей, удобный интерфейс, возможность компьютерной анимации и др.

Рассмотрим на примере обобщающего повторения следующих тем курса алгебры и геометрии: треугольники, четырехугольники, окружность, линейная и квадратичная функции, производная функции, вычисление площадей фигур и другие.

Компьютерная среда GeoGebra позволяет увидеть компьютерную анимацию в движении графиков линейной и квадратичной функции в зависимости от заданных коэффициентов:  $k$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Наглядное изображение и живой образ, демонстрация движущихся объектов намного упрощает и помогает запомнить эти элементарные функции, их свойства, сделать выводы относительно характера поведения графика функции в области монотонности. Темы школьной программы математики тесно взаимосвязаны, и одна из них может быть продолжением другой.

Проведенные исследования показывают, что школьники-билингвы, повторно изучая линейную функцию в компьютерной среде GeoGebra, просто могут запомнить ее при изучении некоторых тем выпускных классов, и полученный уровень знаний позволит решать более сложные, нестандартные задачи.

Для преодоления трудностей, связанных с разными уровнями владения русским языком, необходимо составить задания, в условии которых для одного из терминов, понятий записывается его перевод на тувинском языке. Наряду с этим, для того, чтобы преодолевать сложности в коммуникации или языкового барьера, будет полезным в условии задания прописать все шаги выполнения



определенного алгоритма поэтапного построения одновременно и в компьютерной среде GeoGebra, и в своих тетрадах.

В компьютерной среде GeoGebra имеется возможность преимущества сконструированных учебных материалов классов разных ступеней образования, что показывает их тесную взаимосвязь.

Приведем пример практического задания:

1. Постройте *окружность* (перевод на тувинском языке: *төггүрүк*) с центром в точке S с координатами  $a = 1, b = 2$  и радиуса  $r=3$ . Составьте алгоритм выполнения шагов построения в компьютерной среде GeoGebra и тетрадах (в письменной форме). Запишите все шаги поэтапного построения.

Таким образом, компьютерная среда GeoGebra оказывает неоценимую помощь учителя в процессе математической подготовки школьников-билингвов, развивая интерес и мотивацию к предмету математика, а также для повышения качества их результативной математической подготовки через наглядное изображение, живые образы рассматриваемых объектов.

### Библиографический список

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. URL: <https://fgos.ru>
2. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/download/2744/>
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.
4. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra / М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, Е.Н. Ерилова и др. М.: Перо, 2013. 128 с.
5. Официальный сайт программы GeoGebra. URL: <http://www.geogebra.org> (дата обращения: 03.11.24).



# СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

## SYSTEMS OF DYNAMIC MATHEMATICS, COMPUTER ALGEBRA AND GRAPHICS IN MATHEMATICAL TRAINING OF STUDENTS ON THE EXAMPLE OF THE INTERACTIVE GEOMETRIC ENVIRONMENT GEOGEBRA

Н.Р. Сабитова

N.R. Sabitova

*Интерактивная геометрическая среда GeoGebra, исследовательская работа, математическая подготовка, компьютерный эксперимент, построение геометрических объектов, куб, сечение куба.*

Рассматривается подход к изучению темы «Сечения куба» с использованием системы динамической математики и интерактивной геометрической среды GeoGebra. В рамках подхода наглядно иллюстрируется определение сечения куба, этапы построения геометрических объектов для получения сечения, что приводит к лучшим результатам при изучении дисциплины «Инженерная графика» и в будущей профессиональной деятельности.

*Interactive geometric environment GeoGebra, research work, mathematical training, computer experiment, construction of geometric objects, cube, section of a cube.*

The article discusses an approach to studying the topic "Cube Sections" using the dynamic mathematics system and the interactive geometric environment GeoGebra. The approach clearly illustrates the definition of a cube section, the stages of constructing geometric objects to obtain a section, which leads to better results in studying the discipline "Engineering Graphics" and in future professional activities.

**П**ри изучении математики, как и при изучении любой научной дисциплины, важной является наглядность. На сегодняшний день существует множество программных продуктов, которые помогают преподавателю математики в создании иллюстраций к изучению материала. Примером такой программы является GeoGebra [3].

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra – это не только возможность получить красочные иллюстрации к учебным занятиям по математике, это еще и важный инструмент для организации исследовательской работы студентов [3].

В математической подготовке студентов есть много тем, изучение которых можно превратить в небольшое исследование. В этих исследованиях так же, как и в настоящих научных исследованиях, можно выдвигать гипотезы, проводить эксперименты, делать выводы или в некоторых случаях могут быть даже открытия [3].

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra и компьютерные эксперименты в этой среде помогут студентам лучше усвоить материал, развить абстрактное и логическое мышление, а также сделать учебные занятия более интересными [3].

Роль систем динамической геометрии в исследовательском, визуальном и интерактивном обучении студентов важна. Интерактивная геометрическая среда GeoGebra позволяет проводить учебные занятия по математике с максимальным развивающим эффектом. Подготовка и проведение учебных занятий по математике в среде GeoGebra требует оптимального распределения учебного времени на работу с компьютером, а также без него. Также должна сочетаться индивидуальная форма работы студента на компьютере с обсуждением результатов этой работы с группой.

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra позволяет выполнять построение трехмерных геометрических объектов. Рассмотрим некоторые задания по построению в среде GeoGebra.

**Задание 1.** Постройте куб, как на рис. 1.

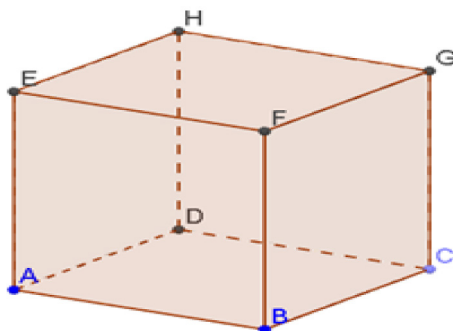
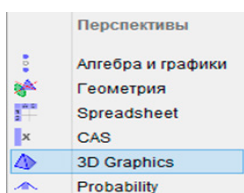
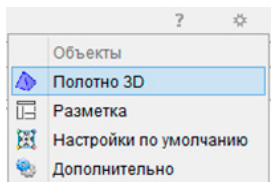


Рис. 1

1. Запускаем геометрическую среду GeoGebra. В меню «Перспективы» в правой части полотна справа выбираем вид «3D Graphics».



2. Нажимаем на кнопку  в верхнем правом углу главного окна и выбираем «Полотно 3D».



3. На вкладке «Основные» убираем галочки рядом с «Показывать оси», «Use clipping», «Show clipping».

4. Щелкаем по «Полотно 3D» вверху полотна и нажимаем на кнопку «Показать или спрятать плоскость» на панели.



5. Выполняем «Настройки – Обозначения – Только для точек», затем «Настройки – Сохранить настройки».

6. Выбираем инструмент «Куб»  и отмечаем мышью на полотне две точки. С помощью инструмента  изображение можно повернуть в пространстве.

7. На панели объектов в разделе «Cube» выбираем куб а и щелкаем по нему правой кнопкой мыши. Выбираем «Свойства» и изменяем заливку, цвет и толщину линий.

**Задание 2.** Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $M, N, K$ , если  $M$  лежит на ребре  $BC$ ,  $N$  лежит на ребре  $DD_1$ , точка  $K$  лежит на ребре  $A_1 B_1$ .

1. Создаем новый файл.

2. Выбираем инструмент «Куб»  и отмечаем мышью на полотне две точки.

3. Переименуем точку  $E$  в точку  $A_1$ . Для этого щелкаем по точке  $E$  правой кнопкой и выбираем «Переименовать». В появившемся окне изменяем « $E$ » на « $A_1$ ». Аналогичным образом переименуем точки  $F, G, H$  в точки  $B_1, C_1, D_1$  соответственно.

4. В строке ввода набираем « $M$ =Точка[ребро $BC$ ]» и нажимаем «Enter».


5. Выбираем инструмент  и помещаем точку  $M$  внутри ребра  $BC$ .

6. В строке ввода набираем « $N$ =Точка[ребро $DD_1$ ]» и нажимаем «Enter».


7. Выбираем инструмент  и помещаем точку  $N$  внутри ребра  $DD_1$ .


8. В строке ввода набираем « $K$ =Точка[ребро $EF$ ]» и нажимаем «Enter».

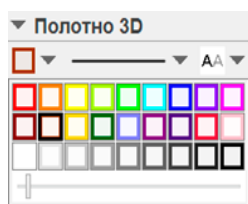
9. Выбираем инструмент  и помещаем точку  $K$  внутри ребра  $A_1 B_1$ .


10. Выбираем инструмент «Плоскость через 3 точки»  и щелкаем по точкам  $M, N, K$ .

11. В строке ввода набираем «ПересечьКонтур[ $b, a$ ]» и нажимаем «Enter». ( $a$  – это куб,  $b$  – плоскость. Посмотрите на панель объектов и убедитесь в этом).

12. Скрываем плоскость  $b$ , для этого указываем с помощью инструмента  на плоскость, щелкаем правой кнопкой мыши и делаем неактивным поле «Показывать объект».

13. С помощью инструмента  выбираем на панели объектов куб  $a$  (если панель объектов не отображается, то выполняем «Вид-Панель объектов»). Щелкаем по заголовку «Полотно 3D» в верхнем левом углу полотна так, чтобы появилась панель управления цветом. Делаем куб почти прозрачным.



14. С помощью инструмента  выбираем на панели объектов многоугольник 1. Изменяем цвет многоугольника (рис. 2).

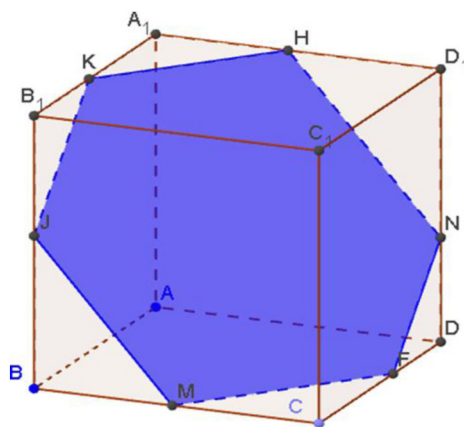


Рис. 2

Построение сечений в интерактивной геометрической среде GeoGebra на учебных занятиях по математике играет большую роль при изучении дисциплины «Инженерная графика» и в будущей профессиональной деятельности. Использование интерактивной геометрической среды GeoGebra дает возможность оптимизировать процесс формирования геометрических понятий у студентов во время учебного процесса в результате активного включения обучающихся в деятельность построения геометрических объектов с помощью программного продукта GeoGebra.

### Библиографический список

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10–11 классы: учебник. М.: Просвещение, 2014.
2. Аствацатуров Г.О. Дизайн мультимедийного урока: методика, технологические приемы, фрагменты уроков. Волгоград: Учитель, 2009. 133 с.
3. Чеботарева Э.В. Компьютерный эксперимент с GeoGebra. Казань: Казанский ун-т, 2015. 61 с.
4. Якиманская И.С. Технология личностно-ориентированного образования. М.: Сентябрь, 2000г.
5. GeoGebra. URL: <http://geogebra.org> (дата обращения: 23.10.2024).

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛЬБОМА АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ УЧЕНИКОВ-БИЛИНГВОВ 7 КЛАССА

## USING AN ALBUM OF ANIMATED DRAWINGS WHEN TEACHING ALGEBRA TO BILINGUAL 7TH GRADE STUDENTS

С.В. Сарыглар

S.V. Saryglar

*Компьютерная анимация, среда GeoGebra, анимационный рисунок, ученики-билингвы, альбом анимационных рисунков, математическое образование, алгебра 7 класса.*

Рассматривается альбом анимационных рисунков при изучении алгебре учеников-билингвов 7 класса как электронный обучающий курс. В статье описываются структура, преимущества, содержание модулей альбома анимационных рисунков. Использование альбома анимационных рисунков при обучении алгебре учеников-билингвов 7 класса повышает уровень понимания и степень усвоения учебного материала.

*Computer animation, GeoGebra environment, animated drawing, bilingual students, animated drawing album, mathematical education, 7th grade algebra.*

An album of animated drawings is considered when studying algebra for bilingual 7th grade students as an electronic training course. The article describes the structure, advantages, and content of the modules of the animation drawing album. The use of an album of animated drawings when teaching algebra to bilingual 7th grade students increases the level of understanding and the degree of assimilation of educational material.

**П**ри построении учебного процесса по алгебре в школах Республики Тыва нельзя не учитывать специфику обучения малочисленных коренных народов и сформировавшуюся на территории республики ситуацию русско-тувинского двуязычия в условиях многонационального государства [1; 2; 4; 5].

Альбом анимационных рисунков с билингвальной поддержкой поможет ученикам-билингвам и учителям качественно поддерживать обучение алгебре, в том числе в активированные дни и интенсивно задействовать обучающихся в учебном процессе, не выходя из дома.

Разработанный альбом анимационных рисунков по алгебре для седьмого класса размещен на сайте Центра дистанционного обучения Тувинского государственного университета [3].

Альбом анимационных рисунков состоит из следующих модулей: выражения, тождества, уравнения; функции; степень с натуральным показателем; многочлены; формулы сокращенного выражения и системы линейных уравнений.

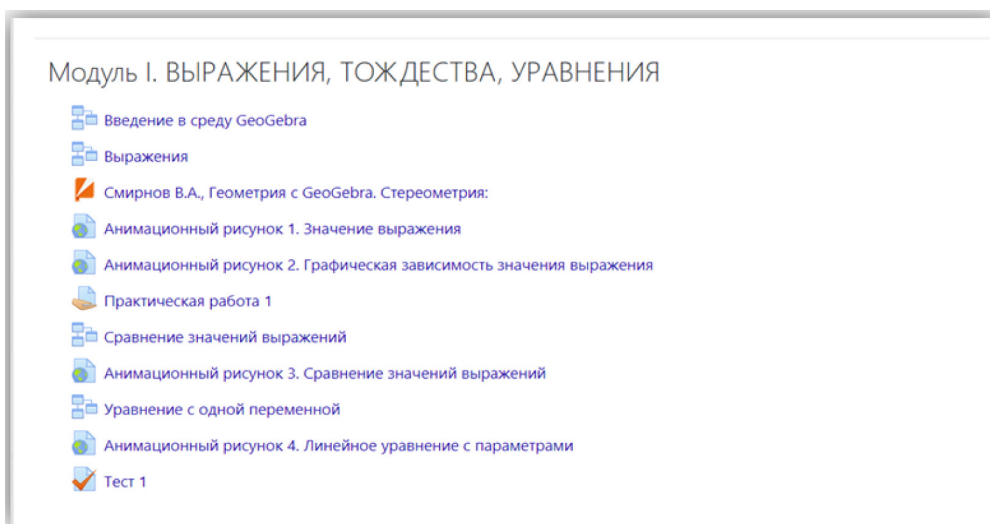


Рис. 1. Альбом анимационных рисунков

Каждый модуль состоит из учебного материала, анимационных рисунков с билингвальной поддержкой, опросов. Для проверки знаний учеников-билингвов можно воспользоваться практическими работами и тестами. Анимационные рисунки содержат билингвальные подсказки, которые включаются и выключаются нажатием на флажок.

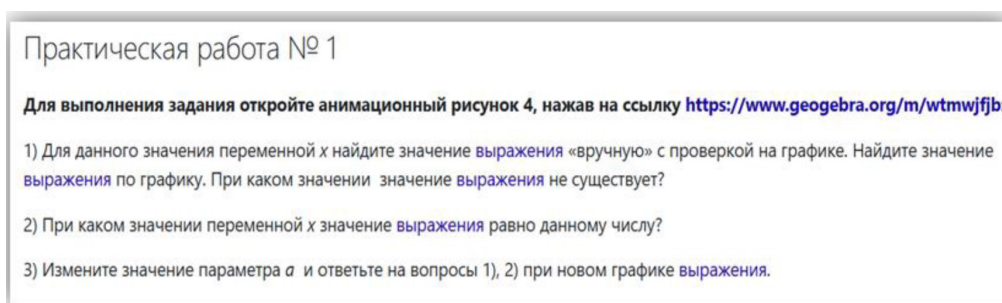


Рис. 2. Содержание практической работы № 1

Билингвальная поддержка для учеников-билингвов Республики Тыва обеспечивает перевод с русского языка на тувинский язык математических выражений и понятий.

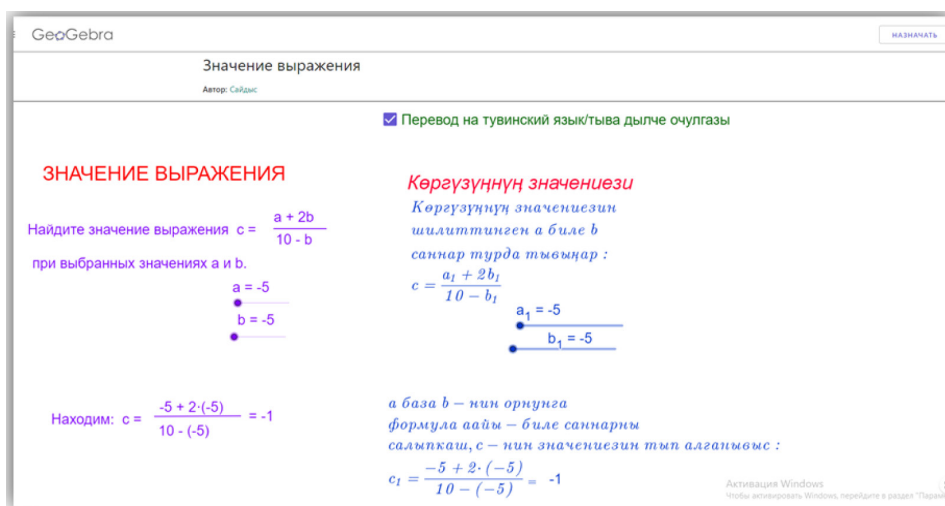


Рис. 3. Анимационный рисунок с билингвальной поддержкой



Применение альбома анимационных рисунков с билингвальной поддержкой при обучении алгебре учеников-билингвов седьмого класса служит дидактической помощью учителю. С помощью альбома можно организовать для учеников-билингвов экспериментальное исследование для развития и поддержки экспериментально-исследовательского обучения. Для снижения вычислительных трудностей при решении громоздких примеров, например, различные действия над одночленами и многочленами, используется система CAS.

### **Библиографический список**

1. Вайнштейн Ю.В., Сарыглар С.В. Применение анимационных рисунков при обучении школьников-билингвов на уроках алгебры // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2024. № 1 (67). С. 5–15.
2. Ларин С.В., Чилбак-оол С.В. Анимационные рисунки как технологическая часть цифрового обучения математике в свете цифровизации образования // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2020. № 3 (53). С. 54-61.
3. Положение об электронном обучении и дистанционных образовательных технологиях ТувГУ. URL: <https://cdo.tuvsu.ru/moodle/login/index.php>
4. Сарыглар С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках алгебры 7 класса: результаты экспериментальной работы // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2021. № 4 (58). С. 126–131.
5. Сарыглар С.В. Компьютерные анимационные рисунки в среде GeoGebra на уроках алгебры в седьмом классе // Вестник ТГПУ. 2022. № 5 (223). С. 116–122.

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

## PROOF OF INEQUALITIES BY MATHEMATICAL INDUCTION

В.Д. Смолягина

V.D. Smolyagina

*Индукция, доказательство, неравенство, база индукции, предположение индукции, шаг индукции.*

Цель статьи – рассмотрение и изучение доказательства неравенств методом математической индукции, выявление преимуществ этого метода. Неравенство в математике – отношение, связывающее два числа или иных математических объекта с помощью одного из знаков. Неравенства используются основным образом в сравнении числовых значений, однако их применение распространяется на все области математики алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей и другие.

*Induction, proof, inequality, induction base, induction assumption, induction step.*

The purpose of the scientific article is to consider and study the proof of inequalities by mathematical induction, to identify the advantages of this method. An inequality in mathematics is a relation that connects two numbers or other mathematical objects using one of the signs. Inequalities are mainly used in comparing numerical values, but their application extends to all areas of mathematics: algebra, geometry, mathematical analysis, probability theory and others.

Одно из основных свойств неравенств – сохранение ориентации отношения при умножении или делении на положительное или отрицательное число. Если умножить или разделить обе части неравенства на положительное число, знак неравенства не меняется. Если же умножить или разделить на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный. Знание условий неравенства при всех значениях  $x$  позволяет упрощать и решать уравнения, строить графики функций и вычислять различные значения переменных. Они активно используются в математическом анализе, теории вероятностей, теории игр и других разделах математики.

Среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического: 
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции. Он заключается в следующем: пусть имеется какое-либо утверждение, зависящее от натурального числа  $n$ , являющееся истинным при начальном  $n = 1$ . Если предположить справедливость утверждения для произвольного натурального номера  $n = k$  и из него получить истинность при натуральном  $n = k + 1$ , то данное утверждение верно для всех натуральных чисел  $n$ . Таким образом, метод доказательства утверждений, основанный на принципе математической индукции, называется методом математической индукции.

Применение метода математической индукции:

Рассмотрим пример из сборника [6], упражнение № 31

$$a) n! > n^{\frac{n}{2}}, n > 2$$

Подставим  $n=3$

$$3! > 3^{\frac{3}{2}}$$

$$1 \times 2 \times 3 > 3^{\frac{3}{2}}$$

$$6 > 3\sqrt{3}$$

$$(k+1)! > (k+1)^{\frac{k+1}{2}}$$

$$(k+1)! > k^{\frac{k}{2}}(k+1)$$

$$\frac{(k+1)^{k-1}}{k^k} < 1$$

$$k^k(k+1)^2 > (k+1)^{k+1}$$

$$k^k(k+1) > (k+1)^k$$

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^k > \frac{1}{k+1}$$

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < k+1$$

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < k+1$$

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3$$

$$k+1 > 3$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются, значит, равенство справедливо для любого натурального числа  $n$ .

Неравенство верно

$$b) \sum_{k=1}^n k^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}, \quad n, p \in \mathbb{N}$$

$$n=1 \quad p=p$$

$$1^p < \frac{(1+1)^{p+1}}{p+1}$$

$$1 < \frac{2^{p+1}}{p+1}$$

$$2^{p+1} > p+1$$

Доказываем по индукции:

$$n=k \quad \sum_{m=1}^n k^p < \frac{(k+1)^{p+1}}{p+1}$$

$$n=k \quad \sum_{m=1}^{n+1} m^p < \frac{(k+2)^{p+1}}{p+1}$$

$$\sum_{m=1}^{k+1} m^p < \frac{(k+1)^{(p+1)}}{p+1} + (k+1)^p < \frac{(k+2)^{p+1}}{p+1}$$

$$(k+1)^p \left( \frac{k+1}{p+1} + 1 \right) < \frac{(k+2)^{p+1}}{p+1} \quad | \times (p+1)$$

$$(k+1)^p (k+1+p+1) < (k+2)^{p+1}$$

$$(k+1)^p (k+2+p) < (k+2)^p (k+2)$$

$$(k+1)^p \left( \frac{k+2+p}{k+2} \right) < (k+2)^p$$

$$(k+1)^p \left( 1 + \frac{p}{k+2} \right) < (k+2)^p$$

$p$  – фиксированное число,  $k$  уменьшается все меньше и меньше

$$\left( 1 + \frac{1}{k+1} \right)^p > 1 + \frac{p}{k+1} > 1 + \frac{p}{k+2}$$

Доказали по неравенству Бернулли. Преимуществами решения неравенств методом математической индукции являются универсальность метода, упрощение и сокращение времени на решение задач повышенной сложности.

### Библиографический список

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С. Математика учебник для 5-х классов. 280 с.
2. Шень А. Математическая индукция. МЦНМО, 2004. 36 с.
3. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии. Физматгиз, 1961. Т. 21. 100 с.
4. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы (Избранные вопросы элементарной математики). Изд. 5-е, перераб. 1976. 638 с.
5. Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8–9 кл. с углубл. изучением математики. 7-е изд. М.: Просвещение, 2001. 271 с.
6. Ляшко И.И., Боярчук А.И., Головач Г.П. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике.

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОНЛАЙН-ТРЕНАЖЕРОВ СРЕДСТВАМИ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР» ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВУЗА ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

DESIGNING ONLINE-SIMULATOR  
DEVICES USING «MATHEMATICAL CONSTRUCTOR»  
FOR TEACHING UNIVERSITY STUDENTS  
THE DISCIPLINE «HIGHER MATHEMATICS»

О.Н. Троицкая

O.N. Troitskaya

*Обучение, высшая математика, студенты, онлайн-тренажер, концептуальная модель, математический конструктор.*

В статье обоснована необходимость создания онлайн-тренажеров для обучения студентов вуза дисциплине «Высшая математика». Введено понятие «онлайн-тренажер» как набор взаимосвязанных интерактивных упражнений, объединенных единой целью, позволяющий сформировать определенные умения, навыки и реализованный средствами веб-приложений. Представлена концептуальная модель тренажера «Правила дифференцирования», инструментом реализации которых станет «Математический конструктор».

*Education, higher mathematics, students, online-simulator, conceptual model, mathematical constructor*

The article substantiates the need to create online-simulators for teaching university students the discipline «Higher Mathematics». The concept of an «online-simulator» is introduced as a set of interrelated interactive exercises united by a single goal, which allows you to form certain skills and implemented by means of web applications. A conceptual model of the simulator «Rules of differentiation» is presented, the implementation tool of which will be «Mathematical Constructor».

Сегодня в учебные планы студентов технических направлений подготовки входит дисциплина «Высшая математика». Анализ рабочих программ ([1], [2], [3], [4], [5]) показал, что в течение одного-двух семестров студенты должны изучить вопросы теории математического анализа, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, в частности бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, замечательные пределы, непрерывность функций, правило Лопиталя, первообразная и неопределенный интеграл, дифференциальные уравнения и т.д. Перед преподавателями стоит задача сформировать у студентов знания и умения в области высшей математики при небольшом количестве аудиторных часов. Для ее решения методисты предлагают использовать комплексный подход, включающий проведение интерактивных лекционных и практических занятий [6], [7], рефлексия в процессе каждой учебной встречи [8], использование прикладных математических программ с целью визуализации

изучаемого теоретического материала [9]. О.В. Нестерук в [10] описывает особенности применения тестовых заданий, составленных в формате федерального Интернет-экзамена (ФЭПО), как в ходе аудиторного занятия, так и при организации самостоятельной работы студентов.

Особое внимание заслуживает подход, описанный в [11]. В.А. Булычев и О.Г. Булычева предлагают применять «Математический конструктор» в процессе проведения практических занятий по высшей математике. Ключевым этапом учебной деятельности студентов является построение компьютерной модели на основе данных задания. В качестве примеров авторы приводят работы, темы которых «Свойства функций» и «Вероятности случайных событий». В.А. Булычев и О.Г. Булычева подчеркивают возможность их выполнения на трех уровнях: «на экспериментально-исследовательском уровне, отыскивая нужное решение методом “проб и ошибок”, “подгонкой”; на конструктивном уровне, выполняя необходимые построения в ИМС, приводящие к решению; на теоретическом уровне, получая решение “на кончике пера”, а ИМС использовать только для его проверки» [11]. В процессе решения заданий обучающиеся, используя инструменты «Математический конструктор», строят модели, визуализирующие особенности выполняемой работы, проходя все этапы простейшего научного исследования. Однако для того, чтобы студенты могли самостоятельно создавать модели в среде «Математический конструктор», необходимо предварительно сформировать у них соответствующие умения и навыки. Для этого требуется выделить отдельное учебное время, что, к сожалению, практически нереально организовать в рамках отведенной трудоемкости на изучение дисциплины «Высшая математика».

Мы предлагаем использовать возможности «Математический конструктор» [12], но и создать на его основе онлайн-тренажеры, позволяющие сформировать у студентов умения и навыки решения заданий дисциплины «Высшая математика».

Как известно, применение тренажеров началось еще в середине прошлого века в ходе подготовки технических специалистов. Основное внимание уделялось формированию их умений и навыков работы в сложных технологических ситуациях, а также в возможных внештатных ситуациях. Сегодня данный подход сохранился. Например, корпорация «РосПолиТехСофт» предлагает «Тренажер корабельной автоматизированной системы управления ракетным оружием», «Тренажер контрольно-обучающий для осмотрщиков грузовых вагонов» [13], образовательный сайт DeskOffice.ru предлагает учебные тренажеры для судостроителей [14]. В рамках данного подхода тренажер, по мнению А.В. Трухина, это «автоматизированный аппаратно-программный функционально ориентированный комплекс для обучения человека и отработки определенных навыков и умений» [15].

Сегодня в связи с внедрением тренажеров в образовательный процесс изменился подход к определению понятия и описанию его функций. Так, методисты определяют тренажер как «программный комплекс, в основу которого положе-



на оригинальная методика оценки знаний, умений и навыков и целенаправленная тренировка обучающихся в процессе многократного повторного решения тестовых заданий, реализованный средствами веб-приложений» [16]. Это определение позволяет педагогам и ИТ-разработчикам говорить об онлайн-тренажерах и классифицировать их по функциональной направленности: для развития и тренировки интеллектуальных способностей, предметные (математика, иностранный язык, русский язык и т.д.), для формирования специализированных навыков. Примерами онлайн-тренажеров первого типа являются Викиум [17], Битрейника [18], BrainApps [19]. Регулярное их использование позволяет повысить производительность мозга, развить такие познавательные функции, как память и внимание. Данные платформы генерируют индивидуальные программы занятий для каждого отдельного пользователя на основе анализа результатов входного тестирования. Предметные онлайн-тренажеры можно классифицировать не только по областям научного знания, но и по возрасту обучающихся. Например, математический онлайн-тренажер «Тренажер сложения и вычитания» [20] ориентирован в первую очередь на подготовку по математике детей 5–8 лет. Онлайн-тренажеры школы Sirius Future [21] предназначены для детей школьного возраста.

Активное применение онлайн-тренажеров в образовательном процессе обусловлено тем, что они выполняют как минимум следующие три функции:

- 1) обучающая функция (тренажеры служат средством закрепления теоретических знаний, формирования умений решать типовые задания и т.п.);
- 2) практическая функция (формирование личного опыта обучающихся при решении различных прикладных или практических проблем на основе изученного теоретического материала);
- 3) контролирующая функция (диагностика результатов выполнения различного типа заданий, определение характера совершенных обучающимися ошибок и т.п.).

Проведенный анализ методической и технической литературы позволяет сделать вывод о том, что онлайн-тренажер представляет собой *набор* взаимосвязанных интерактивных упражнений, объединенных единой целью, *позволяющий* сформировать определенные умения, навыки и *реализованный* средствами веб-приложений.

Процесс создания онлайн-тренажера начинается с разработки его концептуальной модели. Именно она отражает ведущую функцию онлайн-тренажера, учебные задачи, решаемые с помощью тренажера как конкретизация указанной функции, учебное содержание, подлежащее изучению или проверке с помощью тренажера, этап учебного занятия, на котором предполагается использование тренажера.

В таблице представлен пример концептуальной модели тренажера «Правила дифференцирования», реализация которого происходит с использованием «Математический конструктор».

## Концептуальная модель онлайн-тренажера «Правила дифференцирования»

№	Компоненты концептуальной модели	Особенности реализации
1	2	3
1	Название онлайн-тренажера	«Правила дифференцирования»
2	Дисциплина	«Высшая математика»
3	Курс	1 курс
4	Тема занятия	«Производная функции»
5	Этап занятия, на котором происходит использование онлайн-тренажера	Этап закрепления
6	Функция онлайн-тренажера	<i>обучающая</i> – сформировать умения применять правила вычисления производных при решении заданий различных типов
7	Учебные задачи, решаемые с помощью онлайн-тренажера (конкретизация указанной функции)	– сформировать умения применять правило нахождения производной суммы двух функций, – сформировать умения применять правило нахождения производной произведения двух функций, – сформировать умения применять правило нахождения производной частного двух функций
8	Учебное содержание, подлежащее изучению или проверке с помощью онлайн-тренажера	– определение понятия «производная», – таблица производных, – правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного двух функций)
9	Краткое описание интерактивных упражнений, входящих в онлайн-тренажер	<p>В тренажер будут включены <b>три</b> интерактивных упражнения.</p> <p>В каждом упражнении (на каждом листе) в случае возникновения затруднений учащиеся могут использовать подсказку, нажав на соответствующую кнопку («Подсказка»).</p> <p>Кнопка «Проверить ответ» позволит убедиться в правильности полученного результата (появляется сообщение «Правильно!»). Кнопка «Пропустить» даст возможность перейти к следующему листу с заданием.</p> <p><b>Цель первого упражнения</b> – сформировать умения применять правило нахождения производной суммы двух функций.</p> <p>Интерактивное упражнение будет состоять из трех листов. Первый лист предлагает учащимся найти производную суммы двух линейных функций, второй лист – производную суммы двух иррациональных функций, третий лист – производную суммы двух тригонометрических функций.</p> <p><b>Цель второго упражнения</b> – сформировать умения применять правило нахождения производной произведения двух функций.</p> <p>Интерактивное упражнение будет состоять из четырех листов. Первый лист предлагает учащимся найти производную произведения двух линейных функций,</p>

1	2	3
		<p>второй лист – производную произведения двух иррациональных функций, третий лист – производную произведения двух тригонометрических функций, четвертый лист – производную произведения двух разнотипных функций (иррациональная и тригонометрическая).</p> <p><b>Цель третьего упражнения</b> – сформировать умения применять правило нахождения производной частного двух функций.</p> <p>Интерактивное упражнение будет состоять из четырех листов. Первый лист предлагает учащимся найти производную частного двух линейных функций, второй лист – производную частного двух иррациональных функций, третий лист – производную частного двух тригонометрических функций, четвертый лист – производную частного двух разнотипных функций (иррациональная и тригонометрическая)</p>
10	Уровень интерактивности тренажера	Второй уровень (активные формы)
11	No-Code инструменты для создания тренажера	«Математический конструктор»

На данный момент созданы 6 концептуальных моделей онлайн-тренажеров, инструментом реализации которых станет «Математический конструктор» [12]. Речь идет о следующих моделях: «Предел функции», «Правила дифференцирования» «Производная сложной функции», «Интегрирование рациональных дробей», «Несобственные интегралы I рода», «Вычисление площади плоской фигуры». Применение таких онлайн-тренажеров в рамках учебных занятий и в процессе самостоятельной работы позволит сформировать умения у обучающихся решать соответствующие типы заданий дисциплины «Высшая математика». Кроме того, описанные онлайн-тренажеры обеспечат эффективную подготовку к предстоящему экзамену по данной дисциплине.

### Библиографический список

1. Рабочая программа учебной дисциплины «Высшая математика». 2021. URL: [https://www.иппспб.рф/sveden/files/05\\_Vysshaya\\_matematika.pdf](https://www.иппспб.рф/sveden/files/05_Vysshaya_matematika.pdf)
2. Рабочая программа учебной дисциплины «Высшая математика». 2022. URL: [https://rsmu.ru/fileadmin/templates/DOC/Disciplinary/Biology\\_bak/Rab\\_prog\\_disciplines/RP\\_Vysshaja\\_matematika.pdf](https://rsmu.ru/fileadmin/templates/DOC/Disciplinary/Biology_bak/Rab_prog_disciplines/RP_Vysshaja_matematika.pdf)
3. Рабочая программа учебной дисциплины «Высшая математика». 2023. URL: [https://mospolytech.ru/sveden/files/B.1.1.13\\_Vysshaya\\_matematika\\_2020\\_bak.pdf](https://mospolytech.ru/sveden/files/B.1.1.13_Vysshaya_matematika_2020_bak.pdf)
4. Рабочая программа учебной дисциплины «Высшая математика». 2021. URL: [https://www.mpsu.ru/sveden/files/Vysshaya\\_matematika\(8\).pdf](https://www.mpsu.ru/sveden/files/Vysshaya_matematika(8).pdf)
5. Рабочая программа учебной дисциплины «Высшая математика». 2023. URL: <http://www.kgau.ru/sveden/content/rp/380304/49.pdf>

6. Глубокий В.А. Возможности интерактивных методов обучения в процессе проведения лекционных занятий и занятий семинарского типа / Глубокий В.А., Мусафин Р.Р., Хатуаев М.О., Косовская Д.В. // Евразийский юридический журнал. 2024. № 3 (190). С. 446–447.
7. Чесноков А.А. Методика проведения лекционных занятий с использованием раздаточного материала «интерактивная лекция» // Вестник учебного отдела Барнаульского юридического института МВД России. 2015. № 25. С. 27–29.
8. Кошечкина Т.В. Развитие рефлексии студентов-бакалавров технического вуза // Наука, образование, инновации: апробация результатов исследований: материалы Международной (заочной) научно-практической конференции / под общ. Ред. А.И. Вострецова. 2020. С. 838–842.
9. Ольнева Е.С., Троицкая О.Н. Методические особенности использования пакетов прикладных программ при обучении математике в вузе // Современные проблемы физико-математических наук: материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, 2019. С. 518–524.
10. Нестерук О.В. Текстовые задания ФЭПО в практике вузовского обучения // Теория и практика сервиса: экономика, социальная сфера, технологии. 2013. № 3 (17). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tekstovye-zadaniya-fepo-v-praktike-vuzovskogo-obucheniya>
11. Булычев В.А., Булычева О.Г. Практикум по высшей математике в динамической среде «1С: математический конструктор» // Электронный журнал: наука, техника и образование. 2016. № 4 (9). С. 254–260. [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_27664331\\_67062661.PDF](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_27664331_67062661.PDF)
12. Математический конструктор. URL: <https://urok.1c.ru/constructor/mathkit/1c/>
13. Корпорация РосПолитехСофт. Тренажеры-симуляторы. URL: <https://rpts.ru/trenazhery-simulatory/>
14. Учебные тренажеры и симуляторы. URL: <https://deckofficer.ru/seasoft/category/trainers>
15. Трухин А.В. Анализ существующих в РФ тренажерно-обучающих систем // Открытое и дистанционное образование. 2008. № 1 (29). С. 32–39.
16. Векслер В.А., Рейдель Л.Б. Интерактивные тренажеры и их значение в учебном процессе // NovaInfo.Ru. 2016. Т. 1, № 41. С. 205–211
17. Викиум. URL: <https://wikium.ru>
18. Битрейника. URL: <https://b-trainika.com/ru/>
19. BrainApps. URL: <https://brainapps.ru>
20. Тренажер сложения и вычитания. URL: <https://plus-minus-online.ru>
21. Sirius Future. URL: <https://siriusfuture.ru/simulators>

# РОЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ В ФОРМИРОВАНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ У СТУДЕНТОВ

## THE ROLE OF DYNAMIC MATHEMATICS IN THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCIES STUDENTS

Е.Р. Туктамышева

E.R. Tuktamysheva

*Динамическая математика, математическое образование, методика преподавания, визуализация учебного материала, формирование компетенций, интеграция компетенций, профессиональные компетенции.*

В статье описывается актуальность применения динамической математики в подготовке будущих специалистов. Приведены особенности внедрения данного инструмента в занятия и преимущества визуализации учебного материала, что позволяет повысить уровень математической подготовки, и, как следствие, помогает в формировании компетенций обучающихся.

*Dynamic mathematics, mathematical education, teaching methods, visualization of educational material, formation of competencies, integration of competencies, professional competencies.*

The article describes the relevance of the application of dynamic mathematics in the training of future specialists. The features of the implementation of this approach in classes and the advantages of visualization of educational material are given, which allows to increase the level of mathematical training, and, as a result, helps in the formation of students' competencies.

**П**ри внедрении интенсивных образовательных программ, ориентированных на потребности рынка труда, в рамках проекта «Профессионалитет» преподавателю не обойтись без современных инструментов в процессе преподавания математики. В число таких инструментов входит динамическая математика, которая представляет собой использование компьютерных технологий и интерактивных математических программ, таких как GeoGebra, Mathematica и т.д.

В настоящее время результатами освоения математики в среднем профессиональном образовании является формирование не только общих, но и некоторых профессиональных компетенций. Поэтому необходимо включать в программу изучения математики модули с профессиональным содержанием. Благодаря чему происходит совершенствование рационального применения теоретических знаний обучающихся к решению производственных задач и развития логического мышления, пространственного воображения, вычислительных навыков.

В настоящее время у современных студентов есть запрос на визуализацию преподаваемого материала с учетом прикладной направленности, особенно



по геометрии. Следовательно, преподавателям стоит активнее внедрять динамическую математику в свою работу, поскольку наглядность и интерактивность данного инструмента помогает студентам не только изучать традиционные разделы математики, но и активно участвовать в процессе исследования математических объектов.

Интерактивность данного метода обучения делает процесс изучения математики более увлекательным и интересным, что повышает мотивацию студентов и способствует лучшему усвоению материала. А в совокупности с практико-ориентированными задачами дает представление о тесной взаимосвязи математики с выбранной профессией. Данный аспект подчеркивает целесообразность интеграции общих и профессиональных компетенций, формируемых у студентов в процессе изучения математики, что делает будущих выпускников более конкурентоспособными на рынке труда.

Знания и навыки, полученные при изучении предмета с внедрением динамической математики в образовательный процесс, напрямую применимы в различных областях, таких как инженерия, физика, экономика, машиностроительное черчение и т.д., что демонстрирует междисциплинарные связи. В то же время использование динамических инструментов помогает студентам решать сложные математические задачи. Таким образом, развиваются способности анализировать проблемы, выявлять закономерности и причинно-следственные связи, делать выводы. Также у студентов улучшается абстрактное мышление в процессе математического моделирования различных процессов и явлений. Студенты учатся определять корректность построения таких моделей для принятия решений, а данные навыки просто необходимы для многих технических специальностей. Помимо прочего, современные профессии от будущих специалистов требуют умения обрабатывать большие объемы данных, и динамическая математика как раз помогает развивать у обучающихся навыки работы с числовыми массивами и оптимизировать решения.

Многие задачи в динамической математике можно решать в процессе групповой работы, используя возможности сетевых ресурсов. Это учит студентов коллективной работе, эффективно взаимодействовать, распределять обязанности и координировать действия.

Следовательно, применение таких инструментов, как динамическая математика, в образовательном процессе играет немаловажную, а главное положительную роль в формировании профессиональных компетенций у студентов, которые необходимы для успешной карьеры в различных сферах.

### **Библиографический список**

1. Михалищева М.А., Турукина С.В. Использование электронных учебных пособий в учреждениях профессионального образования // Проблемы и перспективы развития образования: материалы IV Междунар. науч. конф. (г. Пермь, июль 2013 г.). Пермь: Меркурий, 2013. С. 127–129.



2. Никитина А.Л. Формирование профессиональной компетентности студентов в среднем профессиональном образовании посредством построения и анализа математических моделей прикладных задач профессиональной деятельности // Наука и педагогика – Библиотека авторефератов и диссертаций по педагогике. URL: <http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-02/dissertaciya-formirovanie-professionalnoy-kompetentnosti-studentov-v-srednem-professionalnom-obrazovanii-posredstvom-postroeniya-i-ana>
3. Яшина М.Л., Локтина Р.В. Применение компьютерных программных средств в преподавании математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2012. № 7 (Июль). Отдельные вопросы в сфере образования. С. 66–70.

# К ВОПРОСУ О ПОБУЖДЕНИИ КУРСАНТОВ ВОЕННОГО АВИАЦИОННОГО ВУЗА К УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

## ON THE QUESTION OF ENCOURAGING CADETS OF THE MILITARY AVIATION UNIVERSITY TO DEEP STUDY OF MATHEMATICS

В.А. Турчин, Д.Г. Дейкун,  
И.А. Жучков

V.A. Turchin, D.G. Deykun,  
I.A. Zhuchkov

*Математика, мотивация обучающихся, практико-ориентированные задачи, теория вероятностей, математическое моделирование.*

В статье рассматривается способ повышения мотивации обучающихся к изучению математики посредством решения практико-ориентированных задач. Для формирования устойчивой внутренней мотивации обучающихся к занятиям математикой во внеурочное время предлагается на практических занятиях по математике решать задачи профессиональной направленности, демонстрировать возможности свободного прикладного программного обеспечения LibreOffice Calc по математическому моделированию. Приведены примеры практико-ориентированных задач по математике.

*Mathematics, motivation of students, practice-oriented tasks, probability theory, mathematical modeling.*

The article discusses a method for increasing students' motivation to study mathematics by solving practice-oriented problems. In order to form a stable internal motivation for students to study mathematics outside of class time, it is proposed to solve professionally oriented problems during practical mathematics classes, and to demonstrate the capabilities of the free application software LibreOffice Calc for mathematical modeling. Examples of practice-oriented problems in mathematics are given.

**М**атематика – одна из самых сложных дисциплин для понимания, при этом она является базисом для многих других дисциплин профессионального цикла, изучаемых курсантами летного вуза. Практика показывает, что многие курсанты, начинающие изучать высшую математику в вузе, полагают, что «умножать и делить» они умеют и этого им хватит для решения задач профессиональной направленности при изучении дисциплин профессионального цикла и военно-специальных дисциплин, поэтому не видят острой необходимости в формировании системы глубоких математических знаний и навыков в области высшей математики [1].

Существуют разные подходы к организации образовательного процесса, нацеленного на повышение мотивации и познавательной активности обучающихся, как правило, это сочетание традиционных и современных методов, направленных на формирование как внешней, так и внутренней мотивации у обучающихся [2]. При этом внешняя мотивация, как правило, улучшает количественные показатели, а внутренняя качество обучения.

Если рассматривать изучение математики как процесс создания базиса для дальнейшего освоения дисциплин профессионального цикла, то прежде всего необходимо «выдать» качество обучения, а, следовательно, у обучающихся должна быть сформирована высокая внутренняя мотивация к углубленному изучению математики. Одним из способов повышения внутренней мотивации к изучению учебной дисциплины является понимание обучаемым ее практической ценности для дальнейшего обучения и профессиональной деятельности.

Решение практико-ориентированных задач позволяет повысить внутреннюю мотивацию курсантов военного авиационного вуза. Приведем примеры математических задач профессиональной направленности, демонстрирующих приведенные выше положения.

*Задача 1. (Теория вероятностей).* С аэродрома В, где базируются дежурные силы, состоящие из 6 самолетов Су-27 и 4 Миг-29, для выполнения задания вылетел один самолет. После выполнения задачи из-за сильного тумана он смог приземлиться только на аэродроме С.

На этом аэродроме дежурят 4 самолета Миг-29 и 4 самолета Су-27.

На следующий день для перехвата самолета противника с аэродрома С взлетел самолет из дежурной смены и, выполнив задание, он приземлился на аэродроме D, где дежурят 4 самолета Су-27 и 6 самолетов Миг-29.

Найти вероятность того, что поднятый по тревоге с аэродрома D истребитель будет Су-27.

*Решение:* Воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Определим события А и гипотезы  $H_i$ , А – с аэродрома D взлетел Су-27:

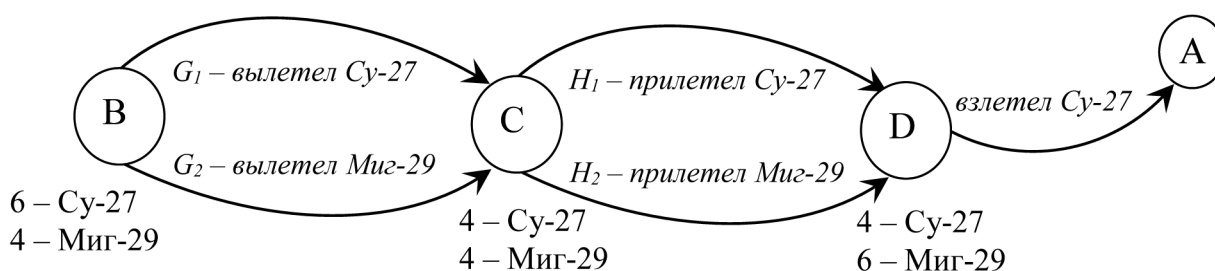


Рис. 1. Событие А и гипотезы  $H_i$

$H_1$  – на аэродроме D – 5 самолетов Су-27, т.к. накануне к имеющимся 4 самолетам Су-27 прилетел еще один.

$H_2$  – на аэродром D – 4 самолета Су-27, т.к. прилетевший накануне самолет был МиГ-29.

$$P(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2)$$

В свою очередь, вероятности гипотез  $H_1$  и  $H_2$ , вычислим по формуле полной вероятности, где  $p(G_1)$  и  $p(G_2)$  вероятности прилета на аэродром С самолетов Су-27 и МиГ-29 (рис. 1).

Тогда  $p(H_1)$  и  $p(H_2)$  можно вычислить по формулам:

$$P(H_1) = p(G_1) \cdot p(H_1/G_1) + p(G_2) \cdot p(H_1/G_2)$$

$$P(H_2) = p(G_1) \cdot p(H_2/G_1) + p(G_2) \cdot p(H_2/G_2)$$

$$\text{где } P(A/H_1) = \frac{5}{11}; P(A/H_2) = \frac{4}{11};$$

$$P(G_1) = \frac{6}{10}; P(H_1/G_1) = \frac{5}{9}; P(H_2/G_1) = \frac{4}{9};$$

$$P(G_2) = \frac{4}{10}; P(H_1/G_2) = \frac{4}{9}; P(H_2/G_2) = \frac{5}{9};$$

$$\text{Тогда } P(H_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45};$$

$$P(H_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45};$$

Проверим:  $\sum_{i=1}^2 P(H_i) = 1$  Тогда вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{23}{45} \cdot \frac{5}{11} + \frac{22}{45} \cdot \frac{4}{11} = \frac{115 + 88}{45 \cdot 11} = \frac{203}{495} \approx 0,41$$

*Ответ:* Вероятность того, что с аэродрома D взлетит Су-27, равна 0,41.

Общеизвестно, что цифровизация общественной жизни находит отклик и в образовании. О положительных сторонах цифровизации образовательного процесса, позволяющей получить новое качество образования, подробно рассмотрено в работе Н.В. Третьяковой [3]. Эффективность использования сетевых технологий в профессиональной подготовке военных летчиков нами также не раз была продемонстрирована, например, в работах [4; 5], а при организации и выполнении военно-научной работы курсантами в работе [6]. Однако цифровизация социума несет и ряд изъянов для образования. Обучающиеся при выполнении домашних заданий по математике нередко используют онлайн-калькуляторы, например, MathDF (<https://mathdf.com>), Semestr (<https://math.semestr.ru>) или Calc (<https://www.calc.ru>). И если в школе при изучении математики над обучающимися довлеет необходимость сдать успешно ЕГЭ, так как это потребуется в дальнейшем при поступлении в вуз, что мотивирует. То, поступив в вуз и осознав, что изучение математики заканчивается на 1 курсе, ряд обучающихся начинает полагать, что глубокие знания по математике им не нужны, так как для выполнения расчетов при изучении профильных предметов на старших курсах хватит и онлайн-калькуляторов.

Поэтому, по нашему мнению, важно при обучении математике не только учить обучающихся решать задачи профессиональной направленности, но и показать,

как эти задачи могут быть решены с помощью прикладного программного обеспечения. Обучающимся демонстрируется возможность создания цифрового калькулятора для решения практико-ориентированной задачи. Понимание того, что для его создания необходимы знания математических законов, теорем и формул, а также навыки их применения, мотивирует обучающихся к изучению математики.

Для иллюстрации вышесказанного приведем пример решения транспортной задачи линейного программирования средствами LibreOffice Calc.

*Задача 2. (Линейное программирование).* При строительстве четырех фортификационных сооружений (оборонительных линий) используются противотанковые надолбы (пирамиды), изготавливаемые на трех заводах железобетонных изделий (завод ЖБИ). Ежедневно каждый из заводов ЖБИ может изготовить 70, 100 и 30 условных единиц пирамид (предложение завода ЖБИ). Потребности в пирамидах на каждой из строящихся оборонительных линий ежедневно составляют 45, 60, 40 и 55 условных единиц (спрос инженерных войск). Тарифы перевозок одной условной единицы пирамиды с каждого из заводов ЖБИ к каждому из строящихся фортификационных сооружений задаются матрицей транспортных расходов  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок пирамид к строящимся фортификационным сооружениям, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

*Решение:* В приложении LibreOffice Calc Лист1 переименовать в лист – Фортификация (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	<b>Фортификационные сооружения</b>								
2									
3		<b>Матрица транспортных расходов</b>						<i>Предложение завода ЖБИ</i>	
4		5	6	4	4		70		
5		1	2	3	5		100		
6		7	8	16	2		30		
7									
8	<i>Спрос инженерных войск</i>	45	60	40	55				
9									
10		<b>Матрица перевозок</b>						<i>Фактически реализовано</i>	
11		<i>Фортификация 1</i>	<i>Фортификация 2</i>	<i>Фортификация 3</i>	<i>Фортификация 4</i>				
12	<i>Завод ЖБИ 1</i>								
13	<i>Завод ЖБИ 2</i>								
14	<i>Завод ЖБИ 3</i>								
15									
16	<i>Фактически получено</i>								
17									
18	<i>Транспортные расходы по фортификациям</i>						<b>Расходы</b>		
19						<i>Итого</i>			
20									
21									

Рис. 2. Таблицы для ввода исходных данных и формирования математической модели

На листе Фортификация создать по образцу таблицу «Матрица транспортных расходов» для ввода исходных данных транспортной задачи и таблицу «Матрица перевозок» для формирования математической модели.

При построении математической модели в ячейки матрицы перевозок ввести фиксированные значения – 0,01. Для строки «Фактически получено» выполнить автосуммирование по столбцам матрицы, для столбца «Фактически реализовано» выполнить автосуммирование по строкам. Для итоговой строки вычислить по каждому столбцу сумму произведений ячеек с исходными данными и ячеек математической модели. В ячейку «Расходы» выполнить автосуммирование по итоговой строке (рис. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Фортификационные сооружения</b>							
2								
3		<b>Матрица транспортных расходов</b>						Предложение завода ЖБИ
4		5	6	4	4		70	
5		1	2	3	5		100	
6		7	8	16	2		30	
7								
8	Спрос инженерных войск	45	60	40	55			
9								
10		<b>Матрица перевозок</b>						Фактически реализовано
11		Фортификация 1	Фортификация 2	Фортификация 3	Фортификация 4			
12	Завод ЖБИ 1	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
13	Завод ЖБИ 2	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
14	Завод ЖБИ 3	0,01	0,01	0,01	0,01		0,04	
15								
16	Фактически получено	0,03	0,03	0,03	0,03			
17								
18	Транспортные расходы по фортификациям	0,13	0,16	0,23	0,11	Итого	Расходы 0,63	
19								
20								
21								

Рис. 3. Таблица с целевыми данными

Далее с помощью инструментария «Решатель» задать все ограничивающие условия, как на рис. 4.

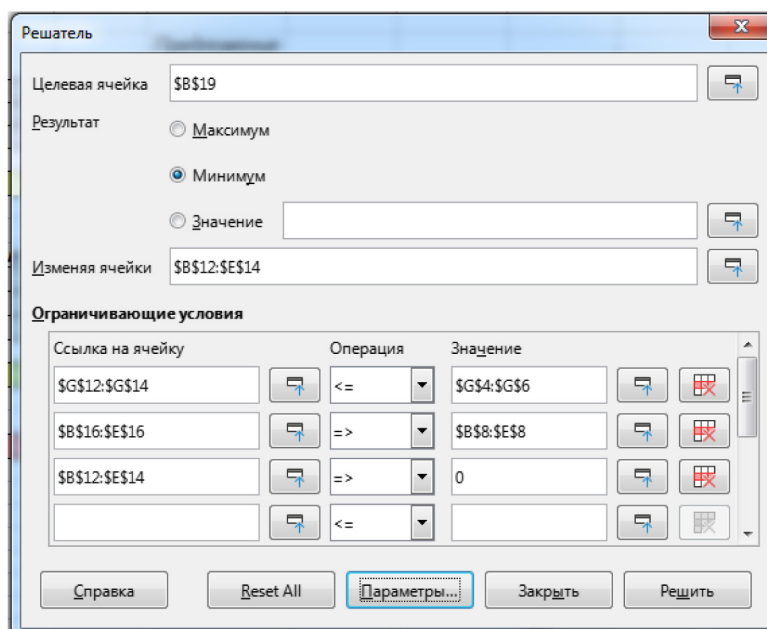


Рис. 4. Решатель – задание ограничивающих условий

В Параметрах из списка «Механизм решателя» выбрать значение – «LibreOffice линейный решатель», в Настройках установить значение – «Ограничить глубину ветвей и границ».



После выполнения расчета и сохранения результата в таблице отразится оптимальный план перевозок пирамид к строящимся фортификационным сооружениям с учетом того, что общая стоимость перевозок будет минимальной (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Фортификационные сооружения</b>						
2							
3	<b>Матрица транспортных расходов</b>						<i>Предложение завода ЖБИ</i>
4		5	6	4	4		70
5		1	2	3	5		100
6		7	8	16	2		30
7							
8	<i>Спрос инженерных войск</i>	45	60	40	55		
9							
10	<b>Матрица перевозок</b>						<i>Фактически реализовано</i>
11		<i>Фортификация 1</i>	<i>Фортификация 2</i>	<i>Фортификация 3</i>	<i>Фортификация 4</i>		
12	<i>Завод ЖБИ 1</i>	0,00	30,00	40,00	0,00		70
13	<i>Завод ЖБИ 2</i>	45,00	0,00	0,00	55,00		100
14	<i>Завод ЖБИ 3</i>	0,00	30,00	0,00	0,00		30
15							
16	<i>Фактически получено</i>	45	60	40	55		
17							
18	<i>Транспортные расходы по фортификациям</i>						<b>Расходы</b>
19		45,00	420,00	160,00	275,00	<i>Итого</i>	900
20							

Рис. 5. Таблица с итоговыми данными

После демонстрации решения транспортной задачи средствами LibreOffice Calc обучающимся рекомендуется решить ее симплекс-методом и сравнить результаты.

Изучение математики курсантами военного авиационного вуза способствует формированию у них математических знаний, умений и навыков, требуемых для успешного освоения дисциплин профессионального цикла и военно-специальных дисциплин. Для активизации познавательной деятельности и побуждения к углубленному изучению математики у обучающихся должна быть как внешняя, так и внутренняя мотивация.

Решение практико-ориентированных задач при изучении математики позволяет обучающимся не только повысить внутреннюю мотивацию, но и лучше понять свою профессию, сформировать логическое мышление и получить навыки алгоритмизации, что способствует успешному обучению и профессиональному росту в дальнейшем.

## Библиографический список

1. Голякова В.А. Подготовка курсантов военного вуза к решению компетентностно-ориентированных профессиональных задач: специальность 13.00.08 «Теория и методика профессионального образования»: дис. ... канд. пед. наук / Голякова Валерия Александровна. Челябинск, 2019. 238 с.
2. Кучеренко И.В., Пашкевич М.Г. Активизация учебной деятельности посредством прикладных опорных задач // Совершенствование методики подготовки обучающихся по математическим дисциплинам, развития научных знаний в области математических наук, разработки и внедрения в образовательный процесс вуза образовательных технологий: материалы научно-методического семинара в рамках всеармейского этапа Международной олимпиады курсантов

- образовательных организаций ВО по математике, Санкт-Петербург, Петергоф, 25 апреля 2024 года. Санкт-Петербург, Петергоф: ВИ (ЖВиВС), 2024. С. 91–96.
3. Третьякова Н.В. Роль информационно-образовательной среды в достижении нового качества образования // Информационные ресурсы России. 2019. № 5 (171). С. 20–24.
  4. Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Дейкун Г.И. Влияние информационных технологий на профессиональную подготовку специалистов // XIII Международная научно-практическая конференция молодых ученых, посвященная 62-й годовщине полета Ю.А. Гагарина в космос: сборник научных статей конференции, Краснодар, 19–20 апреля 2023 года. Краснодар: Издательский Дом – Юг, 2023. С. 91–96.
  5. Дейкун Д.Г., Турчин В.А., Дейкун Г.И. К вопросу повышения качества обучения информатике в военном вузе // Развитие высшего образования: теория и практика: материалы II Всерос. научно-практической конференции, Омск, 17 февраля 2023 года. Омск: Филиал ВА МТО имени А.В. Хрулева МО РФ в г. Омске, 2023. С. 132–136.
  6. Турчин В.А., Дейкун Д.Г., Курбонов Р.С. К вопросу о привлечении курсантов военного авиационного вуза к научно-исследовательской и изобретательской работе при изучении информатики // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы: материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции, Воронеж, 29 марта 2023 года. Воронеж: ВГПУ, 2023. С. 386–392.

# СОЗДАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПЛАКАТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕСУРСОВ «1С:УРОК» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ 9-х КЛАССОВ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

## CREATION OF INTERACTIVE POSTERS USING RESOURCES «1С:LESSON» TO PREPARATE 9TH GRADE STUDENTS FOR THE OGE IN MATHEMATICS

Д.С. Уродова, О.Н. Троицкая

D.S. Urodova, O.N. Troitskaya

*Основной государственный экзамен, математика, подготовка, интерактивные плакаты, 1С:Урок, систематизация.*

В статье обоснована необходимость применения интерактивных плакатов для подготовки учащихся 9-х классов к ОГЭ по математике. Приведены примеры использования ресурсов «1С:Урок» при создании интерактивных плакатов, описан процесс разработки интерактивного плаката «Модуль и области его применения» на основе цифровых материалов «1С:Урок».

*Main state exam, mathematics, preparation, interactive posters, 1С:Lesson, systematization.*

The article substantiates the need to use interactive posters to prepare 9th grade students for the Main state exam in mathematics. Examples of using «1С:Lesson» resources when creating interactive posters are given, describes the process of developing an interactive poster «Module and its applications» based on digital materials «1С:Lesson».

**О**сновной государственный экзамен (ОГЭ) по математике является обязательным для всех выпускников 9-х классов. Несмотря на то, что подготовка к нему начинается заранее, многие девятиклассники сталкиваются с серьезными проблемами при систематизации своих математических знаний и умений решать задания различных типов. П.О. Кислякова в [1] отмечает, что сложности у школьников вызывают задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии. Выпускники 9-х классов не могут определить вид прогрессии по сюжету задачи, метод ее решения, испытывают затруднения при выполнении вычислительных операций. Ирина Чудневцева выделяет класс заданий, связанных с применением формул сокращенного умножения. С одной стороны, у школьников есть справочные материалы, а с другой – они не видят способов их использования [2]. О.В. Берсенева и И.С. Бекешева подчеркивают, что геометрические задачи на определение площадей фигур являются для многих учащихся трудными [3]. Проведенное в течение последних двух лет тестирование девятиклассников (всего 467 человек) города Архангельска позволяет сделать вывод о том, что задания, связанные с понятием «модуль числа», вызывают затруднения у 86 % учащихся 9-х классов.

С целью оптимизации и повышения качества подготовки к ОГЭ по математике педагоги внедряют новые методические решения, ориентированные прежде всего на применение цифровых образовательных ресурсов (Н.Н. Андросова [4], Е.В. Замятина [5], Е.А. Ходзицкая [6]). Мы предлагаем включить интерактивный плакат в систему средств подготовки к ОГЭ по математике, так как за счет использования взаимосвязанных элементов изображения появляется возможность вовлечь обучающихся не только в процесс систематизации знаний, но и формирования соответствующих умений и навыков. Это связано прежде всего с тем, что интерактивный плакат реализует возможность самостоятельного управления информацией.

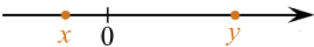
Вопросами определения дидактических возможностей интерактивных плакатов в образовательном процессе занимались многие авторы. Так, например, А.В. Татаркина в [7] подчеркивает *повышение интереса у учащихся* к изучению истории за счет использования на уроках интерактивных плакатов. Е.С. Дьяченко, О.Е. Кадеева и В.Н. Сырицына в [8] предлагают *активизировать познавательную деятельность* школьников на уроках информатики путем включения в систему средств обучения интерактивных плакатов. К.Ю. Брыков, С.И. Брыкова и А.М. Псарев в [9] описывают особенности *формирования новых знаний* при изучении биологии благодаря систематическому использованию в учебной работе педагога интерактивных плакатов.

Независимо от того, с какой целью и при изучении какой дисциплины будет использован интерактивный плакат, разработчики выделяют шесть основных этапов его создания. *Первый этап* – определение цели интерактивного плаката, *второй этап* – выделение содержания, подлежащего изучению или проверке. Оно регламентируется требованиями нормативных документов, например, ФГОС, Примерной программой по предмету, законодательными актами и т.п. *Третьим этапом* является определение образовательного наполнения интерактивного плаката. Здесь особое внимание необходимо уделить предполагаемому уровню подготовки обучающихся, содержанию их субъектного опыта. На *четвертом этапе* происходит выбор цифровых инструментов для создания плаката. Сегодня существуют различные сервисы, в частности, Genially (ссылка <https://genial.ly>), ThingLink (ссылка <https://www.thinglink.com>), УДОБА (ссылка <https://udoba.org>). Кроме вышеперечисленных сервисов, педагог может воспользоваться при создании интерактивного плаката Microsoft PowerPoint. Организация меток осуществляется путем гиперссылок на слайды презентации, сохранение результата происходит за счет выбора в выпадающем списке «Тип файла»: «Демонстрация PowerPoint (\*.ppsx)». На *пятом этапе* происходит непосредственное создание интерактивного плаката, и, наконец, на последнем (*шестом*) *этапе* – тестирование интерактивного плаката. Именно на этом этапе происходит определение ошибок (как технических, так и содержательных), оценка качества интерактивного плаката, определение возможности его дальнейшей модификации. К данному процессу можно привлечь коллег.

Особенностью создания интерактивных плакатов, направленных на подготовку учащихся 9-х классов к ОГЭ по математике, является возможность применения интерактивных материалов библиотеки «1С:Урок». Прежде всего речь идет о видеофрагментах, раскрывающих ключевые положения теоретического материала и содержащих интерактивные задания с подсказками и возможностью проверки ответа. Далее это динамические модели, интерактивные тесты и тренажеры, разработанные на базе среды «Математический конструктор».

Рассмотрим интерактивный плакат «Модуль и области его применения». Его цель состоит в систематизации знаний учащихся о понятии «модуль числа», свойствах модуля, умений выполнять преобразования выражений с применением модуля, решать уравнения с модулем и строить графики функций, запись которых содержит модуль независимой переменной. Известно, что к числу проверяемых требований к предметным результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования относится «умение оперировать понятиями: натуральное число, ..., целое число, модуль числа, ..., умение выполнять действия с числами, сравнивать и упорядочивать числа» [10]. Соответственно, в контрольно-измерительных материалах ОГЭ по математике модуль встречается в заданиях на выбор верного или неверного утверждения (рисунок 1), определение значения выражения (рисунок 2), а также построения графиков функций.

На координатной прямой отмечены числа  $x$  и  $y$ . Какое из следующих утверждений об этих числах верно?



В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $x < y$  и  $|x| < |y|$
- 2)  $x > y$  и  $|x| > |y|$
- 3)  $x < y$  и  $|x| > |y|$
- 4)  $x > y$  и  $|x| < |y|$

Рис. 1. Задание на выбор верного утверждения

Если задания первых двух типов, примеры которых представлены на рисунках 1 и 2, относятся к заданиям части 1 ОГЭ по математике, то третий тип относится ко второй части, то есть к заданиям с развернутым ответом.

Найдите значение выражения  $\sqrt{(4\sqrt{2} - 7)^2 + 4\sqrt{2}}$ .

Рис. 2. Задание на определение значения выражения

На рисунке 3 представлены примеры заданий высокого уровня сложности, решение которых требует от учащихся не только знаний свойств модуля числа, но и сформированности умений применять эти знания в нестандартных ситуациях.



Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$





и определите, при каких значениях  $c$  прямая  $y = c$  будет иметь с графиком единственную общую точку.

Постройте график функции  $y = |x - 1| - |x + 1|$  и найдите все значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Рис. 3. Задания на построение графиков функции

Для создания интерактивного плаката «Модуль и области его применения» был выбран сервис Genially. На фоновом изображении ставим метки четырех типов (таблица).

### Метки интерактивного плаката и их назначение

Вид метки	Назначение метки	Пример
	Ссылка на видеофрагмент	Уравнение с модулем: решение по определению. Ссылка на ресурс: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektcii_po_matematike_algebra/5_moduli/5_1_prosteyschie_zadachi_s_modulyami/198689.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/lektcii_po_matematike_algebra/5_moduli/5_1_prosteyschie_zadachi_s_modulyami/198689.phd</a>
	Теоретическая информация	Модуль числа, геометрическая интерпретация модуля. Ссылка на ресурс: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Matematika_6/polozhit_i_otcateln_chilsa/200048.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/Elektron_resursy_FGOS_2022_5-11_kl/Matematika_6/polozhit_i_otcateln_chilsa/200048.phd</a>
	Интерактивный тренажер	График модуля. Ссылка на ресурс: <a href="https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy/laboratornye_raboty/179836.phd">https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy/laboratornye_raboty/179836.phd</a>
	Задания для самостоятельного выполнения	Тестовые задания, составленные на основе банка ФИПИ [10]

Созданный интерактивный плакат «Модуль и области его применения», представленный на рисунке 4, позволяет девятиклассникам подготовиться к решению заданий КИМ ОГЭ по математике, связанных с понятием «модуль числа».

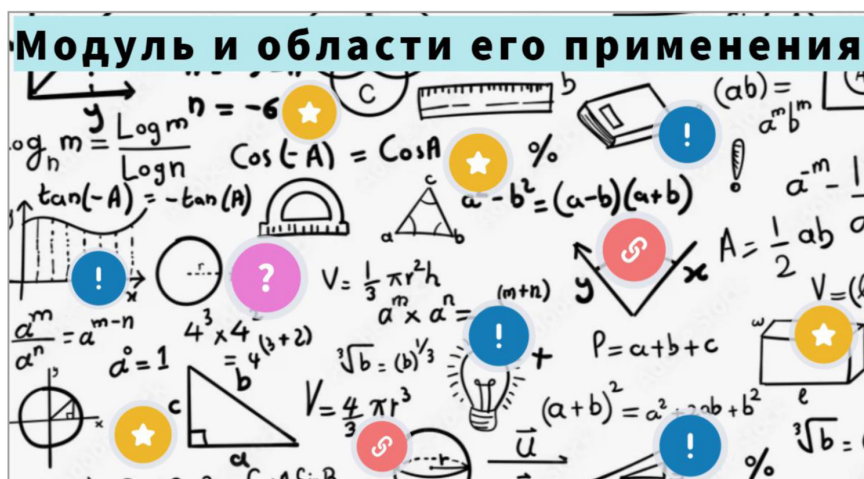


Рис. 4. Интерактивный плакат «Модуль и области его применения»



Благодаря цифровым материалам библиотеки «1С:Урок» сегодня можно создавать интерактивные плакаты, направленные на подготовку учащихся 9-х классов к решению заданий ОГЭ по математике. Именно интерактивные плакаты обеспечивают систематизацию знаний девятиклассников и умений решать математические задания различных типов.

### Библиографический список

1. Кислякова П.О. Проблемы систематизации и обобщения материала по теме «Прогрессии» при подготовке школьников к ОГЭ (по результатам тестирования учащихся 9 и 10 классов) // Студенческий научный форум: материалы XVI Международной студенческой научной конференции. URL: <https://scienceforum.ru/2024/article/2018035836>
2. Чудневцева И. Основные типы задания 8 в ОГЭ-2022 по математике – актуально для 9-классников. URL: <https://dzen.ru/a/YXhKZquScxxInmzF>
3. Берсенева О.В., Бекешева И.С. Ожидания и последствия: анализ типичных ошибок выпускников 9-го класса при выполнении заданий основного государственного экзамена по математике и пути их предупреждения // Вестник ХГУ им. Н.Ф. Катанова. 2022. № 2 (40). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ozhidaniya-i-posledstviya-analiz-tipichnyh-oshibok-vypusknikov-9-go-klassa-pri-vypolnenii-zadaniy-osnovnogo-gosudarstvennogo>
4. Андросова Н.Н. Использование информационных технологий как средство повышения подготовки учащихся гимназии к ОГЭ и ЕГЭ по математике // Интеграция наук. 2017. № 6 (10). С. 148–150. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29962977>
5. Замятина Е.В. Использование игровой технологии при подготовке учащихся к ОГЭ по математике // Психология образования: традиции и инновации. материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / сост. и ред. С.В. Истомина. 2019. С. 137–143.
6. Ходзицкая Е.А. Как готовить школьников к ОГЭ по математике? // Проблемы педагогики. 2018. № 6 (38). С. 42–44.
7. Татаркина А.В. Интерактивный плакат как средство обучения на уроках истории // Ratio et Natura. 2022. № 1 (5). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49819791>
8. Дьяченко Е.С., Кадеева О.Е., Сырицына В.Н. Интерактивный плакат как средство обучения на уроках информатики // Тенденции развития науки и образования. 2022. № 81-4. С. 46–48. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48645259>
9. Брыков К.Ю., Брыкова С.И., Псарев А.М. Опыт использования возможностей платформы «Genially» на уроках биологии // Интеграция науки и практики в современном мире: материалы III Международной научно-практической конференции / под общ. Ред. Е.А. Назарова. Казань, 2022. С. 80–84. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49203981>
10. ДемOVERсии, спецификации, кодификаторы. Основной государственный экзамен по математике. URL: <https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2>

# ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ СРЕДСТВАМИ СРЕДЫ GeoGebra

## GRAPHICAL MODELING OF THE SOLUTION OF OPERATIONS RESEARCH PROBLEMS USING GeoGebra ENVIRONMENT TOOLS

В.С. Федотова

V.S. Fedotova

*Графическое моделирование, исследование операций, GeoGebra, математическая задача, математическая модель.*

Рассматривается использование программного обеспечения GeoGebra в контексте решения задач исследования операций. Актуальность исследования обоснована недостаточным вниманием к применению GeoGebra для оптимизационных задач, несмотря на ее значительный потенциал. Целью работы является изучение возможностей GeoGebra как средства графического моделирования. Методология включает анализ функционала программы и ее инструментов для визуализации математических задач. Основные результаты показывают, что GeoGebra улучшает понимание математических концепций, повышает интерес студентов и способствует более глубокому освоению материала, что подтверждается положительными отзывами обучающихся о ее использовании в учебном процессе.

*Graphical modeling, operations research, GeoGebra, mathematical problem, mathematical model.*

The use of GeoGebra software in the context of solving problems of operations research is considered. The relevance of the study is justified by insufficient attention to the application of GeoGebra for optimization problems, despite its significant potential. The aim of the work is to study the capabilities of GeoGebra as a graphical modeling tool. The methodology includes the analysis of the program functionality and its tools for visualization of mathematical problems. The main results show that GeoGebra improves the understanding of mathematical concepts, increases student interest, and promotes deeper mastery of the material, which is confirmed by positive feedback from students about its use in the learning process.

### Введение

GeoGebra представляет собой бесплатный многоязычный пакет математического программного обеспечения для решения задач алгебры, геометрии и других математических дисциплин: математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, исследования операций и методов оптимизации. Среда позволяет работать как на компьютере, так и непосредственно в браузере и синхронно визуализировать процесс решения математической задачи. Л.Ю. Уразаевой, Н.В. Манюковой [9] достоинствами и преимуществами данной программы отмечается интерактивность среды, визуализация зависимостей и графическая поддержка решения.

Существует множество публикаций, исследующих возможности GeoGebra в решении математических задач, включая задачи с параметрами [2], нестандартные уравнения [7], визуализацию стереометрии [3], симметрию [10],

динамические чертежи на уроках геометрии [6] и математический анализ [12]. Потенциал этой среды определяется ее способностью обеспечивать преемственность в математическом образовании, предлагая решения задач как школьного, так и вузовского уровня через демонстрацию, визуализацию, интерактивность и моделирование [8]. GeoGebra поддерживает традиционное обучение и подготовку к ОГЭ и ЕГЭ по математике [4], а также исследуется ее влияние на успеваемость обучающихся [14; 17].

При анализе существующих способов использования GeoGebra мы не обнаружили внимания авторов к ее применению для решения оптимизационных задач, несмотря на очевидные возможности этой математической среды. Это создает противоречие между значительным потенциалом GeoGebra и отсутствием методических рекомендаций по ее использованию в данной области. В связи с этим возникает необходимость углубленного исследования применения GeoGebra в контексте решения оптимизационных задач, что позволит расширить горизонты использования данного программного обеспечения в образовательных организациях и обогатит педагогический опыт новыми методическими решениями.

Цель исследования состоит в изучении возможностей использования среды GeoGebra как средства графического моделирования решения задач исследования операций.

В работе последовательно решаются следующие задачи исследования: 1) характеристика функционала среды GeoGebra в решении математических задач; 2) выявление инструментов GeoGebra для графического моделирования решения задач исследования операций при его реализации на компьютере; 3) представление вариантов использования среды GeoGebra в решении конкретных задач исследования операций.

### **Методология исследования**

В основанном на технологическом подходе исследовании по интеграции ИКТ в учебный процесс анализируется опыт преподавания дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации» у студентов педагогического образования в Ленинградском государственном университете имени А.С. Пушкина, где проводился эксперимент с контрольной (12 человек) и экспериментальной (13 человек) группами, изучавшими курс без и с использованием графической визуализации в GeoGebra; результаты итогового тестирования показали лучшие достижения у экспериментальной группы.

### **Основное содержание**

Функционал GeoGebra в решении математических задач положительно оценивается педагогами, такими как М.Г. Калигарис, М.Е. Шиво, М.Р. Ромити [13], которые подчеркивают возможность создания интерактивных приложений для иллюстрации математических объектов, включая анимации для объяснения понятий математического анализа. Р.А. Саха, А.Ф.М. Аюб, Р.А. Тармизи [17] отмечают, что ИКТ на уроках математики способствуют вычислениям и анализу данных, улучшая понимание математических концепций. GeoGebra позволяет динамически описывать объекты и проводить вычисления, что способствует формированию визуального и аналитического мышления учащихся. К.Н. Нобре и соавторы [16] доказали,

что визуализация сложных концепций с помощью GeoGebra повышает мотивацию к изучению математического анализа и улучшает усвоение материала. А. Аркави [11] добавляет, что визуализация является ключевым компонентом концептуального обучения. В исследовании [15] рассматриваются когнитивные процессы и роль GeoGebra как познавательного инструмента, а также предлагается методика его использования для изучения и моделирования математических понятий. GeoGebra обеспечивает графическое моделирование, позволяющее визуализировать математические объекты и процессы, а также анализировать задачи через графики и диаграммы. Интерактивные инструменты программы позволяют визуализировать ограничения и целевую функцию в задаче линейного программирования (рис. 1), экспериментировать с параметрами задачи для глубокого понимания процесса оптимизации. Особенно следует отметить возможность использования инструмента «Ползунок», который позволяет делать динамическими графики, указывать нижнее и верхнее значение параметра, создавать анимации. Так можно сделать динамичным передвижение относительно области допустимых решений перемещение линии уровня – графика целевой функции. Инструмент «Пересечение» позволяет точно определять точку пересечения образующих решение графиков в области допустимых решений. Область допустимых решений автоматически выделяется единой областью при сочетании условий ограничений через конъюнкцию. Это важная особенность при изучении сложных моделей для более осознанного и глубокого понимания математических концепций.

В курсе «Исследование операций и методы оптимизации» студенты изучают задачи оптимизации с использованием GeoGebra для графического моделирования, включая линейное, целочисленное, нелинейное и динамическое программирование, на основе сочетания лабораторных работ с ручными построениями и вычислениями в электронных таблицах. На рисунке 1 представлено графическое моделирование движения графика целевой функции (линии уровня) относительно области допустимых решений, которая представлена выпуклым многоугольником. С помощью динамического чертежа (инструмент «Ползунок» обеспечивает перенесение параллельным переносом множества линий уровня до покидания области). Инструмент «Пересечение» определяет точку пересечения области, в которой и определяется максимальное значение целевой функции.

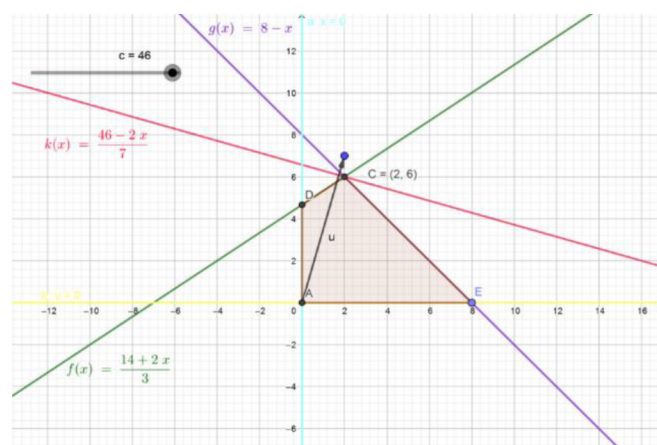


Рис. 1. Графическая реализация задачи линейного программирования в GeoGebra



Еще более востребованной может стать использование GeoGebra в решении графическим методом задач нелинейного программирования, когда либо целевая функция, либо система ограничений представлена нелинейной зависимостью и для лучшего восприятия этапов решения задачи целесообразно видеть наглядно область допустимых решений и гиперповерхность. Можно сделать интеграцию графической визуализации и решения задачи с помощью электронных таблиц (настройка Поиск решения в MS Excel или Решатель в LibreOffice Calc). В GeoGebra выполняется решение графическим методом и дается его геометрическая интерпретация, а в электронной таблице находится решение симплексным методом (рис. 2). Сравнение полученных результатов позволяет сделать выводы о правильности вычислений. При этом в электронной таблице условия задачи представлены математической моделью, а в GeoGebra все основные элементы графического моделирования видны в поле алгебраического ввода. Как видно, непосредственное решение задачи в электронной таблице не дает того глубокого восприятия задачи и ее понимания, какое позволяет сделать GeoGebra.

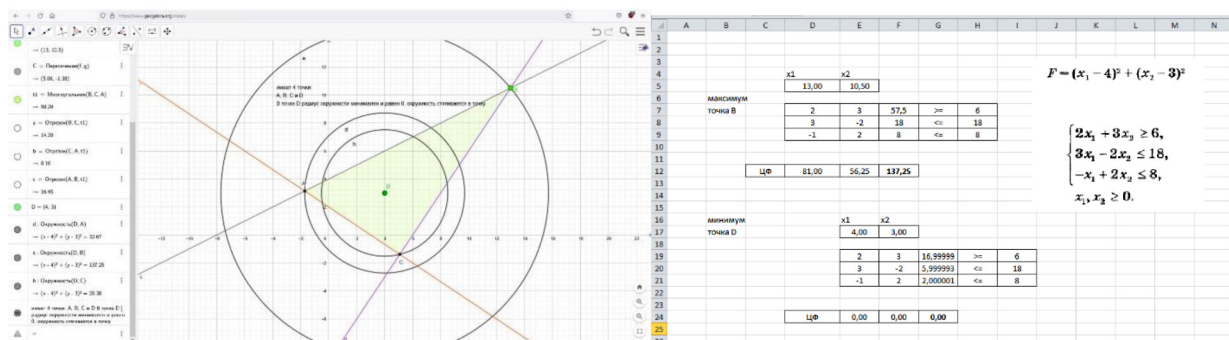


Рис. 2. Графическое решение задачи в GeoGebra и электронной таблице

Не менее эффектно выглядит визуализация решения задач целочисленного программирования, где с помощью инструмента «Точка» определены целочисленные значения, моделирующие границу области допустимых решений, а с помощью инструмента «Многоугольник» данная суженная область визуализирована. Удобно визуализировать средствами GeoGebra сетевые графики в задачах динамического программирования.

В ходе анализа образовательных результатов и оценки усвоения материала по решению оптимизационных задач контрольной и экспериментальной группами (с применением GeoGebra), тестирование и опрос показали, что GeoGebra улучшает визуализацию, повышает интерес и понимание материала, способствует индивидуальной и командной работе, а также создает интерактивную среду обучения.

### Выводы.

Таким образом, можно сделать вывод, что GeoGebra предоставляет уникальную возможность связать динамическое визуальное и аналитическое представление решения оптимизационных задач для лучшего понимания содержания курса «Исследование операций и методы оптимизации». Этот вывод согласуется с результатами других исследований [5, 8], в которых GeoGebra использовалась при обучении математическим дисциплинам.

## Библиографический список

1. Бойко Л.В., Лобанова Е.М. Использование интерактивной среды программы GeoGebra при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике // Символ науки. 2021. № 2. С. 69–72.
2. Войтенко Т.Ю., Седых А.А. Особенности применения системы GeoGebra при изучении темы «задачи с параметрами» // Проблемы современного педагогического образования. 2018. № 60-4. С. 89–94.
3. Елисова А.П., Фирер А.В. Решение позиционных стереометрических задач в среде GeoGebra // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review, 2020. № 5 (3). С. 94–102.
4. Епифанцева В.А. Особенности использования системы GeoGebra в процессе обучения // Общество: социология, психология, педагогика. 2020. № 12. С. 254–257.
5. Казаков Н.А., Пантелеймонова А.В. Моделирование. Применение интерактивных геометрических сред как методическое средство повышения качества подготовки к ЕГЭ по математике // Московский педагогический журнал. 2018. № 3. С. 117–128.
6. Перепелкина О.К. Теория и методика обучения математике на историческом компоненте с применением динамической интерактивной среды GeoGebra в 7 кадетском классе (на примере уроков геометрии в курсе математики) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2019. № 2 (102). С. 187–201.
7. Садовничий Ю.В., Туркменов Р.М. Методические особенности использования интерактивной геометрической среды GeoGebra при изучении темы «Решение нестандартных уравнений» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2015. № 2. С. 78–85.
8. Сафонов В.И., Бакаева О.А., Тагаева Е.А. Потенциальные возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования «школа–вуз» // Перспективы науки и образования. 2019. № 1 (37). С. 431–444. doi: 10.32744/pse.2019.1.32
9. Уразаева Л.Ю., Манюкова Н.В. Использование GeoGebra при обучении компьютерному моделированию // Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 140–152. DOI: 10.24147/2222-8772.2022.4.140-152.
10. Akkaya A., Tatar E., Kağızmanlı T.B. Using dynamic software in teaching of the symmetry in analytic geometry: The case of GeoGebra. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2011. No.15. P. 2540–2544.
11. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics // Educational studies in mathematics. 2003. Vol. 52, No. 3. С. 215–241.
12. Baye M.G., Ayele M.A., Wondimuneh T.E. Implementing GeoGebra integrated with multi-teaching approaches guided by the APOS theory to enhance students' conceptual understanding of limit in Ethiopian Universities // Heliyon, 2021. 7 (5).



13. Caligaris M.G., Schivo, M.E., Romiti, M.R. Calculus & GeoGebra, an interesting partnership // *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2015. No. 174. P. 1183–1188.
14. Juandi D., Kusumah Y.S., Tamur M., Perbowo K.S., Wijaya T.T. A meta-analysis of Geogebra software decade of assisted mathematics learning: what to learn and where to go? // *Heliyon*. 2021. No. 7(5).
15. Karadag Z., & McDougall D. GeoGebra as a cognitive tool: Where cognitive theories and technology meet// In *Model-Centered Learning*, 2011. P. 169–181.
16. Nobre C.N., Meireles M.R.G., Vieira Jr N., De Resende M. N., Da Costa L.E., Da Rocha R.C. The Use of Geogebra Software as a Calculus Teaching and Learning Tool // *Informatics in Education*. 2016. No. 15 (2). P. 253–267.
17. Saha R.A., Ayub A.F.M., Tarmizi R.A. The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning // *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. 2010. No. 8. P. 686–693.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПРИЕМОВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ОТКРЫТОГО ТИПА

## USING INTERACTIVE TECHNIQUES IN GEOMETRY LESSONS ON THE EXAMPLE OF OPEN-TYPE PROBLEMS

И.В. Хотенко

I.V. Khotenko

*Познавательный интерес, задачи открытого типа, интерактивный прием, динамическая программа «Живая геометрия», исследовательская деятельность, эксперимент.*

Рассмотрена важность использования задач открытого типа на уроках геометрии для стимулирования познавательного интереса учащихся в условиях общедоступности готовых решений. Приведена классификация таких задач относительно действующего учебника по геометрии (на примере заданий для седьмого класса). Показана целесообразность использования интерактивных приемов при решении задач открытого типа в целях повышения уровня геометрической подготовки школьников.

*Cognitive interest, open-type tasks, interactive technique, dynamic program “Living geometry”, research activity, experiment.*

The importance of using open-type problems in geometry lessons to stimulate the cognitive interest of students in conditions of accessibility of ready-made solutions is considered. The classification of such tasks is given relative to the current textbook on geometry (using the example of assignments for the seventh grade). The expediency of using interactive techniques in solving open-type problems in order to increase the level of geometric training of schoolchildren is shown.

Особенностью современности является наличие гигантских объемов информации и ее общедоступность. Школьники, применяя гаджеты, могут найти готовое решение, быстро и без мыслительных усилий, особенно, если задание сформулировано четко и требует однозначного ответа. Поэтому для стимулирования познавательного интереса учащихся необходимо использовать не «закрытые» задания, в которых конкретно указано, что дано и что нужно найти, а лучше обратиться к так называемым «открытым» задачам.

Л.Э. Орлова выделяет следующие особенности открытых задач:

а) формулировка открытой задачи, как правило, краткая, ни индуцируется ни метод, ни решение;

б) решение не сводится к непосредственному применению последних (по времени) результатов изучения теории;

в) вопрос (требование) задачи обладает довольно большой степенью неопределенности;

г) задача находится в достаточно знакомой учащимся концептуальной области и поэтому может стимулировать их активную мыслительную деятельность;

д) вопрос (требование) открытой задачи вызывает потребность в исследовательской деятельности [2].

Таким образом, можно говорить о том, что открытые задачи обладают оптимальными возможностями для качественного применения интерактивных приемов на уроках геометрии.

Для начала классифицируем задачи открытого типа на примере заданий для седьмого класса, обратимся к учебнику по геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна для 7–9 классов [1]. Тем самым создадим условия, обеспечивающие возможность внедрения различных модификаций использования систем динамической математики.

Отметим, что в рассмотренном учебнике ко многим параграфам приведены практические задания, вовлекающие учащихся в экспериментальную деятельность. Например, проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи ([1], № 3, с. 8). Задачи на экспериментирование можно встретить и в разделе «Вопросы и задачи»: Через точку, не лежащую на прямой  $p$ , проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекает прямую  $p$ ? Рассмотрите все возможные случаи ([1], № 202, с. 65).

К каждой главе учебника предложены дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Среди этих задач следует особо отметить:

1. Задачи, условие которых содержит неопределенность. Например: Определите геометрическое место всех точек плоскости, равноудаленных от двух пересекающихся прямых? ([1], № 331, с. 95)

2. Задачи, сформулированные по принципу: «сначала догадайся, потом – докажи». Например: Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую  $a$  и параллельна прямой  $b$ ? Ответ обоснуйте ([1], № 223, с. 68).

3. Задачи, имеющие несколько решений. Например: угол  $hk$  равен  $120^\circ$ , а угол  $hm$  равен  $150^\circ$ . Найти угол  $km$ . Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж ([1], № 85, с. 28).

4. Задачи на определение зависимости между некоторыми величинами. Например: Пусть  $a$  – число, выражающее длину отрезка  $AB$  при единице измерения  $CD$ , а  $b$  – число, выражающее длину отрезка  $CD$  при единице измерения  $AB$ . Как связаны между собой числа  $a$  и  $b$ ? ([1], № 413, с. 115).

5. Задачи на определение вида геометрической фигуры. Например: В каждом из следующих случаев определите вид треугольника: а) сумма любых двух углов больше  $90^\circ$ ; б) каждый угол меньше суммы двух других углов ([1], № 426, с. 116).

6. Задачи на определение истинности (ложности) некоторого утверждения. Например: Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в 2 раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом? ([1], № 237, с. 71).

Рассмотренная классификация свидетельствует о том, что в данном учебнике имеют место задачи исследовательского характера, которые и позволяют вовлекать в процесс обучения системы динамической математики, поскольку предполагают наличие экспериментальной части. Решим одну из вышеперечисленных задач, используя возможности программы «Живая геометрия».

Задача 1. Угол  $hk$  равен  $120^\circ$ , а угол  $hm$  равен  $150^\circ$ . Найти угол  $km$ . Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

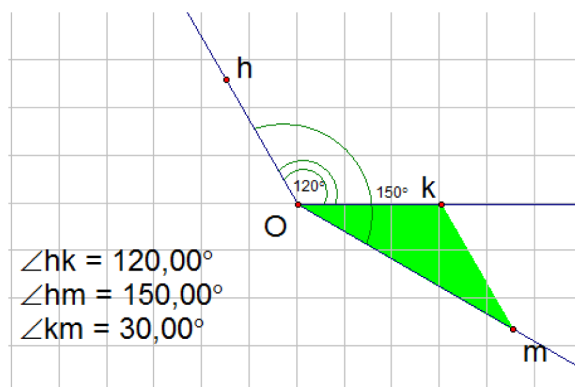


Рис. 1

Школьники чаще всего быстро находят только одно решение, рассматривая ситуацию, когда построения выполняются справа налево для обоих углов (рис. 1) и затрудняются в поиске второго решения. Здесь уместно применение программы «Живая геометрия», так как она «позволяет, не прибегая к программированию, не только строить компьютерные модели фигур, но и манипулировать ими, сохраняя при этом одновременно их целостность и иерархию зависимости друг от друга» [3]. А в связи с тем, что внутренняя область искомого угла окрашена, нахождение еще одного решения не вызывает труда.

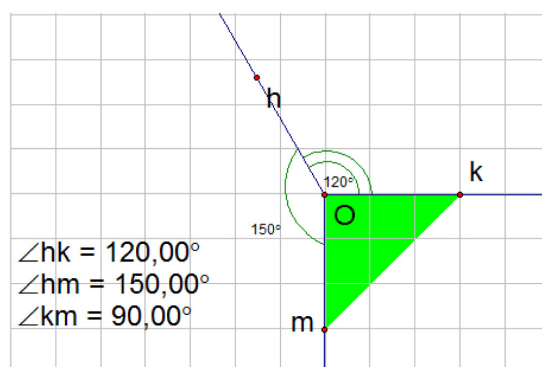


Рис. 2

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для разбора заданий открытого типа целесообразней привлекать интерактивные приемы, поскольку это позволяет учащимся самим исследовать задачу, экспериментировать с чертежом, пробуждая познавательный интерес к предмету.

### Библиографический список

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7–9 класс: учебник. М.: Просвещение, 2023.
2. Давыдов В.В. Российская педагогическая энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 672 с.
3. Майер В.Р., Крум Е.В. Информационные технологии в обучении проектной геометрии будущих учителей математики // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2014. С. 93. URL: <https://sciup.org/144153910> (дата обращения: 12.11.2024).

# ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

## ON AN EXPERIMENTAL STUDY OF LOBACHEVSKIAN GEOMETRY

А.В. Ястребов

A.V. Yastrebov

*Геометрия Лобачевского, модель Кэли–Клейна, система динамической математики, инструмент, экспериментальное изучение.*

Описан набор компьютерных инструментов, созданный автором в системе динамической математики GeoGebra. Предложена методика, с помощью которой школьник или студент может обнаружить многие теоремы геометрии Лобачевского путем построения динамических чертежей на модели Кэли–Клейна.

*Lobachevskian geometry, model by Cayley–Klein, dynamic geometry system, instrument, experimental study.*

A set of computer instruments, created by the author within dynamic geometry system GeoGebra, is described. Some special methods of using these instruments are proposed. The instruments help students to create dynamic drawings within the model by Cayley–Klein for discovering some theorems of Lobachevskian geometry.

**И**звестно, что создание евклидовой геометрии, равно как и ее последующее изучение, неразрывно связано с чертежами. Студенту и школьнику доступны канонические циркуль и линейка, двусторонняя линейка, угольник, шаблон прямого угла, масштабная линейка, транспортир... Панель инструментов системы динамической математики (СДМ) GeoGebra содержит 71 инструмент и предусматривает возможность создания новых инструментов. Такое богатство позволяет «изучателю» проводить разнотипные эксперименты с математическими объектами с целью обнаружения неизвестных ему свойств, проверки возникающих гипотез и т.д.

Парадоксально, но с переходом к геометрии Лобачевского ситуация радикально меняется! Чертежные инструменты исчезают, новые факты возникают как результат чисто умственных, логических действий, а чертежи становятся условными. Достаточно вспомнить каноническое изображение четырехугольника Саккери, на котором две его стороны изображаются в виде отрезков прямой, а две другие стороны – в виде искривленных линий. (Кстати, автор не встречал в учебной литературе никаких указаний на природу этих кривых. «Никому» неизвестно, будут ли эти стороны фрагментами экспонент, или синусоид, или окружностей, или гипербол...)

В этих условиях была предпринята попытка создания системы инструментов для СДМ GeoGebra, которая позволила бы проводить основные построения на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского. Математические свойства этих инструментов обсуждались в работах [1; 2]. В данной статье мы сосредоточимся

на описании той методики их использования, которая была применена автором в процессе руководства научной работой учащихся 9-го класса.

Перечень инструментов является естественным, неизбежным и потому банальным. Прежде всего это инструменты, предназначенные для построения основных объектов геометрии: *Прямая, Луч, Отрезок*. Кроме того, это инструменты, связанные с параллельностью прямых: *Параллельная прямая* и *Луч, параллельный данному*. Четыре следующих инструмента связаны с перпендикулярностью: *Перпендикуляр к прямой, Перпендикуляр к лучу, Перпендикуляр к отрезку, Серединный перпендикуляр*. Два инструмента связаны с идеей срединности: *Середина, Биссектриса*. Наконец, два инструмента связаны с измерениями: *Расстояние, Мера угла*.

Стартовые знания школьника о геометрии Лобачевского сознательно сделаны весьма ограниченными. Во-первых, это краткий очерк истории ее возникновения. Во-вторых, это всего лишь одно, базовое соглашение: точки геометрии Лобачевского – это все точки открытого круга радиуса 1. Остальные объекты школьнику предстоит построить (а свойства объектов выявить) в процессе использования перечисленных инструментов.

Окружность изучаемого круга для краткости будем называть абсолютом.

Предложим серию заданий, каждое из которых будет сопровождаться двумя пассажами: обсуждением и рефлексией. Первый из них посвящен математическому решению, а второй – психологическому воздействию процесса решения на «решателя».

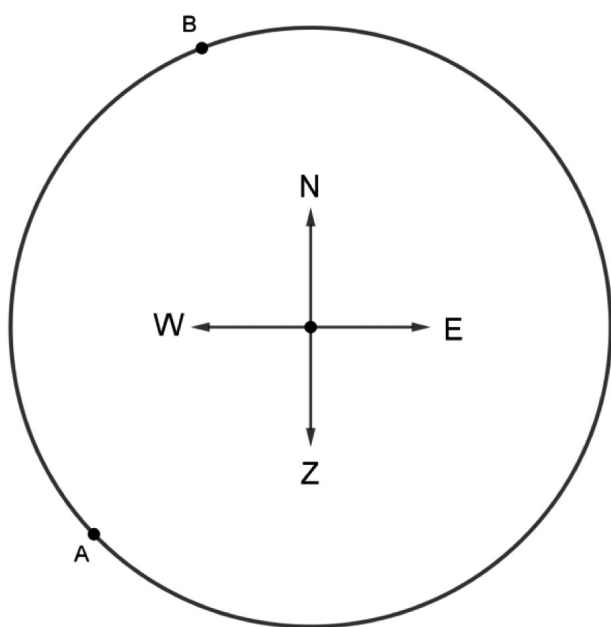


Рис. 1

**Задание 1.** Каков геометрический смысл точки на абсолютe?

**Обсуждение.** Парадоксально, но ответ на вопрос вытекает из правила чтения ... географических карт. Если не оговорено противное, то верхняя граница прямоугольной карты соответствует направлению на север, правая граница – на восток и т.д. (рис. 1). Если наблюдатель в центре абсолюта смотрит на север, то он увидит самую верхнюю точку абсолюта, если смотрит на восток, то увидит самую правую его точку, и т.д. Обратно, если наблюдатель находится в точке *A* и хочет увидеть центр абсолюта, то он должен смотреть на северо-восток,

а если находится в точке *B*, то он должен смотреть на юго-юго-восток (таков нечасто используемый географический термин). Итак, точка на абсолютe – это **направление** в геометрии Лобачевского.

**Рефлексия.** В процессе выполнения данного задания школьник учится теоретизировать. При этом значимость теоретических рассуждений не под-



дается точной оценке в момент их выполнения. Как следствие, от школьника требуется способность откладывать получение удовольствия от осознания истинности полученных им результатов, а эта способность, как следует из психологических исследований, коррелирует с разными типами достижений, в том числе академической успеваемостью, экономическим состоянием и уровнем здоровья.

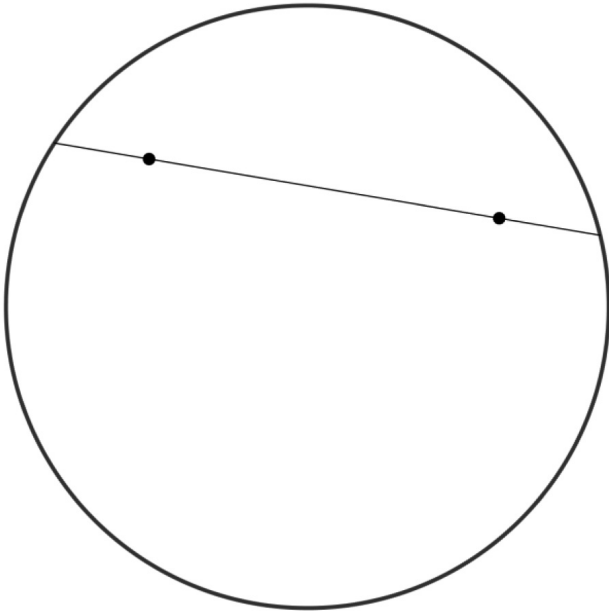


Рис. 2

ному употреблению терминов, которое, как известно, важно как в научной деятельности, так и в социальной жизни.

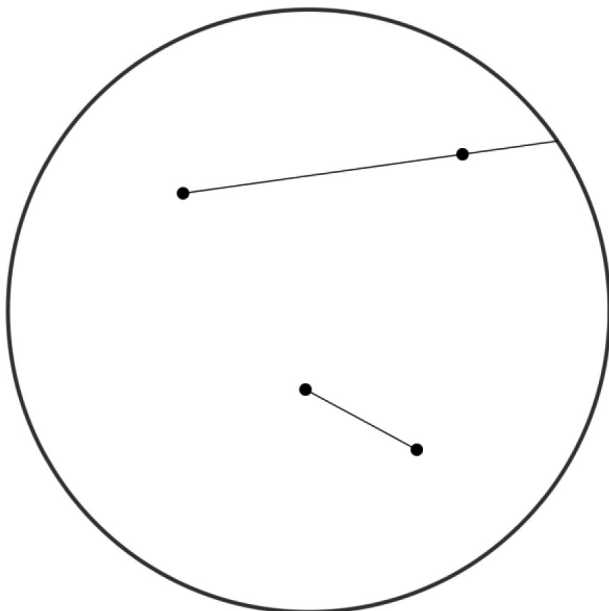


Рис. 3

ство с евклидовой геометрией дает определенную надежду на возможность использования привычной геометрической интуиции. Насколько обоснована эта надежда, покажет будущее.

**Задание 2.** Как выглядит прямая на модели Кэли–Клейна?

**Обсуждение.** Выбрав инструмент *Прямая*, школьник активирует абсолют и ставит две точки внутри круга. В результате получается фигура, изображенная на рис. 2. На первый взгляд, это хорда, и такой ответ дает абсолютное большинство учащихся. Парадоксально, но такой ответ является неточным, потому что хорда – это отрезок, соединяющий две точки на окружности, а в нашем случае точки на окружности не принадлежат геометрии Лобачевского. Итак, прямая выглядит как *открытая хорда*.

**Рефлексия.** Школьник учится точ-

**Задание 3.** Как выглядят луч и отрезок на модели Кэли–Клейна?

**Обсуждение.** Выбрав инструмент *Луч*, школьник активирует абсолют и ставит две точки внутри круга, а затем проделывает те же самые действия с инструментом *Отрезок*. В результате получают фигуры, изображенные на рис. 3. Оказывается, что эти фигуры имеют в точности тот же смысл, что и геометрии Евклида. Например, отрезок оказывается состоящим из тех точек прямой, которые лежат между двумя точками этой прямой.

**Рефлексия.** Обнаруженное сход-

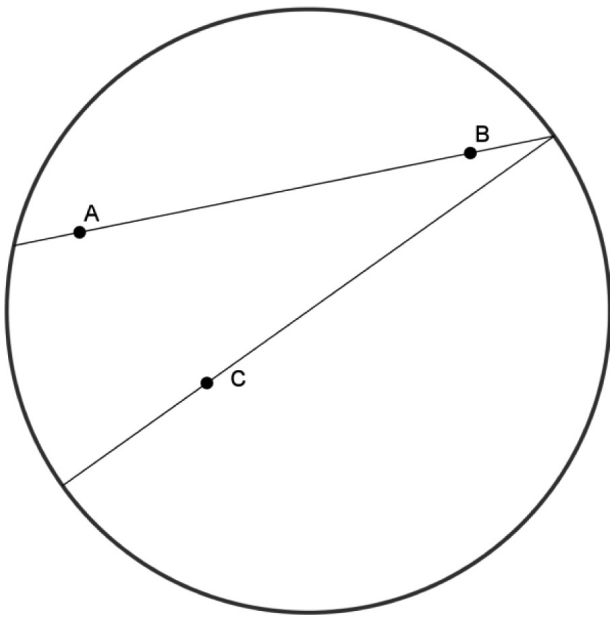


Рис. 4

общих точек и, во-вторых, имеют общее направление. Естественно считать их параллельными.

**Рефлексия.** Школьник обнаруживает эффективность логического анализа, поскольку именно он позволяет снять обнаруженное противоречие. В культурологическом плане школьник учится оценивать целесообразность вводимых терминов. Другими словами, он учится «придумывать» названия, адекватные сути явлений.

Рис. 4 явно асимметричен. Действительно, прямая имеет два «равноправных» направления, а построенная прямая «приближается» только к одному из них. Сделанное наблюдение приводит в следующей задаче.

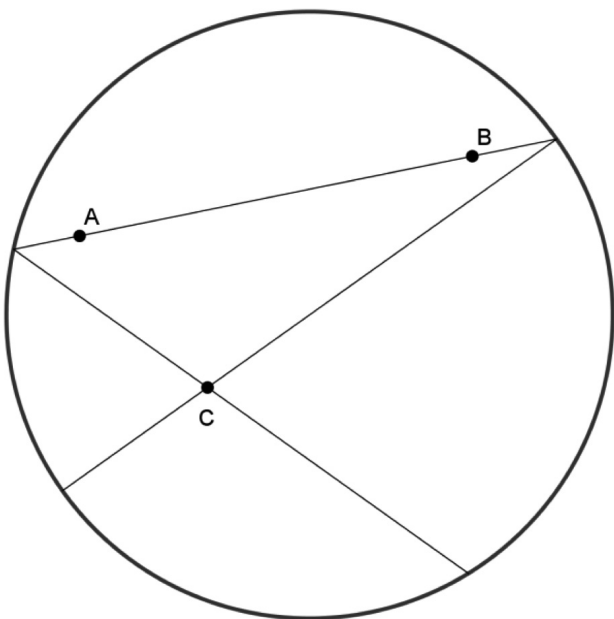


Рис. 5

троем в точке  $C$  делятся на два класса: одни прямые пересекают изначальную прямую  $AB$ , а другие не имеют с ней ни общих точек, ни общих направлений.

**Задание 4.** Как выглядят параллельные прямые на модели Кэли–Клейна?

**Обсуждение.** Сначала с помощью инструмента *Прямая* строим прямую  $AB$  на модели Кэли–Клейна. Затем выбираем инструмент *Параллельная прямая*, активируем абсолют, отмечаем точки  $B$  и  $A$ , а также точку  $C$  вне ее. В результате возникает рис. 4.

Полученный рисунок находится в противоречии с нашей интуицией, сформированной в рамках евклидовой геометрии. К счастью, логический анализ показывает, что никакого противоречия нет. Действительно, две полученные прямые, во-первых, не имеют

**Задание 5.** В чем причина асимметрии предыдущего чертежа? Как ее устранить?

**Обсуждение.** Перечитывая описание построения рис. 4, мы обнаруживаем последовательность точек  $(B, A, C)$ . При этом положение точки  $C$  на третьей позиции определено ее особым статусом, а вот положение точек  $A$  и  $B$  является произвольным. Проведем построения предыдущей задачи применительно к другому порядку точек, а именно  $(A, B, C)$ . В результате мы получим рис. 5. На нем видны два вертикальных угла, сильно отличающихся друг от друга. Действительно, прямые пучка с центром в точке  $C$  делятся на два класса: одни прямые пересекают изначальную прямую  $AB$ , а другие не имеют с ней ни общих точек, ни общих направлений.

**Рефлексия.** В этом задании (всего лишь пятом по счету!) школьник самостоятельно обнаружил два феномена, относящихся к самой сути геометрии Лобачевского: наличие двух прямых, проходящих через одну точку и параллельных третьей прямой; наличие еще одного случая взаимного расположения прямых, который не встречается в евклидовой геометрии.

**Задание 6.** Как назвать третий случай взаимного расположения двух прямых?

**Обсуждение.** С одной стороны, такие прямые естественно назвать параллельными, потому что они не имеют общих точек. С другой стороны, их нельзя назвать параллельными, потому что они не имеют общих направлений. Возможны искусственные грамматические конструкции, например, псевдопараллельные, слабо параллельные, сверхпараллельные и т.п. Ни одна из них не раскрывает сути феномена, поэтому в данный момент ответить на вопрос задачи затруднительно.

**Рефлексия.** Школьник снова сталкивается с феноменом «отложенного удовольствия», потому что в данный момент он не располагает достаточной информацией для введения разумного термина.

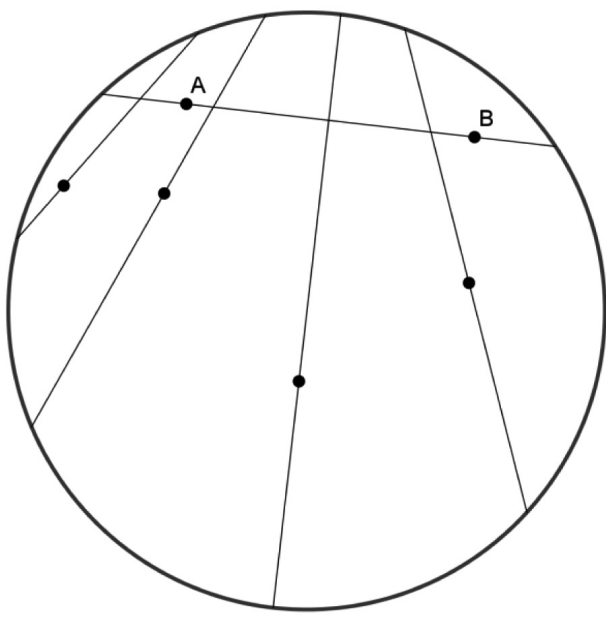


Рис. 6

**Задание 7.** Как выглядят взаимно перпендикулярные прямые на модели Кэли–Клейна?

**Обсуждение.** Как обычно, построим прямую  $AB$ , а также несколько точек внутри круга. Выбрав инструмент **Перпендикулярная прямая**, активируем абсолют, отметим точки  $A$  и  $B$  и какую-либо из ранее построенных точек. Получим фигуру, изображенную на рис. 6.

Бросается в глаза, что «новые перпендикуляры» выглядят по-разному: одни похожи на привычные перпендикуляры, а другие выглядят как наклонные. Попытаемся понять, в чем то общее свойство построенных линий, что объединяет их под общим именем «перпендикуляры». Второе наблюдение помогает в этом, поскольку все построенные прямые «смотрят в одну сторону». Продлив их за пределы абсолюта, школьник обнаруживает, что все они пересекаются в одной точке (рис. 7). Проведя из этой точки касательные к окружности, школьник видит, что они проходят через концы изначальной хорды. Так возникает алгоритм построения перпендикуляров к прямой на модели Кэли–Клейна.

**Рефлексия.** В процессе решения этой достаточно объемной задачи школьник учится наблюдать, экспериментировать, давать геометрическую трактовку результатам эксперимента. Значимый результат!

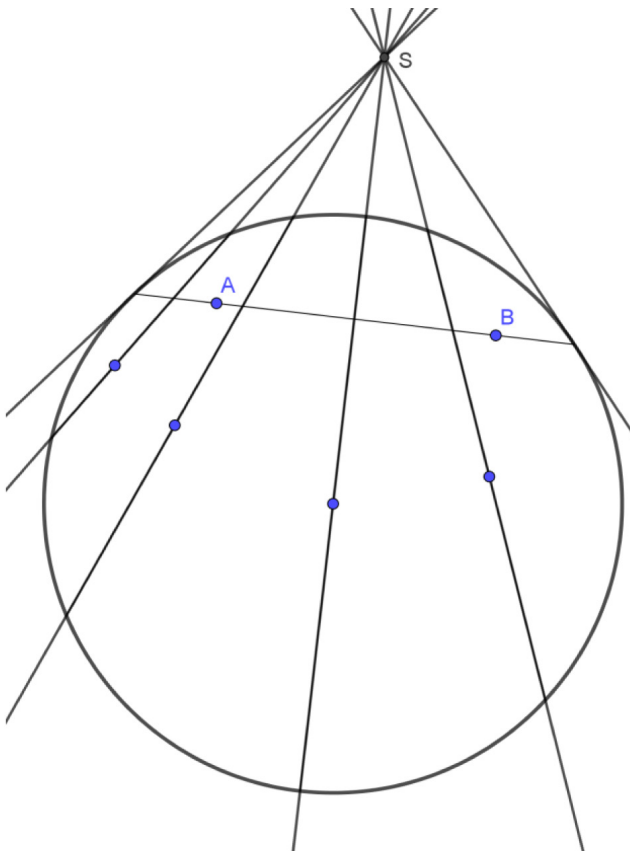


Рис. 7

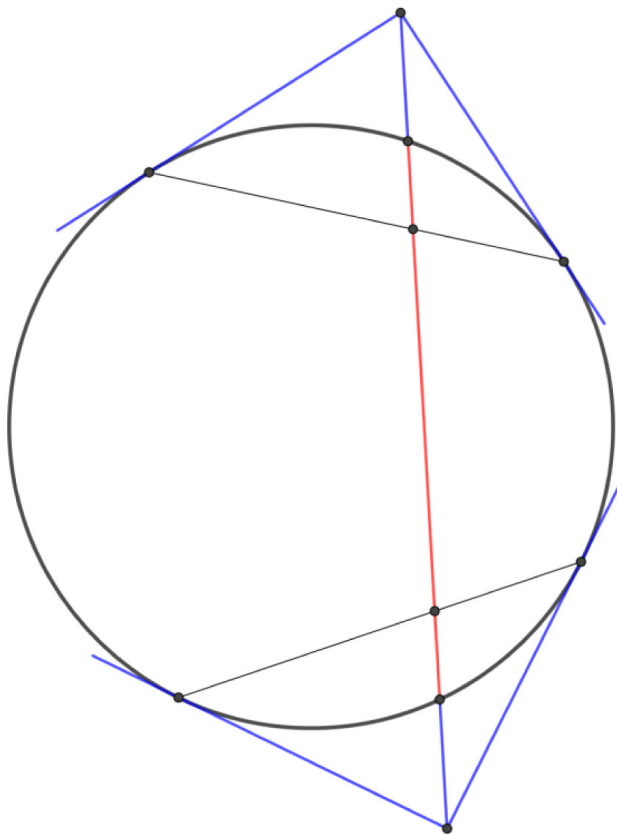


Рис. 8

**Задание 8.** К каждой из двух «псевдопараллельных» прямых проводят все перпендикуляры. Существуют ли общие элементы у этих двух множеств?

**Обсуждение.** Несмотря на расплывчатость формулировки, решение предыдущей задачи позволяет легко найти ответ. Для каждой хорды нужно провести две касательные через ее концы, получив тем самым точку их пересечения, а затем соединить две точки пересечения (рис. 8). Так школьник самостоятельно получает новое для него **Утверждение:** Две «псевдопараллельные» прямые имеют общий перпендикуляр, притом единственный.

**Рефлексия.** Самостоятельное получение субъективно новой теоремы в непривычной геометрии является ценным математическим результатом, который приобретает особую значимость благодаря его влиянию на личность школьника.

**Задание 9.** Сравните длину отрезка общего перпендикуляра к двум «псевдопараллельным» прямым и длину любого другого отрезка, соединяющего две точки этих прямых.

**Обсуждение.** Совсем нетрудно организовать эксперимент, который приведет к **Утверждению** о том, что длина отрезка общего перпендикуляра является наименьшей.

**Рефлексия.** Еще раз школьник получил новую теорему, и это важно. Только теперь возникают достаточные основания для того, чтобы ввести естественное имя для двух «псевдопараллельных» прямых, которое адекватно сути феномена, – **расходящиеся прямые.**

Из всего сказанного можно сделать следующие **выводы.**

1. Предложенные компьютерные инструменты позволяют школьнику самостоятельно построить существенную часть геометрии Лобачевского.

2. Процесс самостоятельного построения геометрии способствует формированию у «строителя» умений математика-исследователя, влияя при этом на самую личность школьника.

### **Библиографический список**

1. Ястребов А.В., Кошелева Л.Ю. Чертежные инструменты для геометрии Лобачевского: модель Кэли–Клейна // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (26–28 сентября 2019 г.). Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ. 2019. С. 314–317.
2. Ястребов А.В. Освоение геометрии Лобачевского посредством компьютерных экспериментов на модели Кэли–Клейна // Геометрия и геометрическое образование. Сборник трудов IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева) 29–30 ноября 2019 года. Тольятти: Издательство ТГУ, 2020. С. 78–83.

**Секция 3**

---

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

---



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GEOGEBRA В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

## THE USE OF GEOGEBRA IN THE RESEARCH ACTIVITIES OF SCHOOLCHILDREN

А.В. Дроздова, М.А. Павлова

A.V. Drozdova, M.V. Pavlova

*Исследовательская деятельность школьников, исследовательские умения, гипотеза, эксперимент, GeoGebra.*

В статье представлены возможности программы GeoGebra для осуществления исследовательской деятельности школьников, приведен пример использования инструментов для решения конкретной планиметрической задачи.

*Research activities of schoolchildren, research skills, hypothesis, experiment, GeoGebra.*

The article presents the possibilities of the Geogebra program for the research activities of schoolchildren, and provides an example of using tools to solve the planimetric problem.

**И**сследовательская деятельность способствует развитию у школьника исследовательских умений и качеств, необходимых ему не только для учебы, но и для дальнейшей профессиональной и социальной жизни.

Особенности исследовательского обучения математике в школе описаны в трудах [2], [3], также в них представлены эффекты и риски использования при этом систем динамической математики.

Для школьников с этой целью предлагается книга «Геометрия на подвижных чертежах» [1], в которой рассматривается, как можно использовать системы динамической математики при решении геометрических задач, основные приемы математического эксперимента и доказательства выдвинутых в результате эксперимента гипотез.

Программа Geogebra позволяет проводить различные типы экспериментов в зависимости от этапа исследования: конструктивный эксперимент (моделирование исследуемого объекта), поисковый (выявление свойств и закономерностей), верифицирующий (выдвижение гипотезы), контрольный (поиск идеи доказательства), модифицирующий (развитие идеи решенной задачи). При этом GeoGebra показывает тесную связь между алгеброй и геометрией. В панели объектов автоматически отображаются в алгебраическом виде все характеристики объектов, изображенные в графическом поле (координаты точек, уравнения прямых и кривых, длины отрезков, градусные меры углов, длины отрезков и площади n-угольников).

Строка ввода позволяет алгебраически вводить уравнения, неравенства, получая их графическое изображение в рабочем поле.

С помощью инструмента «Ползунок» можно изменять значения параметра в заданных пределах.

При исследовании геометрических мест точек (далее – ГМТ) можно использовать инструмент «Коника» или свойство для определенного объекта «Оставить след».

Приведем пример использования возможностей GeoGebra для определения ГМТ в треугольнике для двух случаев:

- 1) сумма расстояний, от которых до сторон минимальна;
- 2) сумма расстояний, от которых до вершин минимальна.

Для построения динамической модели треугольника можно использовать инструмент «Ползунок» (рис. 1). Длины сторон треугольника можно варьировать числовыми ползунками  $a$  и  $b$ , угол между этими сторонами угловым ползунком  $\alpha$ . Используя их, можно задать любую форму треугольника.

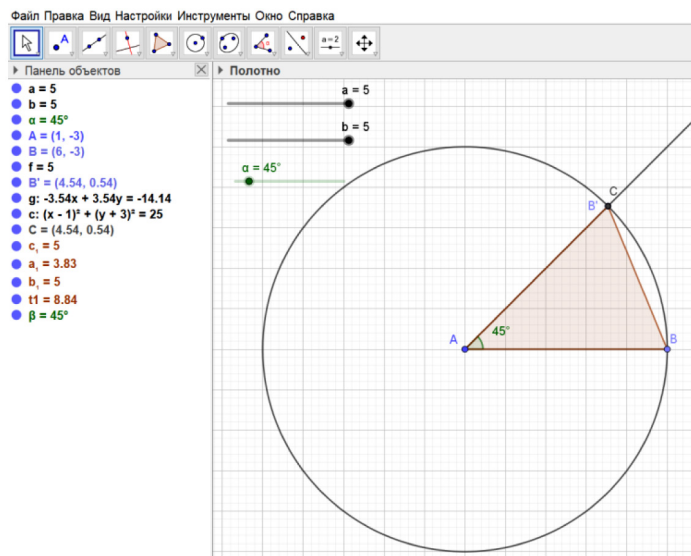


Рис. 1

Представим сначала ход исследования в правильном треугольнике, установив значения с помощью ползунков:  $a = b$ , угол  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 2). Построим из произвольной точки  $D$  внутри треугольника перпендикулярные прямые к его сторонам. Чтобы найти сумму расстояний от произвольной точки до его сторон, используем строку ввода, введем  $DF+DG+DH$ .

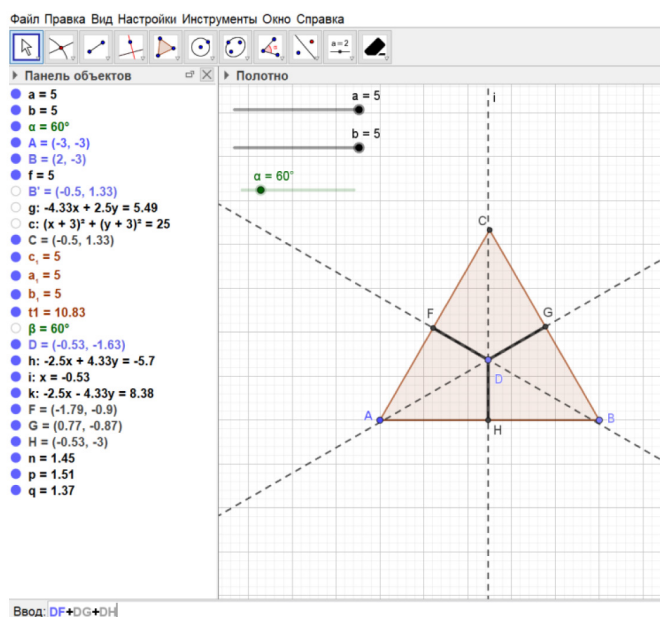


Рис. 2

Значение суммы появится в последней строке панели объектов, и его можно перенести в графическое поле, чтобы при перемещении точки найти минимальное значение суммы (рис. 3).

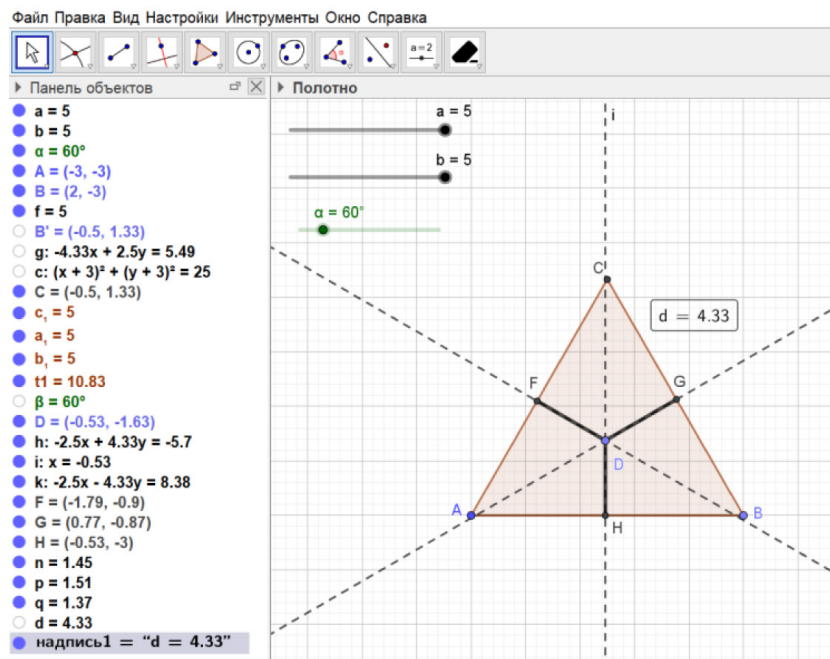


Рис. 3

В результате эксперимента получаем гипотезу: сумма расстояний от любой точки правильного треугольника до его сторон постоянна и равна высоте треугольника.

Пусть сторона треугольника ABC будет  $a$ , высота  $h$ , тогда площадь треугольника ABC равна  $\frac{1}{2}ah$ . В то же время площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ADB, BDC и ADC.

$$\text{Получаем } \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3.$$

$$\text{Вынесем } \frac{1}{2}a \text{ за скобку } \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3).$$

Так как  $a$  не равно нулю, разделим обе части выражения на  $\frac{1}{2}a$ .

$$\text{Получаем } h = h_1 + h_2 + h_3.$$

Из чего следует, что суммарное расстояние до сторон правильного треугольника постоянно и равно его высоте.

Чтобы найти сумму расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин, также используем строку ввода и введем  $AD+CD+BD$  (рис. 4).

В результате эксперимента получаем гипотезу: в правильном треугольнике ГМТ, сумма расстояний от которых до вершин минимальна, является центром правильного треугольника.

Для доказательства этой гипотезы выполним дополнительные построения (рис. 5). Через вершины  $A, B, C$  проведем перпендикулярные прямые к  $AE, BE, CE$ . Через точку  $D$ , отличную от  $E$ , проведем перпендикуляры к  $MK, KN, MN$ .

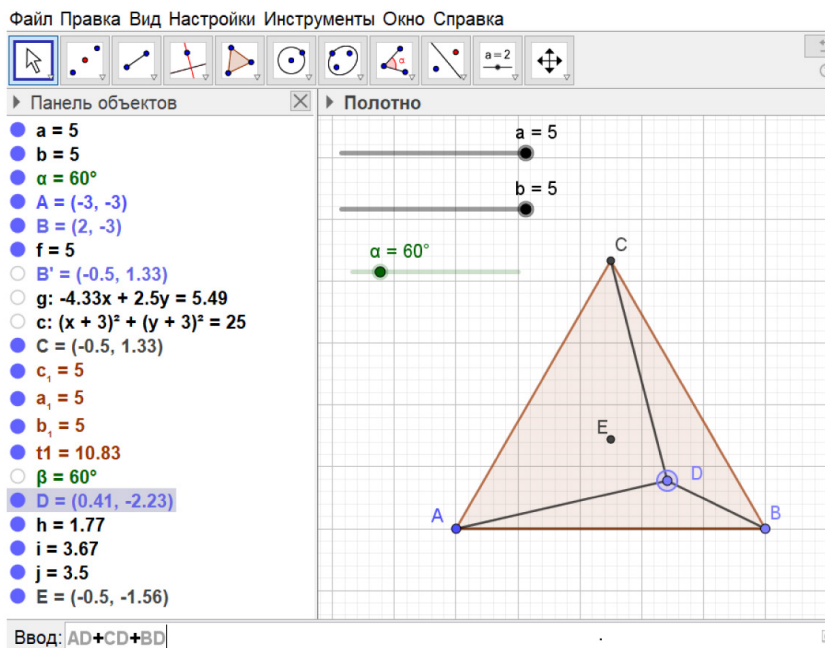


Рис. 4

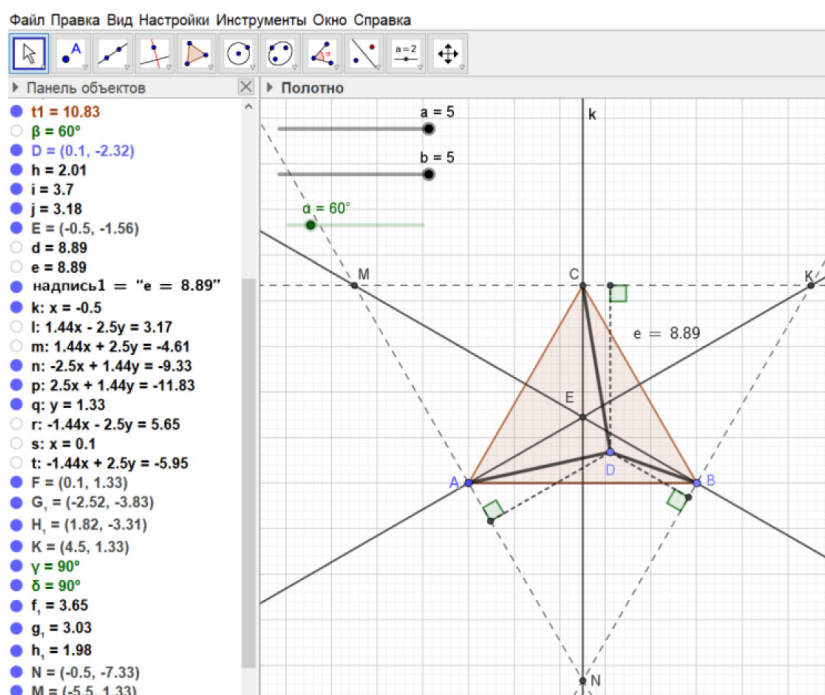


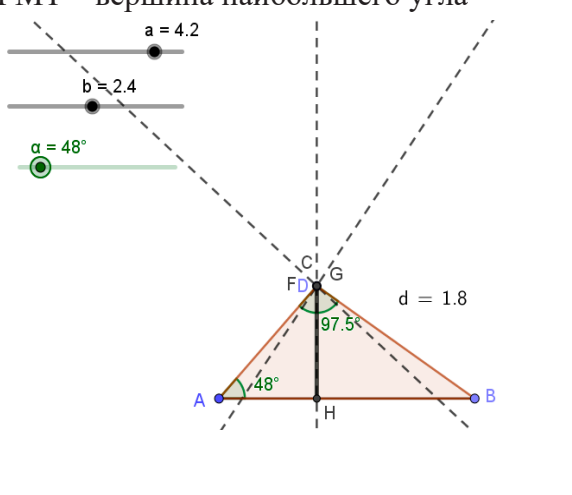
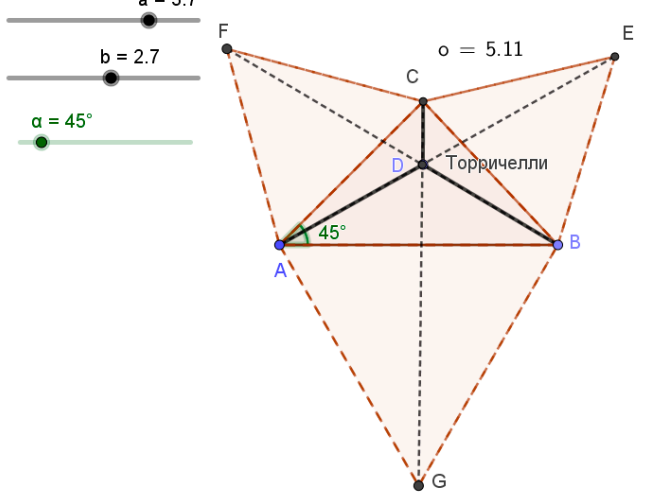
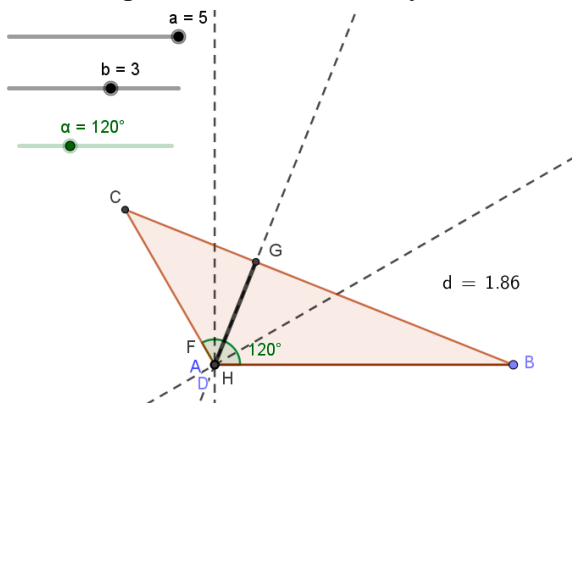
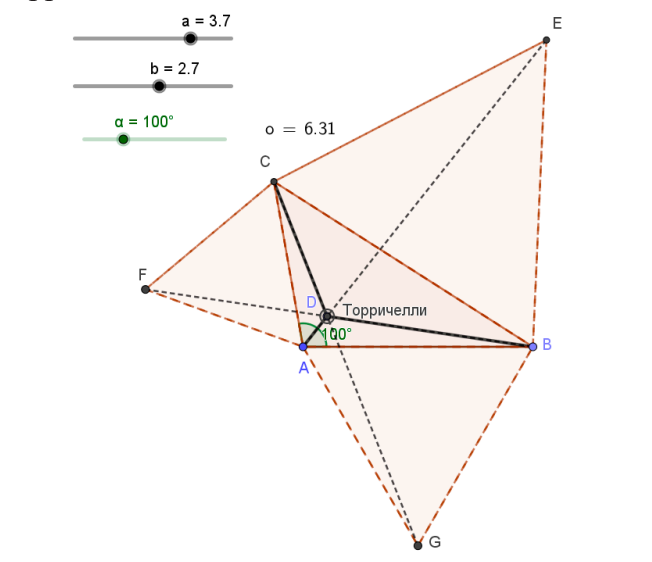
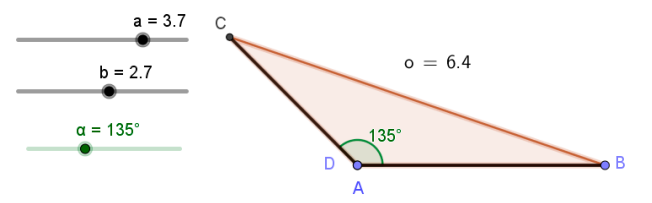
Рис. 5

Сумма расстояний от точки  $D$  до сторон треугольника  $MKN$  постоянна и равна  $AE+BE+CE$ . Следовательно,  $AD+BD+CD \geq AE+BE+CE$ . Равенство выполняется только тогда, когда основания перпендикуляров, опущенных из точки  $D$ , совпадают с точками  $A, B, C$ . Из чего следует, что  $D$  совпадает с  $E$ .

Проводим модифицирующий эксперимент. Приведем его результаты в виде таблицы: определение ГМТ в произвольном треугольнике, сумма расстояний от которых до сторон (таблица) наименьшая.

### Результаты эксперимента для произвольного треугольника

Результаты эксперимента в случае «До сторон»	Результаты эксперимента в случае «До сторон»
1	2
<p>При <math>a = b</math>, угол <math>\alpha &lt; 60^\circ</math> ГМТ – основание равнобедренного треугольника</p>	<p>При <math>a = b</math>, угол <math>\alpha &lt; 60^\circ</math> ГМТ – точка Торричелли</p>
<p>При <math>a = b</math>, угол <math>\alpha = (60^\circ; 180^\circ)</math> ГМТ – вершина равнобедренного треугольника</p>	<p>При <math>a = b</math>, угол <math>\alpha = (60^\circ; 120^\circ)</math> ГМТ – точка Торричелли</p>
	<p>При <math>a = b</math>, угол <math>\alpha = [120^\circ; 180^\circ)</math> ГМТ – вершина угла <math>\alpha</math></p>

1	2
<p>При <math>a \neq b</math>, угол <math>\alpha &lt; 60^\circ</math>                      ГМТ – вершина наибольшего угла</p> 	<p>При <math>a \neq b</math>, угол <math>\alpha &lt; 60^\circ</math> ГМТ – точка Торричелли</p> 
<p>При <math>a \neq b</math>, угол <math>\alpha = (60^\circ; 180^\circ)</math>                      ГМТ – вершина наибольшего угла</p> 	<p>При <math>a \neq b</math>, угол <math>\alpha = (60^\circ; 120^\circ)</math> ГМТ – точка Торричелли</p> 
	<p>При <math>a \neq b</math>, угол <math>\alpha = [120^\circ; 180^\circ)</math> ГМТ – вершина угла <math>\alpha</math></p> 

Найти идеи доказательства полученных гипотез с использованием дополнительных построений и контрольного компьютерного эксперимента становится для учащегося новой задачей исследования, способствует углублению его теоретических знаний и формированию исследовательских умений.



Помимо самого исследования, GeoGebra помогает в представлении его результатов. Для этого есть возможность скрыть/показать объект, что позволяет убрать дополнительные построения, оставив только главные, настроить стиль и цвет геометрических объектов, импортировать динамический чертеж в виде анимации.

Самым сложным для школьников и их наставников является поиск новых идей для исследовательских работ. GeoGebra помогает при решении красивых планиметрических задач, которые можно найти не только в книгах, но и в сообществах любителей математики и профессионалов, например: [4], [5], [6].

### **Библиографический список**

1. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. М.: МЦНМО, 2019. 184 с.
2. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: Академия Естествознания, 2016. 300 с.
3. Ястребов А.В. Исследовательское обучение математике в школе. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2017.
4. Олимпиадная геометрия. URL: <https://vk.com/olympgeom> (дата обращения: 10.11.2024).
5. Интерактивная математика в школе с программой «Математический конструктор» obr.lc.ru/mathkit. URL: [t.me/mathkit\\_group](https://t.me/mathkit_group) (дата обращения: 10.11.2024).
6. Незадача дня. URL: <https://vk.com/problemaday> (дата обращения: 10.11.2024).

# НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

## NEURAL NETWORKS: APPLICATION POSSIBILITIES IN TEACHING MATHEMATICS AT SCHOOL

Н.Г. Дюкина

N.G. Dyukina

*Нейронные сети, школьный курс математики, процесс обучения математике.*

В статье рассмотрены и проанализированы возможности применения нейросетей в процессе обучения математике в 5–6 классах. Приведены примеры использования нейросетей при обучении школьников.

*Neural networks, school mathematics course, the process of learning mathematics.*

The article discusses and analyzes the possibilities of using neural networks in the process of teaching mathematics in grades 5–6. Examples of the use of neural networks in teaching schoolchildren are given.

Современные технологии, включая нейронные сети, имеют значительный потенциал для оптимизации и улучшения образовательного процесса. В данной статье рассмотрим практическое применение нейросетей в образовательном процессе и их влияние на учебный опыт и достижения учащихся.

Нейронная сеть – это математическая модель, которая после обучения способна анализировать данные, обнаруживать закономерности и делать прогнозы или принимать решения. Она состоит из множества взаимосвязанных искусственных нейронов, которые моделируют работу нейронов в головном мозге.

В исследовании нами были использованы нейросети Gamma, ChatGPT, MathGPTPro.

Анализ обзора функционального обеспечения нейросетей и средств массовой информации позволил выявить возможности их применения в процессе обучения школьной математике:

1. Создание персонализированных образовательных программ, которые учитывают индивидуальные потребности и способности каждого учащегося [4]. Может анализировать данные об успехах и сложностях учащихся, предлагать индивидуальные задания и материалы, а также давать рекомендации для максимизации их образовательного опыта.

2. Автоматизированная оценка знаний и навыков учащихся [4]. Это может обеспечить более объективную и непредвзятую оценку, а также сократить время, затрачиваемое учителями на проверку работ и тестов. Автоматическая оценка

с использованием нейросетей также позволяет получать обратную связь учащимся непосредственно после выполнения задания, что способствует более быстрой и эффективной коррекции ошибок.

3. Может быть использован для помощи преподавателям в разработке курсов и материалов. Они могут предложить рекомендации по содержанию, структуре и формату образовательных ресурсов на основе анализа больших объемов данных. Также могут помочь преподавателям в подготовке учебных планов, предлагая оптимальные прогрессии учебных задач и адаптированный материал для разных уровней способностей учеников.

4. Нейросеть может обрабатывать и анализировать большие объемы данных об учебных достижениях учащихся, системах образования и академических трендах [4]. Это позволяет вносить коррективы в программы и учебные планы, а также прогнозировать успешность учащихся.

Таким образом, применение нейросетей в образовательном процессе обучения математике может улучшить качество обучения (поддержка преподавателя, анализ данных) и обеспечить индивидуальный подход к учащимся (индивидуальное обучение, автоматизированная оценка).

Применение цифровых технологий с искусственным интеллектом способствуют улучшению качества обучения, повышению доступности образовательных ресурсов и развитию новых методов обучения. Цифровые помощники с технологиями искусственного интеллекта позволяют создавать персонализированные образовательные программы, улучшать взаимодействие учителей и учащихся, а также повышать уровень мотивации и интереса к обучению [2].

Использование нейронных сетей в образовательных технологиях является сложной задачей. Она требует внимания к ограничениям, рискам, связанными с этикой, техническими аспектами и учетом человеческого фактора. Однако корректное применение нейронных сетей может стать эффективным инструментом для развития мышления обучающихся, в том числе и в процессе обучения математике.

Рассмотрим использование нейронной сети MathGPTPro<sup>1</sup> в процессе обучения математике. MathGPTPro – это нейросеть, которая специализируется на решении математических задач.

Обзор функционала этой нейросети показал, что она способна решить геометрическую задачу, задачу на доказательство, задание на преобразование выражений.

Приведем примеры использования нейросети при решении школьных задач.

Пример 1. Преобразуйте обыкновенные дроби в десятичные и вычислите:

1)  $6/15-0,238$ ; 2)  $237/250+0,052$ ; 3)  $0,35+1\frac{7}{8}$ ; 4)  $9\frac{329}{500}-8,658$  [3].

Пример 2. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам а и b: а)  $a = 6, b = 8$ ; б)  $a = 5, b = 6$ ; в)  $a = 3/7, b = 4/7$ ; г)  $a = 8, b = [1]$ .


---

<sup>1</sup> <https://mathgptpro.com/>

**KU** Преобразуйте обыкновенные дроби в десятичные и вычислите

1)  $\frac{6}{25} - 0,238$ ;    2)  $\frac{237}{250} + 0,052$ ;    3)  $0,35 + 1\frac{7}{8}$ ;    4)  $9\frac{329}{500} - 8,658$ .

☐ Скопировать латекс    ↔ Показать латекс

 1) Преобразуем  $\frac{6}{25}$  в десятичную дробь:  $\frac{6}{25} = 0,24$ . Теперь вычислим  $0,24 - 0,238 = -0,058$ .

2) Преобразуем  $\frac{237}{250}$  в десятичную дробь:  $\frac{237}{250} = 0,948$ . Теперь вычислим  $0,948 + 0,052 = 1$ .

3) Преобразуем  $1\frac{7}{8}$  в десятичную дробь:  $1\frac{7}{8} = 1 + \frac{7}{8} = 1 + 0,875 = 1,875$ . Теперь вычислим  $0,35 + 1,875 = 2,225$ .


4) Преобразуем  $9\frac{329}{500}$  в десятичную дробь:  $9\frac{329}{500} = 9 + \frac{329}{500} = 9 + 0,658 = 9,658$ . Теперь вычислим  $9,658 - 8,658 = 1$ .

Рис. 1. Решение примера 1

**KU** 581 Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам  $a$  и  $b$ :

а)  $a = 6, b = 8$ ;  
 б)  $a = 5, b = 6$ ;  
 в)  $a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}$ ;  
 г)  $a = 8, b = 8\sqrt{3}$ .

☐ Скопировать латекс    ↔ Показать латекс

 Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника по данным катетам  $a$  и  $b$  используем теорему Пифагора:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

а)  $a = 6, b = 8: c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ .

б)  $a = 5, b = 6: c = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ .

в)  $a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}: c = \sqrt{(\frac{3}{7})^2 + (\frac{4}{7})^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$ .

г)  $a = 8, b = 8\sqrt{3}: c = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$ .

Рис. 2. Решение примера 2

Анализ использования этой нейросети позволил сделать некоторые выводы.

Применение нейронной сети MathGPTPro играет немаловажную роль для учителя при обучении математике школьников. Ее возможности позволяют учителю экономить время и усилия при выполнении математических задач. Поскольку MathGPTPro может посчитать и предоставить математические решения очень быстро, то быстрота и эффективность являются положительными моментами в работе учителя. MathGPTPro предлагает поддержку разных математических областей, включая алгебру, геометрию, тригонометрию и т.д. Благодаря этому и учитель может получить помощь и решения по различным математическим задачам. Простой, ненагруженный интерфейс MathGPTPro представляет удобство для использования для решения математических задач.

Применение нейронной сети MathGPTPro играет значимую роль и для обучающегося в процессе изучения математике. При проверке решения у обучающихся развивается логическое мышление, поскольку задачи требуют анализ и синтез информации. Развитие критического мышления у школьников можно наблюдать при оценке правильности решений задач. Минималистический интерфейс не производит дополнительной нагрузки на пользователя, не требует от него большого количества действий или внимания – все это создает комфортную атмосферу для школьника в процессе решения математических задач.

Изучение возможностей использования нейросетей в процессе обучения математике позволило выявить ряд преимуществ и ограничений. Индивидуальный подход, разнообразие предложенных задач, обратная связь о правильности решений положительно сказывается на развитии обучающегося в целом. Однако отсутствие эмоционального интеллекта и неполнота знаний могут оказать негативное влияние на развитие обучающегося, в том числе и его мышления.

Таким образом, при применении нейросетей в процессе обучения математике необходимо сочетать их с традиционными методами обучения, предоставлять учащимся обратную связь о правильности их решений.

### **Библиографический список**

1. Атанасян Л.С., Бутузов Л.С., Кадомцев С.Б. Математика. Геометрия. Базовый уровень. 7–9-е классы: учебник. М.: Просвещение, 2023. 416 с.
2. Дюкина Н.Г., Казаринов А.С. Цифровые технологии для системы образования // Вестник педагогического опыта. 2024. № 2 (60). С. 10–14.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2014. 304 с.
4. Хабибуллин И.Р. Актуальность использования нейросетей в образовательных целях // Молодой ученый. 2023. № 13 (460). С. 176–178. URL: <https://moluch.ru/archive/460/101127/> (дата обращения: 18.10.2024).

# ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРАКТИВНОЙ ОНЛАЙН-ДОСКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 10–11 КЛАССАХ

## EXPERIENCE USING AN INTERACTIVE ONLINE WHITEBOARD IN MATH LESSONS IN GRADES 10–11

Н.Г. Дюкина, Д.М. Некрасова

N.G. Dyukina, D.M. Nekrasova

*Математическое образование, дистанционное обучение, дистанционные технологии в образовании, интерактивные онлайн-доски, подготовка к Единому государственному экзамену, онлайн-доска IDroo, образовательная платформа Сферум.*

В статье описаны проблемы перехода с очного обучения в дистанционный формат. Представлен опыт одного из решений этих проблем средствами образовательной платформы Сферум и интерактивной онлайн-доски IDroo. Приводится пример организации урока по теме «Производная функции». Задания и примеры подобраны с целью успешного решения задач по данной теме при сдаче обучающимися Единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

*Mathematical education, distance learning, distance learning technologies in education, interactive online whiteboards, preparation for the Unified State Exam, IDroo online whiteboard, education platform Sferum.*

The article describes the problems of transition from full-time education to a distance learning format. The experience of one of the solutions to these problems by means of the educational platform Sferum and the interactive online board IDroo is presented. An example of the organization of a lesson on the topic “Derivative of a function” is given. Tasks and examples are selected in order to successfully solve problems on this topic when students take the Unified State Exam in mathematics at a specialized level.

**В** настоящее время проблема организации дистанционного обучения по-прежнему стоит перед учителями школ: дистанционное обучение применяется, когда классы закрывают на карантин из-за высокой заболеваемости или когда школа является пунктом проведения Государственной итоговой аттестации.

Сегодня компьютерные технологии призваны стать неотъемлемой частью целостного образовательного процесса, значительно повышающей его результативность [1].

При переходе с очного обучения в дистанционный формат можно столкнуться с несколькими проблемами: во-первых, это проблема выбора программы для проведения дистанционных занятий; во вторых, это проблема вовлечения обучающихся в решение упражнений, построение обсуждения данного примера, осуществление проверки этого решения и построение самого занятия; в-третьих, это проблема, как организовать самостоятельную часть работы обучающихся таким образом, чтобы они не выходили за пределы отведенного времени [3].



Один из способов решения всех перечисленных проблем – проведение дистанционных занятий на образовательной платформе Сферум с применением интерактивной онлайн-доски IDroo.

IDroo подходит как для совместной работы с классом на онлайн-уроке, так и для самостоятельной работы обучающихся. Достаточно поделиться с ними ссылкой на онлайн-доску, чтобы учитель и обучающиеся могли работать в едином пространстве. Учитель предварительно может разместить на доску теоретический материал и практические задания. Создается возможность одновременного выполнения задания сразу несколькими обучающимися, сравнения и обсуждения полученных ими результатов [2]. Это позволяет педагогу определить пробелы в понимании обучающимися темы и предупредить возможные ошибки в решении следующих задач.

Рассматриваемый способ использования онлайн-доски IDroo позволяет воссоздать условия работы на дистанционном уроке практически на таком же уровне качества, как это было бы на очном занятии, что особенно важно при изучении наиболее сложных тем школьного курса математики, к каким и относится тема «Производная функции».

Приведем пример использования онлайн-доски IDroo на практическом этапе дистанционного урока в 10 классе по теме «Производная функции».

Учитель заранее подготавливает пространство онлайн-доски: размещает на ней задания в формате «заполни пропуски» на повторение таблицы производных основных элементарных функций, правил дифференцирования и геометрического и физического смыслов производной. Далее выкладывает задачи из № 8 и № 12 по математике профильного уровня (рис.), в которых уже требуется полностью восстановить решение. Задания подбираются из открытого банка заданий ЕГЭ Федерального института педагогических измерений [4].

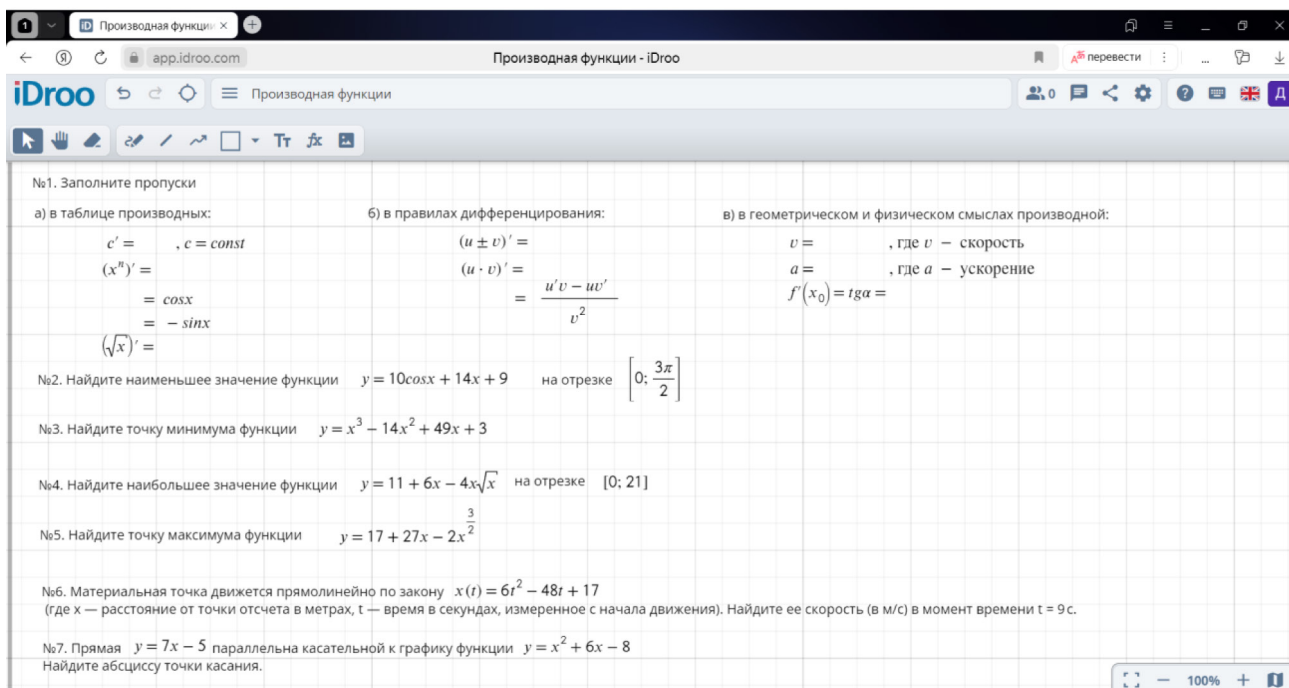


Рис. Организация пространства онлайн-доски IDroo к началу урока

Уже во время урока, проводимого через Сферум, обучающиеся присоединяются по ссылке, отправленной в чате, к пространству интерактивной доски. Учитель распределяет задания между ними: по одному заданию каждому обучающемуся. Они в течение 5 минут выполняют доставшиеся им номера. По истечении времени учитель организует со всеми обучающимися обсуждение решения задач, комментирует ошибки, исправляет их на доске. Таким образом, каждый обучающийся выполняет определенную часть работы на уроке, получает обратную связь от преподавателя и видит способы решения других задач по теме урока, тем самым готовясь к итоговой аттестации.

Таким образом, были рассмотрены проблемы перехода с очного обучения в дистанционный формат. Продемонстрировано решение перечисленных проблем средствами образовательной платформы Сферум и интерактивной онлайн-доски IDroo и приведен пример организации урока по теме «Производная функции», задания и примеры для которого подобраны с ориентиром на успешное решение задач по данной теме при сдаче обучающимися Единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

### **Библиографический список**

1. Дюкина Н.Г. Современный дистанционный урок // Вестник педагогических наук. 2024. № 1. С. 298–305. DOI: 10.62257/2687-1661-2024-1-298-305.
2. Латышева Л.П., Скорнякова А.Ю., Черемных Е.Л. О применении интерактивных методов в дистанционном обучении математике студентов педагогического вуза // Гуманитарные исследования. Педагогика и психология. 2020. № 3. С. 26–35.
3. Овчаренко А.Ю. Опыт организации дистанционного обучения в математике // Актуальные вопросы образования. 2022. № 3. С. 115–120.
4. Открытый банк заданий ЕГЭ Федерального института педагогических измерений. URL: <https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege> (дата обращения: 03.11.2024).

# **КРУЖОК «ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ С GeoGebra» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6 КЛАССОВ НА БАЗЕ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**CIRCLE «EXPERIMENTING WITH GeoGebra»  
FOR 6TH GRADE STUDENTS  
AT THE MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS**

**А.С. Королева**

**A.S. Koroleva**

*Системы динамической геометрии, динамические модели, эксперимент, математические экспонаты, музей занимательной математики.*

**В статье представлен пример использования системы динамической геометрии при организации кружка «Экспериментируем с GeoGebra» для учащихся 6 класса на базе музея занимательной математики.**

*Systems of dynamic geometry, dynamic models, experiment, mathematical exhibits, museum of entertaining mathematics.*

**The article presents an example of the use of dynamic geometry system in the organization of the course the «Experimenting with GeoGebra» circle for 6th grade students at the Museum of entertaining Mathematics.**

**П**роблема изучения пропедевтического курса геометрии является актуальной в образовательной практике. Авторы статьи [1] подчеркивают, что традиционное изучение школьного курса геометрии имеет ряд недостатков: раздельное изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве не позволяет ученику увидеть многих общих закономерностей геометрии; приложения планиметрии не отражают связь геометрии с окружающим миром.

Решением этой проблемы в математическом образовании является привлечение к организации геометрической деятельности учащихся систем динамической геометрии. Преимущества использования GeoGebra представлены в работе [2]:

- программа находится в свободном доступе;
- удобный и понятный интерфейс;
- совмещает в себе возможности выполнения построений и проведения экспериментов;
- встроенный язык, при помощи которого можно задавать построения и производить математические расчеты;
- возможность установки на различные операционные системы (планшеты, телефоны) и наличие онлайн-версии;
- наличие обширной базы примеров, открытой для добавления материалов пользователями.

В феврале 2024 г. на базе Музея занимательной математики САФУ стартовал кружок для учащихся 6 классов «Экспериментируем с GeoGebra». Целью кружка является подготовка учащихся 6 классов к осуществлению учебной геометрической деятельности с использованием GeoGebra для визуализации и исследования математических экспонатов Музея занимательной математики.

В таблице представлено содержание программы, включающей 24 практических занятия по 6 тематическим разделам.

### Содержание кружка «Экспериментируем с GeoGebra»

Наименование разделов/тем	Содержание учебного материала
1	2
Раздел 1. «Математика и искусство»	<b>1 занятие:</b> Знакомство с экспонатом «Математика в картинах известных художников», понятиями «Золотое сечение», «Золотая пропорция», «Последовательность чисел Фиббоначчи». Связь чисел Фиббоначчи с музыкой. Построение динамического чертежа «Золотое сечение» в GeoGebra. <b>2 занятие: Знакомство с работами известных портретистов. Исследование математических пропорций в портретах средствами GeoGebra.</b> <b>3 занятие:</b> Знакомство с экспонатом «Математические парадоксы картин Эшера». Эксперименты с лентой Мебиуса, исследование картин Эшера инструментами симметрии в GeoGebra
Раздел 2. «Математика в числах»	<b>4 занятие: Знакомство с экспонатом «Число Пи». Получение числа Пи экспериментальными методами (с помощью веревки и колеса, методом Бюффона).</b> Построение окружности различными способами, нахождение площади окружности экспериментальными способами (методом неделимых). Исследование свойств окружности средствами GeoGebra. <b>5 занятие: Знакомство с экспонатом «Эволюция часов».</b> Построение динамической модели часов в GeoGebra
Раздел 3. «Эксперименты»	<b>6 занятие:</b> Знакомство с экспонатом «Мыльные пленки». Эксперименты с мыльными пленками. Обработка данных эксперимента с помощью GeoGebra. Выявление зависимости размера получаемых объемных фигур из мыльных пленок от плотности мыльного раствора. <b>7 занятие:</b> Знакомство с экспонатом «Голограммы». Построение своего голографического изображения с помощью GeoGebra
Раздел 4. «Математическая игротека»	<b>8 занятие: Знакомство с экспонатом «Бесконечная шоколадка».</b> Решение серии задач на разрезание, перекладывание, измерение и вычисление площадей различных фигур. Объяснение появления погрешностей с помощью GeoGebra. <b>9 занятие: Знакомство с экспонатом «Пентамино».</b> Задачи на складывание прямоугольников из пентамино. Построение динамической модели головоломки Тетрис. <b>10 занятие: Знакомство с экспонатом «Разбиение Дьюдени».</b> Построение динамической модели головоломки Дьюдени (из треугольника в квадрат). <b>11 занятие: Знакомство с экспонатом «Танграм».</b> Построение динамической модели Танграм в GeoGebra.

1	2
	<p><b>12 занятие: Знакомство с головоломкой «Колумбово яйцо». Знакомство с понятием «овоид».</b> Построение динамической модели овоида в GeoGebra.</p> <p><b>13 занятие: Знакомство с экспонатом «Беспроигрышный эллиптический бильярд».</b> Построение эллипса с помощью веревки и кнопок. Построение модели эллиптического стола в GeoGebra, исследование модели для поиска стратегии беспроигрышной игры</p>
<p>Раздел 5. «Необыкновенные объекты»</p>	<p><b>14 занятие: Знакомство с экспонатом «Шарнирные механизмы».</b> Построение динамической модели механизма Чебышева в GeoGebra.</p> <p><b>15 занятие: Знакомство с экспонатом «Дерево Пифагора».</b> Эксперимент на получение египетского треугольника с помощью веревки. Знакомство с понятиями прямоугольный треугольник. Построение динамической модели дерева Пифагора.</p> <p><b>16 занятие: Знакомство с экспонатом «Фракталы».</b> Построение геометрических фракталов (снежинка Коха, треугольник Серпинского) в GeoGebra.</p> <p><b>17 занятие: Знакомство с экспонатом «Треугольник Рело».</b> Построение модели треугольника Рело с помощью циркуля и линейки. Построение треугольника Рело в GeoGebra, исследование его свойств, обобщение на N-угольник Рело.</p> <p><b>18 занятие: Знакомство с экспонатом «Инверсия».</b> Исследование преобразования инверсия в GeoGebra. Знакомство с понятием «Анаморфозы». Построение собственных анаморфоз в GeoGebra.</p> <p><b>19 занятие: Знакомство с экспонатом «Арбелос».</b> Построение динамической модели арбелоса в GeoGebra и исследование его свойств.</p> <p><b>20 занятие: Знакомство с экспонатом «Гиперболоид».</b> Создание модели гиперболоида с помощью эксперимента «Пуговица на веревочке». Построение модели гиперболоида в GeoGebra.</p> <p><b>21 занятие: Знакомство с экспонатом «Развертки».</b> Построение пирамиды из развертки куба. Решение задач на построение разверток в GeoGebra</p>
<p>Раздел 6. «Японская храмовая геометрия»</p>	<p><b>22 занятие: Знакомство с VR-приложением «Японский сад 15 камней».</b> Построение модели своего сада с помощью GeoGebra.</p> <p><b>23 занятие: Знакомство с экспонатом «Сангаку».</b> Построение и исследование сангаку средствами GeoGebra.</p> <p><b>24 занятие: Знакомство с экспонатом «Муара-ори».</b> Знакомство с искусством оригами и основами оригаметрии. Решение задач с помощью оригами</p>

Каждое занятие кружка начинается с изучения определенного экспоната Музея занимательной математики. Ученикам предоставляется теоретическая справка о математическом объекте, возможность наблюдать, изучать свойства, взаимодействовать с натурным экспонатом. Это позволяет формировать у учащихся знания историко-научных данных о математическом объекте, способствует визуальному и эмоциональному восприятию материала. Затем школьники переходят в компьютерный класс, где осуществляют построение динамической модели объекта в GeoGebra с последующим исследованием его свойств.



Приведем пример одного из занятий раздела «Математика и искусство». Учащиеся знакомятся с экспонатом «Математика в картинах известных художников», понятиями «Золотое сечение», «Золотая пропорция», «Последовательность чисел Фибоначчи». Ниже представлена часть картин, находящихся в Музее занимательной математики, под каждой из них представлен прозрачный экран, который накладывается на картину, демонстрируя определенное соотношение (рис. 1).

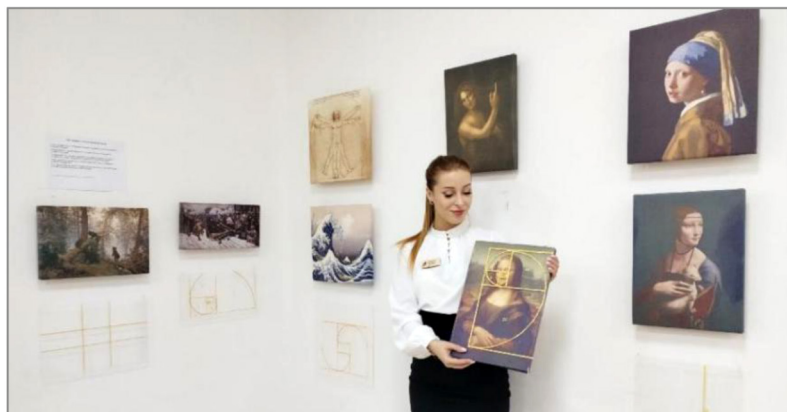


Рис. 1. Картинная галерея Музея занимательной математики

После знакомства с экспонатом учащиеся занимаются созданием динамической модели «Золотого сечения». На рисунке 2 представлен результат построения учащихся в программе GeoGebra.

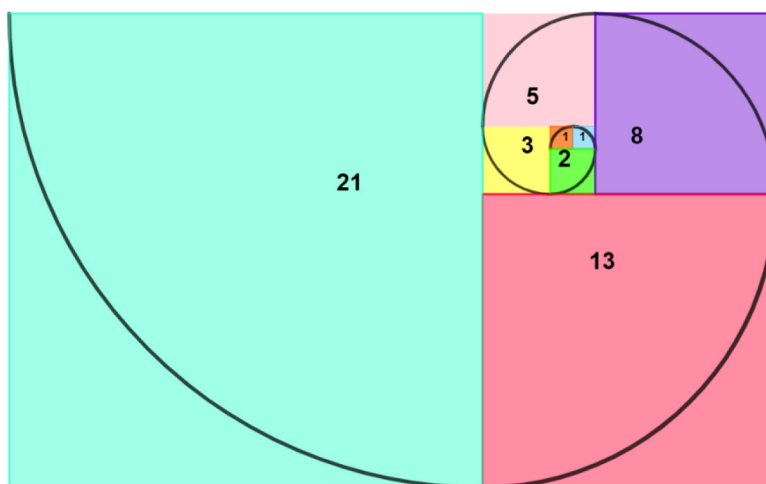


Рис. 2. Динамическая модель «Золотого сечения»

Используя инструменты «Отрезок с фиксированной длиной», «Правильный многоугольник», «Дуга по центру и двум точкам», учащиеся получают геометрическую интерпретацию последовательности чисел Фибоначчи, исследуют пропорции длин сторон квадратов, выявляют зависимость, раскрывающую свойство «золотого сечения».

Исследовательские возможности GeoGebra позволяют учащимся через конструирование моделей экспонатов музея узнать новые для них понятия. Поисковый эксперимент с моделями позволяет открыть новые свойства, контрольный эксперимент – проверить выявленные закономерности.



Апробация курса «Экспериментируем с GeoGebra» на базе Музея занимательной математики показала, что учащиеся 6 класса проявляют большой интерес к осуществлению геометрической деятельности и готовность к рациональному использованию GeoGebra при освоении геометрических понятий.

### **Библиографический список**

1. Виситаева М.Б., Зайкин М.И. Пропедевтическое изучение геометрического материала в 5–6 классах как основа развития личности школьника // CyberLeninka. 2021. Т. 8, № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/propedevticheskoe-izuchenie-geometricheskogo-materiala-v5-6-x-klassah-kak-osnova-razvitiya-lichnosti-shkolnika/viewer> (дата обращения: 24.10.2024).
2. Мугаллимова С.Р., Абакарова З.С. Роль и место систем динамической математики для формирования математических понятий у учащихся на уроках геометрии // Вестник образовательных технологий. 2023. № 5. С. 45–50. URL: <https://www.elibrary.ru/download/elibrary3820647054722268.pdf> (дата обращения: 24.10.2024).

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА R ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ В РАМКАХ КУРСА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

## USING R TO VISUALIZE STATISTICAL DATA IN TEACHING STUDENTS IN THE PROBABILITY AND STATISTICS COURSE IN ADVANCED MATHEMATICS CLASSES

С.А. Кочкин, Н.Н. Патронова

S.A. Kochkin, N.N. Patronova

*Язык программирования R, интегрированная среда разработки RStudio, вероятность, статистика, статистические данные, визуализация данных.*

Рассматривается подход к изучению школьного курса «Вероятность и статистика» с использованием языка программирования R, в рамках которого наглядно иллюстрируются возможности визуализации данных с помощью языка R. Рассмотрены некоторые примеры статистических задач для классов с углубленным изучением математики.

*R programming language, IDE RStudio, probability, statistics, statistical data, data visualization.*  
The article discusses an approach to studying the school course “Probability and Statistics” using the R programming language, which clearly illustrates the possibilities of data visualization using R. Some examples of statistical problems for classes with in-depth study of mathematics are considered.

**К**аждый человек постоянно принимает решения на основе имеющихся у него данных. Для обоснованного принятия решения в условиях недостатка или избытка информации необходимо хорошо сформированное вероятностное и статистическое мышление. Именно поэтому формирование у обучающихся функциональной грамотности, включающей в себя умение воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных процессов и зависимостей, производить простейшие вероятностные и статистические расчеты, – зафиксировано в Федеральной рабочей программе учебного курса «Вероятность и статистика» для 7–9 и 10–11 классов [1–3].

В рамках темы статьи выделим предметные результаты освоения курса «Вероятность и статистика», включенные в содержательно-методическую линию «Представление данных и описательная статистика» и непосредственно относящиеся к визуальному представлению статистических данных на базовом уровне [1; 2] (рис. 1).



Рис. 1

Согласно Федеральной рабочей программе по учебному предмету «Математика» (углубленный уровень) (предметная область «Математика и информатика»), включающей в себя и программу по курсу «Вероятность и статистика», предполагается, в частности, более углубленное изучение тем, связанных с непрерывной случайной величиной, а следовательно, и графическое представление распределений непрерывных величин с помощью функции распределения и плотности вероятности. Большое место уделяется здесь и примерам задач, приводящих к равномерному, показательному и нормальному распределениям. Данные задачи включают в себя анализ статистических распределений и аппроксимацию их теоретическими функциями (функцией распределения вероятности, функцией плотности вероятности) для указанных распределений. Определение теоретической функции распределения или функции плотности вероятности позволит решить задачи на нахождение вероятности событий, связанных со случайной величиной. Данные задачи также сформулированы в [3].

На более содержательном уровне рассматривается и тема, связанная с совместным наблюдением за двумя случайными величинами, которая включает в себя и вычисление ковариации, коэффициента корреляции, линейной регрессии. Аппроксимация статистических распределений теоретическими функциями и оценка силы и характера связи между случайными величинами предполагает предварительную визуализацию статистических распределений.

В качестве программного инструмента для визуализации данных (построения различных диаграмм и графиков, функций распределения), согласно существующим учебным пособиям для курса «Вероятность и статистика» для 10–11 классов [4] и ФРП [3], предполагается использование электронных таблиц MS Excel.

В настоящее время существует свободное, бесплатно распространяемое программное обеспечение, специально созданное для анализа и визуализации

статистических данных – язык программирования R и интегрированная среда разработки RStudio, в которой в привычном «оконном» и интерактивном режиме происходит процесс программирования на R. Одним из главных преимуществ R является то, что данный язык программирования имеет очень лаконичный и простой синтаксис, доступный для непрограммистов, который легко усвоить за достаточно короткое время. Кроме этого, язык R и среда RStudio имеют многочисленные и разнообразные графические возможности представления данных, к сожалению, недоступные в других статистических программах.

Данное программное обеспечение может быть использовано при изучении курса «Вероятность и статистика» в классах с углубленным изучением математики как рекомендованное обучающимся, особенно тем, кто увлекается программированием. А в настоящее время многие школьники уже изучают Python как в школе, так и во внеучебное время на различных кружках и курсах по программированию.

Отметим основные возможности R при изучении курса «Вероятность и статистика» для визуализации статистических данных:

1) При изучении основных распределений вероятностей (например, равномерного, показательного, нормального) учащиеся могут использовать R для построения графиков функции распределения и плотности вероятности. Полученные наглядные графики помогут увидеть различия между типами распределений и наглядно отметить влияние изменения параметров распределений на форму кривой.

2) Построение различного рода качественных и эстетически привлекательных диаграмм, позволяющих учащимся проводить разведочный анализ данных и интерпретировать полученные результаты обработки и моделирования данных: гистограммы, столбиковые диаграммы разных видов, круговые диаграммы, диаграммы размахов («ящики с усами»), скрипичные диаграммы, диаграммы рассеивания, пузырьковые диаграммы, тепловые карты, дендрограммы и т.д.

Рассмотрим пример на применение языка R при изучении темы «Примеры задач, приводящих к нормальному распределению. Функция плотности вероятности нормального распределения».

Пример 1. Вычислите долю числа измерений некоторой физической величины  $X$ , которые будут иметь ошибку, по абсолютному значению не превышающую допустимую ошибку, равную двум условным единицам, на основании имеющихся эмпирических данных.

При выполнении данного задания предполагается, что учитель выдает обучающимся файл с заранее сгенерированными, например, из стандартного нормального распределения 1000 значениями случайной величины – ошибок измерений физической величины  $X$ .

Получив данные, учащиеся захотят посмотреть на распределение этой величины, например, построить гистограмму и совмещенный с ней график аппроксимирующей функции плотности вероятности. Убедившись в симметричности распределения и ее куполообразной формы, у учащихся возникает идея о том, что ошибки измерения физической величины  $X$  имеют нормальное распределение.

Для дальнейшего вычисления вероятности заданного события необходимо знать две основные числовые характеристики изучаемой величины: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Вычислив их, учащиеся смогут определить вероятность на основе плотности вероятности нормального распределения, т.е. искомую долю числа измерений.

Возможный вариант программного кода, реализованного на языке R в среде RStudio (основы программирования R хорошо описаны в [5]), и построенная диаграмма представлены на рисунках 2 и 3 соответственно.

```
ggplot(data, aes(x = X)) +  
  geom_histogram(aes(y = ..density..), color = 1, fill = "white") +  
  geom_density(lwd = 1, color = 4, fill = 4, alpha = 0.25)  
# построение гистограммы и аппроксимирующей функции плотности вероятности  
mean(X) # вычисление математического ожидания величины X  
[1] 0.01739946  
sd(X) # вычисление среднего квадратического отклонения величины X  
[1] 1.012015  
pnorm(2) - pnorm(-2) # вычисление искомой вероятности (доли)  
[1] 0.9544997
```

Рис. 2. Вариант программного кода для решения задачи из примера 1

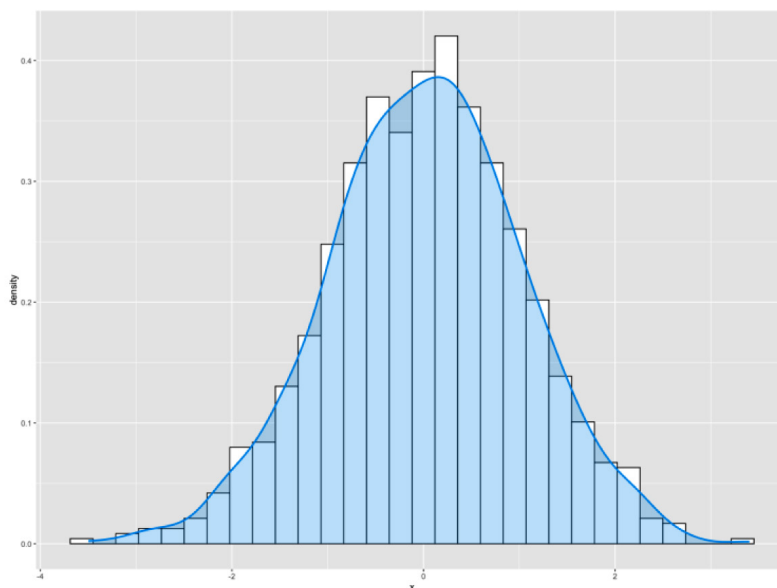


Рис. 3. Построенная диаграмма для решения задачи из примера 1

Далее приведем пример по теме, связанной с обобщением и систематизацией знаний в целом по теме «Представление данных и описательная статистика». При анализе данных, представленных в данном примере, обучающийся сам должен определить, какие способы визуализации для сравнения двух наборов данных он может использовать для получения выводов. Кроме того, на этапе обобщения знаний о всех методах визуализации направление мысли должно быть направлено на поиск диаграммы, включающей в себя и информацию о некоторых описательных статистиках. Одной из таких диаграмм является диаграмма размахов или «ящик с усами».

Пример 2. Для сравнения имеющихся данных о заработной плате (в условных единицах) мужчин и женщин на некотором предприятии примените наилучший способ визуализации, т.е. постройте диаграмму правильного типа, на основе которой в дальнейшем можно было бы сделать какие-либо выводы.

При решении данной задачи учащиеся могут построить столбиковую диаграмму, но одним из наилучших способов визуализации в данном случае является построение на одном рисунке диаграмм размахов для двух распределений заработной платы мужчин и женщин, т.к. данный тип диаграммы визуально содержат в себе информацию о нескольких описательных статистиках: медиана, нижний и верхний квартили, а также информацию о наличии выбросов. Еще более информативной является скрипичная диаграмма, которая, помимо вышеуказанных характеристик, включает и симметрично изображенные кривые плотности вероятности.

Возможный вариант программного кода, реализованного на языке R в среде RStudio, для решения задачи из примера представлен на рисунке 4.

```
ggplot(data, aes(x = Пол, y = Зарплата, fill = Пол)) + geom_boxplot()
ggplot(data, aes(x = Пол, y = Зарплата, fill = Пол)) + geom_boxplot(width = 0.3) +
  geom_violin(alpha = 0.3)
```

Рис. 4. Вариант программного кода для решения задачи из примера 2

Построенные диаграммы размахов и скрипичные диаграммы представлены на рисунке 5.

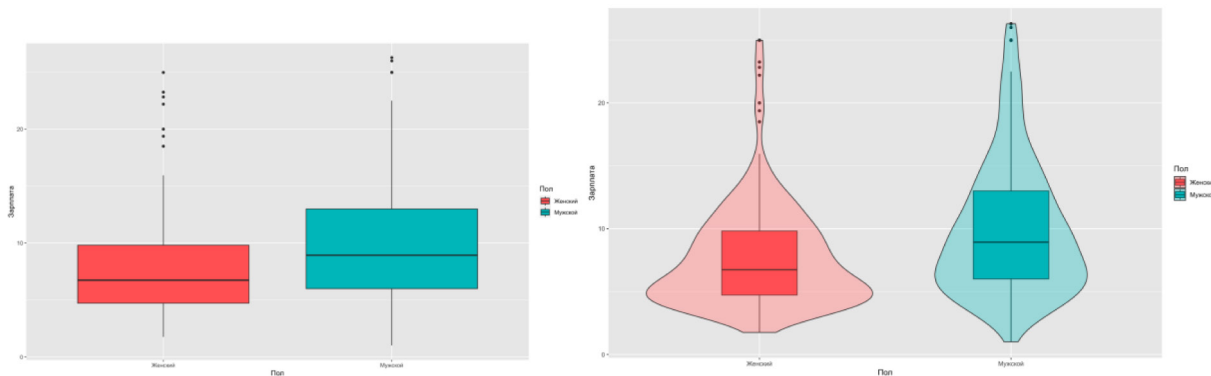


Рис. 5. Построенные диаграммы размахов и скрипичные диаграммы для решения задачи из примера 2

В заключение отметим основные преимущества использования R в обучении курса «Вероятность и статистика» для визуализации данных:

1. Интерактивное обучение: R предоставляет широкий спектр интерактивных инструментов, помогающих учащимся наблюдать за тем, как различные методы и модели изменяют результаты. Например, при изучении распределений вероятностей учащиеся могут с легкостью создавать гистограммы или плотности вероятностей и наблюдать за изменениями, когда параметры модели меняются.

2. Визуализация для понимания и анализа данных: одним из наиболее мощных аспектов R является его возможность разнообразной визуализации данных.



Например, при изучении выборки учащиеся могут строить точечные и столбиковые диаграммы, линейные графики и диаграммы размахов, что помогает им понимать и анализировать распределение данных и закономерности в них.

3. Автоматизация расчетов: R позволяет проводить сложные вычисления автоматически, что особенно важно при изучении больших объемов данных. Это освобождает учащихся от монотонных расчетов и позволяет сосредоточиться на анализе и интерпретации результатов.

### **Библиографический список**

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования математика (базовый уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций). URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13\\_ФРП\\_Математика\\_5-9-классы\\_база.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf) (дата обращения: 12.11.2024).
2. Федеральная рабочая программа среднего общего образования математика (базовый уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций). URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19\\_ФРП-Математика-10-11-классы\\_база.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf) (дата обращения: 12.11.2024).
3. Федеральная рабочая программа среднего общего образования математика (углубленный уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций). URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20\\_ФРП\\_Математика-10-11-классы\\_угл.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20_ФРП_Математика-10-11-классы_угл.pdf) (дата обращения: 12.11.2024).
4. Ткачева М.В. Математика. Вероятность и статистика: 10–11-е классы, углубленный уровень. М.: Просвещение, 2023. 80 с.
5. Кабаков Р.И. R в действии. 3-е издание. М.: ДМК Пресс, 2023 786 с.

# РАЗРАБОТКА ИГРЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ»

## DEVELOPMENT OF A GAME FOR STUDYING THE TOPIC “RECTANGULAR COORDINATE SYSTEM ON A PLANE”

И.Р. Кузяев, А.С. Судочакова

I.R. Kuzyaev, A.S. Sudochakova

*Координатная плоскость, геймификация, Scratch, программирование, математическое образование, спрайт, система координат.*

Рассматривается возможность внедрения игровых форм в традиционный процесс обучения математики через разработку математической игры в среде программирования *Scratch* по теме «Прямоугольная система координат на плоскости», изучается понятие «система координат».

*Coordinate plane, Gamification, Scratch, Programming, mathematical education, sprite, coordinate system.*

The possibility of introducing game forms into the traditional process of teaching mathematics is being considered, through the development of a mathematical game in the *Scratch* programming environment on the topic “Rectangular coordinate system on a plane”, the concept of “coordinate system” is being studied.

**Н**овые поколения сотрудников, учащихся – миллениалы и зумеры – с детства привыкли к видеоиграм, поэтому перенос соревновательной и поощряющей методики более органично вписывается в их жизнь. Внедрять игровые формы в неигровой контекст, например, учебу, для них более актуально и естественно. Техника, позволяющая это сделать, называется геймификация. На сегодняшний день геймификация широко применяется в школах, бизнесе, маркетинге и т.д.

Листая учебник по математике за 6 класс, мы увидели тему «Координатная плоскость», которая вызвала интерес, т.к. на робототехнике мы часто сталкивались с координатами  $X$  и  $Y$ , делая проекты по программированию, но до конца не понимали, что же это такое. Немного разобравшись в ней, нам захотелось сделать тренажер, благодаря которому мои одноклассники смогут лучше понять тему «Координатная плоскость».

Более чем за 100 лет до н.э. греческий ученый Гиппарх предложил опоясать на карте земной шар параллелями и меридианами и ввести теперь хорошо известные географические координаты: широту и долготу и обозначить их числами. Во II веке н.э. знаменитый древнегреческий астроном Клавдий Птолемей уже пользовался долготой и широтой в качестве географических координат. Но эти понятия впервые были систематизированы в XVII веке Рене Декартом. Рене Декарт (1596–1650) – французский философ, естествоиспытатель, математик. Целью Декарта было описание природы при помощи математических законов.

Декарт стал автором координатной плоскости, поэтому ее часто называют декартовой системой координат.

Что же такое система координат? Так называется совокупность нескольких координатных осей, точки пересечения этих осей и единичного отрезка каждой из них. У каждой точки в такой системе есть свой адрес (координата). Существует прямоугольная система координат, в которой координатные оси пересекаются под прямым углом. Если в такой системе координат единицы измерения по всем осям будут равными, то ее можно назвать декартовой системой координат. В школьной математике встречаются лишь двухмерные и трехмерные декартовы системы координат. Координаты обычно обозначаются латинскими буквами  $y$ ,  $x$ ,  $z$  и называются, соответственно, ординатой абсциссой, и аппликатой. Стрелками обозначаются положительные направления отсчета на осях. Точка пересечения осей принято считать как  $0$ , начало отсчета. От  $0$  в сторону направления стрелки идут положительные координаты, в противоположном направлении – отрицательные. Сам адрес точек (их координаты) в декартовой системе координат записываются в круглых скобках, первая координата абсцисса, вторая – ордината, третья (если трехмерная система координат) – аппликата. Пример: координата точки  $A(1;3)$  или  $A(1;3;5)$ . Координатная плоскость делится координатными плоскостями на 4 квадрата, которые называются четверти, при этом точки, которые лежат на осях координат, не принадлежат ни одному из квадратов [1].

Где в реальной жизни мы встречаемся с координатной плоскостью и координатами? Играя в морской бой, шахматы мы называем координаты расположения кораблей противника или фигуры. Когда в зале кинотеатра ищем свое место, указанное в билете. На уроках географии, определяя долготу и широту точки на земной поверхности.

Геймификация – это внедрение игровых форм в неигровой контекст: учебу, работу, повседневную жизнь. Геймификация использует естественные склонности людей к конкуренции, соревнованиям, сотрудничеству и достижениям. Эта техника мотивирует к достижению целей и повышению производительности. Инструментами вовлечения могут стать уровни, которые необходимо преодолеть, вознаграждения или рейтинг.

Идея подобного подхода появилась давно, но набирает популярность лишь сейчас, поскольку старые системы мотивации постепенно перестают работать.

Геймификация может упростить все процессы – от обучения до бизнес-задач, и увеличить удовольствие от их выполнения.

Свою игру мы создавали в Scratch, потому имеем небольшой опыт работы в этой среде программирования. При создании игры мы вдохновлялись идеями из книги «42 проекта на Scratch 3 для юных программистов» [2]. Суть игры заключается в том, что персонаж Огонек задает координаты точки. Игрок должен за ограниченное время привести туда крестик и щелкнуть мышью. За каждый правильный ответ начисляются баллы.

В проекте 5 спрайтов, активные спрайты «Огонек», «Карандаш» и «Крестик». Спрайты букв  $X$  и  $Y$  несут исключительно информационный характер.

Спрайт «Карандаш». Его роль в игре – начертить координатные оси при нажатии игрока на старт. Суть его скрипта заключается в том, что при нажатии флажка опускается перо в определенных координатах и спрайт перемещается, оставив за собой след.

Спрайт «Огонек». Некий ведущий игры. Он задает вопросы (координаты, в которые нужно перейти крестиком), при получении сообщения, он увеличит счетчик вопросов  $i$  на 1, а затем задаст переменным  $x1$  и  $y1$  случайные значения. Как только игрок набирает 10 баллов, Огонек объявляет о завершении игры.

Спрайт «Крестик». Он выполняет основную функцию игры. Игрок с помощью мыши управляет спрайтом, когда достигает нужного расположения на координатной прямой, щелкает кнопкой мыши два раза, в этот момент фиксируется координата Крестика, если она расположена в допустимых значениях, то увеличивается количество баллов игрока, передается сообщение Огоньку, чтобы он увеличил счетчик вопросов  $i$  на 1, а затем задал переменным  $x1$  и  $y1$  случайные значения.

Спрайты букв X и Y имеют очень простые скрипты: буквы всего лишь уменьшатся и переместятся в нужную точку.

Чтобы в игру могли играть другие пользователи, в частности одноклассники, мы конвертировал ее из формата sb3 в формат html, воспользовавшись сайтом<sup>1</sup>. Скачать игру можно, отсканировав QR-код.

Тема «Координатная плоскость» играет немаловажную роль в математике. Ее связь с другими предметами, такими как, например, география или физика, добавляет ей ценности. Поэтому важно понять ее.

Привлечь внимание и разбудить интерес современных школьников к данной теме может помочь геймификация, ведь игры все прочнее занимают лидирующие позиции в списке интересов детей.

Изучив перечень предложенных игр по теме «Координатная плоскость», созданных другими пользователями сети Интернет, мы решили попробовать создать свой проект в Scratch.

В результате получилась игра, которая позволяет ближе познакомиться с координатной плоскостью и научиться на «глазок» определять координаты любой точки на сцене (этот навык может оказаться полезным для юных скретчеров).

## **Библиографический список**

1. Гарбузова Ю.В., Глюза О.А. Координатная плоскость. 6 класс: пособие для учащихся. Донецк: МОУ «Гимназия 92 г. Донецка», 2016. 84 с.
2. Голиков Д.В. 42 проекта на Scratch 3 для юных программистов. СПб.: БХВ-Петербург, 2019. 184 с.

---

<sup>1</sup> <https://sheeptester.github.io/htmlifier/>

# АНИМАЦИОННЫЕ ЧЕРТЕЖИ В ЗАДАНИЯХ ПО МЕТОДАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА КОМБИНАЦИЮ СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКА

## ANIMATION DRAWINGS IN TASKS ON IMAGE METHODS FOR A COMBINATION OF A SPHERE AND A POLYHEDRON

В.Р. Майер, Л.Ю. Копытов

V.R. Mayer, L.Yu. Kopytov

*Курс геометрии в педагогическом вузе, тема «Методы изображений», среда «Живая математика», анимационные чертежи.*

В статье продемонстрированы анимационные возможности среды «Живая математика» как эффективного средства обучения студентов – будущих учителей математики умению строить анимационные чертежи на комбинацию сферы и многогранника.

*Geometry course at a pedagogical university, topic Image methods, the Geometer's Sketchpad software, animation drawings.*

The article demonstrates the animation capabilities of the Geometer's Sketchpad as an effective means of teaching students – future teachers of mathematics the ability to build animated drawings based on a combination of a sphere and a polyhedron.

**Р**ешение стереометрических задач, в которых фигурируют сфера и многогранник, находящиеся в некотором заданном отношении друг к другу, вызывают определенные трудности у обучающихся 11 классов. Причем это относится не только к школьникам, имеющим проблемы с пространственным воображением, но и к тем обучающимся, кто достаточно уверенно чувствует себя в стереометрии. Одна из причин такой ситуации объясняется, в том числе и тем, что далеко не все учащиеся могут безошибочно изобразить сферу, являющуюся важнейшей пространственной фигурой. Нередко можно встретить в тетради ученика, или на школьной доске в классе, или даже в некоторых учебных пособиях изображение сферы в виде окружности, на которую для «наглядности» помещены изображения концов диаметра, перпендикулярного плоскости экватора (в географической терминологии – северный полюс и южный полюс). С таким, увы, не наглядным чертежом сферы можно было бы и смириться, если бы при этом экватор был изображен не эллипсом, а отрезком.

Легко понять, что неверное изображение сферы негативно влияет и на изображение многогранника, на взаимное расположение отдельных элементов рассматриваемой комбинации фигур (диаметров и хорд, ребер и граней). А это, в свою очередь, может привести к ошибкам в решении задачи. Чтобы избежать такой ситуации, учителя и методисты рекомендуют учащимся не строить изображение сферы, а ограничиться лишь изображением ее центра, некоторых точек на сфере, других ее элементов (например, параллелей или меридиан). Разумность такой



рекомендации проверена временем и, без всякого сомнения, обучающимся стоит использовать ее. Особенно тем, кто желает овладеть приемами решения задач повышенного уровня сложности, например, на комбинацию сферы и многогранника.

Но как, построив изображение многогранника, найти верное изображение центра данной сферы, других ее элементов? В соответствии с принципом наглядности неоценимую помощь в поиске таких элементов может оказать подготовленный заранее анимационный чертеж, на котором изображены сфера и многогранник, находящиеся в заданном отношении. Обучающийся, поворачивая фигуры вокруг вертикальной оси и наклоняя их на любой угол, может внимательно рассмотреть все детали чертежа, найти нужные точки и элементы сферы, понять, каким образом их можно построить, но уже на обычном статическом рисунке в тетради. Учитывая большое многообразие подобных задач, заранее подготовить для каждой из них анимационные чертежи практически невозможно. Поэтому самый оптимальный вариант – это обучить студентов – будущих учителей математики самостоятельно создавать нужные анимационные чертежи.

Цель статьи – поделиться опытом применения среды «Живая математика» (см. учебно-методический комплекс [1]) при выполнении студентами индивидуальных заданий по теме «Комбинация сферы и многогранника» при изучении раздела «Методы изображений» курса геометрии в педагогическом вузе. В работе описываются анимационный подход одного из авторов статьи к обучению студентов выполнению таких заданий с использованием систем динамической математики и процесс выполнения конкретного индивидуального задания в среде «Живая математика» вторым автором статьи.

Раздел «Методы изображения» читается студентам 2 курса бакалавриата, обучающимся по направлению «Педагогическое образование», профили «Математика и информатика», в рамках курса геометрии в третьем семестре. Рабочей программой дисциплины «Геометрия» предусмотрено по этому разделу 4 часа лекций и 8 часов лабораторных занятий. Лабораторные занятия проходят в компьютерном классе, оснащённом проектором и проекционной доской. Кроме этого, имеется маркерная доска для построения изображений вручную.

Подготовка студентов к выполнению индивидуальных заданий занимает два лабораторных занятия. Первое занятие начинается с работы на маркерной доске. Преподаватель изображает четыре произвольные точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$ , являющиеся проекциями некоторого ортонормированного репера пространства, где  $O$  – проекция начала координат,  $A$ ,  $B$  и  $C$  – проекции единичных точек осей абсцисс, ординат и аппликата. Затем изображается прямоугольная система координат плоскости маркерной доски. Полагая, что нам известны координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  некоторой точки в пространстве, предлагается найти координаты проекции  $M$  этой точки относительно системы координат маркерной доски. После небольшой дискуссии выясняется, что это можно сделать лишь при условии, что известны координаты точек  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  в системе координат маркерной доски. Далее, каждый студент работает за компьютером, реализуя предложенный алгоритм и используя найденные формулы, но уже не в тетрадях, а в среде «Живая математика» (рис. 1).



На рис. 1 полужирным шрифтом выделены основные соотношения между координатами  $x, y, z$  точки  $M$  в репере  $\{O, A, B, C\}$  пространства и координатами  $(x_O, y_O), (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$  точек  $O, A, B$  и  $C$  в системе координат рабочего поля среды «Живая математика». Для полноты изображения построена проекция  $H$  точки  $M$  на плоскость  $OAB$ . Чтобы при изображении других точек пространства не повторять все приведенные выше вычисления и построения, студенты создают собственный инструмент пользователя, назовем его «Точка в пространстве по координатам и реперу». После активизации этого инструмента следует подсветить мышкой сначала точку  $O$ , затем единичные точки на осях координат, далее – щелкнуть мышью на числовых параметрах  $x, y$  и  $z$ . После этого на экране появится изображение точки, имеющей в пространстве координаты  $(x, y, z)$ .

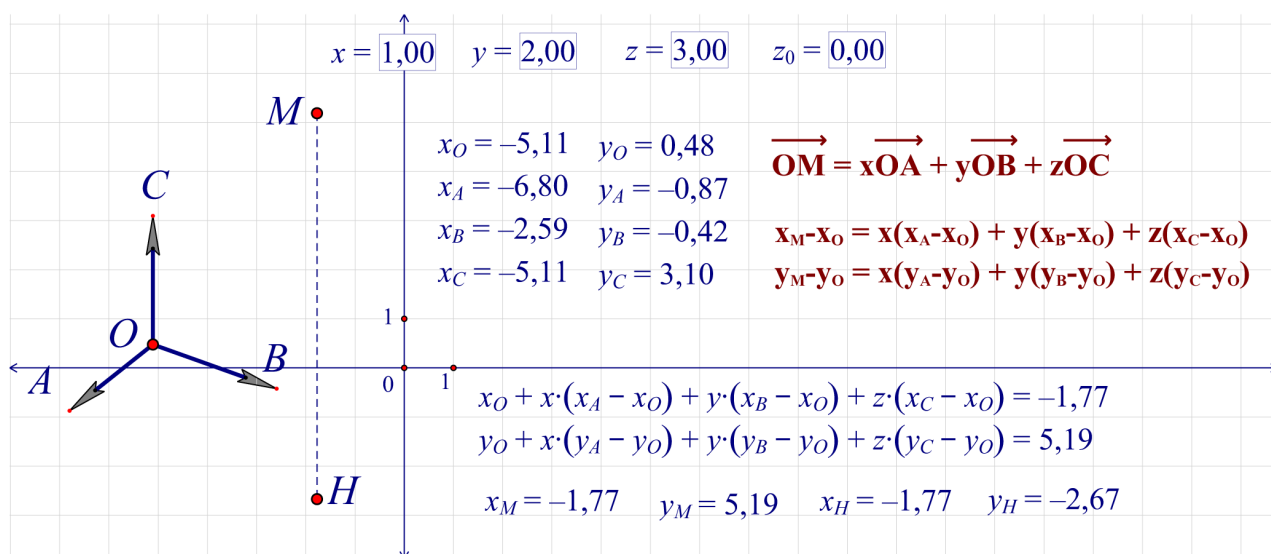


Рис. 1. Изображение точки по ее координатам в пространстве

Чтобы «заставить» систему координат, а вместе с ней и точку  $M$ , поворачиваться вокруг оси аппликата и наклоняться на некоторый угол, студентам предлагается заменить статический репер  $\{O, A, B, C\}$  на динамический. Для этого можно использовать готовый инструмент пользователя «Подвижный 3D-репер». С помощью него и созданного выше инструмента «Точка в пространстве по координатам и реперу» студенты оттачивают свое мастерство в построении изображений различных пирамид и призм по координатам их вершин.

Второе лабораторное занятие начинается с построения изображения сферы, ее экватора, полюсов и меридиан. Поскольку с этой фигурой в индивидуальных заданиях будут изображаться и многогранники, то совместно со сферой желательно увязать построение подвижной системы координат, начало которой удобно совместить с центром сферы, единичные точки осей абсцисс и ординат поместить на экватор, а единичную точку оси аппликата совместить с одним из полюсов, например, с северным. Перед построением сферы изобразим сначала подвижный 3D-репер, для этого воспользуемся соответствующим готовым инструментом. Затем построим окружность с центром  $O$  в начале координат, выбрав в качестве точки, лежащей на окружности (экслибрисе сферы), либо масштабную точку, либо точку поворота.

Далее, для наглядности следует изобразить экватор сферы в виде эллипса, содержащего две единичные точки  $E_1$  и  $E_2$  осей абсцисс и ординат, причем центр эллипса должен совпадать с  $O$  (рис. 3). Поскольку прямые  $OE_1$  и  $OE_2$  являются изображениями двух взаимно перпендикулярных прямых, то необходимо научиться строить изображение эллипса по центру  $O$  и двум его точкам  $E_1$  и  $E_2$ , являющимися концами двух сопряженных радиусов. Среди готовых инструментов среды «Живая математика» такого нет.

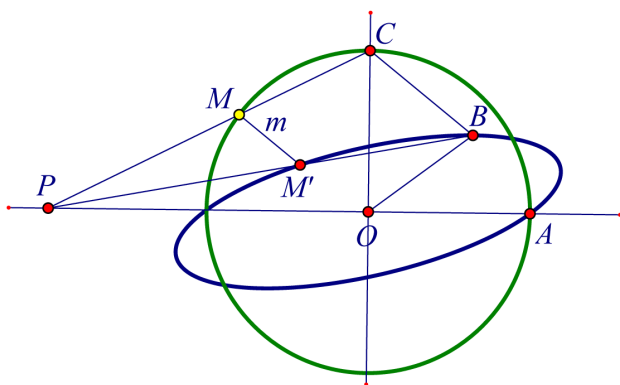


Рис. 2. Построение эллипса по центру и двум сопряженным радиусам

Преподаватель сообщает студентам о том, что создать такой инструмент они могут самостоятельно, если применят для этого известные им свойства аффинных преобразований. На маркерной доске изображаются три точки  $O$ ,  $A$  и  $B$ . Строится прямая  $OA$ , которая принимается за ось родственного преобразования (родства). В качестве объекта, образ которого под действием родства мы будем строить, возьмем окружность с центром  $O$  и радиуса  $OA$ .

Построим на окружности точку  $C$  такую, что  $OC \perp OA$ . Выбрав точки  $C$  и  $B$  в качестве двух соответственных точек родства, найдем образ произвольной точки  $M$ , лежащей на окружности. Для этого построим сначала точку  $P$  пересечения оси  $OA$  и прямой  $MC$ , затем, – прямую  $m$ , содержащую точку  $M$  и параллельную прямой  $CB$  (направлению родства). Точка  $M'$  пересечения прямых  $PB$  и  $m$  и будет образом точки  $M$  в данном родстве.

На рис. 2 представлен динамический чертеж, который студенты выполняют не в тетради, а на рабочем поле среды «Живая математика». Подсветив точки  $M$  и  $M'$  и активировав команду «Геометрическое место», мы получаем искомый эллипс. Теперь осталось скрыть все построенные фигуры, кроме исходных точек  $O$ ,  $A$  и  $B$  и результирующей фигуры эллипса и обратиться к команде «Создать новый инструмент». Инструменту можно присвоить имя «Эллипс по центру и сопряженным радиусам». Теперь у нас есть все необходимое, чтобы создать последний собственный инструмент «Сфера и вписанный в нее 3D-репер». Преподаватель демонстрирует студентам применение созданных инструментов, например, для построения изображения правильного октаэдра, описанного около сферы. При этом построении координаты вершин октаэдра находятся с помощью эпюра Монжа и вычислительных возможностей среды «Живая математика». После этого студенты получают индивидуальные задания, которые они выполняют самостоятельно.

Прокомментируем выполнение одного из индивидуальных заданий.

**З а д а н и е.** Постройте изображение сферы и описанной около нее правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ , высота  $SH$  которой в два раза больше стороны  $AB$  основания пирамиды.

Чтобы найти координаты вершин пирамиды, рассмотрим ортогональную проекцию сферы и описанной около нее пирамиды на две взаимно перпендикулярные плоскости. Первую плоскость (горизонтальную) расположим параллельно плоскости основания пирамиды, ортогональную проекцию на эту плоскость (правильный шестиугольник ABCDEF с диагоналями AD, BE и CF) поместим в правой части рабочего поля Живой математики (рис. 3). Для того, чтобы построить изображение сферы, построим проекцию пирамиды на вторую плоскость (вертикальную), параллельную высоте SH пирамиды и диагонали AC основания, поместим ее над первой проекцией. Тогда пирамида изобразится в виде равнобедренного треугольника SM<sub>2</sub>N<sub>2</sub>, у которого вершина S лежит на прямой BE, высота SH = 2AB, а длина отрезка M<sub>2</sub>N<sub>2</sub> равна длине диагонали AC основания пирамиды.

Поскольку основание пирамиды и две ее боковые грани SAF и SCD проектируются на вертикальную плоскость в виде отрезков, представляющих собой стороны треугольника SM<sub>2</sub>N<sub>2</sub>, то сфера проектируется в окружность, вписанную в этот треугольник. Отсюда находим центр O<sub>2</sub> вписанной окружности как точку пересечения любых двух биссектрис треугольника, затем находим радиус r этой окружности. Построим окружность такого же радиуса r, но только с центром в точке O<sub>1</sub>, т.е. на горизонтальной плоскости эюра Монжа, найдем M<sub>1</sub> – середину стороны AF.

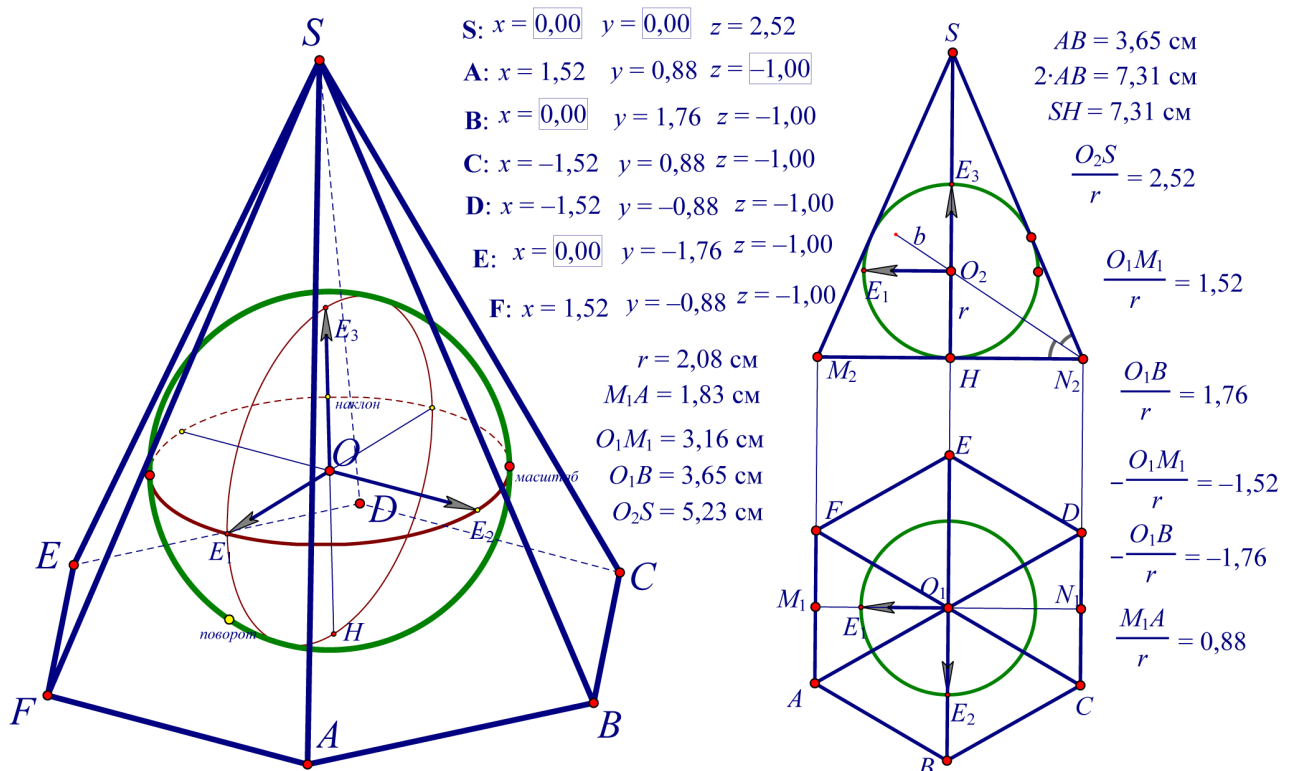


Рис. 3. Пример выполнения индивидуального задания в Живой математике

Следующим шагом находим проекции E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> и E<sub>3</sub> – концов единичных векторов на обеих плоскостях эюра Монжа, вычисляем длины отрезков r, M<sub>1</sub>A, O<sub>1</sub>M<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>B и O<sub>2</sub>S. Зная их и учитывая, что при параллельном проектировании

сохраняется отношение длин параллельных отрезков, находим координаты всех семи вершин пирамиды. При этом используем графический калькулятор. Результаты вычислений, выполненных на калькуляторе, представлены на рис. 3 в виде текстовых объектов. По найденным координатам с использованием созданного выше инструмента «Точка в пространстве по координатам и реперу» строятся все вершины и ребра пирамиды. Анимация позволяет студентам самостоятельно проверить свой чертеж на наличие в нем ошибок и неточностей. Для этого, манипулируя точками «поворот» и «наклон», достаточно найти два таких положения анимационного чертежа, что одно из них будет подобно проекции сферы и пирамиды на горизонтальную плоскость эпюра Монжа (правая нижняя часть, рис. 3), а второе – на вертикальную плоскость (правая верхняя часть, рис. 3).

Подводя итог, отметим, что во времена, предшествующие эпохе цифровизации, обучению в педагогических вузах методам изображения фигур, выполнению заданий на ватмане или миллиметровой бумаге, всегда уделялось большое внимание. Как результат, пространственное мышление учителей математики того времени было достаточно высоким. После появления графических систем, позволяющих без особых интеллектуальных усилий визуализировать геометрические фигуры и объекты любой формы и сложности, внимание к формированию умений изображать фигуры заметно снизилось. Как следствие, снизилось и умение студентов и школьников решать задачи по стереометрии. Особенность же систем динамической математики заключается в том, что большинство из них не содержит готовых стереометрических фигур, появляющихся при нажатии «волшебной» кнопки. Чтобы получить требуемое изображение, необходимо основательно поработать и применить те же знания, умения и навыки, без которых не могли обойтись те, кто в свое время строил чертежи на листе бумаги с помощью обычных линейки, циркуля и карандаша.

### **Библиографический список**

1. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов. М.: ИНТ, 2013.

# ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

## DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN MATHEMATICS LESSONS

А.М. Макаров, О.Н. Макарова

A.M. Makarov, O.N. Makarova

*Цифровые образовательные ресурсы, обучение, математика, школьники, математическая подготовка, цифровизация, цифровая среда.*

Цифровизация образования создает условия для изучения математики с привлечением цифровых образовательных ресурсов. Статья посвящена обоснованию необходимости использования цифровых образовательных ресурсов в обучении математическим дисциплинам. Сделаны выводы об их востребованности при изучении математики в школьном курсе.

*Digital educational resources, training, mathematics, schoolchildren, mathematical training, digitalization, digital environment.*

Digitalization of education creates conditions for studying mathematics using digital educational resources. The article is devoted to the substantiation of the need to use digital educational resources in teaching mathematical disciplines. Conclusions are drawn about their relevance in the study of mathematics in the school course.

Цифровизация школьного образования предполагает «применение обучающимися мобильных и интернет-технологий» и охватывает все учебные дисциплины [4, с. 110]. «В современном мире информационные технологии стали неотъемлемой частью образовательного процесса» [1, с. 31]. Цель данной статьи – обосновать значимость применения цифровых образовательных ресурсов на уроках математики.

Несмотря на то, что «понятие «цифровизация» в контексте преподавания математических дисциплин еще не получило устойчивого определения» [2, с. 122], вопросам включения информационных технологий, цифрового учебного оборудования на уроках математики уделяется внимание в разных научных исследованиях. Не прибегая к избыточному цитированию, приведем несколько примеров. Группой педагогов делается вывод, что для повышения эффективности образовательного процесса необходимо «внедрение элементов цифрового образования, в частности использования ресурсов СДО LMS Moodle для организации и проведения занятий по дисциплинам математического цикла» [7, с. 43]. Формы организации образовательного процесса при обучении математики с использованием цифровых инструментов включают: «перевернутый класс», смешанное обучение, геймификацию [3]. Также в ряде педагогических исследований отмечается важная роль мультимедийного обеспечения курса математических дисциплин и современных информационно-коммуникационных технологий в учебном процессе [2; 5 и др.].



Повышенный интерес к применению цифровых образовательных ресурсов на уроках математики обусловлен преимуществами, которые они обеспечивают. Некоторые из них:

1. Повышение познавательного интереса к учебному предмету.
2. Повышение уровня наглядности в ходе изучения математики.
3. Демонстрация ученикам примеров оформления решений математических задач и упражнений.
4. Демонстрация абстрактных математических объектов.
5. Изучение большего количества учебного материала.
6. Демонстрация школьникам геометрических чертежей в формате сферических панорам с помощью технологий VR, AR (возможность вращать объекты, рассматривать под разными углами).
7. Внедрение в учебный процесс помощника (подсказки чат-ботов, проверка выполненных заданий).

Вместе с возможностями, которые обеспечивает информатизация, перед учителем ставятся новые задачи: от учителя «требуется постоянный поиск интересного материала, занимательного контента, работа с большим объемом данных и их обработка» [5, с. 28], учитель «должен обладать цифровой грамотностью, способностью создавать и применять контент посредством цифровых технологий» [4, с. 107], учителю необходимо «уметь оперативно обрабатывать и анализировать цифровую информацию» [2, с. 122]. Все это рисует перед нами новый портрет современного учителя математики, готового к работе в цифровой среде.

Указанные навыки педагогов востребованы на разных этапах уроков математики в школе. «В педагогической деятельности на уроках математики необходимо активно тестировать цифровые образовательные ресурсы. Это помогает активизировать работу учащихся разного уровня подготовленности на разных этапах урока. Использование цифровых образовательных ресурсов делает урок нестандартным, ярким, насыщенным» [1, с. 32]. Результаты исследования С.Ю. Ланиной подтверждают эту мысль [3]. Например, при проверке устного счета цифровые образовательные ресурсы позволяют «быстро предъявлять задания, оперативно корректировать результаты его выполнения», при изучении нового материала осуществлять «моделирование планиметрических и стереометрических фигур, построение сложных графиков, смещение графиков по осям координат, построение точек, векторов в декартовой системе координат в пространстве», на этапе проверки самостоятельной работы проводить «быстрый контроль результатов» и др. [3, с. 234].

Анализируя цифровые образовательные ресурсы на уроках математики, можно выделить как простые (интерактивные симуляции; цифровые продукты офисных пакетов, страницы HTML, PDF; иллюстрации JPEG; электронные книги с HTML-содержимым; аудиозапись; видеозапись), так и сложные – «это структура, которая использует и организует простые ресурсы в сложные учебные и методические материалы» [1, с. 31].



Приведем примеры цифровых ресурсов для учителей математики:

1) интерактивная геометрическая среда GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) позволяет работать с функциями, строить графики функций, вычислять корни и прочее [6];

2) сайт math.ru содержит библиотеку, олимпиадные задания, задачи, книги, видеолекции;

3) открытая электронная библиотека «Математическое образование» (<http://www.mathedu.ru>) содержит книги, справочники, методические пособия, учебники.

Отдельного внимания заслуживает область применения искусственного интеллекта на уроках математики (виртуальные репетиторы и помощники, автоматизация рутинных задач, автоматизированные системы оценки, симуляции и игры на основе ИИ и другое).

Таким образом, обладающие высоким педагогическим потенциалом цифровые образовательные ресурсы являются важным средством обучения, что обуславливает потребность в учителях математики, готовых к освоению и использованию цифровых ресурсов.

### **Библиографический список**

1. Деева Е.А., Шадрин Д.Е., Антропов В.А. Цифровые технологии в математике // Мир инноваций. 2023. № 3. С. 30–33.
2. Егорова Е.М. К вопросу о цифровизации в обучении математических дисциплин // АНИ: педагогика и психология. 2020. № 4 (33). С. 121–124.
3. Ланина С.Ю. Особенности применения цифровых инструментов при обучении математике // Ученые записки университета Лесгафта. 2022. № 7 (209). С. 232–235. DOI: 10.34835/issn.2308-1961.2022.7.p232-235
4. Никулина Т.В., Стариченко Е.Б. Информатизация и цифровизация образования: понятия, технологии, управление // Педагогическое образование в России. 2018. № 8. С. 107–113.
5. Расулов К.М., Самуйленкова О.В. Возможности и особенности применения школьниками цифровой среды в обучении математике // Вестник УРАО. 2022. № 3. С. 27–34. DOI: 10.24412/2072-5833-2022-3-27-34
6. Садовничий Ю.В., Туркменов Р.М. Использование интерактивной геометрической среды GeoGebra при проблемном обучении на примере решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными // Наука и школа. 2015. № 3. С. 25–32.
7. Чикина Т.Е., Коларькова О.Г. Цифровые технологии в процессе обучения математике // Russian Journal of Education and Psychology. 2023. № 1. С. 42–55. DOI: 10.12731/2658-4034-2023-14-1-42-57

# СОВРЕМЕННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ПОДХОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБУЧАЮЩЕГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ, НА ПЛАТФОРМЕ STEPİK

## MODERN DIGITAL APPROACHES USED IN THE DESIGN OF A MATHEMATICS TRAINING COURSE ON THE STEPİK PLATFORM

Л.С. Мочалова, А.В. Фомина

L.S. Mochalova, A.V. Fomina

*Цифровые подходы, платформа Stepik, цифровизация, теория вероятностей.*

В статье рассматриваются современные цифровые технологии и их применение в разработке обучающих курсов по математике. Обсуждается важность интеграции цифровых инструментов в образовательный процесс, позволяющих повысить эффективность обучения и вовлеченность учащихся.

*Digital approaches, Stepik platform, digitalization, probability theory.*

The article discusses modern digital technologies and their application in the development of educational courses in mathematics. The importance of integrating digital tools into the educational process to improve learning efficiency and student engagement is discussed.

**В**ажнейшую роль в создании информационно-образовательной среды играет математика. ФГОС ориентирует нас на широкое использование цифровых инструментов как необходимое условие решения поставленных перед образовательным учреждением задач в условиях развития информационного общества. Образовательные онлайн-платформы открывают новые горизонты для обучения, а также позволяют использовать инновационные методы преподавания. В частности, в курсе по теории вероятностей, необходимом для успешной сдачи ЕГЭ по математике, важно интегрировать современные подходы и технологии. Выделим несколько современных цифровых подходов на платформе Stepik на примере обучающих курсов по математике «Теория вероятностей» [4]:

1. При изучении теории вероятностей *индивидуализация* особенно эффективна, поскольку материал может быть трудным для многих учеников. Преподаватели с помощью образовательной онлайн-платформы могут адаптировать учебные материалы под нужды каждого учащегося, например, платформа может предложить подборку видеолекций, интерактивных задач или же обучающие курсы [1].

2. Можно использовать интерактивные элементы обучения, например, видеуроки с элементами геймификации, где студенты решают задачи в игре, квизы и опросы, позволяющие проверить знания в реальном времени, тесты различного уровня сложности с автоматической проверкой (рис. 1), задачи на вычисление вероятностей, использование формул комбинирования и перестановок и т.д. [1].

## Добрая теория вероятностей (для ЕГЭ) с Сергеем Балакиревым

Теория вероятностей - один из самых интересных и, вместе с тем, коварных разделов математики. Порой, даже самые простые, на первый взгляд, задачи приводят к совершенно неожиданным результатам. Поэтому, чтобы безошибочно их решать необходимо правильно понимать, что такое вероятность, а также знать и уметь применять различные способы для ее вычисления.

Начальный уровень



Начать просмотр

★★★★★ 4.9

4 237 учащихся

69 отзывов

### Чему вы научитесь

- ✓ Правильно понимать вероятность случайных событий.
- ✓ Познакомитесь с формулой  $P = m/n$  для вычисления вероятностей простых событий в самых разных задачах.
- ✓ Узнаете, что такое противоположные события, зачем они нужны и как вычисляются вероятности таких событий.
- ✓ Изучите, что такое зависимые и независимые события, а также условная вероятность.
- ✓ Узнаете, что представляет собой вероятность произведения двух событий и как она вычисляется.
- ✓ Познакомитесь с теорией совместных и несовместных событий и научитесь их применять при вычислении вероятности суммы двух событий.
- ✓ После каждого раздела предполагается выполнение практических задач на закрепление пройденного материала.

### Бесплатно

Поступить на курс

♥ Хочу пройти

### Учиться можно сразу

**В курс входят**

- 12 уроков
- 1 час 20 минут видео
- 140 тестов

*Рис. 1. Тесты на онлайн-платформе*

Также есть задания, где учащиеся могут перетаскивать элементы, чтобы создать правильную последовательность или сопоставить термины с определениями, например, сопоставление понятий «случайное событие», «достоверное событие», «невозможное событие», на платформе можно вводить практически кейс-стадии с использованием вероятностных методов, например, анализ данных о погоде, спортивных событиях и т.д. (рис. 2).

Теория вероятностей и решение задач ОГЭ и ЕГЭ

Прогресс по курсу: 0/33

- 1 Основание понятия теор...
- 1.1 Предмет теории веро...
- 1.2 Виды случайных собы...
- 1.3 Определение вероятн...
- 2 Теорема умножения вер...
- 2.1 Теорема умножения ве...
- 2.2 Вероятность появления...
- 3 Теорема сложения веро...
- 3.1 Теорема сложения вер...
- 3.2 Противоположные соб...
- 3.3 Теорема сложения вер...
- 4 Практика решения зада...
- 4.1 Задачи ОГЭ по теории ...
- 4.2 Задачи ЕГЭ по теории ...

4.2 Задачи ЕГЭ по теории вероятности 1 из 10 шагов пройден 0 из 9 баллов получено

До окончания курса осталось  
получить 53 балла  
учиться 2 часа

В данном уроке представлено решение нетипичных задач ЕГЭ по математике.

**Задача 1.** Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35% этих стекол, вторая – 65%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

**Решение.** Так как первая фабрика выпускает 35% окон, то вероятность того, что стекло выпущено первой фабрикой, равна 0,35. Аналогично, вероятность того, что стекло выпущено второй фабрикой, равна 0,65. Вероятность того, что стекло выпущено на первой фабрике и оно бракованное:  $0,35 \cdot 0,03 = 0,0105$ . Вероятность того, что стекло выпущено на второй фабрике и оно бракованное:  $0,65 \cdot 0,05 = 0,0325$ . Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна  $0,0105 + 0,0325 = 0,043$ .

**Задача 2.** Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

**Решение.** Вероятность того, что коббой Джон промахнется, если стреляет из пристрелянного револьвера, равна 0,1. Вероятность того, что коббой Джон промахнется, если стреляет из непристрелянного револьвера, равна  $1 - 0,3 = 0,7$ . Вероятность того, что коббой Джон хватается пристрелянный револьвер, равна  $4/10 = 0,4$ . Вероятность того, что коббой Джон хватается непристрелянный револьвер (  $10 - 4$  )/10 = 0,6. По формуле условной вероятности, вероятность того, что коббой Джон хватается пристрелянный револьвер, стреляет из него и промахивается, равна  $0,1 \cdot 0,4 = 0,04$ . Вероятность того, что коббой Джон хватается непристрелянный револьвер, стреляет из него и промахивается, равна  $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$ . Эти события несовместны, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей данных событий, то есть  $0,04 + 0,42 = 0,46$ .

Решение данной задачи можно представить графически

Пристрелянные револьверы 4 шт.		Непристрелянные револьверы 6 шт.	
Вероятность взять – 0,4		Вероятность взять – 0,6	
Попал $p = 0,9$	Промажнулся $q = 1 - 0,9 = 0,1$	Попал $p = 0,3$	Промажнулся $q = 1 - 0,3 = 0,7$
Промажнулся из пристрелянного $0,4 \cdot 0,1 = 0,04$		Промажнулся из непристрелянного $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$	
Вероятность того, что коббой Джон промахнулся $0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,46$			

*Рис. 2. Задания и практические кейсы*

3. *Использование мультимедийных ресурсов* (рис. 3). Визуальные и аудиовизуальные материалы, анимации, инфографики и интерактивные диаграммы способствуют лучшему усвоению информации [3].

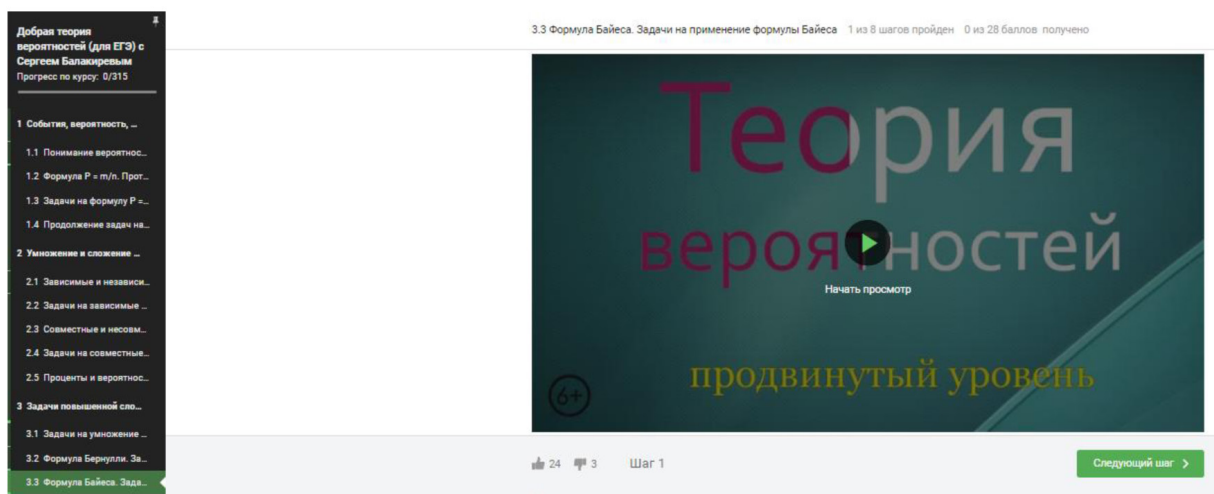


Рис. 3. Использование мультимедийных ресурсов

4. *Цифровизация* предоставляет возможности для создания общения с преподавателями и другими учащимися. В рамках курса можно организовать дискуссионные форумы, групповые проекты, практические задания. Также можно вести новостной блог по изучению темы, выкладывая полезные материалы, видеокурсы, задания и прочие материалы [3].

5. Stepik включает систему, которая будет предоставлять *своевременную обратную связь по выполненным заданиям*, позволяет учащимся работать над ошибками [1].

Изучив современные цифровые методы образовательной платформы Stepik, мы предприняли попытку создания системы занятий с применением интерактивных учебных материалов для 10–11 классов. Нашей целью является предоставление школьникам инструментов для практики в решении задач с кратким ответом, а также обучающие тренажеры для подготовки к задачам с развернутым ответом.

Было разработано тестирование по теории вероятностей, которое структурировано по уровню сложности, сначала идут легкие задания (с выбором ответа из предложенных, с вводом ответов), а потом более сложные задания.

*Пример тренировочного упражнения с кратким ответом.* Тренировочные упражнения создавались на основе заданий профильного ЕГЭ по математике открытого банка ФИПИ. Каждое задание снабжено не автоматической проверкой и возможностью посмотреть правильный ответ (рис. 4–5).

*Краткие видеолекции с разбором основных вопросов теории вероятностей с примерами решения задач с развернутым ответом.* Совмещение аудиовизуального материала с текстовыми объяснениями и примерами помогает удовлетворить различные стили обучения у учеников (рис. 6).

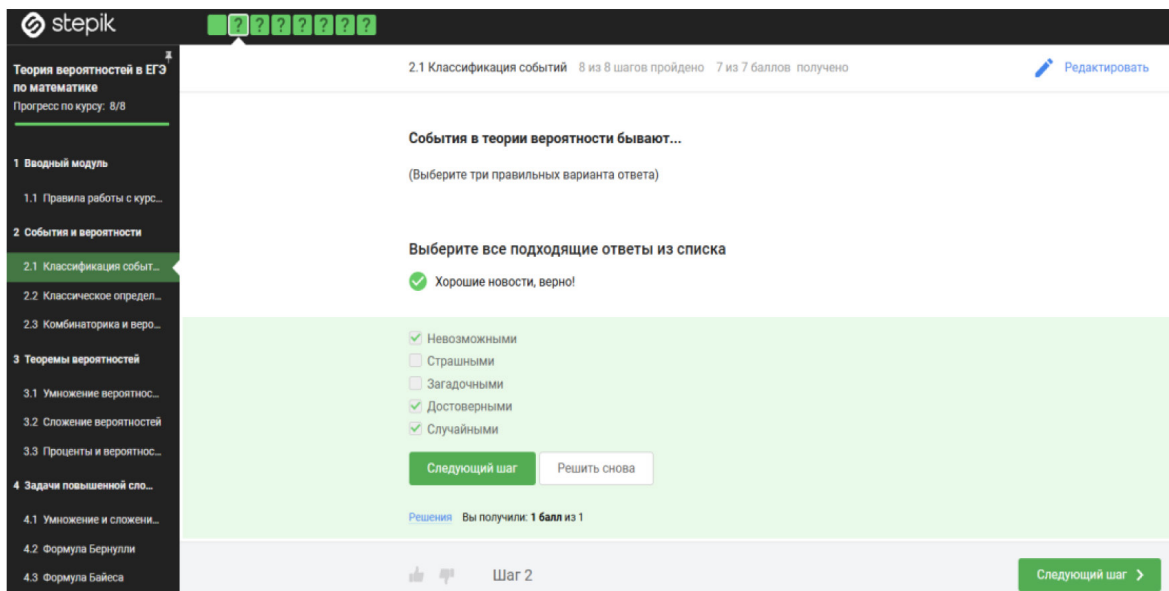


Рис. 4. Пример тренировочного упражнения с кратким ответом (выбрать из предоставленных вариантов ответов)

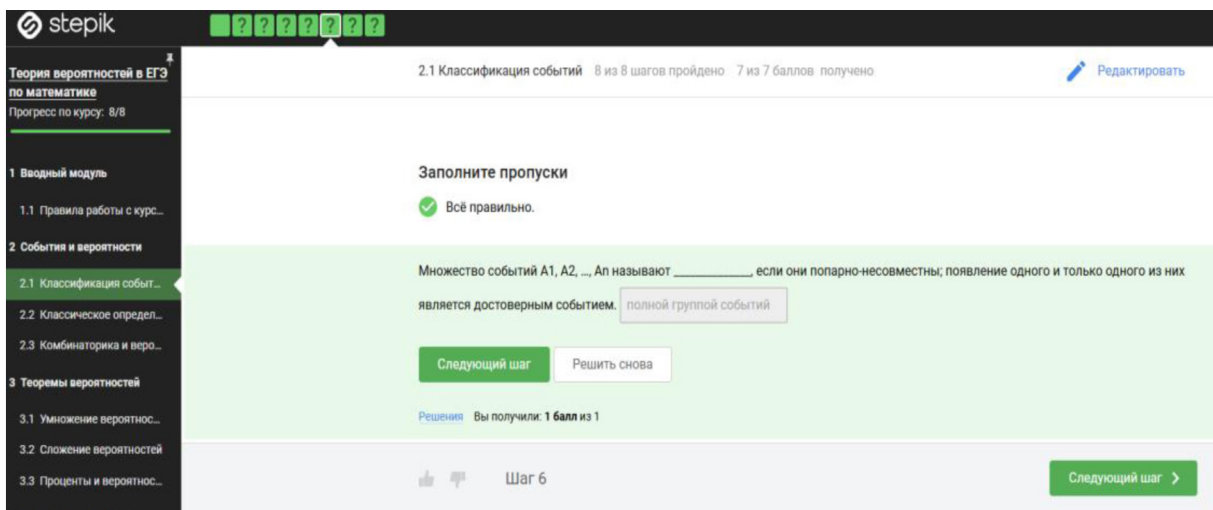


Рис. 5. Пример тренировочного упражнения с кратким ответом (вписать нужное слово)

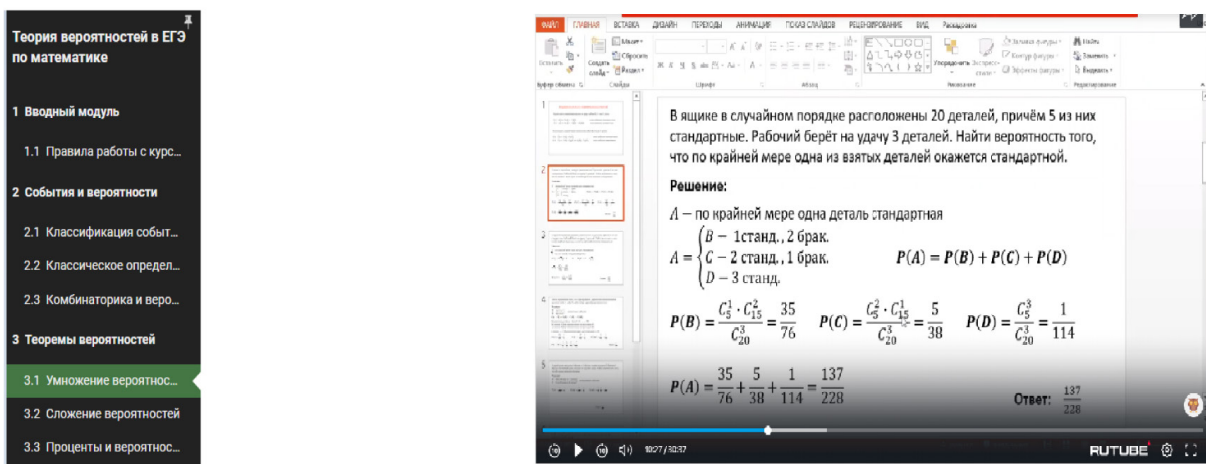


Рис. 6. Краткие видеолекции с разбором основных вопросов теории вероятностей с примерами решения задач с развернутым ответом



*Встроенное справочное пособие в обучающий курс.* Оно предоставляет учащимся дополнительные материалы и объяснения, которые помогают понять сложные темы и концепции, относящиеся к курсу (рис. 7).

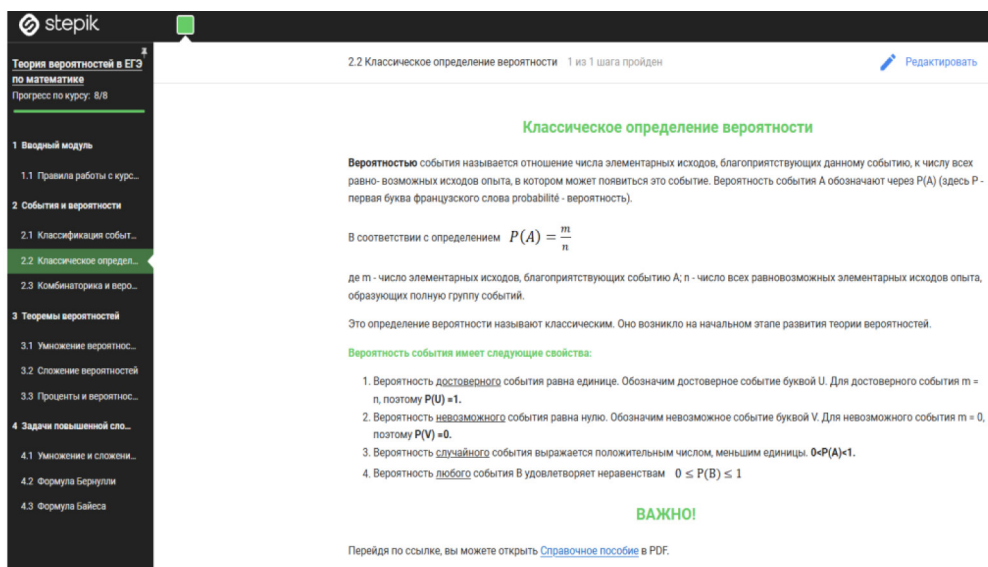


Рис. 7. Встроенное справочное пособие

*Задачи для самостоятельного решения с дальнейшей проверкой, разработанные самостоятельно педагогом.* Ученики могут прикреплять свои решения в комментарии, чтобы педагог мог оставить обратную связь. Также платформа позволяет следить за прогрессом учеников в процессе изучения темы (рис. 8).

У Васи есть коллекция значков, состоящая из 30 футбольных значков и 40 хоккейных. Вася случайным образом выбирает один значок. Какова вероятность того, что он выберет футбольный значок? Ответ округлите до десятых.

Выберите один вариант из списка

Неверно. Попробуйте задать наводящий вопрос в комментариях, тогда команда курса и другие учащиеся смогут помочь вам.

Попробуй еще раз.

0,52  
 0,5  
 0,42  
 0,4

Общее количество значков у Васи равно сумме всех футбольных и хоккейных значков:  $30+40=70$ . Количество благоприятствующих исходов для выбора футбольного значка равно количеству футбольных значков, то есть 30. Таким образом, вероятность выбрать футбольный значок равна отношению количества футбольных значков к общему количеству значков:  $3:7=0,4285714286$ . Округляем до десятых и получаем 0,4.

Попробовать снова

Решения Вы получили: ...

Рис. 8. Эффективность использования цифрового тренажера в изучении теории вероятностей: сравнительный анализ результатов 10-х классов

Мы провели систему занятий в 10 классе, используя данный тренажер для изучения теории вероятностей. Занятия проводились не только аудиторно, но и были вынесены на самостоятельную работу. В одном классе (10А) занятия проводились традиционным методом без применения тренажера, в другом (10Б) с применением тренажера. По выполненным заданиям ученики получили оценки, которые представлены на рис. 9 (в процентах).





Рис. 9

Таким образом, проектирование обучающего курса по теории вероятностей для подготовки к ЕГЭ требует современных подходов и технологий, таких как индивидуализация, интерактивность, мультимедиа, совместная работа и автоматизированная оценка. Это повышает качество и эффективность обучения, делая его более интересным и наглядным. Информационные технологии сокращают время на выработку навыков, увеличивают количество тренировок, помогают поддерживать оптимальный темп работы и повышают мотивацию учеников через игровые элементы.

## Библиографический список

1. Вершинина Г.Б. Геймификация как способ организации обучения на уроках информатики: сборник материалов международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» / под общ ред. Л.Л. Босовой, Д.И. Павлова. М.: МГПУ, 2020. 697 с.
2. Караказьян С.А., Уразаева Л.Ю. Эффективное использование образовательных интернет-ресурсов по математике при дистанционном формате обучения // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnoe-ispolzovanie-obrazovatelnyh-internet-resursov-po-matematike-pri-distantcionnom-formate-obucheniya?ysclid=m2cw7lqgpv789840414> (дата обращения: 13.10.2024).
3. Ланина С.Ю. Особенности применения цифровых инструментов при обучении математике // Ученые записки университета им. П.Ф. Лесгафта. 2022. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-primeneniya-tsifrovyyh-instrumentov-pri-obuchanii-matematike?ysclid=m2cw11uix934551507> (дата обращения: 13.10.2024).
4. Мочалова Л.С., Фомина А.В. Проектирование обучающего курса «Теория вероятностей в ЕГЭ по математике» на образовательной платформе Stepik. Красноярск: Издательство СИБУП, 2024. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=67158108> (дата обращения: 13.10.2024).
5. Stepik. URL: <https://welcome.stepik.org/ru>.

# ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ X ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

## RESULTS OF THE X EXPERIMENTAL MATHEMATICS TOURNAMENT

Ю.В. Никиченко, М.А. Павлова

Yu.V. Nikichenko, M.A. Pavlova

*Турнир по экспериментальной математике, экспериментальная математика, системы динамической математики, GeoGebra.*

В данной статье представлены результаты проведения X турнира по экспериментальной математике для учащихся 5–9 класса, приведены решения и типичные ошибки при решении участниками исследовательской задачи с использованием экспериментально-теоретических методов.

*Experimental Mathematics Tournament, Experimental Mathematics, systems of dynamic mathematics, GeoGebra.*

This article presents the results of the X experimental Mathematics tournament for 5th-9th grade students, provides solutions and typical mistakes made participants when solving a research problem using experimental and theoretical methods.

**Н**а базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова 18 февраля 2024 г. состоялся юбилейный X Турнир по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов. Данный турнир проводится ежегодно с целью повышения у учащихся интереса к математике и развитию творческих способностей в области экспериментальной математики.

Участниками турнира в этом году стали более 400 учащихся 5–9 классов общеобразовательных школ из Архангельска, Владикавказа, Новосибирска, Среднеуральска, Арсеньева, Перми, Красноярска, Подольска, Череповца, Петропавловска-Камчатского и других городов.

Участники могли участвовать индивидуально в режиме онлайн, а также очно на базах представителей турнира. Так как для участников наиболее трудным оказалось задание № 5 турнира, представим его решение для учащихся 7–9 классов.

**Задание 5 (7 класс).** Внутри квадрата ABCD взяли произвольную точку O. Через нее провели сначала прямые, параллельные сторонам квадрата, а затем его диагоналям. Полученные фигуры закрасили через одну в черный цвет [1].

1) Выясните, зависит ли сумма площадей черных фигур от положения точки O внутри квадрата?

2) Выясните, как зависит сумма площадей черных фигур от длины стороны квадрата. Результат запишите формулой. Обоснуйте свой вывод.

**Решение:** Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, инструментом «Правильный многоугольник» строим квадрат ABCD. Затем инструментом «Точка на объекте» строим произвольную точку O внутри квадрата. Инструментом «Отрезок» строим диагонали квадрата

АС и ВD. Инструментом «Параллельная прямая» строим прямые, параллельные сторонам квадрата, а затем его диагоналям. После этого скрываем диагонали квадрата. Инструментом «Пересечение» строим точки пересечения прямых со сторонами квадрата. Соединяем с помощью инструмента «Многоугольник» полученные фигуры через одну и закрашиваем их в черный цвет. С помощью инструмента «Площадь» выводим на экран значения площадей закрашенных частей квадрата (рис. 1).

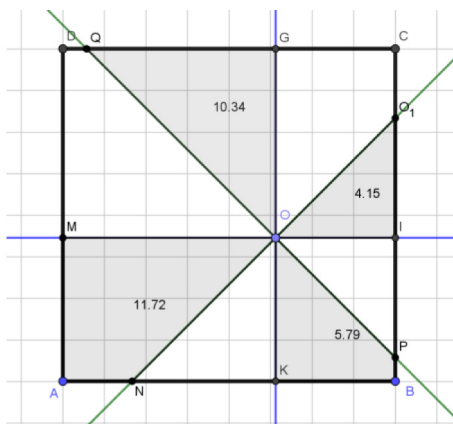


Рис. 1

*Поисковый эксперимент:* Перемещаем точку O и наблюдаем за суммой площадей закрашенных частей квадрата.

*Гипотезы по данным экспериментов:*

1) Сумма площадей черных фигур не зависит от положения точки O внутри квадрата.

2) Сумма площадей черных фигур равна сумме площадей белых фигур и, следовательно, равна  $\frac{a^2}{2}$ , где  $a$  – длина стороны квадрата.

*Доказательство:* На рисунке 2 показано, что из частей квадрата можно сложить квадрат так, что над диагональю будут находиться только черные части, а под диагональю – не закрашенные.

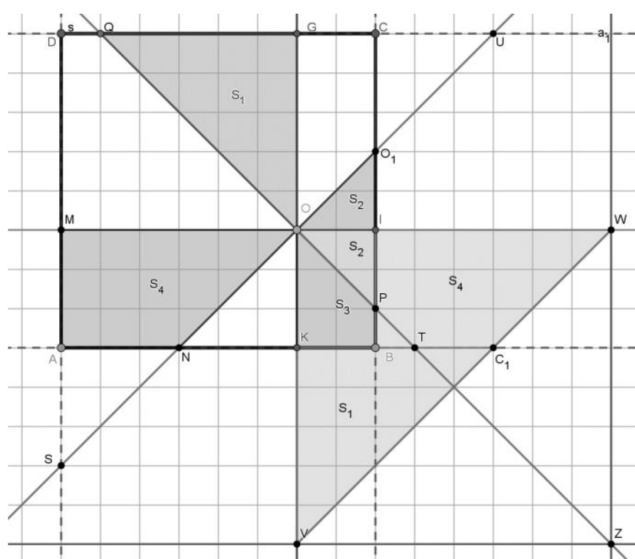


Рис. 2

Наиболее часто учащиеся допускают ошибку при проведении конструктивного эксперимента, упустив важные детали в условии задания.

Примером этой ошибки служит динамический чертеж одного из участников 7 класса (рис. 3). Учащийся строит внутри квадрата ABCD произвольную точку E, проводит прямые, параллельные сторонам квадрата. Не соблюдая условие параллельности диагоналям квадрата, участник строит треугольники DEI, EFC, EGB, EHA, и далее проводит поисковый эксперимент по неверно построенной модели.

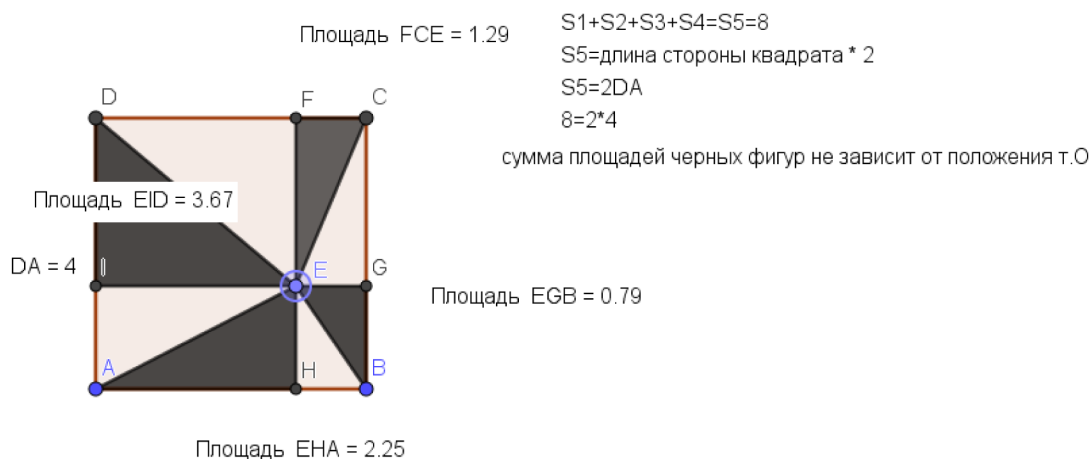


Рис. 3

**Задание 5 (8 класс).** Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника ABCD, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и CK пересекаются в точке T. Зависит ли отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT от вида четырехугольника ABCD? Обоснуйте свой ответ [2].

**Решение:** Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, инструментом «Многоугольник» строим произвольный выпуклый четырехугольник ABCD. С помощью инструмента «Середина или центр» строим середину отрезка AC (точку K) и середину отрезка BC (точку M). Затем инструментом «Отрезок» строим отрезки AM, BK, CK и MD, с помощью инструмента «Пересечение» находим точки пересечения отрезков AM и BK (точка P), отрезков CK и MD (точка T). С помощью инструмента «Многоугольник» строим четырехугольник PMTK и треугольники ABP и CDT (рис. 4).

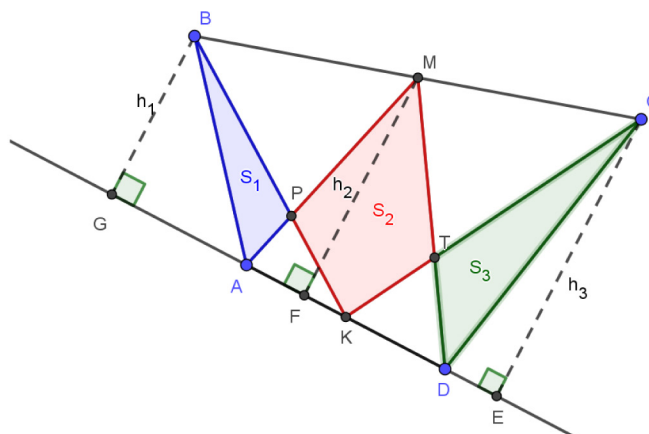


Рис. 4

*Поисковый эксперимент:* С помощью инструмента «Площадь» выводим на экран значения площадей этих фигур. В строку ввода вводим  $\frac{S_2}{S_1+S_3}$ . Меняем вид четырехугольника, перемещая точки А или D, и наблюдаем за результатом.

*Гипотеза по данным эксперимента:* Отношение площади четырехугольника РМТК к сумме площадей треугольников АВР и СDТ не зависит от вида четырехугольника ABCD и равно 1.

*Доказательство:*

$$S_2 = S_{\Delta AMD} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD}) = \frac{1}{2} \cdot 2AK \cdot \frac{h_1 + h_3}{2} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD})$$

$$S_1 + S_3 = S_{\Delta ABK} + S_{\Delta KCD} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD}) = \frac{1}{2} \cdot AKh_1 + \frac{1}{2} \cdot AKh_3 - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD})$$

$$\frac{S_2}{S_1 + S_3} = 1$$

*Ответ:* не зависит, отношение равно 1.

Остановимся более подробно на описании общей ошибки участников, не зависящей от типа задачи. Оценка решений осуществляется по представленному описанию хода решения. Элементами развернутого ответа в турнире считаются текстовые описания, рисунки, скриншоты, которые отражают результаты компьютерных экспериментов.

Рассмотрим пример решения задания № 5, представленного участником 8 класса (рис. 5). Учащийся делает вывод, рассмотрев в пункте а) частный случай, прямоугольник, где дает неполное обоснование равенства площадей треугольников, в пункте б) произвольный четырехугольник, не представляя обоснования.

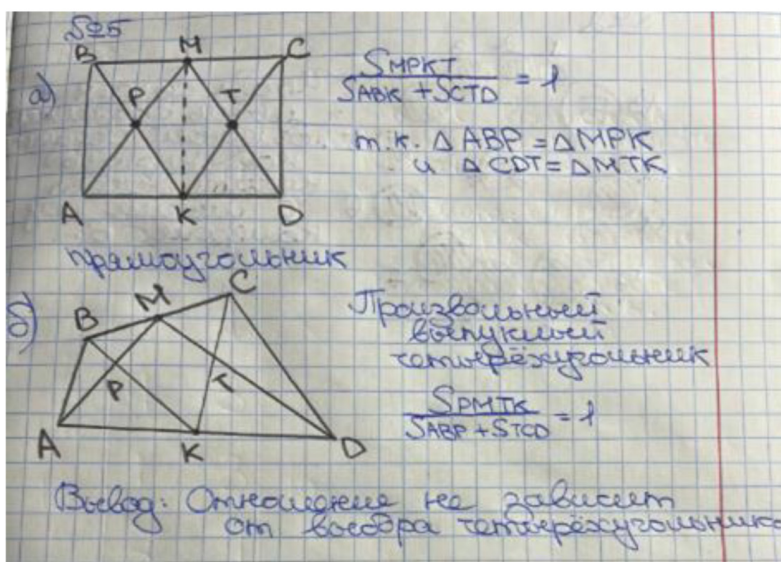


Рис. 5

Этот пример показывает, что при подготовке к турниру участники должны научиться не только проводить эксперимент и делать на его основе вывод, но и представлять ход решения с обоснованием.



**Задание 5 (9 класс).** На сторонах  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  выбраны соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что угол  $MDN$  равен  $45^\circ$  [3].

1) Установите, зависит ли периметр треугольника  $MBN$  от выбора точек  $M$  и  $N$  на сторонах квадрата.

2) Зависит ли и как периметр треугольника  $MBN$  от длины стороны квадрата, если она равна  $a$ . Выразите эту зависимость формулой. Докажите свой ответ.

**Решение:** Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, с помощью инструмента «Многоугольник» строим квадрат  $ABCD$  (рис. 6). С помощью инструмента «Точка на объекте» отмечаем точку  $M$  на стороне  $AB$ . Затем строим прямые через точки  $D$  и  $M$ ,  $C$  и  $B$ . С помощью инструмента «Поворот вокруг точки» делаем поворот прямой  $DM$  вокруг точки  $D$  на  $45^\circ$ , отмечаем точку пересечения этой прямой со стороной квадрата  $BC$  – точку  $N$ . С помощью инструмента «Многоугольник» строим треугольник  $MBN$ .

*Поисковый эксперимент:* С помощью инструмента «Расстояние или длина» определяем периметр треугольника  $MNB$ , кликнув на область внутри треугольника (рис. 7). Перемещая точку  $M$  по стороне  $AB$ , наблюдаем за изменением периметра.

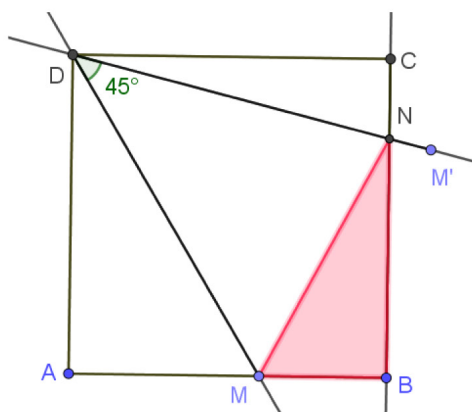


Рис. 6

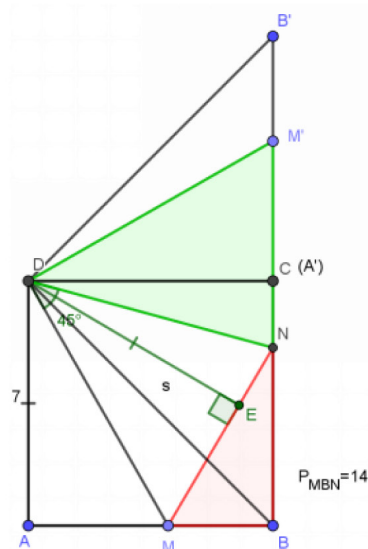


Рис. 7

*Гипотезы на основе данных компьютерного эксперимента:*

1) Периметр треугольника  $MBN$  зависит только от длины стороны квадрата, но не от положения точки  $M$  на его стороне  $AB$ .

2) Периметр треугольника  $MBN$  равен:  $2a$ , где  $a$  – длина стороны квадрата.

Если провести высоту в треугольнике  $DMN$ , то легко заметить, что справедливость гипотезы 1 следует из равенства пар прямоугольных треугольников:  $\triangle MAD = \triangle MED$ ;  $\triangle CND = \triangle END$ . Каждая пара этих треугольников имеет общую гипотенузу, следовательно, для доказательства их равенства достаточно доказать:  $AD = DE = DC$ .



Доказательство:

1) Выполним поворот отрезка  $AB$  на  $90^\circ$  вокруг точки  $D$  против часовой стрелки.  $R_D^{90^\circ}(A) = A' = C$ ;  $R_D^{90^\circ}(B) = B' \Rightarrow R_D^{90^\circ}(M) = M' \in A'B'$ .

2) Поворот сохраняет равенство отрезков и углов, следовательно:  
 $DM = DM'$ ;  $\angle ADM = \angle A'DM'$ .

3)  $\triangle MDN = \triangle NDM'$ , так как  $DN$  – общая,  $DM = DM'$ ,  $\angle M'DN = \angle M'DA' + \angle A'DN = \angle ADM + \angle CDN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

4)  $\triangle MDN = \triangle NDM' \Rightarrow DE = DC$ . Что и требовалось доказать.

5)  $\triangle MAD = \triangle MED$ ;  $\triangle CND = \triangle END$  по гипотенузе и катету. Следовательно,  $AM = ME$ ;  $EN = NC$ .

6)  $P_{MNB} = AM + MB + BN + NC = 2AD$ .

Еще одной ошибкой участников турнира является подмена моделирования объекта и строгих построений, требуемых в условии задания, на эскизное изображение. При этом построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки), что не позволяет провести эксперимент и выдвинуть гипотезу.

В заключение отметим, что для подготовки учащихся к турниру предлагаются решения заданий прошлых лет [4] и критерии их оценки, по которым можно судить о типичных ошибках, допускаемых участниками.

### Библиографический список

1. Произволов В.В. Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003. 128 с. URL: [https://www.mathedu.ru/text/proizvolov\\_zadachi\\_na\\_vyrost\\_2003/p0/](https://www.mathedu.ru/text/proizvolov_zadachi_na_vyrost_2003/p0/) (дата обращения: 18.10.2024).
2. Гордин Р.К. Система задач по геометрии. URL: [https://problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=55102](https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=55102) (дата обращения: 18.10.2024).
3. Ходулев А.Б. Система задач по геометрии. URL: [https://problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=55538](https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=55538) (дата обращения: 18.10.2024).
4. Архив заданий и решений турнира по экспериментальной математике. URL: <https://itprojects.narfu.ru/turnir/task.php#topmenu> (дата обращения: 18.10.2024).

# ИТОГИ ВТОРОГО КОНКУРСА ЭКСПОНАТОВ ДЛЯ МУЗЕЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## THE RESULTS OF THE SECOND COMPETITION OF EXHIBITS FOR THE MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS

М.А. Павлова

M.A. Pavlova

*Музей занимательной математики, креативная математика, математический экспонат, популяризация математики, динамическая модель, GeoGebra.*

В статье представлены итоги второго открытого конкурса «Экспонат для музея занимательной математики», который состоялся в 2023 г. на базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова, а также представлены примеры конкурсных работ финалистов, включающие компьютерные модели, разработанные с использованием систем динамической математики.

*Museum of entertaining mathematics, creative mathematics, mathematical exhibit, popularization of mathematics, dynamic model, GeoGebra.*

The article presents the results of the second open competition «Exhibit for the Museum of Entertaining Mathematics», which took place in 2023 on the basis of the Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, and also provides examples of the finalists' competitive works, including computer models developed using dynamic mathematics systems.

**П**опуляризация математики является одной из важнейших задач развития математического образования. В настоящее время самым известным проектом, направленным на решение этой проблемы, является научно-популярный сайт «Математические этюды» [1], выполненный в стенах Математического института им. В.А. Стеклова РАН. На сайте увлекательно и интересно представлены модели, этюды и миниатюры о красивых математических задачах с точными историческими сведениями об ученых и их открытиях.

Для вовлечения большей аудитории образовательные проекты реализуются через видеохостинги и социальные сети, например, «Математическая модель – в школу!» [2] под руководством Н.Н. Андреева, целью которого является создание школьниками математических моделей для наполнения школьных кабинетов; «Математика – просто» [3], «Маткульт-привет!» [4] А.В. Савватеева, где ученый представляет просветительские лекции и полезные ресурсы, предназначенные не только для любителей математики, но и для «гуманитариев».

Конкурс «Экспонат для музея занимательной математики» для обучающихся общеобразовательных школ также направлен на повышение у подрастающей молодежи мотивации к изучению математики за счет вовлечения их в деятельность по созданию своего математического экспоната для Музея занимательной математики [5].

На конкурс принимаются работы, включающие:

- эскиз постера, рассказывающего об истории представляемого математического экспоната или открытия и его роли в математике и ее приложениях;
- натурный экспонат или его прототип;

– электронный ресурс, представляющий модель математического объекта (электронный ресурс может быть создан с использованием любой системы динамической математики).

Критерии оценки работ конкурса по всем составляющим представлены в таблицах 1–3.

Таблица 1

**Критерии оценки оформления исторической справки на постере**

	3 балла	2 балла	1 балл
Содержание	Постер имеет грамотно изложенную и логично представленную историко-научную информацию. Тема раскрыта.	Постер содержит некоторую историко-научную информацию	Тема недостаточно раскрыта
Дизайн	В постер включены изображения, соответствующие историческим сведениям. Эффективно использованы графические элементы (карты, схемы, ленты времени и пр.)	Изображения имеют отношение к теме и истории излагаемого вопроса	Некоторые изображения не имеют отношения к теме, дизайн не привлекает внимания
Правописание	Отсутствуют ошибки	Есть несколько ошибок, не искажающих исторические сведения	Есть ошибки, искажающие исторические сведения
Ссылки на источники	Указаны ссылки на достоверные источники	Несколько ссылок не являются достоверными	Ссылки на источники указаны неверно

Таблица 2

**Критерии оценки представления натурального экспоната**

	3 балла	2 балла	1 балл
Творческий замысел	Экспонат выполнен с элементами рационализации	Экспонат выполнен с частичным изменением прототипа образца	Экспонат является копией без элементов рационализации и новизны
Сложность и трудоемкость	Работа выше требований для данного возраста	Работа выполнена в соответствии требованиям данного возраста	Работа ниже требований данного возраста
Качество	Работа выполнена на высоком уровне	Работа выполнена на среднем уровне	Работа выполнена на недостаточном хорошем уровне
Форма представления	Натурный образец	Действующая модель	Макет

Таблица 3

**Критерии оценки представления компьютерной модели**

	3 балла	2 балла	1 балл
Интерактивность	Модель позволяет провести эксперимент	Представлена динамическая модель, которая представляет результат эксперимента	Интерактивность отсутствует
Функциональность модели	Модель раскрывает математические свойства	Модель визуализирует математический объект, но раскрывает не все его свойства	Модель только визуализирует математический объект, не раскрывая его свойств

При оценке работ очного (основного) тура учитываются результаты заочного (предварительного) тура конкурса. Добавляются баллы за представление интерактивной мини-экскурсии по своему экспонату по следующим критериям (по 1 баллу за каждый пункт):

- содержательность отобранного для мини-экскурсии материала;
- логичность изложения и стиль;
- уверенное изложение материала;
- использование натурального экспоната и компьютерной модели;
- эмоциональность и грамотность речи;
- умение владеть вниманием аудитории.

С положением о Конкурсе можно ознакомиться на сайте [6].

В состав конкурсной комиссии входят преподаватели и студенты САФУ, сотрудники многофункционального образовательного центра «Музей занимательных наук» САФУ, учителя математики и участники молодежного движения популяризаторов математики, которые являются разработчиками экспонатов или экскурсоводами Музея занимательной математики.

На второй конкурс было зарегистрировано более 70 обучающихся образовательных организаций г. Архангельска, г. Коряжмы, г. Няндомы, г. Северодвинска, г. Новодвинска, г. Среднеуральска, г. Брянска и г. Арсеньева. Очный тур состоялся 16 декабря 2023 г. на базе интеллектуального центра-научной библиотеки САФУ в форме выставки со свободным доступом. Учащиеся, прошедшие в финал, представили более 30 прототипов математических экспонатов, участники из других регионов РФ представили свои работы в виде видеороликов.

По результатам оценки работ в номинации «Удивительная геометрия» были отмечены работы участников, представивших экспонаты: «Платоновы тела», «Сечения конуса», «Мозаика Пенроуза», «Пантограф» и «Сфериконы».

Учащиеся 11 класса МБОУ СШ № 8 г. Архангельска представили с помощью динамической модели, разработанной в GeoGebra, свойство пантографа – построение подобных фигур (рис. 1).

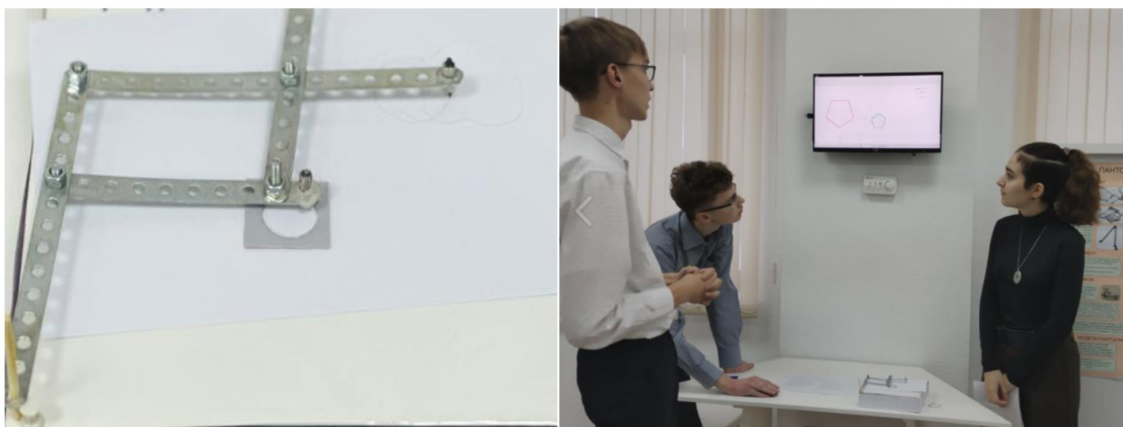


Рис. 1

В номинации «Игротека» были представлены различные математические игры и головоломки, экспертная комиссия отметила работу учащегося 6 класса Гимназии № 3 г. Архангельска. На рисунке 2 представлены составляющие его конкурсной работы «Овоид».

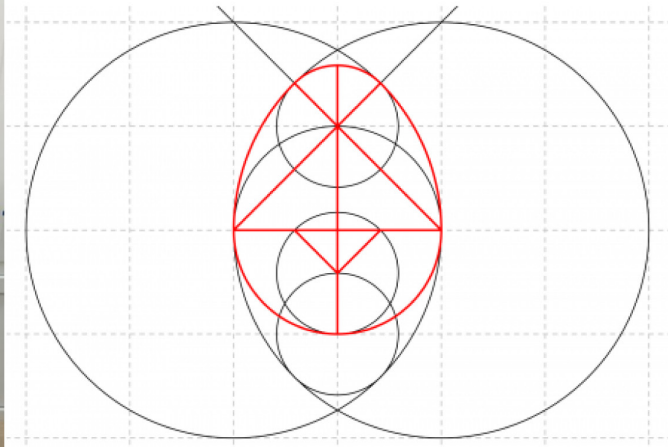


Рис. 2

По словам школьника, построение модели овоида в GeoGebra было необходимо ему для создания самого экспоната, с помощью нее были установлены размеры деталей деревянной головоломки.

В номинации «Необыкновенные объекты» конкурсантами были представлены такие экспонаты, как «Калейдоскоп», «Цепная дорога», «Дорожные люки», «Системы счисления» и «Двойной маятник».

Примером работы, включающей все три составляющие, является экспонат «Цепная дорога» (рис. 3). На динамической модели учащийся МБОУ № 36 демонстрирует, как с помощью уравнения «цепной линии» была разработана дорога для движения машины с квадратными колесами.

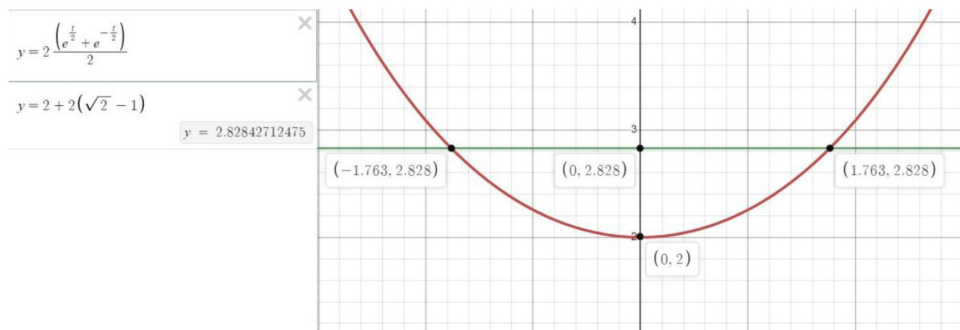


Рис. 3



В номинации «Математика и искусство» ребята показали, как математика проявляется в музыке, портретах известных художников и творчестве.

В номинации «IT-проекты» была выделена работа, демонстрирующая квадранс, с помощью которого в прозрачной пирамиде появляются псевдоголографические изображения различных фигур (рис. 4). Для этого учащаяся 6 класса МБОУ ЭБЛ разработала в GeoGebra несколько моделей вращающихся многоугольников.

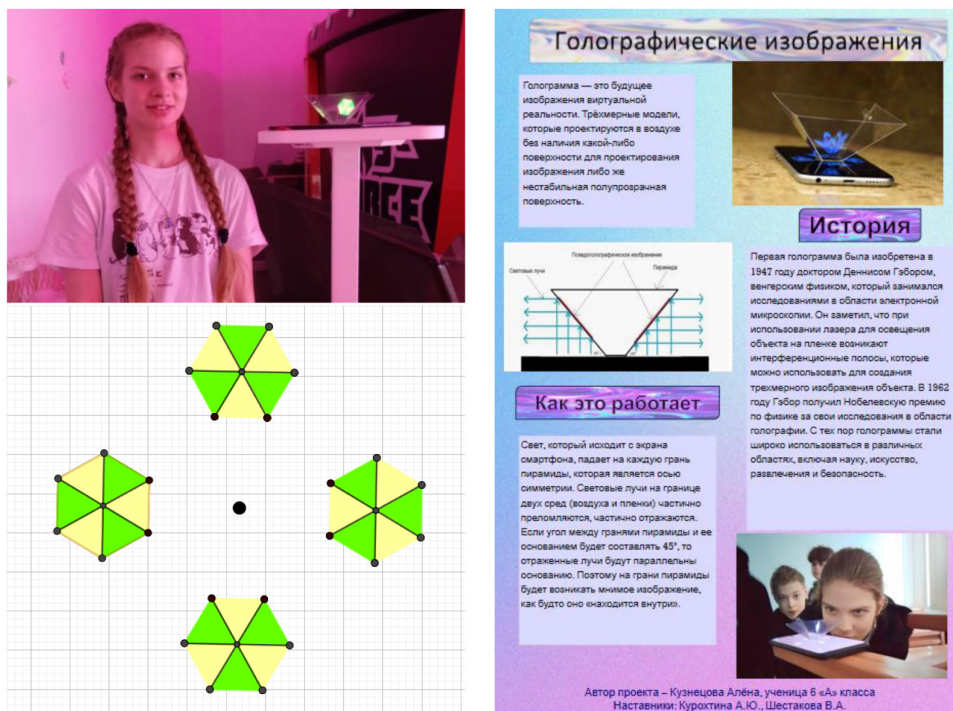


Рис. 4

За счет вовлечения обучающихся в разработку собственного экспоната, натурной и компьютерной модели математического объекта, исследования его истории открытия и свойств, а также представления своего исследования в доступной, популярной форме делает всех участников конкурса: учащихся, учителей, наставников, посетителей музея, участниками процесса популяризации математики.

### Библиографический список

1. Математические этюды. URL: <https://etudes.ru/>
2. Проект «Математическая модель – в школу!». URL: [https://vk.com/wall-192547232\\_2732](https://vk.com/wall-192547232_2732)
3. Проект «Математика – просто»: популяризация математики в интернете / Е.В. Губкина, Е.А. Кузьмичев, М.А. Прохорович, А.В. Савватеев // Математическое образование. 2019. № 2 (90). С. 46–53.
4. Проект Алексея Савватеева «Маткульт-привет!». URL: <https://savvateev.xyz/>
5. Проект «Музей занимательной математики». URL: [https://vk.com/exponat\\_v\\_mzm](https://vk.com/exponat_v_mzm)
6. Положение об открытом конкурсе. URL: [https://narfu.ru/hsitas/prof/eksponat-dlya-muzeya/index.php?sphrase\\_id=592821](https://narfu.ru/hsitas/prof/eksponat-dlya-muzeya/index.php?sphrase_id=592821)



# ТРЕНАЖЕР ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧЕНИКОВ-БИЛИНГВОВ МЛАДШИХ КЛАССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ

## A MATH SIMULATOR FOR BILINGUAL ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS USING COMPUTER ANIMATION

С.В. Сарыглар, Е.Ч. Монгуш

S.V. Saryglar, E.Ch. Mongush

*Компьютерная анимация, среда GeoGebra, тренажер по математике, ученики-билингвы, математическое образование, обучение математике младших классов.*

Методика обучения школьной математики постоянно эволюционирует с учетом современных тенденций, что сопровождается интенсивным обновлением содержания, технологий, созданием инновационных средств обучения и развитием цифровой образовательной среды. В статье рассматривается тренажер по математике для учеников-билингвов младших классов, разработанный в среде GeoGebra. Применение компьютерной анимации на уроках математики в начальной школе открывает большие возможности для получения качественного образования учеников-билингвов, проживающих в Республике Тыва.

*Computer animation, GeoGebra environment, math simulator, bilingual students, math education, elementary school math education.*

In the context of digitalization of education, the use of information technologies in teaching mathematics is becoming relevant. A math simulator for bilingual elementary school students developed in the GeoGebra environment is being considered. The use of computer animation in mathematics lessons in elementary school opens up great opportunities for bilingual students living in the Republic of Tuva to receive high-quality education.

**В** условиях цифровизации образования современная школа находится на этапе поиска эффективных путей обучения и воспитания подрастающего поколения. Подтверждением этого является внедрение новых образовательных стандартов (ФГОС), которые разработаны с учетом региональных, национальных и этнокультурных потребностей народов РФ [4]. Тренажер по математике создан в динамической среде GeoGebra и содержит текстовые задачи по программе первого класса. Текстовое содержание разработанных задач дополнено близкими для учащихся краеведческими, географическими и бытовыми сведениями на основе местного материала. На рис. 1 изображен тренажер по решению задач за (1 класс).

Ученики-билингвы, решив правильно задачу, нажимают на кнопку Enter. Если на экране выйдет веселый зеленый смайлик с национальной шапкой, то считается ответ верным (рис. 2).

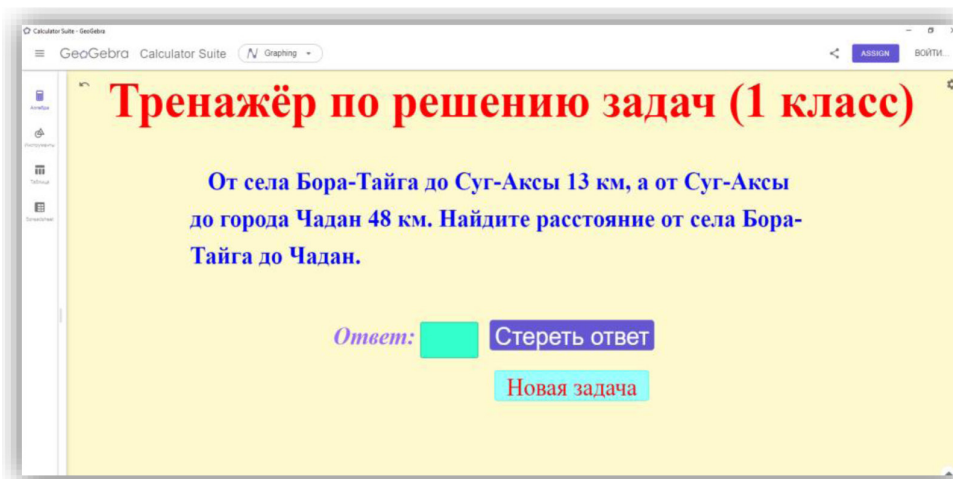


Рис. 1. Тренажер по решению задач (1 класс)

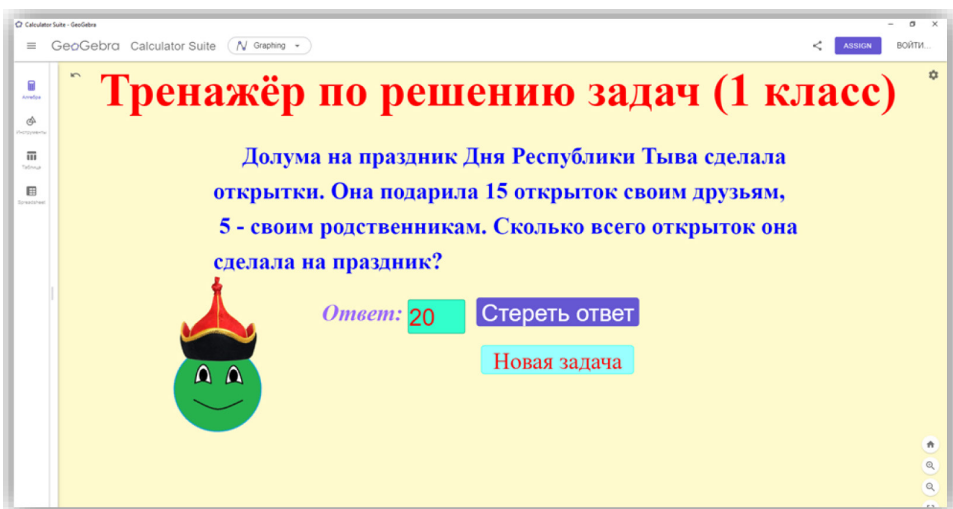


Рис. 2. Правильный ответ при решении задачи

При решении текстовой задачи ученики-билингвы могут написать неправильный ответ. В этом случае на экране появляется грустный красный смайлик с национальной шапкой (рис. 3). Также можно внести ответ повторно, при этом нажав на кнопку «Стереть ответ» или приступить к выполнению следующей задачи, нажав на кнопку «Новая задача».

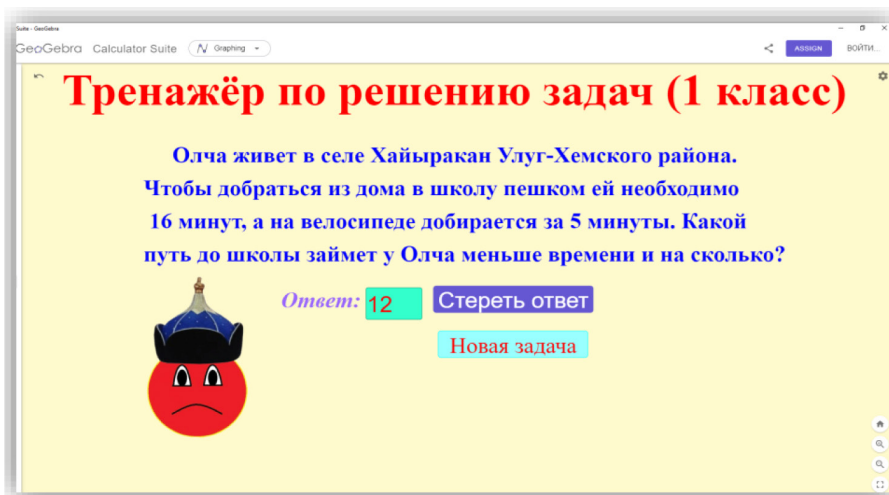


Рис. 3. Неправильный ответ при решении задачи

В тренажере также приведены задачи, связанные с национальным праздником нового года у тувинцев – Шагаа (рис. 4), а также горлового пения – хоомей (рис. 5) для формирования у учеников-билингвов интереса к искусству родного края, любви и бережного отношения к своей родине и традициям.

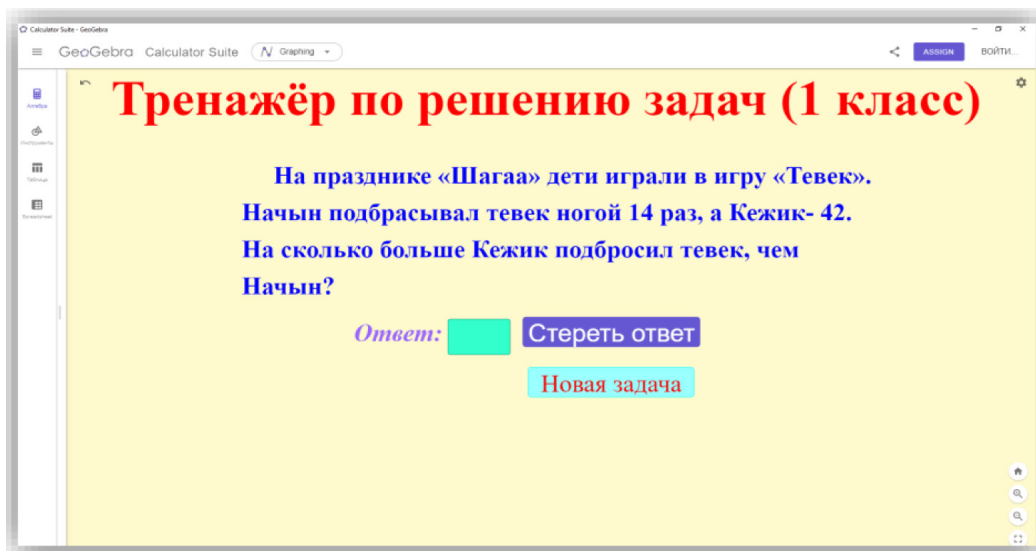


Рис. 4. Задача про национальный праздник «Шагаа»

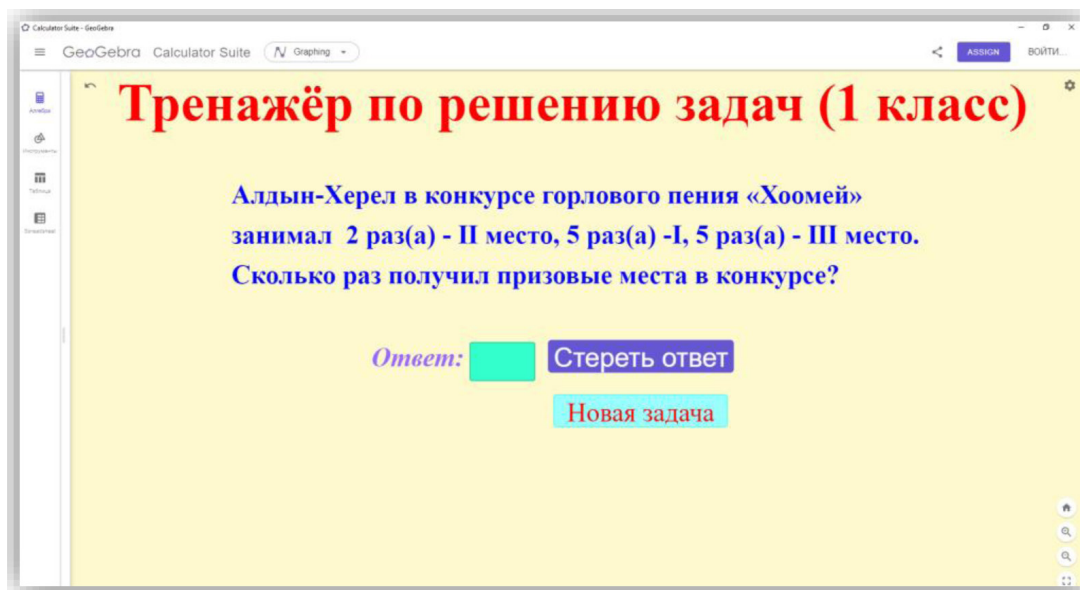


Рис. 5. Задача про горловое пение «Хоомей»

Динамическая среда GeoGebra [3] обладает широкими возможностями для построения и визуализации математических объектов, моделей, а также инструментами для создания тренажеров, тестов. Тренажер по решению задач для учеников-билингвов младших классов с использованием компьютерной анимации повышает интерес к изучению математики, качество знаний учеников-билингвов, отрабатывает вычислительные навыки, привлекает учеников-билингвов к решению текстовых задач своим содержанием, включающим краеведческие, географические и бытовые сведения на основе местного материала, а также служит дидактической помощью учителю во время урока.

## Библиографический список

1. Вайнштейн Ю.В., Сарыглар С.В. Применение анимационных рисунков при обучении школьников-билинггов на уроках алгебры // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2024. № 1 (67). С. 5–15.
2. Ларин С.В., Чилбак-оол С.В. Анимационные рисунки как технологическая часть цифрового обучения математике в свете цифровизации образования // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2020. № 3 (53). С. 54–61.
3. Официальный сайт программы GeoGebra. URL: <http://www.geogebra.org/cms>.
4. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. М.: Просвещение, 2011. 342 с.
5. Сарыглар С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках алгебры 7 класса: результаты экспериментальной работы // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2021. № 4 (58). С. 126–131.
6. Сарыглар С.В. Компьютерные анимационные рисунки в среде GeoGebra на уроках алгебры в седьмом классе // Вестник ТГПУ. 2022. № 5 (223). С. 116–122.
7. Сарыглар С.В., Вайнштейн Ю.В. Применение анимационных рисунков при обучении школьников-билинггов на уроках алгебры Ю.В. Вайнштейн // Вестник КГПУ. 2024. № 1 (67). С. 5–15.

# СВЯЗЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С КВАДРАТАМИ ДЛИН СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

## THE RELATION OF THE SCALAR PRODUCT TO THE SQUARES OF THE LENGTHS OF THE SUM AND DIFFERENCE OF TWO VECTORS IN TWO-DIMENSIONAL SPACE

В.М. Семкина, Е.А. Сивухина

V.M. Semkina, E.A. Sivukhina

*Закономерность, вектор, двумерное пространство, построение графиков скалярное произведение, длина вектора, сумма векторов, разность векторов, динамическая система «Живая математика».*

В статье автор объясняет найденную в двумерном пространстве закономерность скалярного произведения с квадратами длин суммы и разности между двумя векторами, наглядно демонстрируя ее в динамической системе «Живая математика».

*The pattern, vector, two-dimensional space, charting, the scalar product, vector length, the sum of the vectors, vector difference, The Geometer's Sketchpad dynamic system.*

In the article, the author explains the pattern of the scalar product found in two-dimensional space with squares of the lengths of the sum and the difference between two vectors, demonstrating it in the The Geometer's Sketchpad dynamic system.

**В**екторы как математические объекты являются важным инструментом для решения практических задач различных областей науки. Именно поэтому в системе образования векторы играют важную роль, помогая ученикам и студентам развить пространственное мышление, а также, проанализировав, понять сложные многомерные математические концепции. В век информационных технологий изучение и открытие нового становится более упрощенным. Наглядная демонстрация в программах и динамических средах помогает обнаружить, понять и проиллюстрировать новые математические закономерности и зависимости. Рассмотрим ниже одну из таких найденных закономерностей, ее доказательство и возможные примеры задач.

В ходе доказательства и решения задач мы опирались на определения скалярного произведения и длины вектора, представленные в учебниках геометрии для 9 класса под редакцией А.Г. Мерзляка [1], а также пособием для учителей под редакцией Ю.М. Колягина [2]. Они определяют скалярное произведение векторов как произведение длин векторов на косинус угла между ними, а также приводят формулу вычисления скалярного произведения: если даны два вектора  $\vec{a}(x_a; y_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b)$ , то их скалярное произведение можно вычислить по формуле  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$  [1]. Длина вектора определяется через формулу расстояния между точками, в результате чего получается формула:  $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$  [1].

Утверждение:

Пусть даны два вектора  $\vec{a}(x_a; y_a)$  и  $\vec{b}(x_b; y_b)$ .

Если у вектора  $\vec{b}$  абсцисса равна сумме координат вектора  $\vec{a}$  (т.е.  $y_a + x_a$ ), а его ордината равна разности координат вектора  $\vec{a}$  (т.е.  $y_a - x_a$ ), то скалярное произведение и квадрат длины вектора, равного разности этих векторов, равны, а квадрат длины вектора, равного их сумме, в 5 раз больше них.

Рассмотрим доказательство данного утверждения. Введем векторы и их координаты:

$$\vec{a}(x; y)$$

$$\vec{b}(y + x; y - x)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2x + y; 2y - x)$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-y; x)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x(y + x) + y(y - x) = xy + x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= (2x + y)^2 + (2y - x)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 4y^2 - 4xy + x^2 = \\ &= 5x^2 + 5y^2 = 5(x^2 + y^2) = 5(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$|\vec{d}|^2 = (-y)^2 + x^2 = x^2 + y^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Рассмотрим пример № 1 и изобразим графически (рис. 1):

Дан вектор  $\overrightarrow{AB}(10; 5)$ .

Тогда вектор  $\overrightarrow{CD}(5 + 10; 5 - 10) \Rightarrow \vec{b}(15; -5)$ .

Найдем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 10 \cdot 15 + 5 \cdot (-5) = 125.$$

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{KL}$ :

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (10 + 15; 5 + (-5)) = (25; 0).$$

Найдем квадрат длины вектора  $\overrightarrow{KL}$ :

$$|\overrightarrow{KL}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2 = 25^2 + 0^2 = 625 = 5 \cdot 125 = 5 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{MN}$ :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (10 - 15; 5 - (-5)) = (-5; 10).$$

Найдем квадрат длины вектора  $\overrightarrow{MN}$ :

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}|^2 = (-5)^2 + 10^2 = 125 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$



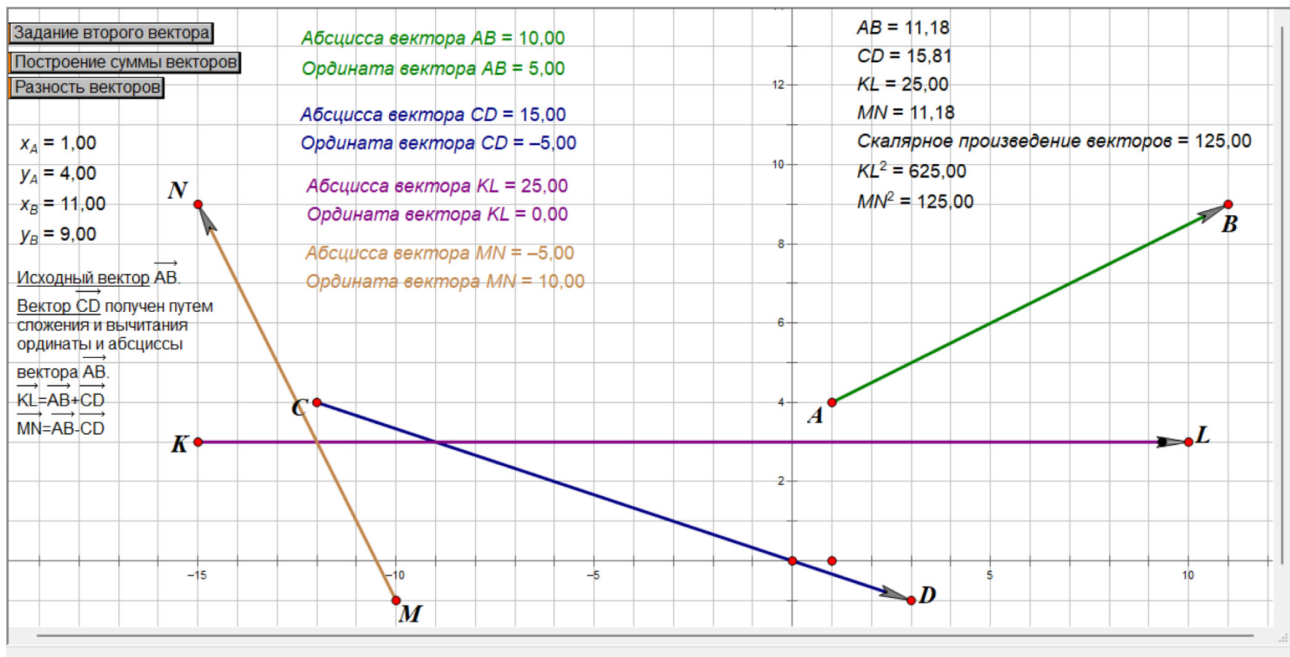


Рис. 1

Рассмотрим задачу, которую можно решить, опираясь на данное свойство: Даны векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ . Координаты вектора  $\vec{AB}$  равны (5; 7). Найдите значение координат вектора  $\vec{CD}$ , зная, что скалярное произведение и квадрат длины разности этих векторов равны 74, а квадрат длины суммы равен 370.

В данной задаче мы видим, что скалярное произведение и квадрат длины разности отличаются от квадрата длины суммы ровно в 5 раз ( $74 \cdot 5 = 370$ ), следовательно, мы можем воспользоваться свойством обнаруженной закономерности. Исходя из этого,  $\vec{CD}(y_a + x_a; y_a - x_a) = (7 + 5; 7 - 5) \Rightarrow \vec{CD}(12; 2)$ .

Давайте теперь проверим, правильно ли наше решение, и изобразим его графически (рис. 2):

Дан вектор  $\vec{AB}(5; 7)$ .

Тогда вектор  $\vec{CD}(7 + 5; 7 - 5) \Rightarrow \vec{CD}(12; 2)$

Найдем скалярное произведение:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (5 \cdot 12 + 7 \cdot 2) = 74.$$

Найдем координаты вектора  $\vec{KL}$ :

$$\vec{KL} = \vec{AB} + \vec{CD} = (5 + 12; 7 + 2) = (17; 9).$$

Найдем квадрат длины вектора  $\vec{KL}$ :

$$|\vec{KL}|^2 = |\vec{AB} + \vec{CD}|^2 = 17^2 + 9^2 = 370 = 5 \cdot 74.$$

Найдем координаты вектора  $\vec{MN}$ :

$$\vec{MN} = \vec{AB} - \vec{CD} = (5 - 12; 7 - 2) = (-7; 5).$$

Найдем квадрат длины вектора  $\vec{MN}$ :

$$|\vec{MN}|^2 = |\vec{AB} - \vec{CD}|^2 = (-7)^2 + 5^2 = 74.$$

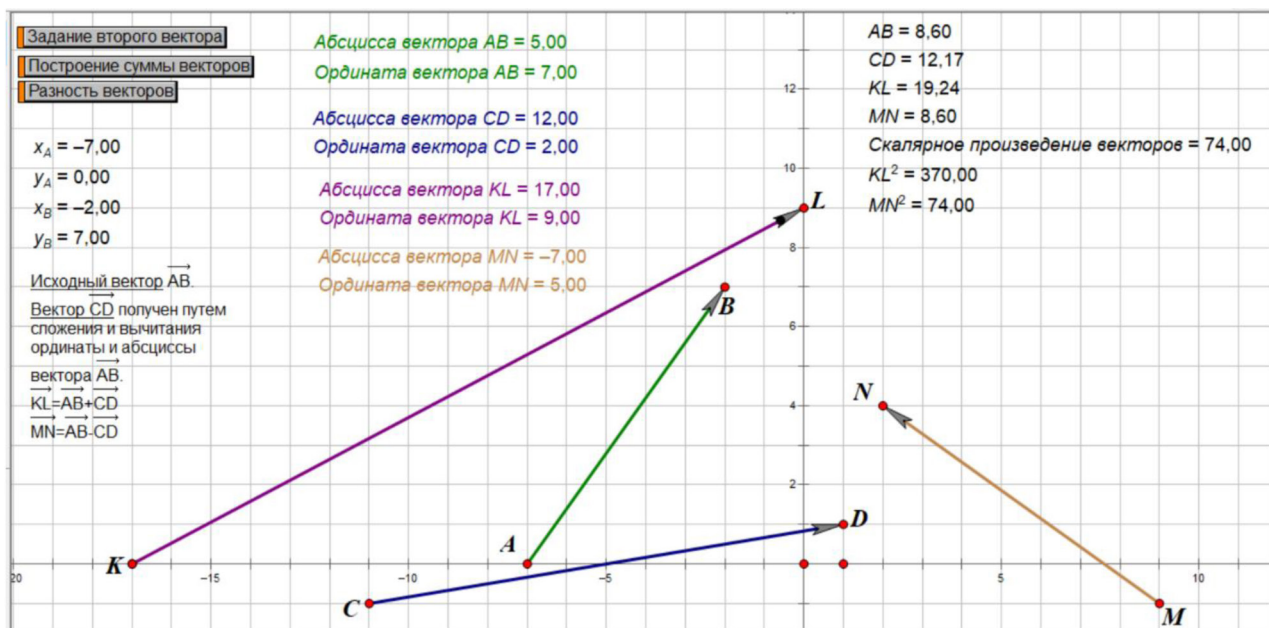


Рис. 2

Обнаруженная закономерность позволяет взглянуть на связь между координатами векторов и арифметическими действиями над ними с новой стороны. Также можно разработать комплекс аналитических и практико-ориентированных задач для изучения и освоения данным свойством школьников и студентов. В нашей следующей статье мы раскроем связь скалярного произведения в трехмерном пространстве.

### Библиографический список

1. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Геометрия. 9 кл. 2022.
2. Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976.

## Секция 4

---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

---

# АКСИОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

## AXIOLOGICAL ASPECT OF MATHEMATICAL COMPETENCE OF UNIVERSITY STUDENTS

Н.С. Азимова

N.S. Asimova

*Обучение, ценность, математическое образование, личностные качества, развитие, компетенция, компетентность, аксиология.*

Рассматривается один из компонентов математической компетентности студентов вузов. Аксиологический аспект математической компетентности студентов вузов подчеркивает важность не только овладения математическими знаниями и навыками, но и формирования у студентов ценностного отношения к математике. Это подход помогает понять, как математическая подготовка может влиять на личностное развитие, мировоззрение и готовность студентов применить свои знания в различных сферах жизни.

*Learning, value, mathematical education, personal qualities, development, competence, competence, axiology.*

One of the components of mathematical competence of students is considered. The axiological aspect of mathematical competence of university students emphasizes the importance not only of mastering mathematical knowledge and skills, but also of forming a value attitude towards mathematics in students. This approach helps to understand how mathematical training can influence personal development, worldview and students' willingness to apply their knowledge in different spheres of life.

**Ц**енность математического образования заключается в его способности развивать умственные и личностные качества, которые необходимы не только для успешной учебы, но и для эффективной жизни в современном обществе. Математика формирует у человека не только знания и умения, но и особый способ мышления – логический, структурированный и критический. Важно понимать, что ценность математического образования не ограничивается только обучением решению задач. Математика влияет на многие аспекты жизни, формируя основу для научных, технологических и социальных достижений. Изучение математики формирует различные компетенции, которые не только имеют непосредственное отношение к математике, но и развивают важнейшие универсальные навыки, необходимые для успешной жизни в современном мире.

«Обращение к личности как к ценности объективно требует, чтобы в качестве ведущего фактора формирования ценностного отношения обучающихся к математическому образованию стал компетентностный подход» [2].

«Компетенция – отчужденное наперед заданное социальное требование, норма к подготовке человека, необходимая для его продуктивной деятельности в определенной сфере» [2].

«Компетентность – владение, обладание учеником, студентом соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и предмету деятельности; уже состоявшееся качество или совокупность качеств личности ученика и минимальный опыт деятельности в заданной сфере» [8].

Результатом математического образования является математическая компетентность, которая представляет собой совокупность знаний, умений, навыков и отношений, необходимых для успешного применения математических знаний в различных ситуациях. Математическая компетентность является важнейшей составляющей общего образования и отражает способность человека эффективно использовать математику для решения проблем в реальной жизни, научной и профессиональной деятельности, а также для личностного роста.

Математическая компетентность – это способность эффективно применять математические знания и умения в различных жизненных ситуациях, включая как академическую деятельность, так и повседневную жизнь. Она включает в себя не только владение математическим аппаратом, но и умение использовать его возможности для решения проблем, анализа информации и принятия обоснованных решений.

Математическая компетентность в высших учебных заведениях охватывает не только теоретические знания, но и умение осознавать важность математики для формирования логического и аналитического мышления, принятия обоснованных решений и решения практических задач в различных сферах.

Математическая компетентность не ограничивается механическим усвоением формул и алгоритмов. Важным компонентом математической компетентности является развитие у студентов устойчивого интереса к предмету, умения воспринимать математику как важный инструмент для решения разнообразных проблем, что связано с ценностным восприятием учебного процесса. Преподаватель, ориентированный на ценности и смысловую сторону математики, способствует тому, чтобы студенты воспринимали этот предмет как важный и необходимый для их личностного и профессионального развития.

«Новая отрасль научного познания – педагогическая аксиология занимается изучением ценностей образования, их природой, функциями и взаимосвязями» [5]. «Центральным понятием в аксиологии является понятие ценности, которое характеризует социокультурное значение явлений действительности, включенных в ценностные отношения» [4].

«Аксиологический аспект как методологическая основа исследования проблем развития университетского образования дает возможность установить структуру и иерархию ценностей, которые придают учебно-исследовательской деятельности обучаемого определенную направленность и регламентируют взаимодействие с обществом» [1, с. 124–128]. «Процесс образования, выполняя ценностно-ориентирующую функцию, переводит студентов в плоскость мировоззренческого осознания образовательной и социальной действительности» [3].

Мотивация и ценности к изучению математики с точки зрения аксиологии, важны не только для осознания ее полезности для профессиональной деятельности,

но и восприятия ее как элемента личностного роста и интеллектуального развития. Это требует формирования у студентов положительного отношения к математике, понимания ее роли в жизни общества и развития наук.

Студенты начинают осознавать важность математических знаний для формирования абстрактного, системного мышления, что помогает им не только в обучении, но и в повседневной жизни. Особенно это важно в условиях быстро меняющегося мира, где математическая грамотность может стать конкурентным преимуществом.

Понимание студентами ценности математической компетентности очень важно. Аксиологический аспект математической компетентности касается того, как студенты воспринимают значимость математики для своего личного и профессионального развития.

Аксиологический аспект математической компетентности студентов в вузах представляет собой подход, который исследует ценностное и смысловое содержание математического образования, а также взаимосвязь математических знаний и личных, социальных и культурных ценностей. В этом контексте рассматривается, как студенты воспринимают и оценивают математические знания, как они влияют на их мировоззрение, жизненные ориентиры и готовность использовать математические методы в различных областях жизни.

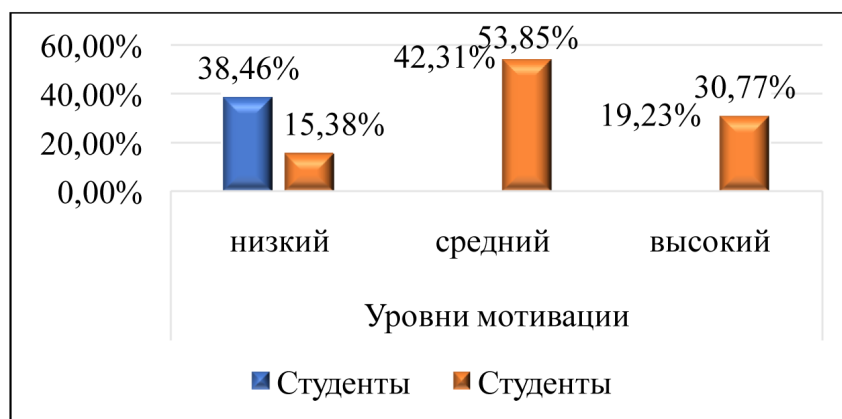
Диагностика ценностного отношения к математической компетенции – это процесс выявления у учащихся их отношения к математике, осознания ее значимости и применения в жизни, а также уровня развития навыков, которые они воспринимают как важные. Важно отметить, что ценностное отношение к математической компетенции включает в себя не только знание математических теорий и понятий, но и понимание их практического применения, а также личную мотивацию и заинтересованность в предмете.

Для выявления уровня аксиологического компонента математической компетентности студентов специальности 102050302-Математика. Информатика Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики мы провели анкетирование по предложенной методике Л.М. Фридмана «Диагностики структуры учебной мотивации», который состоит из 20 вопросов [7]. Ответы на суждения даются в виде плюсов и минусов (верно – (+ +); пожалуй, верно – (+); пожалуй, неверно – (-); неверно – (- -)) и обрабатываются в соответствии с ключом. Методика выявляет 3 категории студентов в зависимости от направленности мотивации изучения предмета (с доминированием внешней мотивации, доминированием внутренней мотивации и среднего типа).

Применение этого теста позволяет выявить ценностное отношение студентов к изучению математики и с учетом мотивацией каждого студента корректировать подходы к обучению.

Согласно предложенной методике, уровни внутренней мотивации распределены на три уровня: низкий, средний и высокий. Результаты обработки опросника 26 студентов первого курса и 13 студентов четвертого курса специальности 102050302-Математика. Информатика приведены на рис.





*Рис. Результаты диагностики внутренней мотивации*

Из данных рисунка делаем вывод о том, что с течением времени обучения в вузе студенты математической специальности определили для себя важность математического образования и овладения соответствующими компетенциями. Студенты четвертого курса по сравнению со студентами первого курса осознают важность математических знаний. Источниками мотивации к учебе для них являются развитие мышления, внутренний интерес, будущая профессия, общая культура, решение практических задач и т.д. У студентов 4-го курса преобладает внутренняя мотивация. Для них важно действовать на основе личных интересов, ценностей и стремлений, а не из-за внешнего давления или ожиданий. Такой тип мотивации возникает, когда человек находит в деятельности смысл, удовольствие и удовлетворение, независимо от внешних наград или последствий.

Для повышения эффективности своей педагогической деятельности преподавателю необходимо учитывать мотивацию учения студентов и постоянно ее активизировать. Факторами развития внутренней мотивации являются:

- демонстрация связи математики с реальной жизнью или с другими областями знаний;
- чувство достижения и успеха (появление чувства удовлетворения от проделанной работы и т.д.);
- саморазвитие (внутреннее стремление к личному росту и совершенствованию, когда студент может самостоятельно управлять своим обучением);
- понимание ценности получения образования (осознание того, что математические знания являются фундаментом для дальнейшей карьеры) и т.д.

В конечном счете, внутренняя мотивация студентов зависит от их восприятия предмета, отношения к обучению и уверенности в своих силах. Важно, чтобы студенты чувствовали поддержку со стороны преподавателя и окружения. Применение активных методов обучения, таких как проекты, групповые обсуждения и творческие задания, способствует интересу к предмету.

Таким образом, аксиологический аспект математической компетентности студентов вузов подчеркивает важность не только овладения математическими знаниями и навыками, но и формирования у студентов ценностного отношения к математике. Это подход помогает понять, как математическая подготовка

может влиять на личностное развитие, мировоззрение и готовность студентов применить свои знания в различных сферах жизни. В этом направлении обучение становится осознанным.

### **Библиографический список**

1. Кирьякова А.В., Ольховая Т.А. Реализация аксиологического подхода в университетском образовании // Высшее образование в России. 2010. № 5. С. 124-128
2. Лешер О.В., Акманова З.С., Гугина Е.М. Формирование ценностного отношения студентов технического университета к математическому образованию на основе компетентностного подхода в процессе непрерывной профессиональной подготовки // Вестник ЮУрГГПУ. 2009. № 12. С. 77–85. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-tsennostnogo-otnosheniya-studentov-tehnicheskogo-universiteta-k-matematicheskomu-obrazovaniyu-na-osnove>.
3. Максименко Н.В. Информационные технологии как средство развития познавательной самостоятельности студентов в процессе изучения математики в вузе // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 6. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=27265>
4. Маслов С.И., Маслова Т.А. Аксиологический подход в педагогике // Известия ТулГУ. Гуманитарные науки. 2013. № 3-2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/aksiologicheskij-podhod-v-pedagogike>
5. Мушкирова А.Н. О формировании ценностных ориентаций подрастающего поколения. URL: <https://www.rusnauka.com/Pedagog/84.html>.
6. Мясичев В.Н. Психология отношений. Воронеж, 1995. С. 352.
7. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Мотивация учения // Психологический справочник учителя. М.: Просвещение, 1991. С. 192–194.
8. Хуторской А.В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты. Доклад на отделении философии образования и теории педагогики РАО 23 апреля 2002. Центр «Эйдос». URL: <http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm>.

# ГОДИЧНАЯ ПРАКТИКА КАК ФОРМА ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ИХ ДЕФИЦИТА В ШКОЛАХ

## ANNUAL PRACTICE AS A FORM OF IMPROVING THE QUALITY OF TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS AND A WAY TO SOLVING THE PROBLEMS OF THEIR DEFICIENCIES IN SCHOOLS

В.Н. Аниськин, Е.В. Галиева,  
Л.Н. Евелина

V.N. Aniskin, E.V. Galieva,  
L.N. Evelina

*Непрерывная педагогическая практика, годичная практическая подготовка, кадровый дефицит учителей математики, студенты выпускных курсов, профессиональное становление, наставничество, предметно-методическая подготовка, исследовательские навыки, профессиональные компетенции.*

Рассматриваются возможности повышения качества профессиональной подготовки студентов профилей «Математика» и «Физика» направления подготовки Педагогическое образование и решения проблем кадрового дефицита школьных учителей математики посредством организации участия студентов выпускных курсов в проекте «Годичная практическая подготовка студентов выпускных курсов», который реализуется Самарским государственным социально-педагогическим университетом.

*Continuous teaching practice, one-year practical training, staff shortage of mathematics teachers, graduate students, professional development, mentoring, subject-methodological training, research skills, professional competencies.*

Possibilities are being considered to improve the quality of professional training of students in the «Mathematics» and «Physics» profiles in the field of training Pedagogical Education and solving the problems of personnel shortage of school mathematics teachers, through organizing the participation of graduate students in the project «One-year practical training of graduate students», which is implemented by the Samara State University of Social Science and Education.

**П**рактический блок действующих ФГОС ВО [1] по направлению подготовки Педагогическое образование включает ознакомительную и педагогическую практики в перечни типов учебной и производственной практик. При этом образовательным организациям высшего образования предоставляется возможность выбора одного или нескольких типов учебной и производственной практики из реестра рекомендуемых примерных основных образовательных программ и установления дополнительных типов и объемов практик. Учитывая, что ознакомительная практика проводится многими вузами уже на первом курсе

обучения, а проектно-технологическая, научно-исследовательская и педагогическая на всех остальных курсах, включая выпускной, можно констатировать непрерывность практической составляющей подготовки будущих учителей.

Непрерывная педагогическая практика как один из видов подготовки будущих учителей к практической деятельности и средство раннего погружения студентов в педагогическую профессию с ее продолжением на протяжении всего периода обучения в вузе проводится достаточно давно. К настоящему времени накоплен большой опыт организации этого вида практики. Как отмечается в работе [2], включение студентов с 1–4 курс в профессионально-педагогическую деятельность является уникальной возможностью для применения ими своих теоретических знаний на практике и эффективным средством для овладения основами педагогического мастерства. В Самарском государственном социально-педагогическом университете (СГСПУ) в рамках проекта «Годичная практическая подготовка» (ГПП) производственная педагогическая практика на выпускных четвертых-пятых курсах проводится на протяжении всего учебного года.

Важность непрерывной педагогической практики очевидна и всегда подчеркивалась учеными-педагогами. Так, К.Д. Ушинский отмечал, что «метод преподавания можно изучить из книги или со слов преподавателя, но приобрести навык в употреблении этого метода можно только длительной и долговременной практикой» [3]. В унисон мнению основоположника научной педагогики в России известный советский (российский) педагог, академик АПН СССР Ю.К. Бабанский особо подчеркивал то обстоятельство, что только во время прохождения педагогической практики студент способен осмыслить и понять основные дидактические принципы обучения, освоить приемы и способы воспитания детей, т.е. овладеть необходимыми для самостоятельной профессионально-педагогической деятельности умениями и навыками [4].

С позиции темы нашей статьи необходимо отметить ту важную роль, которую играет непрерывная педагогическая практика в профессиональном становлении будущего учителя математики, синтезируя его теоретические знания с практическим опытом. З.Н. Абдуллоева считает, что в процессе прохождения практики студент самостоятельно определяет и находит те рациональные средства, приемы и методы, которые не только формируют его акмеологическую компетентность, но и позволяют развивать ее во фронтальной, индивидуальной, групповой, коллективной, игровой и тренинговой формах работы. Именно эти формы способствует правильному определению целей, задач, содержания, объема, технологий и методов обучения математике с учетом индивидуальных когнитивных способностей учеников, обеспечивают оптимизацию скорости и темпа усвоения учебного материала [5].

Очевидно, что цифровая трансформация образования определяет новые условия и правила организации непрерывной педагогической практики. Применимо к особенностям проведения практики в условиях цифровизации обучения ее организаторам немаловажно будет учитывать логику построения педагогических систем продуктивного обучения, предлагаемую авторами работы [6].

Одним из направлений проектирования таких систем является ориентация на подготовку будущих учителей математики и физики к использованию компьютерных симуляций в преподавании своих предметов.

И еще один критерий достижения эффективности непрерывной педагогической практики необходимо учитывать в условиях современного информационно-образовательного пространства. Речь идет о необходимости обеспечения будущими учителями математики практико-ориентированной направленности математической подготовки школьников, которая обеспечивается системной интеграцией учебной, учебно-исследовательской, научно-поисковой и учебно-производственной деятельности [7].

Помимо всех перечисленных положительных моментов, непрерывная педагогическая практика и особенно ее годичный формат на выпускных курсах является мощным демпфирующим механизмом для решения проблем кадрового дефицита школьных учителей, существенно обострившегося в регионе в последние годы. Только по официальным данным министерства образования Самарской области, приведенным в работе [8], авторы которой также характеризуют проект «ГПП» СГСПУ, в школах региона дефицит педагогических кадров по состоянию на 1 апреля 2023 года составляет 391 ставку, из них 72 учителя требуются для образовательных учреждений (ОУ) областного центра и 76 педагогов – в Тольятти. При этом в Самарской области учителей готовят 7 вузов и 24 образовательные организации системы СПО.

Вместе с тем сведения от представителей работодателей, полученные на заседании комиссии по трудоустройству выпускников СГСПУ 2023 года, несколько другие и еще более тревожные. Так, нехватка учителей математики, физики и информатики в городских и сельских школах Самарской области выражается такими показателями: количество вакантных ставок учителей математики – 137,6; учителей физики – 47,6; учителей информатики – 31. Поэтому начиная с 2022–2023 учебного года в СГСПУ реализуется проект «ГПП» с участием всех факультетов вуза, готовящих учителей-предметников по ООП педагогического бакалавриата. Данная работа проводится совместно с региональным Министерством образования и окружными управлениями образования по запросам работодателей в соответствии с положением о практической подготовке обучающихся, утвержденным приказом Минобрнауки России и Минпросвещения России от 05.08.2020 № 885/390 [9].

Важным основанием для реализации проекта «ГПП» служит поручение Президента России В.В. Путина Правительству РФ и высшим должностным лицам субъектов государства по итогам заседания Совета по стратегическому развитию и национальным проектам 18 июля 2022 года (Пр. – 1553, п. 3). Суть его заключается в разработке и реализации комплекса мер по укомплектованию общеобразовательных организаций учителями, в том числе учителями математики, физики, информатики, и повышении качества их подготовки» [10]. Высокая степень значимости математической подготовки учащихся школ была подчеркнута также в поручении Президента РФ по итогам заседания Совета при Президенте по науке



и образованию 8 февраля 2024 года. Названный документ предписывает разработку и утверждение комплексного плана мероприятий «по повышению качества преподавания математики и естественно-научных предметов в системе общего образования, предусматривающий в том числе повышение качества подготовки учителей, преподающих эти предметы, и устранение дефицита таких учителей в государственных и муниципальных общеобразовательных организациях» [11]. Указанные поручения Президента России дают основания для долгосрочной перспективы организации годичной педпрактики в педвузах страны и продолжения реализации проекта «ГПП» в СГСПУ.

Необходимо также отметить, что на основании Федерального Закона от 08.06.2020 № 165-ФЗ «О внесении изменений в статьи 46 и 108 ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» школьные руководители теперь имеют право на трудоустройство студентов вузов, обучающихся по специальностям и направлениям подготовки «Образование и педагогические науки», которым разрешена педагогическая деятельность по основным общеобразовательным программам после окончания ими 3-го курса. А возможность самостоятельной педагогической деятельности по дополнительным общеобразовательным программам получили в соответствии с указанным Федеральным Законом и студенты третьих курсов, обучающиеся по соответствующим специальностям и направлениям подготовки. Все это дает нам основания для вывода о том, что в современных условиях непрерывная педагогическая практика становится основным элементом подготовки будущего учителя, а годичная практика на выпускном курсе ее результирующей итоговой формой, позволяющей определить уровень овладения выпускником общепрофессиональными, предметно-методическими, универсальными, цифровыми и другими компетенциями и присвоить ему квалификацию учителя-предметника после прохождения государственных аттестационных испытаний.

В рамках проекта «ГПП» студенты профилей подготовки «Математика» и «Физика» выпускного курса факультета математики, физики и информатики (ФМФИ) СГСПУ были направлены на работу учителями математики в городские и сельские школы Самарской области и выполняли на протяжении учебного года все виды учебно-воспитательной работы, связанные с их будущей профессионально-педагогической деятельностью. Практически во всех ОУ, где они проходили годичную педагогическую практику, имелись соответствующие вакантные должности, на которые студенты были приняты на работу с заключением срочных трудовых договоров, хотя оформление трудоустройства не является обязательным условием проекта «ГПП».

Всего в пилотном проекте «ГПП» 2022–2023 учебного года участвовали 17 студентов ФМФИ, из которых 16 были трудоустроены, 9 работали в городских, а 8 – в сельских школах. При этом объем учебных поручений, выполняемых трудоустроенными практикантами, был достаточно высоким и распределялся примерно в равных долях: 18–24, 25–29 и более 30 часов в неделю. Работодатели были особо заинтересованы в такой дополнительной возможности для решения проблемы нехватки учителей математики.



Организация участия студентов в проекте «ГПП» кафедрой физики, математики и методики обучения (ФМиМО) ФМФИ включала в себя: подготовку необходимых изменений в учебных планах с адаптацией рабочих программ дисциплин и фондов оценочных средств ОПОП ВО «Математика» и «Физика» к условиям проекта; совместный со студентами подбор ОУ для прохождения годичной практики; подготовку индивидуальных заданий для практикантов; совместное с представителями работодателя методическое, консультационное, наставническое сопровождение и системный мониторинг условий работы участников проекта; контроль за соблюдением договорных обязательств со стороны администрации школ. Опыт составления, реализации и корректировки программы годичной педагогической практики, полученный нами к настоящему времени, позволяет сделать вывод о том, что проект «ГПП» в значительной мере способствует повышению качества подготовки будущих учителей математики и физики, позволяет эффективно формировать и развивать предметно-профессиональные компетенции учителя математики, укрепляет готовность студентов-практикантов к их освоению.

Результаты анкетирования участников проекта «ГПП» показали наряду с затруднениями (установление контакта с учениками – 13 %, недостаток навыков для работы с родителями – 20 %, преодоление разочарования в профессии – 13 %, сложности в сочетании работы с обучением в вузе – 20 %) положительные стороны годичной педпрактики, к которым студенты отнесли: приобретение опыта профессиональной деятельности – 87 %, уверенности в трудоустройстве после окончания вуза – 60 %; коммуникативных навыков во взаимодействии с участниками образовательного процесса – 60 %, создания личной «методической копилки» – 40 %. Положительные факторы оказали большее влияние на годичных практикантов, 82 % из которых после получения диплома о высшем образовании продолжили работать учителями математики в ОУ, причем 49 % в тех школах, где они проходили годичную практику.

В настоящее время студенты ФМФИ продолжают участвовать в проекте «ГПП». Их количество увеличилось, к обучающимся на профилях «Математика» и «Физика» добавились студенты-информатики профилей подготовки «Информатика» и «Дополнительное образование в области информатики и ИКТ». Расширилась и география ОУ, в которых студенты ФМФИ проходят годичную педпрактику. Теперь в нее входят школы Самарской и Саратовской областей, а также Республики Татарстан.

Опыт реализации инновационного проекта «ГПП» был обсужден и признан готовым к тиражированию в Академии Минпросвещения России в 2023 году, где директором департамента П.В. Кузьминым констатировалась важность выравнивания разрыва в «объеме предметной, методической и практической подготовки педагогов» и было отмечено, что «обновленные программы предусматривают погружение в профессиональную среду уже с первого курса» [12]. Считаем, что охарактеризованный нами проект «ГПП», реализуемый в период годичной педпрактики, полностью соответствует отмеченным направлениям

и является одновременно эффективной формой повышения качества подготовки будущих учителей математики и одним из способов решения проблемы кадрового дефицита школьных учителей.

### **Библиографический список**

1. ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки Педагогическое образование. Портал ФГОС ВО. URL: <https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24/94> (дата обращения: 07.10.2023).
2. Эдиева Ж.Х. Формирование основ педагогического мастерства у будущего учителя математики в процессе непрерывной педагогической практики: монография. Махачкала: АЛЕФ, 2022. 112 с.
3. Ушинский К.Д. Собрание сочинений. Том 10. Материалы к третьему тому «Педагогической антропологии». / Редакционная коллегия: А.М. Еголин (главный редактор), Е.Н. Медынский, В.Я. Струминский. Москва–Ленинград: Изд-во АПН РСФСР, 1950. 668 с.
4. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических институтов / под ред. Ю.К. Бабанского. М.: Просвещение, 1988. 479 с.
5. Абдуллоева З.Н. Основные формы развития акмеологической компетентности будущих учителей математики в процессе педагогической практики // Вестник Академии образования Таджикистана. 2021. № 3 (40). С. 132–137.
6. Оспенникова Е.В., Антонова Д.А. Продуктивное обучение: от альтернативной технологии к педагогической концепции и вариативной практике ее реализации // Педагогическое образование в России. 2023. № 6. С. 17–28.
7. Жиркова З.С. Педагогическая практика студентов – подготовка к основным видам профессиональной деятельности // Фундаментальные исследования. 2012. № 6–2. С. 360–364.
8. Нелюбина Е.Г., Панфилова Л.В., Сафина Л.Г. Организация и проведение практики в форме практической подготовки при реализации проекта «Годичная практическая подготовка»: опыт принятия решений // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. 2024. № 4. С. 87–91.
9. Положение о практической подготовке обучающихся. Утверждено приказом Минобрнауки и Минпросвещения России от 05.08.2020 № 885/390. URL: <https://base.garant.ru/74626874/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/> (дата обращения: 07.10.2024).
10. Поручение Президента России по итогам заседания Совета по стратегическому развитию и национальным проектам 18.07.2022 года. URL: <http://www.kremlin.ru/acts/assignments/orders/69277> (дата обращения: 15.10.2024).
11. Перечень поручений Президента России по итогам заседания Совета при Президенте по науке и образованию 8 февраля 2024 года. URL: <http://www.kremlin.ru/acts/assignments/orders/73737/print> (дата обращения: 15.10.2024).
12. Проектно-стратегическая сессия проректоров по образовательной деятельности педвузов прошла в Академии Минпросвещения России. URL: <https://arkpro.ru/novosti/na-proektno-strategicheskoy-sessii-prorektorov-poobrazovatelnoy-deyatelnosti-pedvuzov-obsudili-vekt/> (дата обращения: 15.10.2024).

# ИНСТРУМЕНТ LaTeX В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СТУДЕНТА ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

## LaTeX TOOL IN THE EDUCATIONAL SPACE OF PEDAGOGICAL UNIVERSITY STUDENTS

А.С. Ашихмин, О.В. Макеева

A.S. Ashikhmin, O.V. Makeeva

*Образовательное пространство, педагогическое математическое образование, дистанционное образование, разработка и верстка дидактических материалов, инструмент LaTeX.* Рассматривается идея проекта по освоению инструмента LaTeX в учебной деятельности студентов 1-го курса направления подготовки «Педагогическое образование» профиля «Математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова» в контексте понятия «Сложноорганизованное образовательное пространство».

*Educational space, pedagogical mathematical education, distance education, development and layout of didactic materials, LaTeX tool.*

The idea of a project on the development of the LaTeX tool in the educational activities of 1st-year students of the training direction “Pedagogical Education” of the profile “Mathematics” of the Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov in the context of the concept of “Complex educational space” is considered.

**В** рамках федерального проекта «Цифровая образовательная среда» происходит глобальная трансформация отечественной системы образования. Очевидно, что эти новации должны существенно отразиться на *подготовке* будущих учителей и, конечно, *учителей математики*. От учителя нового поколения требуется многое: владение современным оборудованием, которым оснащены образовательные организации; способность использовать цифровые сервисы, разработанные для образовательных систем; умение использовать и разрабатывать контент для образовательной деятельности.

Компетенции педагога, связанные с разработкой дидактических материалов, безусловно, в первую очередь относятся к его предметной подготовке. Однако для учителя математики, физики, химии особую роль приобретают специальные умения, связанные именно с *версткой качественных документов, содержащих аналитическую и графическую информацию*. Такие навыки имеют принципиальное значение и для преподавателей онлайн-сообществ, где образовательная деятельность частично или полностью осуществляется в дистанционном формате [5].

В настоящее время самым распространенным в образовательной сфере текстовым редактором является редактор Microsoft Word. Но для создания материалов, содержащих формулы, графики, схемы, рисунки, которыми изобилует

математический текст, он является достаточно неудобным. Очевидно, что лучше с этой задачей справляется профессиональная система набора текста LaTeX [2; 3]. Ее использование можно рассматривать и в качестве одного из показателей профессиональной компетентности представителя сферы образования [6; 7]. Однако изучение LaTeX не является обязательным в педагогических вузах и в целом при подготовке учителя формированию культуры профессионального отношения к созданию учебно-методических материалов уделяется, пожалуй, недостаточное внимание.

Решение проблемы можно рассматривать в плоскости личной инициативы студентов и преподавателей. Такой опыт имеется и на факультете физико-математического и технологического образования Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова [1]. В настоящей работе предлагается следующий шаг – идея **проектирования образовательного пространства** для будущих учителей математики в рамках действующих учебных дисциплин, когда освоение инструментов системы LaTeX осуществляется через активизацию горизонтальных связей в рамках студенческого сообщества факультета.

Термин «образовательное пространство» достаточно часто встречается в психолого-педагогических исследованиях и имеет разнообразные варианты трактовок. Будем опираться на работу Р.Е. Пономарева [4], используя определение и схему этого *понятия*, придерживаясь предложенных подходов к классификации. «Образовательное пространство представляет собой вид пространства, место, охватывающее человека и среду в процессе их взаимодействия, результатом которого выступает приращение индивидуальной культуры образующегося» [4, с. 21].



Рис. 1. Схема образовательного пространства [4, с. 22]

В качестве существенного признака образовательного пространства Р.Е. Пономарев выделяет характер взаимодействия образующегося с образовательной средой. Оно может быть осознанное или неосознанное, организованное извне или неорганизованное. В результате чего выделяются четыре класса образовательных пространств: свободное, естественное, авторитарное и манипулятивное (рис. 2–3).

Образовательное пространство							
неорганизованное извне				организованное извне			
осознанное обучающимся		неосознанное обучающимся		осознанное обучающимся		неосознанное обучающимся	
Свободное		Естественное		Авторитарное		Манипулятивное	
Индивидуальное свободное	Групповое свободное	Индивидуальное естественное	Групповое естественное	Индивидуальное авторитарное	Групповое авторитарное	Индивидуальное манипулятивное	Групповое манипулятивное

Рис. 2. Классификация образовательных пространств [4, с. 31]

Продолжение классификации осуществляется за счет введения характеристики обучающегося. Выделяются индивидуальные и групповые образовательные пространства. Таким образом, можно говорить о возможности моделирования 8 классов образовательных пространств или 8 направлениях осуществления образовательного пространства (рис. 2–3).

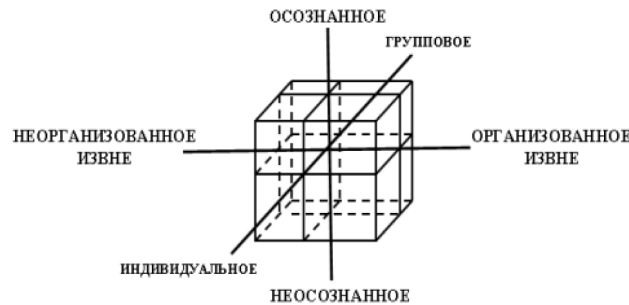


Рис. 3. Моделирование образовательного пространства [4, с. 30]

Для проектирования образовательного пространства необходимо ввести шкалу времени (рис. 4). При этом образовательное движение должно привести к приращению образовательной культуры обучающегося ( $\Delta k$ ), и в качестве таковой будем рассматривать частичное **освоение инструментов системы LaTeX**. P.E. Пономарев указывает на возможность (хотя и достаточно условную) выделения стадий образовательного процесса: замысел, осуществление, рефлексия, что позволяет «не ограничиваясь интуитивным способом, более детально структурировать, вдоль временной оси, последовательность мест возможного движения» [4, с. 61].

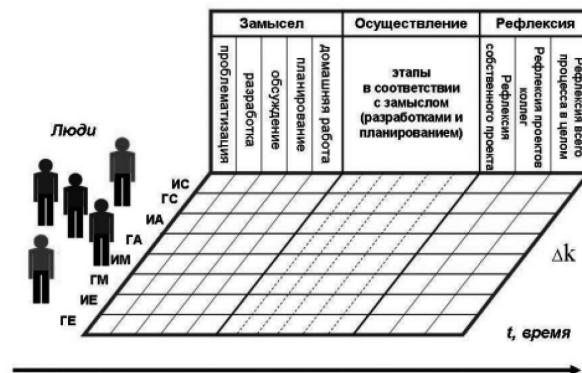


Рис. 4. Рабочая онтология возможностей проектирования сложноорганизованного образовательного пространства [4, с. 64]



Предлагаемый ниже макет проектирования образовательного пространства по освоению инструментов системы LaTeX (табл.) можно рассматривать как формализованное описание проекта, который реализуется авторами статьи на факультете ФМиТО УлГПУ им. И.Н. Ульянова в настоящее время. В качестве участников образовательного процесса выделены: педагог математических дисциплин (П), организатор в лице студента старшего курса (С), обучающиеся – студенты 1-го курса профилей «Математика. Экономика» и «Физика. Математика» (О). В макете наглядно отражена возможность наряду с традиционной моделью образовательного пространства в варианте ГА (групповое, авторитарное) реализовать и другие форматы образовательного пространства, в том числе и свободное (ГС, ИС).

### Проектирование образовательного пространства по освоению инструментов системы LaTeX

Стадия образовательного процесса		Образовательное пространство							
		ГЕ	ИЕ	ГМ	ИМ	ГА	ИА	ГС	ИС
Замысел	Проблематизация					О	С	О	С
	Разработка						С		С
	Обсуждение					О	С	О	С
	Планирование			О		О	С	О	С
	Домашняя работа								С
Осуществление	Вводное занятие	О		О		О	С	О	С
	Индивидуальное задание		О		О		О		О
	Проекты в малых группах	О		О		О		О	
	Основы научной коммуникации				О		О		О
	Курсовая работа 1				О		О		О
Рефлексия	Собственного проекта			О	С	О	С	О	С
	Проектов коллег			О		О	С	О	С
	Всего проекта в целом						С		С

Цель проекта – формирование поколения студентов с высоким уровнем культуры профессионального подхода к подготовке учебных материалов путем реализации в рамках факультета горизонтальных связей передачи образовательной информации по применению инструментов LaTeX.

Задачи проекта включают:

- освоение студентами 1-го курса базовых инструментов системы LaTeX в рамках самостоятельной внеаудиторной учебной работы;
- создание во внеаудиторной учебной работе студентов 1-го курса условий для передачи опыта старшекурсника по применению LaTeX;
- создание в аудиторной учебной работе студентов 1-го курса условий для использования полученного опыта применения LaTeX;
- создание в будущей самостоятельной индивидуальной и групповой учебной исследовательской работе студентов условий для использования полученного опыта применения LaTeX;
- создание условий для формирования среды по воспроизведению образовательного опыта использования инструментов системы LaTeX в рамках студенческого сообщества факультета.



В качестве площадки по применению студентами инструментов LaTeX при подготовке учебных материалов предполагается использовать учебную практику по математике (1 семестр). В дальнейшем создание учебных материалов с применением LaTeX планируется в рамках факультативной дисциплины «Основы научной коммуникации» и при выполнении курсовой работы № 1 по математике.

Особый интерес для авторов представляет самостоятельное использование студентами инструментов LaTeX в будущей учебной работе за рамками проекта. Это исследование может послужить содержанием нового психолого-педагогического эксперимента.

### **Библиографический список**

1. Ашихмин А.С. Становление будущего учителя физики и математики: инструменты Latex и Manim // Вопросы математики, методики ее преподавания и цифровизации образования в учебно-исследовательских работах: материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов вузов. Пермь, 09 апреля 2024 года. Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2024. С. 70–71.
2. Кузнецов А.В. Основы LaTeX: учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: НИЯУ МИФИ, 2024. 504 с.
3. Львовский С.М. Набор и верстка в системе LaTeX. М.: МЦНМО, 2014. 398 с.
4. Пономарев Р.Е. Образовательное пространство: проблемы, теория, проектирование: монография. М.: МАКС Пресс, 2024. 108 с.
5. Попов К.А. О проблемах подготовки преподавателей онлайн-сообществ физико-математического направления // Современные проблемы науки и образования. 2023. № 2. С. 23.
6. Сатарина А.С. Разработка учебного курса по использованию издательской системы LaTeX в работе современного учителя // Дни науки студентов Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых: сборник материалов научно-практических конференций. Владимир, 12 марта 06 апреля 2018 г. Владимир: Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, 2018. С. 2190–2196.
7. Якубович Д.А., Еропова Е.С. Издательская система LaTeX как инструмент профессиональной верстки учебно-методической литературы в работе современного преподавателя // WORLD SCIENCE: PROBLEMS AND INNOVATIONS: сборник статей XXVII Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Пенза, 25 декабря 2018 года. Пенза: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.), 2018. Ч. 2. С. 145–148.

# О ФОРМАХ И МЕТОДАХ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЦИФРОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ABOUT FORMS AND METHODS  
OF PRACTICE-ORIENTED DIGITAL  
MATHEMATICS PREPARATION  
STUDENTS IN ENGINEERING SPECIALTIES

Б.А. Бадак

B.A. Badak

*Практико-ориентированная цифровая математическая компетенция, компьютерно-педагогическое сопровождение, компьютерно-математическое моделирование.*

В статье рассматриваются особенности применения разработанных форм и методов, предложенных в методической системе компьютерно-педагогического сопровождения практико-ориентированной математической подготовки студентов Белорусского национального технического университета. Формы и методы практико-ориентированного обучения математике предусматривают междисциплинарную интеграцию с такими специализациями, как экономика, языки программирования, методы машинного обучения, компьютерная инженерия и другими. Использование компьютерно-математического моделирования (КММ) при обучении математике инженеров играет ключевую роль в формировании базовых профессиональных компетенций. КММ позволяет визуализировать сложные математические понятия и методы, применять теоретические знания на практике и развивать аналитическое мышление.

*Practical-oriented digital mathematical competence, computer-pedagogical guidance, computer-mathematical modeling.*

In the article, the features of the application of developed forms and methods, proposed in the methodological system of computer-pedagogical support for practical-oriented mathematical training of students of the Belarusian National Technical University. Forms and methods of practical-oriented mathematics education provide interdisciplinary integration with such special disciplines as economics, programming languages, machine learning methods, computer engineering and others. The use of computer-mathematical modeling (KMM) in the training of engineers' mathematics plays a key role in the formation of basic professional competencies. KMM allows you to visualize complex mathematical concepts and methods, apply theoretical knowledge to practice and develop analytical thinking.

**П**ереход к цифровому обществу и развитие технологий требуют от будущих инженеров новых компетенций, включая умение работать с большими данными, использование математических моделей и алгоритмов в профессиональной деятельности. В этой связи актуальной задачей становится совершенствование математической подготовки студентов инженерных специальностей с использованием цифровых технологий. Нами разработаны и внедрены активные и интерактивные методы обучения, дополняющие традиционные (метод алгоритмизации) и направленные на формирование и развитие

**практико-ориентированной цифровой математической компетенции**, под которой понимаем компетенцию, характеризующую способность эффективно использовать математические знания и навыки для решения профессионально-ориентированных задач и включающую умение применять математические методы в анализе и обработке данных, использовать программное обеспечение и цифровые инструменты, а также интерпретировать результаты математических моделей в реальных ситуациях [1].

К таким методам относятся: *метод проектного обучения, эвристического обучения, компьютерного математического моделирования, BYOD-метод (Bring Your Own Device – с англ. «принеси свое собственное устройство»), персонализированного и адаптивного обучения с использованием элементов искусственного интеллекта, решение задач практико-ориентированного характера, решение проблемных задач (проблемный метод).*

Немаловажной проблемой является формирование у студентов инженерных специальностей творческого мышления, математического стиля мышления, открытия для себя новых закономерностей, развития интереса к исследованию математических моделей. На наш взгляд, перечисленные качества, главным образом, развиваются в процессе решения практико-ориентированных задач. Под **практико-ориентированными задачами** при обучении студентов технического университета математическим дисциплинам будем понимать задачи профессионально-ориентированного содержания, решение которых способствует формированию практико-ориентированной цифровой математической компетенции. При **решении задач практико-ориентированного характера** выражается смещение акцентов в содержании фундаментального знания с позиции логики математической науки на соответствия взаимосвязи с логикой и потребностями будущей профессиональной деятельности. Все задачи практико-ориентированного характера сопровождаются информационными поддержками (указаниями). Помимо аналитического решения (вручную), предусматривается проверка решения с помощью компьютерных математических систем, высокоуровневых языков программирования, табличного процессора Excel (по выбору студентов). В процессе обучения студентов специальности «Информационные системы и направления» дискретной математике, линейной алгебре и аналитической геометрии на практических занятиях для решения некоторых видов практико-ориентированных задач используем программный пакет Magma, который является мощным и широко используемым инструментом для вычислений в различных областях математики, включая алгебру, теорию чисел, алгебраическую геометрию и алгебраическую комбинаторику.

Решение задач практико-ориентированного содержания тесно взаимосвязано с методом компьютерного математического моделирования (КММ), так как инструменты цифрового моделирования способны наглядно визуализировать решение прикладных задач. Компьютерное математическое моделирование играет важную роль при обучении инженеров-программистов и инженеров-экономистов, поскольку:

– математические модели позволяют инженерам представлять сложные системы и сценарии упрощенными, помогая им анализировать, предсказывать

и решать проблемы, которые невозможно было бы решить исключительно аналитически или эмпирическими наблюдениями [2];

- инженеры могут использовать модели для оптимизации проектов, процессов и распределения ресурсов, что приводит к повышению эффективности и экономии затрат;

- модели помогают определить потенциальные риски и уязвимости, позволяя инженерам разрабатывать стратегии планирования непредвиденных обстоятельств.

К **особенностям применения КММ** в нашей образовательной практике относятся:

- анализ и интерпретация крупных наборов данных, разработка возможностей принятия решений, управляемых данными при обучении студентов с использованием возможностей компьютерных математических систем (Matlab, Mathcad), языков программирования (C++, C#, R, Python), табличного процессора Excel;

- использование метода конечных элементов на основе использования возможностей программы ANSYS для 3D-моделирования инженерных конструкций и анализа проблем в разных областях промышленности;

- формирование способности интерпретировать математические модели в компьютерные алгоритмы, улучшая их навыки вычислительного мышления и программирования;

- создание логико-смысловых схем и опор с использованием программных инструментов (SmartDraw, Lucidchart, Visual Paradigm и др.);

- развитие сотрудничества между студентами разных специальностей, способствуя командной работе и междисциплинарным навыкам общения.

Приведем примеры заданий (задач), предлагаемых студентам к выполнению с использованием возможностей КММ:

1. Разработайте логико-смысловую схему, в которой будут отражены взаимосвязи основных математических объектов по темам из курса математического анализа или линейной алгебры и аналитической геометрии с использованием графического редактора SmartDraw.

2. Разработайте алгоритм симуляций для компьютерных игр, систем финансовой торговли и других сложных программных приложений.

3. Разработайте алгоритм по созданию трехмерной геометрической модели детали и ее отображения с удалением скрытых линий и поверхностей с использованием программы ANSYS.

Эффективная математическая подготовка студентов технических университетов требует сочетания различных методов и форм обучения. В качестве **форм обучения** разработаны те из них, которые способствуют формированию практико-ориентированной цифровой математической компетенции. К ним относятся: лекции-конференции (проводятся как научно-практические занятия с заслушиванием докладов и выступлений студентов по заранее поставленной проблеме в рамках учебной программы), эвристические лекции (способствуют целенаправленному влиянию на формирование сознания студента, привлечение его к идеям

и методам науки и будущей профессиональной деятельности), скрайбинг-лекции (предоставляют возможность быстро, качественно и наглядно донести информацию до студентов), лабораторные работы и типовые расчеты в виртуальных математических средах (предлагают динамическую визуализацию математических понятий, позволяя обучающимся манипулировать объектами, исследовать отношения и получить более интуитивное понимание абстрактных идей), компьютерное математическое моделирование (представляет использование возможностей языков программирования и компьютерных математических систем для решения профессионально-ориентированных задач), эвристические задания (развивают творческие способности, критическое мышление, мотивацию познания, способствуют улучшению навыков общения и сотрудничества, позволяют сделать процесс обучения интересным), использование элементов смешанного и пирингового обучения (позволяет обучающимся взаимодействовать друг с другом для достижения образовательных целей), использование проектного обучения (позволяет преодолеть разрыв между теоретической математикой и практическим применением в области разработки программного обеспечения и других технических областей), включение элементов искусственного интеллекта и машинного обучения (способствуют персонализации обучения, анализируя сильные и слабые стороны обучающихся).

Практико-ориентированная цифровая математическая подготовка студентов инженерных специальностей играет ключевую роль в формировании необходимых компетенций для успешной профессиональной деятельности. Использование современных цифровых технологий, электронных ресурсов и проектного обучения способствует более глубокому пониманию и применению математических знаний в инженерной практике [3]. Внедрение этих форм и методов в образовательный процесс позволяет подготовить высококвалифицированных специалистов, готовых к вызовам цифровой экономики.

### **Библиографический список**

1. Бадак Б.А. О построении методической системы компьютерно-педагогического сопровождения практико-ориентированной математической подготовки студентов технического университета // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2024. Вып. 2 (62). С. 25–37. DOI: 10.24412/2079-9152-2024-62-25-37.
2. Лабинский А.Ю., Козлов А.А. Принятие решений с помощью метода аналитических сетей // Науч.-аналит. журн. «Вестник С.-Петерб. ун-та ГПС МЧС России». 2018. № 4. С. 24–32.
3. Козлова Н.Ш. Актуальность онлайн-образования для IT-специалистов // Вестник Майкопского государственного технологического университета. 2018. № 4. С. 80–85.



# ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

## PROGRAMMING ELEMENTS IN TEACHING MATHEMATICS

И.С. Бекешева, О.В. Бобылева,  
А.Р. Донакай

I.S. Bekesheva, O.V. Bobyleva,  
A.R. Donakai

*Математические методы, элементы программирования, алгоритм, код программы, гаджет, современные цифровые ресурсы, система программирования КуМир.*

В статье определяется роль современных гаджетов в математическом образовании. Авторы предлагают один из методов использования элементов программирования при обучении математике: показаны возможности применения системы программирования КуМир при изучении различных тем школьного курса математики.

*Mathematical methods, programming elements, algorithm, program code, gadget, modern digital resources, Kumir programming system.*

The article defines the role of modern gadgets in mathematical education. The authors propose one of the methods of using programming elements in teaching mathematics: the possibilities of using the Kumir programming system in studying various topics of the school mathematics course are shown.

Современное общество ставит перед образованием (на любой ступени обучения) основной задачей развитие всесторонне развитой, креативной личности, готовой ориентироваться в быстро меняющихся условиях. Как следствие, уже на школьном уровне образовательный процесс не может локализоваться на одном предмете, либо конкретном разделе науки, необходима их интеграция [1]. Например, математика «делится» на два раздела «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия», а с 2024 года в школьный курс математики добавили еще один раздел «Теория вероятностей». Однако для решения какой-либо практической или «жизненной» задачи чаще всего требуются знания из различных областей математики, а также умение комбинировать различные математические методы обработки имеющейся информации.

Отметим, что в большинстве случаев для решения математических задач используется программирование, и наоборот, при решении проблем, возникающих в программировании, используются математические методы. Современные цифровые ресурсы позволяют произвести как простые, так и громоздкие математические вычисления, при этом их использование возможно только тогда, когда у человека имеется строго выстроенная математическая модель поставленной задачи, известен метод ее решения и составлен строгий алгоритм использования программного средства [3].

Проведем аналогию с ситуацией в школьном образовании: современный ученик в первую очередь стремится найти ответ в поисковых системах, задать



вопрос голосовым помощникам Алисе или Марусе. Однако даже при таком количестве ресурсов и гаджетов обучающиеся испытывают сложности при решении задач, так как он не умеет искать и анализировать информацию. Следовательно, современный учитель может и должен использовать в образовательном процессе современные гаджеты как важную составляющую часть реальной жизни ученика, но сначала необходимо научить учащихся правильно ими пользоваться: формулировать вопрос, отбирать необходимую информацию, перерабатывать полученную информацию и т.д. Одним из средств реализации данной идеи могут выступать интегрированные уроки математики с элементами программирования. Цель таких уроков – закрепить навыки использования основных алгоритмических структур. Для выполнения поставленной задачи ученики стоят перед необходимостью разработки сложной математической модели, при этом востребованными оказываются знания и умения учеников, полученные на уроках математики.

На внеурочной деятельности можно показать, как с помощью программ решают сложные математические задачи. Например:

- решение уравнений и систем уравнений: онлайн-алькуляторы, системы компьютерной алгебры;
- графическое представление математических функций: создание графических представлений математических функций;
- анализ данных: программирование анализа больших объемов данных;
- разработка математических моделей: разработка математических моделей, которые могут быть использованы для прогнозирования будущих событий;
- обработка изображений;
- криптография: разработка алгоритмов защиты данных.

В целом программирование помогает математикам автоматизировать «рутинные» процессы и решать более сложные задачи, что позволяет им более эффективно использовать свои знания и навыки в различных областях. Указанные темы можно также использовать для организации научно-исследовательской или проектной деятельности школьников.

Рассмотрим возможность применения систем программирования при изучении математики более подробно. Одной из таких систем, которую в настоящее время можно применять в школе, является КуМир. КуМир (Комплект Учебных МИРов) – система программирования, предназначенная для поддержки начальных курсов информатики и программирования в средней и высшей школе [2].

В системе КуМир используется школьный алгоритмический язык с русской лексикой и встроенными исполнителями Робот и Чертежник. При вводе программы КуМир осуществляет постоянный полный контроль ее правильности, сообщая на полях программы обо всех обнаруженных ошибках. При выполнении программы в пошаговом режиме КуМир выводит на поля результаты операций присваивания им значения логических выражений. Это позволяет ускорить процесс освоения азов программирования.

В простейшем случае программа на КуМире выглядит так:

```
алг Первый
нач
...
кон
```

После «алг» (алгоритм) пишется имя алгоритма, между «нач» (начало) и «кон» (конец) пишутся команды алгоритма. При написании автоматически создаются отступы в начале строки, это делает программу более наглядной, удалять или пытаться сделать отступ самим не надо.

Приведенный алгоритм «Первый» не будет ничего делать, т.к. между «нач» и «кон» у него нет команд.

Для отработки знаний по теме площадь прямоугольника учащимся предлагается задание: «Разработать программу, которая сможет посчитать количество банок краски, необходимых для покраски стен у Вас в комнате». На первом этапе выполнения задания ученик должен будет прийти к выводу, что для решения поставленной задачи необходимо найти площадь «участка», который нужно покрасить. Чаще всего это участок прямоугольной формы (или фигура, состоящая из нескольких прямоугольников). Поэтому необходимо написать программу, которая будет вычислять площадь прямоугольника. А для этого придется вспомнить алгоритм, по которому вычисляется площадь прямоугольника в математике. Код программы может иметь следующий вид:

```
алг Площадь прямоугольника
нач
. вещь длина, ширина, площадь
. ВЫВОД «введите значения длины и ширины прямоугольника»
. ВВОД длина, ширина
. площадь := длина * ширина
. ВЫВОД «Площадь прямоугольника равна », площадь
.кон
```

При выполнении этого задания ученику необходимо будет:

- построить математическую модель условия задачи (скорее всего это будет макет (плоский или объемный) стен комнаты);
- разработать алгоритм решения поставленной задачи;
- записать математическое решение поставленной задачи;
- перевести математическое решение на программный язык, при этом, если математический алгоритм решения задачи был неверный, то и программа работает неправильно;
- при необходимости вернуться к одному из этапов и исправить выявленные ошибки.

Кроме рассмотренного примера, учитель может использовать готовые программы системы КуМир (или разработать их сам) для наглядной демонстрации изучаемых тем. Например, в 6 классе при изучении темы «Координатная прямая»

исполнителя Кузнечик может показывать движение вдоль числовой прямой. Работа с программой помогает учащимся легче представить расположение точек на числовой прямой. Визуализация перемещений позволяет им определять координаты заданных точек. В этой программе привлекает то, что учащиеся легко понимают принцип работы с исполнителем, а значит, успешно справляются с поставленными задачами. Упражнения, которые выполняют учащиеся, в этой программе, могут сводиться не только к перемещениям, но и определению координат точек после нескольких перемещений Кузнечика вдоль прямой (рис.).

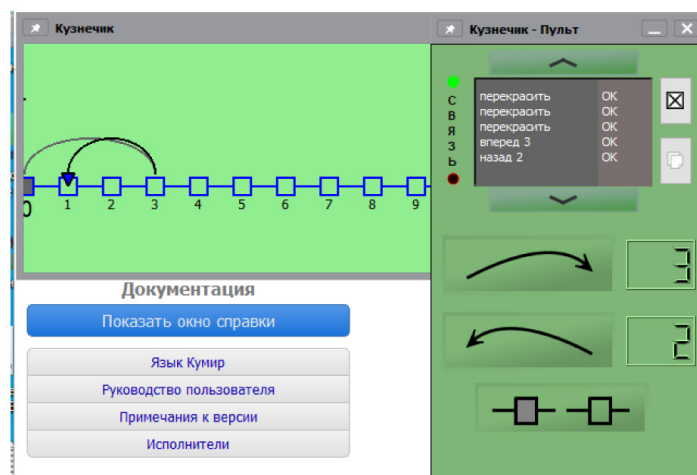


Рис. Окно исполнителя Кузнечик

Имеется в этой среде замечательная возможность – управлять движением исполнителя Кузнечик с помощью пульта. Для учащихся, которые не владеют основами программирования, управлять перемещением исполнителя вдоль числовой оси удобно и наглядно. Пульт Кузнечика располагается в отдельном окне и предназначен для его управления. С помощью пульта Кузнечику можно передавать команды, он непосредственно выполняет их. Пользоваться пультом можно как при видимом окне наблюдения за Кузнечиком, так и когда это окно скрыто (управление вслепую). В поле Кузнечика возможно изменить значение прыжка, установить границы интервала, задать количество флажков, которым отмечаются нужные клетки. Ученики по своему усмотрению может моделировать начальную обстановку, что позволяет исследовать простейшие числовые закономерности, проводить числовые эксперименты. Перемещения исполнителя легко переводятся в компьютерную программу.

Таким образом, использование современных гаджетов во внеурочной деятельности по математике может стать не только интересным, но и полезным для современных учеников. Интерес будет повышаться, так как гаджеты – это неотъемлемая часть современной жизни. А для правильной работы с большинством гаджетов необходимо выполнять определенный алгоритм действий, способствующий развитию математических знаний и умений: строить математическую модель, составлять алгоритм для решения поставленной задачи, выбирать необходимые формулы, проверять результат, делать выводы.

## Библиографический список

1. Алексеева Е.Н. Методические аспекты подготовки будущего учителя математики к индивидуализированному обучению // Наука и школа. 2024. № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aspekty-podgotovki-buduschego-uchitelya-matematiki-k-individualizirovannomu-obucheniyu> (дата обращения: 22.11.2024).
2. Усова Л.Б., Шакирова Д.У. Методические аспекты обучения математике с использованием информационных и сквозных технологий // Вестник ОГУ. 2023. № 1 (237). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aspekty-obucheniya-matematike-s-ispolzovaniem-informatsionnyh-i-skvoznyh-tehnologiy> (дата обращения: 22.11.2024).
3. Система программирования КуМир. URL: <https://www.niisi.ru/kumir/dl.htm>.

# РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У КУРСАНТОВ

## DEVELOPMENT OF COGNITIVE INTEREST TO STUDY MATHEMATICS AMONG THE CADETS

В.С. Будневич

V.S. Budnevich

*Высшая математика, познавательный интерес, психология обучаемого, педагогические приемы, цифровизация.*

Рассматриваются различные аспекты подхода к развитию познавательного интереса к изучению математики у курсантов высших военных заведений (в том числе и тех, кто направлен в нашу страну на учебу из-за рубежа). Анализируются психологический и педагогический подходы к данной проблеме, а также плюсы и минусы цифровизации процесса обучения.

*Higher mathematics, cognitive interest, psychology of the student, pedagogical techniques, digitalization.*

Are being considered various aspects of the approach to the development of cognitive interest in learning mathematics among cadets of higher military institution, including those who are sent to study in our country from abroad. Psychological and pedagogical approaches to this problem are analyzed, as well as the pros and cons of digitalization of the learning process.

**П**ознавательный интерес к предмету обучения понятие неоднозначное, включающее в себя и интеллектуальный и эмоциональный аспекты. Г.И. Щукина дала следующее определение познавательного интереса. «Познавательный интерес – это направленность личности на окружающий мир, которая характеризуется такими свойствами, как активность и избирательность, желание познать предметы и явления окружающего мира, и происходит на положительном эмоциональном фоне» [1]. Если преподавателю не удастся вызвать у обучаемого познавательный интерес, то предмет не будет усвоен в той мере, которая необходима для профессиональной деятельности курсанта в будущем. Высшая математика преподается курсантам только на первом и втором курсах, когда они еще не изучают предметы, связанные с их специальностью, поэтому у многих из них нет твердого убеждения, что математика необходима им для овладения знаниями, которые они будут использовать как в дальнейшей учебе, так и в своей инженерной практике. Перед преподавателем встает задача не только снабдить их определенной суммой знаний, но и вызвать познавательный интерес к своему предмету. Его задача использовать все свое мастерство и опыт, ведь он учит не индивидуума, а множество индивидуумов, которых, разумеется, объединяет желание стать военными инженерами, но при этом каждый имеет свой характер, свое отношение к учебе и, наконец, способность к усвоению материала тоже у каждого своя.

Попытаемся проанализировать подходы к обучению математики, стимулирующие интерес к этому предмету. Разумеется, каждый преподаватель подходит

к решению задачи развития познавательного интереса к своему предмету по-своему, но можно выделить некоторые общие моменты, которые целесообразно использовать для достижения наилучшего результата. Если говорить о преподавании высшей математики, то интерес к этому предмету во многом зависит от уровня школьной подготовки курсантов. Те из них, кому этот предмет давался легко, как правило, не задумываются над тем, пригодятся ли им полученные в высшем учебном заведении знания или нет. Они привыкли успешно решать задачи по математике еще в школе и продолжают с удовольствием заниматься этим в вузе. Их не пугает новый для них материал, они активно ведут себя на занятиях, не боятся задавать вопросы, критиковать преподавателя, если он, по их мнению, допустил какую-то оплошность. Но, если курсант не обладает необходимыми школьными знаниями или недостаточно внимателен на занятиях, или уверен, что эти знания в дальнейшем для него бесполезны, то преподаватель вынужден что-то предпринять, чтобы у обучающегося появилась мотивация к изучению предмета. Одним из способов наказания таких учеников является, разумеется, выставление им неудовлетворительных оценок. Но он хорошо воздействует на тех, кто не справился с заданием из-за того, что отнесся к поставленным перед ним задачам с недостаточным усердием. Тогда низкая оценка его знаний ему неприятна, и он постарается ее исправить как можно скорее. Однако здесь преподаватель может допустить психологическую ошибку. Если он в воспитательных целях слишком занизил оценку, то курсант может счесть это несправедливым и вообще потерять интерес к предмету. Поэтому преподаватель вынужден как бы лавировать подобно Одиссеей между Сциллой излишнего либерализма и Харибдой излишней строгости. При этом, по моему мнению, категорически нельзя унижать обучающегося, необходимо чтобы он верил в свою способность овладеть материалом, который ему трудно дается. Дополнительные трудности в общении возникают при обучении курсантов из стран дальнего и ближнего зарубежья. Появляется необходимость устранять возникающее иногда недопонимание, вызванное недостаточным знанием русского языка. Вот тогда может прийти на помощь разумное использование того преимущества, которое дает цифровизация в виде слайдовой поддержки, позволяющая вставлять грамотно составленные фразы (или отдельные слова) на английском или каком-либо другом языке.

Если преподаватель видит, что способности курсанта значительно превосходят средний уровень, что перед ним творческая личность, то следует не только давать такому курсанту задачи повышенной сложности и поручать делать доклады, но и предлагать участвовать в олимпиадах по математике. Тогда они не расстаются с математикой все пять лет своего обучения и, вне всякого сомнения, становятся специалистами высокого класса.

Помимо работы с индивидуальными личностями, преподаватель должен взаимодействовать с коллективом, в который они входят. Это требует понимания психологического климата в этом коллективе. Очень полезен дух соревновательности между курсантами, иногда он выявляет способности тех, кто ранее был равнодушен к данному предмету.



Наряду с психологическим фактором на развитие познавательного интереса у курсантов влияет также педагогический фактор. То, как преподаватель подает материал, определяет и интерес к предмету и желание изучать его. В какой-то степени залогом успеха является личность преподавателя, его умение расположить к себе аудиторию, интересно подать материал, осуществлять обратную связь с аудиторией. Но не менее важно при составлении учебной программы обеспечить преподавателю возможность реализовать свои приемы и методы обучения для получения наилучшего результата. При этом следует учитывать, что ни одна техническая дисциплина не может обойтись без использования математики. Поэтому следует согласовывать прохождение этих дисциплин с последовательностью изучения разделов математики, которые используются в них. Ведь еще Кант сказал, что в каждой науке столько истины, сколько в ней математики. Нередко курсанты проявляют на лекции усиленный интерес к какому-то частному вопросу, объясняя, что уже столкнулись с этим понятием при изучении другого предмета и не смогли до конца его осмыслить.

Хочется сказать, что сокращение учебных часов, отводимых на изучение математики, приводит к тому, что многие базовые понятия проходятся слишком быстро и большинству обучающихся не удается закрепить пройденный материал. Следует при этом помнить, что все разделы математики связаны между собой и, если одна из тем не усвоена до конца, рано или поздно это скажется и при изучении другой темы. Курсанты прорабатывают теоретический материал и выполняют домашние задания в часы самоподготовки. Это дает возможность наиболее способным из них не только помочь товарищам, но и самим углубить свои знания. Как известно, многие до конца понимают проблему только тогда, когда объясняют ее решение другим. Это также следует учитывать преподавателю и не препятствовать курсантам объяснять своим товарищам проходимый материал, тактично поправляя их, если они ошибаются. Вернемся еще раз к особенностям обучения иностранных студентов. Их уровни подготовки значительно отличаются между собой, одни давно закончили школу и много лет не имели дело с математикой, другие уже учились в высшем учебном заведении, и многие из изучаемых разделов математики им знакомы. Ко всему этому еще добавляется недостаточное владение русским языком. Поэтому у преподавателя возникают дополнительные сложности при теоретических доказательствах и решении задач. Иногда приходится много раз объяснять одним курсантам то, что другие знали с самого начала. В данном случае приходится восполнять отсутствие необходимых для изучения высшей математики знаний школьной математики, а иногда и арифметики. Поскольку многие фразы, которые можно было продиктовать, приходилось писать на доске, преподаватель должен был разрабатывать лекцию тщательно, чтобы уложиться в требуемое время и в то же время изложить весь необходимый материал. Цифровизация учебного процесса частично решает эту проблему, позволяя сократить время на изложение материала и облегчая его конспектирование.

Чтобы вызвать интерес у слушателей, преподаватель при написании лекции должен сам в совершенстве владеть излагаемым материалом, а также учесть

уровень подготовленности слушателей к его восприятию. При этом он вынужден следить за реакцией всех курсантов, находящихся в аудитории. Если их внимание ослабевает, ему приходится прибегать к каким-то приемам, чтобы вернуть их интерес. Эти приемы у каждого свои, они определяются личностью лектора и не всегда могут использоваться другими преподавателями. Но существуют и общие подходы к подаче материала: ясное изложение цели занятия, описание конкретных практических задач, для решения которых понадобятся полученные результаты.

При этом преподаватель должен излагать материал в доступной форме, приспособившись к уровню аудитории. Но, чтобы сильным курсантам не становилось скучно, полезно показать какой-то интересный результат, возможно даже выходящий за рамки программы.

Обращаясь во время лекции к аудитории с каким-то вопросом, преподаватель не только возобновляет интерес к излагаемому материалу у тех, кто отвлекся, но и помогает обучающимся осмыслить его или хотя бы попытаться осмыслить.

В конце второго курса, когда курсант выполняет курсовую работу по методам вычислений или лабораторные работы по статистике, ему становится яснее, как он сможет применить полученные знания. Но важно, чтобы интерес к математике развивался с первого курса, когда проходимый материал воспринимается несколько абстрактно. Ведь именно он является фундаментом, на котором возводится здание высшей математики.

Следует также отметить, что в современных условиях, когда иногда возникает необходимость перехода на дистанционное обучение, особенно актуальным становится развитие у обучающихся способности к самостоятельному освоению материала. Можно сказать, что одна из задач преподавателя – научить его учеников учиться. «Перспективная система образования должна быть способна не только вооружать знаниями обучающегося, но и ввиду постоянного и быстрого обновления знаний в нашу эпоху формировать потребность в непрерывном самостоятельном овладении ими, умения и навыки самообразования, а также самостоятельный и творческий подход к знаниям в течение всей активной жизни человека» [2].

Как правило, у обучающихся вызывают интерес исторические факты, которые показывают необходимость появления данного раздела математики в определенный период времени. Конечно, все это они могут узнать, войдя в Интернет, но, например, всегда вызывает интерес история появления дифференциального и интегрального исчислений, основы которых Архимед заложил еще в III веке до нашей эры. Почему же дифференциальное исчисление было создано только в конце XVII начале XVIII веков? Все определялось необходимостью, порожденной наступлением эпохи Великих географических открытий и колониальных войн. Такие примеры показывают обучающимся, что математика была рождена не по прихоти великих математиков и в жизни пригодиться не может, как многим из них кажется, а появилась как ответ на определенный запрос своего времени.

Приведу два примера из личного опыта, которые показывают, что у некоторых курсантов интерес к математике может возникнуть при изучении конкретного раздела, а у некоторых он уже давно появился, им хочется узнать что-то новое

самостоятельно. Во время изучения раздела математики «Теория вероятности», которая родилась из переписки двух французских математиков Пьера Ферма и Блеза Паскаля [3] по поводу выигрыша в карточной игре, курсанты проявляют живой интерес к задачам подобного рода. Двое из них предложили сделать доклады о способах формирования таблицы случайных чисел, все еще интересуясь азартными играми. Но в процессе подготовки доклада они поняли, насколько серьезна эта проблема, и увидели, что круг задач, которые можно решать, используя датчики случайных чисел, весьма широк. Приведу еще один пример. Курсант заинтересовался рядом Фибоначчи и связанным с ним понятием «золотого сечения» [4] и с удовольствием написал доклад на эту тему. В ходе его подготовки он обнаружил, что многое узнал о геометрических фигурах, которые изучал на занятиях по аналитической геометрии. Ему, как человеку, имеющему отношение к космосу, был особенно интересен тот факт, что во Вселенной некоторые известные человечеству галактики и тела в них существуют в форме спирали, соответствующей формуле «золотого сечения». Подобные примеры показывают, что необходимо всячески поощрять стремление курсантов расширить круг своих знаний и выйти за рамки программы. Но это стремление возникает только в том случае, если у него развит интерес к данному предмету.

В заключение хочется сказать о плюсах и минусах использования цифровизации в учебном процессе. С одной стороны, как уже говорилось выше, она облегчает изложение и может сделать его более наглядным, но иногда и более формализованным и стандартным, теряя ту неповторимость и оригинальность, определяемые личностью преподавателя. Некоторые лекции наших преподавателей мы помним долгие годы, а ведь они писались мелом на доске. Поэтому необходимо поддерживать баланс в этом вопросе. Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что развитие познавательного интереса к изучению математики является одной из главных задач для преподающих этот предмет. Обучающиеся должны понять, что пробелы в знаниях помешают им успешно осваивать учебный материал на старших курсах, необходимый для овладения выбранной специальностью, и это приведет к трудностям, с которыми они столкнутся в своей инженерной деятельности. Помимо знания предмета и набора педагогических приемов, преподаватель должен видеть психологический портрет каждого обучающегося для индивидуального подхода лично к нему, уметь использовать преимущества цифровизации и в какой-то степени владеть ораторским искусством.

### **Библиографический список**

1. Щукина Г.И. Проблемы познавательного интереса в педагогике. М.: Педагогика, 1971.
2. Андреева А.А., Солдаткин И.И. Дистанционное обучение: сущность, технология, организация. М.: МЭСИ, 1999.
3. Альфред Реньи. Письма о вероятности // Трилогия о математике. М.: Мир, 1980. С. 121–198.
4. Савин А. Число Фидия – золотое сечение // Квант. 1997. № 6.

# ЭЛЕКТРОННЫЙ РУССКО-ТУВИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ЗНАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

## ELECTRONIC RUSSIAN-TUVAN MATHEMATICAL DICTIONARY AS A MEANS OF FORMING KNOWLEDGE OF MATHEMATICAL TERMS

Д.Э. Бурбужук

D.E. Burbuzhuk

*Обучение математике, математический словарь, двуязычие, словарь, русско-тувинский словарь, математические термины, двуязычие.*

В современном мире значение информации и ее доступности трудно переоценить. С развитием технологий, а также с увеличением роли образовательных программ на разных языках особую актуальность приобретает создание специализированных словарей. Одной из таких инициатив является разработка электронного русско-тувинского математического словаря, который может значительно облегчить изучение математики для носителей тувинского языка.

*Teaching mathematics, mathematical dictionary, bilingualism, dictionary, Russian-Tuvan dictionary, mathematical terms.*

In the modern world, the importance of information and its accessibility cannot be overestimated. With the development of technology, as well as with the increasing role of educational programs in different languages, the creation of specialized dictionaries is becoming particularly relevant. One of these initiatives is the development of an electronic Russian-Tuvan mathematical dictionary, which can greatly facilitate the study of mathematics for native speakers of the Tuvan language.

**В** современной системе образования необходимость модернизации процесса обучения вызвана в первую очередь постоянным совершенствованием современных информационных технологий. Данные тенденции требуют разработки и внедрения нетрадиционных методов и приемов обучения, которые базировались бы на использовании информационных средств обучения с применением системы современных педагогических технологий и обеспечивали бы способность учителей подготовить учащихся к дальнейшему обучению в условиях академической мобильности [2]. В связи с этим особую роль приобретает овладение как учащимися, так и учителем понятийно-терминологическим аппаратом. В качестве информационных средств обучения могут выступать электронные учебники, пособия, словари, интерактивные обучающие, программы, тренажеры и т.д. Применение предметных электронных учебников и пособий обеспечивает эффективный поиск необходимой информации

в процессе изучения учебного материала и создает условия для формирования познавательной потребности обучаемых и удовлетворения этой потребности, что, в свою очередь, способствует развитию самостоятельности, раскрытию и использованию не только учебных, но и творческих способностей обучаемых. Именно этим и вызвана актуальность проблемы создания электронных словарей и пособий для применения их в образовательном процессе [1].

Целью данной работы является анализ необходимости создания электронного русско-тувинского математического словаря в контексте современного образовательного процесса.

Задачи исследования:

- определение актуальности проекта для образовательной среды Республики Тыва;
- этапы создания электронного двуязычного словаря по математике;
- оценка потенциальных пользователей словаря в образовательных учреждениях.

Двуязычный терминологический словарь – это двуязычное лексикографическое произведение учебной направленности, содержащее основной терминологический пласт рассматриваемой предметной области (в данном случае – педагогики), служащее для повышения общей предметной и языковой готовности по данному предмету [5]. Проектирование подобного словаря предполагает не просто перевод терминологического толкового словаря, но и учет лексических, культурологических факторов, а также особенностей предметной области [1].

Научные исследования показывают, что языковой барьер является одной из главных преград на пути к получению качественного образования. В регионе, где преобладает тувинский язык, изучение математики часто осложняется недостаточной терминологической базой. Поэтому создание словаря, в котором математические термины и концепции будут представлены и на русском, и на тувинском языках, способствует более глубокому пониманию предмета [3].

Создание русско-тувинского математического терминологического словаря – это процесс, требующий усилий различных специалистов, но который может существенно обогатить образовательную среду и обеспечить доступность математических знаний для тувинскоязычных студентов. Такие проекты способствуют сохранению и развитию языка и культуры, а также повышают уровень образования в регионе. Создание русско-тувинского математического терминологического словаря можно разбить на несколько этапов:

- сбор данных: обследование существующих источников, научных публикаций и образовательных материалов на русском и тувинском языках.
- классификация терминов: определение ключевых математических понятий, необходимых для включения в словарь.
- перевод и объяснение: работа с носителями языка для точного и адекватного перевода терминов, а также их объяснений.
- создание электронной платформы: разработка веб-интерфейса, который будет обеспечивать доступ к словарю и возможностям поиска.



Электронный математический словарь на русско-тувинском языке будет использоваться учениками, учителями средних образовательных учреждений, а также студентами, педагогами высших учебных заведений Республики Тыва.

В Республике Тыва математический словарь был издан в 1971 г. М.С. Хомушку в печатном варианте, словарь состоит из 5000 слов. В научной национальной библиотеке хранится в трех экземплярах. В любое время можно прийти и сделать копию. Электронных математических словарей в свободном доступе нет. Разработка словаря математических терминов в свободном доступе в электронном виде представляет собой значимый шаг в направлении улучшения образовательного процесса в Республике Тыва. Он не только способствует устранению языкового барьера, но и активизирует интерес к математике среди русскоязычных и тувиноговорящих учащихся. Подобные инициативы могут быть распространены и на другие области науки и техники, что в конечном счете будет способствовать созданию многоязычного образовательного пространства в России.

### **Библиографический список**

1. Давыдова А.А. Проектирование электронных билингвальных словарей по педагогическим дисциплинам: дис. ... канд. пед. наук. 2013. 238 с.
2. Хлыбова М.А., Киндеркнехт А.С. Специфика создания терминологических словарей аспирантами неязыкового вуза. М.: Азимут научных исследований: педагогика и психология, 2016. С. 207–209.
3. Салехова Л.Л., Валеев И.И. Тенденции исследований проблем математического образования в многоязычном контексте. М.: Педагогический журнал Башкортостана, 2020. С. 86–92.
4. Салехова Л.Л. Проектирование дидактической модели двуязычного обучения математике. М.: Вестник ТГГПУ, 2008. С. 100–107.
5. Чайникова Г.Р. Разработка модели учебного электронного терминологического словаря тезаурусного типа для целей профессионально ориентированного обучения иностранному языку. М.: ОТО, 2015. С. 124–132.



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В 7–9 КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

## USING SPREAD SHEETS FOR TEACHING MATHEMATICAL STATISTICS IN GRADES 7–9 OF SECONDARY SCHOOL

М.Ю. Вагина, С.А. Севостьянова,  
Е.В. Мартынова

M.Yu. Vagina, S.A. Sevostyanova,  
E.V. Martynova

*Математическое образование, математическая статистика в школе, электронные таблицы, MS Excel, Jamovi, среднее арифметическое, медиана, диаграммы рассеивания.*

Рассмотрен подход к изучению математической статистики в 7–9 классах средней школы с использованием электронных таблиц. Приведены примеры заданий, направленных на практическое освоение алгоритмов статистических расчетов с помощью таких электронных таблиц, как MS Excel и Jamovi. Предложенные задания предусматривают выполнение на ПК в электронных таблицах и предполагают использование статистических данных с сайта лаборатории методики вероятности и статистики ИЦНМО.

*Mathematical education, mathematical statistics at school, spreadsheets, MS Excel, Jamovi, arithmetic mean, median, scatter charts.*

An approach to the study of mathematical statistics in grades 7–9 of secondary school using spreadsheets is considered. Examples of tasks aimed at the practical development of statistical calculation algorithms using spreadsheets such as MS Excel and Jamovi are given. The proposed tasks involve execution on a PC in spreadsheets and involve the use of statistical data from the laboratory's website of the ICNMO methodology of probability and statistics.

**П**овышение качества математического образования школьников является актуальной задачей модернизации российского образования. Изучение математической статистики как отдельного школьного предмета положительно сказывается на подготовке современных школьников, поскольку дает обучающимся базовую подготовку для восприятия данных официальной социально-экономической статистики, результатов различных опросов и социологических обследований, результатов научных исследований в различных областях знаний, основанных на статистических данных. С 2023 года в российских школах в 7–9 классах появился новый предмет «Вероятность и статистика» и новый учебник «Вероятность и статистика» И.Р. Высоцкого и И.В. Яценко. Учебник разработан в соответствии со всеми требованиями ФГОС ООО, утвержденного Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021, предназначен для знакомства обучающихся с формами представления и описания данных в статистике, случайными событиями, вероятностью и ее свойствами. Отличительной особенностью этого учебника являются специальные виды заданий для обучающихся «Используй калькулятор» и специальные сноски в конце параграфов с информацией о том, какая команда отвечает за вычисление «Среднего арифметического», «Медианы» и т.п. в электронных таблицах.

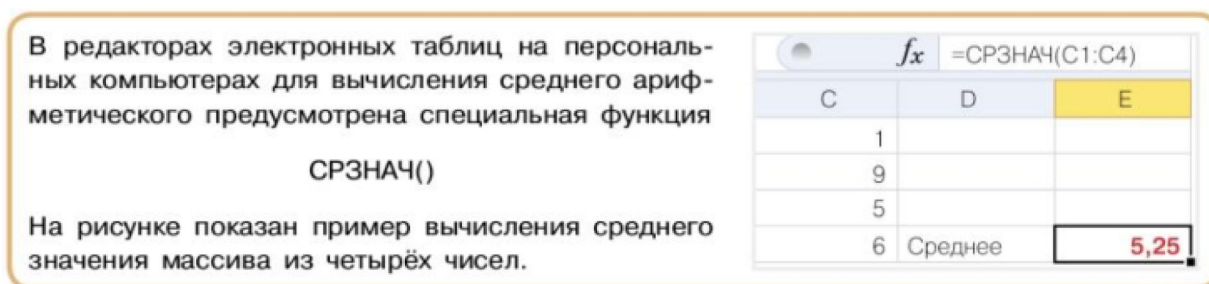


Рис. 1. Фрагмент учебника с примером вычисления среднего арифметического в электронных таблицах

Мы считаем, что в процессе обучения статистике целесообразно предлагать ученикам задания, направленные на практическое освоение алгоритмов статистических расчетов с помощью электронных таблиц, например, MS Excel (редактор электронных таблиц Microsoft) и Jamovi (открытое статистическое программное обеспечение для настольных компьютеров и облака, электронная таблица «третьего поколения», являющаяся альтернативой дорогостоящим статистическим продуктам). Статистический материал для организации таких занятий можно брать на сайте лаборатории методики вероятности и статистики МЦНМО [2]. Сайт создан для поддержки преподавания теории вероятностей и статистики в школе, рассчитан на учителей и школьников. На нем публикуются все материалы, полезные при изучении и преподавании статистики и вероятности в школе: сценарии уроков, статьи, таблицы распределений, базы данных и т.п. Во вкладке Электронные ресурсы размещены таблицы со статистическими данными по географии, экономике, демографии, спортивной статистике и т.д. Данные упакованы в архивы в формате rar. Некоторые таблицы находятся в свободном доступе, загрузка остальных требует регистрации.

Приведем примеры заданий, выполняемых на ПК в электронных таблицах, с использованием статистических данных с сайта лаборатории методики вероятности и статистики МЦНМО [2].

**Задача 1.** Найдите среднее арифметическое площади сельскохозяйственных земель России, пользуясь таблицей «Ag009. Сельскохозяйственные земли по странам мира.xlsx» [2], на ПК.

Обмен		Шрифт		Выравнивание				
BL136		fx		=СРЗНАЧ(AR136:BK136)				
A	B	C	BG	BH	BI	BJ	BK	BL
		Польша	143 740	144 620	145 120	145 230	144 610	
		Португалия	36 190	36 734	37 100	38 939	38 728	
		Пуэрто-Рико	1 784	1 738	1 689	1 679	1 679	
		Россия	2 154 940	2 154 940	2 154 940	2 154 940	2 154 940	2 156 911
		Руанда	18 117	18 117	18 117	18 117	18 117	
		Румыния	135 210	133 780	134 140	138 260	135 910	
		Сальвадор	12 141	12 052	11 957	11 957	11 957	
		Самоа	688	620	552	494	494	
		Сан Марино	23	23	23	23	23	

Рис. 2. Решение задачи 1 в MS Excel

**Задача 2.** Вычислите медиану площади зеркала озер в РФ, пользуясь таблицей «G003\_Largest\_Lakes\_RF.xls» [2], на ПК.

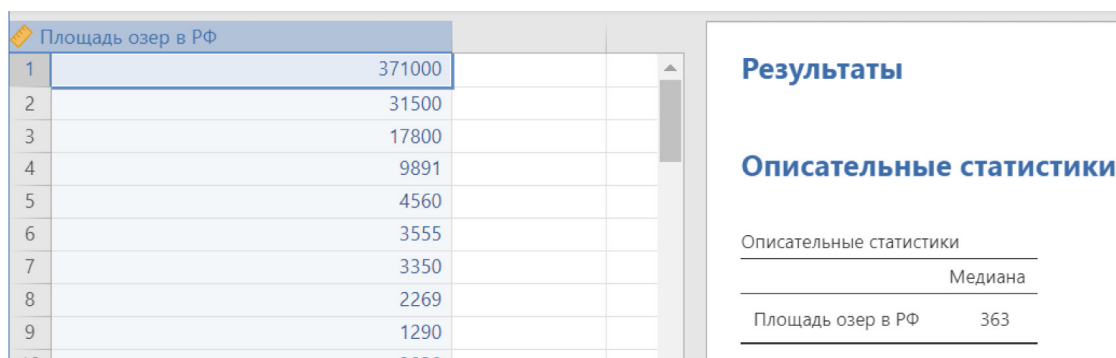


Рис. 3. Решение задачи 2 в Jamovi

**Задача 3.** Найдите дисперсии уровней среднего профессионального образования в Челябинской и Свердловской областях, пользуясь таблицей «ED008\_Среднее профессиональное образование по субъектам России.xls» [2]. В какой области дисперсия больше?

<b>Уральский федеральный округ</b>	1 891	463	
Курганская область	170	36	
<b>Свердловская область</b>	<b>615</b>	<b>215</b>	<b>1541447</b>
Тюменская область со следующими округами:	485	148	
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра	205	80	
Ямало-Ненецкий автономный округ	58	6	
Тюменская область без автономных округов	222	62	
<b>Челябинская область</b>	<b>621</b>	<b>64</b>	<b>1196875</b>

Рис. 4. Решение задачи 3 в MS Excel

Задача решается с помощью MS Excel, для наглядности рисунка столбцы с данными (16 столбцов) были скрыты.

Последняя задача, связанная с диаграммами рассеивания, была рассмотрена с обучающимися 11 классов В.А. Малыхиным, студентом 5 курса профиля «Математика. Информатика», во время прохождения педагогической практики. Руководитель методического объединения школы предоставила студенту статистические данные результатов ОГЭ по математике параллели 9-х классов 2023 г. выпуска и предложила исследовать на уроках вероятности и статистики связь между средним баллом учеников по математике и первичными баллами за ОГЭ по математике. Обучающиеся с большим интересом строили диаграммы рассеивания с помощью MS Excel, а затем по облаку рассеивания сделали вывод, что связь «положительная».

**Задача 4.** Используя данные из таблицы «Средний\_балл матем. и первич. ОГЭ матем.xls» учеников одной школы Р., постройте диаграмму рассеивания и сделайте выводы.

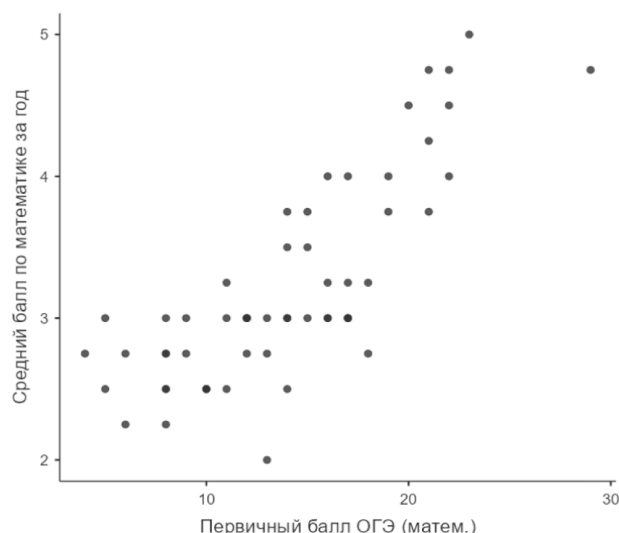


Рис. 5. Диаграмма рассеивания среднего годового балла по математике и первичного балла учеников за ОГЭ по математике

В рассмотренных нами задачах выбран статистический материал, относящийся к региону проживания обучающихся, и реальные статистические данные конкретной школы. Работа школьников в электронных таблицах с данными своего региона и своей школы на уроках статистики способствует развитию познавательного интереса к изучаемому материалу и положительно сказывается на формировании практических алгоритмов статистических расчетов.

### Библиографический список

1. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9 классы: базовый уровень: учебник в 2 ч. М.: Просвещение, 2023. 173 с.
2. Лаборатория методики вероятности и статистики МЦНМО: официальный сайт. М. URL: <https://ptlab.mcsme.ru/node/137> (дата обращения: 15.10.2024).
3. Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В., Вагина М.Ю. Использование визуально-статистического моделирования в системе GeoGebra в обучении теории вероятностей будущих учителей математики // *Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сб. тез. докл. межд. науч. конф.* Елец: Елецкий гос. ун. им. И.А. Бунина, 2022. С. 148–152.
4. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика: 7–9 классы: учеб. пособие / М.: Просвещение, 2023. 272 с.
5. Jamovi – открытое статистическое программное обеспечение для настольных компьютеров и облаков: официальный сайт. Сидней. Обновляется в течение суток. URL: <https://www.jamovi.org/> (дата обращения: 15.10.2024).

# РАЗВИТИЕ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ РАБОТУ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛУБОВ

## DEVELOPING STUDENTS' MOTIVATION THROUGH THE WORK OF MATH CLUBS

С.И. Гагарина, Г.А. Рощина,  
О.Г. Шипилова

S.I. Gagarina, G.A. Roshchina,  
O.G. Shipilova

*Математические клубы, математические знания, исследовательская и проектная деятельность, олимпиадные задачи, мотивация, обучающиеся, образовательный процесс.*

Статья посвящена вопросам развития мотивации обучающихся как важной составляющей профессионального образования через работу математических клубов. Представлен успешный опыт работы физико-математической школы-интерната при Сибирском федеральном университете. Рассматриваются задачи, которые решаются в ходе работы клубов, а также формы организации клубов.

*Mathematical clubs, mathematical knowledge, research and project activities, Olympiad tasks, motivation, students, educational process.*

The article is devoted to the development of students' motivation as an important component of professional education through the work of mathematical clubs. The article presents the successful experience of the physics and mathematics boarding school at the Siberian Federal University. The tasks that are solved in the course of the work of clubs, as well as the forms of organization of clubs, are considered.

**В** современном мире востребованными оказываются выпускники, способные активно откликаться на возникающие перед обществом проблемы, умеющие системно мыслить, анализировать, делать выводы, а также практически решать возникающие перед ними жизненные и профессиональные проблемы. В формировании этих качеств, необходимых успешному современному человеку, может большую роль сыграть школьная дисциплина – математика. Следовательно, учителя математики должны вести системную работу по развитию математических способностей у всех школьников, по воспитанию у них интереса и склонностей к математике и наряду с этим должны уделять особое внимание обучающимся, имеющим повышенные способности к математике, организовывать специальную работу с ними, направленную на дальнейшее развитие этих способностей. Одна из форм такой работы – организация математических клубов.

Главную цель, которую мы ставим перед собой в рамках занятий математических клубов, это привлечь ребят к изучению математики, показать им, что решение задач может быть интересным и увлекательным. Работа клуба строится в сотрудничестве на взаимодополняющих задачах преподавателя и ученика, а именно:

– Преподаватель углубляет и расширяет знания обучающихся по математике, развивает математический кругозор, мышление, исследовательские умения, повышает общий уровень успеваемости, оказывает помощь обучающимся в решении конкретных задач.



– Ученик углубляет и расширяет свои математические знания, умения решать нестандартные задачи.

– Преподаватель воспитывает у обучающихся навыки командной работы, сочетает индивидуальную работу с коллективной, ведет сплочение коллектива посредством применения разнообразных форм работы (математические бои, диспуты, защиты проектов и другие), побуждающих мотивацию ребят к занятию математикой.

– Ученик развивает навыки работы в команде, умения выдвигать гипотезы, обосновывать свои методы решения задач.

– Преподаватель использует современные технологии с учетом новых реалий времени, проводит онлайн-встречи, ведет страницы клуба в сети Интернет с целью популяризации клубов, освещения новостей и анонсов мероприятий. Заинтересованность преподавателя в эффективной реализации данной задачи заключается в масштабном и прозрачном освещении деятельности математического клуба, возможности собираться удаленно, использовании современных инструментов при взаимодействии с обучающимися («говорить с ними на одном языке технологического прогресса»). Ученик заинтересован в эффективной реализации данной задачи с возможностью подключения онлайн.

Работу математического клуба необходимо организовывать с ориентиром на ребят разного уровня успеваемости. Есть опасность свести работу к ложным целям математических клубов: исключительно с целью воспитания будущих победителей математических олимпиад. На наш взгляд, они носят деструктивный характер и не должны быть ориентиром для педагогов и их учеников. Необходимо популяризовать интерес к математике, исключить создание закрытой ауры и жесткого подхода к обучению только победителей олимпиад. Такой подход может оттолкнуть обучающихся со средней успеваемостью, но имеющих желание совершенствовать свои знания. Практика показывает, что школьники, не совсем успешно осваивающие программный материал, часто прекрасно справляются с олимпиадными задачами, обладают нестандартным мышлением, креативным подходом к решению проблемных ситуаций. Нельзя их разъединять в разные группы, нужно виртуозно совмещать совместное обучение. Такая форма работы способствует взаимообучению обучающихся, при этом они не будут чувствовать дискриминацию. В рамках деятельности математического клуба необходима гибкость и ориентир на актуальные проблемы, ведение занятий не одним преподавателем, а с приглашением внешних спикеров, преподавателей высшей школы.

Организация клубов в физико-математических классах, где учатся мотивированные ребята, отталкивается в первую очередь от запроса обучающихся. Данная форма работы с успехом апробирована в Физико-математической школе-интернате Сибирского федерального университета. Большим спросом пользуется у ребят клуб «Любителей высоких баллов ЕГЭ» по математике. Цель данного курса – познакомить ребят с разнообразными методами и способами рационального решения, формирование навыка выбора метода и поиска оптимального решения. Внимание акцентируется как на решении стандартных задач, так и на задачах



повышенной сложности. В клубе «Решение олимпиадных задач по математике» ученики решают задачи олимпиад из перечня Министерства науки и высшего образования РФ и разных этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике, рассматривают основные приемы решения олимпиадных задач и теоретический материал, выходящий за рамки школьного курса математики, но необходимый для решения задач. Есть клубы и для ребят, у которых нет опыта в олимпиадном движении: «Избранные вопросы курса математики». Данный клуб направлен на осмысленное изучение математики, ребята учатся базовым приемам решения олимпиадных задач, изучают теоретический материал, необходимый для их решения. Для ребят, заинтересованных различными темами по математике, организованы следующие клубы: «Теория групп» (одна из самых интересных и сложных областей алгебры, задающая язык, на котором возможно описать симметрии и преобразования практически любых объектов, от правильных многогранников и кубика Рубика до элементарных частиц), «Теория чисел», «Планиметрия. От простого к сложному» и другие. На занятиях клубов рассматриваются, например, такие темы: историческое развитие математической науки с учетом эволюции общества, делимость чисел (признаки делимости, выходящие за школьный курс математики, свойства делимости, остатки, сравнение по модулю), принцип Дирихле, решение задач в целых числах, инварианты, решение различных задач методом математической индукции, доказательство неравенств, используя неравенство Коши, метод неопределенных коэффициентов при решении уравнений, решение задач на геометрическое место точек, неравенства с двумя переменными (графическое и аналитическое решения), замечательные точки и линии треугольника (точка Торичелли. Окружность и прямая Эйлера. Прямая Симсона. Теоремы Чевы и Менелая) и другие.

Для любителей шахмат создан шахматный клуб. В ходе работы клубов ребята участвуют в математических турнирах, математических боях, брейн-рингах и других математических состязаниях. Ребята являются не только участниками, но и совместно с преподавателями школы организуют математические мероприятия для школьников города и края. Например, с успехом проведена игра «Брейн-ринг», на которой рассматривались задачи из области комбинаторики, геометрии, текстовые задачи, алгебраические задачи. Участники клубов не только стали организаторами, но и участвовали в жюри, комиссии по апелляции. Такая форма работы помогает ребятам глубже погрузиться в тему предмета, воспитывает организаторские навыки, умение аргументировать, объяснять при необходимости правильное решение. Для этого требуется всестороннее и глубокое знание темы обсуждения.

Одной из форм работы в клубах является исследовательская и проектная деятельность, заключающаяся в самостоятельном решении трудных задач познавательного и практического характера. В процессе исследовательской деятельности обучающиеся отыскивают не только способы решения готовых предоставленных перед ними проблем, но и побуждаются к самостоятельному их обнаружению, к выдвижению целей своей деятельности, следствием которого

является появление нового знания. При исследовательском подходе обучающийся сам ставит вопросы и ищет ответы, выдвигает гипотезы, доказывает или опровергает их. Всякий полученный ответ может стать основанием для новых вопросов. Результат может быть не известен заранее. Можно сказать, что школьник попадает в новый математический мир и учится жить в нем. Работы, как правило, имеют прикладной характер, так как учеников в первую очередь интересует практическое значение изучаемой темы. Например, в нашей школе в прошлом году были с успехом защищены проекты: «Построение многоугольников по серединам их сторон», «Математические аспекты в восприятии эстетики человеком», «Способ решения геометрических задач – инверсия», «Математика в архитектуре», «Тригонометрия вокруг нас», «Пособие по модулярной арифметике», «Четырехмерная геометрия» и другие.

Исследование должно быть доступно обучающемуся, а задача учителя создать условия, при которых ученик мог бы применять новые знания в незнакомой нестандартной ситуации. Использование исследовательского метода дает возможность решать задачи обучения, создавать условия сближения учебной и познавательной деятельности обучающихся, что в свою очередь позволяет пробудить у них осознанную активную заинтересованность как в самом учебном процессе, так и в его результатах. Для большинства учеников математика перестает быть трудным предметом.

Подводя итоги, хочется отметить, что самым главным способом достижения целей является позитивное окружение, где все ученики и учителя – единомышленники, которые желают друг другу успеха и мотивируют на успех. Наши обучающиеся – активные участники математических клубов, которые являются частью образовательного процесса, а, значит проделанная работа не является напрасной.

### **Библиографический список**

1. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников М.: 1968, 432 с.
2. Миркес М.М., Медведчиков С., Фатеев А. и др. Учеба с азартом: хрестоматия мотивирующих внеурочных форматов образования. СПб.: Школьная лига, 2014. 224 с.
3. Шварцбург С.И. О развитии интересов, склонностей, способностей учащихся к математике // Математика в школе. 1999. № 6.

# ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

## PRACTICE-ORIENTED TASKS AS A TOOL FOR DEVELOPING FUNCTIONAL LITERACY IN MATHEMATICS LESSONS

Г.Н. Гиматдинова, М.В. Помельцева

G.N. Gimatdinova, M.V. Pomeltseva

*Практико-ориентированные задачи, функциональная грамотность, математическая подготовка.*

Статья посвящена вопросу формирования функциональной грамотности обучающихся через решение практико-ориентированных задач. В процессе математической подготовки обучающиеся должны научиться применять теоретические знания в реальных жизненных ситуациях. Приведен пример задачи, способствующей развитию функциональной грамотности, которую можно использовать в курсе внеурочной деятельности для обучающихся 8–9 классов.

*Practice-oriented tasks, functional literacy, mathematical training.*

The article is devoted to the issue of developing students' functional literacy through solving practice-oriented problems. In the process of mathematical training, students must learn to apply theoretical knowledge in real-life situations. An example of a problem that promotes the development of functional literacy is given, which can be used in an extracurricular activity course for students in grades 8–9.

**Ф**ункциональная грамотность является необходимым условием успешного усвоения и адаптации к современным условиям жизни. Она направлена на умение использовать полученные знания и навыки для решения реальных жизненных ситуаций, что особенно актуально в контексте изучения математики. Практическая составляющая обучения в последние годы все больше демонстрируется через задания, содержащие детали, применяемые в приближенных к реальной жизни условиях. Практико-ориентированный подход способствует формированию у школьников критического мышления, самостоятельности и уверенности в себе. Кроме того, подобные задачи помогают пробуждать интерес к предмету, так как обучающиеся видят прямую связь между изучаемым и своими повседневными задачами.

Практико-ориентированные задачи стали неотъемлемой частью основного государственного экзамена. При работе с каждой задачей обучающийся должен умело взаимодействовать с текстом и обрабатывать большое количество данных. Ключевыми навыками для решения таких задач являются внимательное чтение, умение извлекать и проводить анализ информации, а также критическое оценивание полученных данных [1].

Довольно часто подготовка к решению практико-ориентированных заданий в рамках основного государственного экзамена происходит только в 9 классе на основе открытого банка заданий. Однако важно, чтобы обучающиеся не только демонстрировали свои знания на знакомых заданиях, но и умели применять их в своей будущей профессиональной деятельности, где главным критерием является результат. Поэтому практико-ориентированные задачи необходимо внедрять в учебный процесс на протяжении всего курса обучения математике в основной школе [2].

Рассмотрим пример задачи, которая удовлетворяет структуре практико-ориентированного задания [3] и предназначена для обучающихся 8–9 класса. Предложенная задача может быть использована в рамках курса внеурочной деятельности по формированию функциональной грамотности.

**Задача.** В строительной компании «Север» проходит профессиональную практику группа студентов  $N$  университета. Зачетной работой для них стало следующее задание:

*В строительную компанию «Север» поступил заказ от туристической фирмы «Сияние» – строительство на Алтае туристической базы с инфраструктурой. Для этой цели выделен земельный участок в долине реки площадью 0,96 га. В таблице 1 приведена формулировка заявки компании.*

**Задание 1.** Составьте план туристической базы с учетом заявки, если размеры территории на бумаге составляют 60 на 40 клеток. Считать, что длина одной клетки равна 2 м.

Обучающимся выдаются листы в клетку для составления плана туристической базы. Заметим, что варианты планов туристической базы могут отличаться у каждой группы.

Таблица 1

**Заявка от туристической фирмы**

№ п/п	Категория	Кол-во объектов	Кол-во мест	Площадь объекта (м <sup>2</sup> )	Вид крыши
1	Домики для туристов	9	2	40	На усмотрение компании, но обязательно должно быть вставлено стекло
		6	3	56	
		6	4	72	
2	Хозяйственный корпус	1	–	20	Шатровая
3	Медицинский пункт	1	–	32	Однокатная
4	Баня	1	3 отделения	36	На усмотрение компании
5	Столовая	1	70	180	Вальмовая со стеклом
6	Спортивный комплекс	1	70	200	Бубновая
7	Бассейн	1	70	800	На усмотрение компании
8	Детская площадка открытая	1	–	1000	–
9	Спортивный комплекс открытый	1	–	1600	–
10	Зона хозяйев	1	6	108	Мансардная

Для решения одного из следующих заданий будем считать, что медицинский пункт имеет параметры 4 на 8 м.

**Задание 2.** В сезон туристическая база готова одновременно принять 60 человек. Хватит ли мест в домиках для туристов в соответствии с заявкой?

**Задание 3.** Какова общая площадь закрытых объектов, находящихся на туристической базе?

**Задание 4.** Составьте смету для отделочных работ медицинского пункта, включающего установку окон и двери, облицовку стен внутри помещения, обшивку стен сайдингом снаружи. Известно, что высота помещения равна 2,65 м. Данные по установке окон и дверей приведены в таблице 2, а по облицовке и обшивке стен в таблице 3. Требуется подобрать самый бюджетный вариант.

Таблица 2

Данные по установке окон и дверей в медицинском пункте

№ п/п	Категория	Размер	Кол-во (шт.)	Стоимость 1 ед. (руб.)	Стоимость установки 1 ед. (руб.)
ОКНО					
1	Двухстворчатое	1200*1500 мм	3	21000	10250
2	Трехстворчатое	1800*1500 мм	1	23000	14750
ДВЕРЬ					
3	Нестандартная конструкция	1300*2200 мм	1	35000	5400

Таблица 3

Данные по облицовке стен внутри и снаружи помещения

№ п/п	Категория	Размер	Стоимость 1 м <sup>2</sup> (руб.)	Стоимость установки 1 м <sup>2</sup> (руб.)
1	Плитка глазурованная настенная	20*30 см	460	140
2	Плитка керамогранит настенная	60*150 см	700	130
3	Сайдинг металлический	1 м <sup>2</sup>	1200	160
4	Сайдинг виниловый	1 м <sup>2</sup>	820	180

**Задание 5.** Найдите площадь покрытия крыши медицинского пункта, используя данные на рисунке. Результат округлите до сотых.

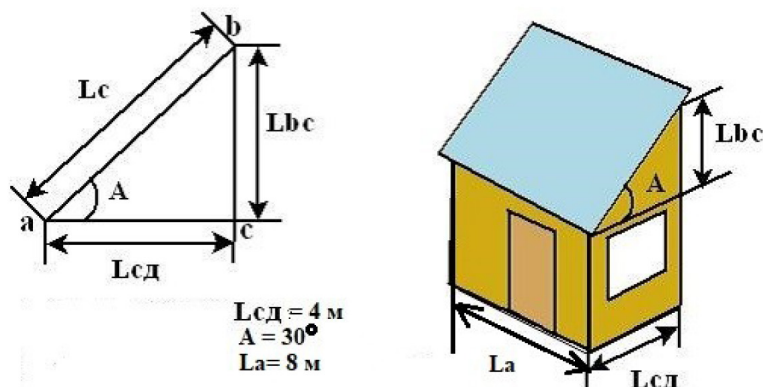


Рис. Модель медицинского пункта на туристической базе

Справочные материалы, которые необходимы для решения заданий, можно найти по ссылке <https://clck.ru/3EWOXu> .

На решение предложенной задачи может уходить один или несколько уроков, в зависимости от количества заданий. Задания могут быть добавлены для данного сюжета, например, подсчет затрат на покрытие крыш других зданий. В результате выполнения задачи каждая группа должна представить результат своей работы.

Практико-ориентированные задачи играют важную роль в развитии функциональной грамотности у обучающихся на уроках математики. Мотивацией для их решения должно быть не только стремление сдать основной государственный экзамен, но и понимание значимости полученных знаний и навыков для будущей профессиональной деятельности.

### **Библиографический список**

1. Боровик Е.В. Практико-ориентированные задачи как средство развития функциональной грамотности обучающихся на уроке математики // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании: материалы XV Всероссийской научно-практической конференции. Иркутск, 2022. С. 59–61.
2. Гиматдинова Г.Н. Возможности использования цифровых ресурсов при формировании математической грамотности обучающихся основной школы // Вестник ТОГИРРО. 2021. № 2 (47). С. 9–10.
3. Цыденова М.Ц. Практико-ориентированные задачи как условие формирования математической грамотности // Народное образование Якутии. 2022. № 1 (122). С. 43–46.



# ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ ДЛЯ ПРОЕКТНОГО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

## ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR PROJECT-BASED LEARNING OF SCHOOLCHILDREN IN THE PROCESS OF MATHEMATICAL TRAINING

Г.Н. Гиматдинова

G.N. Gimatdinova

*Искусственный интеллект, проектное обучение, критическое мышление, математическая подготовка, риски использования искусственного интеллекта.*

Статья посвящена применению искусственного интеллекта в создании проектов в процессе математической подготовки. Формулируется ряд его возможностей, приводятся примеры инструментов на основе искусственного интеллекта. В работе обсуждаются некоторые риски, связанные с использованием искусственного интеллекта при создании проектов. Представлен пример сценария проекта по математике, сгенерированного платформами GigaChat и YandexGPT.

*Artificial intelligence, project-based learning, critical thinking, mathematical training, risks of using artificial intelligence.*

The article is devoted to the use of artificial intelligence in the creation of projects in the process of mathematical training. A number of its capabilities in the development of projects are formulated, examples of tools based on artificial intelligence are given. The work discusses some risks associated with the use of artificial intelligence in the creation of projects. An example of a scenario of a project in mathematics generated by the GigaChat and YandexGPT platforms is presented.

**В** современном образовательном процессе активно применяются методы, способствующие саморазвитию и раскрытию потенциала каждого обучающегося. Одним из наиболее результативных подходов является проектное обучение, которое позволяет формировать навыки анализа и решения проблем, умение работать как индивидуально, так и в команде, управлять временем, мыслить критически.

Искусственный интеллект выступает в роли мощного вспомогательного инструмента в проектном обучении школьников, в частности в сфере математической подготовки. При работе над проектами искусственный интеллект открывает для обучающихся ряд возможностей:

- создание разнообразных сценариев для проектов;
- поиск информации в формате интерактивного диалога;
- разработка визуальных материалов, включая уникальные изображения;
- производство видеороликов с цифровыми персонажами для краткой презентации результатов работы.

Для создания сценариев и поиска информации можно использовать такие инструменты, как GigaChat и YandexGPT. Эти платформы предлагают широкий спектр возможностей для генерации уникальных идей и структурирования

проектов. Например, GigaChat помогает в формулировке целей и задач, предлагает способы их достижения, а также создает тексты в различных форматах: от описания проблемы до подробного плана действий [2]. YandexGPT, в свою очередь, обладает сильными аналитическими функциями и может оказать помощь в написании введения проекта, формулировке гипотез и поиске решений для различных задач. Кроме того, этот инструмент полезен для создания презентационных материалов, таких как слайды и постеры. Важно отметить, что, несмотря на значительное упрощение процесса создания проектов, эти инструменты не могут полностью заменить участие человека. Финальное редактирование и доработка сценариев должны осуществляться самим автором, чтобы гарантировать соответствие изначально поставленным целям.

Для создания изображений можно обратиться к таким ресурсам, как Kandinsky и Шедеврум. Нейросеть Kandinsky позволяет генерировать изображения на основе текстовых описаний. Для получения более точного результата важно детально описывать желаемый результат, указывать стиль и воспользоваться различными режимами, такими как текстовые запросы, смешивание картинок и дорисовка. Приложение Шедеврум предлагает пользователям интересный функциональный набор. Приложение может служить как дополнением к Kandinsky, так и самостоятельным инструментом. Шедеврум нацелен на создание качественных произведений искусства с помощью алгоритмов глубокого обучения. Пользователи могут загружать свои изображения и применять к ним различные художественные фильтры, что позволяет экспериментировать с визуальными эффектами и стилями [3].

Для представления результатов проекта в формате презентации или видеоролика можно воспользоваться платформами на основе искусственного интеллекта. Одним из известных инструментов является Slider, который дает возможность создавать яркие и динамичные слайды для презентаций. Для этого достаточно ввести ключевое слово или предложение, а нейросеть автоматически подготовит структуру, текст и оформление для каждого слайда. Примером сервиса для создания видео с помощью искусственного интеллекта является Visper.tech. Платформа предлагает создать аватара с помощью различных голосов, преобразовав текст в речь [1].

Необходимо осознавать, что использование результатов, созданных с помощью искусственного интеллекта, в процессе разработки проекта может нести определенные риски. После того как сценарий будет сгенерирован, важно провести его обсуждение с преподавателем или наставником, чтобы внести нужные корректировки и удостовериться, что он соответствует всем требованиям. Также следует тщательно проверять достоверность информации, полученной от искусственного интеллекта. Он может оказать помощь в создании проекта, но содержание и выводы должны подвергаться человеческому анализу и критическому осмыслению.

Отметим некоторые риски применения искусственного интеллекта при создании учебных проектов. Во-первых, обучающиеся могут начать полностью доверять искусственному интеллекту, что приведет к снижению их способности анализировать информацию и формулировать собственные суждения. Это может спровоцировать в дальнейшем ухудшение способности мыслить критически. Во-вторых, существует угроза подмены оригинального творчества. Используя готовые

решения, обучающиеся могут не проявлять собственные идеи, что негативно отразится на развитии их креативности. В-третьих, частое использование искусственного интеллекта снижает мотивацию к самостоятельному обучению. В-четвертых, обучающиеся зачастую не осознают значимость соблюдения авторских прав. В-пятых, применение некоторых платформ, основанных на искусственном интеллекте, может представлять угрозу для безопасности личных данных обучающихся.

Таким образом, при интеграции искусственного интеллекта в процесс разработки проектов важно заранее обсудить с обучающимися правила и рекомендации его использования. Это позволит снизить риски и улучшить образовательную ценность создаваемых проектов.

На рис. 1 представлен результат запроса на написание сценария по теме исследовательского проекта «Фракталы: красота бесконечности» на платформе YandexGPT. Запрос выглядел следующим образом: «напиши подробный сценарий проекта по теме Фракталы: красота бесконечности». Аналогичный запрос был выполнен на платформе GigaChat. Его результат представлен на рис. 2.

#### **Сценарий проекта «Фракталы: красота бесконечности»:**

- 1. Введение:**
  - определение фракталов и их основные свойства;
  - история открытия фракталов;
  - примеры фракталов в природе и искусстве.
- 2. Математические основы фракталов:**
  - самоподобие и итерационные процессы;
  - масштабная инвариантность и размерность;
  - классификация фракталов.
- 3. Визуализация фракталов:**
  - программы для создания фракталов;
  - методы визуализации фракталов (компьютерная графика, анимация).
- 4. Применение фракталов в науке и технике:**
  - фракталы в физике и астрономии;
  - фракталы в биологии и медицине;
  - фракталы в компьютерных технологиях и телекоммуникациях.
- 5. Фракталы в искусстве и дизайне:**
  - использование фракталов в живописи и скульптуре;
  - фракталы в архитектуре и ландшафтном дизайне.
- 6. Фракталы и философия:**
  - связь фракталов с теорией хаоса и самоорганизацией;
  - фракталы как символ бесконечности и сложности мира.
- 7. Заключение:**
  - итоги проекта и его значение для понимания красоты и разнообразия мира;
  - перспективы дальнейшего изучения фракталов и их применения.

*Рис. 1. Сценарий проекта «Фракталы: красота бесконечности» на платформе YandexGPT*

Результаты одного и того же запроса на разных платформах значительно отличаются. В первом случае искусственный интеллект предлагает возможное содержание проекта. При дополнительном запросе о цели и задачах проекта YandexGPT может сформулировать ответ, не соответствующий предложенному содержанию.

Во втором случае формулируются действия, которые нужно осуществить для написания проекта по заданной теме. Отметим, что следует осуществить корректировку формулировки цели и задач проекта. Подробно расписанные этапы

выполнения проекта отражают не только возможное содержание работы, но и последовательность действий обучающегося при разработке проекта. Предложенный сценарий особенно будет актуален для тех обучающихся, которые испытывают трудности в планировании.

<b>Сценарий проекта "Фракталы: красота бесконечности"</b>	
<b>Цель проекта:</b> Изучение фрактальной геометрии, понимание ее основ и применение знаний для создания фракталов с использованием компьютерных программ.	
<b>Задачи проекта:</b>	
1.	Изучить основные понятия фрактальной геометрии.
2.	Исследовать свойства фракталов и их проявления в природе.
3.	Создать собственные фрактальные изображения с помощью программного обеспечения.
4.	Представить результаты работы в виде презентации или видеоролика.
<b>Этапы выполнения проекта</b>	
<b>Этап 1: Теоретическая подготовка</b>	
1.	<b>Изучение литературы</b>
o	Ознакомление с основными источниками информации о фракталах: книги, статьи, интернет-ресурсы.
o	Чтение книг и статей по теме фрактального анализа.
2.	<b>Определение ключевых понятий</b>
o	Самостоятельная работа по изучению основных терминов: фрактал, самоподобие, размерность Хаусдорфа, итерации.
o	Составление глоссария по ключевым терминам.
3.	<b>Исследование истории открытия фрактала</b>
o	История развития фрактальной геометрии: Бенуа Мандельброт и его вклад.
o	Примеры ранних исследований фрактальных объектов.
<b>Этап 2: Практическое исследование</b>	
1.	<b>Создание фракталов вручную</b>
o	Построение простейших фрактальных фигур на бумаге: треугольник Серпинского, снежинка Коха.
o	Анализ закономерностей построения этих фигур.
2.	<b>Использование компьютерного моделирования</b>
o	Выбор подходящего программного обеспечения для создания фрактальных изображений (например, Fractal Explorer, Apophysis).
o	Изучение интерфейса программы и базовых функций.
o	Создание первых фракталов в программе.
3.	<b>Экспериментирование с параметрами</b>
o	Изменение параметров фрактала (цвета, формы, масштаба) и наблюдение за изменениями в изображении.
o	Поиск интересных комбинаций параметров для создания уникальных фрактальных образов.
4.	<b>Анализ полученных результатов</b>
o	Запись наблюдений и выводов о влиянии изменения параметров на внешний вид фракталов.
o	Сравнение ручных построений с результатами компьютерного моделирования.
<b>Этап 3: Презентация результатов</b>	
1.	<b>Подготовка материалов для презентации</b>
o	Подбор лучших фрактальных изображений, созданных в ходе работы.
o	Написание текста для пояснения каждой картинки: описание параметров, использованных для создания, интересные наблюдения.
2.	<b>Выбор формата презентации</b>
o	Определение предпочтительного способа подачи материала: презентация PowerPoint, видеоролик, веб-сайт.
o	Использование графических редакторов для оформления слайдов или монтажа видео.
3.	<b>Проведение презентации</b>
o	Демонстрация презентации перед одноклассниками или учителями.
o	Ответы на вопросы аудитории, обсуждение результатов работы.
<b>Заключение</b>	
1.	<b>Подведение итогов</b>
o	Обобщение всех этапов работы над проектом.
o	Оценка достигнутых результатов и выявление новых вопросов, требующих дальнейшего изучения.
2.	<b>Рекомендации по дальнейшему развитию</b>
o	Предложения по улучшению проекта и возможностям его расширения.
o	Рекомендации для будущих исследователей фрактальной геометрии.
<b>Дополнительные материалы</b>	
1.	Список используемой литературы.
2.	Скриншоты созданных фрактальных изображений.
3.	Инструкции по использованию выбранного программного обеспечения.
4.	Глоссарий по основным терминам.

Рис. 2. Сценарий проекта «Фракталы: красота бесконечности» на платформе GigaChat



На основе сценария, созданного на платформе GigaChat, обучающийся вместе с учителем могут сформулировать итоговый продукт проектной деятельности. Для реализации этапа по подбору теоретического материала по теме проекта обучающийся может воспользоваться возможностями искусственного интеллекта, однако следует постоянно обращать внимание школьников на достоверность информации. Подчеркнем, что учитель должен рекомендовать применять литературные источники при создании проекта, а искусственный интеллект рассматривать лишь в качестве дополнительного инструмента, предлагающего идеи.

### **Библиографический список**

1. Гиматдинова Г.Н., Милованов С.С. Цифровые приложения для педагогов на основе искусственного интеллекта // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VIII Междунар. науч. конф. Красноярск, 2024. С. 112–114.
2. Писарь Н.В. Потенциал использования нейросетей как инновационного инструмента создания учебного контента и средства организации интерактивной образовательной среды на занятиях по русскому языку как иностранному // Филологические науки. Вопросы теории и практики. 2024. Том 17. Выпуск 1. С. 58–65.
3. Самарина А.Е., Бояринов Д.А. Нейросети для генерации изображений: педагогический потенциал в высшем образовании // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2023. № 11. С. 161–179. URL: <https://e-koncept.ru/2023/231116.htm> (дата обращения: 09.11.2024).

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ MOODLE ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

## USING THE MOODLE EDUCATIONAL ENVIRONMENT TO ORGANIZE STUDENTS' INDEPENDENT WORK IN MATHEMATICS

Т.В. Гостевич, И.П. Лобанок

T.V. Gostevich, I.P. Lobanok

*Образовательная среда Moodle, организация, самостоятельная работа, математика.*

В статье показаны возможности использования образовательной среды Moodle для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математика». Применение элементов электронного обучения позволяет повысить качество математической подготовки студентов.

*Educational environment Moodle, organization, independent work, mathematics.*

The article shows the possibilities of using the educational environment Moodle to organize independent work of students in the academic discipline “Mathematics”. The use of elements of e-learning allows to improve the quality of mathematical training of students.

**В** современном мире, идущем по пути глобализации, способность быстро адаптироваться к условиям международной конкуренции становится одним из важнейших факторов социально-экономического развития любой страны. При этом уровень развития государства во многом определяется степенью развития системы непрерывного образования, ее способностью обеспечить всем членам общества получение качественного профессионального образования.

Система образования Республики Беларусь обеспечивает образование на основном (дошкольное, общее среднее, профессионально-техническое, среднее специальное, высшее, научно ориентированное), дополнительном (образование детей и молодежи, образование взрослых) и специальном уровнях. Таким образом, в стране на практике обеспечивается реализация принципа «образование через всю жизнь». Вместе с тем следует отметить, что образовательный процесс постоянно развивается и модернизируется с учетом новых тенденций и происходящих в мире изменений.

В настоящее время особое значение придается совершенствованию системы подготовки педагогических кадров как ключевого фактора обеспечения устойчивого и стабильного развития страны. Современному обществу нужны педагоги, способные быстро воспринимать новые идеи, принимать креативные решения, активно участвовать в инновационных процессах, самостоятельно и компетентно решать уже имеющиеся и вновь возникающие практические задачи, постоянно стремиться к самосовершенствованию и саморазвитию. Будущий учитель должен не только дать ученику предметные знания, сформировать необходимые



умения и навыки, но и научить его жить в современном мире, помочь ему стать полноценным членом общества.

В связи с переходом учреждений высшего образования на новые образовательные стандарты проводится реорганизация учебного процесса, предусматривающая изменение содержания высшего образования, повышение качества научно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса. Подготовка педагогических кадров осуществляется уже по новым учебным планам, в которых сокращено количество аудиторных часов на изучение некоторых дисциплин государственного компонента, в том числе и на обучение математике. Ограниченные рамки времени на изучение этой учебной дисциплины требуют перехода к вариативным формам организации образовательного процесса, внедрения модульных принципов построения содержания обучения, применения современных инновационных технологий, актуализации роли самостоятельной учебной деятельности студентов.

В условиях информационной передозировки и социальной мобильности преподаватели вынуждены делегировать часть своих функций студентам. Современный студент становится непосредственным соучастником процесса образования. В связи с этим он должен хорошо владеть навыками самостоятельной работы.

В МГУ имени А.А. Кулешова было разработано и введено в действие положение о самостоятельной работе студентов, под которой понимается вид учебной деятельности обучающихся в процессе освоения образовательных программ высшего образования, осуществляемый самостоятельно вне аудитории [1]. Студенты могут выполнять задание, данное преподавателем, в домашних условиях или в библиотеке, используя при этом различные источники информации и средства обучения, в том числе и электронные средства обучения.

Под управляемой самостоятельной работой студентов понимается самостоятельная работа, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, контролируемая им на определенном этапе обучения [1]. Она позволяет не только снизить аудиторную нагрузку преподавателя и студента, но и обеспечить студентам переход от обучения к самообучению. Для того чтобы управляемая самостоятельная работа проходила наиболее эффективно, преподавателю приходится решать различные проблемы: планировать, организовывать, проводить и контролировать самостоятельную учебную деятельность студентов; специально разрабатывать учебно-методическое обеспечение, что требует определенных временных затрат [2; 3].

Студенты специальности «Начальное образование» изучают учебную дисциплину «Математика» 4 семестра (на первом и втором курсах). Общее количество часов – 416. Количество аудиторных часов, отводимое на изучение учебной дисциплины в соответствии с учебными планами университета: дневная форма получения высшего образования – 202 ч; заочная форма получения высшего образования (5 лет обучения) – 54 ч и заочная форма получения высшего образования (3 года обучения) – 42 ч. В связи с таким распределением часов возрастает роль самостоятельной внеаудиторной работы студентов.

Математика является одним из основных фундаментов методической подготовки будущего учителя. Однако, как показывает практика, для многих обучающихся математика по-прежнему остается одной из наиболее сложных учебных дисциплин. Это обусловлено различными показателями: недостаточной математической подготовкой некоторых выпускников, восприятием нового теоретического материала, объемом часов на изучение данной дисциплины, степенью учебно-методического обеспечения, несформированностью у обучающихся навыков самостоятельной работы.

Одним из современных направлений повышения качества образовательного процесса является подключение возможностей информационно-коммуникационных технологий обучения, которые позволяют при грамотно продуманном их использовании оптимизировать учебный процесс. В настоящее время наибольшее распространение среди них получила образовательная среда Moodle. Она обладает различными опциями формирования и представления учебного материала, проверки знаний и контроля успеваемости студентов, позволяет организовать самостоятельную работу студентов на более высоком уровне. Для работы в Moodle преподавателю и студенту нужен персональный компьютер, смартфон или планшет и подключение к сети Интернет.

С целью активизации самостоятельной деятельности обучающихся по математике на кафедре теории и методики начального образования с учетом базовых педагогических принципов: принципа системности и целостности; принципа развивающей деятельности; принципа технологичности образовательного процесса; принципа диверсификации учебно-методического комплекса был разработан электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) и размещен в Moodle. Он включает четыре раздела: теоретический, практический, контроля знаний и вспомогательный.

На лекционных аудиторных занятиях студентам дается краткий конспект лекций. Затем им предлагается самостоятельно изучить материалы интерактивных лекций, расположенных в теоретическом разделе ЭУМК. Учебный материал разбит на модули согласно утвержденной учебной программе по дисциплине «Математика». При разработке электронных вариантов лекций использовался элемент Moodle «Лекция», позволяющий преподнести материал нелинейно. Некоторые лекции содержат элементы контроля. Они разбиты на смысловые теоретические страницы, в конце изучения которых студенту предлагается выполнить задание по только что изученному материалу. Задание может быть оформлено в виде вопроса с выбором ответа: «Верно–неверно»; множественный выбор правильного одного или нескольких ответов; короткий ответ; на соответствие; числовой ответ; эссе.

После выполнения каждого задания обучающийся переходит к следующей странице лекции. При правильном ответе на вопрос студент получает определенные баллы, которые в дальнейшем суммируются по мере прохождения страниц лекции. Некоторые задания предполагают вариативность вопросов по одной и той же странице. После выполнения заключительного задания преподаватель

видит итоговую отметку за выполненную студентом работу над данным теоретическим материалом. Он может оценить правильность выполнения заданий каждым обучающимся, проанализировать допущенные им ошибки и провести их корректировку. Если у студентов появляются вопросы в процессе изучения теоретического материала лекций, они могут их написать в «Форум» или «Чат» и получить комментарий преподавателя.

Для студентов заочной формы получения высшего образования предусмотрены тренировочные лекции, которые можно просматривать неограниченное число раз. Применение интерактивных лекций позволяет повысить интерес, общую мотивацию к изучению теоретического материала. Новые формы работы позволяют индивидуализировать процесс обучения.

В практическом разделе содержатся материалы для проведения практических занятий. Каждое практическое занятие включает в себя как вопросы теории, так и задания для их закрепления. Большое внимание на практическом занятии уделяется организации самостоятельной работы студентов и оцениванию ее результатов с помощью рейтинговой системы контроля знаний. С использованием элемента Moodle «Задание» для студентов разработаны индивидуальные домашние задания. Решенные задания они отправляют преподавателю для проверки. Разнообразие форм представления практических заданий, а также их постепенное усложнение позволяют дифференцированно подойти к процессу изучения дисциплины «Математика» будущими учителями первой ступени общего среднего образования.

Раздел контроля знаний включает вопросы к экзаменам, зачету, контрольные задания, методические указания к контрольным заданиям по математике, задания повышенной сложности и тесты. Обучающие тесты разработаны для внеаудиторного контроля и предназначены для подготовки к контрольной работе или к зачету. Студенты могут проходить их неограниченное количество раз. Контролирующие тесты применяются в аудиторной работе для текущего или итогового контроля. После выполнения всех заданий теста студент видит оценку, сколько времени он выполнял тест, правильные ответы и др.

Студенты заочной формы получения высшего образования выполняют контролирующие тесты вне аудитории. На выполнение теста им дается определенное время, и потом доступ к тесту закрывается.

Обучающимся предлагается самостоятельно ознакомиться с материалами, расположенными во вспомогательном разделе комплекса: содержанием учебной программы по дисциплине, в которой перечислены требования к уровню усвоения дисциплины, дан перечень используемых средств диагностики учебной деятельности и др.; информационно-методической частью, включающей основную и дополнительную литературу.

Использование образовательной среды Moodle позволяет оптимизировать процесс обучения математике за счет предоставления возможности каждому студенту самостоятельно выбрать индивидуальную траекторию изучения учебного материала. Преподаватель имеет возможность постоянно корректировать

и контролировать знания обучающихся по каждой изучаемой теме, что позволяет повысить качество математической подготовки студентов специальности «Начальное образование».

### **Библиографический список**

1. Положение о самостоятельной работе студентов (об управляемой самостоятельной работе студентов). МГУ имени А.А. Кулешова. № П-27-2022, 18.03.2022.
2. Гостевич Т.В., Лещенко Л.В. Организация самостоятельной работы студентов специальности «Начальное образование» с использованием УМК по математике // Актуальные проблемы методики начального обучения и эстетического воспитания учащихся: материалы IV республиканской научно-практической конференции, 30 марта 2017 г., г. Могилев, МГУ имени А.А. Кулешова / под ред. С.П. Чумаковой, А.А. Папейко. Могилев: МГУ имени А.А. Кулешова, 2017. С. 306–309.
3. Гостевич Т.В., Лещенко Л.В. О разработке учебно-методического обеспечения по математике для студентов специальности «Начальное образование» // Итоги научных исследований ученых МГУ имени А.А. Кулешова 2017 г.: материалы научно-методической конференции, 25 января – 8 февраля 2018 г. / под. ред. Е.К. Сычовой. Могилев: МГУ имени А.А. Кулешова, 2018. С. 101–102.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ОБОБЩАЮЩИХ ПОВТОРЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## METHODOLOGICAL RECOMMENDATIONS FOR CONDUCTING REVIEWS IN THE COURSE OF MATHEMATICS

В.А. Далингер

V.A. Dalinger

*Проблемы обучения учащихся математике, обобщающее повторение, система знаний, обучение математике, виды обобщающих повторений, формирование у учащихся адекватных видов деятельности, методические рекомендации по обучению учащихся обобщению учебного материала, рекомендации по проведению обобщающих уроков.*

Рассмотрены виды обобщающих повторений, приведены методические рекомендации по проведению каждого вида обобщающего повторения, описана деятельность педагога по обобщению учебного материала и учебно-познавательная деятельность учащихся, участвующих в обобщении учебного материала.

*Problems of teaching students mathematics, generalizing repetition, knowledge system, teaching mathematics, types of generalizing repetitions, developing adequate types of activities in students, methodological recommendations for teaching students to generalize educational material, recommendations for conducting generalizing lessons.*

The article examines the types of generalizing repetitions, provides methodological recommendations for conducting each type of generalizing repetition, describes the teacher's activities in generalizing educational material and the educational and cognitive activities of students participating in the generalization of educational material.

**В** современной педагогике повторение рассматривается в плане воспроизведения ранее усвоенных знаний, умений и навыков с целью их закрепления, совершенствования и применения в новых ситуациях.

Как показали исследования Т.К. Авдеевой [1], при повторении учебного материала необходимо: выделять опорные знания, на основе которых у учащихся формируются основные математические умения и навыки; выделять ведущие структурные связи в системе опорных знаний и основных умений и навыков; формировать у учащихся в результате повторения целостную систему знаний; давать учащимся четкие установки на запоминание того или иного материала; систематически обучать учащихся рациональным приемам систематизации знаний и запоминания; разнообразить приемы и методы повторения с целью обеспечения активного и творческого характера деятельности учащихся.

В педагогической литературе существуют различные классификации видов повторения: 1. По временному признаку: повторение в начале учебного года; повторение, организованное в течение всего учебного года; повторение после изучения отдельных тем, разделов учебного материала; повторение в конце



учебного года всего курса; 2. По основной дидактической цели: опорное (повторяются опорные знания, обеспечивающие прочное и сознательное усвоение нового материала, устанавливаются структурные связи нового знания с ранее усвоенными); первично-закрепляющее (обеспечивает прочное и сознательное усвоение содержания нового элемента знания); поддерживающе-предупреждающее (формирует умения и навыки учащихся в практическом применении нового знания, устанавливаются связи нового знания с ранее усвоенным); корректирующее (выявляются и устраняются ошибки, допускаемые учащимися в применении нового знания); углубляющее (усиливает прикладную направленность обучения и подготавливает учащихся к дальнейшему самообразованию); обобщающе-систематизирующее (обобщаются и систематизируются усвоенные учащимися знания); 3. По частоте использования: эпизодическое; периодическое; регулярное; 4. По характеру мыслительной деятельности учащихся: активное; пассивное; 5. По месту в процессе усвоения выделяют три вида повторения: повторение, предшествующее изучению нового материала; при котором вспоминаются те факты из ранее пройденного, которые необходимы для полноценного усвоения нового; повторение, сопутствующее изучению нового материала; этот вид повторения ставит своей целью восстанавливать в памяти учащихся те знания, которые входят в содержание вновь изучаемого, а также провести сравнительное сопоставление и установить логические связи ранее пройденного и нового материала; повторение, следующее за изучением нового материала и обеспечивающее закрепление полученных знаний, выработку твердых умений и навыков; этот вид повторения особо направлен на систематизацию и обобщение полученных знаний с целью их дальнейшего, более эффективного использования.

Повторение, следующее за изучением нового материала, может носить различный характер: все зависит от того, как используются повторяющиеся элементы знания. Одни из них лишь упоминаются, другие же не просто упоминаются, а полностью восстанавливаются, третьи – повторяются на более высоком уровне, на котором происходит слияние имеющихся элементов знаний с вновь изученными.

Последние играют наиболее существенную роль в организации системы знаний, именно в этом и состоит наибольшая продуктивность повторения. Как отмечает К.И. Нешков: «...далеко не всякое повторение может обеспечить преемственность в процессе развития понятия или системы понятий. Если мы хотим, чтобы преемственность осуществлялась по существу, а не по форме, то повторение должно быть органически включено в новую тему и по мере разбития темы должно соответствующим образом меняться, не сводясь лишь к механическому повторению одних и тех же упражнений» [6, с. 415].

Исследования Л.Я. Зориной, Э.А. Красовского, И.И. Кулибабы, А.С. Шепетова показали, в чем состоят отличия и взаимосвязь таких качеств знаний, как систематичность и системность.

«Систематичность – качество знаний, которое характеризует наличие в сознании ученика только содержательно-логических связей между отдельными фрагментами знания» [4, с. 31].



«Системность – это такое качество некоторой совокупности знаний, которое характеризует наличие в сознании ученика структурных связей (связей строе- ния), адекватных связям между знаниями внутри научной теории» [3, с. 5].

Систематичность знаний опирается на линейные связи (эти связи представ- лены материалом учебника); системность знаний – на объемные связи, получае- мые путем структурирования линейных.

Объемные связи при повторном изложении материала разворачиваются в ли- нейные; но они уже отличаются от тех линейных связей, которые конструирова- лись в системе первичного изложения учебного материала.

Под линейными будем понимать связи, реализуемые авторами учебника или учителем в процессе последовательного развертывания программы учебного курса. Эти связи организуют вокруг себя содержание учебного предмета и от- ражают специфику его логической структуры.

Для того чтобы знания, полученные учащимися при изучении какой-нибудь темы, могли бы быть использованы достаточно полно при изучении других тем, они должны достичь определенной степени обобщенности. Исследования психоло- гов [5; 10] показали, что обобщенные умения, навыки, методы решения задач переносятся значительно шире, чем не обобщенные, они адекватно отвечают раз- нообразным изменениям условий деятельности. Обобщающее повторение долж- но способствовать выработке этих обобщенных умений и навыков.

Исследование процесса формирования системы понятий показывает необхо- димость сосредоточения на уроках обобщающего повторения ведущих матема- тических понятий с целью установления взаимосвязей между ними. Мы предла- гаем классификацию обобщающих повторений на основе их содержания, макси- мально ориентированного на учет возрастных и индивидуальных особенностей учащихся. Обобщающее повторение мы рассматриваем на уровне понятия, си- стемы понятия, теорий.

Выделение уровней обобщающего повторения необходимо для осуществле- ния дифференцированного подхода к учащимся, учета их возрастных особеннос- тей. Наиболее сложным из названных уровней является последний – организа- ция обобщающего повторения на уровне теории, в связи с чем первые два уровня в большей степени приемлемы к младшему и среднему школьному возрасту, по- следние же дают больший эффект в основном лишь в старших классах.

Выделение уровней обобщающих повторений приемлемо не только при уче- те возрастных особенностей учащихся, но и индивидуальных. Выделенные виды обобщения могут быть использованы для проведения в одном и том же классе обобщающе-повторительных уроков с учетом идеи уровней дифференциации. На таких уроках в группе учащихся, изучающих математику только на обяза- тельном уровне, обобщение должно проводиться в основном на уровне понятий и частично на уровне системы понятий. В группе учащихся, изучающих матема- тiku на продвинутом уровне, обобщение следует проводить на уровне системы понятий и теорий.

Приведем примеры заданий, которые можно использовать при проведении обобщающего повторения на уровне понятий в различных темах школьного курса математики.

Пример 1. Проводя повторение на уровне понятий по теме «Многоугольники» в курсе геометрии VII класса, учащимся может быть предложено такое задание: известно, что во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, верно ли обратное: четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом? (Это задание требует от учащихся анализа ситуации).

Пример 2. Укажите, какие из нижеперечисленных предложений могут служить определением соответствующих понятий, и к каждому неправильному утверждению приведите пример, иллюстрирующий его ошибочность:

- прямоугольником называется параллелограмм, имеющий хотя бы один прямой угол;
- прямоугольником называется четырехугольник, диагонали которого равны;
- прямоугольником называется четырехугольник, диагонали которого в точке их пересечения делятся пополам.

(Это задание направлено на активизацию мысли ученика, на развитие у него умения анализировать новые ситуации).

Для обобщения темы «Четырехугольники» на уровне понятий полезной окажется работа по конструированию определения различных видов четырехугольников на основе перечисления существенных признаков. Так, например, учащимся можно предложить указать, какие из нижеперечисленных существенных свойств однозначно определяют основные понятия темы. (Это задание направлено на синтез знаний и на их обобщение).

Предлагаются следующие существенные признаки: 1. Диагонали взаимно перпендикулярны. 2. Диагонали в точке пересечения делятся пополам. 3. Противоположные стороны попарно равны и параллельны. 4. Имеет четыре и только четыре угла. 5. Имеет хотя бы один прямой угол. 6. Диагонали равны. 7. Две смежные стороны равны. 8. Четыре стороны и четыре угла равны между собой. Понятия: многоугольник, четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб.

Школьники могут выбрать различные совокупности существенных признаков, однозначно определяющих одно и то же понятие.

Обобщающее повторение на уровне системы понятий преследует цель выработать у учащихся умения сопоставлять изученные понятия, описывать новые связи и отношения между ними, прослеживать развитие определенных понятий в их иерархических зависимостях. Если на уровне понятий обобщающее повторение организовывалось на методах наблюдения и сравнения, то на уровне системы понятий на первый план выдвигается анализ взаимосвязей понятий. На уровне теории обобщающее повторение призвано дать определенную трактовку изучения понятий с позиции тех или иных фундаментальных идей, рассматриваемых в курсе. На данном уровне все большее место начинают занимать обобщения и конкретизация в их единстве.

Наш педагогический опыт показывает, что на каждом этапе обобщения учебного материала можно успешно использовать информационные технологии.

### **Библиографический список**

1. Авдеева Т.К. Оптимизация процесса повторения учебного материала на уроках алгебры в восьмилетней школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук: (13.00.02) / Минский гос. институт им. А.М. Горького. Минск, 1984. 16 с.
2. Далингер В.А. Обобщающие повторения в процессе обучения математике: учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПИ, 1992.
3. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М.: Педагогика, 1978. 128 с.
4. Зорина Л.Я. Системность – качество знаний. М.: Знание, 1976. 53 с.
5. Исследование мышления в советской психологии / под ред. Е.В. Шорохова. М.: Наука, 1966. 476 с.
6. Нешков К.И. Некоторые вопросы преемственности при обучении математике // Преемственность в обучении математике / сост. А.М. Пышкало. М.: Просвещение, 1978. С. 13–18.
7. Новосельцева З.И. Об одном приеме управления формированием обобщения // Приемы активизации обучения математике: межвузовский сборник научных трудов. Л.: Изд-во Ленинградского пединститута, 1985. С. 71–76.
8. Общая психология / под. ред. А.В. Петровского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1976. 479 с.
9. Проблемы социалистической педагогики: материалы I научной конференции ученых-педагогов социалистических стран. М.: Педагогика, 1973. 430 с.
10. Ушинский К.Д. О классных рассказах вообще и библейских в особенности // Собр. соч. М., Л., 1949. Т. 6. С. 326–331.

# ОРГАНИЗАЦИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ИГР В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 5–6 КЛАССАХ

## ORGANIZATION OF DIDACTIC GAMES IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS IN GRADES 5–6

Т.А. Домненко, И.Г. Кулешова

T.A. Domnenko, I.G. Kuleshova

*Дидактические игры, организация обучения, обучение математике, познавательный интерес.*

Рассматривается возможность включения дидактических игр в процесс обучения на уроках математики для 5–6 классов. Применение представленных дидактических игр на уроках математики позволит модернизировать процесс обучения и повысить познавательную активность учащихся.

*Didactic games, organization of learning, teaching mathematics, cognitive interest.*

The possibility of including didactic games in the learning process in mathematics lessons for grades 5–6 is considered. The use of the presented didactic games in mathematics lessons will modernize the learning process and increase the cognitive activity of students.

**В** настоящее время представлено большое количество различных пособий с содержанием дидактических игр по математике как для школ, так и для профессиональных учебных заведений. Разработкой дидактических игр по школьному курсу математики занимались такие авторы, как В.Г. Короленко [3], Б. Стеблина [8] и др. Важность игровых моментов на уроках математики также подчеркнули И.К. Данилов [1], О.В. Зимний [2].

Дидактические игры в процессе обучения школьников используют с целью закрепления и систематизации знаний, развития мыслительной деятельности учащихся, повышения мотивации при помощи нестандартных и развивающих заданий, разработкой которых занимались В.В. Кривоногов [4], Е.А. Лебединцева [5].

По П.И. Пидкасистому, дидактическая игра – это коллективная и целенаправленная учебная деятельность, когда каждый участник и команда в целом объединены решением основной задачи и ориентируют свое поведение на победу [6]. В Российской педагогической энциклопедии дидактические игры определяются как игры, специально создаваемые или приспособленные для целей обучения [7].

При исследовании и анализе разнообразных пособий как с содержанием дидактических игр, так и с содержанием нестандартных и развивающих задач по математике были выявлены отличительные особенности данного источника знаний, рассмотрим некоторые из них. Во-первых, каждая игра должна быть направлена на выполнение упражнений для развития и воспитания учащихся.

Во-вторых, в дидактической игре обязательным условием является наличие некоторой увлекательной задачи, решение которых требует интеллектуальной деятельности. В-третьих, игры должны не только соответствовать изучаемому материалу и возрастным особенностям школьников, но и вызывать эмоциональный отклик учащихся.

Вместе с тем слабо разработанной оказалась методическая база с дидактическими играми по математике для 5–6 классов, ориентированная на конкретные учебники. Следовательно, возникает необходимость в создании некоторого набора дидактических игр для учащихся 5–6 классов, задания которых будут максимально близки к определенному школьному учебнику конкретного автора, в связи с этим рассматриваемая проблема актуальна.

Вместе с тем анализ литературы показал, что одних разработок дидактических игр может быть недостаточно для эффективного обучения школьников.

Объектом исследования выступают дидактические игры по математике, а предметом дидактические игры по математике для 5–6 классов, ориентированные на конкретный учебник математики определенных авторов.

Далее возникает следующий вопрос: как может измениться учебный процесс при внедрении в него подобных дидактических игр на уроках математики. На наш взгляд, если строить образовательный процесс подобным образом, то повысится уровень усвоения школьниками как практического, так и теоретического материала по изучаемому предмету, а также аналогичные методы проведения занятий будут способствовать повышению мотивации школьников к изучению предмета. Проверка данной гипотезы планируется в форме педагогического эксперимента в процессе дальнейшей профессиональной деятельности.

Следует отметить, что большинство нами разработанных дидактических игр предназначены для закрепления и систематизации изученного материала, а значит, проведение игр можно считать целесообразным в конце изучения определенной темы, перед контрольной или самостоятельной работой.

Для использования дидактических игр в процессе обучения школьников математике учителю необходимо изучить методические рекомендации, озвучить правила игры учащимся и предоставить раздаточный материал, если таковой имеется для конкретно выбранной игры.

Приведем пример разработки дидактической игры «Среднеарифметические шашки» и сформулируем методические рекомендации к ней.

Разработанная дидактическая игра предназначена для учащихся 6 классов, реализация которой предполагается на уроках математики с целью закрепления и систематизации знаний учащихся по теме «Среднее арифметическое». Также проведение игры в процессе обучения математике будет способствовать развитию творческого и логического мышления учащихся. Предполагается, что в процессе включения в игровую деятельность ученики приобретут такие навыки, как навык работы в команде; когнитивные навыки, а именно способность планировать свою работу, адаптивность, коммуникабельность; навыки межличностного взаимодействия и т.д.



Правила игры следующие: ученикам необходимо разделиться по парам. Перед началом игры на поле находится 12 шашек, расположенных на темных квадратах в первых трех горизонтальных рядах доски. Первым делает ход игрок с белыми шашками. Ходить можно обычными шашками (не дамками) только вперед и по диагонали, но только на соседний квадрат. Шашка становится дамкой после того, как достигла первого ряда со стороны противника, и в этом случае для обозначения дамки шашку переворачивают. Дамка имеет право ходить по диагонали в любом направлении.

На каждом темном квадрате нанесен определенный символ, который будет находиться на одной из карточек с заданиями. Каждый раз при попадании шашки на темный квадрат с символом ученик вытягивает карточку с заданием и выполняет его. На ответ дается ровно 30 секунд. Если противник сделал ход, но не успел ответить в течение отведенного на решение карточки времени, то противник имеет право забрать шашку, которой ходил противник. Игра продолжается до того момента, пока у одного из противников не останется ни одной шашки.

Продemonстрируем пример раздаточного материала (рис.).



Рис. Раздаточный материал к игре «Среднеарифметические шашки»

Мы полагаем, что при использовании педагогом в процессе обучения математике подобных дидактических игр возрастет уровень усвоения практических и теоретических знаний и умений учащихся 5–6 классов, а также данная форма проведения занятий будет способствовать формированию мотивационной составляющей учащихся и развитию познавательного интереса.

### Библиографический список

1. Данилов И.К. Об игровых моментах на уроках математики // Математика в школе. 2005. № 1. 98 с.
2. Зимний О.В. Элементы игры на уроках // Математика в школе. 2004. № 6. 87 с.



3. Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики. М.: Просвещение, 1990. 95с.
4. Кривоногов В.В. Нестандартные задания по математике: 5–11 классы. М.: Первое сентября, 2002. 219с.
5. Лебединцева Е.А., Беленкова Е.Ю. Математика 5 класс. Задания для обучения и развития. М.: Интеллект-Центр, 2007. 348 с.
6. Пидкасистый, П.И., Технология игры в обучении: учебное пособие. М.: Просвещение, 1992. 269 с.
7. Российская педагогическая энциклопедия: в 2 т. / гл. ред. В.Г. Панов. М.: Большая Рос. энцикл., 1993–1999. 607 с.
8. Стеблина Б. Игровые формы занятий. 5–6 классы // Математика. 2001. № 23. 32 с.

# ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРИКИ

## FEATURES OF THE USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE SYSTEMS IN SOLVING COMBINATORICS PROBLEMS

Е.Г. Евсеева, Д.А. Скворцова

E.G. Evseeva, D.A. Skvortsova

*Обучение комбинаторике, комбинаторные задачи, искусственный интеллект в обучении, комбинаторное мышление.*

Рассматривается проблема использования систем искусственного интеллекта в обучении математике. Проанализированы возможности нейросетей по решению комбинаторных задач. Приведены примеры решения задач с помощью чат-ботов, часто используемых для решения математических задач. Сделан вывод о целесообразности применения нейросетей для реализации способов действий по алгоритму с целью проверки правильности решения обучающимися.

*Teaching combinatorics, combinatorial tasks, artificial intelligence in learning, combinatorial thinking.*

The problem of using artificial intelligence systems in teaching mathematics is considered. The possibilities of neural networks for solving combinatorial problems are analyzed. Examples of solving problems using chat-bots, which are often used to solve mathematical problems, are given. The conclusion is made about the expediency of using neural networks to implement the methods of action according to the algorithm in order to verify the correctness of the decision by students.

Одним из ключевых направлений развития образовательных технологий в последние годы стал Искусственный интеллект (ИИ), потенциал в образовательной сфере огромен. В контексте преподавания математики ИИ может служить как мощным инструментом для персонализации учебного процесса, так и средством для повышения эффективности преподавания за счет автоматизации некоторых рутинных задач учителя [1; 3; 5].

Системы и приложения искусственного интеллекта – это программное обеспечение, компьютерное оборудование, обучающие роботы, планшеты, интеллектуальные доски, приложения для смартфонов и интеллектуальных обучающих игр, которые обладают способностью человеческого разума действовать, принимать решения и работать так же, как человеческий разум работает в образовательных целях [5].

Учеными рассматривается применение нейросетей в процессе обучения математике в нескольких направлениях, таких как визуализация сложных концепций; распознавание образов; обучение аналитическим навыкам, решению задач; создание интерактивных учебных модулей; автоматическое создание тестов; создание рекомендательных систем [3].

Одной из проблемных областей школьного курса математики, при изучении которой обучающиеся часто испытывают затруднения при решении задач, является комбинаторика. Согласно федеральным образовательным стандартам основного и среднего общего образования раздел «Элементы комбинаторики» изучается в 7–11 классах в рамках курса «Вероятность и статистика».

В исследовании Е.Е. Белокуровой аргументирована значимость рассуждений в комбинаторике и улучшения умственных операций анализа, синтеза, сравнения, обобщения и абстрагирования в развитии действенного, образного и словесно-логического частей мышления и их взаимосвязи; в формировании таких свойств мышления, как вариативность, гибкость и критичность [2].

Нами обосновано, что в процессе решения комбинаторных задач у обучающихся развивается комбинаторное мышление, необходимое современным специалистам для осуществление инновационной деятельности в IT-сфере и других профессиях [4]. В условиях цифровой трансформации образования формирование комбинаторного мышления должно осуществляться с использованием цифровых инструментов, в том числе систем ИИ.

В то же время существуют проблемы, связанные с использованием систем и приложений искусственного интеллекта в обучении, включающие затруднения, с которыми сталкиваются учителя математики при использовании систем и приложений ИИ [5].

Целью статьи является анализ особенностей использования нейросетей для решения задач по комбинаторике в процессе формирования комбинаторного мышления обучающихся основной и средней школы.

Существует большое количество систем ИИ, которые можно использовать при проектировании и организации обучения математике [1; 5]:

- виртуальные репетиторы на основе ИИ, такие как Socratic;
- платформа ASSISTments, которая использует элементы геймификации и адаптивного обучения;
- DreamBox Learning – это адаптивная образовательная платформа, которая использует ИИ для обучения математике;
- ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) – адаптивная платформа для изучения математики, которая используется для анализа уровня знаний учеников и создания индивидуальных планов обучения;
- MATHia – это программа, которая использует ИИ для создания виртуальных репетиторов по математике;
- адаптивные игры и симуляции на основе ИИ, такие как Prodigy Math;
- InternLM2-Math-7B – мощная нейросеть для вычислений, объясняющая весь ход решения.

Чаще всего для решения задач используют чат-боты типа MathGPT, который выдает решение по введенному условию задачи. Для обучения нейронной сети используются большие массивы данных, насчитывающие миллионы текстовых и графических документов, поэтому нейросети хорошо генерируют тексты

и графические изображения, чего не скажешь о математических запросах. Статистика показывает, что при решении математических задач нейросети дают правильный ответ в 60–80 % случаев. Поэтому учитель должен тщательно перепроверять сгенерированные нейросетью результаты [3].

Рассмотрим решение комбинаторных задач с использованием систем ИИ. При решении типовых задач, предполагающих непосредственно применение комбинаторных формул (число размещений, сочетаний и перестановок с повторениями и без повторений) и правил (суммы и произведения), применение чат-ботов практически всегда приводит к корректному решению. На рис. 1 приведено решение задачи 1, полученное с помощью чат-бота MathGPT.

**Задача 1.** Сколькими способами можно составить трехзначный код из трех букв A, B, C? **Ответ:** 27 способов.

При решении нейросетью использовалась формула размещений с повторениями  $A_n^k = n^k$ , где  $n$  – число элементов в исходном множестве,  $k$  – число элементов в выборке.

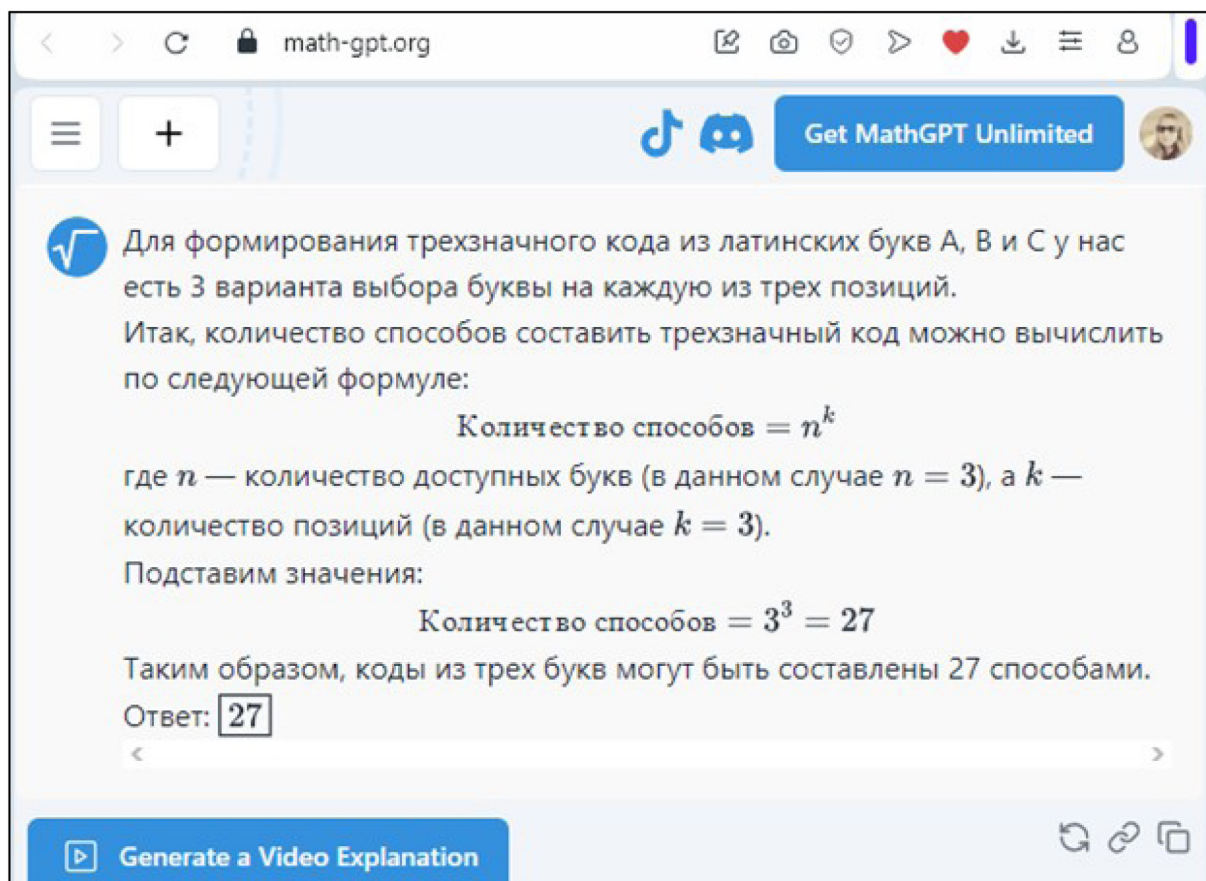


Рис. 1. Решение задачи 1, выполненное нейросетью MathGPT

Основное затруднение у обучающихся при решении задачи 1, как правило, состоит в определении типа комбинаторного соединения и необходимой формулы для решения. Проверка предложенного решения может быть осуществлена, например, построением дерева решений, в результате чего происходит полный перебор вариантов (рис. 2).

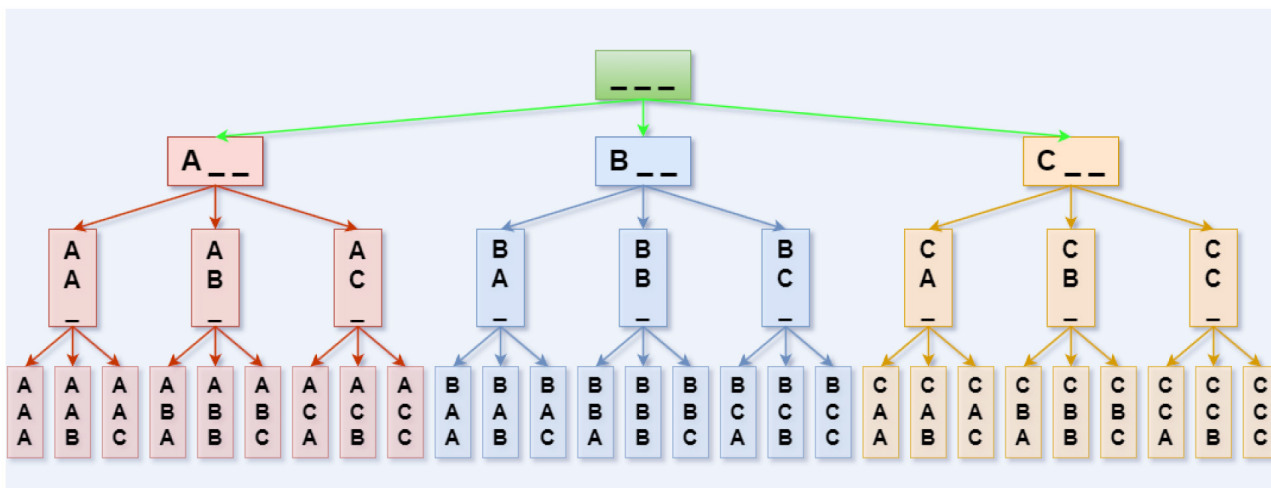


Рис. 2. Дерево вариантов для задачи 1

В том случае, когда в задаче существуют ограничения на составляемые подмножества, применение нейросетей зачастую не приводит к корректному результату. Рассмотрим такую задачу.

**Задача 2.** *Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл код от камеры. Он только помнит, что код пятизначный и в нем были числа 23 и 37. Какое наибольшее количество вариантов кода нужно перебрать, чтобы открыть камеру?*

**Решение.** Учитываем, что наличие в коде чисел 23 или 37 означает, что цифры этих чисел стоят рядом в номере, т.е. варианты, когда между цифрами 2 и 3, 3 и 7 есть еще цифра – отбрасываем. В условии не сказано, что эти цифры не могут повторяться, значит, учитываем и варианты, когда число 23 или 37 появится 2 раза в номере.

Варианты структуры правильного кода: 1) 237XY; 2) X237Y; 3) XY237; 4) 2337X; 5) 23X37; 6) X2337; 7) 3723X; 8) 37X23; 9) X3723, где X, Y – любые цифры от 0 до 9. Обозначим через  $n_i$  – число способов составить  $i$ -ю комбинацию. Вычислим  $n_i$  по правилу умножения, так как нужно последовательно выбрать 5 цифр в пятизначном коде.

1)  $n_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$  (В коде 237XX на двух последних позициях может быть любое число, так как цифры могут повторяться);

2)  $n_2 = 100$  (В коде X237Y на первой и последней п позициях может быть любое число, так как цифры могут повторяться);

3)  $n_3 = 100$  (в коде XX237 на двух первых позициях может быть любое число, так как цифры могут повторяться);

4)  $n_4 = 10$  (в коде 2337X на последнем месте может быть любое число);

5)  $n_5 = 8$  (в коде 23X37 вариант 23237 учтен в  $n_3$ , а 23737 учтен в  $n_1$ );

6)  $n_6 = 10$  (в коде X2337 на первом месте может быть любое число);

7)  $n_7 = 9$  (в коде 3723X вариант 37237 учтен в  $n_3$ );

8)  $n_8 = 10$  (23X37 на третьем месте может быть любое число);

9)  $n_9 = 9$  (в коде X3723 а 23723 учтен в  $n_1$ ).



Составить код каким-то одним, не важно каким способом, есть  $n$  вариантов (по правилу сложения):

$$n = \sum_{i=1}^9 n_i = 100 + 100 + 100 + 10 + 8 + 10 + 9 + 10 + 9 = 356.$$

**Ответ:** 356 вариантов.

Решение задачи 2 было осуществлено с помощью 5 различных чат-ботов, и ни один не дал корректного решения. Рассмотрим причины, по которым эти решения не дали правильного ответа.

1) решение с помощью <https://math-gpt.org>

**Ответ:** 5000 вариантов. Рассмотрены некорректные варианты расположения чисел 23 и 37 в коде: 23XYZ; XYZ 23; 3XY3; 37X3Y; 3X7Y3; 37X03; X23Y3; X372Y, где X, Y, Z – любые цифры от 0 до 9.

2) решение с помощью <https://botprofi.ru>

**Ответ:** несколько тысяч возможных вариантов. Рассмотрены варианты расположения чисел 23 и 37 без учета совпадений вариантов: 23XYZ; X23YZ; XY23Z; XYZ23; 37XYZ; X37YZ; XY37Z; XYZ37, где X, Y, Z – любые цифры от 0 до 9.

3) решение с помощью <https://textbot.ru/reshit-zadachu>

**Ответ:** 100000 вариантов. Не учтены числа 23 и 37 в коде. Для каждой позиции выбрано 10 вариантов расположения цифры на ней (от 0 до 9).

4) решение с помощью <https://rugpt.io/chat-gpt-dlya-resheniya-zada-po-matematiki>

**Ответ:** 1000 вариантов. Считается, что числа 23 и 37 занимают две позиции в пятизначном коде, т.е. считаются цифрой, а не двузначным числом. Оставшиеся 3 позиции могут занимать любые цифры (от 0 до 9).

5) решение с помощью <https://studentbot.ru/task-online>

**Ответ:** 2000 вариантов. Рассмотрены отдельно для каждого числа 23 и 37 расположение в пятизначном коде на двух позициях, а оставшиеся 3 позиции могут занимать любые цифры (от 0 до 9).

Поскольку во всех случаях получено количество вариантов, значительно превышающее правильный ответ, мы предприняли попытку уточнить условие задачи 2 и повторить вычисления. После уточнения, что наличие в коде чисел 23 или 37 означает, что цифры этих чисел стоят рядом в номере, ситуация изменилась незначительно и правильного ответа не было дано ни одним из использованных чат-ботов, хотя искомое число вариантов и уменьшилось.

Таким образом, делаем вывод, что системы ИИ целесообразно использовать для решения комбинаторных задач, в которых реализуются способы действий, выполняемые по алгоритму. При решении с помощью нейросетей задач, в которых при решении необходимо применять кроме стандартных формул, перебор с ограничениями, результат с большой вероятностью может быть некорректным.

Это объясняется тем, что комбинаторное мышление имеет эвристическую направленность, которая подразумевает построение поисковых стратегий, основывающихся не на алгоритмах, а на творческом подходе и интуиции, что всегда может быть воспроизведено системами искусственного интеллекта.



## Библиографический список

1. Бабурчина А.И. Использование ИИ в преподавании математики для школьников среднего и старшего звена // Международный научный журнал «Вестник науки». 2024. Т. 5. № 9 (78). С. 553–579.
2. Белокурова Е.Е. Характеристика комбинаторных задач // Начальная школа. 2019. № 1. С. 74–77.
3. Блинова Т.Л., Наймушина К.Ю., Подчиненов И.Е. Использование нейросети в преподавании математики // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VIII Междунар. науч. конф. Красноярск, 24–27 сентября 2024 г.: в 4 ч. / под ред. М.В. Носкова. Красноярск: Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2024. Ч. 1. С. 39–43.
4. Евсеева Е.Г. Формирование комбинаторного мышления у обучающихся как компетенция будущего учителя математики // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2024. Вып. 3 (63). С. 34–43. DOI: 10.24412/2079-9152-2024-63-34-43.
5. Mohammad A. Tashtoush et al. Artificial Intelligence in Education: Mathematics Teachers' Perspectives, Practices and Challenges // Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics. 2024. Vol. 5, No. 1. P. 60–77.

# ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТА И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОЛИМПИАДЫ ПО МОЛНИЕНОСНОМУ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ «СТРЕКОЗА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ

## GENERALIZATION OF EXPERIENCE AND PROSPECTS OF DEVELOPMENT OF THE OLYMPIAD ON LIGHTNING SOLUTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS “DRAGONFLY” FOR STUDENTS OF PEDAGOGICAL UNIVERSITIES

Н.А. Журавлева, Е.И. Ганжа

N.A. Zhuravleva, E.I. Ganzha

*Олимпиада; форма организации олимпиады, олимпиадная задача; уровень сложности задачи, молниеносное решение.*

В статье описано обобщение опыта выполнения олимпиады «Стрекоза» 2024 года по молниеносному решению математических задач в дистанционном формате на платформе Moodle. Проанализированы результаты верно решенных арифметических, алгебраических, геометрических, логических, комбинаторных и вероятностных задач. Представлены перспективы развития олимпиады.

*Olympiad; form of organizing an Olympiad; Olympiad task; task difficulty level, lightning-fast solution.*

The article describes the generalization of the experience of the Dragonfly Olympiad 2024 on lightning-fast solution of mathematical problems in a remote format on the Moodle platform. The results of correctly solved arithmetic, algebraic, geometric, logical, combinatorial and probability problems are analyzed. The prospects of the Olympiad development are presented.

**Д**еятельность современного учителя математики многогранна, одним из ее элементов становится умение работать с олимпиадными задачами. Как отмечает А.П. Гулов, «отечественное олимпиадное движение в последние годы переживает бум массовости и популярности, что обусловлено поддержкой государства, большим количеством доступных творческих проектов, а также повышенным интересом и мотивацией школьных учителей воспитывать успешных олимпиадников [1, с. 797].

Е.В. Игонина, Т.М. Сафронова, Г.А. Симоновская делают вывод о том, что олимпиадное движение можно рассматривать «как ключевой компонент профессионального развития молодого специалиста либо как показатель эффективности наставника-преподавателя» [3, с. 79]. А.О. Келдибекова считает, что необходимо проводить профессиональную подготовку студентов, будущих учителей математики, к осуществлению олимпиадной деятельности школьников [5, с. 180].

Специфика олимпиады по молниеносному решению математических задач «Стрекоза» заключается в решении 33 задач школьного курса математики разных

уровней сложности за 40 минут студентами педагогического вуза. Первые 10 задач базового уровня сложности, далее 10 задач продвинутого уровня, следующие 10 задач повышенного уровня и последние три задачи – высокого уровня сложности. За каждую верно решенную задачу базового уровня участник получает 1 балл, продвинутого уровня – 2 балла, повышенного уровня – 3 балла и высокого уровня – 5 баллов [2]. Олимпиада проводится дистанционно посредством специально разработанного электронного ресурса на платформе Moodle, что позволяет автоматизировать процесс оценки ее результатов. Победителями и призерами олимпиады считаются участники, набравшие наибольшее количество баллов.

В 2024 г. было увеличено количество геометрических и алгебраических задач для олимпиады. При составлении всех задач мы руководствовались принципами сбалансированности, краткости, доступности и динамичности [4], поэтому формулировки задач были краткими, сопровождалась рисунками и схемами, не требовали использования сложных для запоминания и выведения формул, а решения не предусматривали длительных выкладок и вычислений. Уровень сложности каждой задачи определялся количеством действий и сочетанием устных и письменных приемов, используемых в ходе ее решения. Спецификация задач олимпиады «Стрекоза 2024» представлена в таблице.

Тип задач	Уровень сложности задач			
	базовый	продвинутый	повышенный	высокий
Арифметические задачи	3	1	1	–
Алгебраические задачи	1	4	3	–
Геометрические задачи	4	3	2	–
Логические задачи	1	2	1	2
Комбинаторные и вероятностные задачи	1	–	3	–
Графические задачи	–	–	–	1

Олимпиада начинается с арифметической задачи № 1 о количестве пчел и бабочек, с которой справилось 62 % всех участников, задача № 3 на движение со схемой побила рекорды по решаемости – 82 %, хотя задачу № 9 на движение белки Скрэт по неровной местности со схемой смогли решить только 13 % студентов, а для решения необходимо было составить модель с двумя неизвестными величинами и найти их сумму. Задачу продвинутого уровня № 11 на совместную работу короедов решило 49 % обучающихся. Самый низкий результат (всего 2 % студентов) получила задача № 29 повышенного уровня сложности о рекордах кузнечика Кузи, решение которой требовало применения элементов логики. Результаты выполнения арифметических задач представлены на рис. 1.

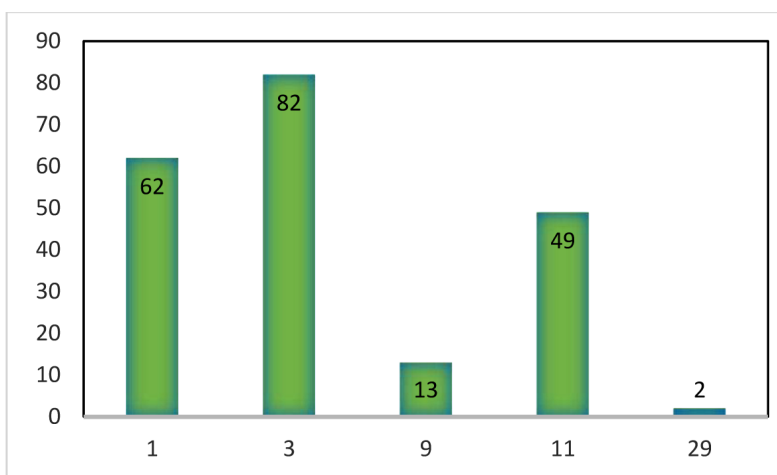


Рис. 1. Результаты выполнения арифметических задач

Результаты выполнения алгебраических задач представлены на рис. 2. С задачей базового уровня сложности № 5 о нахождении корня уравнения 5 степени справились 72 % студентов. Значительно хуже решались задачи продвинутого уровня сложности, например, задача № 16 о нахождении корней суммы неотрицательных функций – 42 %, задача № 18 о преобразовании тригонометрических выражений – 36 %, задача № 19 о преобразовании обыкновенных дробей – 21 % и задача № 20 на применение свойств степеней – 43 %. А с задачей повышенного уровня сложности № 21 о решении показательного уравнения  $1,125 \cdot 2^{2024} + 7 \cdot 2^{2021} = 2$  справились 56 % студентов. Хуже всего были решены задачи № 24 на преобразование выражения с дробями – 12 % и № 26 о применении теоремы Виета – 16 %. Заметим, что для успешного выполнения упомянутых выше задач требовалось выполнить простейшие преобразования с обыкновенными дробями, реализуемые в 1–2 шага.

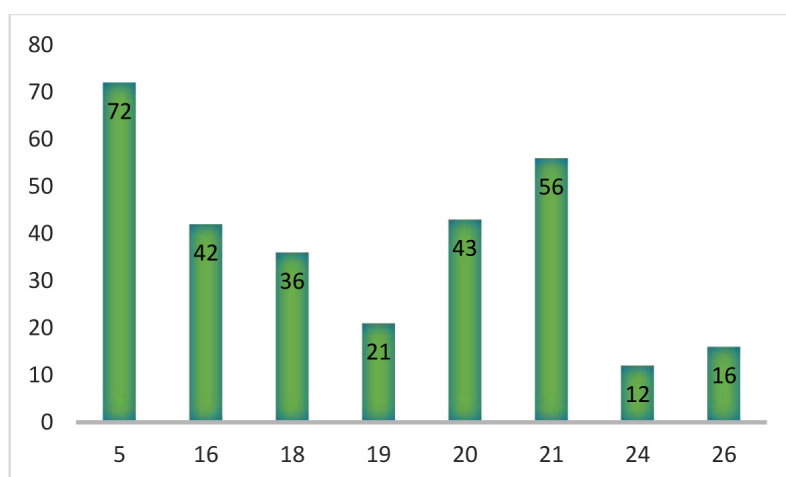


Рис. 2. Результаты выполнения алгебраических задач

Геометрических задач было представлено 9: четыре задачи базового, три – продвинутого и две – повышенного уровней сложности. Условие задачи по планиметрии обязательно содержало рисунок, на котором были отмечены все

необходимые элементы. Результаты выполнения геометрических задач представлены на рис. 3. С задачей № 4 на вычисление площадей квадрата и прямоугольного треугольника справились 42 % участников, а задачу № 6 о поиске вершин пирамиды в зависимости от количества ее ребер смогли решить лишь 36 % обучающихся. Лучше получилось решить задачу № 7 о поиске площади части правильного многоугольника – 70 %. Задачи № 8, 12 и 14 о площадях прямоугольников, вписанных углах и площади параллелограмма смогли решить 35–36 % студентов. Задачу № 17 о равновеликих треугольниках в квадрате удалось решить 22 % участников. С задачами № 25 и 27 о площади треугольников и углах правильного девятиугольника смогли справиться лишь 4 %. Результаты решения геометрических задач достаточно высокие по сравнению с аналогичными результатами олимпиады 2023 г. Мы считаем, что низкий результат решаемости последних в списке задач, возможно, объясняется тем, что многие участники к ним даже не приступали из-за нехватки времени.

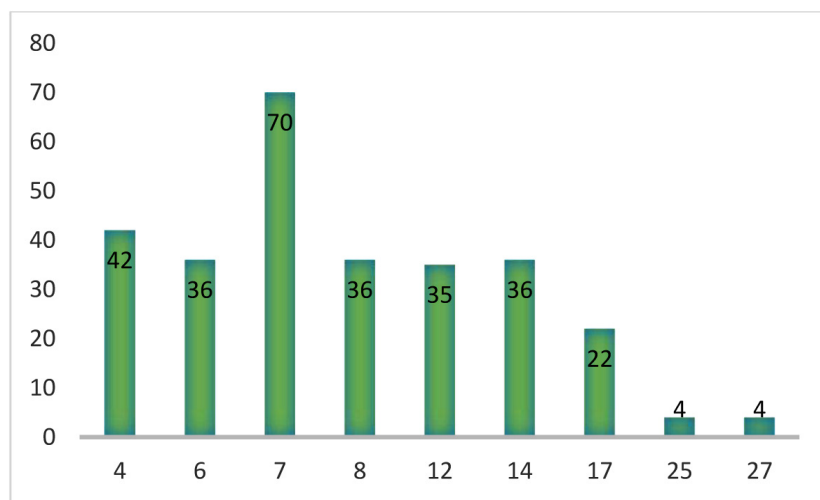


Рис. 3. Результаты выполнения геометрических задач

Из логических задач лучше всего была решена задача базового уровня сложности – задача № 2: *Петя коллекционирует тараканов, у него их 30, рыжие и мадагаскарские. Хотя бы один из тараканов – мадагаскарский. Из любых двух тараканов хотя бы один – рыжий. Сколько рыжих тараканов у Пети?* Эту задачу смогли решить 53 % участников. 40 % студентов справились с задачей № 13: *Муравей собрал 12 разноцветных бусинок: белых, розовых, голубых и сиреневых. Из них 10 – не сиреневые, 2 – голубые, 7 – не белые. Сколько розовых бусинок?* А задачу № 15 о количестве подписанных контрактов, решаемую логически или с помощью графов, – только 11 %. Задачу повышенного уровня № 30 о фотосессии не смог решить ни один из участников. *Четыре подружки решили устроить фотосессию. Одна фотографирует троих вместе. Оказалось, что у Оли больше всех фотографий, на которых она есть – 10, а у Маши меньше всех – 7. Сколько всего было сделано различных фотографий?* Для ее решения необходимо найти количество фотографий  $x_1 + x_2$ , которые принадлежат двум оставшимся подружкам и обязательно содержат изображение той, которой это фото принадлежит.

По условию это количество может быть 8 или 9. Тогда количество всех фотографий у 4-х девочек равно  $x_1+x_2+10+17$  и, следовательно, принимает значения от 33 до 35, но общее количество фотографий должно делиться на 3 (одна общая фотография распечатывается на 3 девочек), следовательно, это количество – 33. Тем самым количество различных фотографий – 11. Логические задачи высокого уровня сложности № 32 и 33 решили 2 и 5 % соответственно. Результаты выполнения логических задач представлены на рис. 4.

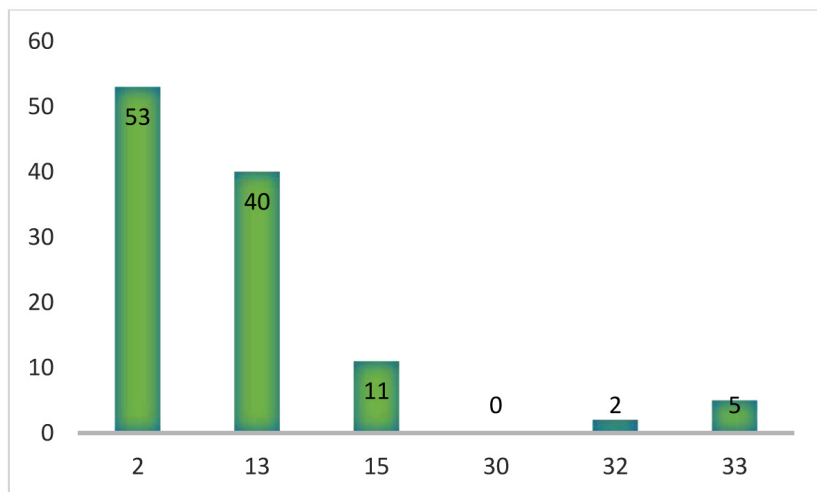


Рис. 4. Результаты выполнения логических задач

С комбинаторной задачей № 10 о сумме и произведении цифр смогли справиться только 24 % участников. Лучше всего была решена задача № 22 на формулу полной вероятности (28 % участников): *Катя поехала с родителями на море. Завтра они поедут на пляж или на экскурсию. Поехать на экскурсию равновероятно в четыре места, в том числе в дельфинарий. Какова вероятность, что семья завтра будет на пляже или в дельфинарии, если вероятность похода на пляж 1/3.* С задачей № 23 на применение формулы Байеса смогли справиться 18 % студентов. А задачу № 28 на геометрическое определение вероятности с нахождением объемов шаров решили всего лишь 2 % участников.

С задачей высокого уровня сложности № 31, в которой было приведено два графика зависимости высоты от времени и пройденного пути ежиком, теряющим яблоко, смогли справиться лишь 4 % участников олимпиады.

На следующий год мы планируем оставить на таком же уровне количество геометрических, алгебраических, арифметических и логических задач, но изменить порядок прохождения заданий. В этом году задачи можно было решить только последовательно, то есть не было возможности вернуться к предыдущей задаче и нужно было решать задачи только в предложенном порядке, вследствие чего на решение последних задач у многих не оставалось времени. В следующем году мы планируем разбить задания по уровням сложности и отвести определенное время на решение задач каждого уровня сложности, сделав перерывы между уровнями.



В этом году в олимпиаде «Стрекоза» принимали участие студенты профиля «Математика» педагогических вузов России и Белоруссии, что доказывает ее популярность. Мы планируем в дальнейшем проводить анализ результатов олимпиады, чтобы совершенствовать задачи и организацию.

### **Библиографический список**

1. Гулов А.П. Американская традиция проведения интеллектуальных состязаний: конкурсы и олимпиады // Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. 2023. Т. 28, № 4. С. 795–804.
2. Журавлева Н.А., Ганжа Е.И. Анализ результатов олимпиады по молниеносному решению математических задач «Стрекоза» в Красноярском государственном педагогическом университете им. В.П. Астафьева // Математика и математическое образование в эпоху цифровизации: материалы XII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 2023. С. 234–238.
3. Игонина Е.В., Сафронова Т.М., Симоновская Г.А. Математическое олимпиадное движение как фактор совершенствования профессионального образования личности // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2023. № 4 (32). С. 68–81.
4. Кейв М.А., Журавлева Н.А., Ганжа Е.И. Олимпиада по молниеносному решению математических задач как психолого-педагогический феномен // Сибирский педагогический журнал. 2024. № 1. С. 26–39. DOI: <https://doi.org/10.15293/1813-4718.2401.03>
5. Келдибекова А.О. Математическая компетентность участников олимпиад как показатель качества уровневой математической подготовки // Перспективы науки и образования. 2021. № 3 (51). С. 169–187.

# ИНТЕРНЕТ-САЙТЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО ПЕРВОКЛАСНИКА

## INTERNET SITES FOR THE MATHEMATICAL PREPARATION OF THE FUTURE FIRST GRADER

К.А. Ильина, Э.Г. Сабирова

K.A. Ilyina, E.G. Sabirova

*Математическая подготовка, младший школьник, первоклассник, интернет-сайты, математика, 1 класс, дошкольная подготовка, рабочие листы.*

Вопрос о подготовке дошкольников к школе актуален как для родителей, так и для учителей. Родители активно участвуют в процессе подготовки будущего первоклассника к школе, они стремятся развивать ребенка, подготовить к дальнейшему обучению. Учителя понимают, если дошкольник подготовлен всесторонне, то ему будет проще осваивать программу. Математическая готовность диагностируется перед поступлением в школу и представляет наличие у будущего первоклассника определенного уровня знаний, умений, навыков. Детей готовят на «подготовишках» при школе, в центрах развития, в дошкольных учреждениях. К любому из перечисленных вариантов подготовки подойдет возможность применения интернет-сайтов.

*Mathematical preparation, junior high school student, first grader, Internet sites, mathematics, 1st grade, pre-school preparation, worksheets.*

The issue of preparing preschoolers for school is relevant for both parents and teachers. Parents are actively involved in the process of preparing a future first-grader for school, they strive to develop the child, prepare for further education. Teachers, in turn, understand that if a preschooler is comprehensively prepared, it will be easier for him to master the program. Mathematical readiness is diagnosed before entering school and represents the presence of a certain level of knowledge, skills, and abilities in the future first grader. Children are trained at “prep schools” at school, in development centers, and in preschool institutions. The possibility of using Internet sites is suitable for any of the listed training options.

**П**одготовка будущего первоклассника к школе является необходимым этапом в жизни ребенка [1]. «Математика» – один из основных школьных предметов, фундамент всего школьного обучения по данной предметной области, закладывается не только в начальной школе, но и уже при подготовке будущего первоклассника [2].

Что понимается под математической подготовкой будущего первоклассника?

Математическая готовность – показатель возможностей выполнения арифметических действий с числами, владения знаковыми системами, основами моделирования, самостоятельность в решении творческих задач и оценке результата [4].

При поступлении в школу будущий первоклассник проходит ряд диагностических упражнений, по степени успешности выполнения которых выявляется уровень математической готовности ребенка к школе. Одним из важных показателей математической готовности являются наличие у дошкольника определенных знаний, умений, навыков [4].

Какой базой математических знаний и умений должен владеть будущий первоклассник?

1. Знание всех цифр от 1 до 9, умение их разборчиво писать на листе бумаги.
2. Способность к прямому и обратному счету.
3. Возможность соотнесения чисел и эквивалентного им количества предметов.
4. Умение называть соседние числа.
5. Готовность решать простые задачи на сложение и вычитание.
6. Понимание особенностей сравнения предметов между собой, способность устанавливать между ними знаки «больше», «меньше».
7. Определение времени по часам со стрелками.
8. Умение различать основные геометрические фигуры (круг, квадрат, треугольник, ромб), называть их свойства [1; 2].

Многими методистами представлены виды деятельности с детьми, которые формируют вышепредставленные требования. Опишем некоторые из них.

1. Обучению счету на простых предметах. Для данного подхода достаточно просто считать окружающие ребенка предметы, также можно использовать карточки с цифрами и не только называть вслух, но и видеть их наглядно [1; 2].

2. Обучение решению простых задач. После освоения счета можно приступить к изучению задач. Первоначально они должны быть максимально наглядными с использованием всех необходимых окружающих предметов, постепенно нужно переходить к записи задач на бумаге, запоминая при этом математические знаки [2].

3. Изучение геометрических фигур. Ребенок должен понимать, что такое квадрат, ромб, круг, треугольник, и работать с ними. Для этого можно использовать макеты фигур из бумаги, картона или купить готовый набор. Сначала ребенок должен запоминать названия фигур и как они выглядят. Позже можно обсуждать элементарные свойства, а потом учить рисовать фигуры, сочетать их друг с другом, находить в окружающем мире [1; 2].

4. Обучение с цветными предметами. Для этого нужны разные цветные материалы. Перед ребенком стоит задача сортировать представленные предметы на группы одного цвета и считать их количество. Можно включать в обучение множество разнотипных вещей и также объединять их в группы и считать [1].

5. Обучение математическому письму. Главный помощник в данном деле – специально-разработанные математические прописи, главное выбирать корректные, где ребенок будет начинать изучение написания цифр с их элементов. Постепенно, по мере прогрессирования навыка письма, можно отказываться от прописей в пользу обычных тетрадей [1; 2].

6. Обучение ориентированию во времени. Первым шагом при знакомстве со временем является формирование таких понятий, как «утро», «день», «вечер», «ночь». Для этого можно не только обсуждать происходящее за окном, но и использовать сюжетные карточки. После этого происходит знакомство с временами года, месяцами, днями недели. Обучение происходит с помощью часов, на которых можно вручную устанавливать время, и нужно начинать с изучения целых часов, затем переход к половинам, четвертям, минутам [2].

7. Игра в магазин. Одна из самых популярных и любимых детьми игр. Преимущество в том, что ребенок не только осваивает счет предметов, но и знакомится с понятием «деньги». Во время такой игры можно освоить понятия «больше» и «меньше», «дешевле» и «дороже» [2].

Существуют правила организации предшкольной подготовки ребенка:

1. Заниматься нужно регулярно.
2. Ориентир на индивидуальные биоритмы ребенка, организовывать занятия нужно именно тогда, когда он бодрый и активный.
3. Все занятия должны быть максимально наглядными, игровыми, увлекательными.
4. Не нужно давить и не подгонять – у каждого ребенка своя скорость обучения.
5. Использование возможностей для повторения материала в повседневной жизни.
6. Стремление в первую очередь прививать ребенку интерес к математике [2].

Однако в современном мире, где активно развиваются технологии, в частности Интернет, появляются новые возможности для подготовки будущих первоклассников. Образовательные сайты предлагают интерактивные задания и игры, которые помогают детям усваивать новые математические знания в увлекательной и доступной форме [3].

Популярные интернет-сайты, с помощью которых можно осуществлять математическую подготовку будущих первоклассников:

1. Digital Gen – платформа с дошкольными курсами по «Математике», «Русскому языку», «Окружающему миру», которые можно проходить либо отдельно, либо комплексно.
2. Skysmart – курс «Математика для дошкольников» здесь проходит в рамках комплексной подготовки к школе – ребенок изучает такие темы, как цифры и логика, фигуры, арифметика.
3. Фоксфорд – предлагает комплексную подготовку к школе, помимо школьных предметов, включает эмоциональный интеллект и разминку, что есть не во всех интернет-сервисах. Данный сайт позиционирует себя как репетитор, но онлайн.
4. Logiclike – интерактивная платформа с красочными заданиями, но без поддержки педагога, ребенок самостоятельно выполняет все задания. Помимо подготовки по «Математике», предлагаются курсы по «Окружающему миру», развитию речи.
5. Звездочка клуб – представляет собой целый курс, во время которого ребенок получит все необходимые знания по «Математике» не только для поступления в школу, но и обучится основам «Математики».

Также помимо сайтов с онлайн-курсами и репетиторами, существуют сайты с рабочими листами, которые можно подбирать самостоятельно, также как вариант закрепления полученных знаний. Главное просматривать и прорешивать задания сначала самостоятельно, а потом предлагать ребенку.

1. Ped-kopilka – предоставляет задания по различным тематикам и для разных возрастов, которые можно печатать и решать, нет возможности выполнять на сайте.

2. Wunderkiddy – предоставляет рабочие листы по различным темам. Нет возможности решать на сайте, поэтому необходимо печатать.

3. Math-center – сайт с материалом только по «Математике». Предоставляет множество красочных рабочих листов, которые нужно печатать.

4. Solncesvet – источник авторских рабочих листов от специалистов в области педагогики.

Таким образом, добавив работу на сайтах и используя красочные рабочие листы, можно значительно разнообразить подготовку будущего первоклассника по «Математике», что поможет организовать процесс подготовки к школе и заложит интерес к предмету «Математика», который, возможно, сохранится на всю жизнь, и также станет основой успешного школьного обучения.

### **Библиографический список**

1. Smartykids «Как подготовиться к школе по математике»: международная сеть детских развивающих центров. 2023. URL: <https://smartykids.ru/blog/smartyeducation/kak-podgotovitsya-k-shkole-po-matematike/> (дата обращения: 05.11.2024).
2. IQ007 «Подготовка к школе по математике: зачем, когда и как заниматься с ребенком»: школа IQ007. 2023. URL: [https://iq007.ru/blog/for\\_parents/podgotovka-k-shkole-po-matematike](https://iq007.ru/blog/for_parents/podgotovka-k-shkole-po-matematike) (дата обращения: 05.11.2024).
3. Учительский журнал «Формирование элементарных математических представлений у дошкольников как важнейший этап подготовки к школе»: Всероссийское педагогическое издание. 2024. URL: <https://www.teacherjournal.ru/categories/22/articles/8008> (дата обращения: 07.11.2024).
4. Solncesvet «Математическая готовность ребенка к обучению в школе»: Международный педагогический портал. 2024. URL: <https://solncesvet.ru/opublikovannyye-materialyi/matematiceskaya-gotovnost-rebenka-k-obu.19587724231/> (дата обращения: 09.11.2024).

# ПОГРЕШНОСТИ В ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ОБУЧЕНИЯ УЧАСТНИКОВ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В АЛТАЙСКОМ КРАЕ

## ERRORS IN THE SUBJECT LEARNING RESULTS OF THE PARTICIPANTS OF THE OGE IN MATHEMATICS IN THE ALTAI REGION

И.В. Кисельников

I.V. Kiselnikov

*Обучение математике, основной государственный экзамен, предметные результаты обучения, математические ошибки, типичные ошибки, итоговая государственная аттестация, качество образования.*

Рассматриваются некоторые выводы из анализа результатов ОГЭ по математике, выполняемого предметной комиссией по математике в Алтайском крае. Приводятся основные результаты экзамена в 2014 г. Анализируется веер ответов участников экзамена по математике на задания с кратким ответом. Предлагаются рекомендации по преодолению типичных погрешностей участников экзамена в предметных результатах обучения математике.

*Teaching mathematics, basic state exam, subject learning outcomes, mathematical errors, typical errors, final state certification, quality of education.*

Some conclusions from the analysis of the results of the OGE in mathematics, carried out by the subject commission on mathematics in the Altai Territory, are considered. The main results of the exam in 2014 are given. The fan of answers of the participants of the exam in mathematics to tasks with a short answer is analyzed. Recommendations are offered for overcoming typical errors of the participants of the exam in the subject results of learning mathematics.

**В** современных условиях использования в России современных средств государственной итоговой аттестации, таких как основной государственный экзамен по математике, для своевременных действий по повышению качества образования существенное значение имеет выявление типичных погрешностей, в частности ошибок, участников экзамена.

Функции анализа ошибок достаточно давно выделены в научно-методической литературе [1; 2; 3]. «Рассмотреть с учащимися средней школы хотя бы некоторые такие ошибки полезно по двум причинам: во-первых, хорошо ознакомившись с какой-нибудь ошибкой, мы страхуем себя от повторения такой ошибки в будущем; во-вторых, самый процесс разыскания ошибки легко сделать увлекательным для учащихся, и изучение ошибок становится средством поднять интерес к изучению математики» [3, с. 14].



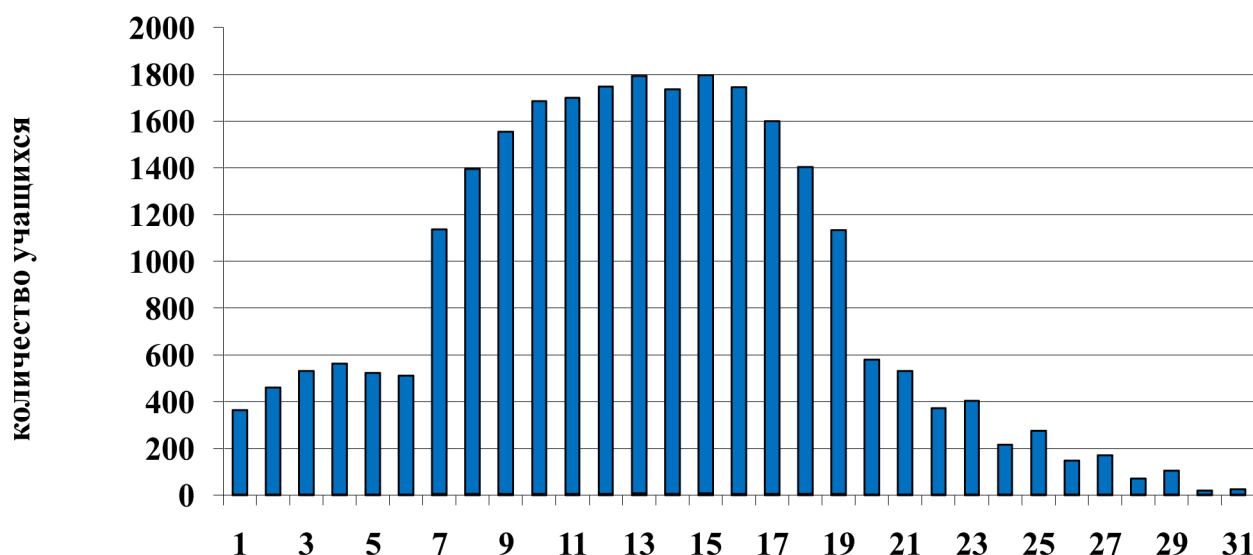


Рис. 1. Диаграмма распределения в Алтайском крае участников ОГЭ по математике по первичным баллам в 2024 г.

Общее представление о результатах ОГЭ по математике в Алтайском крае дает диаграмма, представленная на рис. 1. Эта диаграмма показывает, что распределение результатов отличается от нормального распределения. Анализ данных диаграммы показывает наличие двух резких перепадов в количестве учащихся, получивших определенные баллы: первый (примерно в 2 раза) – скачок вверх при переходе от 6 (верхняя граница отметки «2») к 7 баллам (нижняя граница отметки «3»), а второй (также примерно в 2 раза) – скачок вниз при переходе от 19 к 20 баллам, который является результатом того, что экзаменуемые либо не брались за вторую часть, либо чаще всего неверно выполняли задания второй части.

Незначительное смещение «вершины» диаграммы влево говорит о внушительной группе учащихся региона (почти половина девятиклассников Алтайского края), получивших отметку «3». Этот факт позволяет сделать вывод о не совсем достаточной сформированности у большой группы девятиклассников основных опорных алгебраических, функциональных и геометрических компетенций, необходимых для успешного продолжения образования.

Статистический анализ позволяет наглядно интерпретировать результаты выполнения заданий первой части группами экзаменуемых с разным уровнем подготовки («2», «3», «4», «5») с помощью соответствующих графиков (рис. 2).

Каждая точка графика, изображенного на рис. 2, отражает долю участников ОГЭ по математике Алтайского края в процентах, выполнивших то или иное задание первой части экзаменационной работы.

Графики иллюстрируют различия в математической подготовке разных групп обучающихся, получивших отметки «2», «3», «4», «5». При этом они отражают не только задания, с которыми наиболее успешно справилась каждая из этих групп школьников, но и задания, вызвавшие наибольшие затруднения в той или иной группе. Сравнивая графики на рис. 2, можно сделать вывод о том, что ломаные, соответствующие группам «2», «3», «4», отражают по большинству заданий одинаковую тенденцию, а ломаная группы «5» по виду несколько отличается

от предыдущих ломаных, что, возможно, указывает на некоторые существующие различия в качестве выполнения отдельных заданий базовой части.

Группа учащихся, получивших отметку «5», справились более, чем на 90 % с 17-ю заданиями первой части (в прошлом году эта группа учащихся выполнила все задания более, чем на 90 %).

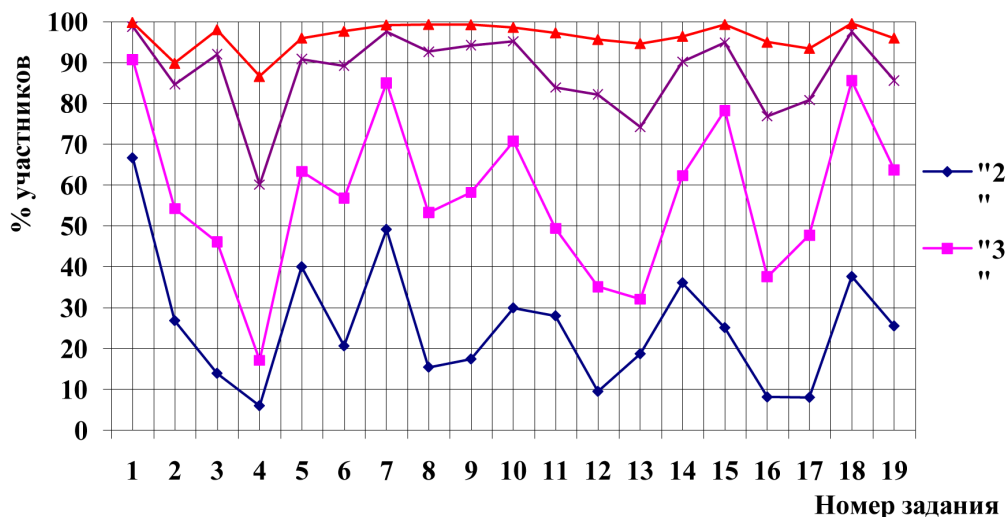


Рис. 2. Результаты выполнения группами участников ОГЭ Алтайского края заданий первой части экзаменационной работы по математике в 2024 г.

Учащиеся, имеющие отметку «4», успешно справились (не менее 80 %) с заданиями № 1–3, 5–12, 14, 15, 17–19. Наибольшие затруднения у этой группы учащихся, как и у всех выпускников основной школы, вызвали задания № 4, 13, 16, проверяющие умения: вычислять и использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (строить и исследовать простейшие математические модели), решать системы неравенств, выполнять действия с геометрическими фигурами (окружность и круг).

У учащихся группы «3» наиболее благополучными (выполнимость – не менее 60 % в данной группе) стали задания № 1, 5, 7, 10, 14, 15, 18, 19, в то время, как в этой группе преимущественные затруднения вызвали задания № 2–4, 6, 8, 9, 11–13, 16, 17. Задания № 6, 8, 9, 11, 12, 17 контролируют умения: выполнять вычисления и преобразования выражений с рациональными числами; выполнять преобразования алгебраических выражений (свойства степени с целым показателем); решать уравнения; читать графики функций; осуществлять практические расчеты по формулам; выполнять действия с геометрическими фигурами (многоугольник).

В группе учащихся, получивших неудовлетворительную отметку, менее проблемным (выполнили более 50 % представленной группы) стало задание № 1. Такие задания, как № 3, 4, 8, 9, 12, 13, 16, 17, вызвали в этой группе наибольшие трудности.

Особенностью ОГЭ по математике является наличие двух типов задач: с кратким ответом и с развернутым ответом. Выводы о погрешностях при выполнении задач с кратким ответом носят вероятностный характер и делаются на основе анализа вееров ответов участников экзамена. Термин «веер ответов» [3] применительно к заданию контрольно-измерительных материалов экзамена означает

множество всех ответов, которые участники экзамена предоставили в результате его выполнения. В качестве примера рассмотрим затруднения учащихся при выполнении одного из заданий ОГЭ по математике.

Задание 12. Центробежное ускорение при движении по окружности (в  $\text{м/с}^2$ ) вычисляется по формуле  $a = \omega^2 R$ , где  $\omega$  – угловая скорость (в  $\text{с}^{-1}$ ),  $R$  – радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус  $R$ , если угловая скорость равна  $7,5 \text{ с}^{-1}$ , а центробежное ускорение равно  $337,5 \text{ м/с}^2$ . Ответ дайте в метрах. *Ответ:* 6.

Массовые неверные ответы: 45 – 10,09 %, 0,6 – 3,04 %.

Неправильный ответ «45» получен, вероятнее всего, как результат игнорирования второй степени знаменателя. Число «0,6» могло быть получено при переносе запятой в числителе и знаменателе на одну цифру вправо, не обращая внимания на то, что в знаменателе находится степень числа:  $\frac{337,5}{7,5^2} = \frac{3375}{75^2} = 0,6$ . Таким образом, полученные массовые неверные ответы фиксируют непонимание учащимися определения степени числа с натуральным показателем. Этот вывод подчеркивается и тем фактом, что большая доля экзаменуемых (26,5 %), выполнивших вариант № 305, не брались за выполнение данного задания.

Выявление погрешностей при выполнении заданий с развернутым ответом осуществляется краевой предметной комиссией при проверке решений. Аналогичная работа осуществлялась при изучении результатов Алтайского регионального мониторинга математической подготовки учащихся 6 классов [4].

Рассмотрим в качестве примера задание 20: «Решите неравенство  $(x - 2)^2 < \sqrt{3}(x - 2)$ ». *Ответ:* (2;  $2 + \sqrt{3}$ ).

Анализ результатов выполнения задания показал, что большая часть (92,86 %) девятиклассников, выполнявших задание, не приступали к решению данного задания или выполнили это задание неправильно, получив 0 баллов. Полный балл получила лишь незначительная часть экзаменуемых – 6,77 %. Практика показывает, что выпускники основной школы испытывают серьезные трудности при решении неравенств, уравнений, которые ненамного превышают базовый уровень.

*Типичные ошибки:*

- деление обеих частей неравенства на выражение с переменной без учета знака этого выражения;
- неверное сведение неравенства к системе неравенств;
- неумение применить ту или иную формулу сокращенного умножения в заданной ситуации (например, формула квадрата разности двух выражений зачастую подменяется формулой разности квадратов двух выражений);
- подмена неравенства уравнением и решение этого уравнения;
- деление обеих частей уравнения на выражение с переменной и, как следствие, потеря корней уравнения;
- перенос алгоритма решения квадратного уравнения на уравнение 3-й степени;
- неумение выполнять тождественные преобразования выражений (например, вынесение общего множителя за скобку);
- арифметические ошибки и др.

Анализ типичных ошибок, характерных для задания № 20, позволяет сделать вывод о том, что допущенные ошибки являются следствием формализма со стороны учащихся в выполнении тождественных преобразований и соответственно в решении уравнений и неравенств. Для устранения обнаруженных проблем учителю необходимо наряду с типичными заданиями, направленными на формирование элементарных умений выполнять действия с выражениями (например, выносить общий множитель, осуществлять группировку и др.), решать стандартные линейные, квадратные и другие уравнения/неравенства; включать в учебный процесс такие уравнения/неравенства, которые стимулировали бы узнавание изучаемых конструкций, применение правил, алгоритмов в разнообразных ситуациях. Обучение решению уравнений и неравенств должно сопровождаться тестами, позволяющими, в итоге, добиться от учащихся уверенного владения аппаратом тождественных преобразований выражений, уравнений/неравенств, несмотря на возможные «помехи» и «ловушки». Кроме того, важной составляющей сформированного умения решать уравнения и неравенства является умение осуществлять непрерывный самоконтроль выполняемых действий. По крайней мере, при решении уравнений и неравенств это умение может помочь учащимся обнаружить неверно найденные решения и продумать другой, возможно правильный, вариант рассуждений.

Подобная работа по выявлению погрешностей в предметных результатах обучения проводится и для других форм итоговой государственной аттестации, в частности ЕГЭ по математике [5]. Таким образом, выявленные математические ошибки имеют значительный педагогический потенциал и могут использоваться как на различных уровнях управления образованием, так и в практике работы учителя, а также во внеурочной работе учащихся.

### **Библиографический список**

1. Брадис В.М., Минковский В.Л., Харчева А.К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Учпедгиз, 1959. 176 с.
2. Самсонов П.И. Основы методики предупреждения математических ошибок, возникающих на основе неверной ассоциативной связи // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2010. № 12. С. 75–78.
3. Кисельников И.В. Методический анализ веера ответов участников ЕГЭ по математике. Фундаментальные науки и образование: материалы II международной научно-практической конференции. Бийск: АГАО, 2014: С. 424-427.
4. Кисельников И.В. Анализ результатов Алтайского регионального мониторинга математической подготовки учащихся 6 классов // Мир науки, культуры, образования: научный журнал. 2015, апрель, № 2(51). С. 253–256.
5. Кисельников И.В. Типичные ошибки при решении задачи 15 участниками ЕГЭ по математике профильного уровня в Алтайском крае и пути их преодоления // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. URL: HYPERLINK «<http://www.science-education.ru/129-22100>» <http://www.science-education.ru/129-22100> (дата обращения: 09.10.2024).

# СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

## MODERN APPROACHES AND TECHNOLOGIES IN TEACHING THE COURSE 'PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES AND THEIR APPLICATIONS'

И.С. Козловская

I.S. Kozlovskaya

*Дифференциальные уравнения, математическое моделирование, системы компьютерной алгебры.*

В статье рассматриваются современные подходы к преподаванию математических дисциплин, исследуется их значимость при преподавании курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» в Белорусском государственном университете.

*Differential equations, mathematical modeling, computer algebra systems.*

The article discusses modern approaches to teaching mathematical disciplines and explores their significance when teaching the course “Partial differential equations and their applications” at the Belarusian State University.

**В** настоящее время возникает необходимость приближения курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» к современному уровню математической науки, с одной стороны, а с другой – потребностью включения в него элементов приложений математики, отвечающих потребностям современной практики.

Дифференциальные уравнения в частных производных образуют раздел математики, который тесным образом связывает общую математическую теорию с приложениями – например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, экономике [1]. Сегодня они находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые на первый взгляд весьма далеки от математики – например, в медицине, биологии, криминалистике, социологии, генетике.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области [2]. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих



в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Прежде всего для курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» создан электронный учебно-методический комплекс на основе мультимедийных технологий, который депонирован в депозитарном фонде сигнальных документов и зарегистрирован как документ научно-методического обеспечения высшего образования. Библиографическое описание и аннотация этого комплекса размещены на сайте БГУ в разделе «Депонирование БГУ» и опубликованы в «Журнале Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. № 3». Копия документа размещена в Электронной библиотеке БГУ по адресу: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304443>. Комплекс включает учебные, научные и методические материалы, методику изучения дисциплины средствами информационно-коммуникационных технологий и обеспечивает условия для осуществления эффективной учебной деятельности.

Важную роль в модернизации курса сыграл образовательный портал. На образовательном портале на базе, организованной в БГУ LMS Moodle, создан курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», который содержит общий блок, блок для чтения лекций и блок для ведения лабораторных занятий для каждого преподавателя. Каждый блок прежде всего несет информативный характер, представляя данные о преподавателе и различных методах взаимосвязи со студентами, ссылки на программы и необходимую литературу, различные базы данных, а также позволяет сделать текущие объявления. Широко использованы коммуникационные возможности системы, такие как чат, форум. Во время экзаменационной сессии в полном объеме использовался такой элемент курса, как тестирование. В целом этот образовательный ресурс позволил поддержать высокий уровень преподавания курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения».

Для более глубокого понимания студентами изучаемых ими классических математических тем и применения их для решения практических задач используются современные средства компьютерной математики. Применение компьютерной математики существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования, так как представляет совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач, включая символьные преобразования и вычисления с высокой степенью визуализации всех видов вычислений.

Системы компьютерной математики позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существе проблемы, оставляя в стороне технику классической математики, детали вычислительных методов и алгоритмических процедур, нюансы языков программирования и команд операционной системы.



Такое расширение роли инструментария математики и информатики в содержании математического образования может стать эффективным способом воплощения деятельностного подхода к обучению, расширения понимания роли математики как средства решения реальных практических задач.

Важной задачей представляется разработка студентами дифференциальных моделей, описывающих различные физические, биологические и экономические процессы. Возможность проведения студентами численных экспериментов, визуализация результатов, разработка и реализация тех или иных моделей повышают интерес студентов к учебному курсу, способствуют более глубокому пониманию изучаемого ими материала, позволяет пройти все этапы математического моделирования от построения математической модели до вычислительного эксперимента и анализа результатов.

Курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», имеющий дело с постановкой, исследованием и решением краевых задач для уравнений в частных производных, дополнен лабораторными занятиями с использованием математического пакета Wolfram Mathematica, являющемся на данный момент, по-видимому, наиболее мощным средством в своем классе программ и сочетающий в себе развитые графические функции, удобные средства программирования, позволяющий создавать и использовать процедуры и функции пользователя, имеющий развитые возможности по созданию и использованию динамических массивов и переменных [3]. Все это позволяет сосредоточиться не на программировании задач, а на ее физической и математической стороне. Пакет Wolfram Mathematica позволяет студентам для скорейшего усвоения теоретического материала использовать его графические возможности, кроме того, предоставляется возможность эффективно проиллюстрировать решение одномерных уравнений и систем уравнений в частных производных, а имеющийся специализированный инструментарий позволяет решать двумерные задачи математической физики в режиме графического интерфейса. Инструментарий пакета Wolfram Mathematica включает в себя готовые средства решения задач диффузии, теплопроводности, электростатики, строительной механики и других областей математической физики.

В частности на лабораторных работах по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» пакет Wolfram Mathematica используется для решения уравнений в частных производных методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций Plot и Manipulate при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка и визуализации решения с помощью функции Plot3D; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенциальных поверхностей электромагнитных полей.

Использование пакета Wolfram Mathematica повышает значимость курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» как инструмента математического моделирования и демонстрирует современные принципы в программировании сложных научно-технических задач.

Таким образом, включение реальных прикладных задач в курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» и использование технических и программных средств позволило, с одной стороны, разнообразить формы и методы обучения, способствующие прежде всего заинтересованности студентов в успешном освоении курса и высокому качеству получаемых знаний, с другой стороны, стимулировать студентов к проведению научных исследований, созданию инновационных проектов.

### **Библиографический список**

1. Корзюк В.И. Уравнения математической физики: учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2021.
2. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. М.: URSS, 2023.
3. Дайняк В.В., Козловская И.С., Чеб Е.С. Практикум по дифференциальным уравнениям в частных производных: методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ: в шести частях. Минск: БГУ, 2023. Ч. 1.

# О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

## ABOUT TEACHING MATHEMATICS IN A DISTANCE LEARNING ENVIRONMENT

В.А. Косачевский

V.A. Kosachevsky

*Математика, высшая математика преподавание математики, дистанционное обучение, электронные курсы, цифровизация образования.*

Рассматриваются условия преподавания высшей математики в режиме дистанционного обучения, различные сложности с применением информационно-коммуникационных технологий, пути решения возникающих проблем, способы оценивания усвоения теоретического и практического материала. Обращается внимание на тенденцию пересмотра традиционного курса высшей математики для инженерных вузов и замена его курсом математики. Указано на принципиальное отличие этих терминов и негативное влияние подмены понятий на качество подготовки высококвалифицированных специалистов.

*Mathematics, higher mathematics teaching mathematics; distance learning, e-courses, digitalization of education.*

The conditions of teaching higher mathematics in the distance learning mode, various difficulties with the use of information and communication technologies, ways to solve emerging problems, ways to assess the assimilation of theoretical and practical material are considered. Attention is drawn to the tendency to revise the traditional higher mathematics course for engineering universities and replace it with a mathematics course. It is pointed out the fundamental difference between these terms and the negative impact of substitution of concepts on the quality of training of highly qualified specialists.

Современная концепция высшего технического образования предполагает индивидуально-ориентированное обучение, соответствующее целям подготовки, определяемых как профессиональные требования, предъявляемые современным рынком труда к выпускникам технических университетов.

Цели обучения и подготовки высококвалифицированного технического специалиста трансформируются в соответствии с интересами и требованиями предприятий, нуждающихся в соответствующих специалистах. При этом основой формирования содержания образовательных программ остается государственный образовательный стандарт [1], обеспечивающий единство и полноту всей системы высшего технического образования в Российской Федерации.

Весной 2020 г. в связи с пандемией коронавируса проявились обстоятельства непреодолимой силы во многих сферах жизнедеятельности человека. При этом образовательный кластер продолжал выполнять свои обязательства по обучению в режиме нештатных ситуаций, во многом благодаря самоотверженной, без ссылок на личное время работе профессорско-преподавательского состава академии. Отметим, что, по оценкам коллег-преподавателей, объем работы увеличился примерно в два-три раза.

С 28 марта по 6 августа 2020 г., а затем с ноября 2020 г. с перерывами учебный процесс в Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского примерно до начала февраля 2021 официально проходил в дистанционном режиме. При реализации учебных программ возник ряд проблем, которые приходилось решать по мере их появления.

При изучении математических дисциплин в академии обычно используется методика смешанного обучения, то есть аудиторные занятия (лекции, практика, контрольные и лабораторные работы) проводятся, как правило, в сочетании с использованием электронных дистанционных консультаций, осуществляемых посредством электронной почты на курсовых компьютерах. Всегда существовала возможность задать вопрос преподавателю и получить его разъяснения в письменном виде. При очной форме обучения подобного рода возможности электронных консультаций, отправка дополнительных и персональных заданий использовались приблизительно на 5–7 %, в основном в качестве вспомогательного инструмента при освоении математических дисциплин, то есть для организации самостоятельной работы курсантов, размещения дополнительных материалов, а также дублирования лекционных и практических материалов, читаемых аудиторно. В период пандемии COVID-19 электронные курсы по различным дисциплинам использовались на все 100 %. И для преподавателей собственные электронные курсы, транслируемые на площадках Skype, Zoom и тому подобных и соответствующие рабочей программе учебной дисциплины, послужили основной формой работы при организации дистанционного обучения.

Положительную роль сыграло наличие библиотеки электронной учебной литературы, подготовленные в последние годы преподавателями кафедры математики серии электронных учебных пособий и методических указаний, а также задачников практически по всем математическим дисциплинам. Были подготовлены специальные электронные курсы лекций и практических заданий, которые при наступлении чрезвычайных обстоятельств и невозможности личных контактов преподавателей с аудиторией, как это произошло весной 2020 г., немедленно были задействованы, при этом преподавательскому составу удалось в целом сохранить контакты с аудиторией, хотя, конечно, взаимодействовать стало гораздо сложнее как в техническом, так и в психологическом плане.

Отметим, что созданные трудом преподавателей кафедры электронные курсы адаптированы под широкую аудиторию слушателей, содержат необходимый теоретический материал, подробное решение типовых задач, включают образцы вариантов контрольных мероприятий, полезные ссылки на открытые электронные ресурсы, методические рекомендации по каждой теме. Более того, современные возможности позволяют переводить текстовые файлы на любой язык, что актуально для иностранных курсантов. Тем не менее возникли некоторые проблемы.

*Во-первых*, главной проблемой дистанционного обучения стало отсутствие жесткого преподавательского контроля работы учащихся.

*Во-вторых*, поскольку наличие Интернета на территории академии жестко ограничивается ввиду специфики военно-учебных заведений, у курсантов не-

редко возникали перебои с сетью, и они не всегда могли качественно и вовремя получить необходимые задания и сдать уже выполненные работы для проверки в заранее оговоренные сроки.

Тяжелее всего пришлось иностранным курсантам, особенно тем из них, которые еще не успели преодолеть языковой барьер и оказались волею обстоятельств вне языковой среды обучения.

*В-третьих*, вследствие карантинных ограничений была во многих случаях утеряна курсантская общность, коммуникативные связи, способствующие взаимопомощи в выполнении заданий.

*В-четвертых*, многие курсанты в условиях дистанционного режима не сумели эффективно организовать свое время и сосредоточиться на активном выполнении полученных заданий. Известный математик Л.Д.Кудрявцев пишет [2]: «... изучение математики, как никакой другой науки, приучает учащегося работать систематически, последовательно и настойчиво: если не освоен предшествующий раздел, то, как правило, в математике нельзя разобраться в последующем».

Нелегко в этот сложный период пришлось и преподавателям: колоссальная нагрузка online и offline, ненормированный рабочий день, освоение различных видов информационно-коммуникационных технологий, ранее мало применявшихся на практике, недостаток технического оснащения при реализации учебного процесса в дистанционном режиме, а также дефицит свободного времени. Профессорско-преподавательскому составу пришлось проявить всю свою выдержку, гибкость, профессионализм, способность выдержать колоссальное напряжение. В частности, автору пришлось все лето, то есть в июне–июле 2020 г. руководить практическим выполнением зачетной курсовой работы по методам вычислений одним из курсов, насчитывающего большое число курсантов. Если учесть, что работа включала решение нелинейных и трансцендентных уравнений, а также численное интегрирование дифференциальных уравнений, становится понятен тот поистине гигантский объем проверочно-оценочной работы, протекавшей в режиме online. К этому стоит добавить то обстоятельство, что в этот период весь курс был в профилактических целях отправлен в отпуск, поэтому приходилось постоянно держать связь с курсантами, нередко принуждая расслабившихся в отпуске людей к своевременному представлению работы на проверку и переделке неверно решенных заданий.

Отметим, что помимо дистанционных курсов, размещенных на сайте академии, кафедре также удалось использовать различные платформы для проведения занятий online (Skype, Zoom и другие); создавались видеолекции, записывались подробные аудиокomentarии по решению задач. Контроль полученных знаний также проводился online. По итогам весеннего семестра 2019/2020 учебного года, в котором около 70 % времени обучение проходило дистанционно, в начале августа 2020 г. была проведена экзаменационная сессия.

Цифровизация всех сфер жизни современного общества безусловно расширяет возможности получения информации обучающимися, но без осознанного владения этой информацией оказывает отрицательный эффект.



Представляется очевидным, что без внимательного и компетентного руководства индивидуальной работой обучающихся, без обратной связи с ними невозможна качественная подготовка специалистов.

Работа в условиях нештатных ситуаций продемонстрировала несовершенство оценивания качества усвоения изучаемого материала учащимися вследствие отсутствия личного контакта между курсантом и преподавателем.

Второй период дистанционного обучения в ВКА длился примерно с октября 2020 г. по начало февраля 2021 г. Последствия работы в дистанционном режиме в полной мере еще предстоит оценить, но уже сейчас можно говорить о том, что успеваемость курсантов в зимней сессии 2021 г. резко и весьма ощутимо снизилась.

Таким образом, жизнь ставит задачу – совершенствовать дистанционный метод обучения и повышать его качество для нештатных ситуаций.

В связи с вышеизложенным хотелось бы привести некоторые наиболее четко сформулированные высказывания, принадлежащие опытному преподавателю доценту Южного федерального университета Н.Н. Бажанову, опубликованные в материалах X Всероссийской научно-методической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе» (Омск, октябрь 2020 г.) [3] по поводу происходящей в последние годы реструктуризации в высших учебных заведениях страны.

Далее по тексту: «...Совершенно незаметно из текстов государственных стандартов и в учебной нагрузке высшая математика превратилась просто в математику. Со временем появилась привычка к новому названию дисциплины, в котором, на взгляд автора, незаметно внедрены принципиальные новации: в высшем учебном заведении (вместо школы) нужно обучать сложению и делению дробей, логарифмированию и т.п. Высшая математика стала по существу редким факультативом «продвинутых» первокурсников, а не всеобщим безусловным требованием базовой подготовки специалистов. Прежде чем ответить на вопрос, хорошо это или плохо, автор считает правильным обозначить свою точку зрения на тотальную цифровизацию обучения в технических вузах вообще. В частности, при изучении высшей математики полный переход на online-технологии – это печальная необходимость и удел государств с неразвитой экономикой. Это – объективный признак бедности. Различают две основные области математики – чистую математику, в которой акцент делается на дедуктивные рассуждения, и прикладную математику... Термин «высшая», по мнению автора, определяет границу между математикой школьной и математикой вузовской...

1) следует вернуть в образовательные стандарты термин «высшая математика», как наиболее адекватно отражающий содержание передаваемых знаний;

2) формально установить четыре уровня (по количеству семестров на первых двух курсах обучения) высшей математики с правом выбора обучающимся своего предела познания (но не ниже первого – «начального»);

3) необходимые разделы для освоения базовых дисциплин конкретного направления (например, ряды Фурье и элементы ТФКП) студент в рамках формирования индивидуального направления обучения может изучить самостоятельно или в потоке соответствующего уровня...».



Похожие мысли высказывает и Е.В. Чайкина [4].

«...Цифровизация образования начала свое развитие достаточно давно, тем не менее, столкнувшись с пандемией, педагогическое сообщество оказалось неготовым сразу влиться в непривычный учебный процесс, потребовалось время для реорганизации учебного процесса в условиях пандемии и обучения педагогического состава...»

Согласно Концепции создания и развития единой системы дистанционного образования в России [5], принятой 31 мая 1995 г. Минобрнауки РФ, под дистанционным образованием понимается «комплекс образовательных услуг, предоставляемых широким слоям населения в стране и за рубежом (страны СНГ, Азия, Африка) с помощью специализированной информационно-образовательной среды на любом расстоянии от образовательного учреждения. Однако, как уже говорилось выше, современная концепция высшего технического образования предполагает индивидуально-ориентированное обучение, соответствующее целям подготовки специалистов. Здесь, как нам кажется, можно усмотреть определенное противоречие, которое приводит к мысли о том, что очный и дистанционный виды образования не вполне сопоставимы, и различия между ними оказывают существенное влияние на уровень образования, сильно разнящийся в обоих вариантах.

Е.С. Полат [6] определяет дистанционное обучение как самостоятельную форму обучения, при которой взаимодействие учителя и учащихся осуществляется на расстоянии и отражает все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения), реализуемые специфическими средствами интернет-технологий или других интерактивных технологий. Тем не менее в российских вузах дистанционное обучение не являлось приоритетным до настоящего момента.

В условиях удаленного обучения теряется та самая живая нить «преподаватель–студент», крайне необходимая не только для разъяснения материала, но зачастую и в качестве основного мотивирующего фактора. Ведь первокурсники не всегда представляют себе свою будущую специальность, не представляют, где и как могут работать по окончании выбранного ими факультета или вуза. Отсюда и вечные вопросы: «Зачем нам математика, физика?... и т.д.» Ответ на этот вопрос приходит только на старших курсах, или вообще на работе, если работают по специальности.

Главная воспитательная задача преподавателя математики – научить студента (курсанта) мыслить аналитически и логически, понимать суть математических и физических задач, их логику, связь с избранной специальностью. При дистанционном (ранее называвшемся заочным) обучении выполнение этой задачи осложняется или даже становится невозможным.

Тем не менее следует признать, что дистанционное обучение в экстренных ситуациях, когда личные контакты «студент–преподаватель» затруднены, либо когда необходимо в короткий срок обучить отдельным, нередко упрощенным научным методам большое количество слушателей, оправдано, поэтому дальнейшая разработка методики дистанционного обучения необходима.

## Библиографический список

1. Никифорова С.В., Дорофеева С.И. Дистанционное обучение в условиях нестандартных ситуаций // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе: материалы X Всероссийской научно-методической конференции. Омск, октябрь 2020.
2. Кудрявцев Л.Д. Избранные труды. Мысли о современной математике и ее преподавании. М.: Физматлит, 2008. – 434 с.
3. Бажанов Н.Н. Математика или высшая математика? // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе: материалы X Всероссийской научно-методической конференции. Омск, октябрь 2020.
4. Чайкина Е.В. Особенности обучения математике в техническом вузе в условиях дистанционного обучения // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе: материалы X Всероссийской научно-методической конференции. Омск, октябрь 2020.
5. Овсянников В.И., Густырь А.В. Введение в дистанционное образование: учебное пособие для системы повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов. М.: РИЦ «Альфа» МГОПУ им. М.А. Шолохова, 2001.
6. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В. Теория и практика дистанционного обучения: учебное пособие для вузов / под ред. Е.С. Полат. М.: Академия, 2004. С. 12.

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АВТОНОМНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМ И СТУДЕНТАМ

## ON THE USE OF THE CONCEPT «AUTONOMOUS RECURRENT SEQUENCE» WHEN TEACHING MATHEMATICS AT SCHOOLS AND UNIVERSITIES

С.В. Костин

S.V. Kostin

*Преподавание математики, числовая последовательность, рекуррентная последовательность, автономная последовательность.*

Обсуждается понятие «автономная рекуррентная последовательность». Отмечается полезность использования этого понятия при преподавании математики в школе и вузе. Обсуждается строение графа автономной рекуррентной последовательности. Рассматриваются конкретные задачи, при решении которых оказывается полезным изложенный материал.

*Teaching of mathematics, numerical sequence, recurrent sequence, autonomous sequence.*

The concept of «autonomous recurrent sequence» is discussed. The usefulness of using this concept when teaching mathematics at school and university is noted. The structure of an autonomous recurrent sequence graph is discussed. Specific problems are considered in which the presented material is useful in solving them.

**Ч**исловая последовательность – важный математический объект. С числовых последовательностей начинается изучение математического анализа и понятие «предел последовательности», в определении которого фигурируют три квантора (для любого... существует... для любого...), к огромному сожалению, для некоторых студентов становится «железным занавесом» на пути в математику. Да, конечно, с этим можно и нужно бороться. Я, например, при разъяснении понятия «предел последовательности» не устаю рисовать на доске полосу ширины  $2\varepsilon$  и очень подробно растолковываю студентам, что когда полоса сжимается (число  $\varepsilon$  уменьшается), то число  $N = N(\varepsilon)$ , как правило, увеличивается, но каким бы маленьким ни стало  $\varepsilon$ , для него обязательно найдется номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что все члены последовательности с номерами, большими  $N$ , попадают в полосу ширины  $2\varepsilon$  с центром в точке  $a$  (где  $a$  – предел последовательности).

Открытым текстом говорю студентам, что очень прошу их не бояться этого определения и что если бы понятие предела последовательности можно было сформулировать хотя бы немного проще, то это более простое определение уже давно было бы открыто человечеством и использовалось бы в учебном процессе.

Математика – среда, которая отторгает все лишнее и наносное и старается выбирать самые короткие и ясные пути к цели. Слишком сложная терминология и сложные обозначения (если они не связаны со сложностью самого изучаемого явления и могут быть заменены более простыми) никогда не «задерживаются» в математике. В этом смысле понятие «предел последовательности» – замечательный пример интуитивно ясного понятия, которое, к огромному сожалению, не имеет какого-либо другого более простого (и в то же время математически строго) определения. Если бы такое определение появилось, то я не сомневаюсь, что буквально на следующий день стандартное определение с тремя кванторами было бы всеми математиками «выброшено в корзину» и изучалось бы, возможно, только историками математики.

Однако числовые последовательности изучаются не только в математическом анализе. В последние годы раздел, посвященный числовым последовательностям, все чаще встречается в учебниках по дискретной математике. Правда, дискретная математика смотрит на них несколько под другим углом зрения, чем математический анализ. Наибольший интерес в дискретной математике представляют рекуррентно заданные последовательности [1].

Напомним, что рекуррентно заданная последовательность глубины  $k$  – это числовая последовательность, у которой  $n$ -й член является функцией  $k$  предыдущих членов и своего номера  $n$ :

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}, n). \quad (1)$$

Далее нас будут интересовать рекуррентные последовательности, у которых функция  $f$  не зависит явным образом от  $n$ , то есть рекуррентные последовательности вида

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}). \quad (2)$$

У таких последовательностей число  $x_n$  зависит от чисел  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}$ , но не зависит (во всяком случае, явным образом) от  $n$ .

К чему это приводит?

Мы можем ввести важное понятие «состояние последовательности на шаге  $n$ » ( $n > k$ ), понимая под этим состоянием набор чисел

$$\omega_n = (x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n). \quad (3)$$

Тогда «состояние последовательности на шаге  $n + 1$ » будет равно

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= (x_{n-k+2}, x_{n-k+3}, \dots, x_{n+1}) = \\ &= (x_{n-k+2}, x_{n-k+3}, \dots, f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1})). \end{aligned} \quad (4)$$

Мы видим, что «состояние последовательности на шаге  $n + 1$ » является определенной функцией «состояния последовательности на шаге  $n$ », то есть существует функция  $g$  такая, что

$$\omega_{n+1} = g(\omega_n). \quad (5)$$

С учетом сказанного выше, по нашему мнению, рекуррентную последовательность (2) уместно называть *автономной* последовательностью (по аналогии с терминами «автономная система дифференциальных уравнений» и «автономный автомат»). В самом деле, если в функции (2) нет явной зависимости от номера  $n$  (аналогом которого в случае системы дифференциальных уравнений является

время  $t$ , а в случае автомата – номер такта), то согласно (5) каждое следующее «состояние последовательности» зависит только от предыдущего «состояния последовательности».

Если множество значений  $X$ , которые может принимать рекуррентная последовательность  $(x_n)$ , по какой-либо причине конечно, то, очевидно, конечно и множество возможных состояний (3) (поскольку это множество равно  $\Omega = X^k$ ). Поэтому рано или поздно повторится то состояние, которое уже было. Это означает, что (возможно, после определенного предпериода) последовательность состояний становится периодической. На языке теории графов это означает, что графом отображения  $g$  на множестве  $\Omega$  является один цикл или объединение нескольких циклов с добавлением, возможно, нескольких цепей-предпериодов (каждая из этих цепей заканчивается на вершине какого-либо цикла).

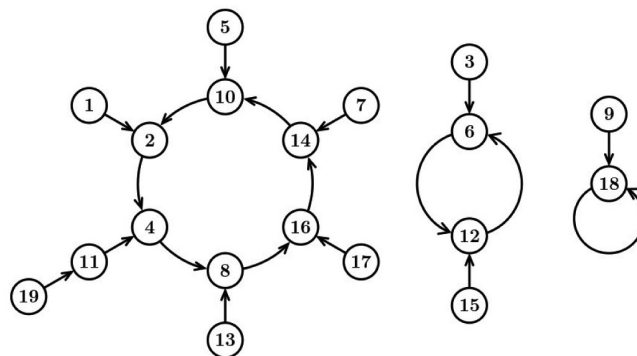
Заметим, что если  $k = 1$  (рекуррентная последовательность глубины 1), то состояние  $\omega_n$  мы отождествляем с числом  $x_n$ , множество  $\Omega$  – с множеством  $X$ , а функцию  $g$  – с функцией  $f$ .

Рассмотрим несколько задач, посвященных автономным рекуррентным последовательностям. Все задачи составлены автором данной статьи. Данную статью можно рассматривать как продолжение статей автора [2; 3].

**Задача 1.** В последовательности натуральных чисел  $(x_n)$  первый член  $x_1$  меньше  $10^{10}$  и при всех  $n \geq 2$  число  $x_n$  равно сумме цифр в десятичной записи числа  $11x_{n-1}$ . Доказать, что либо  $x_{10} = 10$ , либо число  $x_{10}$  является делителем числа 1008.

**Решение.** Символом  $S(a)$  будем обозначать сумму цифр в десятичной записи натурального числа  $a$ . Введем в рассмотрение функцию  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такую, что  $(\forall x \in \mathbb{N}): f(x) = S(11x)$ . Докажем, что функция  $f$  отображает множество  $A = [1..19] = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$  в себя, то есть  $(\forall x \in A): f(x) \in A$ . Действительно, если  $x = 19$ , то  $f(x) = f(19) = S(11 \cdot 19) = S(209) = 2 + 0 + 9 = 11$ , а если  $x \leq 18$ , то  $11x \leq 198$  и  $f(x) = S(11x) \leq S(198) = 1 + 9 + 8 = 18$ .

Итак, множество  $A$  является инвариантным множеством при действии отображения  $f$ . Построим граф сужения  $f|_A$  отображения  $f$  на  $A$ :



Докажем, что  $x_5 \in A$ . Имеем:  $x_1 < 10^{10} \Rightarrow 11x_1 < 11 \underbrace{000\dots0}_{10^{10} \text{ нулей}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = S(11x_1) \leq 9 \cdot (10^{10} + 1) = 90\,000\,000\,009 \Rightarrow 11x_2 \leq 990\,000\,000\,099 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x_3 = S(11x_2) \leq 8 + 11 \cdot 9 = 107 \Rightarrow 11x_3 \leq 1177 \Rightarrow x_4 = S(11x_3) \leq 3 \cdot 9 = 27 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 11x_4 \leq 297 \Rightarrow x_5 = S(11x_4) \leq 1 + 2 \cdot 9 = 19.$

Мы доказали, что  $x_5 \in A$ . Из приведенного выше графа видно, что каждая цепь-предпериод имеет длину не более двух. Поэтому из включения  $x_5 \in A$  вытекает включение  $x_n \in B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$  при всех  $n \geq 7$ . Для завершения доказательства осталось заметить, что  $10 \geq 7$  и что все элементы множества  $B$ , кроме числа 10, являются делителями числа 1008.

Утверждение доказано.

**Задача 2.** Рассмотрим следующую рекуррентную последовательность:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4; \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}, \quad \text{если } n \geq 4. \quad (6)$$

Доказать, что для любого натурального числа  $N$  в последовательности  $(x_n)$  найдется число, которое делится на  $N$ .

**Решение.** Символом  $\text{res}_b(a)$  будем обозначать остаток от деления целого числа  $a$  на натуральное число  $b$ .

Перепишем рекуррентное соотношение (6) в виде

$$x_n = x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}. \quad (7)$$

Используя равенство (7), мы можем продолжить последовательность  $(x_n)$  «влево» (для  $n = 0, -1, -2, \dots$ ):  $x_0 = x_3 - x_2 - x_1 = 4 - 3 - 2 = -1$ ,

$$x_{-1} = x_2 - x_1 - x_0 = 3 - 2 - (-1) = 2, \quad x_{-2} = x_1 - x_0 - x_{-1} = 2 - (-1) - 2 = 1,$$

$$x_{-3} = x_0 - x_{-1} - x_{-2} = -1 - 2 - 1 = -4, \quad x_{-4} = x_{-1} - x_{-2} - x_{-3} = 2 - 1 - (-4) = 5,$$

$$x_{-5} = x_{-2} - x_{-3} - x_{-4} = 1 - (-4) - 5 = 0, \quad \dots$$

Последнее равенство выделим особо:

$$x_{-5} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим двустороннюю последовательность (определенную при всех  $n \in \mathbf{Z}$ )

$$y_n = \text{res}_N(x_n). \quad (9)$$

Все члены последовательности  $(y_n)$  принадлежат отрезку целых чисел  $[0..N-1] = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Кроме того, последовательность  $(y_n)$  удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$y_n = \text{res}_N(y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3}); \quad (10)$$

$$y_n = \text{res}_N(y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1}). \quad (11)$$

которые позволяют однозначно продлевать эту последовательность как «вправо» (в сторону больших  $n$ ), так и «влево» (в сторону меньших  $n$ ).

Пусть  $\omega_n = (y_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$  – состояние последовательности  $(y_n)$  на шаге  $n$ . Тогда состояние  $\omega_{n+1}$  последовательности  $(y_n)$  на шаге  $n+1$  однозначно определяется ее состоянием на шаге  $n$ , то есть

$$\omega_{n+1} = g(\omega_n). \quad (12)$$

Множество возможных состояний последовательности  $(y_n)$  представляет собой декартов куб  $\Omega = [0..N-1]^3$  и состоит из  $|\Omega| = N^3$  элементов.

Поскольку множество возможных состояний последовательности  $(y_n)$  конечно, то рано или поздно повторится состояние, которое ранее уже было, то есть рано или поздно произойдет выход на период.



Но сейчас имеется важное отличие от задачи 1, которое состоит в том, что в силу соотношения (11) последовательность  $(y_n)$  однозначно продлевается не только «вправо», но и «влево». Отображение конечного множества в себя, при котором каждый элемент имеет ровно один прообраз, является биекцией. Поэтому отображение  $g$  является биекцией (взаимно однозначным отображением) множества  $\Omega$  на себя. На языке теории графов это означает, что граф отображения  $g$  на множестве  $\Omega$  представляет собой либо один цикл, либо объединение нескольких циклов (на этот раз уже без подходящих к ним цепей-предпериодов!).

Пусть  $T$  – длина цикла, проходящего через состояние  $\omega_3 = (y_1, y_2, y_3)$ . Тогда последовательность  $(y_n)$  является периодической с периодом  $T$ . Поэтому

$$y_{-5+T} = y_{-5} = \text{res}_N(x_{-5}) = \text{res}_N(0) = 0. \quad (13)$$

Поскольку  $y_{-5+T} = 0$ , то это означает, что число  $x_{-5+T}$  делится на  $N$ .

Итак, мы доказали, что для любого натурального числа  $N$  в последовательности  $(x_n)$  найдется число (с натуральным номером  $n \in \mathbb{N}$ ), которое делится на  $N$ .

**Задача 3.** Рассмотрим следующую рекуррентную последовательность:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5; \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}, \quad \text{если } n \geq 4. \quad (14)$$

Верно ли, что для любого натурального числа  $N$  в последовательности  $(x_n)$  найдется число, которое делится на  $N$ ?

**Решение.** Ответ отрицателен. Докажем это. Рассмотрим последовательность

$$y_n = \text{res}_9(x_n). \quad (15)$$

Последовательность  $(y_n)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_n = \text{res}_9(y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3}). \quad (16)$$

Пользуясь этим соотношением, находим члены последовательности  $(y_n)$ :

$$\begin{aligned} & \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, 3, 3, 2, 8, 4, 5, 8, 8, 3, 1, 3, 7, 2, 3, 3, 8, 5, 7, \\ & 2, 5, 5, 3, 4, 3, 1, 8, 3, 3, 5, 2, 1, 8, 2, 2, 3, 7, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее числа будут повторяться (поскольку повторилась тройка 3, 4, 5).

Мы видим, что ни одно из чисел  $y_n$  не равно нулю. Это означает, что среди членов последовательности  $(x_n)$  нет чисел, делящихся на 9.

Утверждение доказано.

Мы разобрали всего три задачи, но даже они, по нашему мнению, очень убедительно показывают, что понятия «автономная рекуррентная последовательность» и «граф автономной рекуррентной последовательности» являются весьма полезными и плодотворными. Хотелось бы порекомендовать преподавателям школ и вузов активнее использовать эти понятия в учебном процессе. При этом, естественно, надо четко понимать, что сами прилагательные «рекуррентный» и «автономный» относятся не столько к самой числовой последовательности, сколько к способу ее задания.

Автор надеется, что данная статья заинтересовала читателей, и будет благодарен за любые комментарии и замечания по затронутым нами вопросам.

## Библиографический список

1. Деза Е.И., Котова Л.В. Рекуррентные числовые последовательности: теория и приложения // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 3. С. 77–101.
2. Костин С.В. О методах доказательства свойств чисел Фибоначчи // Математика в высшем образовании. 2016. № 14. С. 25–42.
3. Костин С.В. Об изучении числовых последовательностей в школе и в вузе // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Брянск, 7–9 октября 2021 г.). Брянск: Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, 2021. С. 351–357.

# ПРИМЕНЕНИЕ КОНТЕКСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

## APPLICATION OF A CONTEXTUAL APPROACH TO THE STUDY OF HIGHER MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF DIGITALIZATION

И.С. Кузнецова, Т.Г. Никишина,  
И.В. Цветкова

I.S. Kuznetsova, T.N. Nikishina,  
I.V. Tsvetkova

*Контекстный подход, мотивация к обучению, высшая математика, цифровизация образования, дашборды.*

В статье рассмотрено применение контекстного подхода в процессе изучения высшей математики в техническом университете. Продемонстрированы возможности использования цифровых технологий в рамках настоящего дидактического подхода, приведены примеры межпредметной интеграции содержания дисциплин «Высшая математика» и «Информатика».

*Contextual approach, learning motivation, higher mathematics, digitalization of education, dashboards.*

The article considers the application of the contextual approach in the process of studying higher mathematics at the technical university. The possibilities of using digital technologies in the framework of the didactic approach are demonstrated, examples of interdisciplinary integration of the content of the disciplines «Higher Mathematics» and «Computer Science» are given.

**Д**еятельность современного педагога, ответственного за формирование математической компетентности обучающихся, протекает в объективном общероссийском и локальном университетском контекстах: компактная позиция математических дисциплин в учебных планах, преимущественно исключительно в рамках первого года обучения; минимальное присутствие прикладных дисциплин, развивающих нужные компетенции, в том и числе в формате факультативных; фактическая недостаточная математическая подготовка выпускников школы наряду с прочно сформированными психологическими барьерами («я, возможно, гуманитарий», «математика крайне сложна»), препятствующими дальнейшему успешному освоению математических дисциплин, и др.

При этом, не выходя за рамки выделенного временного ресурса, педагог должен обеспечить решение базовых дидактических задач в рамках учебной дисциплины: запустить процессы педагогического менеджмента в учебной группе, осуществить дифференциацию обучающихся с целью дальнейшего выстраивания педагогической стратегии, создать личностно ориентированные линии «педагог – обучающийся», передать собственно контент, сопровождая мониторингом его усвоения и контролируя ход процесса формирования требуемой компетенции.

В подобной ситуации незыблемой опорой для педагога должна стать актуальная дидактическая платформа, позволяющая с максимальной эффективностью решать имеющиеся дидактические задачи, а союзником и партнером в процессе обучения должен стать сам студент.

Повысить мотивацию и, как следствие, простимулировать познавательную активность обучающихся [1], сопрягая осознанные цели и направление развития студента с учебными целями и вектором формирования математической компетентности в рамках дисциплины, позволяет получивший в последнее время широкое распространение в силу своей высокой эффективности контекстный подход.

Дидактическая сущность предлагаемого авторами к активному использованию в педагогике, в том числе инженерной, контекстного обучения состоит в следующем.

Центральной дефиницией контекстного подхода является понятие контекста. Автор подхода (А.А. Вербицкий) определяет контекст как систему условий жизни и деятельности человека, которые оказывают влияние на восприятие, понимание и преобразование им конкретной ситуации [2].

Условием формирования устойчивого дидактического партнерства «педагог – обучающийся» и повышения познавательной активности обучающихся в рамках математических дисциплин является наполнение учебной деятельности студентов личностными смыслами, что становится возможным при погружении обучающихся в разнообразные контексты, для интересующей нас дидактической ситуации – в будущие профессиональные контексты или симитированные условия, близкие к ним.

В модели контекстного обучения автор выделяет три основных вида деятельности: учебную академическую деятельность (лекции, семинары и т.п.), квази-профессиональную (деятельностное погружение в практико-ориентированный контент, например, в формате факультативных дисциплин прикладного характера) и учебно-профессиональную (примером формы таковой может выступать практическая подготовка обучающихся).

Каждому виду деятельности автор сопоставляет обучающую модель: семиотическую (с опорой на переработку вербальных или знаковых текстов), имитационную (выход за рамки знаковой информации, погружение в профессиональный контекст), социальную (с использованием коллективных форм работы) [2].

В настоящее время педагогическое сообщество высшей школы активно применяет контекстный подход, обогащая формы занятий контекстного типа в рамках отдельных дисциплин [3].

Авторами статьи проводится педагогическая поисково-экспериментальная деятельность по применению контекстного подхода с опорой на междисциплинарные связи в рамках дисциплин «Высшая математика» и «Информатика». Подобное педагогическое конструирование становится возможным ввиду наличия определенной сопряженности при изучении указанных дисциплин (изучаются в ходе первого года обучения в рамках одного направления подготовки). При этом дисциплина «Высшая математика» выступает основой для формирования

математических компетенций, а «Информатика» играет более сложную роль, помимо формирования компетенций, связанных с информационной грамотностью, дополнительно неся нагрузку по созданию условий для вовлечения обучающихся в квазипрофессиональную деятельность, соответствующую решению дидактических задач дисциплины «Высшая математика».

Следует отметить, что контекстные формы проведения занятий в рамках собственно дисциплины «Высшая математика» также не игнорируются авторами, например, проведение занятий лекционного типа с внедрением элементов создания затруднений, в процессе устранения которых происходит погружение в квазипрофессиональную деятельность.

В качестве примера применения социальной модели практикуется поддержание диалогического общения, использование коллективных и фронтальных форм работы на лекционном занятии. При этом содержательное наполнение при использовании подобных форм зачастую выходит за рамки конкретной учебной темы, а с макропозиций демонстрирует взаимосвязь разделов математики, что позволяет студенту увидеть логико-дидактический каркас дисциплины, существенно снижая барьеры усвоения.

Приведем конкретный пример использования междисциплинарных связей в русле контекстного подхода. При изучении дисциплины «Высшая математика» традиционно одним из первых разделов является раздел «Элементы линейной алгебры». Освоение раздела существенных затруднений у студентов не вызывает, однако интенсивное решение тренировочных типовых задач перенасыщено техниками «ручных» расчетов (например, вычисление определителей порядка выше третьего, нахождение обратной матрицы, решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и др.), что снижает мотивацию «новичков» к изучению дисциплины, требуя определенного «заземления» и прикладных иллюстраций. Демонстрация типовых практических примеров, например, экономического характера, не приводит к положительному эффекту. Требуется временной ресурс на погружение в имитационную деятельность.

«Спасательным кругом» становится использование возможностей цифровых технологий и ресурсов дисциплины «Информатика». Так, при изучении линейных операций над матрицами, а также операции транспонирования используется кейс построения бюджета движения денежных средств компании с использованием инструментария электронных таблиц.

Обучающимся предоставляются данные в матричной форме (матрицы, отражающие поквартальные бюджеты административных расходов, коммерческих расходов, накладных расходов, бюджет затрат на прямой труд и материалы, бюджет продаж).

Используя матричные операции, обучающиеся строят график поступления денежных средств и собирают поэлементно матрицу бюджета движения денежных средств (поступление денежных средств от основной деятельности, выплаты денежных средств по основной деятельности, денежные потоки по инвестиционной и финансовой деятельности; а также учитывают исходную вектор-строку, отражающую остаток средств на начало бюджетного периода).

В ходе сборки бюджета дополнительно отрабатывается операция транспонирования. Обучающиеся наглядно видят разнородность форматов исходных данных и принимают решение относительно допустимой размерности формируемых матриц, обеспечивающих существование соответствующих матриц-сумм и разностей.

По завершении сборки матричного бюджета целенаправленно выполняется переход от индивидуальной к групповой форме работы (применение социальной модели) с использованием актуальных технологий интеллектуального анализа и визуализации данных – построение тематического дашборда.

Дашборды являются современным аналитическим инструментом, позволяющим эффективно визуализировать тенденции и предварять управленческие решения. Умение строить и использовать дашборды в профессиональной практике на сегодняшний день является актуальной самостоятельной цифровой компетенцией и востребовано на рынке труда, являясь конкретным примером запроса работодателей.

Реализация дашбордов возможна с помощью разнообразных BI-решений, однако потенциал электронных таблиц позволяет составить серьезную конкуренцию специализированным BI-пакетам.

Обучающимся в ходе выполнения лабораторных работ предлагается на выбор набор метрик, которые могут быть визуализированы на дашборде, например, «ЧДДС от основной деятельности», «Выручка от реализации», «Структура коммерческих расходов» и др.

Каждая из учебных групп проектирует, формирует и затем представляет (защищает) свой вариант дашборда. При этом с точки зрения дисциплины «Информатика» естественным образом решаются и собственные учебные задачи – формируются навыки построения графиков, диаграмм, сводных таблиц и срезов данных.

Резюмируя изложенное, авторы считают, что контекстный подход имеет значительный потенциал применения при изучении математических дисциплин в высшей школе как в рамках дисциплинарного, так и междисциплинарного подходов.

### **Библиографический список**

1. Голованова М.М., Шепилова В.А. Мотивационный компонент методики в профессиональном обучении дизайнеров // Мода и дизайн: исторический опыт – новые технологии: материалы Региональной научно-практической конференции. Грозный, 27 ноября 2020 года. Махачкала: Чеченский государственный педагогический университет; ИП Овчинников Михаил Артурович (Типография Алеф), 2020. С. 148–154.
2. Вербицкий А.А., Калашников В.Г. Категория «контекст» в психологии и педагогике: монография. М.: Логос, 2010. 300 с.
3. Бирюкова Н.В. Методика контекстного обучения непрофильным дисциплинам в вузе на примере преподавания математики: учебно-методическое пособие. Тюмень: Государственный аграрный университет Северного Зауралья, 2023. 90 с.



# МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

## A MODEL FOR THE FORMATION OF FINANCIAL LITERACY OF STUDENTS IN GRADES 5–6 IN MATHEMATICS LESSONS

Ю.Д. Куликова

Yu.D. Kulikova

*Финансовая грамотность, финансовая компетентность, модель формирования, единая рамка компетенций.*

В статье предложена модель формирования финансовой грамотности на уроках математики в 5–6 классах. Данная модель основана на максимальном вовлечении подростков в экономические процессы и призвана продемонстрировать прикладной потенциал математики и применимость полученных математических знаний за пределами образовательной среды.

*Financial literacy, financial competence, model of formation, unified competence framework.*

The article proposes a model for the formation of financial literacy on mathematics lessons in grades 5–6 based on the life experience of teens. This model is based on the maximum involvement of teenagers in economic processes and is designed to demonstrate the applied potential of mathematics and the applicability of the acquired mathematical knowledge outside the educational environment.

**Н**есмотря на растущий интерес к вопросу формирования финансовой грамотности у населения со стороны государства, на сегодняшний день отсутствует единый подход к определению понятия финансовой грамотности и способам ее формирования.

В соответствии с новым поколением федеральных государственных образовательных стандартов в учебные курсы общеобразовательных школ с 01 сентября 2022 г. были введены курсы по повышению финансовой грамотности, которые в начальной школе изучаются на уроках математики и окружающего мира, а с 5 по 9 класс на уроках обществознания, математики и географии, с 01 сентября 2023 г. курсы финансовой грамотности включены в курс экономики для 10–11 классов. В соответствии с ФГОС формирование универсальных учебных действий на уроках математики должно обеспечивать формирование знаний и навыков в области финансовой грамотности и устойчивого развития общества, включая умение решать задачи разных типов: на проценты, доли и части, движение, работу, цену товаров и стоимость покупок и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами [1].

Внедрение курсов финансовой грамотности в общеобразовательные программы выявило дефицит квалифицированных педагогических кадров по данному направлению и отсутствие методической базы, соответствующей возрасту обучающихся. Несмотря на существующие учебники по финансовой грамотности, например авторов Ю.Н. Корлюговой и А.В. Половниковой [2], Н.П. Моторо [3],

Г.К. Муравин, О.В. Муравина [4] и др., большинство педагогов используют только базовые задания из учебников по математике, а специализированные учебные пособия используют педагоги, преподающие факультативные курсы по финансовой грамотности. В рамках данного исследования в профессиональном сообществе был проведен опрос педагогов по математике, как они реализуют требования новых ФГОС по освоению финансовой грамотности на уроках математики. По данным опроса, 33 % респондентов пользуются специальными учебниками и ведут соответствующий учебный курс; 52 % опрошенных пользуются предложенными заданиями с экономическим содержанием в обычных учебниках; 10 % находят дополнительный материал в Интернете; 5 % испытывают трудности с подбором материала.

Таким образом, 98 % педагогов испытывают затруднения по органичному включению уроков по финансовой грамотности в предметную область математики в соответствии с учебной программой. На сегодняшний день при обучении математике перед педагогами стоит серьезная проблема по самостоятельному поиску из различных источников и внедрению тех или иных теоретических разделов, справочных материалов, кейсов и т.д. Также сохраняет свою актуальность вопрос разграничения теоретического материала по финансовой грамотности между предметными областями обществознания, математики и географии в 5–6 классах.

Проведенное нами исследование [5] показывает, что значительная часть учебников по математике для 5–6 классов не предусматривает в своей структуре органично внедренных теоретических блоков обучения финансовой грамотности, ограничиваясь в лучшем случае увеличением количества практических задач на расчет цен, стоимости или процентов. Достижение эффективности обучения финансовой грамотности, на наш взгляд, не может быть осуществлено лишь внедрением большего количества практико-ориентированных задач экономического характера, так как они не способны в полной мере продемонстрировать обучающимся возможность применения данных навыков в повседневной жизни.

Несмотря на высокий уровень интереса к вопросу повышения финансовой грамотности не только со стороны исследователей, но и со стороны государства, сохраняется несоответствие теоретического наполнения дидактическим потребностям и отсутствие достаточно результативных методик, зачастую научный подход к организации обучения финансовой грамотности не учитывается вовсе, а предложенные в учебных пособиях задания не способны в полной мере удовлетворить потребности по развитию активного мышления, выработке самостоятельных творческих решений, включения подростков в экономическую повседневность с опорой на их личный опыт.

Под финансовой грамотностью обучающихся 5–6 классов будем понимать набор навыков, знаний и установок по принятию наиболее эффективных финансовых решений в повседневной жизни. Для разработки системы взаимосвязанных мер, призванных усовершенствовать формирование финансовой грамотности обучающихся 5–6 классов, необходима новая педагогическая модель.

Нами предложена модель формирования финансовой грамотности обучающихся 5–6 классов на уроках математики (рис.).

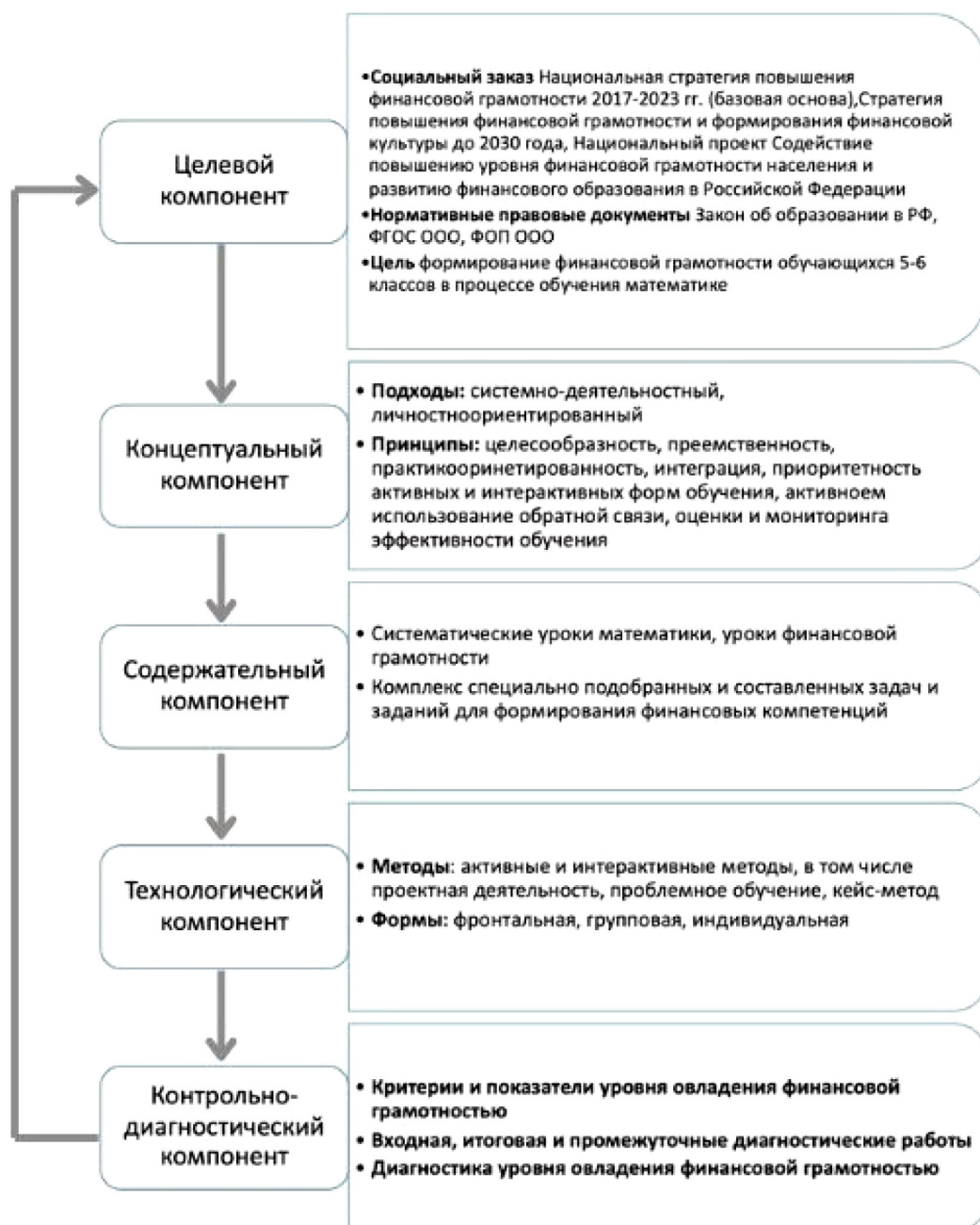


Рис. Модель формирования финансовой грамотности обучающихся 5–6 классов в процессе обучения математике

Модель ориентирована на положительную динамику сформированности финансовой грамотности, если:

Целевой компонент соответствует социальному заказу общества в виде потребности в финансово образованном гражданине, а также Закону об образовании, ФГОС и ФОП ООО.

Концептуальный компонент содержит совокупность научных подходов (системно-деятельностный, личностно ориентированный, задачный), определенных как наиболее релевантных для целей исследования, и определен принципами целесообразности, преемственности, приоритетности активных и интерактивных форм обучения при обучении финансовой грамотности обучающихся в рамках предметной области математика.

Содержательный компонент включает: в себя систематические уроки математики и включенные в предметную область математика уроки финансовой грамотности. Содержание учебных материалов должно определяться исходя из целей и потребностей личности, общества и государства, то есть определение содержательного компонента должно учитывать требование всех остальных компонентов методической модели.

Технологический компонент является связующим компонентом между целью, содержанием обучения и результатом. Методы обучения объясняют суть учебного взаимодействия. Задания, разработанные для мониторинга финансовой грамотности, акцентируют внимание на развитии индивидуальных умений школьников, которые будут способствовать формированию финансовой грамотности. Формирование финансовой грамотности на уроках математики должно происходить с использованием контекстных задач с открытым решением, кейсов и ситуаций как инструмента формирования компонентов финансовой грамотности, обеспечивающих не только привитие набора финансовых знаний, но и развитие гибкости финансового мышления, выходящего за пределы учебного процесса.

Контрольно-диагностический компонент предполагает диагностику уровня овладения финансовой грамотностью в соответствии с критериями и показателями уровней сформированности финансовой грамотности и позволяет отображать эффективность процесса формирования.

Особенность разработанной нами модели заключается в органичном включении теоретического наполнения и интерактивных форм обучения финансовой грамотности в предметную область «Математика» в 5–6 классах. Предлагаемая модель была апробирована в течение 2022–2023 и 2023–2024 учебных годов в 5 и 6 классах и показала существенные положительные результаты в сравнении с образовательными результатами обучающихся, которые обучались по типовым учебным пособиям по математике.

## **Библиографический список**

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-000/> (дата обращения: 05.10.2024).
2. Корлюгова Ю.Н., Половникова А.В. Финансовая грамотность: методические рекомендации для учителя. 5–7 классы. М.: ВАКО, 2018. 240 с.
3. Моторо Н.П., Новозилова Н.В., Шалашова М.М. Основы финансовой грамотности: в трех томах. М., 2019. Т. 2. 98 с.
4. Муравин Г.К., Муравина О.В. Сборник специальных модулей по финансовой грамотности для УМК по математике 5 класса. М.: Дрофа, 2017. 42 с.
5. Куликова Ю.Д. Анализ эффективности программ формирования финансовой грамотности обучающихся общеобразовательной школы // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2024. № 66 (4). С. 101–113.

# ЦИФРОВОЙ РАБОЧИЙ ЛИСТ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## DIGITAL WORKSHEET AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL LITERACY

Е.М. Лапшина, О.М. Кечина

E.M. Lapshina, O.M. Kechina

*Цифровой рабочий лист, математическая грамотность, числовая грамотность, математическое образование, методика математики, задачи прикладного характера, интерактивные средства обучения.*

В статье раскрываются достоинства и недостатки использования цифрового рабочего листа в качестве средства развития математической грамотности. Рассматриваются некоторые российские и иностранные сервисы для их разработки, показано на примере темы: «Решение задач по планированию бюджета», изучаемой в 5 классе, как можно использовать платформу Quizizz для составления интерактивного листа.

*Digital worksheet, mathematical literacy, numerical literacy, mathematical education, mathematics methodology, text problems, applied tasks.*

The article reveals the advantages and disadvantages of using a digital worksheet as a means of developing mathematical literacy. Some Russian and foreign services for their development are considered, and it is shown by the example of the topic: “Solving budget planning tasks”, studied in 5th grade, how you can use the Quizizz platform to compile an interactive worksheet.

**Р**азвитие математической грамотности является важной частью образовательного процесса, так как влияет на умение анализировать информацию, оценивать риски, планировать бюджет на основе математических знаний. Иногда математическую грамотность называют числовой, понимают под ней способность человека мыслить математически, формулировать, применять математику для решения задач в разнообразных практических контекстах [2]. Из определения следует, что уровень сформированности математической грамотности влияет на способность учеников решать задачи прикладного характера.

Одним из эффективных средств развития числовой грамотности является цифровой рабочий лист. Это такое интерактивное средство организации учебного процесса с использованием интернет-сервисов, которое мы можем использовать во многих ситуациях [1; 3]:

- 1) для работы на уроке (самостоятельной или фронтальной);
- 2) для домашней работы;
- 3) для проведения внеурочных мероприятий;
- 4) для подготовки к государственной итоговой аттестации;
- 5) как инструмент дистанционной поддержки школьника;
- 6) в случае переноса уроков в дистанционный формат.



Как и для любых других средств обучения, для цифровых рабочих листов можно выделить достоинства и недостатки. Рассмотрим, какие есть преимущества их использования.

1. Возможность у обучающихся подобрать наиболее подходящий темп выполнения работы.

2. Формирование у учеников навыков самостоятельной работы, самоанализа и рефлексии.

3. Повышение интереса к учебному процессу за счет использования интернет-ресурсов, мультимедийных средств, яркого дизайна сервисов, необычных форм выполнения заданий.

4. Развитие у обучающихся навыков работы с интернет-ресурсами.

5. Ученики получают возможность свободно использовать любые источники информации (как бумажных, так и интернет-источников).

6. Возможность включения в учебный процесс заданий, отсутствующих в учебнике (задания разного уровня сложности, задания с разными способами кодирования информации).

7. Учитель может использовать цифровой рабочий лист на каждом этапе урока в зависимости от тех дидактических целей, которые он ставит.

Выделим недостатки использования интерактивных рабочих листов.

1. Трата времени на разработку и оформление рабочего листа преподавателем.

2. Препятой к использованию некоторых сайтов для составления цифровых рабочих листов становится языковой барьер из-за отсутствия русскоязычной версии.

3. Сложность в понимании интерфейса сайта и конструировании интерактивных заданий.

Перечислим российские и зарубежные сервисы по созданию интерактивных рабочих листов: FlikTop, Interacty, Core, LiveWorksheets, Teacher Made, Topworksheets, Wizer, Formative [1; 2; 4].

Приведем пример использования платформы Quizizz для составления цифрового рабочего листа на тему: «Решение задач по планированию бюджета». На рис. 1 видно, что данный сервис дает возможность включить в рабочий лист видеоматериал и создать вопросы, на которые нужно ответить после того, как пройдет установленное количество времени с момента запуска ролика.



Рис. 1. Видеоматериал в рабочем листе



На рис. 2 представлено задание-опрос. Сервис позволяет после отведенного времени увидеть статистику ответов учеников, на его основе скорректировать их знания и констатировать уровень освоения материала.

Что из перечисленного является источником доходов в семье?

Select all correct options (MSQ)

- ЗП папы 50 000 рублей.
- Оплата коммунальных услуг
- Плата за обучение дочери
- Накопления в банке
- Пенсия бабушки

Рис. 2. Задание-опрос

На рис. 3 – тестовое задание, для решения которого обучающимся необходимо выполнить ряд подсчетов и проанализировать результаты. В заданиях этого типа можно устанавливать только один верный ответ или несколько, если это требуется.

Выберите правильный ответ. Если вам дают на карманные расходы 20 рублей в день, а вы половину откладываете в копилку, то через 30 дней вы сможете купить:

- 20 порций мороженого по 35 рублей
- 4 куклы по 200 рублей
- 3 машинки по 100 рублей
- 10 шоколадок по 40 рублей

Рис. 3. Задание тестового типа

На рис. 4 представлено задание типа бланк. В сервисе Quizizz можно добавлять к вопросам рисунки, что позволяет сделать их более красочными, информативными, доступными для понимания. Также можно менять поле для ответа, вместо клеток для отдельных букв или цифр устанавливается строка для полного ответа.

Чай	Упаковка	Цена упаковки
Чёрный	100 г	85 руб.
Зелёный	500 г	460 руб.
Чёрный с бергамотом	200 г	162 руб.
Чёрный с жасмином	250 г	210 руб.

В магазине продаётся несколько сортов чая в разных упаковках и по различной цене. Нужно купить 1 кг чая одного сорта. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая покупка?

Введите свой ответ в поля

Рис. 4. Задание типа бланк

Другие типы заданий, которые можно использовать на платформе Quizizz:

- 1) задание на изменение порядка;
- 2) задание на соответствие;
- 3) задание на перетаскивание объектов;
- 4) задание на маркировку;
- 5) задание на работу с графиком;
- 6) задание на категоризацию;
- 7) задание с возможностью рисования;
- 8) открытое задание;
- 9) задание с видеоответом;
- 10) задание с аудиоответом.

На рис. 5 мы видим вопрос, после ответа на который формируется облако слов, его можно использовать для подведения итогов урока.

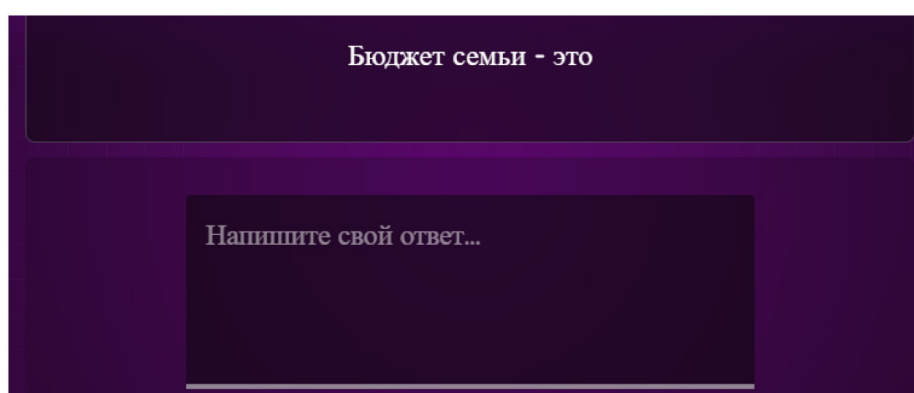


Рис. 5. Облако слов

Рассмотренные нами задания позволили задействовать в образовательном процессе мультимедийные средства, развить навыки решения практико-ориентированных задач, организовать рефлексию.

Таким образом, цифровой рабочий лист – это дидактическое средство, позволяющее обеспечить эффективную обратную связь, способствующее реализации идей формирующего оценивания, направленное на активную учебную деятельность, овладение новыми способами действия и развитием математической грамотности.

### **Библиографический список**

1. Войнова О.А. Рабочая тетрадь и интерактивный рабочий лист как цифровые средства организации учебной деятельности // Наука. Медицина. Транспорт. Инновации: сохраняя прошлое – создаем будущее. Оренбург: Самарский государственный университет путей сообщения, 2024. С. 24–27.
2. Копрова Ю.С. Обзор российских сервисов для разработки интерактивных рабочих листов // Студенческий научный форум: материалы XVI Международной студенческой научной конференции. URL: <https://scienceforum.ru/2024/article/2018036008?ysclid=m3eorbdmvh783793685> (дата обращения: 01.11.2024).

3. Мозговая М.П. Создание рабочих интерактивных листов с помощью сервисов wizer.me, liveworksheets и применение их на уроках математики // Форум. 2022. № 2. С. 89–92.
4. Хилюк Е.А., Фоменко С.И. Современные средства организации учебной деятельности школьников на уроках математики: интерактивные рабочие листы // Проблемы теории и практики инновационного развития и интеграции современной науки и образования. М.: Государственный университет просвещения, 2024. С. 79–84.

# ОСОБЕННОСТИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

## FEATURES OF INDEPENDENT WORK OF STUDENTS IN STUDYING MATHEMATICS DEPENDING ON THE FORM OF EDUCATION

Н.А. Лозовая

N.A. Lozovaya

*Самостоятельная работа, формы обучения, студент, методические указания, консультация, индивидуализация, изучение математики.*

В работе актуализирована потребность в самостоятельной работе обучающихся при изучении математики в вузе. Рассмотрены основные виды самостоятельной работы студентов при изучении математики и описаны особенности в ее организации и проведении с учетом формы обучения: очная, очно-заочная, заочная. Обозначены приемы, ориентированные на повышение результативности самостоятельной работы в зависимости от формы обучения.

*Independent work, forms of training, student, methodological instructions, consultation, individualization, study of mathematics.*

The work actualizes the need for independent work of students when studying mathematics at a university. The main types of independent work of students in the study of mathematics are considered and the features of its organization and implementation are described, taking into account the form of study: full-time, part-time, correspondence. Techniques aimed at increasing the effectiveness of independent work depending on the form of training are outlined.

Согласно федеральному закону, обучение в вузе может осуществляться в очной, очно-заочной и заочной формах с учетом возможностей и потребностей студента в зависимости от объема контактной работы обучающихся с преподавателем [5]. Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся является основой обучения в вузе, поскольку значительная часть учебного материала (в зависимости от формы обучения) вынесена на самостоятельное изучение. В то же время изучение математики в определенном объеме актуально для студентов большинства направлений подготовки и является необходимым компонентом в подготовке квалифицированных специалистов, что также сопряжено с самостоятельной работой обучающихся.

Цель настоящей работы – описание особенностей самостоятельной работы студентов различных форм обучения при изучении математики.

Будем придерживаться определения, согласно которому самостоятельная работа определяется как деятельность обучающихся по усвоению знаний и умений, направляемая преподавателем, но осуществляемая без его руководства [3, с. 155]. В зависимости от направления подготовки изменяется объем и содержание учебного материала, который необходимо освоить студентам при изучении математики, однако, подходы к организации самостоятельной работы с учетом

формы обучения сохраняются. Для примера рассмотрим самостоятельную работу студентов направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», профиля подготовки «Оборудование нефтегазопереработки».

Анализ учебных планов и рабочих программ дисциплин математического цикла за 2022–2024 учебные годы указанного направления подготовки, реализуемого в СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева, подтверждает существенное различие в объеме внеаудиторной самостоятельной работы при изучении математики студентами различных форм обучения: для очной формы обучения на самостоятельную работу студентов отводится около 55 %, для студентов заочной формы обучения – около 91 %, для студентов очно-заочной формы обучения – около 79 % от общей трудоемкости дисциплин.

В соответствии с реализуемой формой обучения определяется объем самостоятельной работы обучающихся, от которого зависят действия преподавателя при организации деятельности студентов и действия студента в процессе обучения. Рассмотрим основные виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов при изучении математики в вузе и определим ее особенности в зависимости от формы обучения.

При изучении теоретического курса студенты очной формы обучения самостоятельно изучают, главным образом, дополнительные параграфы учебного материала, опираясь на знания, полученные на лекциях и практических занятиях. Задания по изучению теоретического материала студенты-очники получают частями по мере продвижения по курсу. Студенты заочного обучения получают задания для изучения всего теоретического материала один раз в семестр на установочной сессии и для них не предусмотрены еженедельные занятия.

При выполнении индивидуальных заданий студенты очной формы обучения ориентируются на выполненные на практических занятиях совместно с преподавателем задания, студентам заочной формы обучения необходимо самостоятельно разобраться в предложенных примерах, что требует высокого уровня математической подготовки.

Для студентов очно-заочной формы обучения, несмотря на существенную долю самостоятельной работы при изучении математики, предусмотрены регулярные занятия в течение семестра, а, значит, как и у студентов очной формы обучения, реализуется поэтапное получение заданий для самостоятельного изучения теоретической части курса и разбор практических заданий на занятиях.

Самостоятельное проведение исследований и выполнение творческих заданий предусмотрено для студентов, ориентированных на исследовательскую деятельность, и предполагает индивидуальную работу студента и преподавателя в режиме консультаций, поэтому, если исследовательская работа не требует присутствия студента в аудитории, то форма обучения, при заинтересованности студента и преподавателя, не оказывает существенного влияния на результат.

Заметим, что к результату математической подготовки студентов предъявляются одинаковые требования независимо от формы обучения и в процессе изучения математики студенты разных форм обучения используют одни и те же

литературные источники и образовательные ресурсы, в связи с чем для результативной самостоятельной работы необходимо обеспечить студентов подробными методическими указаниями по самостоятельной работе с учебным материалом и предусмотреть возможность для консультаций с учетом формы обучения.

При подборе содержания обучения, составлении дополнительных методических материалов и при планировании консультаций будем опираться на исследование О.Б. Березовской, Л.Б. Гиль и С.В. Соколовой, в котором определены положения, необходимые для построения модели математической подготовки студентов: индивидуальный уровень начальной математической подготовки студента, индивидуально-психологические особенности студента, возможность для студента выбора образовательной траектории при изучении математики [2, с. 463]. Реализация перечисленных положений способствует индивидуализации в обучении, с которой связано разделение учебного материала на несколько уровней сложности, и успешность которой зависит от мотивации студентов к обучению [1], от использования электронных образовательных ресурсов [4].

Итак, использование студентами методических указаний, разработанных отдельно для каждой формы обучения; систематическое участие студентов в групповых и индивидуальных консультациях, организованных для каждого направления подготовки; использование студентами учебного материала на основе индивидуальных потребностей в совокупности способствует вовлечению обучающихся в результативную самостоятельную работу по изучению математики с учетом формы обучения.

### **Библиографический список**

1. Архипова Н.А., Евдокимова Н.Н., Макарова Е.Л., Рудина Т.В. Некоторые аспекты мотивации в заочном обучении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Социальные, гуманитарные, медико-биологические науки. 2022. Т. 24, № 85. С. 4–9. DOI: 10.37313/2413-9645-2022-24-85-4-9
2. Березовская О.Б., Гиль Л.Б., Соколова С.В. Самостоятельная работа студентов при изучении математики // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 2-3. С. 462–466.
3. Загвязинский В.И. Теория обучения: современная интерпретация: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. 5-е изд., стер. М.: Академия, 2008. 192 с.
4. Лозовая Н.А. Особенности организации самостоятельной работы студентов технических направлений подготовки в условиях электронного обучения математике // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2022. № 2 (60). С. 50–58. DOI: 10.25146/1995-0861-2022-60-2-331
5. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 16.04.2022) «Об образовании в Российской Федерации». URL: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/) (дата обращения: 25.10.2024).



# «ОЖИВЛЕНИЕ» УРОКОВ МАТЕМАТИКИ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

## BRINGING MATH LESSON TO LIFE WITH DIGITAL TECHNOLOGY

А.М. Могилева

A.M. Mogileva

*Геймификация, математический конструктор, GeoGebra, технологии, создание материалов, курс, математика.*

В данной статье рассматриваются три примера «оживления» уроков математики. В современных уроках хочется видеть: геймификацию, интерактивные уроки с помощью сайта «Математический конструктор» и вывод домашних заданий на свою платформу/сайт (создание своего курса под конкретный класс). На сайте «Математический конструктор» есть виртуальные тренажеры. Создание своего курса удобно делать под конкретную тему или подготовку к экзаменам. Результат работы: познакомить читателя с некоторыми цифровыми технологиями для уроков математики.

*Gamification, mathematical constructor, GeoGebra, technologies, creation of materials, course, mathematics*

This article discusses three examples of “revitalizing” math lessons. In modern lessons, I really want to see: gamification, interactive lessons using the Mathematical Constructor website and the output of homework on my platform /website (creating my own course for a specific class). There are virtual simulators on the Mathematical Constructor website. It is convenient to create your own course for a specific topic or exam preparation. The result of the work: to introduce the reader to some digital technologies for math lessons.

**М**ногие дети считают математику сложным и скучным предметом. И не теряет своей актуальности вопрос о средствах развития познавательного интереса к уроку, повышения активности учебно-познавательной деятельности и создания положительной мотивации к изучению математики. Опишем некоторые возможные формы «оживления» уроков математики на основе использования цифровых технологий.

Применение геймификации (в домашнем задании) может происходить таких образом: класс делится на три команды, и у них есть общая карта (поле) [2]. На этой карте есть маршруты для каждой из команд. Прохождение маршрута означает преодоление препятствий в виде заданий из разных источников. Возможно, это решенная карточка с заданиями или сделанный проект в GeoGebra, или же все участники команды выучили и сдали теорию по геометрии. За каждый пройденный этап команда получает балл и движется дальше по маршруту. Выигрывает та команда, которая больше всех набрала очков. Можно сделать маршрут на четверть или на год. Интереснее на четверть, она длится не очень долго. Проблема геймификации в том, что не всегда видны неудачи команд и могут образовываться недовольства. Почему у первой команды больше баллов, а там не все вкладывают свои силы? Заинтересовать придется всех в классе. Цель данного «оживления» – процесс, а не результат, состоящий из наибольшего количества баллов и «шоколадки».

Рассмотрим тематическую карту: берем план сказочной местности с всевозможными объектами. Мы прорисовываем нужные нам три маршрута, проставляем препятствия для каждого маршрута. Главное, обозначить общие старт и финиш. Еще нам потребуется excel-таблица для отчетности по командам, в нее записываем, сколько очков есть у каждой команды на конкретном этапе. Желательно, чтобы команды видели в реальном времени свои успехи: чтобы карта и таблица были в онлайн-доступе. По окончании прохождения маршрутов всеми тремя командами нужно их похвалить и наградить. И можно приступать к следующей карте. До идеала довести можно таким образом: придумать историю про путешествие каждой команды, назвать участников команд героями из вашей сказки и начать путешествие (рис. 1).



	Команда № 1	Команда № 2	Команда № 3
Препятствие № 1	пройдено	пройдено	пройдено
Препятствие № 2	не пройдено	почти пройдено	пройдено
...			

Рис. 1. Карта и маршрутный лист для команд

Вернемся из сказки в реальность с помощью «Математического конструктора». Оживить урок математики можно прямо на уроке. На уроке включаем доску или проектор и вызываем ученика к доске. Ученик сам работает с конструктором. Здесь уже есть наглядные примеры. Есть тренажер, в котором придется подумать и вписать найденные значения. Мне кажется это удобным для уроков в школе. Кстати, для онлайн-школ тоже подходит. Математический конструктор сделан на основе всем известной GeoGebra. Если открыть GeoGebra, совсем ничего о ней не зная, то прямо на уроке этого делать не нужно. Лучше заранее сделать в ней заготовки. В этой среде удобно рассматривать с разных сторон объемные фигуры. Можно работать с пересечениями графиков функций. Опять-таки составить тренажер под свой урок – хороший способ улучшения понимания математики. В GeoGebra можно давать тренироваться и вне школы [1]. Например, пусть ученик сам попробует построить пересечение параболы и гиперболы. Для лучшего усвоения темы про сумму углов в треугольнике – посмотреть, как меняются все три угла, когда «берешь» одну из вершин и начинаешь ее плавно передвигать по «полю». GeoGebra дает ту наглядность и быстроту ответа на вопрос: «А что будет, если?» (рис. 2).

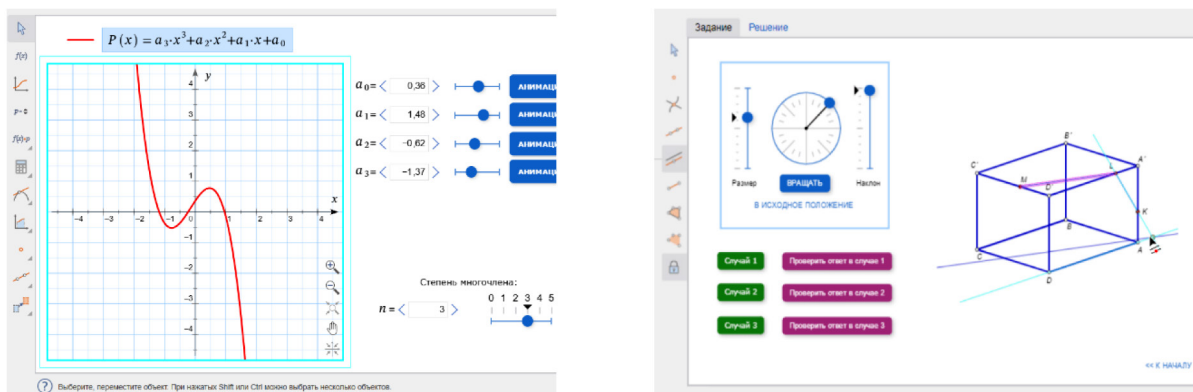


Рис. 2. Математический конструктор

Рассмотрели геймификацию и математический конструктор. Осталось все это запечатлеть на собственной платформе. Можно создать свой сайт с нуля, а можно воспользоваться уже известными платформами, например «КонтурКласс». Для онлайн-школы это идеально, мы же рассмотрим – для домашнего задания и подготовки к экзаменам. Здесь можно создавать урок, в котором будут модули: тема, теория, видео и тест. Также можно загружать файлы, составлять диалоги и задания на сопоставление. Удобно отслеживать успеваемость ученика. Не нужно вести свою учетность в бумажном или на электронном носителях. Не у всех платформ есть мобильное приложение, но почти у всех платформ доступен комфортный просмотр с мобильных устройств (рис. 3).

## КонтурКласс Тарифы

### Профи

Подходит для обучения сотрудников компании. Не ограничивайте себя в создании новых программ для адаптации и развития персонала.

- ✓ Оплата по количеству учащихся на всех курсах
- ✓ Неограниченное количество одновременно действующих учебных курсов
- ✓ Конструктор учебных курсов
- ✓ Словарь курса
- ✓ Тестирование учеников
- ✓ Диалоговый тренажер
- ✓ Статистика по ученикам
- ✓ Брендирование интерфейса (от 1000 лицензий)

### В Контур.Классе есть 5 видов заданий:

- **Вопрос-ответ.** Это тренировочное задание с одним или несколькими вариантами ответа
- **Сопоставление.** Это задание содержит вопрос и две группы фраз, которые нужно соотнести между собой попарно.
- **Распределение по группам** также содержит вопрос и несколько фраз или слов, каждые из которых нужно распределить в ту или иную группу.
- **Загрузка файла** позволяет обучающемуся загрузить домашнее задание или практическую работу, сфотографировав ее или записав аудио.
- **Открытый ответ** позволяет обучающемуся написать ответ в свободной форме.

Рис. 3. КонтурКласс

В завершение хотелось бы добавить, что в современном мире, где много разных игр и соцсетей, можно заинтересовать аналогичным в учебе – если добавить в урок элемент игры или показать наглядно, сразу интерес появляется. Раньше, чтобы наглядно показать октаэдр, учитель приходил домой и клеил с помощью картона и клея многогранник, а сейчас можно использовать цифровые технологии.

### **Библиографический список**

1. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. М.: Прометей, 2018. 206 с.
2. Карavaев Н.Л., Соболева Е.В. Совершенствование методологии геймификации учебного процесса в цифровой образовательной среде: монография. Киров: Вятский государственный университет, 2019. 105 с.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ LMS MOODLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

## USING THE ELECTRONIC EDUCATIONAL ENVIRONMENT LMS MOODLE IN STUDYING MATHEMATICS AT A UNIVERSITY

О.В. Пашковская

O.V. Pashkovskaya

*Дистанционное обучение, LMS Moodle, высшая математика.*

В настоящее время в поиске новых подходов к преподаванию математики устанавливается баланс между дистанционными формами обучения и методиками, предполагающими живое взаимодействие со студентами. При изучении разделов высшей математики в Сибирском государственном университете науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева широко используются электронная образовательная платформа (Портал электронно-дистанционного обучения), построенная в системе LMS Moodle. Инструменты этой платформы активно применяются при изучении линейной алгебры, дифференциальных уравнений и других разделов высшей математики.

*Distance learning, LMS Moodle, higher mathematics.*

Currently, in the search for new approaches to teaching mathematics, a balance is being established between distance learning and methods that involve live interaction with students. When studying sections of higher mathematics at the Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, an electronic educational platform (Portal of Electronic Distance Learning) built in the LMS Moodle system is widely used. The tools of this platform are actively used in the study of linear algebra, differential equations and other sections of higher mathematics.

**Ф**едеральный государственный образовательный стандарт высшего образования регламентирует создание и использование в образовательном процессе электронной информационно-образовательной среды, в том числе использование электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. В университетах широко используются современные электронные образовательные технологии и при изучении одной из важнейших базовых дисциплин в технических вузах – высшей математики [5; 6].

При изучении различных разделов математических дисциплин современное электронное обучение помогает: выстроить индивидуальную образовательную траекторию; представить учебные материалы в различных формах; повторить изученный материал; обеспечить взаимодействие обучающихся и преподавателей; автоматизировать оценку результатов обучения [7].

В электронной образовательной среде Сибирского государственного университета науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева (СибГУ) успешно функционирует Портал электронно-дистанционного обучения (портал ЭДО) (рис. 1). Порядок создания и регистрации электронных образовательных ресурсов (ЭОР) на сервере электронно-дистанционного обучения СибГУ



им. акад. М.Ф. Решетнева регулируют соответствующие нормативные документы. Традиционно активно используются электронные учебные курсы (ЭУК) в форматах: электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), внутрикампусный курс (SPOC), курс в формате MOOC.

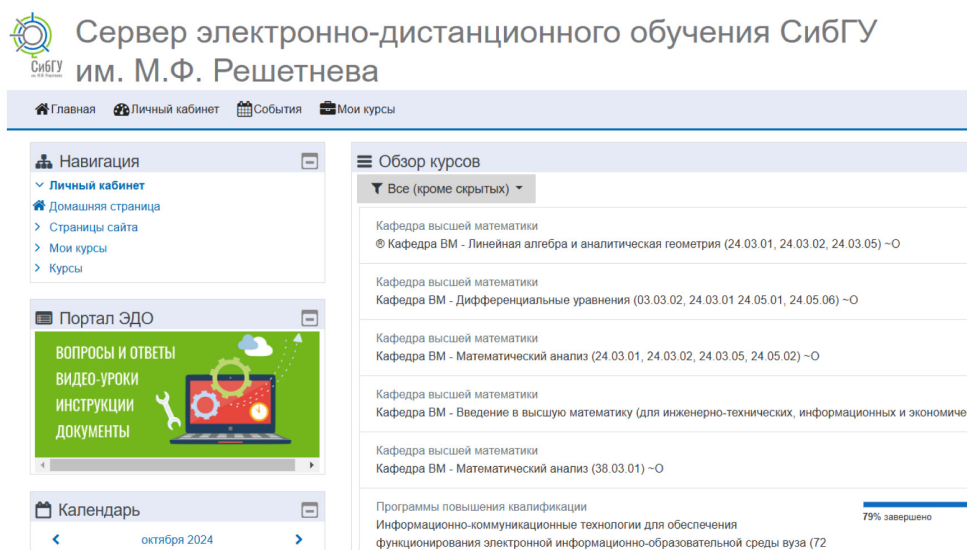


Рис. 1. Портал ЭДО (страница преподавателя математики)

Использование электронной среды не только сопровождает традиционный образовательный процесс, но и позволяет учитывать особенности каждого обучающегося, формировать и модернизировать индивидуальные образовательные траектории [2], помогает организовать и контролировать самостоятельную работу студентов. Эти факторы являются чрезвычайно важными в использовании Портала ЭДО при изучении математики в технических вузах. Как правило, преподаватель параллельно сопровождает несколько ЭУК (рис. 1–2).

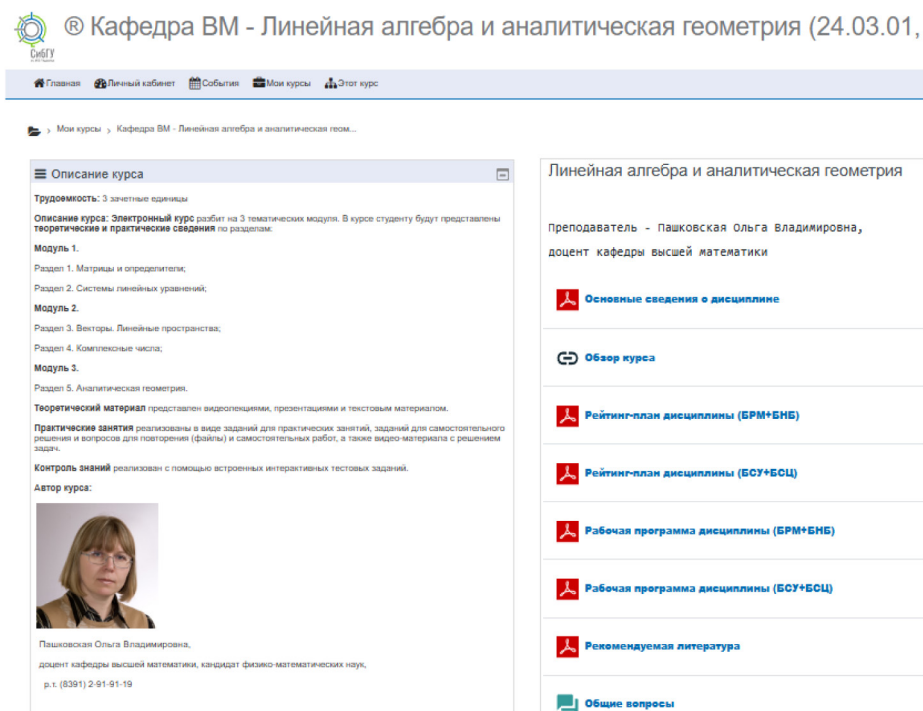


Рис. 2. Электронный курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в системе Moodle



В системе высшего образования России наибольшее распространение получила система управления обучением LMS Moodle [1; 3], инструменты которой позволяют организовать и автоматизировать практически все формы взаимодействия с обучающимися: изучение и повторение учебного контента – учебное видео, электронные лекции, текстовые материалы (рис. 2–3); оценивание результатов обучения: тесты-тренажеры, итоговые тесты по модулям и в целом по курсу (рис. 4) с автоматизированным анализом результатов (рис. 5).

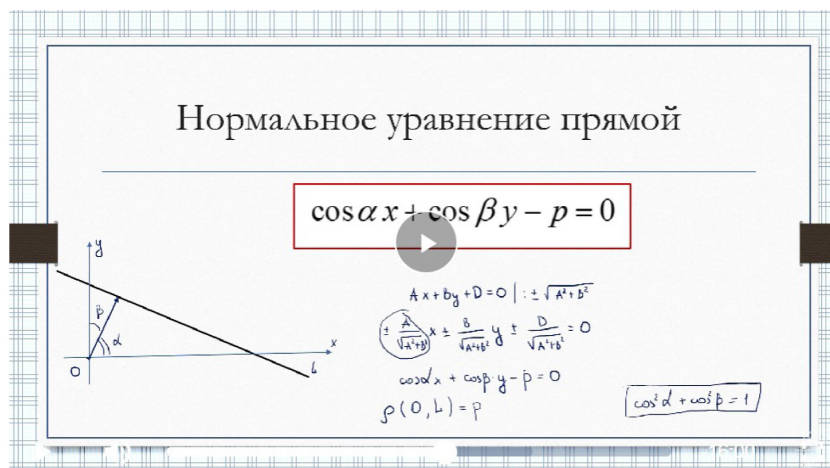


Рис. 3. Видео к курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (лекция «Уравнения прямой на плоскости»)

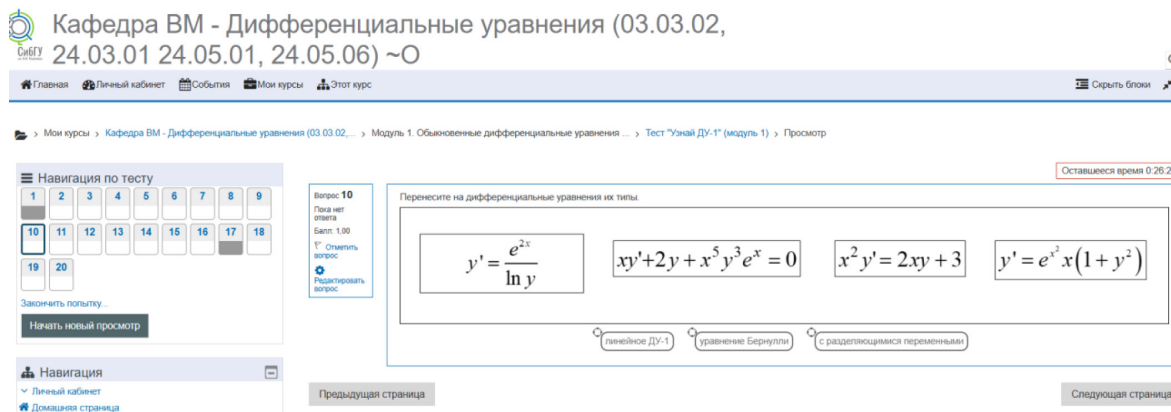


Рис. 4. Фрагмент теста «Узнай ДУ-1» (курс «Дифференциальные уравнения»)

График количества студентов, получивших оценки в диапазоне.

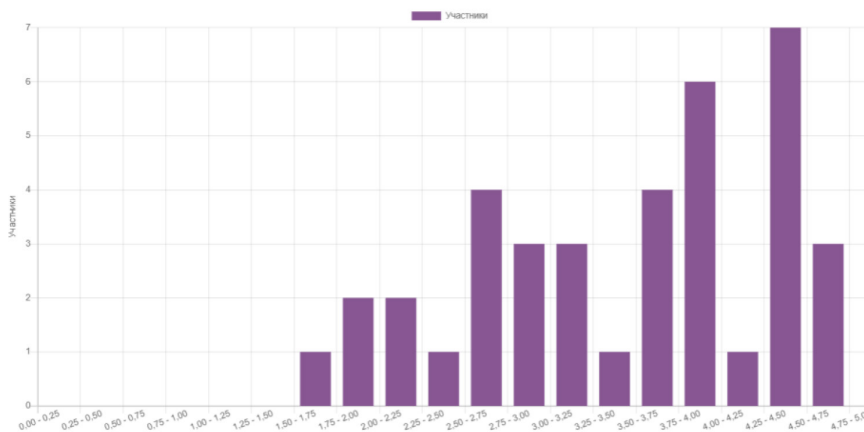


Рис. 5. Анализ выполнения теста студентами

Инструменты платформы помогают организовать интерактивное взаимодействие участников образовательного процесса: обучающихся между собой, обучающихся и преподавателя (рис. 6), применять различные образовательные технологии [4].

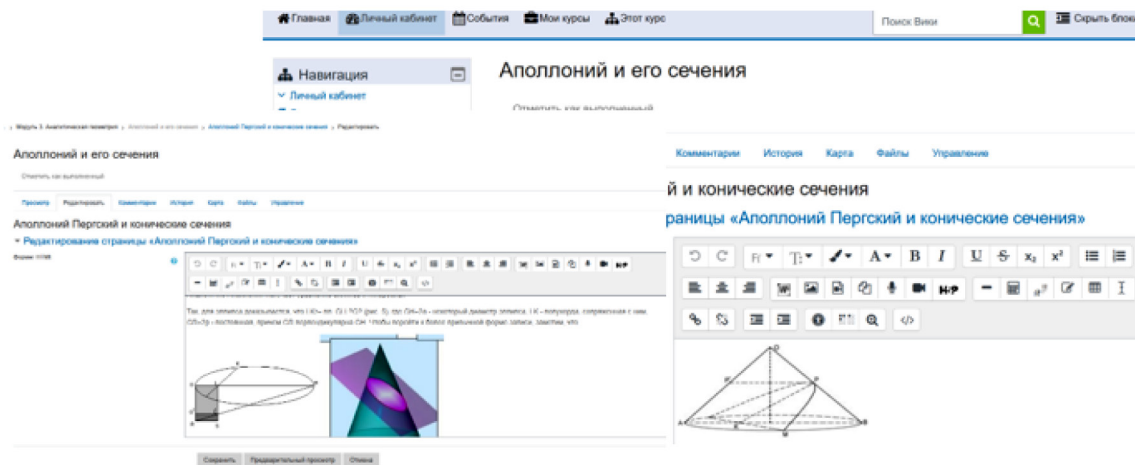


Рис. 6. Совместная работа над созданием учебного контента (Wiki «Аполлоний и его сечения», курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»)

Применение электронного обучения, несмотря на уже достаточно долгую историю использования дистанционных технологий, по-прежнему часто встречает скептическое отношение со стороны преподавателей. Но в современных условиях информационного общества невозможно не признать, что электронное обучение – мощный инструмент для освоения математических компетенций, незаменимый помощник педагогов и обучающихся.

## Библиографический список

1. Васильев М.Д., Васильева Н.В. Применение системы Moodle в процессе формирования математической компетентности студентов технических направлений // Общество: социология, психология, педагогика. 2018. № 12 (56). С. 234–239. DOI: 10.24158/spp.2018.12.40
2. Есин Р.В., Вайнштейн Ю.В. Формирование математической компетентности на основе построения индивидуальной образовательной траектории в электронной среде. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2021. 164 с.
3. Кравченко Г.В. Использование дистанционной среды Moodle в образовательном процессе студентов дневной формы обучения // Известия Алтайского государственного университета. 2013. № 2-1 (78). С. 23–25.
4. Пашковская О.В. Применение педагогической технологии «перевернутый класс» при изучении вычислительной математики с использованием LMS Moodle // Информационные технологии в математике и математическом

образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 12–13 ноября 2020 года / Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 156–160.

5. Шкерина Л.В. Формирование математической компетентности студентов: монография. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2018. 253 с.
6. Зыкова Т.В., Сидорова Т.В., Шершнева В.А. Проектирование, разработка и методика использования электронных обучающих курсов по математике. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2014. 116 с.
7. Электронное обучение математическим дисциплинам в вузе: монография / Ю.В. Вайнштейн, Р.В. Есин, Т.В. Зыкова и др.; Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий. Красноярск: СФУ, 2022. 164 с.

# РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕСУРСОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

## THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL LITERACY OF PRIMARY SCHOOL STUDENTS USING THE RESOURCES OF THE DIGITAL EDUCATIONAL ENVIRONMENT

Е.В. Позднякова

E.V. Pozdnyakova

*Математическая грамотность, учащиеся 5–9 классов, цифровые образовательные ресурсы, универсальные учебные действия, цифровой контент математического содержания, региональный компонент, геймификация, дидактический инструментарий.*

Актуализируется проблема формирования математической грамотности учащихся 5–9 классов с использованием ресурсов цифровой образовательной среды. Представлен блок «Математическая грамотность» авторского цифрового контента математического содержания. Особенности заданий, представленных в цифровых ресурсах данного блока, являются наличие регионального компонента, диалоговый характер заданий («квазидialog»), элементы геймификации.

*Mathematical literacy, 5th–9th grade students, digital educational resources, universal learning activities, digital content of mathematical content, regional component, gamification, didactic tools.*

The problem of the formation of mathematical literacy of 5th–9th grade students using the resources of the digital educational environment is actualized. The block «Mathematical literacy» of the author’s digital content of mathematical content is presented. The features of the tasks presented in the digital resources of this block are the presence of a regional component, the interactive nature of the tasks («quasi-dialog»), and gamification elements.

Одним из современных трендов общего образования является нацеленность на формирование функциональной грамотности обучающихся, подразумевающей способность человека вступать в отношения с внешней средой, эффективно адаптироваться и функционировать в ней. В структуре функциональной грамотности выделяют математическую грамотность (МГ), которая проявляется в умении использовать математику как инструмент решения задач, возникающих в различных областях научного познания и в практических реалиях окружающего мира.

Отметим, что за последние годы были проведены многочисленные методические исследования, освещающие различные грани проблемы формирования математической грамотности обучающихся основной школы:

- структура и содержание задач с математическим контекстом как средство формирования МГ [1; 10];
- методы и приемы формирования математической грамотности и ее мониторинг [2; 3; 6; 7];

– особенности формирования математической грамотности обучающихся с рисками учебной неуспешности [11];

– вопросы подготовки и профессиональные дефициты учителей математики в области формирования математической грамотности школьников [4; 9].

Таким образом, в настоящее время в теории и практике обучения математике имеется достаточно обширный и динамично развивающийся дидактический инструментарий (вариативная комбинация технологий обучения, методов, средств, форм учебного взаимодействия субъектов обучения) для формирования математической грамотности учащихся 5–9 классов. Выскажем идею о ценности наличия регионального компонента в заданиях, включенных в такой инструментарий. Именно учет региональных особенностей позволит максимально реалистично смоделировать проблемную практико-ориентированную ситуацию, заложенную в задаче; поставить ученика в условия окружающей его действительности.

Введение и интенсивное развитие цифровой образовательной среды обогащает дидактический инструментарий учителя новыми технологиями, позволяющими ученику работать в интерактивном режиме, в индивидуальном темпе, выстраивая собственную образовательную траекторию.

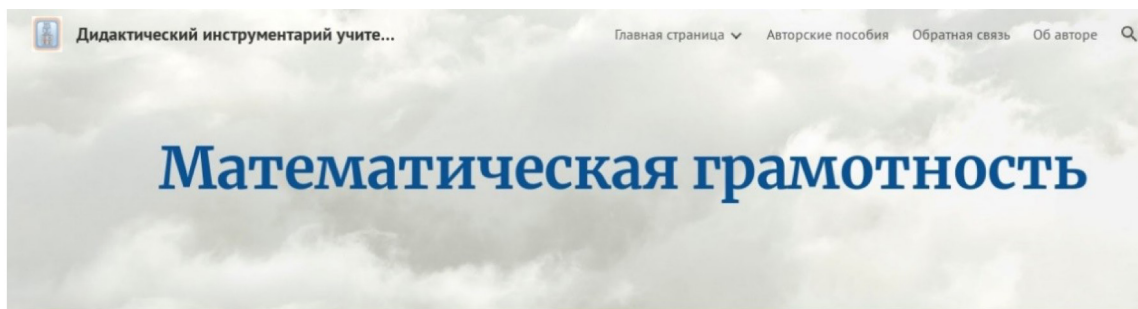
Таким образом, для комплексного формирования математической грамотности, универсальных учебных действий как ее основы, а также креативности обучающихся 5–9 классов нами был разработан цифровой контент математического содержания [8]. Указанный контент включает четыре блока: «Математическая грамотность» (формирование математической грамотности на уроках и занятиях учебных курсов внеурочной деятельности), «Тематические веб-квесты» (проведение квестов по учебным предметам математического блока), «Математические путешествия» (организация интерактивных обучающих игр), «Математик в мире профессий» (проведение групповых или индивидуальных внеурочных учебных исследований профориентационной направленности).

*Целью статьи* является представление дидактического инструментария блока «Математическая грамотность». Данный блок содержит следующие компоненты: 1) цифровой ресурс поддержки учебного курса внеурочной деятельности по формированию математической грамотности для учащихся 8–9 классов «Математика в городе N»; 2) цифровой ресурс метапредметных заданий с региональным компонентом для учащихся 5–6 классов «Кузбасс в дробях»; 3) интерактивную презентацию для организации обучающей игры «Математика – царица всех наук» (5–6 класс), позволяющей исследовать межпредметные связи математики (рис. 1).

Охарактеризуем особенности указанных цифровых ресурсов данного блока.

*Цифровой ресурс «Математика в городе N»* выстроен в соответствии с концепцией математической грамотности [5] и включает задачи четырех категорий: «Пространство и форма», «Изменение и зависимости», «Количество», «Неопределенность и данные» (рис. 2). После выбора категории осуществляется переход на соответствующую страницу с теоретическим материалом и задачами, в процессе решения которых учащиеся взаимодействуют с такими сервисами, как GeoGebra, «Удоба», LearningApps, GoogleForms.





**Математическая грамотность** характеризуется совокупностью действий ученика при решении задач, возникающих в повседневной жизни или при изучении других учебных предметов: распознавать проявление математических законов и понятий, выявлять математические закономерности, моделировать и применять математический аппарат для решения и интерпретации полученных результатов.



**Цифровой ресурс "Математика в городе N" (для учащихся 8 – 9 классов)**

Цифровой ресурс поддержки учебного курса внеурочной деятельности по формированию математической грамотности для учащихся 9 - ого класса. Отдельные задания курса могут быть предложены в 8 классе.

①



**Цифровой ресурс "Кузбасс в дробях" (для учащихся 5 – 6 классов)**

Представлены метапредметные задания с региональным компонентом по дидактическим темам 5 - 6 классов. Задания могут быть использованы как на уроке, так и на учебных занятиях внеурочной деятельности по формированию математической грамотности обучающихся



**Интерактивная обучающая игра "Математика – Царица всех наук" (для учащихся 5 – 6 классов)**

Интерактивная презентация для организации учебно-игровой деятельности (командные соревнования) или индивидуального / группового исследовательского поиска по изучению межпредметных связей математики

[НА ГЛАВНУЮ](#)

Рис. 1. Стартовая страница блока «Математическая грамотность»



Рис. 2. Стартовая страница цифрового ресурса «Математика в городе N»



*Цифровой ресурс метапредметных заданий «Кузбасс в дробях»* спроектирован с помощью приложений Google Sites и дополнен онлайн-сервисами (LearningApps, CoreApp, Google Forms, Joyteka). Ресурс содержит необходимый теоретический материал и задания, разделенные на категории в соответствии с исследуемыми межпредметными связями: «Математика и история», «Математика и география», «Математика и физическая культура», «Реальная математика». Приведем фрагмент задачи категории «Математика и физическая культура» (табл.).

#### **Фрагмент задачи категории «Математика и физическая культура»**

*Дидактические темы:* Вероятность. Десятичные дроби, сравнение десятичных дробей.

В 2023 году Кузбасс стал площадкой для проведения вторых Международных зимних спортивных игр «Дети Азии». Состязания прошли сразу на четырех территориях Кемеровской области – в Кемерово, Новокузнецке, Междуреченске и Таштагольском районе.

а) В Новокузнецке прошли соревнования по фигурному катанию и хоккею. 26 февраля 2023 года на ледовой арене кузнецких металлургов им. О.И. Короленко состоялись выступления девушек в короткой программе. Порядок выступлений в короткой программе определяется жребием. Найди вероятность того, что спортсменка из Кузбасса будет выступать первой в короткой программе, если известно, что страны ближнего зарубежья представляют 9 фигуристок, центральную Россию – 7 фигуристок, Дальний Восток – 2 фигуристки, Сибирский федеральный округ – 6 фигуристок, 2 из которых представляют Кузбасс.

*Интерактивная презентация для организации обучающей игры «Математика – царица всех наук»* создана с помощью программного пакета Microsoft Power Point и дополнена возможностями онлайн-сервисов GeoGebra и LearningApps. Цифровой ресурс вовлекает учащихся в интерактивную игру – экскурсию, где исследуются межпредметные связи математики и возможности ее применения для решения задач реальной действительности.

Особенностями заданий всех цифровых ресурсов блока «Математическая грамотность» является присутствие виртуального героя – помощника и диалоговый режим заданий («квазидialog»), формулировка содержания задания на основе регионального компонента, наличие элементов геймификации («игровая оболочка для неигровой деятельности»).

Спроектированный цифровой контент был апробирован в ходе педагогического эксперимента, в котором было задействовано 226 учеников контрольной и экспериментальной групп. Эксперимент начался с обучающимися 5 класса (2019–2020 учебный год) и продолжался до окончания ими 9 класса (2023–2024 учебный год). Результаты эксперимента показали статистически значимые различия уровней развития МГ в контрольной и экспериментальной группах, на основании чего был сделан вывод о том, что разработанный цифровой контент является одним из эффективных факторов развития функциональной математической грамотности школьников.

## Библиографический список

1. Бакланова Н.А. Формирование математической грамотности обучающихся в процессе решения контекстных задач // Перспективы науки. 2024. № 5 (176). С. 136–139.
2. Денищева Л.О., Савинцева Н.В., Сафуанов И.С., Ушаков А.В., Чугунов В.А., Семеняченко Ю.А. Особенности формирования и оценки математической грамотности школьников // Science for Education Today. 2021. Т. 11, № 4. С. 113–135. DOI: 10.15293/2658-6762.2104.06
3. Дударева Н.В., Утюмова Е.А. Модель формирования функционально-математической грамотности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. 2021. № 4. С. 14–25.
4. Кадырова Ф.З., Мингазова Г.Г. Исследование профессиональных дефицитов педагогов в формировании естественно-научных и математических грамотностей обучающегося // Казанский педагогический журнал. 2023. № 3 (128). С. 57–63.
5. Концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA – 2021. Сайт ФИОКО. – URL: <https://fiooco.ru/Contents/Item/Display/2201978>
6. Подлипский О.К., Сергеева Т.Ф., Шабанова М.В. Математическая грамотность: подходы к формированию и оценке // Математика в школе. 2024. № 2. С. 30–37.
7. Позднякова Е.В., Дробахина А.Н., Малышенко Г.А. Развитие математической грамотности школьников средствами учебного курса внеурочной деятельности в цифровой образовательной среде // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2023. № 10. С. 208–224.
8. Развитие метапредметных умений и математической грамотности обучающихся 5–9 классов в процессе математической подготовки (дидактический инструментарий учителя математики). URL: <https://sites.google.com/view/uud-mathematics/главная-страница> (дата обращения: 09.10.2024).
9. Рослова Л.О., Карамова И.И. О готовности учителей к формированию функциональной математической грамотности школьников // Профильная школа. 2020. Т. 8, № 4. С. 14–26.
10. Рослова Л.О., Квитко Е.С., Карамова И.И. Критерии для разработки заданий, предназначенных для формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2023. Т. 3. № S1 (90). С. 51–64.
11. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Формирование математической грамотности обучающихся с рисками учебной неуспешности на уроках математики в основной школе // Бизнес. Образование. Право. 2024. № 3 (68). С. 406–410.

# ВАРИАНТ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО МЕТАКОМПЛЕКСА ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОДГОТОВКИ В ВУЗЕ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

## A VARIANT OF THE INSTRUMENTAL METACOMPLEX OF DIGITAL TRANSFORMATION OF UNIVERSITY TRAINING FOR STUDENTS OF MATHEMATICAL SPECIALTIES

А.Е. Поличка

A.E. Polichka

*Цифровая трансформация подготовки студентов, метакомплекс цифровой трансформации, авторская методическая система обучения математической дисциплине.*

Рассмотрен вариант инварианта в инструментальном метакомплексе цифровой трансформации подготовки в вузе студентов при преподавании математических дисциплин. Инструментальной основой выбрано выделение в системном подходе применения принципа связности для анализа данных при разработке авторской методической системы обучения математической дисциплине с использованием ряда средств цифровых технологий.

*Digital transformation of student training, metacomplex of digital transformation, author's methodological system of teaching mathematical discipline.*

A variant of the invariant in the instrumental metacomplex of digital transformation of university students' training in teaching mathematical disciplines is considered. The instrumental basis is the allocation in the systematic approach of the application of the principle of connectivity for data analysis in the development of the author's methodological system for teaching a mathematical discipline using a number of digital technology tools.

**А**нализ информатизации образования теоретических исследований и педагогических практик учителей, преподавателей и активных в этом направлении образовательных центров страны и зарубежья позволяет выделить несоответствие между бурно развивающимися инновациями технического и программного обновлений средств информатизации образования и методической поддержки практиками ученых заведений целевого и эффективного их использования [1]. Особенно это наблюдается в перемещении центра подготовки от фундаментальных основ математического образования в направления прикладной и информатической деятельности. Так, в [2] предложен вариант практико-ориентированного обучения математике студентов технического профиля. Специальных исследований по выделению инвариантов и методологических основ в отношениях этих процессов при подготовке будущих специалистов математической деятельности и педагогических работников по преподаванию математических дисциплин не выделено. В данной работе основой выбрано понятие метакомплекса цифровой трансформации подготовки в вузе студентов математических специальностей как объединение педагогической деятельности преподавательского состава университета для эффективного использования средств образовательных и информационно и коммуникационных технологий.

Цель данного исследования – предложение варианта выделения подходов освоения студентами методологии анализа данных, инвариантных для эффективного использования в сменяющихся и обновляющихся средствах цифровых технологий.

**Материалы и методы.** Статья опирается на технологические и инструментальные основы системно-деятельностного подхода, развиваемые автором при изучении эффективности средств цифровых технологий. Также основой стала педагогическая практика автора и его учеников этих исследований в учебных заведениях региона. Особо выделена в системном подходе инструментальная основа применения принципа связности для анализа данных при разработке авторской методической системы обучения математической дисциплине с использованием ряда средств цифровых технологий: «Принцип связности означает, что при рассмотрении в рамках системного анализа любой части исследуемой системы необходимо анализировать ее во взаимосвязи с другими частями системы и с окружающей средой» [3].

**Результат.** Авторский подход в выделенном несоответствии между бурно развивающимися инновациями технического и программного обновлений средств информатизации образования и методической поддержкой практиками ученых заведений целевого и эффективного их использования опирается на принцип свободы преподавания педагогического работника. Именно, когда в условиях обязательности решения педагогических задач он должен находить их решение по-своему. Здесь приобретает значение индивидуальный стиль преподавания. Он может рассматриваться как набор специальных характеристик преподавателя, определяющих индивидуальность его работы, влияющие на выбор им способа деятельности и обуславливающей своеобразность ее выполнения. Технологически это представляется деятельностью по разработке авторской методической системы обучения учебной дисциплины (АМСОУД) [4] с педагогическим обеспечением использования электронного обучения [5]. В данном исследовании одним из основных видов информационной деятельности выделяется деятельность по анализу данных, которая методологически должна основываться на использовании основных положений элементов внешней системы, содержащей элементы: концептуальный этап моделирования систем согласно теории систем; представление информации как инструментального понятия информационного подхода информатики; деятельностный подход психологии в трактовке видов информационной деятельности; информационную адаптацию теории адаптации как одной из главных теорий межкультурной коммуникации; информатизацию образования как трансфер-интегративную область научного знания; закономерности кибернетики (обратной связи, закона необходимого разнообразия); технологический принцип структурирования учебных данных. Основным результатом планируется не только освоение контента учебных математических дисциплин, но и освоение студентами основных положений описанных элементов внешней системы. Так, завершение учебной дисциплины «Уравнения математической физики» для студентов образовательной программы «Прикладная математика

и информатика» завершается специальным студенческим проектом освоения контента этой дисциплины по схемам разработки математической модели и проекта, изученных в параллельных проектных дисциплинах и по моделированию. Для этого разработан специальный формат методической документации для студентов и преподавателей.

**Вывод.** Педагогический опыт автора показал, что предложенный вариант подхода освоения студентами методологии анализа данных, основанной на положениях указанных элементов внешней системы, обеспечивает его эффективное использование в математических дисциплинах бакалавриата, специалитета, магистратуры и аспирантуры в сменяющихся и обновляющихся средствах цифровых технологий.

### **Библиографический список**

1. Поличка А.Е. Адапционно-информационная составляющая педагогических технологий в условиях цифровизации образования // Педагогическая информатика. 2024. № 1. С. 89–96.
2. Бадак Б.А., Бровка Н.В. Об особенностях компьютерно-педагогического сопровождения в практико-ориентированной математической подготовке студентов технического университета // Международный сборник научных работ «Дидактика математики: проблемы и исследования». 2023. № 4 (60). С. 37–47.
3. Тебекин А.В., Тебекин П.А., Егорова А.А. Развитие принципов системного анализа как методологической основы разработки и применения его методов // Журнал технических исследований. 2021. Т. 7, № 2. С. 20–30.
4. Поличка А.Е. Технологическая подготовка методических систем в информационно-коммуникационных предметных средах: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. 168 с.
5. Поличка А.Е. Педагогическое обеспечение создания условий для использования электронного обучения // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы I Международной научной конференции в рамках IV Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития» (Красноярск, 27–30 сентября 2016 г.); под общ. ред. М.В. Носова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т. 2016. С. 19–24.



# ЭЛЕКТРОННЫЙ КУРС КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

## ELECTRONIC COURSE AS A MEANS OF FORMING MATHEMATICAL COMPETENCE OF FUTURE RAILWAY TRANSPORT SPECIALISTS

И.В. Путинцева

I.V. Putintseva

*Цифровизация, обучение математике, образовательные результаты, математическая компетентность, образовательная платформа, мультимедийный контент.*

В статье рассматриваются особенности применения электронного курса на занятиях математики, описывается структура курса и обосновываются его дидактические возможности для формирования математической компетентности студентов.

*Digitalization, teaching mathematics, educational results, mathematical competence, educational platform, multimedia content.*

The article examines the features of using the electronic course in mathematics classes, describes the structure of the course and substantiates its didactic possibilities for the formation of mathematical competence of students.

Современные интернет-платформы предоставляют широкий спектр инструментов для создания учебного контента и управления обучением [1]. Выбор конкретных сервисов глобальной сети для применения в образовательном процессе определяется целесообразностью применения на данном типе занятия, возможностью доступа к ним участников обучения и навыков работы с ними.

Базовым ресурсом, применяемым в обучении математике студентов – будущих специалистов железнодорожного транспорта, считаем электронный курс, разработанный в модульной объектно-ориентированной динамической учебной среде Moodle [2].

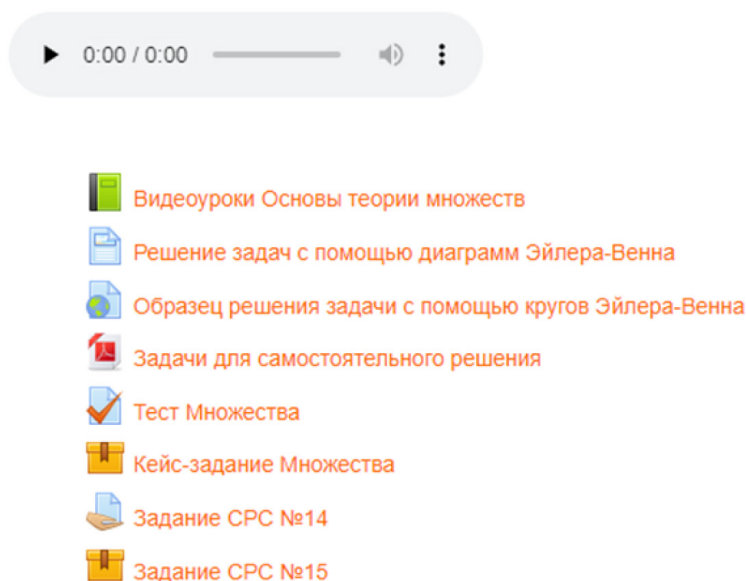
Электронный курс ЕН.01 Математика состоит из разделов, тематическое наполнение которых соответствует содержанию рабочей программы учебной дисциплины и включает элементы и задания разного типа, позволяющие организовать непрерывное и доступное освоение дисциплины (рис.) [3].

Электронный курс на базе образовательной платформы Moodle позволяет реализовать различные виды учебной деятельности:

– самостоятельное изучение теоретических сведений и составление опорного конспекта; электронные лекции; видеоуроки с обратной связью в форме мультимедийного контента: видеоурок, вопросы на понимание в процессе просмотра, несложные задания по содержанию лекции; общение в режиме реального времени – переход к видеоконференциям в MS Teams или Discord, онлайн-доскам (Padlet, sBoard, Popplet, Ziteboard и др.);



### 3.1 Основы теории множеств



*Рис. Фрагмент электронно-образовательного ресурса ЕН.01 Математика в системе дистанционного обучения КрИЖТ ИрГУПС*

- первичное освоение новых знаний и способов деятельности (решение типовых заданий по теме, выполнение практических работ, интерактивных заданий, разработанных в бесплатном ресурсе LearningApps.org);
- применение знаний и способов деятельности (решение прикладных задач, выполнение проектных заданий и кейс-заданий);
- текущий, промежуточный, итоговый контроль знаний (выполнение контрольных работ и тестов);
- самостоятельную работу (пополнение глоссария, совместное редактирование Вики-страниц по определенной тематике, выполнение интерактивных заданий, исследовательская деятельность, участие в олимпиадах и др.) [4].

Электронный курс синхронизирован с электронно-библиотечной системой образовательной организации, предоставляя обучающимся доступ к изданиям основной и дополнительной литературы, методическим пособиям по математике, разработанным преподавателем, в полнотекстовом формате.

Электронный курс на базе платформы Moodle позволяет организовать интерактивные занятия путем параллельной работы с другими образовательными онлайн-платформами (Российская электронная школа, ЯКласс, Юрайт и др.), в том числе осуществлять независимую объективную оценку образовательных результатов.

Применение электронного курса в обучении математике студентов – будущих специалистов железнодорожного транспорта расширяет дидактический потенциал для формирования их математической компетентности, а именно:

- позволяет разнообразить способы предъявления учебного материала и активизации учебной деятельности;

– способствует повышению учебного мотива студентов, поскольку обучение реализуется с использованием цифровых средств обучения, что соответствует «клиповому» мышлению современных обучающихся [5];

– при организации самостоятельной работы студентов расширяются возможности ее индивидуализации с учетом временных ресурсов и затрат каждого обучающегося для выполнения заданий.

Таким образом, организация занятий с применением электронного курса позволяет обеспечить освоение профессионально значимых математических знаний и овладение математическими методами как средствами анализа профессиональной деятельности, организации и управления технологическими процессами, обеспечить непрерывность и доступность образовательного процесса.

### **Библиографический список**

1. Горбачева О.А., Горлова Ю.И., Никитина И.В. Виды и возможности интернет-сервисов и платформ для организации дистанционного обучения студентов вузов // Ученые записки ОГУ. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2020. № 2 (87). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vidy-i-vozmozhnosti-internet-servisov-i-platform-dlya-organizatsii-dstantsionnogo-obucheniya-studentov-vuzov> (дата обращения: 17.09.2024).
2. Скорнякова А.Ю. Использование среды дистанционного обучения Moodle в математической подготовке студентов педвуза // Ярославский педагогический вестник. 2012. Т. II, № 2. С. 225–228.
3. Курс ЕН.01 Математика. Система дистанционного обучения Красноярского института железнодорожного транспорта Иркутского государственного университета путей сообщения. URL: <http://sdo-ktgt.krsk.irkgups.ru/course/view.php?id=359> (дата обращения: 01.11.2024).
4. Путинцева И.В. К вопросу организации дистанционного обучения по математике в Красноярском техникуме железнодорожного транспорта // Образование – Наука – Производство: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. 2020. С. 301–304.
5. Путинцева И.В. Специфика обучения математике поколения Z на уровне среднего профессионального образования // Карбышевские чтения: сборник научных трудов международной научно-практической конференции: в 8 т. / под общ. ред. Л.И. Грошевой. 2021. Т. 6. С. 253–255.

# СОЗДАНИЕ КОЛЛЕКЦИИ ЦИФРОВЫХ ИГР ПО ПЛАНИМЕТРИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ИЗУЧЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ

## CREATION OF A COLLECTION OF DIGITAL GAMES ON PLANIMETRY AS A MEANS OF FORMING STUDENTS' MOTIVATION TO STUDY GEOMETRY

Е.И. Скафа, А.А. Ганжа,  
А.С. Веселовская

E.I. Skafa, A.A. Ganja,  
A.S. Veselovskaya

*Мотивация к изучению геометрии, технология игрофикации, дидактическая игра, цифровые инструменты, коллекция цифровых игр, интерактивность, мотивационный стимул.* Современные средства обучения на основе цифровых инструментов предоставляют возможность организовать процесс формирования мотивации обучающихся к изучению геометрии привлекательным и доступным. В статье описывается создание и применение коллекции цифровых игр по темам школьного курса планиметрии, обеспечивающих мотивационный стимул, интерактивность и, наряду с возможностями коллективной работы, индивидуализацию процесса формирования мотивации к изучению планиметрии.

*Motivation to learn geometry, technology of gamification, didactic game, digital tools, collection of digital games, interactivity, motivational stimulus.*

Modern learning tools based on digital tools provide an opportunity to organize the process of forming students' motivation to learn geometry in an attractive and accessible way. The article describes the creation and application of a collection of digital games on the topics of the school course of planimetry providing motivational stimulus, interactivity and along with the possibilities of teamwork individualization of the process of formation of motivation to study planimetry.

Геометрическое образование является мощным средством формирования логического мышления обучающегося с характерными для него чертами обоснованности, последовательности, критичности и рациональности; средством развития пространственного воображения и интуиции, которые являются основой его творческой деятельности. Учитывая современные требования к формированию личности и мощные возможности геометрического образования в этом процессе, отметим, что приемы формирования мотивации школьников к изучению геометрии должны быть в поле зрения актуальных задач современной педагогической теории и практики [4].

Итак, мотивы обучения – это источник мышления. От того, как учителю удастся вызвать потребность в познании, значительно зависят результаты обучения и воспитания. Однако возможно ли каждому учителю научить школьников учиться

с увлечением и самостоятельно сформировать у каждого из них жажду познания геометрии? Ответом на данный вопрос может стать применение инновационных технологий, к которым относится технология игрофикации с использованием цифровых инструментов. Такая технология представляет собой включение элементов цифровой игры в учебный процесс с целью повышения мотивации, улучшения вовлеченности обучающихся в познавательную деятельность и обеспечения эффективного обучения.

К основным приемам игрофикации для обеспечения мотивации школьников к изучению геометрии мы относим следующие:

– *мотивационный стимул*. Применение технологии игрофикации создает мотивационные стимулы для обучающихся, предоставляя им четкие цели и награды за достижения. Это может включать в себя баллы, достижения, ранги и другие элементы, которые делают обучение более привлекательным;

– *коллективное обучение*. Многие цифровые игры основаны на принципе командной работы, и этот аспект можно успешно внедрить в процесс геометрического образования. Совместные ученические проекты по геометрии и творческие задания, при поиске решения которых происходит совместное генерирование идей, могут поддерживать коллективное взаимодействие и развивать навыки сотрудничества;

– *интерактивность и индивидуализация*. Технология игрофикации позволяет создавать интерактивные уроки, учитывая различия в уровне подготовки и интересах обучающихся. Индивидуализированные задания, организация эвристических диалогов в цифровой среде, обеспечение коррекции учебных достижений и обратная связь помогают обучающимся развиваться в соответствии с их потребностями.

К основным средствам, обеспечивающим реализацию технологии игрофикации, на наш взгляд, относятся *коллекции цифровых игр* как уникальный и захватывающий способ обучения, который будет интересен большинству обучающихся. Этот формат обучения позволяет представить материал в более интерактивной и увлекательной форме, что способствует лучшему пониманию и запоминанию информации. Благодаря этому, учащиеся могут не только изучать геометрическую теорию, но и применять полученные знания на практике, что делает процесс обучения более эффективным и интересным. Коллекции цифровых игр могут быть успешно интегрированы в дистанционный урок. Их использование может открыть множество возможностей и преимуществ для школьников, поскольку в отличие от других форматов, цифровые игры предоставляют ученикам знакомый и захватывающий опыт обучения.

В Донецком государственном университете студентами – будущими учителями математики создаются коллекции интерактивных игр по планиметрии с целью формирования мотивации школьников к изучению геометрии. Приведем несколько примеров таких проектов.

1. *Игры, построенные в виде интерактивных уроков, выполненные в системе Power Point*. Например, по теме «Треугольники» для обобщения и система-

тизации знаний обучающихся и повышения мотивации к изучению темы предлагается игра, включающая:

– исторические факты, в которых рассказывается о появлении треугольника и о нескольких самых известных треугольниках в мире;

– загадки и ребусы. В игровой форме школьникам предлагаются загадки и ребусы, которые нужно отгадать, за это они могут получить дополнительные баллы;

– сказка о треугольнике. В этом пункте мультяшные герои Гринч и Макс рассказывают ученикам сказку о треугольнике. В ней присутствуют вопросы по данной теме, на которые Гринч просит ответить детей, после чего он продолжает свой рассказ. В конце сказки предлагается задача, дети помогают Гринчу ее решить;

– прикладные задачи. Это задачи практического содержания, показывающие прикладной характер треугольников. Обучающимся показывают две прикладные задачи, организуется эвристический диалог, вместе с Гринчем и Максом школьники решают задачи;

– тест «Усвоил ли ты треугольники?». Происходит подключение к программе Test Pad, в которой предлагаются задания по теме, после их решения каждый ученик получает развернутый результат в виде анализа невыполненных заданий с указанием правильного решения. Учителю приходит результат проведенной работы школьником.

2. «Веб-квест “Многоугольники: в мире площадей”», его целью является следующее: используя технологию Веб-квест [3], показать связь с окружающим миром темы «Площадь. Нахождение площадей треугольников и многоугольных фигур. Площади подобных фигур» для развития интереса школьников к математике и формирования у них учебной мотивации. Для реализации проекта выбрана образовательная платформа Joyteka.com.

3. «Создание лонгрида “Зачем изучать четырехугольники?”». Цель проекта: рассмотреть примеры применения четырехугольников в повседневной жизни, развить у школьников интерес к математике и сформировать у них мотивацию учебной деятельности. Лонгрид разработан на платформе Tilda.

Образовательный лонгрид, отмечают А.А. Галустян и Д.Ю. Кульчицкая [1], представляет собой такой подход к обучению, который может быть успешно внедрен в школьный курс обучения. Его использование может принести множество преимуществ и перспектив для учеников, например, таких как:

- 1) обеспечение глубокого погружения в тему;
- 2) создание определенной атмосферы для читателя;
- 3) в отличие от других форматов, лонгрид дает учащимся знакомый и комфортный опыт работы с текстом;

- 4) интересный лонгрид, который раскрывает тему, интересно читать независимо от его объема. Заголовки, подзаголовки, графика и видеоконтент в разы повышают вовлеченность учеников.



Такой подход формирует у школьника учебную мотивацию. В проекте, созданном студентами, разработаны следующие направления изучения четырехугольников:

- параллелограммы в реальной жизни;
- прямоугольники в реальной жизни;
- квадраты в реальной жизни;
- ромбы в реальной жизни;
- трапеции в реальной жизни.

4. «Создание коллекции игр “Четырехугольники в реальной жизни”». Цель проекта: стимулировать интерес учащихся к геометрии и внести вклад в их учебную мотивацию, акцентируя внимание на изучении четырехугольников. Проект создан в конструкторе LearningApps.org и сервиса Online Test Pad и включается в дистанционный урок.

Технология работы с данной коллекцией игр.

#### *1 Шаг: Ознакомление*

На первом этапе дистанционного урока, в основе которого лежит коллекция интерактивных игр, учащимся предлагается заполнить форму регистрации, а затем ознакомиться с содержанием данного урока.

#### *2 Шаг: Учебник*

На втором этапе учащимся предлагается повторить учебный материал по всей теме «Четырехугольники» в 8 классе [2] (прилагается ссылка на учебник по геометрии в цифровом формате).

#### *3 Шаг: Ментальная карта*

На третьем этапе ученики могут ознакомиться с ментальной картой, где собраны свойства и признаки четырехугольников, что поможет им пройти в дальнейшем тест, а также кроссворд в коллекции цифровых игр. После ознакомления с ментальной картой учащиеся переходят по ссылке ниже и приступают к прохождению коллекции игр.

#### *4 Шаг: Работа с коллекцией игр*

Коллекция состоит из нескольких основных компонентов, которые вместе создают игровой опыт:

*Отыщи четырехугольник в жизни.* Этот шаблон похож на «Классификацию», только игровое поле представляет собой изображение с расставленными метками (различные четырехугольники в реальной жизни). Ученики кликают на метки и сопоставляют с каждой правильную карточку из набора. Основная задача – правильно определить данные геометрические фигуры.

*Найди соответствие.* Это задание на поиск соответствий. Ученикам предлагается сопоставить названия четырехугольников с предложенными картинками (предметы, которые окружают нас каждый день в реальной жизни).

*Кроссворд.* На игровом поле представлен кроссворд из 10 слов. Необходимо ответить на вопросы, используя описания, определения понятий и свойства четырехугольников.



*Игра «Парочки».* Вариация формата «Найти пару», только карточки теперь нужно переворачивать, чтобы увидеть их содержимое. И запоминать, где находится какая из них, потому что после каждого хода они снова скрываются. На игровом поле в квадратных ячейках даны названия четырехугольников, задача – найти им пару.

#### *5 Шаг: Итоговый тест*

На заключительном этапе ученикам необходимо пройти итоговый тест, который состоит из 11 вопросов. Время и количество попыток в данном тесте ограничено. После окончания теста учащиеся получают сертификат и итоговую оценку, завершают последний этап, т.е. завершают дистанционный урок.

Таким образом, игровые технологии, которые создаются будущими учителями математики, позволяют им научиться разрабатывать такие технологии и применять как дополнительный ресурс на уроке для обучения школьников геометрии, используя коллективную и индивидуальную формы работы обучающихся.

Использование коллекции цифровых игр, предназначенных для самостоятельного изучения и практики в домашних условиях, позволяет ученикам улучшить свои навыки распознавания геометрических объектов в повседневной жизни, обучиться решать прикладные задачи.

Применение в качестве инструмента для проведения интерактивных уроков и конкурсов помогает увлечь обучающихся и сделать процесс изучения геометрии более интересным и захватывающим, что формирует их мотивацию.

### **Библиографический список**

1. Галустян А.А., Кульчицкая Д.Ю. Как делать мультимедийные лонгриды? Практическое пособие по созданию материалов для онлайн – СМИ. М.: МГУ, 2015. 44 с.
2. Геометрия 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организации / базовый уровень / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 14-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023. 416 с.
3. Митина К.В., Чундерова К.А., Гребнева Д.М. Веб-квест как технология в учебном процессе // Наука и перспективы. 2023. № 1. URL: [nip.esrae.ru/ru/46-319](http://nip.esrae.ru/ru/46-319) (дата обращения: 25.10.2024).
4. Скафа Е.И. Методика обучения математике: эвристический подход. Общая методика. Издание второе. М.: Директ-Медиа, 2022. 441 с.

# СИСТЕМА ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ» В 10–11 КЛАССАХ

## TASK MANAGEMENT SYSTEM ON THE ISSUE “SOLVING NUMBER PROBLEMS” 10–11 YEARS

Ю.А. Смолина, С.В. Фельбрина

Yu.A. Smolina, S.V. Felbrina

*Исследовательское мышление, набор задач с параметром, решение задач с параметром, Единый государственный экзамен по математике.*

Во многих учебниках математики теме «Решение задач с параметром» уделяется незначительное место школьного курса. Но очевидно, что изучение этой темы необходимо для формирования исследовательского мышления. В данной статье авторы, имеющие большой опыт проверки работ ЕГЭ, представляют набор заданий по данной теме, который можно использовать при работе с учебно-методическим комплексом по математике серии «МГУ-школе» С.М. Никольского и др., 10–11 классы регулярно на протяжении двух лет. Кроме заданий, приведены примеры решений некоторых из них с помощью аналитического, графического и функционального способов.

*Investigative research thinking, a set of number problems, solving number problems, the Unified State Exam in Mathematics.*

In many mathematics textbooks, the issue “Solving number problems” is given an insignificant part of the school curriculum. However, it is obvious that the study of the issue is acute for building investigative research thinking. In the article, the authors, who have immense expertise in grading papers of the Unified State Exam, present sets of problems on the issue, which can be used when working with the educational package in Mathematics of the series “Moscow State University-to School” by S.M. Nikolsky and others, 10–11 years for two years on a regular basis. In addition to the problems, the article gives the examples of the application of analytical, graphic and functional methods of solving some of them.

**В** современном мире очень стремительно происходит развитие новых технологий, новых наук, искусственного интеллекта и др. С учетом этих изменений важное место в школьном образовании должно уделяться формированию исследовательских навыков учащихся. Для дальнейшего образования, а также для выполнения в будущем профессиональных задач в школе мы должны научить работать с информацией: анализировать, систематизировать, структурировать, сравнивать, выдвигать гипотезы, доказывать их или опровергать, формулировать выводы и т.д.

Одним из инструментов развития исследовательского мышления у школьников могут служить задачи с параметром. Но, к сожалению, этой теме в курсе школьной математики уделяется очень мало времени. В некоторых учебниках эта тема представляется как материал для дополнительного изучения. В учебниках «Алгебра и начала математического анализа» серии «МГУ–школе» С.М. Никольского и др., 10–11 классы этой теме отводится 6–8 часов почти в конце одиннадцатого класса. Однако очевидно, что сформировать исследовательское

мышление за восемь уроков, научить решать задачи с параметром за столь короткий срок, невозможно.

Еще немаловажным является тот факт, что задачи с параметром входят в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике, а также играют значительную роль в различных конкурсных отборах.

Поэтому изучение этой темы, включение задач с параметром регулярно на уроках необходимо начинать как можно раньше, а также давать в качестве основных и дополнительных заданий для учащихся с высокой мотивацией.

В своей статье мы предлагаем набор заданий для школьников 10–11 классов, обучающихся по УМК С.М. Никольского и др. Это задачи с параметром, подобранные к каждой теме учебников «Алгебра и начала математического анализа», 10–11 классы. Конечно же, данный дидактический материал может использовать учитель, работающий по любому учебнику. В таком случае педагог сам определяет, в какой момент и в какой теме целесообразнее рассмотреть ту или иную задачу из набора.

### Система задач с параметром

10 класс, учебник [3]

#### 10.1. «Рациональные уравнения и неравенства»

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a \geq 0 \\ |3x - 2a| \leq 4 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых любое действительное число  $x$  является решением неравенства  $x^2 + (2a + 1)x - \frac{a}{4} > 0$ .

#### 10.2. «Решение показательных уравнений и неравенств»

1. Для каждого значения  $a$  решите неравенство  $(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geq 0$ .
2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $3^x - a = \sqrt{9^x - 4a}$  имеет единственный корень [1].

#### 10.3. «Логарифмические уравнения»

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $lg^2(3x^2 + 6x + 4) + (5a^2 - a + 4)lg(3x^2 + 6x + 4) - a - 2 = 0$  имеет хотя бы один корень.
2. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет один корень  $\sqrt{4x - 3} \ln(5x - a) = \sqrt{4x - 3} \ln(6x + a)$  на отрезке  $[0; 1]$ .
3. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $log_{1-x}(a - x + 2) = 2$  имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку  $[-1; 1)$ .

#### 10.4. «Решение тригонометрических уравнений»

1. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $(tgx + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(tgx + 6) + a^2(2a + 8) = 0$  имеет на отрезке  $[0; \frac{3\pi}{2}]$  ровно два решения

- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$  имеет хотя бы один корень.
- Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\sqrt{x - 2a} \cdot \sin x = \sqrt{x - 2a} \cdot \cos x$  имеет один корень на отрезке  $[0; \pi]$ . [1]  
11 класс, учебник [4]

### 11.1. «Функции и их графики»

- Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2}{x+1} = a|x - 3|$  на промежутке  $[0; +\infty)$  имеет более двух корней.
- Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1$  имеет единственный корень [1].

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x+y-a+5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения [2].

### 11.2. «Свойства функции»

- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$  не имеет корней.
- Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(1 + \sin x)^4 - 4 \sin x = 8 - 2a - 3a^2$  не имеет решений.
- Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^4 - 3ax^2 - 9a + 3a^2 = 0$  имеет ровно три корня.
- Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $17|x - a| + |a^2 - 7x + 12| + |a^2 + 2x - 15| = |2a^2 - 6a + x - 3| + |4|x| - |x + 3a||$  имеет хотя бы один корень.

### 11.3. «Равносильность уравнений и неравенств системам»

- Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение имеет одно решение  $(x^2 - 5 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 5)^2 + \ln^2(x - a)$  на отрезке  $[0; 3]$ .
- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на отрезке  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  уравнение  $\operatorname{tg}(2\pi x) \operatorname{lg}(4x + a + 1) = \operatorname{lg}(4x + a + 1)$  имеет один корень [1].
- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$  имеет ровно три различных решения.
- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 2]$  уравнение  $\ln(5x - 3) \sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0$ .

### 11.4. «Уравнение вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ »

- Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$  не имеет корней.
- Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$  имеет более трех различных решений.
- Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $7ax^2 - 2x - 7x^2 - 1 = \sqrt[7]{2x - ax^2} - \sqrt[7]{1 - x^2}$  имеет два корня.

### 11.5. «Уравнения и неравенства с модулем»

1. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$  имеет четыре различных корня.
2. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x + 5}$  имеет ровно два различных корня.

Разбор некоторых заданий:

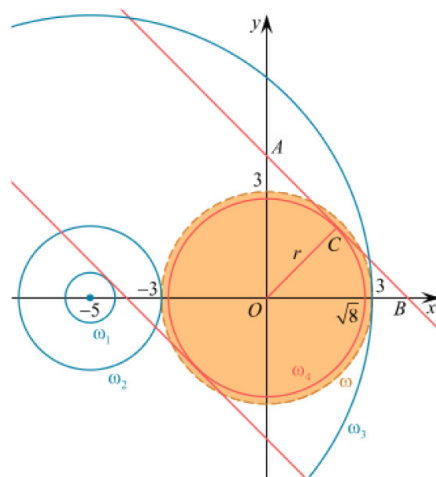
11.1. № 6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

**Решение.** При условии существования логарифма  $x^2 + y^2 < 9$  данная система равносильна совокупности уравнения и системы:

$$(x+5)^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} 9 - x^2 - y^2 = 1 \\ x + y - a + 5 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Изобразим графики полученных уравнений и область определения – внутреннюю часть круга  $\omega$  радиуса 3 с центром в начале координат (рис.). Определим, при каких значениях параметра  $a$  уравнение (1) и система (2) совместно имеют ровно два решения, лежащие в области  $\omega$ .

Рассмотрим уравнение (1). При  $a=0$  уравнение  $(x+5)^2 + y^2 - a^2 = 0$  имеет одно решение – пару  $(-5; 0)$ ; точка  $(-5; 0)$  не лежит в  $\omega$ . При прочих значениях параметра  $a$  уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы исходная система могла иметь ровно два решения, решения уравнения (1) должны лежать вне области определения системы: радиус окружности должен быть таким, что ни одна из ее точек не попала в область  $\omega$ . Находим (рис.):  $|a| \leq 2$  или  $|a| \geq 8$ .



Рассмотрим систему (2). Окружность, задаваемая первым уравнением, может иметь с прямой, задаваемой вторым уравнением, 0, 1 или 2 общие точки. Определим, какие значения параметра соответствуют касанию. Из равнобедренного прямоугольного треугольника АОС найдем  $r = OC = AO \cdot \sin 45^\circ = \frac{|a-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$ , откуда  $a = 1$  или  $a = 9$ . Следовательно, при  $1 < a < 9$  система имеет два решения. Оба они лежат в области  $\omega$ .

При  $a \in (1; 2] \cup [8; 9)$  исходная система уравнений имеет ровно два решения. **Ответ:**  $(1; 2] \cup [8; 9)$

11.2. № 6. Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$17|x - a| + |a^2 - 7x + 12| + |a^2 + 2x - 15| = |2a^2 - 6a + x - 3| + |4|x| - |x + 3a||$$
 имеет хотя бы один корень. (\*)



Решение: Рассмотрим функцию

$f(x) = 17|x - a| + |a^2 - 7x + 12| + |a^2 + 2x - 15| = |2a^2 - 6a + x - 3| + |4|x| - |x + 3a||$ .  $D(f) = \mathbb{R}$ . Функция непрерывна. Пусть  $x \leq a$ , тогда при раскрытии модулей получим функцию

$$f(x) = -17x + 17a \pm (a^2 - 7x + 12) \pm (a^2 + 2x - 15) \pm (2a^2 - 6a + x - 3) \pm (\pm 4x \pm (x + 3a)).$$

Данная функция линейная при любой комбинации знаков. Наименьший угловой коэффициент равен  $-17 - 7 - 2 - 1 - 4 - 1 = -2$ , то есть угловой коэффициент отрицательный. Значит, функция при  $x \leq a$  монотонно убывает.

Пусть  $x > a$ , тогда при раскрытии модулей получим функцию

$$f(x) = 17x - 17a \pm (a^2 - 7x + 12) \pm (a^2 + 2x - 15) \pm (2a^2 - 6a + x - 3) \pm (\pm 4x \pm (x + 3a)).$$

Функция также линейная при любой комбинации знаков. Наибольший угловой коэффициент равен  $-17 + 7 + 2 + 1 + 4 + 1 = 2$ , то есть угловой коэффициент положительный. Значит, функция при  $x > a$  монотонно возрастает. Таким образом,  $x = a$  — точка минимума. Возможны два случая:  $f(a) > 0$ , тогда уравнение (\*) не имеет корней, и  $f(a) \leq 0$ , тогда уравнение (\*) имеет хотя бы 1 корень. Нам интересен второй случай. Решим неравенство  $f(a) \leq 0$ .

$$|a^2 - 7a + 12| + |a^2 + 2a - 15| - |2a^2 - 5a - 3| \leq 0$$

$$|a^2 - 7a + 12| + |a^2 + 2a - 15| \leq |2a^2 - 5a - 3|$$

Нетрудно заметить, что  $2a^2 - 5a - 3 = (a^2 - 7a + 12) + (a^2 + 2a - 15)$ , то есть  $|a^2 - 7a + 12| + |a^2 + 2a - 15| \leq |(a^2 - 7a + 12) + (a^2 + 2a - 15)|$  (\*\*)

Известно, что неравенство  $|a| + |b| \leq |a + b|$  равносильно совокупности двух систем  $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

Значит, неравенство (\*\*) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a^2 - 7a + 12 \geq 0 \\ a^2 + 2a - 15 \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a^2 - 7a + 12 \leq 0 \\ a^2 + 2a - 15 \leq 0 \end{cases}$$

Решение данной совокупности является объединение промежутков  $(-\infty; -5] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$ . **Ответ:**  $(-\infty; -5] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$

**11.3. № 3.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\operatorname{tg}(2\pi x) \operatorname{lg}(4x + a + 1) = \operatorname{lg}(4x + a + 1)$  имеет единственный корень на отрезке  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

Решим аналитическим способом:

1 шаг: перенесем все влево и разложим на множители:

$$(\operatorname{tg}(2\pi x) - 1) \operatorname{lg}(4x + a + 1) = 0.$$

2 шаг: согласно п. 9.3 из учебника [4] наше уравнение распадается на совокупность двух систем:



3 шаг: решим первую систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} \lg(2\pi x) - 1 = 0, \\ 4x + a + 1 > 0, \\ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} \lg(4x + a + 1) = 0, \\ 2\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]. \end{cases} \end{cases}$$

$\lg(2\pi x) - 1 = 0; \quad \lg(2\pi x) = 1; \quad 2\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$   
 $x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Вычислим, при каких  $k$  найденные корни принадлежат отрезку  $\left[0; \frac{1}{2}\right]: 0 \leq \frac{1}{8} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}.$  Так как  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $k=0, x = \frac{1}{8}.$  Проверим, при каких  $a$   $x = \frac{1}{8}$  – корень первоначального уравнения. Для этого подставим  $x = \frac{1}{8}$  в неравенство первой системы:  $4 \cdot \frac{1}{8} + a + 1 > 0; a > -1,5.$

Итак, при  $a > -1,5$   $x = \frac{1}{8}$  – корень первоначального уравнения.

4 шаг: решим вторую систему:  $2\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$

$\lg(4x + a + 1) = 0; 4x + a + 1 = 1; x = -\frac{1}{4}a.$  Вычислим, при каких  $n$  данный  $x$  принадлежит отрезку  $\left[0; \frac{1}{2}\right]: 0 \leq -\frac{1}{4}a + \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2}.$  Так как  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $n=0, x \neq \frac{1}{4}.$  Найдем, при каких  $a$   $x = -\frac{1}{4}a$  – корень первоначального уравнения.

$\begin{cases} -\frac{1}{4}a \neq \frac{1}{4} \\ 0 \leq -\frac{1}{4}a \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq -1 \\ -2 \leq a \leq 0 \end{cases}$  Итак, при  $a \in [-2; -1) \cup (-1; 0]$   $x = -\frac{1}{4}a$  – корень первоначального уравнения.

5 шаг: проверим, при каких  $a$  корни  $x = \frac{1}{8}$  и  $x = -\frac{1}{4}a$  совпадают:

$-\frac{1}{4}a = \frac{1}{8}; a = -\frac{1}{2}.$  Итак, при  $a = -0,5$  корни  $x = \frac{1}{8}$  и  $x = -\frac{1}{4}a$  совпадают.

6 шаг: составим таблицу для всех значений  $a$  и соответствующих  $x$ :

Значение $a$	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1,5)$	-1,5	$(-1,5; -1)$	-1	$(-1; -0,5)$	-0,5	$(-0,5; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$x = \frac{1}{8}$					+	+	+	+	+	+	+
$x = -\frac{1}{4}a$		+	+	+	+		+	+	+	+	
Кол-во корней	0	1	1	1	2	1	2	1	2	2	1
								Корни совпадают			

7 шаг: выпишем в ответ все значения  $a$ , при которых уравнение имеет 1 корень. **Ответ:**  $(-2; -1,5] \cup \{-1; -0,5\} \cup (0; +\infty).$

**Ответы 10 класс:** 10.1. 1.  $\{-8; -4\}.$  2.  $\left(-1; -\frac{1}{4}\right).$  10.2. 1. при  $a < 1$   $x \in [a; 1]$ , при  $a \geq 1, x = 1.$  2.  $(-1; 0) \cup (0; 4]$  10.3. 1.  $(-2; +\infty).$  2.  $\left(-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{8}; \frac{15}{4}\right).$  3.  $\left[-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 1].$  10.4. 1.  $(-\sqrt{6}; -2) \cup (-2; -1) \cup \{4\}.$  2.  $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty).$  3.  $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right].$

Ответы 11 класс: 11.1. 1.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ . 2.  $\left\{-\frac{17}{16}; 0; \frac{15}{16}; 4\right\}$ . 11.2. 1.  $\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$ .  
 2.  $\left(-\infty; -3\right) \cup \left(2; +\infty\right)$ . 3.  $a = 3$ . 11.3. 1.  $\left(-\infty; -1\right) \cup \left\{\sqrt{5} - 1\right\} \cup \left(2; \sqrt{5}\right)$ .  
 2.  $\left(-2; -1,5\right] \cup \left\{-1; -0,5\right\} \cup \left(0; +\infty\right)$ . 3.  $\left(-\infty; -1\right) \cup \left(-1; 0\right)$ . 4.  $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{16}{5}; \frac{17}{5}\right)$ .  
 11.4. 1.  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ . 2.  $\left(0; \frac{1}{8}\right)$ . 3.  $\left(-\infty; 1\right) \cup \left(1; 2\right)$ . 11.5. 1.  $\left(0; 2\right) \cup \left(2; 4\right) \cup \left(4; 6\right)$ .  
 2.  $\left\{-\frac{21}{4}; -\frac{5}{4}; 1\right\} \cup \left(5; +\infty\right)$ .

### Библиографический список

1. Лысенко Ф.Ф. Математика. Подготовка к ЕГЭ – 2018. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2018 года: учебно-методическое пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2017. 416 с.
2. Мальцев Д.А. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2024. Профильный уровень. Книга 2. М.: Народное образование, 2024. 256 с.
3. Никольский С.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый и углубленный уровни: учебник. М.: Просвещение, 2022. 431 с.
4. Никольский С.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и углубленный уровни: учебник. М.: Просвещение, 2022. 464 с.

# ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ: КАК УЧИТЬ СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ?

## DIGITAL TRANSFORMATION OF EDUCATION: HOW TO TEACH MODERN SCHOOLCHILDREN MATHEMATICS?

О.А. Табинова, М.Б. Шашкина

O.A. Tabinova, M.B. Shashkina

*Цифровая трансформация образования, современное поколение обучающихся, обучение математике.*

Статья посвящена исследованию влияния цифровых технологий на процесс обучения математике и их роли в образовательной среде. В работе рассматриваются современные подходы к преподаванию математики с использованием цифровых инструментов, анализируются преимущества и вызовы цифровой трансформации для учителей и учеников. Особое внимание уделяется методам интеграции цифровых технологий в учебный процесс, а также тому, как они могут способствовать повышению мотивации учащихся и улучшению качества математического образования.

*Digital transformation of education, the modern generation of students, teaching mathematics.*

The article is devoted to the study of the influence of digital technologies on the process of teaching mathematics and their role in the educational environment. The paper examines modern approaches to teaching mathematics using digital tools, analyzes the advantages and challenges of digital transformation for teachers and students. Special attention is paid to the methods of integrating digital technologies into the educational process, as well as how they can contribute to increasing student motivation and improving the quality of mathematical education.

**Ц**ифровая трансформация образования – это процесс интеграции цифровых технологий и методов обучения в образовательные системы с целью улучшения качества преподавания и обучения, а также повышения эффективности управления учебными процессами. Этот процесс включает в себя использование различных цифровых технологий, таких как онлайн-курсы, платформы для дистанционного обучения, интерактивные доски, виртуальные лаборатории и многое другое.

И.В. Роберт описывает изменения, произошедшие в современном образовании, порождающие как позитивное, так и негативное влияние на обучающихся, в связи с активным и систематическим применением цифровых технологий. Под «цифровой трансформацией» автор понимает «результат процесса возникновения существенных изменений, произошедших в сфере образования при активном и систематическом использовании цифровых технологий в образовательных целях» [2].

Е.Д. Божович отмечает, что, если «перевести все образование в форму online и тем самым персонифицировать его – означает разрушить образование как особый социальный институт, который, помимо знаний, формирует способность к коллегиальной познавательной деятельности, что не компенсируется общением через посредство электронной техники» [1].

Замена мела и доски интерактивными досками и специализированным программным обеспечением – это лишь первый шаг. Важно понимать, что цифровизация – не просто замена инструментов, а изменение самой методологии обучения. Современные платформы позволяют создавать персонализированные учебные траектории, учитывающие индивидуальные темпы и стили обучения каждого ученика. Например, адаптивные системы оценивают знания ребенка в режиме реального времени и подстраивают сложность заданий, предотвращая как скуку от слишком простых упражнений, так и разочарование от непосильных задач. Это позволяет каждому школьнику двигаться своим темпом, не отставая от класса и не испытывая излишнего давления. Вопросы, поставленные авторами статьи в работе [4], требуют переосмысления на современном этапе цифровой трансформации образования.

Выделим основные аспекты цифровой трансформации образования.

1. *Дистанционное обучение*. Использование платформ для проведения онлайн-лекций, вебинаров, видеоконференций и других форм удаленного взаимодействия между преподавателями и студентами.

2. *Интерактивные технологии*. Применение интерактивных досок, планшетов и смарт-устройств для более активного участия студентов в процессе обучения.

3. *Использование данных и аналитики*. Анализ больших данных для оценки успеваемости учащихся, адаптации учебных программ под индивидуальные потребности каждого ученика и оптимизации учебного процесса.

4. *Облачные технологии*. Хранение и обработка данных в облаке, что позволяет упростить доступ к учебным материалам и управлению информацией.

5. *Виртуальная реальность (VR) и дополненная реальность (AR)*. Использование VR и AR для создания иммерсивных образовательных сред, которые помогают учащимся лучше усваивать материал.

6. *Геймификация*. Включение элементов игры в учебный процесс для повышения мотивации и интереса студентов.

7. *Социальные сети и сообщества*. Создание онлайн-сообществ для обмена знаниями, поддержки и обсуждения учебных материалов.

Цифровая трансформация образования открывает новые возможности для обучения современной молодежи, делая его более гибким, персонализированным и эффективным.

Новое поколение обучающихся – это люди, родившиеся после 2000 г. и получившие значительное влияние от цифровых технологий в процессе своего взросления. Их часто называют «цифровыми аборигенами» или «поколением Z (зет) и поколением A (альфа)».

Их познавательные процессы кардинально отличаются от тех, что были свойственны предыдущим поколениям. Обучение для них – это не просто пассивное восприятие информации, а активное взаимодействие с ней, возможность самостоятельно выбирать источники знаний и формировать индивидуальную траекторию обучения. Они привыкли к мгновенному доступу к информации и стремятся к немедленной обратной связи. Это порождает как преимущества, так и вызовы для системы образования [3].

К основным характеристикам современного поколения обучающихся можно отнести следующие.

1. *Технологическая грамотность*. Они выросли вместе с технологиями и умеют эффективно использовать различные устройства и программы.

2. *Гибкость и адаптивность*. Быстро адаптируются к новым условиям и изменениям благодаря постоянному взаимодействию с новыми технологиями.

3. *Персонализация обучения*. Предпочитают индивидуальный подход к обучению, который учитывает их уникальные потребности и интересы.

4. *Командная работа и сотрудничество*. Комфортно работают в командах и ценят совместную работу над проектами.

5. *Предпочтение визуального контента*. Любят получать информацию через видео, изображения и инфографику, предпочитая их текстовым форматам.

6. *Поиск быстрых результатов*. Ожидают мгновенной обратной связи и быстрого получения результатов, что может влиять на их внимание и концентрацию.

7. *Многозадачность*. Способны одновременно выполнять несколько задач, хотя это может негативно сказаться на качестве выполнения каждой из них.

Для того чтобы эффективно обучать современных школьников математике в условиях цифровой трансформации образования, необходимо учитывать ряд ключевых факторов и применять современные методы и инструменты.

С одной стороны, современные технологии предоставляют безграничные возможности для самостоятельного изучения любых предметов. Онлайн-курсы, образовательные платформы, интерактивные симуляторы и виртуальная реальность открывают доступ к знаниям, которые ранее были недоступны. Обучающиеся могут изучать предмет в удобное время и в удобном темпе, выбирая методы обучения, которые им больше подходят. Это способствует развитию самостоятельности, критического мышления и умения работать с информацией.

Однако, такой подход также сопряжен с некоторыми рисками и сдерживающими факторами. Постоянный доступ к Интернету может отвлекать от учебного процесса, а множество источников информации требуют развитых навыков критической оценки достоверности данных. Кроме того, перегрузка информацией может приводить к информационному шуму и снижению эффективности обучения. Важно научить современных обучающихся правильно пользоваться цифровыми ресурсами, развивать навыки саморегуляции и критического мышления, чтобы они могли эффективно использовать все преимущества цифровой среды и избегать ее негативных аспектов. Необходимо также учитывать различные стили обучения и предлагать индивидуализированные подходы, сочетающие традиционные методы с инновационными технологиями. Только в этом случае можно полностью реализовать потенциал современного поколения обучающихся и обеспечить им качественное образование, готовящее их к успешной жизни в условиях быстро меняющегося мира.



В заключение приведем несколько рекомендаций для эффективного обучения школьников математике в условиях цифровой трансформации.

1. Эффективным может быть использование *интерактивных платформ и приложений*. Онлайн-ресурсы, такие как ЯКласс, Российская электронная школа, GeoGebra, Математический конструктор. Эти ресурсы позволяют проводить интерактивные уроки, предоставляют возможность самопроверки и обратной связи. Визуализация математических концепций с помощью графиков, диаграмм и анимаций помогает лучше понять сложные темы.

2. *Геймификация*. Применение игр и симуляторов, такие как Minecraft, CargoBot, Scratch, могут быть использованы для обучения логическому мышлению и алгоритмам. Задания и задачи в игровой форме способствуют повышению мотивации и вовлеченности учеников.

3. *Видеоуроки и вебинары*. Видеоматериалы, записанные опытными преподавателями, могут служить дополнительным ресурсом для самостоятельного изучения сложных тем. Вебинары позволяют ученикам общаться с преподавателем в режиме реального времени и задавать вопросы.

4. *Облачные технологии и виртуальные среды*. Облачные сервисы, такие как Яндекс Диск, Sberdisk, Сферум, позволяют организовать совместную работу над проектами и документами. Виртуальные лаборатории и симуляции, например, PhET Interactive Simulations, Content.edsoo.lab дают возможность проводить виртуальные эксперименты, например, по вероятности и комбинаторике без необходимости специального оборудования.

5. *Решение проблем и проектная деятельность*. Учебные проекты, направленные на решение реальных проблем с помощью математического аппарата, стимулируют критическое мышление и навыки решения проблем. Групповые проекты развивают коммуникативные навыки и умение работать в команде.

6. *Персонализация обучения*. Индивидуальные траектории обучения с учетом уровня подготовки и интересов каждого ученика, выстраиваемые с помощью обучающих сайтов и платформ, могут обеспечить ту самую персонификацию, которую сложно организовать в условиях классно-урочной системы. Дифференцированные задания и дополнительные материалы для отстающих и одаренных учеников в условиях смешанного или гибридного обучения математике могут эффективно дополнять традиционный образовательный процесс.

7. *Социальные сети и онлайн-сообщества*. Форумы и группы в социальных сетях, где ученики могут обсуждать математические задачи и делиться своими успехами, могут стать дополнительной средой для полезного общения. Организация математических конкурсов, квестов и соревнований онлайн также может способствовать активизации познавательной деятельности обучающихся.

Применяя эти методы и инструменты, можно сделать процесс обучения математике более интересным, мотивирующим и эффективным для современного поколения школьников.



Более того, цифровые инструменты открывают доступ к огромному количеству интерактивных ресурсов: виртуальные лаборатории для проведения экспериментов, образовательные игры, симуляции сложных математических процессов, онлайн-энциклопедии и базы данных. Все это позволяет сделать обучение более наглядным, интересным и понятным. Например, изучение геометрии значительно облегчается с помощью трехмерных моделей, которые можно вращать и рассматривать с разных ракурсов. А для понимания сложных алгоритмов изучение кода на языке программирования может стать прекрасным инструментом. Это также способствует развитию компьютерной грамотности, крайне важной в современном мире.

Однако важно помнить о потенциальных недостатках. Переизбыток информации может привести к перегрузке, а чрезмерное увлечение гаджетами – к снижению концентрации внимания. Поэтому ключевым моментом является грамотное внедрение цифровых технологий, сочетающее их преимущества с традиционными методами обучения. Учитель должен оставаться центральной фигурой в учебном процессе, направляя и поддерживая учеников, помогая им использовать цифровые инструменты эффективно и ответственно. Необходимо также учитывать цифровой разрыв – обеспечить доступ к необходимой технике и Интернету для всех учеников, а также обучить учителей работе с современными образовательными платформами и ресурсами. Только комплексный и взвешенный подход, сочетающий лучшие стороны традиционного и цифрового образования, позволит подготовить школьников к вызовам современного мира и обеспечить им успешное освоение математики.

### **Библиографический список**

1. Божович Е.Д. Цифровая трансформация образования: психодидактические и технологические аспекты // Мир психологии. 2023. № 1 (112). С. 52–75.
2. Роберт И.В. Цифровая трансформация образования: вызовы и возможности совершенствования // Информатизация образования и науки. 2020. № 3. С. 3–16.
3. Тумашева О.В., Шашкина М.Б. Средства формирования и оценивания метапредметных результатов обучающихся поколения Z // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2020. Т. 9, № 1 (30). С. 285–289. DOI 10.26140/anip-2020-0901-0067.
4. Шашкина М.Б., Табинова О.А. Как учить математике детей поколения Z? // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Самара, 26–28 сентября 2019 года. Самара: Московский городской педагогический университет, 2019. С. 108–110.

# К ВОПРОСУ ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

## ON THE ISSUE OF THE FUNDAMENTALIZATION OF MATHEMATICAL TRAINING OF STUDENTS OF A TECHNICAL UNIVERSITY IN THE CONTEXT OF DIGITALIZATION OF EDUCATION

Л.Н. Тимофеева

L.N. Timofeeva

*Фундаментализация образования, цифровизация образования, принцип культуросообразности, математическое образование, культурологическая образовательная модель.*

Статья посвящена проблеме фундаментализации математического образования как условия дальнейшего профессионального развития, возможности продолжения образования в течение жизни. Однако отсутствие мотивации приводит к трудностям на пути этого процесса. Использование современных средств при сочетании фундаментальных и профессиональных задач обучения можно использовать для обучения высококвалифицированных специалистов.

*Fundamentalization of education, digitalization of education, the principle of cultural conformity, mathematical education, cultural educational model.*

The article is devoted to the problem of the fundamentalization of mathematical education as a condition for further professional development, the possibility of continuing education throughout life. However, lack of motivation leads to difficulties in the way of this process. However, the use of modern tools with a combination of fundamental and professional training tasks can be used to train highly educated specialists.

**В**недрение цифровых технологий оказывает сильное влияние на все составляющие образовательного процесса, и для системы образования актуальной становится задача, что нужно предложить обучающимся сегодня, чтобы сохранить ценности и смысл образования. С одной стороны, широкое распространение информации и инноваций в кодифицированном виде требует новых высококвалифицированных работников, способных ее понимать и эффективно применять [3]. Этому способствует распространенный сейчас компетентностный подход, который, с другой стороны, препятствует глобальному осмыслению математической информации и снижает уровень фундаментальной подготовки по соответствующим дисциплинам [1]. Одним из негативных последствий широкого распространения цифровых технологий является «натаскивание» на выполнение тестов и типовых заданий, отбор и выделение «актуальных и неактуальных» для этого знаний и умений, снижение мотивации к выполнению заданий, не относящихся к цифровой деятельности. Но нельзя отрицать положительный

эффект явления цифровизации за счет насыщения процесса обучения визуальными эффектами и использования виртуальных возможностей обработки и представления информации (графические построения, моделирование в режиме 3D и 4D) [2]. Наглядное представление исторических фактов, биографий математиков способствует возникновению интереса, мотивации изучения материала, творческому его переосмыслению, особенно важны примеры успеха в научной сфере. Здесь следует также отметить возможность получения образования в дистанционной форме, упрощение и ускорение процедуры проверки и оценивания. Большую пользу несет выполнение вузами предписания размещать в электронном виде не только учебные пособия, материалы практического содержания, фонды контроля, но и документацию, организующую учебный процесс.

При таком использовании мультимедийных средств фундаментальная математическая подготовка проявляется не только в наглядном представлении обучающимся определенных сведений, а прежде всего в представлении практико-ориентированных задач, подкрепленных прочными фундаментальными знаниями и умениями, стимулировании учебно-познавательной деятельности через интерпретацию будущими профессиональными задачами изучаемых математических понятий, теорем, суждений. Сегодня даже самое качественное узкоспециализированное образование не гарантирует конкурентоспособности на современном рынке труда. Требуется умение постоянно учиться, повышать уровень, осваивать новые технологии и умения, должен присутствовать творческий потенциал в любом виде деятельности. Фундаментальное математическое образование как естественно-научная составляющая, способствует формированию научной картины мира, понимание которой дает необходимую базу для личностной реализации, совершенствования логического и профессионального инновационного мышления. Такая постановка целей соответствует культурологическим образовательным моделям, формирующим общекультурные представления о современной математике в соответствии с принципом культуросообразности [2].

Анализ научно-методической литературы, беседы со обучающимися показали, что будущие инженеры должны иметь сформированные способности к математическому анализу любой профессиональной задачи, способность быстро приспосабливаться к любым нововведениям в своей и смежных специальностях, иметь профессиональную мобильность. Возникает потребность в построении модели методической системы предметной подготовки математике студентов технических вузов в условиях фундаментализации их математического образования. Особенностью данной модели является нацеленность математической подготовки обучающихся на сочетание профессиональной и фундаментальной направленности различных математических дисциплин. С одной стороны, это дает качественную профессиональную специализацию, а с другой, не ограничивает возможность в будущем найти другую сферу деятельности. Такое оптимальное сочетание прикладной профессиональной направленности и глубоких фундаментальных знаний и есть критерий качества математического образования.

Таким образом, цифровые технологии способствуют активному обучению: обучающиеся быстрее анализируют, охватывают больший объем информации, могут выбрать удобный способ изучения программы. Однако фундаментальная математическая подготовка остается основой готовности к дальнейшей самостоятельной работе, возможности постоянно учиться, обновлять знания и переучиваться при необходимости, двигаясь в ногу с временем.

### **Библиографический список**

1. Бондарь А.В. Инновационные образовательные технологии в системе постиндустриального общества // Цифровая трансформация образования: Электронный сборник тезисов докладов Первой научно-практической конференции. Минск, 30 мая 2018 года. Минск: Учреждение «Главный информационно-аналитический центр Министерства образования Республики Беларусь», 2018. С. 30–32.
2. Гулов А.П. Образовательные технологии реализации школьных предметных олимпиад в контексте культурологического подхода // Отечественная и зарубежная педагогика. 2023. Т. 1, № 4 (94). С. 32-46.
3. Перминов Е.А. Об актуальности фундаментализации математической подготовки студентов педагогических направлений в цифровую эпоху // Образование и наука. 2019. Т. 21, № 5. С. 86–111.

# ФОРМИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

## FORMATION OF DIGITAL LITERACY AMONG STUDENTS IN EXTRACURRICULAR ACTIVITIES IN MATHEMATICS

И.Ю. Хлобыстова, К.А. Кузнецова

I.Yu. Khlobystova, K.A. Kuznetsova

*Цифровая грамотность, внеурочная деятельность, математика, GeoGebra, критическое мышление, цифровые устройства.*

Рассматривается формирование цифровой грамотности обучающихся в рамках внеурочной деятельности по математике. Приведены этапы программы по формированию цифровой грамотности на уроках по математике и дано их краткое описание: входной опрос, изучение материала с использованием GeoGebra, домашние задания на формирование критического мышления, выполнение проектной и исследовательской деятельности в рамках внеурочной деятельности по математике.

*Digital literacy, extracurricular activities, mathematics, GeoGebra, critical thinking, digital devices.*

The formation of digital literacy of students as part of extracurricular activities in mathematics is considered. The stages of the program for developing digital literacy in mathematics lessons are given and their brief description is given: entrance survey, studying the material using GeoGebra, homework to develop critical thinking, performing project and research activities as part of extracurricular activities in mathematics.

**Н**аш мир уже давно вступил в новую эпоху развития, где ежемесячно появляются новые программные продукты и автоматизированные информационные технологии, а также современное оборудование и устройства. Умный дом становится одним из элементов обширной экосистемы, которая упрощает нашу жизнь, а современные телефоны стали нашими проводниками в цифровом мире.

Одним из требований современного мира является цифровая грамотность человека, которая включает в себя знания и практические навыки, необходимые для безопасного использования технологий и интернет-ресурсов. Это затрагивает цифровое потребление услуг, навыки работы с устройствами и безопасность в сети Интернет. В рамках цифровой грамотности современному человеку важно научиться взаимодействовать с цифровыми продуктами, критически анализировать информацию и защищать персональные данные.

Вопросами формирования цифровой грамотности занимались Л.Г. Лебедева, М.С. Цветкова и др. [1; 5]. Мы же в работе будем придерживаться следующего определения цифровой грамотности.

Цифровая грамотность – набор знаний и умений, которые необходимы для безопасного и эффективного использования цифровых технологий (в самом широком смысле слова) и ресурсов Интернета [4]. Основами компьютерной



грамотности являются цифровое потребление, цифровые компетенции и цифровая безопасность.

При наличии достаточной степени компьютерной грамотности возможно обучение с использованием информации из цифровых источников данных, а не только с применением традиционных бумажных ресурсов.

В ходе реализации программы по формированию цифровой грамотности на занятиях по математике в БПОУ УР «Глазовский технический колледж» на начальном этапе реализации программы были проведены опросы для оценки уровня цифровой грамотности студентов. За основу составления опроса была взята работа П.Ю. Семашина [3]. Опрос показал, что студенты умеют работать с цифровыми продуктами и цифровыми устройствами, но не сталкивались с элементами умного дома. Достаточно быстро могут освоить редакторы по обработке фотографий и видеоконтента на современном телефоне или компьютере. Студенты учатся критически анализировать информацию, поступающую из социальных сетей и Интернета, но еще не всегда могут отличить ложь от истины. Знают способы защиты персональных данных, но не всегда следуют этим знаниям и редко меняют пароли.

После анализа ответов на опрос студентам колледжа были даны практические советы по формированию цифровой грамотности и рекомендации по изучению программ и математических сайтов, которые помогут им облегчить изучение математики в колледже.

На следующем этапе программы перешли к работе с цифровыми ресурсами на занятиях по математике, а именно использованию GeoGebra. С помощью программы разбирали темы построения и исследования графиков функций, построения фигур на плоскости. Результаты выполнения домашних заданий в GeoGebra оформлялись в текстовом редакторе и отправлялись преподавателю на проверку. Таким образом, получилось сочетать изучение математики и работать с цифровыми ресурсами в объеме часов, отводимых на изучение предмета математики.

В рамках формирования критического мышления в рамках цифровой грамотности на уроках математики давали задания по изучению биографии математиков и искажали некоторые факты. В рамках внеурочной деятельности в ходе выполнения домашнего задания студенты проводили экспресс-исследование и находили ложную информацию, которая затем обсуждалась на уроке [2]. Работа со студентами колледжа показала, что цифровая грамотность и все ее компоненты могут быть сформированы комплексно у обучающихся в ходе работы над проектной и исследовательской деятельностью. В том числе такие компоненты, как коммуникация, конфиденциальность и безопасность.

В рамках внеурочной деятельности со студентами колледжа поводится проектная и исследовательская деятельность с периодичностью раз в неделю или каждые две недели. Во время работы над проектом обучающиеся обязательно используют технические средства для подготовки отчета и создания презентации, в которой будут представлены результаты. Во многих случаях проекты связаны с использованием или разработкой программного обеспечения, что развивает



технические навыки и способствует повышению цифровой грамотности. Цифровая грамотность формируется в процессе сбора данных по теме проекта, где студенты учатся находить, анализировать и представлять информацию. Коммуникация и сотрудничество, входящие в цифровую грамотность, тоже развиваются во время работы над проектами в рамках взаимодействия с педагогом и среди самих студентов. Для этого используются различные цифровые платформы, начиная от мессенджеров и почты и заканчивая облачными хранилищами. В результате получается готовый проект, который является частью дипломной работы студентов. Также интересно, что преподаватель может предложить написать статью по результатам проекта, что поможет популяризировать тему исследования.

Таким образом, в Глазовском техническом колледже реализуется программа по формированию цифровой грамотности не только в учебной и внеурочной деятельности в рамках изучения разных дисциплин, в том числе и математике.

### **Библиографический список**

1. Лебедева Л.Г., Звоновский В.Б. Об уровнях цифровой грамотности в аспекте цифровой трансформации // Актуальные тренды в развитии науки, экономики, образования: сборник научных статей Всероссийской научно-практической конференции. Самара, 2024. С. 13–17.
2. Макарова Я.Е., Хлобыстова И.Ю. Применение современных сервисов в организации внеклассной работы // Вестник педагогического опыта. 2022. № 53. С. 29–31.
3. Семешин П.Ю. Влияние цифровой грамотности на социальную адаптацию в современном цифровом обществе // World science: problems and innovations: сборник статей LXXVII Международной научно-практической конференции. Пенза, 2024. С. 138–140.
4. Цифровая грамотность. URL: <https://shkolamoskva.ru/metaman/digital-literacy/> (дата обращения: 10.11.2024).
5. Tsvetkova M.S., Bondarenko E.A., Khlobystova I.Yu., Yakushina E.V. Digital literacy in primary school // Olympiads in Informatics. 2022. Vol. 16. P. 159–172.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО БАНКА СКВОЗНЫХ КОНТЕКСТНЫХ ЗАДАЧ НА ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

## METHODOLOGICAL FEATURES OF THE USING OF REGIONAL BANK FOR CROSS-CUTTING CONTEXTUAL TASKS ON THE FORMATION OF MATHEMATICAL LITERACY

И.В. Шутрова, А.А. Безумов

I.V. Shutrova, A.A. Bezumov

*Обучение математике, математическая грамотность, региональный банк задач, основное общее образование, сквозная контекстная задача, методические особенности, степень значимости контекста.*

Необходимость формирования математической грамотности сегодня является одной из приоритетных целей обучения математике, закрепленных ФРП. Достижению поставленной цели, по мнению авторов, будет способствовать включение в систему обучения математике задач, в основе которых лежат жизненные ситуации разной степени значимости: общезначимые, федеральные, региональные, муниципальные. Авторы считают необходимым дополнять существующие федеральные банки контекстных задач региональными и муниципальными банками задач. В статье описаны методические особенности применения разработанного авторами ресурса, предоставляющего возможности пользователям создавать и использовать при обучении математике задачи с региональным содержанием.

*Teaching mathematics, mathematical literacy, regional task bank, basic general education, cross-cutting contextual task, methodological features, the degree of significance of the context.*

The need for the formation of mathematical literacy today is one of the priority goals of teaching mathematics, fixed by the FRP. According to the authors, the achievement of this goal will be facilitated by the inclusion in the mathematics teaching system of tasks based on life situations of varying degrees of importance: general, federal, regional, municipal. The authors consider it necessary to supplement the existing federal banks of contextual tasks with regional and municipal task banks. The article presents the methodological features of using the resource developed by the authors, which provides users with the opportunity to create and use problems with regional content in teaching mathematics.

**Ф**ормирование функциональной математической грамотности сегодня рассматривается как одна из приоритетных целей общего математического образования, о чем свидетельствует содержание федеральных рабочих программ по учебному предмету «Математика» [4]. Возможность достижения требуемого качества математического образования подготовлена созданием открытых электронных банков контекстных задач [1], изданием печатной

продукции [3], включением практико-ориентированных задач, поставленных в контекстной форме, в задачный материал базовых учебников математики, а также в контрольно-измерительные материалы ОГЭ по математике. Однако открытым остается вопрос о достаточности таких средств социализации выпускников основной ступени общего образования для формирования их готовности проявлять за стенами школы функциональную математическую грамотность, хотя бы в типовых жизненных ситуациях.

Теоретической основой решения этого вопроса выступают исследования Л.М. Перминовой [2]. По ее мнению, для успешной социализации учащихся на основе функциональной грамотности необходима ориентация средств ее формирования на минимальное поле функциональной грамотности, под которым она понимает «сферы знания либо конкретные объекты, в которых проявляется функциональная грамотность как уровень образованности, необходимый в течение всей жизни человека» [2, с. 9]. Минимальное поле функциональной грамотности она представляет состоящим из семи сфер взаимодействия человека с объектами окружающей среды: «Я сам», «Человек», «Природа», «Книга, текст, СМИ», «Город», «Прибор», «Организация, учреждение». Поскольку математическая грамотность выступает составной, относительно самостоятельной частью функциональной грамотности, то часть минимального поля, связанная с применением средств и методов математики, приходится на эту составляющую.

В развитии идей Л.М. Перминовой, мы считаем необходимым учитывать, что содержательное наполнение сфер минимального поля должно осуществляться с учетом уклада жизнедеятельности обучающегося. С этой целью в каждой сфере мы выделяем ситуации, различающиеся по степени их значимости:

- общезначимые – ситуации, регулируемые международным правом, возникающие вне зависимости от места проживания субъекта взаимодействия (покупки, использование сети Интернет, международный туризм, межкультурное взаимодействие, мероприятия, направленные на исследование и решение глобальных проблем человечества и т.п.);

- федеральные – ситуации взаимодействия с государственными службами, принятие решений в которых определяется федеральными законами и государственными стандартами (налоги и сборы, государственное страхование, пенсионные начисления, валютный обмен, трудовые отношения и т.п.);

- региональные – ситуации, регулируемые региональными нормативно-правовыми актами, определяемые природно-климатическими особенностями, национальными традициями, экономическими условиями и задачами развития региона (учет сезонных изменений климата, экологической обстановки, потребностей рынка труда, видовой разнообразия в природной среде региона и т.п.);

- муниципальные – ситуации, определяемые особенностями жизнедеятельности в муниципальных образованиях разного типа (развитие и использование транспортной системы, культурной среды, типичные занятия жителей и др.).

Для включения в систему средств формирования функциональной математической грамотности контекстов, описывающих типичные ситуации региональной и муниципальной степени значимости, мы считаем целесообразным дополнять предлагаемый на федеральном уровне задачный материал региональными и муниципальными электронными банками задач.

В рамках данной статьи представим особенности использования регионального банка сквозных контекстных задач на формирование функциональной математической грамотности. Доступ к ресурсу, разработанному нами в целях предоставления возможностей заинтересованным пользователям создавать и использовать при обучении математике задачи с региональным содержанием, представлен по ссылке: <https://regionalnyybankzadach.ru/>.

### Методическая особенность 1.

#### Возможность пользователей дополнять региональный банк самостоятельно составленными задачами

Региональный банк предоставляет возможность поддержки работы пользователей с разным уровнем доступа (читатель, составитель, администратор). На рис. 1 представлена функциональная модель регионального банка сквозных контекстных задач, демонстрирующая возможности пользователей на каждом уровне доступа.

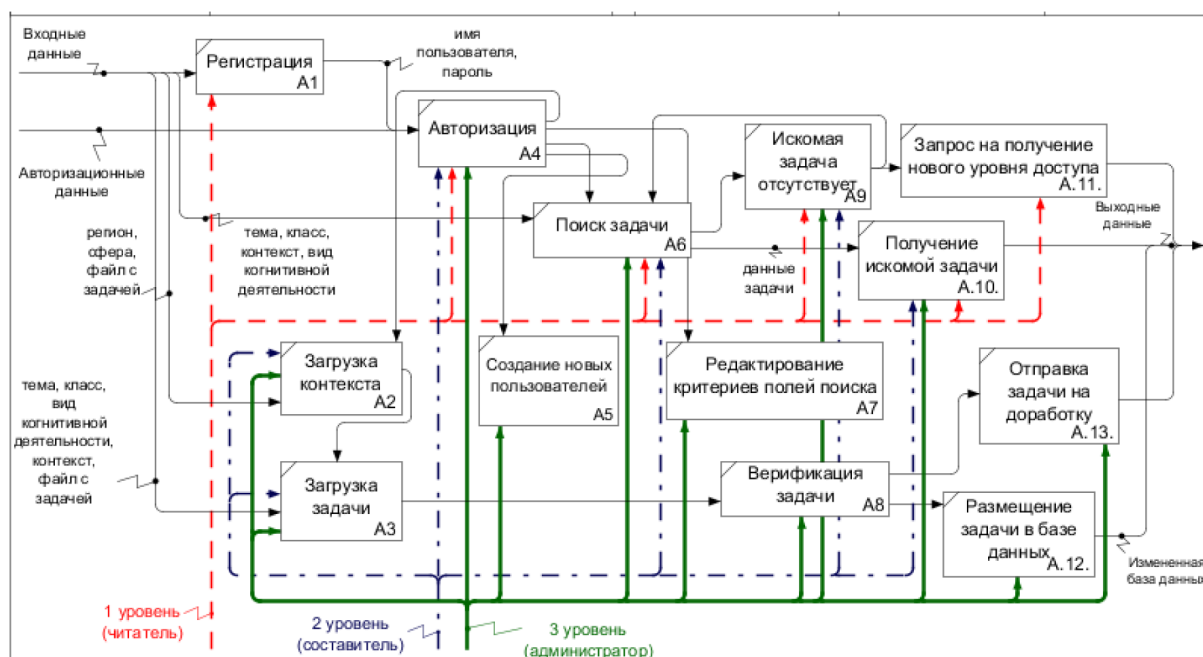


Рис. 1. Функциональная модель регионального банка

Вновь зарегистрировавшийся пользователь автоматически получает уровень доступа «читатель». Работая с ресурсом, пользователь может получить пустой результат на поисковый запрос, в этом случае система информирует пользователя о возможности самостоятельного составления задачи с целью дальнейшего включения ее в банк задач (рис. 2).

Рис. 2. Информирование пользователя об отсутствии задач

После согласования с администратором уровень доступа может быть повышен, что позволит пользователю пополнять банк задач новыми задачами, которые будут доступны остальным пользователям после прохождения процедуры верификации.

#### *Методическая особенность 2.*

*Возможность просмотра пользователем доступных региональных контекстов, атрибутов заданий, объединенных одним контекстом (классы, темы)*

Региональный банк предназначен для наполнения его сквозными контекстными задачами, под которыми мы понимаем особую разновидность комплексных контекстных задач, отдельные задания которых распределены по темам и годам обучения и пронизывают весь курс математики основной школы, обеспечивая возможность многократного возвращения к одному и тому же типовому региональному контексту.

Формирование поисковых запросов в региональном банке задач обеспечивается полями критериев с раскрывающимся списком атрибутов, описывающим каждое задание сквозной контекстной задачи: регион, класс, тема, формируемый вид когнитивной деятельности, название общего контекста. Стоит отметить, что для удобства работы учителей математики с банком задач обеспечена возможность формирования поискового запроса как по одному критерию, так и по нескольким критериям одновременно.

Результат поискового запроса по названию общего контекста, позволяет учителю увидеть весь спектр заданий разных классов, входящих в сквозную контекстную задачу, и спланировать темы, при изучении которых необходимо будет вернуться к решению жизненных ситуаций в рамках интересующего общего контекста. Наименование каждого задания состоит из четырех элементов: класс, номер задания в рамках класса, наименование общего контекста и тема урока. Представление результата поиска в таком виде позволяет выбрать задачу в рамках текущей

темы урока, исключив при этом необходимость предварительного просмотра каждой задачи. Пример результата поискового запроса по названию общего контекста «Особенности рациона жителей Севера» представлен на рис. 3.

Региональный банк контекстных задач Выйти из user1

Поиск задач Архангельская область

Выберите класс  | Выберите математическое содержание  | Выберите когнитивную деятельность

Выберите тему

Особенности рациона питания жителей севера\_Архангельская область

5.1\_Действия с десятичными дробями\_Особенности рациона питания жителей Севера ▲  
6.1\_Проценты\_Особенности рациона питания жителей севера  
7.1\_Линейное уравнение\_Особенности рациона питания жителей Севера  
9.1\_Элементы комбинаторики\_Особенности питания жителей Севера

Рис. 3. Задания, объединенные одним региональным контекстом

### Методическая особенность 3.

*Возможность отбора заданий, которые могут быть использованы при изучении данной темы*

Формирование поискового запроса по темам и годам обучения позволяет пользователю выбирать задачи в соответствии с возрастом обучающихся и математическим содержанием, рассматриваемым на текущий момент. Результатом поискового запроса является список задач, относящихся к выбранной теме. После выбора интересующей задачи пользователю предоставляется возможность предварительного просмотра задания и общего контекста, к которому оно относится, а также возможность их скачивания. Стоит отметить, что каждое задание дополнено решением, которое может увидеть пользователь после того, как скачает задание. Например, по теме «Шкалы и координатная прямая» в банке присутствует одна задача для обучающихся 5 класса (рис. 4).

Региональный банк контекстных задач Выйти из user1

Поиск задач Архангельская область

Выберите класс  | Выберите математическое содержание  | Выберите когнитивную деятельность

Шкалы и координатная прямая.

Выберите контекст

5.1\_Шкалы и координатная прямая\_Музей-заповедник "Малые Корелы" ▲

Рис. 4. Поисковый запрос по изучаемой теме



Возможность формирования поискового запроса по теме урока является преимуществом данного банка задач, способствующим сокращению времени, которое тратит учитель на подбор методических материалов, обеспечивающих формирование функциональной математической грамотности в учебном процессе.

Подводя итог, отметим, что представленный региональный банк сквозных контекстных задач позволит учителю организовать процесс формирования функциональной математической грамотности на региональном содержании, а также поделиться своими разработками. Содержание задач, включенных на данном момент в региональный банк сквозных контекстных задач, относится к Архангельской и Нижегородской областям. Дальнейшее развитие подобных банков может осуществляться как силами отдельных мотивированных пользователей созданных банков, так и в рамках реализации курсов повышения квалификации других учителей регионов.

### **Библиографический список**

1. Открытый банк заданий по формированию математической грамотности. URL: [https://www.centeroko.ru/mffg/mffg\\_bank\\_ml.html](https://www.centeroko.ru/mffg/mffg_bank_ml.html).
2. Перминова Л.М. Функциональная грамотность учащихся. Современный урок. М.: Департамент образования города Москвы. Московский институт открытого образования, 2009.
3. Сергеева Т.Ф. Функциональная грамотность. Тренажер. Математика на каждый день. 6–8 классы. М.: Просвещение, 2024. С. 112.
4. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень). URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13\\_ФРП\\_Математика\\_5-9-классы\\_база.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf)

**Резолюция**  
**ХIII Всероссийской с международным участием**  
**научно-методической конференции**  
**«Математика и математическое образование**  
**в эпоху цифровизации»**

Заслушав и обсудив пленарный и секционный доклады, участники конференции отмечают, что в настоящее время в высших учебных заведениях и школах страны при обучении математике успешно используются информационные технологии. Математические кафедры и кафедры информатики совместно с учителями, аспирантами и студентами ведут исследования и создают цифровые средства для применения их при обучении математике в школе и вузе. Эти средства далеко не всегда доходят до адресата, не все учителя и преподаватели, получившие доступ к ним, имеют возможность использовать их в учебном процессе.

Конференция считает целесообразным:

1. Рекомендовать кафедре математики и методики обучения математике Красноярского государственного педагогического университета имени В.П. Астафьева продолжить практику ежегодного проведения Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Математика и математическое образование в эпоху цифровизации», придав ей по возможности статус Международной конференции.

2. Оказывать поддержку Северному (Арктическому) федеральному университету им. М.В. Ломоносова (г. Архангельск) в проведении ежегодных конкурсов по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов.

3. Одобрить практику использования государственными педагогическими учебными заведениями и общеобразовательными школами отечественной интерактивной математической среды «1С: Математический конструктор» при обучении студентов – будущих учителей математики, а также для решения различных педагогических задач на уроках математики и во внеурочной деятельности.

Организационный комитет конференции

15 ноября 2024 года

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБЧИНЕЦ Диана Николаевна – студент, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: dianaabchinets4@gmail.com

АЗИМОВА Назира Самадовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры современных математических наук и естествознания, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики; e-mail: nazira-tgu@mail.ru

АНИСЬКИН Владимир Николаевич – кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета физики, математики и информатики, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: vnaniskin@gmail.com

АНТИПОВА Ирина Августовна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: iantipova@sfu-kras.ru

АНФИНОГЕНОВА Виктория Петровна – магистрант, институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: Mironova-vi-01@mail.ru

АШИХМИН Артем Сергеевич – студент, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова; e-mail: ashikhmin.art@gmail.com

БАДАК Бажена Александровна – заместитель декана факультета информационных технологий и робототехники, Белорусский национальный технический университет, г. Минск; e-mail: badak.b@bntu.by

БАРСУКОВА Виктория Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой функционального анализа и алгебры, Кубанский государственный университет, г. Краснодар; e-mail: barsukova.v.y@gmail.com

БЕЗУМОВ Андрей Александрович – программист, отдел стандартизации инструментария оценки качества образования, Московский центр качества образования; e-mail: andbezu@gmail.com

БЕКЕШЕВА Ирина Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий, институт естественных наук и математики, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, г. Абакан; e-mail: irriskay@mail.ru

БОБЫЛЕВА Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий, институт естественных наук и математики, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, г. Абакан; e-mail: nimda@bk.ru

БОРОДАТОВА Ангелина Сергеевна – студент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: angelinaborodatova@gmail.com

БОЧКАРЕВА Даниэла Владимировна – преподаватель, Новосибирский колледж легкой промышленности; e-mail: danaloro13@gmail.com

БУДНЕВИЧ Вера Семеновна – кандидат технических наук, преподаватель кафедры математики, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; e-mail: budnika11@mail.ru

БУРБУЖУК Долбан Эдуардовна – преподаватель кафедры математики, Тувинский государственный университет, аспирант Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: dburbuzhuk@mail.ru

ВАГИНА Мария Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; e-mail: vaginamu@csru.ru

ВЕСЕЛОВСКАЯ Анастасия Станиславовна – студент, Донской государственный университет, г. Донецк; e-mail: veselovskayaa@internet.ru

ВОЛК Анатолий Матвеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный технологический университет; e-mail: anatoliyvolk@mail.ru

ВОХТОМИНА Ева Дмитриевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: eva.vohtomina@yandex.ru

ГАГАРИНА Светлана Ивановна – учитель математики, физико-математическая школа-интернат Сибирского федерального университета, г. Красноярск; e-mail: svetivan.gagarina@yandex.ru

ГАЛИЕВА Елена Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: galievaev@mail.ru

ГАЛИМОВА Алсу Альмировна – студент, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: galimova.alsu@sgspsu.ru

ГАНЖА Александра Александровна – аспирант, Донской государственный университет, г. Донецк; e-mail: alexa.ganja@yandex.ru

ГАНЖА Елена Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: eiganzha@mail.ru

ГИМАТДИНОВА Галия Нурулловна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: frenchwomen\_2014@mail.ru

ГОСТЕВИЧ Татьяна Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики начального образования, Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Республика Беларусь; e-mail: gostevich@msu.by

ДАВЫДОВСКАЯ Валентина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: valentina\_dav@list.ru

ДАЛИНГЕР Виктор Алексеевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет; e-mail: dalinger@omgpru.ru

ДЕЙКУН Денис Геннадьевич – кандидат педагогических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков им. Героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: d.g.deykun@mail.ru

ДОМНЕНКО Татьяна Алексеевна – студент, Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул; e-mail: tanadomnenko@gmail.com

ДОНАКАЙ Ай-Чурена Радионовна – студент, институт естественных наук и математики, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, г. Абакан; e-mail: irrisskay@mail.ru

ДРОЗДОВА Анна Владиславовна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск; e-mail: drozdovaanya2000@mail.ru

ДУРАКОВ Евгений Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет; г. Красноярск; e-mail: edurakov@sfu-kras.ru

ДУРАКОВ Матвей Евгеньевич – магистрант, институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: durakov\_m\_1997@mail.ru

ДЮКИНА Наталья Геннадиевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко; e-mail: dyukinang@mail.ru

ЕВЕЛИНА Любовь Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет;  
e-mail: evelina@pgsga.ru

ЕВСЕЕВА Елена Геннадиевна – доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий государственный университет; e-mail: e.evseevs.dongu@mail.ru

ЕФРЕМЕНКО Анна Аркадьевна – учитель математики и информатики средней образовательной школы № 2 п. Солнечный; e-mail: lar2298@bk.ru

ЖАДАН Михаил Сергеевич – магистрант, Кубанский государственный университет;  
e-mail: strictemagister@mail.ru

ЖГИЛЕВ Максим Александрович – магистрант, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: zhgilev.m.a@edu.narfu.ru

ЖУРАВЛЕВА Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева;  
e-mail: zhuravlevanataly@mail.ru

ЖУЧКОВ Игорь Александрович – кандидат технических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков имени героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: zhuchkovi.53@mail.ru

ЗАХАРЬЯНЦ Артур Александрович – магистрант, Кубанский государственный университет;  
e-mail: arturzaharanc595@gmail.com

ИКОННИКОВА Татьяна Константиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры элементарной математики и теории чисел, Московский педагогический государственный университет;  
e-mail: ikonnikova.tk@mail.ru

ИЛЬИНА Ксения Алексеевна – студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет;  
e-mail: ilinaksenia02030@mail.ru

КАБАКОВА Татьяна Борисовна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова; заместитель директора по информационным технологиям, средняя школа № 45, г. Архангельск; e-mail: tanya\_02\_02@mail.ru

КЕЧИНА Ольга Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет;  
e-mail: olga.kechina@pgsga.ru

КИСЕЛЬНИКОВ Игорь Васильевич – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул;  
e-mail: Kiselnikov\_iv@altspu.ru

КЛИГИН Евгений Сергеевич – магистрант, Кубанский государственный университет; e-mail: Kligin03@mail.ru

КОБЫЧЕВА Валерия Сергеевна – аспирант, институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук; e-mail: kobycheva.valery@mail.ru

КОВАЛЬЧУК Софья Викторовна – студент, Белорусский национальный технический университет, г. Минск;  
e-mail: sofya.kovalchuk6@gmail.com

КОЗЛОВСКАЯ Инесса Станиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск; e-mail: kozlovskaja@bsu.by

КОПЫТОВ Лев Юрьевич – студент, институт математики, физики и информатики, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: l.kopytov04@mail.ru

КОРОЛЕВА Александра Сергеевна – студент, Сибирский (Арактический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск; e-mail: a.koroleva@narfu.ru

КОСАЧЕВСКИЙ Валерий Аркадьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; e-mail vakos32@yandex.ru

КОСТИН Сергей Вячеславович – учитель математики, школа № 1788 г. Москвы; старший преподаватель кафедры высшей математики, Российский технологический университет МИРЭА; e-mail: kostinsv77@mail.ru

КОТЕЛЬНИКОВ Евгений Вячеславович – доктор технических наук, доцент, профессор Школы вычислительных социальных наук Европейского университета в Санкт-Петербурге, профессор Вятского государственного университета; e-mail: kotelnikov.ev@gmail.com

КОХАН Павел Александрович – студент, Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина, Республика Беларусь; e-mail: paha06966@gmail.com

КОЧКИН Сергей Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, Сибирский (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: s.kochkin@narfu.ru

КРАВЦОВА Ольга Вадимовна – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры высшей математики № 2, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: ol71@bk.ru

КРУПИЦЫН Евгений Станиславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры элементарной математики и теории чисел, Московский педагогический государственный университет; e-mail: krupitsin@gmail.com

КУЗНЕЦОВА Ирина Сергеевна – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики, Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону; e-mail: ikuzn@mail.ru

КУЗНЕЦОВА Ксения Алексеевна – магистрант, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко; e-mail: rylovak21@gmail.com

КУЗЯЕВ Иван Рустамович – обучающийся 6 класса «В» средней школы № 6, г. Ачинск

КУЛЕШОВА Ирина Геннадьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул; e-mail: ira-asau@yandex.ru

КУЛИКОВА Юлия Дмитриевна – учитель математики, школа № 104, пос. Подгорный, Красноярский край; аспирант, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: malyvochka0@mail.ru

ЛАПШИНА Екатерина Максимовна – студент, Самарский государственный социально-педагогический университет; e-mail: lapshina.ekaterina@sgspsu.ru

ЛЕЙНАРТАС Евгений Денисович – аспирант, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; инженер-исследователь, Красноярский математический центр; e-mail: leinartas@yandex.ru

ЛЕОНОВ Александр Владимирович – аспирант, Смоленский государственный университет; e-mail: alexsandr.leo@yandex.ru

ЛИСИЦЫНА Мария Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; e-mail: m.lisitsyna@mail.ru



ЛОБАНОК Ирина Петровна – старший преподаватель кафедры теории и методики начального образования, Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Республика Беларусь; e-mail: lobanok@msu.by

ЛОЗОВАЯ Наталья Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева, г. Красноярск; e-mail: lozovayanat@mail.ru

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАКАРОВ Алексей Максимович – студент, Бийский филиал Алтайского государственного педагогического университета; e-mail: makarov.alex-24@yandex.ru

МАКАРОВА Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики, информатики, Бийский филиал Алтайского государственного педагогического университета; e-mail: fmfmak.on@mail.ru

МАКЕЕВА Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова; e-mail: mov\_ulspu@mail.ru

МАРТЫНОВА Елена Владимировна – доцент кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; e-mail: martynova@cspu.ru

МЕЩЕРКИН Алексей Игоревич – студент, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: alexeymeshcherkin@gmail.com

МИХАЛКИН Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: mikhalkin@bk.ru

МОГИЛЕВА Анна Михайловна – учитель математики, школа № 87 Петроградского района, г. Санкт-Петербург; e-mail: mogileva906@gmail.com

МОНГУШ Евгения Чечен-ооловна – студент, Тувинский государственный университет; e-mail: evgeshamen0307@mail.ru

МОЧАЛОВА Любовь Сергеевна – студент, Кузбасский гуманитарно-педагогический институт Кемеровского государственного университета; e-mail: m\_lyubov21@mail.ru

НАЗАРОВ Ахтам Пулатович – доктор педагогических наук, профессор, Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни; e-mail: ahtam\_69@mail.ru

НЕКРАСОВА Дарья Михайловна – магистрант, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко; e-mail: nekrasovadaryaforever@mail.ru

НИГМАТУЛИН Равиль Михайлович – доцент кафедры математики и методики обучения математике, кандидат физико-математических наук, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет; e-mail: ravil@cspu.ru

НИКИЧЕНКО Юлия Владиславовна – магистрант, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем; e-mail: nikichenko\_yulia@mail.ru

НИКИШИНА Татьяна Геннадьевна – кандидат философских наук; доцент кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону; e-mail: malvina.ru@list.ru

ОВЧИННИКОВА Анастасия Александровна – магистрант, Кубанский государственный университет; e-mail: vidra.02@mail.ru

ОСИПОВ Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: nnosipov@rambler.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: m.pavlova

ПАРФЕНТЬЕВА Любовь Васильевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: parfenteva-2001@mail.ru

ПАТРОНОВА Нина Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: n.patronova@narfu.ru

ПАШКОВСКАЯ Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева, г. Красноярск; e-mail: pashkovskayaolga@gmail.com

ПЕТРОВ Владислав Игоревич – учитель математики и информатики, лицей № 7, г. Минусинск; e-mail: petrovlad250796@gmail.com

ПОДУФАЛОВ Николай Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик РАО, г. Москва; e-mail: londont@mail.ru

ПОЗДНЯКОВА Елена Валерьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, физики и математического моделирования, Кузбасский гуманитарно-педагогический институт, Кемеровский государственный университет, г. Новокузнецк; e-mail: suppesev@mail.ru

ПОЛИЧКА Анатолий Егорович – доктор педагогических наук, доцент, профессор высшей школы естественных наук, математики и информационных технологий, Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск; e-mail: aepol@mail.ru

ПОЛТОРАЦКАЯ Татьяна Борисовна – старший преподаватель, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского; e-mail: tahr@inbox.ru

ПОМЕЛЬЦЕВА Марина Владимировна – учитель математики, школа № 150 имени героя Советского Союза В.С. Молокова, г. Красноярск; e-mail: pomeltseva@mail.ru

ПУКИТА Максим Геннадьевич – студент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань; e-mail: Pukita02@mail.ru

ПУТИНЦЕВА Ирина Викторовна – преподаватель математики и информатики, Красноярский техникум железнодорожного транспорта; e-mail: putinceva\_iv@krsk.irgups.ru

РАХИМОВА Махсуда Аюбовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики; г. Худжанд.; e-mail: rakhimova.makhsuda@bk.ru.

РОЖКОВ Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет; e-mail: great.ros.marine2@gmail.com

РОЩИНА Галина Александровна – учитель математики, физико-математическая школа-интернат Сибирского федерального университета, г. Красноярск; e-mail: roshina\_galina@mail.ru

СААЯ Сылдыс Казараковна – старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики, Тувинский государственный университет, г. Кызыл; e-mail: saaya@list.ru

САБИРОВА Эльвира Гильфановна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры начального образования, Казанский (Приволжский) федеральный университет; e-mail: sabirovaelli@yandex.ru

САБИТОВА Неля Раилевна – преподаватель математики, Альметьевский политехнический техникум, Республика Татарстан; e-mail: n.sab2010@yandex.ru

САРЫГЛАР Сайдыс Васильевна – старший преподаватель кафедры информатики, Тувинский государственный университет; e-mail: ya.saydis@yandex.ru

СЕВОСТЬЯНОВА Светлана Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; e-mail: sevostyanovasa@cspu.ru

СЕЛЕЗНЕВА Ольга Николаевна – магистрант, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: zlos4asteva2015@mail.ru

СЕМКИНА Василиса Матвеевна – ученица 11 класса средней школы № 45, г. Красноярск; e-mail: vasilisactg@gmail.com

СЕНАШОВ Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; e-mail: sen1112home@mail.ru

СЕНАШОВА Алёна Владимировна – студент, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: alena15senashova@gmail.com

СИВУХИНА Елена Александровна – магистр, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; частный преподаватель; e-mail: sivukhina08@gmail.com

СКАФА Елена Ивановна – доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и методики преподавания математики, Донской государственный университет, г. Донецк; e-mail: e.skafa@mail.ru

СКВОРЦОВА Дарья Александровна – ассистент кафедры высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий государственный университет; e-mail: dar\_skvor@mail.ru

СМОЛИНА Юлия Александровна – учитель математики, физико-математическая школа-интернат, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, e-mail: smolina.yuliya@mail.ru

СМОЛЯГИНА Виолетта Дмитриевна – студент, Лениногорский филиал Казанского национального исследовательского технического университета имени А.Н. Туполева – КАИ, г. Лениногорск; e-mail: vsmolyagina05@mail.ru

СТУПАК Елена Викторовна – учитель математики, лицей № 7, г. Минусинск; e-mail: elenstupak@mail.ru

СУДОЧАКОВА АНАСТАСИЯ СЕРГЕЕВНА – учитель математики, средняя школа № 6, г. Ачинск; e-mail: nastuxa\_008@mail.ru

ТАБИНОВА Ольга Александровна – кандидат педагогических наук; заместитель директора по учебно-воспитательной работе, Дивногорский колледж-интернат олимпийского резерва, Красноярский край; e-mail: tabinovaolga@mail.ru

ТИМОФЕЕВА Лариса Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; e-mail: tln142@mail.ru

ТРИШИН Павел Викторович – инженер-исследователь, Красноярский математический центр; e-mail: me@trishin.xyz.

ТРОИЦКАЯ Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; ; e-mail: o.troitskaya@narfu.ru

ТУКТАМЫШЕВА Елена Равилевна – преподаватель математики, «Многофункциональный региональный центр прикладных квалификаций «Техникум энергомашиностроения и металлообработки», г. Санкт-Петербург; e-mail: lenochka2303@mail.ru

ТУРЧИН Владимир Александрович – кандидат педагогических наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики), Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков им. Героя Советского Союза А.К. Серова; e-mail: tyrchin@rambler.ru

УРОДОВА Дарья Сергеевна – студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; e-mail: urodova.d@edu.narfu.ru

ФЕДОТОВА Вера Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики и информационных систем, Ленинградский государственный университет имени А.С. Пушкина; e-mail: vera1983@yandex.ru

ФЕЛЬБРИНА Светлана Валерьевна – учитель математики, физико-математическая школа-интернат, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, e-mail: hsv2000@mail.ru

ФОМИНА Анжелла Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, декан, Кузбасский гуманитарно-педагогический институт Кемеровского государственного университета, г. Новокузнецк; e-mail: angella\_fomina@mail.ru

ХЛОБЫСТОВА Ирина Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко; e-mail: hloirina@yandex.ru

ХОТЕНКО Ирина Валерьевна – учитель математики, средняя школа № 150 имени Героя Советского Союза В.С. Молокова, г. Красноярск; e-mail: Angirinas@mail.ru

ЦВЕТКОВА Инна Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону; e-mail: pilipenkoV@mail.ru

ЧУВАШОВ Семен Юрьевич – магистрант, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: schuvashov@sfu-kras.ru

ШАКИРЗЯНОВА Алина Александровна – преподаватель, ассистент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ; e-mail: AAShagiryanova@kai.ru

ШАШКИНА Мария Борисовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; e-mail: m\_shashkina@bk.ru

ШЕВЕЛЁВА Ирина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: sheveliv@gmail.com

ШИПИЛОВА Ольга Геннадьевна – учитель математики, физико-математическая школа-интернат Сибирского федерального университета, г. Красноярск; e-mail: pola-70@mail.ru

ШУТРОВА Ирина Владиславовна – ассистент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск, e-mail: schutrova.ir@yandex.ru

ЩЕРБИНА Полина Алексеевна – студент, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; e-mail: pashch.diogen@gmail.com

ЯСТРЕБОВ Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского; e-mail: alexander.yastrebov47@gmail.com

PHAN Quang Khanh – инженер-исследователь Красноярского математического центра, Сибирский федеральный университет, Гимназия Йэн Тхань, Нгеан, Вьетнам; e-mail: phquangkhanh@gmail.com

Осенняя научная сессия КГПУ им. В.П. Астафьева  
«Система педагогического образования –  
ресурс развития общества»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ  
В ЭПОХУ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Материалы XIII Всероссийской с международным участием  
научно-методической конференции

Красноярск, 14–15 ноября 2024 г.

*Электронное издание*

Редактор *А.П. Малахова*  
Корректор *Ж.В. Козупица*  
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.  
Отдел научных исследований и грантовой деятельности КГПУ им. В.П. Астафьева,  
т. 8(391) 217-17-82

Подготовлено к изданию 02.12.24.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 59,0