МОЛОДЕЖЬ И НАУКА XXI ВЕКА

XXV Международный форум студентов, аспирантов и молодых ученых

II Межрегиональный Креатив-форум школьников Енисейской Сибири

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В КОНТЕКСТЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Материалы II Межрегионального Креатив-форума школьников Енисейской Сибири

Красноярск, 16 мая 2024 года

Электронное издание

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА XXI ВЕКА

XXV Международный форум студентов, аспирантов и молодых ученых

II Межрегиональный Креатив-форум школьников Енисейской Сибири

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В КОНТЕКСТЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Материалы II Межрегионального Креатив-форума
школьников Енисейской Сибири

Красноярск, 16 мая 2024 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2024

ББК 22.1
М 34

М 34 **Математические исследования обучающихся в контексте развития региона**: материалы II Креатив-форума школьников Енисейской Сибири. Красноярск, 16 мая 2024 г. [Электронный ресурс] / ред. кол.: А.В. Багачук, О.В. Берсенева (отв. ред.). – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2024. – (Молодежь и наука XXI века). – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-700-3

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-700-3

(XXV Международный научно-практический форум студентов, аспирантов и молодых ученых «МОЛОДЕЖЬ И НАУКА XXI ВЕКА»)

СОДЕРЖАНИЕ

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА π МЕТОДАМИ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

А.Р. Аскаров,
обучающийся (7 класс), средняя школа № 31, г. Норильск
Научный руководитель **Р.Х. Аскаров***,*
учитель физики, средняя школа № 31, г. Норильск

Аннотация. В работе приведены различные способы вычисления числа π, а именно методами геометрии, физики, вероятности. Приведено сравнение представленных методов.
Ключевые слова: *число π, опыт, моделирование.*

Мир чисел интересен и разнообразен. Есть числа простые и составные, рациональные и иррациональные, целые, натуральные, действительные. Среди них есть и трансцендентные числа. Другими словами, это числа, у которых после запятой бесконечно большое количество цифр, среди которых нет никакого порядка. Самое известное – это число π, которое является трансцендентным. Приведем способы вычисления такого числа тремя методами.

1. Вычисление числа π методами геометрии. Были выбраны пять круглых предметов. Результаты измерений их длин окружностей и диаметров заносились в таблицу. Затем в программе Excel были проведены вычисление числа π как отношения длины окружности к диаметру и анализ полученных значений. С учетом погрешностей получен диапазон для числа π в каждом опыте.

Обрабатывая полученные данные, мы пришли к выводу, что при уменьшении погрешности при измерении диапазон полученных значений для числа π уменьшается, значит, растет точность. Также можно заметить, что точность растет и с увеличением самой окружности. Увеличив диаметр еще в несколько раз, мы можем приблизиться в вычислениях к архимедову числу 3,14.

Данный способ дает достаточно приближенное значение числа π, но позволяет хорошо выявить закономерности, от чего зависит точность вычислений.

2. Вычисление числа π методами физики. Было проведено десять опытов, в которых измерялся период колебаний маятников различной длины. Результаты измерений заносились в таблицу. Затем в программе Excel было проведено вычисление числа π, а также анализ полученных значений. С учетом погрешностей был получен диапазон для числа π в каждом опыте. Число π определялось из формулы для нахождения периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где g – ускорение свободного падения.

Так как вследствие того, что Земля имеет форму не идеального шара, а сплюснута с полюсов вследствие вращения вокруг своей оси, ускорение свободного падения увеличивается с ростом широты местности. Для Норильска оно равно примерно 9,825 м/с^2 [2]. Высоту над уровнем моря можно было не учитывать, она достаточно мала (51 метр).

Результаты показывают, что данный способ не является надежным с точки зрения правильности нахождения искомой величины. Из 7 проведенных опытов в 5 первых с длиной нити менее 150 см полученный результат не согласуется с числом π во втором знаке после запятой. По всей вероятности, это связано с тем, что во время колебаний присутствует сила трения, меняется сила натяжения нити и пр. Однако стоит отметить, что также прослеживается уменьшение диапазона, в котором определяется число π с увеличением измеряемых параметров, причем сам диапазон меньше, чем в предыдущем методе вычисления.

Данный способ при небольших значениях длины нити дает несколько неверное значение числа π, но при значениях более 1,5 метра результат оказался более точным. Для вычисления числа π подобным способом стоит свести к минимуму силу трения в нитяном маятнике, а также целесообразно использовать датчики для более точного измерения периода колебаний.

3. Вычисление числа π методами теории вероятности. В данном случае использован метод Монте-Карло. Суть его применения состоит в том, чтобы использовать вероятность попадания точки в круг, вписанный в квадрат. Изначально идея состояла в том, чтобы использовать реальный шарик, квадрат с границами, внутри которого нарисована окружность. Однако при этом шарик будет иметь некоторые размеры, и в некоторых случаях невозможно будет определить, вошел ли он внутрь круга или нет. Поэтому было решено использовать компьютерную программу, моделирующую бросания шарика.

Вероятность попадания шарика внутрь круга равна отношению площади круга к площади квадрата: $\frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$. При проведении n-испытаний шарик окажется в круге несколько раз. Обозначим это число m. Тогда вероятность попадания шарика внутрь круга равна $\frac{m}{n}$. Так как $\frac{m}{n} = \frac{\pi}{4} \;=>\; \pi = \frac{4m}{n}$.

При вычислении был использован квадрат со стороной $2{\cdot}10^6$, круг радиуса 10^6. Была написана программа на языке Pyton, которая случайным образом задавала координаты точки в пределах квадрата и проверяла попадание данной точки во вписанный круг.

При запуске программы (рис. 1) задавалось различное число «бросаний». Так как алгоритм выбора точки случаен, то значения числа π получались различными, но при этом хорошо заметно, что с увеличением количества «бросаний» растет точность полученного значения.

Данный способ можно считать наилучшим, так как не требует большого количества времени, практически не нужны измерения, необходимо только проводить «бросания» шарика. Так как непосредственные бросания мы заменили компьютерной программой, то она позволяет производить большее количество этих действий, что приводит к получению числа π с точностью до третьего знака после запятой при выполнении около миллиона операций.

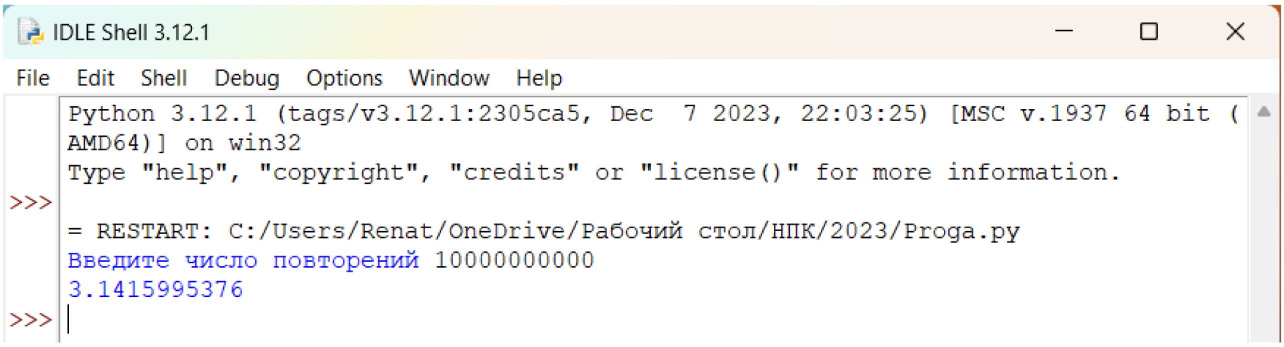


Рис. 1. Фрагмент программы на языке Pyton

Изучив литературу, проведя эксперименты и вычисления, заставив свой компьютер трудиться над вычислением числа π, мы пришли к нескольким выводам.

Во-первых, для достижения точного результата нужно проводить большое количество опытов, использовать приборы с маленькой погрешностью и учитывать все возможные факторы, которые могут повлиять на результат.

Во-вторых, наиболее точно определить число π позволяет метод, который очень прост, но в школьном курсе он не рассматривается. Хотя мы изучаем и площади квадратов и кругов, и вероятность.

В-третьих, компьютерное моделирование позволяет ускорить процесс подсчета минимум в сотни миллионов раз.

В завершение о том, каким образом работали компьютеры корпорации Google, когда в июне прошлого года установили новый рекорд расчета числа π [1]. При этом был использован несколько иной алгоритм – формула Грегори-Лейбница [4]. На расчеты с помощью платформы Google Cloud ушло 157 дней, 23 часа, 31 минута и 7,651 секунды. Платформа обработала 82 000 ТБ-данных, задействовав 128 процессоров, 864 ГБ оперативной памяти и 554 ТБ объема накопителей. Теперь известны 100 триллионов знаков после запятой.

Подобный алгоритм мы также воспроизводили. Программа содержит меньшее количество операций. При этом с каждым шагом точность будет точно расти, в отличие от метода геометрической вероятности, где повышение точности заметно только с увеличением количества бросаний примерно в 10 раз.

Для сравнения мы использовали то же число повторений – 10 миллиардов. На выполнение расчетов ушло 88 минут (рис. 2).

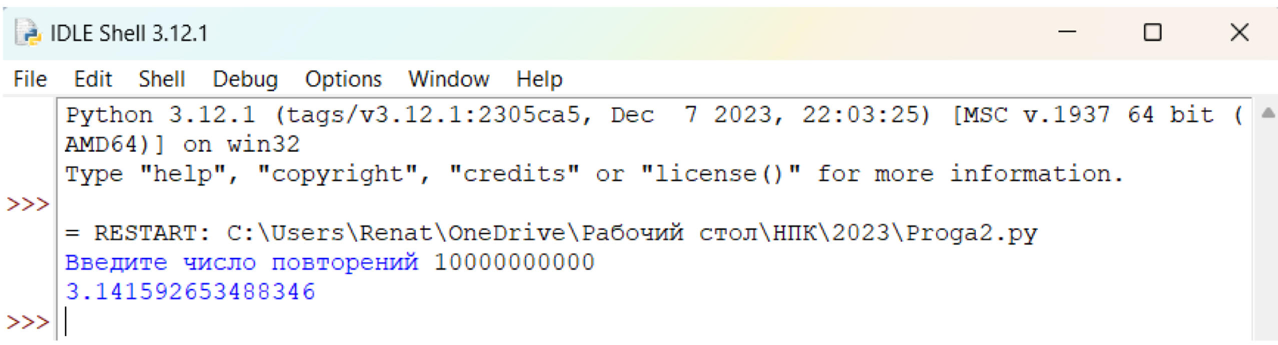


Рис. 2. Фрагмент программы на языке Pyton (случай для воспроизведения алгоритма)

Закон распределения цифр в десятичном представлении числа π пока не найден. Возможно, он и не будет найден никогда. Однако для надежды на его существование есть все основания.

Библиографический список

1. Еще больше чисел «пи» в небе: вычисление 100 триллионов цифр числа «пи» в Google Cloud. URL: https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud
2. Жуков А.В. Вездесущее число «пи». М.: Едиториал, 2004, 216 с.
3. Инженерный справочник, ускорение свободного падения для разных широт на уровне моря. URL: https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/ConstantsAlphabetsNaming/FreeFallAcceleration/ http://Wikipedia.org
4. Что такое число пи? URL: https://robotrackkursk.ru/pc/28-faktov-o-cisle-pi.html
5. Шумихин С., Шумихина А. Число Пи. История длиною в 4000 лет. М.: Эксмо, 2011. 192 с.

ТАКИЕ НУЖНЫЕ ДРОБИ

А.А. Арсланова, А.С. Зубарева,
обучающиеся (4 класс), лицей № 6 «Перспектива», г. Красноярск
Научный руководитель **Т.А. Шпедт,**
учитель начальных классов,
лицей № 6 «Перспектива», г. Красноярск,
почетный работник воспитания и просвещения РФ

Аннотация. В работе обосновывается востребованность знаний об обыкновенных дробях в повседневной жизни, рассматривается понятие обыкновенной дроби, простейшие действия с дробями, использование навыков операций с дробями в различных жизненных ситуациях.
Ключевые слова: *обыкновенные дроби, действия с дробями, использование дробных чисел в повседневной жизни.*

Дроби – достаточно сложная тема в математике, и некоторым она дается с трудом. При этом мы, сами того не подозревая, сталкиваемся с дробями с самого детства. Так, часто мы слышим: «Дай, пожалуйста, мне половинку шоколадки», «Давай разделим апельсин поровну», «Я еще четверть часика поиграю с друзьями на улице», «Мы прошли треть пути»» и т. п. Как без знания дробей поделить пять яблок на четверых, чтобы никого не обидеть? Мы поняли, что дроби знать нужно. Но как сделать так, чтобы одноклассники поняли важность этой темы и смогли хорошо разобраться в обыкновенных дробях и действиях с ними?

Начать мы решили с истории возникновения дробей, ведь иногда в сути понятия проще разобраться, заглянув в истоки его возникновения. В средние века, как и в древности, учение о дробях считалось самым трудным разделом арифметики. Римский оратор и писатель Цицерон говорил, что без знаний дробей никто не может признаваться знающим арифметику.

В Древнем Египте обозначали дроби не так, как обозначаем их мы: вверху – числитель, ниже черты – знаменатель. У них черты дроби не было, специального общего для всех дробей способа обозначения не было. Египтяне употребляли только дроби с числителем единица. Они все дроби старались записать как суммы долей. Например, вместо $\frac{8}{15}$ они писали $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. На протяжении многих веков египтяне именовали дроби «ломаным числом», а первая дробь, с которой они познакомились, была $\frac{1}{2}$. За ней последовали $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$… затем $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, т. е. самые простые дроби, называемые единичными или основными дробями [1].

В Древнем Китае обозначали дробь словами, используя меры длины чи: цуни, доли, порядковые, шерстинки, тончайшие, паутинки. Дробь вида 2,135436 выглядела так: 2 чи, 1 цунь, 3 доли, 5 порядковых, 4 шерстинки, 3 тончайших, 6 паутинок [1].

В русском языке слово «дробь» появилось лишь в VIII в. Происходит слово «дробь» от слова «дробить, разбивать, ломать на части». В первых учебниках дроби назывались «ломаные числа». В старых руководствах находили следующие названия дробей на Руси: $\frac{1}{2}$ – половина, полтина, $\frac{1}{3}$ – треть, $\frac{1}{4}$ – четь, $\frac{1}{6}$ – полтреть, $\frac{1}{8}$ – полчеть, $\frac{1}{12}$ – полполтреть, $\frac{1}{5}$ – пятина, $\frac{1}{7}$ – седьмина, $\frac{1}{10}$ – десятина [2].

Изучив литературу и поняв, что дроби к нам пришли очень давно, мы решили узнать у одноклассников, что они знают о дробях. Для этого мы провели опрос, задав следующие вопросы.

1. Как вы думаете, нужны ли современному человеку в жизни знания о дробях?
2. Хотели бы вы узнать больше про дроби?
3. В каких профессиях чаще всего люди используют знания о дробях?
4. Испытываете ли вы трудности при работе с дробями?

Результаты опроса представлены на диаграмме (рис.).

Рис. Результаты проведенного опроса

Как видно, большинство одноклассников считают важными знания о дробях и хотели бы узнать о них больше. Более 50 % недостаточно хорошо, на их взгляд, знают дроби и испытывают трудности в работе с ними. Кроме того, по мнению учеников, больше всего дроби нужны учителям, на втором месте по популярности стали ученые, на третьем – бухгалтеры.

Для обоснования важности изучения дробей мы решили показать одноклассникам, что есть огромное количество профессий, для которых просто необходимы знания о дробных числах. Так, ноты в музыке отличаются по длительности их звучания. Знаком обозначают целую ноту, нота вдвое короче – половинная. Аналогично определяются четвертные, восьмые, шестнадцатые. Поэтому дроби нужны музыкантам.

Участки земной поверхности изображаются на карте в уменьшенном виде, для этого используется понятие масштаба: отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности. Например: масштаб $\frac{1}{10000}$ карты означает, что 1см на карте соответствует 10 000 см на местности. Поэтому дроби нужны и путешественнику, и географу. Врачу нужно рассчитать дробные дозировки лекарства. Даже продавец должен знать десятичные дроби, так как цена дорогих продуктов часто выставляется за 100 граммов (0,1 кг).

Изучив историю возникновения дробей, рассмотрев области их применения можно сделать вывод о том, что дроби нашли широкое применение в окружающей нас жизни и в различных науках. Значение дроби в жизни человека трудно переоценить. Поэтому просто необходимо научиться в них хорошо разбираться, а для этого мы придумали несколько пособий, которые помогут отработать навык выполнения действий с дробями. Мы уверены, что этот навык поможет нашим одноклассникам быть более успешными не только в математике, но и в повседневной жизни.

Библиографический список

1. Дроби в ранних цивилизациях. URL: https://habr.com/ru/articles/ 800753/
2. Обыкновенные дроби: определение, примеры, действия, доли, числитель и знаменатель. URL: https://skysmart.ru/articles/mathematic/obyknovennye-drobi
2. Энциклопедия для детей. Математика. М.: Аванта+, 1998. Т. 11.

ИНВЕСТИЦИИ В БУДУЩЕЕ

А.А. Головкова,
обучающийся (7 класс), гимназия № 11, Красноярск
Научный руководитель **Ю.А. Цыбулько***,*
учитель математики, гимназия № 11, Красноярск

Аннотация. В настоящем проекте затронуты основы финансовой грамотности школьников. Приведены понятия финансовых активов и их свойства, горизонты планирования, инструменты сохранения и приумножения денег, их достоинства и недостатки. Рассмотрены вопросы финансового планирования и даны рекомендации по безопасному вложению денег. Проект носит прикладной характер, т. к. в нем на реальном примере разобраны способы вложения финансовых средств и их преимущества друг перед другом.
Ключевые слова: *деньги, финансовые активы, акции, БПИФ.*

Чтобы стать состоятельным и успешным, необходимо получить образование и компетенции в той сфере, где планируешь себя реализовать, быть конкурентоспособным и развиваться в дальнейшем. Иными словами, быть востребованным высококвалифицированным специалистом на рынке труда с достойным уровнем заработной платы. Чтобы начать сохранять и приумножать финансовые средства, не надо быть посвященным в орден избранных. Достаточно базовых знаний финансовой грамотности и небольшой суммы денег. Зарабатывать могут даже школьники.

1. Введение

Любое дело лучше начинать с понятной цели. В инвестировании их две – сохранить деньги от обесценивания и инфляции и заработать. Для достижения первой больше подходят консервативные инструменты с минимальным риском и обычно не самым высоким процентом, а также накопительное страхование жизни (НСЖ). Для второй выбирают более рискованные варианты, например акции. Опытные инвесторы умеют находить баланс между первым и вторым, распределяя деньги между разными «корзинами». Но если опыта мало, то лучше остановиться на консервативном варианте.

Цель проекта: научиться сохранять и приумножать свободные денежные средства.

2. Активы

Активы – это все, чем может распоряжаться компания или частное лицо в своей деятельности. В состав активов включается не только имущество, но и задолженность других лиц перед компанией. Например, деньги, которые должны заплатить компании-покупатели за уже отправленную им продукцию или за уже оказанные им услуги.

Актив одновременно обладает тремя свойствами: надежность, доходность, ликвидность.

Доходность – это доход на вложенный капитал. Доходность состоит из двух компонентов: текущего дохода и прироста стоимости актива. Надежность – это минимизация риска. Инвестор не желает нести потери. Он хочет гарантии сохранности вложенного капитала. Ликвидность – это возможность быстро обратить актив в деньги без существенных финансовых потерь [1].

3. Составление финансового плана

Первое, что необходимо сделать перед выбором финансовой стратегии вложения денег, это составить личный финансовый план, чтобы определить количество свободных финансовых средств для будущих вложений.

Возможные варианты, куда эти деньги можно вложить, представлены на рис. 1.

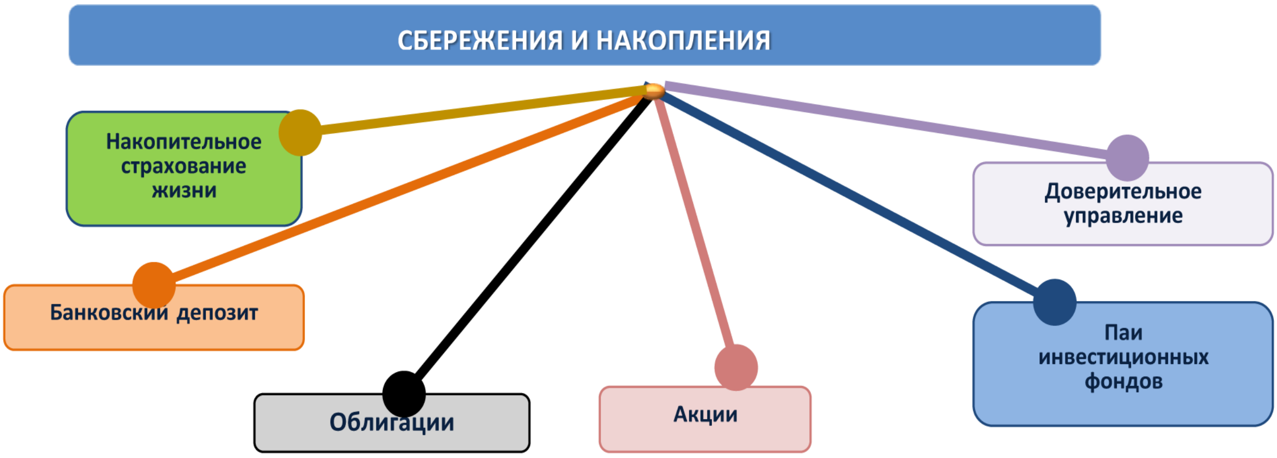


Рис. 1. Виды сбережений и накоплений

4. Анализ финансовых инструментов

Проанализируем существующие финансовые инструменты:

– накопительное страхование жизни;
– банковские вклады и депозиты;
– инвестиции (акции, облигации, ПИФ, доверительное управление).

НСЖ работает по следующей схеме. Один из родителей заключает договор со страховой компанией, указывая ребенка в качестве застрахованного. Можно выбрать срок и приемлемый для семейного бюджета объем регулярных отчислений (страховых взносов). Компания инвестирует полученные взносы, формируя дополнительный доход, который вместе со страховой суммой, указанной в договоре, будет выплачен по окончании действия программы, например по достижении 18 лет.

В приложении банков есть разные продукты, в которые можно вкладывать деньги. Накопительный счет – один из самых надежных и понятных инструментов. Когда ключевая ставка ЦБ находится на повышающемся тренде, многие организации предлагают хороший процент по вкладам. Обычно приложение сразу показывает, какой доход можно получить через три месяца, полгода, год.

Акция – ценная бумага, подтверждающая право собственности на небольшую долю в компании. Выпускать их могут только юридические лица, имеющие статус акционерного общества. Человек, приобретающий акции, становится совладельцем бизнеса и имеет право на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов. Его доля пропорциональна количеству ценных бумаг.

Биржевые паевые инвестиционные фонды (БПИФ) – это уже готовые портфели активов, в которых есть и акции, и облигации. Эти портфели составлены так, чтобы минимизировать риски. Их можно покупать даже на небольшие суммы. Участвовать в БПИФ может даже ребенок, для чего родитель должен оформить ему индивидуальный инвестиционный счет (ИИС). Однако подписывать финансовые документы до 14-летия ребенка придется родителям, а после 14 лет потребуется их письменное разрешение.

Если вы неопытный инвестор, то для вас подойдет доверительное управление вашими активами. Для этого необходимо заключить договор с брокером или брокерской фирмой, которая, опираясь на свой богатый опыт инвестирования, будет вкладывать ваши сбережения наиболее безопасным и эффективным способом. Брокер будет ежемесячно отчитываться перед вами о состоянии дел, а по окончании финансового года получит с вашей прибыли незначительный процент за свои услуги.

5. Определение финансовой стратегии

Существуют временные горизонты финансового планирования:

Краткосрочные цели (до 1 года)	Среднесрочные цели (1–10 лет)	Долгосрочные цели (более 10 лет)
Направлены на решение текущих финансовых задач. Их достижение обеспечивается балансировкой доходов и расходов путем ведения семейного бюджета	Направлены на решение финансовых задач, связанных с крупными приобретениями. Их достижение обеспечивается умением формировать сбережения	Направлены на создание накоплений, обеспечивающих финансовое благополучие и финансовую независимость в будущем

Для определения финансовой стратегии сравним все три варианта приумножения средств в рамках среднесрочной цели (5 лет), произведя расчет (рис. 2).

	НСЖ			Банковский вклад			
Срок, лет	Взнос/ Пополнение, р	Ставка, %	Нарастающий итог, р	Вклад/ Пополнение, р	Ставка, %	Нарастающий итог, р	
1	20 000,00	8,31	21 662,00	20 000,00	12,60	22 520,00	
2	20 000,00	8,31	45 124,11	20 000,00	12,60	47 877,52	
3	20 000,00	8,31	70 535,93	20 000,00	12,60	76 430,09	
4	20 000,00	8,31	98 059,46	20 000,00	12,60	108 580,28	
5	20 000,00	8,31	127 870,20	20 000,00	12,60	144 781,39	

	Инвестиции в ценные бумаги *						
	**Стоимость акций Лукойла, р	Ставка, %	Нарастающий итог, р	**Стоимость акций Банка Санкт-Петербург, р	Ставка, %	Нарастающий итог, р	Всего доход по инвестициям, р
1	9 500,00	27,00	12 065,00	10 410,48	24,58	12 969,38	25 034,38
2	9 500,00	27,00	27 387,55	10 410,48	24,58	29 126,62	56 514,17
3	9 500,00	27,00	46 847,19	10 410,48	24,58	49 255,32	96 102,51
4	9 500,00	27,00	71 560,93	10 410,48	24,58	74 331,66	145 892,59
5	9 500,00	27,00	102 947,38	10 684,44	24,58	105 913,06	208 860,44

* - С целью снижения риска обвала котировок ценных бумаг, рекомендуется средства вкладывать в разные "портфели". Например, имея 20000 р, приобретем 1 акцию Лукойла и 38+ акций БанкаСанкт-Петербург, вдальнейшем пополняя портфели в той же пропорции.

1 Акция ЛукОйла стоит 9500 р./шт. Остается 10500 р на которые можно купить 38 акций БанкСанкт-Перебург по цене 273,96 р./шт. Остаток денег 89,52 р перенесем на последующие годы и таким образом, на пятый год мы сможем приобрести 39 акций Банка. Если не выводить дивиденты, то на них также начисляется процент на доход.

Рис. 2. Расчеты для определения финансовой стратегии

Таким образом, наиболее эффективным способом приумножения финансовых средств является инвестирование в ценные бумаги, что видно из таблицы.

Таким образом, рассмотрены три варианта вложения свободных денег.

Первый – НСЖ – обладает максимальной защитой жизненно важных интересов, однако не позволяет приумножить средства, а только защитить их от обесценивания (инфляции). Второй позволяет самостоятельно вкладывать средства в банковские продукты (депозиты и вклады) и обладает оптимальной доходностью и минимальным риском. Третий – инвестиции – является высокорисковым способом вложения денежных средств, т. к., не имея соответствующих компетенций и опыта, очень сложно разобраться в правилах работы рынка ценных бумаг, из-за чего можно легко потерять денежные средства. Основным достоинством данного способа является высокая доходность.

Для развития своего проекта мы собираемся изучить метод сложных процентов, что позволит рассчитать, каким образом будут влиять на будущую прибыль годовая инфляция и процентная ставка Центробанка с учетом прогнозных данных.

Библиографический список

1. Официальный сайт Сбербанка. URL: http://www.sberbank.ru
2. Тарасова А. Сам себе финансист. Как тратить с умом и копить правильно. М.: Альпина Паблишер, 2018. 211 с.
3. Шефер Б. Путь к финансовой свободе. М.: Лабиринт, 2020.

ПРИЗНАКИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТРЕХ ТОЧЕК ОДНОЙ ПРЯМОЙ

В.В. Кокорин,
Красноярский кадетский корпус имени А.И. Лебедя
Научный руководитель: **Г.А. Атаманская***,*
учитель математики,
Красноярский кадетский корпус имени А.И. Лебедя

Аннотация. В статье описываются основные признаки коллинеарности трех точек, с помощью которых можно решать всевозможные задачи. Помимо этого, рассматриваются некоторые теоремы, в которых описаны прямые, проходящие через особые точки в геометрических объектах. Приводятся примеры задач на применение всех признаков.
Ключевые слова: *прямая, коллинеарность трех точек, прямая Эйлера, прямая Симсона, теорема Менелая.*

Прямая – одна из базовых фигур в геометрии, которая является бесконечно длинным и узким объектом. Из курса геометрии мы знаем, что через две различные точки проходит одна прямая. Это можно объяснить тем, что две точки определяют направление и наклон прямой. Однако, когда имеется третья точка, существуют два возможных варианта: все точки лежат на одной прямой или не лежат. Умение находить три точки, принадлежащие одной прямой, позволяет решать различные задачи, связанные с построением и анализом фигур.

Отметим, что если три точки лежат на одной прямой, то они называются коллинеарными. Цель статьи – найти признаки, по которым можно определить коллинеарность трех точек.

Определим признаки коллинеарности трех точек, которые являются самыми распространенными. Назовем эти признаки базовыми.

Признак 1.1. Пусть точки A, B, C расположены так, что у $\angle ABC$=180 °, тогда A, B и C коллинеарные.

Признак 1.2. Если нам даны точки A, B, C и $AB + BC = AC$, то эти три точки лежат на одной прямой.

Признак 1.3. Пусть точки A и B образуют прямую $y=kx+b$ в некоторой координатной плоскости, точка C имеет координату $(a;c)$, тогда точки A, B, C будут коллинеарными, если будет выполняться равенство $c=ka+b$.

Признак 1.4. Если прямой DE принадлежит точка B, точки A и C находятся в разных полуплоскостях относительно DE, и угол DBA равен углу EBC, тогда либо DE – биссектриса угла ABC, либо точки A, B и C принадлежат одной прямой.

Помимо базовых признаков, определяющих принадлежность трех точек одной прямой, существуют точки в геометрических объектах, коллинеарность которых уже доказана известными математиками. Сами по себе эти факты могут выступать в качестве вспомогательных утверждений для решения задач и доказательства других теорем. Перечислим теоремы, определяющие коллинеарность трех точек, и назовем их «удивительными признаками».

Теорема 2.1. (Прямая Эйлера) В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой – прямой Эйлера [2].

Теорема 2.2. (Прямая Симсона) Основания перпендикуляров, опущенных из точки S описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой [2].

Теорема 2.3. (Теорема Менелая). Если в треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *BC* расположены точки C_1 и A_1 соответственно, а на продолжении стороны *AC* расположена точка B_1, то для того, чтобы A_1, B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно выполнения следующего равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Теорема 2.4. (Прямая Штейнера) Точку описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон треугольника. Полученные таким образом точки будут лежать на прямой Штейнера точки *R* относительно треугольника *ABC* [3].

Теорема 2.5. (Теорема Дроз-Фарни) Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Середины этих отрезков лежат на одной прямой [3].

Таким образом, мы определили четыре базовых признака коллинеарности трех точек, которые широко применяются как в доказательстве теорем, так и при решении стандартных школьных задач, а также рассмотрели «удивительные признаки», применение которых используется в олимпиадных задачах и высшей математике. По итогам работы мы начали создавать сайт [1] с подборкой задач и их решениями на применение всех признаков. Некоторые задачи из сайта представлены ниже.

Задача 1. В ромбе *ABCD* отметили точку *M* так, что треугольник *BCM* – равносторонний. Биссектриса угла *ABM* пересекает диагональ *AC* в точке *F*. Докажите, что точки *F*, *M* и *D* лежат на одной прямой. (При решении применяется признак 1.1.)

Задача 2. В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен 60°. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник. (При решении применяется теорема 2.1.)

Задача 3. Точки *A, B* и *C* на одной прямой, а точка *P* вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников *ABP, BCP, ACP* и точка *P* лежат на одной окружности. (При решении применяется теорема 2.2.)

Задача 4. Дан треугольник *ABC* и точки *P* и *Q*, лежащие на его описанной окружности. Точку *P* отразили относительно прямой *BC* и получили точку P_a.

Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A_1. Точки B_1 и C_1 строятся аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. (При решении применяется теорема 2.3.)

Задача 5. Лежат ли точки $A(3;3)$, $B(1;5)$ и $C(7;8)$ на одной прямой? (При решении применяется признак 1.2.)

Библиографический список

1. Кокорин В.В. Признаки принадлежности трех точек. URL: https://sevakok09.wixsite.com/my-site-1
2. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Геометрия. 8 класс: углубленный уровень. М.: Вентана-Граф», 2019. 222 с.
3. Швецов Д. От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни // Квант. 2009. № 6. С. 44–47.

АЛГОРИТМЫ В ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

Ф.В. Панов,
обучающийся (6 класс), лицей № 6 «Перспектива», Красноярск
Научный руководитель **Д.А. Панова**

Аннотация. В работе рассматривается возможность алгоритмизации различных учебных действий с целью повышения успеваемости обучения. Предъявляются алгоритмы, встречающиеся в повседневной жизни, пословицах, сказках, песнях. Обосновывается потребность использования алгоритмов в учебной деятельности, а также как средство формирования самостоятельности, на примере моего младшего брата. Приведены авторские алгоритмы и разработано пособие «Подружись с алгоритмами» для учащихся 6-х классов.
Ключевые слова: *алгоритмы, алгоритмизация учебных действий, виды и способы записи алгоритмов, свойства алгоритмов, сборник алгоритмов.*

В повседневной жизни мы не замечаем, как используем те или иные алгоритмы: как правильно чистить зубы, принять душ, одеться в школу и многое другое. Значит, мы пользуемся алгоритмами ежедневно, даже ежеминутно. Цель работы – создание компактного сборника алгоритмов для учащихся 6-х классов для достижения успешной учебы. Для этого я решил сначала научиться составлять алгоритмы для различных жизненных ситуаций для себя и своего младшего брата. Работая над данной темой, мы создали пособие, в которое включили алгоритмы по русскому языку, математике и литературному чтению. Совместно с одноклассниками научились использовать алгоритмы и применять их в своей учебной деятельности. Теперь знаем, как можно и нужно использовать алгоритмы с пользой.

Можно ли разрабатывать свои алгоритмы? Можно ли научиться этому? Помогут ли они в жизни и в учебной деятельности?

Цель настоящего исследования – создание компактного сборника алгоритмов для обучающихся 6-х классов. Объект исследования – алгоритмы.

Гипотеза состоит в предположении о том, что алгоритмы – необходимая вещь в жизни обыкновенного школьника.

Слово «алгоритм» произошло от имени выдающегося математика средневекового Востока Мухаммеда аль-Хорезми, который жил и творил в IX в.

В латинском переводе книги Мухаммеда аль-Хорезми правила начинались со слов «Алгоризми сказал». Со временем люди забыли, что «Алгоризми» − это автор правил, и стали правила называть алгоритмами [3].

Алгоритм – это понятное и точное предписание исполнителю выполнить конечную последовательность команд, направленных на достижение поставленной цели [4].

В нашей жизни мы постоянно сталкиваемся с алгоритмами в различных сферах деятельности человека. В кулинарных книгах собраны рецепты, всякий прибор снабжается инструкцией по его применению. Алгоритмы есть в пословицах, песнях, сказках.

Наблюдая за своими действиями, мы видим, что постоянно встречаемся с задачами, для решения которых требуется многократно повторять одни и те же действия. Я решил, что необходимо научиться составлять алгоритмы для различных жизненных ситуаций для себя и своего младшего брата. Итак, *алгоритм* – это инструкция о том, в какой последовательности нужно выполнить действия [2].

Первый алгоритм, который был разработан для себя и своего брата, был «Сбор в школу». В этом году мой брат пошел в первый класс, и я помог ему организовать и распределить свои утренние дела, чтобы все успеть, чтобы он мог самостоятельно собраться в школу, сделать себе завтрак и закрыть дверь, выходя из квартиры.

Так как алгоритмы действительно повсюду, я решил познакомить с ними своих одноклассников и провел классный час на тему «Алгоритмы – что это и для чего нам про них знать?». В нем я рассказал ребятам про все то, что узнал сам.

По окончанию классного часа ребятам было роздано пособие «Подружись с алгоритмами» для того, чтобы они могли пользоваться алгоритмами для успешной учебы.

В свое пособие я включил основные алгоритмы по русскому языку, математике и литературному чтению. Эти пособия я раздал ребятам, они были у них всегда под рукой и помогали им на уроках. В конце 3 четверти успеваемость по этим основным предметам улучшилась, при постоянном использовании моего пособия. Данные из электронного журнала: 2 четверть, литература – 76 %, математика – 68 %, русский язык – 67 %, данные по итогам 3 четверти: литература – 78 %, математика – 71 %, русский язык – 70 %.

Таким образом, проанализировав эффективность использования алгоритмов и проведя эксперимент, мы убедились, что алгоритмы – необходимая вещь в жизни обыкновенного школьника. Поэтому выдвинутая мною гипотеза подтвердилась.

Библиографический список

1. Алгоритм. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм
2. Дмитриев Д.В. Толковый словарь русского языка. М.: АСТ, 2016. 992 с.
3. Кристиан Б., Гриффитс Т. Алгоритмы для жизни: Простые способы принимать верные решения. М.: Альпина Паблишер, 2007,450 с.
4. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. / пер. с англ. М.: Вильямс, 2011. 1296 с.

ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ У МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ ПОСРЕДСТВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАКТИЛЬНОГО ПОСОБИЯ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ»

Т.В. Правитель,
обучающийся (10 класс), средняя школа № 143, Красноярск
Научный руководитель **Н.А. Коробова,**
заместитель директора по УВР, средняя школа № 143, Красноярск,
Ю.Л. Штепа,
учитель информатики, средняя школа № 143, Красноярск

Аннотация. В работе обсуждаются проблемы младших школьников в формировании геометрических представлений. Предлагается решение данной проблемы посредством разработанного дидактического пособия «Геометрические фигуры». Описывается создание дидактического пособия, а также способ применения и анализ проведенных испытаний.
Ключевые слова: *формирование базовых знаний по геометрии, развитие мелкой моторики, дидактическое пособие, дидактические игры.*

Изучение геометрии начинается в начальной школе и играет важную роль в формировании представлений у детей о формах, фигурах и их особенностях. Геометрический материал изучается постепенно с 1 по 11 класс, что помогает лучше подготовить учеников к изучению сложных тем. Однако часто возникают трудности с построением чертежей. Младшие школьники знакомы преимущественно с квадратом, кругом, овалом и треугольником, что требует более широкого изучения геометрических фигур. Для более эффективного формирования представлений желательно использовать различные методы и изготавливать наглядные пособия [2].

Цель проектно-исследовательской работы – формирование геометрических представлений у обучающихся младшего школьного возраста во время изучения плоскостных геометрических фигур.

Исследование систематического курса по геометрии начинается, когда интенсивно должно развиваться математическое понимание, когда настоящая база для осознания математических абстракций должна быть уже заложена. По этой причине не случайно преподавание геометрии в начальной школе должно быть направлено на развитие логического мышления детей, кроме того, способствовать формированию пространственного мышления и воображения [6].

Сравнивая знакомые фигуры, дети начинают осознавать, в чем заключается их сходство и различие. Так, они замечают, что в треугольнике меньше сторон и углов, чем в квадрате. Уже на этом этапе дети устанавливают связь между названием «треугольник» и числом углов в этой фигуре [7].

Для формирования геометрических представлений работа должна проводится следующим образом. Свойства фигур учащиеся выявляют экспериментально, одновременно усваивают необходимую терминологию и навыки. Основное место в обучении должны занимать практические работы, наблюдения и работы с геометрическими объектами [5].

Исследование геометрии в начальных классах вносит большой вклад в развитие мышления младшего школьника, предоставляя знания о пространстве и форме объектов, помогая развивать практическую деятельность, обучая доказательности, формируя язык описания явлений окружающего мира [1].

Дидактический материал – особый вид пособий для учебных занятий, при использовании которого активизируется познавательная деятельность и экономится учебное время. Дидактический материал – особый тип наглядного учебного пособия, который раздается ученикам для самостоятельной работы в классе или дома. Дидактический материал является легким по своему содержанию, оформлению и технологии производства [4].

Дидактический материал можно использовать на разных стадиях учебного процесса – и при изучении нового материала, и при закреплении пройденного. Однако чаще используется при выработке умений и навыков. Обучающиеся, работая с дидактическим материалом, закрепляют приобретенные знания и навыки, а также учатся работать самостоятельно [3].

Таким образом, применение дидактических материалов в образовательном процессе – эффективный способ для поддержания познавательного интереса и активизации мышления младших школьников.

Посредством использования дидактических игр с геометрическими фигурами, изготовленными на фанере с использованием лазерного станка, можно сформировать геометрические представления у младших школьников в соответствии с требованиями программы по математике. Многие дети после использования дидактического материала стали лучше знать и различать геометрические фигуры.

Библиографический список

1. Аскарова А.А. Основные задачи изучения геометрического материала в начальной школе
2. Волкова С.И., Столярова Н.Н. Развитие познавательных способностей учащихся на уроках математики // Начальная школа. 1993. № 8.
3. Заика Е.В. Об организации игровых занятий для развития мышления, воображения и памяти школьников.
4. Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики. М.: Просвещение 1990.
5. Пазушко Ж.И. Развивающая геометрия в начальной школе // Начальная школа. 1999. № 1.
6. Фазлетдинова Н. Геометрия вокруг нас // Начальная школа. 2001. № 25.
7. Шадрина И.В. Обучение геометрии в начальных классах. М.: Школьная пресса, 2002.

ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА НЕВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА ПУТЕМ СГИБАНИЯ ЕГО РЕБЕР И ГРАНЕЙ

Л.Я. Савчиц,
обучающийся (11 класс), Перспектива», Зеленогорск
Научный руководитель **Л.В. Михайленко***,*
педагог дополнительного образования
ЦО «Перспектива», Зеленогорск

Аннотация. В работе предлагается способ увеличения объема многогранника путем деформации ребер и граней куба и доказывается, что объем невыпуклого многогранника увеличился.
Ключевые слова: *выпуклый и невыпуклый многогранник, объем многогранника, деформация ребер и граней.*

Пусть у нас есть набор картонных многоугольников и нам нужно склеить из них многогранник [4]. Если это получится, то возникает вопрос: «Будет ли этот многогранник единственным?». Так как нам не задан порядок склейки, то можно получить разные многогранники. Таким примером могут служить многогранники, изображенные на рис. 1.

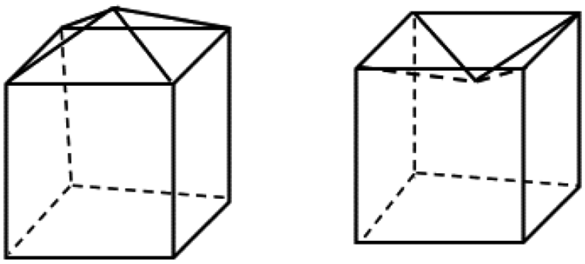


Рис. 1. Выпуклый и невыпуклый многогранники

Один многогранник выпуклый, другой невыпуклый, хотя оба склеены из одной и той же развертки. Но одинаковые ли у них объемы? Глядя на эти многогранники, можно сделать вывод, что объем невыпуклого многогранника будет меньше, чем у выпуклого многогранника.

Первый результат в теории изгибаний многогранников получил Огюстен Коши. В 1813 г. он доказал теорему, которая утверждает, ***что любой выпуклый многогранник неизгибаем.***

Обратимся к многогранникам, показанным на рис. 1. Башня с четырехскатной крышей на кубическом основании и башня с продавленной крышей составлены из соответственно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке. Но они не равны друг другу. Один из них невыпуклый, а, как доказал Коши, в классе выпуклых многогранников подобная ситуация невозможна.

Александр Данилович Александров (1912–1999) – российский математик, исследовавший обширный круг вопросов, сформулировал теорему об объемах многогранников [1], по которой «выпуклый многогранник с той же разверткой, но большим объемом сделать нельзя, но, может быть, можно сделать невыпуклый многогранник с большим объемом»?

В 1996 г. Дэвидом Бликером был получен невыпуклый многогранник, путем сгибания и деформации ребер и граней правильного тетраэдра. При этом объем невыпуклого многогранника оказался больше выпуклого тетраэдра.

С.Н. Михалевым был получен невыпуклый октаэдр, у которого объем больше выпуклого [3].

Было решено пойти этим путем и из развертки куба путем сгибания и деформации ребер и граней получить невыпуклый многогранник (рис. 2).

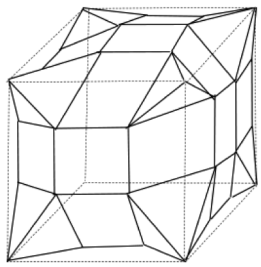


Рис. 2. Невыпуклый многогранник

Затем разбили его на части. Невыпуклый многогранник состоит из правильных пирамид и нескольких призм. Нашли объем каждой части и сложили. Составили функцию:

$$F(x) = (0{,}96 - x)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}(0{,}96 - x)^2 + 2s(0{,}96 - x) + 2x^2(0{,}96 - x)\sqrt{2} + 2x\frac{0{,}96-x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + x(0{,}96 - x)\right) + x^3.$$

где x – это сторона центрального квадрата.

Нашли производную и исследовали на экстремумы. Нашли точку максимума, а затем соответственно объем. Получилось, что невыпуклый многогранник имеет объем больше куба на 33 %.

Библиографический список

1. Александров В.А. Как смять пакет от молока, чтобы в него вошло больше // Соровский о бразовательный журнал. 2000. Т. 6, № 2.
2. Залгаллер В. Непрерывно изгибаемый многогранник // Квант. 1978. № 9. С. 13–20.
3. Михалев С.Н. Изометрические реализации октаэдров Брикара 1-го и 2-го типов с известными значениями объема // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, № 3. С. 755–768.
4. Энциклопедия для детей. Математика / гл. ред. М.Д. Аксенова. М.: Аванта+, 2008. Т. 11.

КАК МГНОВЕННО СЛОЖИТЬ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

П.В. Силивончик,
обучающийся (6 класс), гимназия № 11, Красноярск
Научный руководитель **Ю.А. Цыбулько***,*
учитель математики, гимназия № 11, Красноярск

Аннотация. В статье рассматриваются такие понятия, как числа Фибоначчи , золотое сечение и их мгновенное сложение.
Ключевые слова: *числа, золотое сечение, спираль,*

На уроках занимательной математики при прохождении темы «Простые и составные числа» я встретила понятие «числа Фибоначчи», и мне стало интересно, что же это такое. Я начала читать литературу про числа Фибоначчи. Меня заинтересовала тема «Мгновенное сложение чисел Фибоначчи», которую я решила подробнее изучить.

Числа Фибоначчи названы в честь Леонардо Фибоначчи из Пизы (современная Италия). На самом деле эти числа были известны задолго до Фибоначчи еще в Древней Индии, где они использовались в метрическом стихосложении. Леонардо Фибоначчи первым ввел эту числовую последовательность в западноевропейской математической науке в книге «Liber Abaci» («Книга абака») в 1202 г.

Числами Фибоначчи называют элементы числовой последовательности: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … в которой первые два числа равны 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Задачка про кроликов – наглядный пример использования чисел Фибоначчи (рис.).

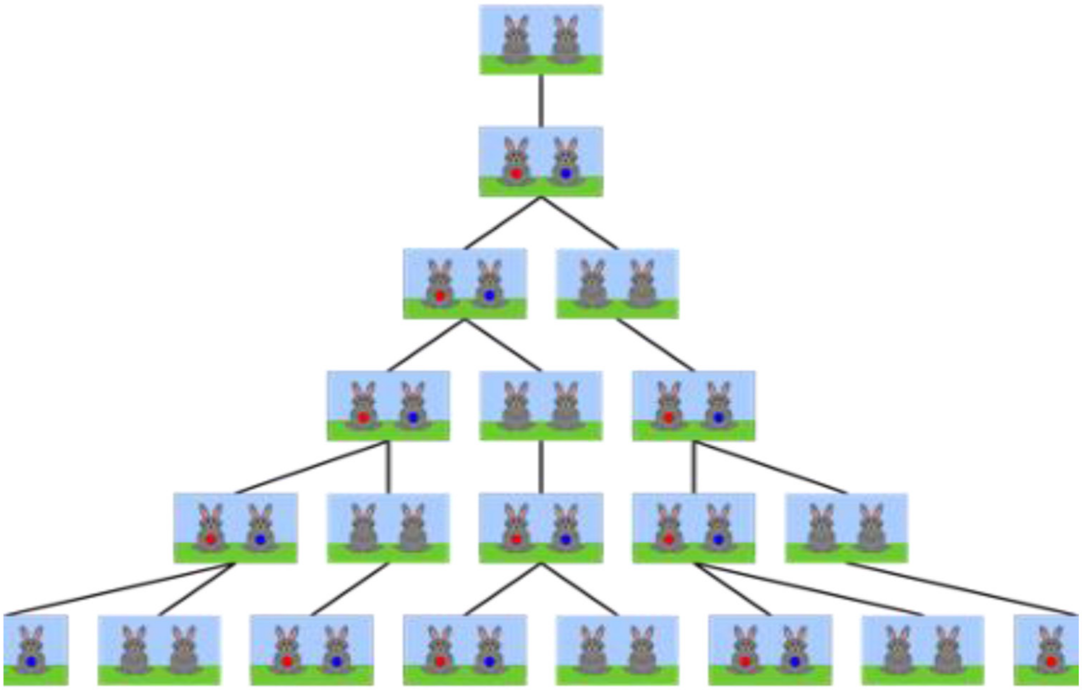


Рис. Решение задач про кроликов с помощью чисел Фибоначчи

В поле выпустили новорожденных кроликов. Через два месяца рождается первая пара потомков. Родители продолжают наращивать потомство, а дети месяц ждут своего взросления, чтобы тоже стать родителями. В итоге, через 3 месяца по полю будут бегать три пары кроликов. Через 4 месяца уже 5 пар, а через 5 месяцев – 8.

Уже прослеживается закономерность. В конце каждого месяца количество пар кроликов будет больше, чем в предыдущем месяце ровно на столько, сколько пар было два месяца назад.

С точки зрения математики – это красивая последовательность. Но больший интерес для исследователей представляет не сам ряд, а частное соседних чисел, равное примерно 1,618 для всех элементов ряда. Эта пропорция больше известна как золотое сечение.

Золотое сечение и спираль Фибоначчи часто используются в живописи или архитектуре. Пожалуй, самый известный пример – это работы Леонардо да Винчи. Композиция «Мона Лиза» построена на основе спирали Фибоначчи, а «Витрувианский человек» буквально изображает связь пропорций тела и золотого сечения.

С использованием золотой пропорции построены, например, египетские пирамиды Гизы, Собор Парижской Богоматери и Храм Василия Блаженного. В 2005 г. в Корнуолле (Великобритания) появился образовательный комплекс TheCore («Ядро»). Его архитекторы вдохновлялись формой цветка подсолнечника. В итоге получилось здание, построенное по принципу спирали Фибоначчи.

Считается, что золотое сечение используется также в музыке и поэзии. В некоторых произведениях, например поэме Лермонтова «Бородино» или этюдах Шопена, кульминационные моменты разделяют композицию на части, соотношение которых близко к золотой пропорции.

Несколько менее известный вычислительный фокус состоит в почти мгновенном сложении любых десяти последовательных чисел Фибоначчи . Этот фокус демонстрируют так: показывающий просит кого-нибудь записать друг под другом два любых числа, какие он пожелает. Допустим, для примера, что были выбраны 8 и 5. Затем зритель должен сложить эти числа. Найденное таким образом третье число складывается со вторым (стоящим над ним). Получается четвертое число. Этот процесс повторяют до тех пор, пока в вертикальном столбце не окажется десять чисел:

5
8
13
18
31
49
80
129
209
338

Во время записывания чисел показывающий стоит, повернувшись спиной к зрителям. Когда все числа будут записаны, он поворачивается, проводит под колонкой цифр черту и, не задумываясь, подписывает сумму этих чисел. Чтобы получить эту сумму, ему просто нужно взять четвертое число снизу и умножить его на 11 – операция, которую легко можно проделать в уме, – 25. В нашем случае четвертым числом будет 80, поэтому в ответе получится число 80, взятое 11 раз, т. е. 880.

Таким образом, я изучила числа Фибоначчи и узнала, как их мгновенно складывать. Я узнала, что такое «золотое сечение» и где оно употребляется, чем связаны числа Фибоначчи и золотое сечение.

Библиографический список

1. Джексон Т. Математика. Иллюстрированная энциклопедия. М.: Эксмо, 2017. 167 с.
2. Мерзляк А.Г. Математика. 6 класс. М.: Просвещение, 2021.
3. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. 5–6 класс. М.: Дрофа, 2000.

КРАСНОЯРСКИЙ КРАЙ В ЦИФРАХ

А.В. Хуторской,
обучающийся (6 класс), средняя школа № 150, Красноярск
Научный руководитель **Т.И. Бахилова,**
учитель математики средней школы № 150, Красноярск

Аннотация. В работе приводятся примеры математических задач по темам 5–6 классов с интересными фактами, значимыми объектами Красноярского края и г. Красноярска, включенные в учебное пособие «Красноярский край в цифрах».
Ключевые слова: *Красноярский край, Красноярск, математическая задача, учебное пособие.*

Для получения новых знаний, развития логики, нейронных связей мозга и интеллекта нужно постоянно учиться, решать с каждым разом все более сложные задачи. Ведь без постоянного развития мы просто вернемся в прошлое и учиться придется сначала. Поэтому решение задач будет всегда актуально.

Существуют разные виды задач: простые и сложные, на логику или на решение. Каждый вид задачи развивает почти одно и то же. Например, в задачах на логику нужно подумать, а в задачах на решение – решить по определенному способу. Это замечательно, получать новые научные знания после решения задачи. Но еще лучше, когда ты получаешь не только научные знания. В связи с тем, что в 2024 г. Красноярскому краю исполняется 90 лет, возникла идея разработки задач, после решения которых появляется возможность узнать о своем родном городе и крае больше.

Мы решили оформить свой продукт в виде учебного пособия, содержащего комплекс заданий для обучения, развития, проверки и закрепления пройденного материала.

Цель статьи – ознакомление с результатами работы по созданию учебного пособия для обучающихся 5–6 классов, включающих в себя математические задачи про город Красноярск и Красноярский край.

Красноярск – крупнейший деловой, промышленный и культурный центр Восточной Сибири, столица Красноярского края (рис.), второго по площади субъекта России. Город находится в самом центре России на междуречье небольшой речи Кача и великого Енисея [1].

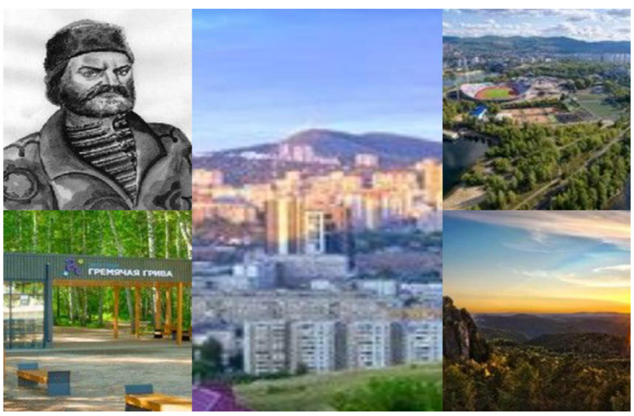


Рис. Достопримечательности Красноярска

Задача – это ситуация, в которой необходимо принять решение, но путь к этому решению заранее неизвестен. Любую задачу можно решить разными способами. Настоящее умение заключается не в том, чтобы из раза в раз использовать стандартный метод, а в том, чтобы находить наиболее подходящий, пусть даже и необычный способ решения [2].

Задачи рассчитаны на 5–6 классы, поэтому выбраны следующие темы.

– Задачи на размер.
– Задачи на десятичные дроби.
– Задачи на нахождение дроби от числа.
– Задачи на вычисления.

Мы составили 16 различных задач, включающих в себя исторические факты и значимые места Красноярска. Приведем по одной задаче из каждой темы, вошедшие в сборник.

1. Самый крупный остров на реке Енисей в черте Красноярска – остров Татышев, его площадь 7 км². Остров отдыха – второй по величине (после острова Татышев) остров на реке Енисей в черте города, а его площадь составляет 2,5 км². Переведите их площади в гектары и вычислите, какой остров больше и насколько.

2. Найдите длину Октябрьского моста, если его длина в 2,77 раз больше, чем длина Коммунального моста.

3. Красноярский край – второй по площади субъект Российской Федерации. Вычислите площадь края, если она составляет $6820\frac{4}{5}$ от площади Красноярска. Площадь города Красноярска – 347 км².

4. Река Енисей – одна из самых длинных и полноводных рек мира и России. Впадает в Карское море Северного Ледовитого океана. Решите пример и узнаете длину Енисея.

$$(8251{,}5625 \cdot 9{,}6 + 74265{,}52 : 75{,}32) : 23$$

Задачи оформлялись в учебное пособие в виде презентации и печатного сборника. На каждом слайде презентации была задача, картинки к ней и ответ. Учебное пособие включает в себя 16 задач, его могут использовать дети для проверки своих знаний, закрепления материала, получения интересных знаний про свою малую Родину, а также учителя в работе.

Для исследования интереса к составленным задачам, их роли в познании интересных фактов и значимых объектов нашей малой Родины было проведено анкетирование учеников 6 класса. Им было предложено ответить на вопросы о Красноярском крае и городе Красноярске, а после решить задачи указанной тематики.

Было два варианта задач и анкет. В исследовании участвовали 100 человек. Результаты анкетирования показали, что разработанное учебное пособие «Красноярский край в цифрах» действительно помогает школьникам в получении новых знаний, закреплении учебного материал по математике, а также при выполнении заданий вычислительного характера, изучении десятичных дробей, нахождении дроби от числа, нахождении размера.

Библиографический список

1. Наш город – Красноярск. URL: http://www.admkrsk.ru/city/Pages/default.aspx (дата обращения: 07.05.2024).
2. Позаментье А., Крулие С. Стратегии решения математических задач: Различные подходы к типовым задачам. М.: Альпина Паблишер, 2018. 223 с.

МЕТОДЫ БЫСТРОГО СЧЕТА В МАТЕМАТИКЕ

А.А. Шувалов,
обучающийся (7 класс), гимназия № 11, Красноярск
Научный руководитель **Ю.А. Цыбулько**,
учитель математики, гимназия № 11, Красноярск

Аннотация. В век высоких технологий и повсеместного использования компьютера умение быстро и правильно производить в уме достаточно сложные вычисления ни в коем случае не утратило своей актуальности. Гибкость ума является предметом гордости людей, а способность, например, быстро производить в уме вычисления вызывает откровенное удивление. В работе рассматриваются различные методы быстрого счета. Автор, опираясь на изученные методы быстрого счета, приводит примеры быстрых вычислений больших чисел в уме и разработал игру-тренажер в программе Scratch на двух языках программирования.
Ключевые слова: *числа, системы счисления, быстрый счет, методы, алгоритм.*

В книге В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1914) изложено 27 способов умножения. Причем автор замечает: «Весьма возможно, что есть и еще (способы), скрытые в тайниках книгохранилищ, разбросанные в многочисленных, главным образом рукописных сборниках». Наш современный способ умножения описан там под названием «шахматного». Был и очень интересный, точный, легкий, но громоздкий способ «галерой» или «лодкой», названный так в силу того, что при делении чисел этим способом получается фигура, похожая на лодку или галеру. У нас такой способ использовался до середины XVIII в. Упоминаются такие способы, как «загибанием», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником» и многие другие. Многие такие приемы для умножения чисел долгие и требуют обязательной проверки.

Рис. 1. Таблица умножения на пальцах

Научно обоснованная и достаточно подробно разработанная система резкого повышения быстроты устного счета была создана в годы Второй мировой войны цюрихским профессором математики Я. Трахтенбергом (рис. 1). Она известна под названием «Система быстрого счета».

Опишем способы быстрого сложения чисел.

1. Поразрядное сложение двузначных чисел

К разрядам первого слагаемого прибавляют разряды второго слагаемого, начиная с высших (сотни, десятки и т. д.):

$$76 + 38 + 47 + 86 + 45 = (70 + 30 + 40 + 80 + 40) + \\ + (6 + 8 + 7 + 6 + 5) = 260 + 32 = 292.$$

2. Сложение путем округления

Если слагаемые близки к круглым числам, то их заменяют разностью или суммой между круглым числом и дополнением:

$$3916 + 991 + 1998 + 2002 = \\ = (4000 + 1000 + 2000 + 2000) - (84 + 9 + 2) + 2 = 9000 - 95 + 2 = \\ = 8907 = 8907.$$

3. Сложение с использованием свойств действий с числами

Слагаемые разбивают на такие группы, которые в сумме дают круглые числа:

$$3013 + 74 + 2187 + 126 = (3013 + 2187) + (74 + 126) = \\ = 5200 + 200 = 5400.$$

4. Сложение десятичных дробей путем поразрядного сложения, начиная с высших разрядов

Отдельно сложить целые части, десятичные доли, а затем сложить полученные результаты: $8{,}4 + 6{,}51 = ((8{,}4 + 6) + 0{,}5) + 0{,}01 = (14{,}4 + 0{,}5) + {}$ $+ 0{,}01 = 14{,}9 + 0{,}01 = 14{,}91$.

Опишем способы быстрого вычитания чисел.

1. Поразрядное вычитание: $574 - 243 = (500 - 200) + (70 - 40) +$ $+ (4 - 3) = 300 + 30 + 1 = 331$.

Если число единиц какого-либо разряда вычитаемого больше числа единиц того же разряда уменьшаемого, то последнее число единиц увеличивается на 10 путем заимствования одной единицы следующего высшего разряда уменьшаемого:

$$647 - 256 = (500 - 200) + (140 - 50) + (7 - 6) = \\ = 300 + 90 + 1 = 391.$$

2. Вычитание с использованием свойств действий с числами:

$$1358 - (158 + 78) = (1358 - 158) - 78 = 1112.$$

3. Вычитание путем уравнивания числа единиц последних разрядов уменьшаемого: $67 - 48 = (67 + 1) - 48 = (68 - 48) - 1 = 20 - 1 = 19$.

4. Вычитание путем округления уменьшаемого или вычитаемого.

Если уменьшаемое и/или вычитаемое близки к круглому числу, то их заменяют разностью или суммой между круглым числом и дополнением:

$713 - 65 = (700 + 13) - 65 = (700 - 65) + 13 = 635 + 13 = 648.$

Опишем способы быстрого умножения чисел.

1. Умножение на 4, 8, 16 и т. д.

Чтобы число умножить на 4, 8, 16, его последовательно удваивают:

$213 \cdot 8 = (213 \cdot 2) \cdot 4 = (426 \cdot 2) \cdot 2 = 852 \cdot 2 = 1704.$

2. Умножение на 1,5 и на 15

Чтобы умножить число на 1,5, нужно к исходному числу прибавить его половину. Чтобы умножить число на 15, нужно исходное число умножить на 10 и прибавить половину полученного произведения:

1) 241,5 = 24 + 12 = 36; 2) 12915 = 1290 + 645 = 1935.

3. Умножение на 11

1 способ. Чтобы число умножить на 11, к нему приписывают ноль и прибавляют исходное число: $241 \cdot 11 = 2410 + 241 = 2651$.

2 способ. Следует «раздвинуть» цифры числа, умножаемого на 11, и в образовавшийся промежуток вписать сумму этих цифр, причем если эта сумма больше 9, то, как при обычном сложении, следует единицу перенести в старший разряд: $34 \cdot 11 = 374$, т. к. $3 + 4 = 7$, семерку помещаем между тройкой и четверкой, $68 \cdot 11 = 748$, т. к. $6 + 8 = 14$, четверку помещаем между семеркой (шестерка плюс перенесенная единица) и восьмеркой;

4. Умножение на число 111, 1111 и т. д., зная правила умножения двузначного числа на число 11

Если сумма цифр первого множителя меньше 10, надо мысленно раздвинуть цифры этого числа на 2, 3 и т. д. шага, сложить цифры и записать соответствующее количество раз их сумму между раздвинутыми цифрами. Количество шагов всегда меньше количества единиц на 1.

Пример

$24 \cdot 111 = 2(2 + 4)\ (2 + 4)4 = 2664$ (количество шагов – 2)

$24 \cdot 1111 = 2(2 + 4)(2 + 4)(2 + 4)4 = 26664$ (количество шагов – 3)

При умножении числа 72 на 111111 цифры 7 и 2 надо раздвинуть на 5 шагов. Эти вычисления можно легко произвести в уме: $72 \cdot 111111 = 7999992$ (количество шагов – 5). Если единиц во втором множителе 7, то шагов будет на один меньше, т. е. 6. Если единиц 8, то шагов будет 7, и т. д.: $61 \cdot 11111111 = 677777771$. Эти вычисления можно легко произвести в уме.

Умножение двузначного числа на 111, 1111, 1111 и т. д., сумма цифр которого равна или больше 10. Немного сложнее выполнить устное умножение, если сумма цифр первого множителя равна 10 или более 10.

Пример

$48 \cdot 111 = 4 \cdot (4 + 8) \cdot (4 + 8) = 4 \cdot (12) \cdot (12)\ 8 = (4 + 1)\ (2 + 1)\ 28 = 5328.$

В этом случае к первой цифре нужно прибавить 1. Получим 5.

Далее $2 + 1 = 3$, а последние цифры 2 и 8 оставляем без изменения.

$56 \cdot 11111 = 5\,(5+6)(5+6)(5+6)(5+6)6 = 5\ \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 6 = 622216.$

$67\ \cdot 1111\ =\ 6\ \cdot (6+7) \cdot \ldots \cdot 7\ =\ 6 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 7\ =\ 74437$

5. Умножение трехзначного числа на 999

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение: первые три цифры есть умножаемое число, только на уменьшенное на единицу, а остальные три цифры (кроме последней) – «дополнения» первых до 9.

Пример

$385\ \cdot\ 999\ =\ 384615{,}573\ \cdot\ 999\ =\ 572427\,943\ \cdot\ 999\ =\ 942057.$

Опираясь на изученные методы быстрого счета, автор разработал игру в программе скретч на двух языках программирования. Основные данные написаны на языке скретч, циклы на Visual B

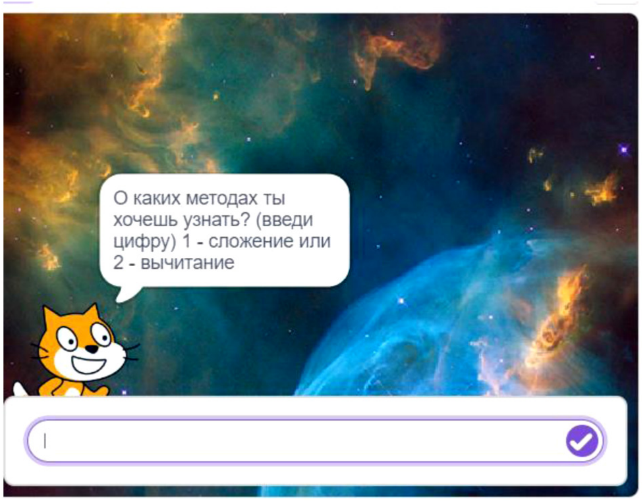


Рис. 2. Игра в программе скретч на двух языках программирования

Таким образом, анализ литературы выявил 27 правил быстрого счета. Мы узнала, что у разных народов были разные системы счисления, которые очень редки сейчас, но иногда используются в современном мире. В работе нами разработана игра, которая поможет учащимся провести время с пользой, а именно учиться быстро считать и изучать методы быстрого счета.

Библиографический список

1. Джексон Т. Математика. Иллюстрированная энциклопедия. М.: Эксмо, 2017. 167 с.
2. Макушева О.Н. Магия чисел. Быстрый счет.
3. Фогт И. Математические трюки для быстрого счета. М.: Альпина Паблишер, 2020. 171 с.

МЕТОД ПЕРЕКЛАДЫВАНИЯ ПЛОЩАДЕЙ

Б.И. Кок-кыс,
обучающийся (8 класс), КзПКУ, Кызыл
Научный руководитель **С.В. Хамар-оол,**
преподаватель отдельной дисциплины «Математика»
КзПКУ, Кызыл

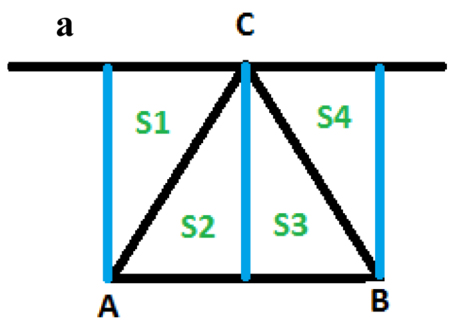
Аннотация. Статья посвящена оригинальному методу решения геометрических задач. Применение различных нестандартных методов, в частности, решение задач по планиметрии методом перекладывания площадей, позволяет решать задачи повышенного уровня сложности. Метод перекладывания площадей заключается в применении свойств площадей фигур: если фигуру разрезать на части, то сумма площадей полученных частей равна площади исходной фигуры. Этот метод используется для доказательства равенства площадей треугольников с общей вершиной на прямой, параллельной одной из сторон треугольника.
Ключевые слова: *метод перекладывания площадей, площадь фигур, квадрат, прямоугольник, параллелограмм, треугольник.*

В обыденной жизни человека довольно часто встречается такое понятие, как «площадь». Чаще всего площади геометрических фигур вычисляются по готовым формулам. Их вывод основан на свойствах площадей фигур. Но стоит отметить, что встречаются и такие задачи, решение которых стандартными формулами не приводит к правильному ответу, а порой оказывается трудоемким и громоздким. И тогда на помощь приходят нестандартные методы решения.

Данная работа посвящена изучению метода перекладывания площадей и его применению при решении задач повышенного уровня сложности.

Рассмотрим отрезок AB и параллельную ему прямую линию a. Тогда если взять на прямой a точку C, то площадь треугольника ABC не зависит от положения точки C на прямой и остается постоянной для данной прямой и отрезка.

Другими словами, рассмотрим произвольный треугольник такой, что одна его сторона совпадает с данным отрезком, а противолежащая вершина лежит на данной прямой. Тогда площади всех таких треугольников равны. И площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного так, что стороны треугольника и прямоугольника совпадают, а противоположная сторона прямоугольника лежит на параллельной линии.



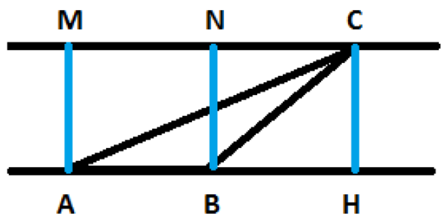
Доказательство

Случай 1. *Для остроугольного треугольника ABC*

Опустим перпендикуляры из точек A, B и C. Получим два прямоугольника, площади которых равны S_1+S_2 и S_3+S_4. Мы знаем, что диагональ прямоугольника делит его на две равные части. Тогда $S_1=S_2$ и $S_3=S_4$. Площадь треугольника *ABC:* $S_{ABC}= S_2+S_3 = \frac{1}{2} S_{\text{прямоугольника}}$, т.е. площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного на его стороне, до прямой, проходящей через третью вершину параллельно противоположной стороне треугольника.

Случай 2. *Тупоугольный треугольник*

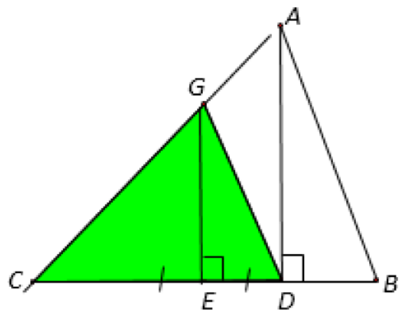
Рассуждения похожие, достроим треугольник до прямоугольника и рассмотрим площади фигур.



$S_{ACB} = \frac{1}{2} S_{AMCH} - S_{BCH}$. В то же время $S_{BCH} = \frac{1}{2} S_{BNCH}$. Если мы удвоим площади, то получим, что две площади искомого треугольника равны разности площадей прямоугольников AMCH и BNCH, то есть площади прямоугольника AMNB. Поделим пополам, чтобы найти площадь искомого треугольника. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачи.

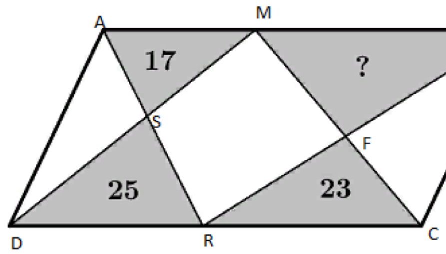
Задача 1. Площадь треугольника CGD равна 12. Найдите площадь треугольника *ABC*.



Решение. Рассмотрим прямые *GE* и *AD*, которые перпендикулярны к прямой *CB*. Следует, что прямые параллельны. Пусть *x* – это площадь треугольника *GED*. Вершину *D* мы можем переместить по параллельной к прямой *GE* прямой *AD* так, чтобы она совпала с вершиной *A*. Тогда выйдет, что *AE* – медиана треугольника *ABC*. Следует, что площади треугольников *ACE* и *AEB* равны, причем площадь треугольника *ACE* равна 12, значит, площадь *AEB* тоже равна 12. Площадь *ABC* равна сумме площадей треугольников *ACE* и *AEB*, значит, площадь *ABC* равна 24.

Ответ: $S_{ABC} = 24$.

Задача 2. На противоположных сторонах параллелограмма выбрано по точке. Каждая из них соединена с вершинами противоположной стороны. Известны площади трех серых треугольников. Найдите площадь четвертого серого треугольника.



Решение. Рассмотрим треугольники *DMC* и *ARB*, у которых площади равны, так как основания равны, как противоположные *AB* и *DC* стороны параллелограмма, а высоты будут равны. Площади серых фигур одного треугольника будут равны площадям серых фигур другого треугольника. Пусть площадь неизвестного серого треугольника – x, тогда $17+x=25+23$. Отсюда легко вычислить значение x, которое равно 31.

Ответ: 31.

Библиографический список

1. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
2. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. 2004.
3. Гусев В.А., Орлов Ф.И., Розенталь Ф.Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. М.: Просвещение, 1977.
4. Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. М., Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. Коксетер Г.С., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.
6. Онлайн-курсы образовательного центра Сириус https://edu.sirius.online/#/ (дата обращения: 11.03.2023).
7. Пржевальский Е. Собрание геометрических теорем и задач. М., 1909.
8. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991. Ч. I.
9. Погорелов А.В. Геометрия 7–11. М.: Просвещение, 1996.
10. Погорелов А.В. Геометрия 7–11. М.: Просвещение, 1996.
11. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии для 6–9 классов средней школы. Ч. I. Планиметрия. М.: Просвещение, 1964.
12. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

А.И. Ооржак,
обучающийся (8 класс), КзПКУ, Кызыл
Научный руководитель **С.В. Хамар-оол,**
преподаватель отдельной дисциплины «Математика»
КзПКУ, Кызыл

Аннотация. Равенство треугольников является одним из фундаментальных понятий геометрии, которое играет важную роль в решении задач и планиметрии, и стереометрии, а также задач повышенного уровня сложности. Статья посвящена применению различных признаков равенства треугольников для решения задач.
Ключевые слова: *треугольник, признаки равенства треугольников, задачи повышенного уровня, обучение выявления равных треугольников.*

Цель работы – выработать навык выявления равных треугольников. Для достижения был изучен четвертый признак равенства треугольников (иногда говорят и полупризнак равенства треугольников).

Треугольник – геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Существуют три признака равенства треугольника, которые проходят в школьной программе. Это признаки по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трем сторонам. Есть еще и четвертый признак равенства треугольника, который нередко используется при решении задач и звучит так: «Если две стороны и угол, лежащий против большей из них одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них другого треугольника, то такие треугольники равны».

Для решения более сложных задач, которые опираются на признаки равенства треугольников, требуются дополнительные построения либо исходная конструкция такова, что увидеть равные треугольники весьма непросто. Некоторые дополнительные построения являются «типовыми», то есть применяются для решения многих задач. Отдельное внимание следует уделить построению примеров и контрпримеров к утверждениям, связанным с равенством треугольников.

Приведем некоторые примеры решения задач с применением признаков равенства треугольников.

Задача 1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки M и N так, что $\angle AMB = 70^0$ и $\angle BAN = 65^0$. Найдите величину $\angle ANM$.

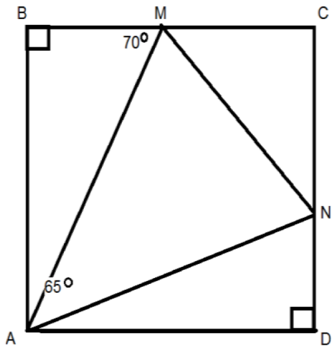


Рис. 1.

Решение. Так как ΔABM – прямоугольный, следовательно, $\angle BAM = 20^0$ (так как нам известен один острый угол, то мы можем найти и второй острый угол от 90^0 – нам известный острый угол. Значит, $\angle BAM = 90^0 - 70^0 = 20^0$).

Так как $\angle BAN = 65^0$, следовательно, $\angle MAN = 45^0$ (так как $\angle BAN = \angle BAM + \angle MAN$ и нам известен $\angle BAM = 20^0$, то мы найдем $\angle MAN$, $65^0 = 20^0 + \angle MAN$, $\angle MAN = 45^0$).

Давайте найдем $\angle AND$, так как $ABCD$ – это квадрат, значит, сторона BC будет параллельна стороне AD, следовательно, накрест лежащие углы будут равны, то есть $\angle AMB = \angle MAD$. $\angle MAD = \angle MAN + \angle NAD$, то есть $70^0 = 45^0 + \angle NAD$, $\angle NAD = 25^0$, так как ΔAND – прямоугольный, следовательно, $\angle AND = 65^0$ (так как нам известен один острый угол, то мы можем найти и второй острый угол от 90^0 – нам известный острый угол. Значит, $\angle AND = 90^0 - \angle NAD$, $\angle AND = 65^0$).

Давайте построим один ΔAMB, который состоит из ΔAND и ΔAMB, и увидим, что получившийся треугольник будет равен ΔANM и $\angle AND$ будет равен $\angle ANM$, следовательно, $\angle ANM = 65^0$.

Ответ: 65º.

Пример 1 (Т. Казицына, Московская математическая олимпиада, 2003 год, 8 класс). В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Так как углы BXC и AYB внешние для треугольников ABX и CAY соответственно, то $\angle BAX = \angle BXC - \angle ABX = \angle AYB - \angle YAC = \angle YCA$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный: $AB=BC$. В треугольниках XBC и YAB имеем: $XC = YB$, $BC = AB$ и $\angle BXC = \angle AYB$. Кроме того, $YB < BC = AB$, значит, $XC < BC$. Так как равные углы лежат напротив больших из рассматриваемых сторон, то эти треугольники равны (по четвертому признаку). Следовательно, $\angle BCX = \angle ABY$, тогда $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний, значит, каждый его угол равен 60^0. Обосновать, что из полученных равенств следует именно равенство треугольников, а не случай, когда $\angle XBC + \angle YAB = 180°$, можно иначе: $\angle XBC + \angle YAB < ABC + \angle CAB = 180^0 - \angle ACB$.

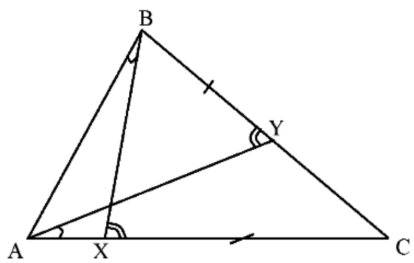


Рис. 2.

Библиографический список

1. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского. М.: Просвещение, 2002.
2. Онлайн-курсы образовательного центра Сириус. URL: https://edu.sirius.online/#/ (дата обращения: 11.03.2023).
3. Федеральный государственный образовательный центр поддержки одаренных детей «Сириус». URL: https://edu.sirius.online/#/course/1193/11226/task_2116 (дата обращения: 09.05.2024).
4. Ященко И.В., Сергеев П.В., Горская Е.С., Медников Л.Э. и др. Интернет-проект «Задачи». URL: https://problems.ru/

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Д.Д. Каменда,
обучающийся (10 класс), средняя школа № 150, Красноярск
Научный руководитель **Г.Н. Гиматдинова**,
учитель математики, средняя школа № 150, Красноярск

Аннотация. Работа посвящена методам решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными. Среди всего многообразия методов решения на примере одного уравнения рассматривается применение алгоритма Евклида и цепных дробей. Приводится задача из Единого государственного экзамена, решаемая с помощью линейного диофантового уравнения с двумя неизвестными.
Ключевые слова: *диофантовое уравнение, линейное уравнение, алгоритм Евклида, цепные дроби.*

Одним из залогов успешного решения многих олимпиадных заданий по математике, а также заданий из второй части профильного экзамена является знание методов решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными.

Цель статьи – демонстрация некоторых методов решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными на примере одного уравнения.

К методам решения линейных диофантовых уравнений можно отнести метод полного перебора всех возможных значений, выражения одной переменной через другую и выделения целой части дроби, метод бесконечного (непрерывного) спуска, с помощью алгоритма Евклида, с помощью цепных дробей, с помощью сравнений и другое [1]. Однако в работе мы остановимся на двух методах решения линейных диофантовых уравнений, которые показались нам в рамках изучения данного вопроса наиболее интересными и полезными.

Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in Z$.

В качестве примера рассмотрим уравнение: $8x + 3y = 2$.

1. Уравнение разрешимо в целых числах с помощью алгоритма Евклида. Действительно, $\text{НОД}\,(8, 3) = 1$. Пусть $a = 8$, $b = 3$, тогда найдем выражение числа 1 через коэффициенты a и b. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида. При нахождении $\frac{8}{-}$ имеем $8 = 3 \cdot 2 + 2$ (1). Число представим $3 = 2 \cdot 1 + 1$, отсюда $1 = 3 - 2 \cdot 1$ (2). Выделяем из первого выражения (1) число 2 и подставляем во второе (2): $2 = 8 - 3 \cdot 2$, $1 = 3 - (8 - 3 \cdot 2) = 3 - 8 + 3 \cdot 2 = 3 \cdot 3 - 8 \cdot 1$.

Далее преобразуем полученное равенство к виду $\mathbf{8} \cdot (-1) + \mathbf{3} \cdot 3 = 1$ и умножаем коэффициенты уравнения на 2: $8 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = 2$. Таким образом, $x_0 = -2$,

$y_0 = 6$. Применяя формулу $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t \in Z$, решением уравнения является $x = -2 + 3t$, $y = 6 - 8t$, $t \in Z$.

2. К решению линейных диофантовых уравнений применимы цепные дроби. Решим предложенное уравнение $8x + 3y = 2$.

$\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$; $\frac{8}{3} = [2;\ 1, 2]$, где 2 – подходящая дробь нулевого порядка, а следующие элементы находятся по схеме: $\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \mathbf{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. Составим таблицу расчета подходящих дробей, в которой $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $p_2 = p_1 a_2 + p_0$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_2 = q_1 a_2 + q_0$.

Таблица расчетов подходящих дробей

k	0	1	2
a_k	2	1	2
p_k	2	3	8
q_k	1	1	3

По свойству подходящих дробей справедливо: $\frac{8}{3} - \frac{3}{1} = \frac{(-1)^1}{3 \cdot 1}$, откуда $8 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -1$, умножаем на -2 и получаем $8 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = 2$.

Значит, $x = -2 + 3t$, $y = 6 - 8t$, $t \in Z$.

Подчеркнем, что применение цепных дробей также будет эффективно в случае достаточно больших значений коэффициентов линейного диофантового уравнения.

Знание методов решения линейных диофантовых уравнений позволит искать ответы на вопросы задач олимпиадного уровня сложности и различных экзаменационных работ, причем не только по математике, но и в других предметных областях, например в химических задачах [2].

Пример задания ЕГЭ. «В школах № 1 и 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы были пересчитаны в обеих школах. Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?» [3].

Решение. Пусть в школе № 1 учились всего два школьника. Примем баллы первого ученика за x, а баллы второго ученика за y, причем x и y – натуральные числа. Тогда справедливо уравнение: $\frac{x+y}{2} = 10y$. Правая часть уравнения будет целочисленной по условию, следовательно, мы составили диофантовое уравнение. Для решения домножим данное уравнение на 2 и получим: $x + y = 20y$. Методом подбора найдем одну пару решений: $x = 19$, $y = 1$. Ответ: средний балл в школе № 1 мог уменьшиться в 10 раз.

В заключение подчеркнем, что умение решать диофантовые уравнения, в частности, линейные, позволит не только успешно справляться с олимпиадными заданиями данной тематики и заданиями Единого государственного экзамена, но и будет способствовать развитию логического мышления, сообразительности, умения применять нестандартные подходы при решении задач.

Библиографический список

1. Гринько Е.П., Головач А.Г. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам: учебно-методическое пособие.
2. Махмадаминов М., Бобиев Г.М., Бандаев С.Г. Обучение решению задач с математическим содержанием на занятиях по химии в основной школе с использованием диофантовых уравнений первого порядка // Вестник Педагогического университета. 2015. № 2 (63-2). С. 10–14.
3. Решу ЕГЭ. URL: https://goo.su/3cZdh (дата обращения: 15.04.2024).

ИСТОРИЯ ОДНОГО МАГАЗИНА В МАТРИЦАХ

Д.А. Кузичева, О.Е. Романюк,
обучающиеся (2 курс), колледж автоматизации производства, Санкт-Петербург
Научный руководитель **В.А. Масленкова***,*
преподаватель математики,
колледж автоматизации производственных процессов и прикладных информационных систем

Аннотация. Рассматривается необходимость применения практико-ориентированных заданий с целью повышения мотивации для эффективного изучения математики студентами учреждений среднего профессионального образования. Приведены авторские примеры заданий практико-ориентированного содержания по некоторым темам линейной алгебры.
Ключевые слова: *обучение математике, матрицы, практико-ориентированные задачи, мотивация.*

Большинство современных студентов гуманитарных направлений отрицательно относятся к изучению математики в системе среднего профессионального образования. Одна из причин этого – слабая математическая подготовка. Невозможность усвоения трудного математического материала приводит к непринятию учебной дисциплины и снижению мотивации к ее изучению. Существуют разные способы мотивировать студентов к изучению математики. Один из таких – обучение математике с использованием задач практико-ориентированного содержания [1].

В рамках изучения тем линейной алгебры студентам могут быть предложены следующие задачи с практико-ориентированным содержанием.

Задача 1. В магазине косметики ручной работы «Farwer Cosmetics» работают Диана и Олеся. В течение дня ими изготовлено несколько видов продукции. Данные о количестве изготовленной продукции и ее стоимости представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Количество изготовленной продукции в течение дня

	Вид продукции, шт.				
Сотрудник	мыло	бальзам	бомбочка	скраб	баттер
Олеся	12	5	6	3	1
Диана	10	11	8	4	3

Таблица 2

Стоимость выпускаемой продукции

	Вид продукции, шт.				
	мыло	бальзам	бомбочка	скраб	баттер
Стоимость за ед. товара, руб.	400	150	800	500	550

Задания

1. Составьте матрицы L и D, отражающие количество изготовленной продукции в течение дня Олесей и Дианой соответственно.

2. Составьте матрицу S, отражающую количество изготовленной в течение дня продукции в магазине.

3. Какой элемент матрицы S содержит информацию о количестве изготовленных в течение дня бальзамов для губ?

4. Составьте матрицу R, отражающую информацию о разнице изготовленной Дианой продукции и продукции, изготовленной Олесей.

5. Какую информацию можно получить из элемента a_{11} матрицы R?

6. Составьте матрицу N, отражающую информацию об изготовленном мыле в течение дня каждым сотрудником.

7. Составьте матрицу M, отражающую информацию о доходе магазина от изготовленного в течение дня мыла каждым сотрудником.

Задача 2. В магазин косметики ручной работы «Farwer Cosmetics» после расширения Дианой были приняты в штат два сотрудника: Софья и Мария. В течение недели перед днем всех влюбленных в магазине проходила акция: при покупке мыла покупателю предоставлялся один скидочный купон в магазине-партнере по изготовлению и продаже свечей «Свечная лавочка»; при покупке бомбочки для ванн предоставлялись два скидочных купона на приобретение свечек в магазине-партнере.

Количество мыла и бомбочек, проданных Софьей и Марией во время проведения акции, представлено в матрице N:

$$N = \begin{array}{c} \\ \text{Софья} \\ \text{Мария} \end{array} \begin{pmatrix} \text{мыло} & \text{бомбочки} \\ 16 & 15 \\ 23 & 13 \end{pmatrix}$$

Стоимость за каждую единицу продукции, участвовавшей в акции, и количество скидочных купонов, приходящееся на каждый вид продукции, представлены в матрице P:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{мыло} \\ \text{бомбочка} \end{array} \begin{pmatrix} \text{цена} & \text{купоны} \\ 400 & 1 \\ 800 & 2 \end{pmatrix}$$

Составьте матрицу S, отражающую сумму продаж каждым сотрудником и количество выданных купонов.

Задача 3. В связи с большой загруженностью в период праздников в магазине косметики ручной работы «Farwer Cosmetics» Дианой было принято решение о расширении трудового коллектива. На конкурс-стажировку были приглашены 6 мастеров, которых распределили на две команды по три человека. Их задачей было изготовить максимальное количество определенных видов продукции за 3 часа.

Количество изготовленной продукции первой команды представлено в матрице C:

$$C = \begin{array}{c} \\ \text{Оксана} \\ \text{Валерия} \\ \text{Александра} \end{array} \begin{pmatrix} \text{бомбочки} & \text{скрабы} & \text{бальзамы} \\ 31 & 33 & 44 \\ 25 & 60 & 17 \\ 47 & 22 & 89 \end{pmatrix}$$

Количество изготовленной продукции второй командой представлено в матрице K:

$$K = \begin{array}{c} \\ \text{София} \\ \text{Полина} \\ \text{Анастасия} \end{array} \begin{pmatrix} \text{бомбочки} & \text{скрабы} & \text{бальзамы} \\ 21 & 28 & 37 \\ 41 & 37 & 45 \\ 23 & 19 & 22 \end{pmatrix}$$

В табл. 2 представлена информация о стоимости изготовляемой продукции в магазине ручной косметики.

По результатам конкурса-стажировки команда, изготовившая продукции на большую стоимость, будет принята в команду магазина.

Задания

1. Составьте матрицы D и N, отражающие потенциальную выручку магазина от продажи продукции каждого вида, изготовленной командами 1 и 2 соответственно.

2. Составьте матрицу S, отражающую потенциальную выручку от продажи изготовленной продукции обеими командами.

3. Определите сумму выручки за все виды продукции, изготовленной каждой из команд.

4. Определите, какая из команд после стажировки вступит в штат сотрудников магазина.

Задача 1 может применяться в процессе изучения действий над матрицами: сложение, вычитание матриц и умножение матрицы на число, задача 2 – умножение матриц, задача 3 – умножение матриц, сложение матриц.

Очевидно, что студент задания с практико-ориентированным содержанием примется решать с бóльшим желанием, чем стандартные математические задачи по изучаемой теме. Подобные задания способствуют повышению заинтересованности, развитию любознательности и творческой активности студентов в процессе математической подготовки.

Библиографический список

1. Гаврилычева М.Г. Проблемы обучения математике студентов гуманитарных направлений. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-obucheniya-matematike-studentov-gumanitarnyh-napravleniy/viewer (дата обращения: 15.04.2024).

УДИВИТЕЛЬНЫЕ СЕКРЕТЫ ПЧЕЛИНЫХ СОТ

Д.Е. Равдель, А.А. Шматова,
обучающиеся (5 класс), гимназия № 6, Красноярск
Научный руководитель **О.С. Коляда***,*
учитель математики, гимназия № 6, Красноярск

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о шестиугольной форме сот как о самой эффективной для того, чтобы поделить пространство на маленькие части. Авторы работы доказывают, что шестиугольная пчелиная ячейка вмещает максимальное количество меда и в то же время для ее создания требуется минимальное количество воска.
Ключевые слова: *правильные паркеты, изготовление правильных многоугольников в технике оригами, шестиугольник имеет наибольшую площадь при постоянном периметре.*

«Это неправильные пчелы! И они, наверное, делают неправильный мед!» – возмущался Винни-Пух, вися на голубом шаре.

Интересные факты о пчелах: для сбора ста граммов меда (это всего лишь треть стакана) труженицам-пчелам приходится преодолевать расстояние, равное длине экватора, одна пчела облетает примерно 1000 цветов в день, и трудится 12 часов в сутки, за свою рабочую смену она успевает сделать 10 вылетов. А почему правильный мед «готовится» только в сотах исключительно шестигранной формы? Попытаемся ответить на вопрос: «Почему пчелиные ячейки имеют шестигранную форму?»

Цель работы: с помощью математических методов установить оптимальную геометрическую форму пчелиной ячейки.

Задачи

1. Подбор и изучение необходимой для исследования литературы.
2. Рассмотрение задачи царицы Дидона.
3. Изготовление правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников, шестиугольников в технике оригами.
4. Практическое нахождение правильных многоугольников для построения правильных паркетов.
5. Вычисление площади квадрата, правильного треугольника, правильного шестиугольника при постоянном периметре.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы:

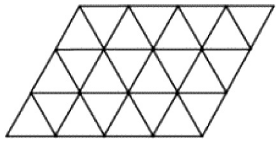
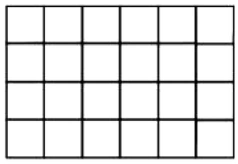
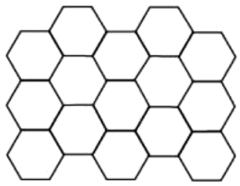
– анализ литературы по данной теме;
– сравнение;
– метод сгиба;
– моделирование;
– геометрический способ решения задачи.

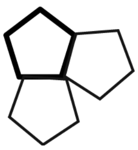
1. Покрытие плоскости правильными многоугольниками

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо предварительно выяснить, какими фигурами можно заполнить плоскость так, чтобы не было пропусков, то есть уложить их в виде правильного паркета.

Математическая постановка задачи такова: надо найти разбиение большой плоской области на элементы малой фиксированной площади (размер пчелы). Эту работу я проделала практически. Построила: треугольный, квадратный, пятиугольный и шестиугольный паркет. Для построения моделей правильных паркетов изготавливаю в технике оригами правильные треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники, используя при этом метод сгиба.

Модели правильных паркетов

Вид правильного паркета	Определение	Рисунок
Треугольный	Покрытие плоскости равными правильными треугольниками, расположенными сторона к стороне	
Квадратный (квадратная решетка)	Покрытие плоскостиравными квадратами, расположенными сторона к стороне	
Шестиугольный (шестиугольная мозаика)	Покрытие плоскости равными правильными шестиугольниками, расположенными сторона к стороне	



В ходе практической работы убедилась, что невозможно построить пятиугольный паркет. Например, если к двум смежным сторонам правильного пятиугольника приложить такие же пятиугольники, то около общей вершины «незаполненным» останется угол.

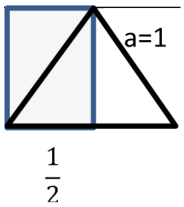
Вывод. Для полного заполнения плоскости ячейками с одинаковыми размерами и формой подходят лишь правильные треугольники, квадраты и шестиугольники.

Пчелы строят соты из воска, выделяемого специальными железами. На постройку одной ячейки пчелы тратят около 13 мг воска. Воск – дорогостоящий продукт для пчелиной семьи, на его производство уходит много ресурсов и энергии. Поэтому соты построены таким образом, чтобы минимизировать расход ценного воска.

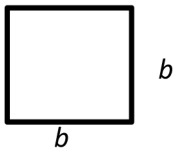
Математическая постановка задачи такова: надо выбрать из правильных треугольников, четырехугольников и шестиугольников ту фигуру, которая обеспечит максимальную площадь при постоянном периметре.

Правильный треугольник

Из квадрата со стороной 1 ед с помощью метода сгиба изготавливаем правильный треугольник. Разрезаем пополам, достраиваем до прямоугольника и вычисляем площадь прямоугольника.

	Вид правильного многоугольника	Сторона (ед.)	Периметр (ед.)	Площадь (ед^2)
	Треугольник	$a = 1$	$P = 3$	$S \approx 0{,}43$

Квадрат с периметром, равным периметру треугольника

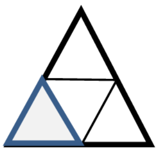
	Вид правильного многоугольника	Сторона (ед.)	Периметр (ед.)	Площадь (ед^2)
	Квадрат	$b = \frac{3}{4}$	P=3	$S \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$

Правильный шестиугольник с периметром, равным периметру треугольника.

Разобьем шестиугольник на шесть равных правильных треугольников.

Вычислим площадь одного треугольника, затем вычислим площадь шестиугольника. Площадь шестиугольника равняется сумме площадей треугольников.

	Вид правильного многоугольника	Сторона (ед.)	Периметр (ед.)	Площадь (ед^2)
	Гексагон	$c = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	P=3	$S \approx 0{,}43 : 4 \approx 0{,}1075$ $S = 6 \cdot 0{,}1075 = 0{,}65$



Сторона шестиугольника равна $\frac{1}{2}$ стороне первоначального правильного треугольника. Поэтому в первоначальный равносторонний треугольник входит 4 треугольника, стороны которых равны $\frac{1}{2}$.

Вид правильного многоугольника	Сторона (ед.)	Периметр (ед.)	Площадь (ед^2)
Треугольник	$a = 1$	$P = 3$	$S \approx 0{,}43S \approx 0{,}43$
Квадрат	$b = \frac{3}{4}$	$P = 3$	$S = 0{,}5625$
Шестиугольник	$c = \frac{1}{2}$	$P = 3$	$S = 0{,}6S = 0{,}65$

Вывод. Наибольшую площадь при постоянном периметре имеет правильный шестиугольник.

В имеющейся литературе приводятся сведения о том, что благодаря такой «математической» работе пчелы экономят около 2 % воска. Количество воска, сэкономленного при постройке 54 ячеек, может быть использовано для одной такой же ячейки.

На уроках географии мы изучали движение земной коры, говорили о землетрясениях. В нашей стране нет места, где бы когда-то не произошло сильное землетрясение. Например, в 1230, 1446 и 1556 гг. подземную стихию почувствовали жители Владимира, в 1446, 1802 и 1977 гг. – Москвы, в 1230 и 1556 гг. – Нижнего Новгорода. Последствия землетрясений очень опасны. За секунды разрушаются города, гибнут тысячи людей. По некоторым данным, от землетрясений с начала цивилизации погибли 150 миллионов человек. Одна из проблем разрушения городов – ненадежность и хрупкость современных зданий. Первым, кто спроектировал дома-моносоты, был американский архитектор Н. Ричард. Он знал, что соты в форме правильного шестиугольника имеют несколько преимуществ перед другими геометрическими фигурами: легкий вес, устойчивость к деформации, экономичный и эффективный расход пространства и строительного материала. Согласно расчетам, здание способно выдержать землетрясения без ограничения по шкале Рихтера, цунами с высотой волны до 90 метров, тайфун с порывами ветра до 700 км/ч, оползень с нагрузкой на стены до 16 тонн на квадратный метр и мороз до 80 градусов по Цельсию. Не факт, что в подобных экстремальных условиях выживут находящиеся внутри люди, но сама конструкция должна устоять.

Стенки пчелиных сот включают шелковые нити личинок, прополис и пыльцу, смешанные с воском – это значительно упрочняет конструкцию. Выходит, пчелы начали использовать композитные материалы в строительстве задолго до того, как похожие технологии стали применять люди. Из примеров: стеклопластик и железобетон.

В Ростехе разработали алюминиевый сотовый заполнитель для укрепления деталей в летательных аппаратах.

Наша исследовательская работа еще раз подтверждает мнение Пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: «Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию сот». Сооружая соты, пчелы строят шестигранные ячейки, которые вмещают максимальное количество меда, и в то же время, для их создания требуется минимальное количество воска.

Библиографический список

1. Скиба Т.В. Что? Где? Почему? Детская энциклопедия. М.: Владис, 2023.
2. Левитин К.Е. Геометрическая рапсодия. М.: Знание, 1976. 144 с.
3. Кун Н.А. Легенды и мифы Древней Греции и Рима. Минск: Нар. асвета, 1989. 462 с.

ГЕОМЕТРИЯ В ФАМИЛИЯХ

М.А. Морочковский,
обучающийся (4 класс), лицей № 6 «Перспектива», Красноярск
Научный руководитель **Т.Н. Морочковская**
учитель, лицей № 6 «Перспектива», Красноярск

Аннотация. В работе рассматривается взаимосвязь геометрии и фамилий.
Своей работой мы хотели бы повысить интерес к изучению математики, доказать, что математика – это неотъемлемая часть нашей повседневной жизни. Практическая значимость исследования в том, что результаты могут быть использованы на уроках в школе, а также как рекомендации для дополнительных занятий, повышающих интерес к предмету.
Ключевые слова: *математика, фигуры, изучение, эффективность, фамилии, обучение, логика.*

Как вы думаете, зачем нужна геометрия? А вы посмотрите вокруг! Геометрия применяется в компьютерной графике, разработке технических изобретений, архитектуре, географии и строительстве. Может быть, не всегда нам понятна геометрия, но, если разобраться, она очень интересная и нужная. На уроках математики мы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляем себе, что такое точка, прямая, отрезок, угол, квадрат, овал, ромб. В седьмом классе нам предстоит расширить знания о геометрических фигурах. Мы узнаем много важных и интересных свойств, которые имеются в геометрии. Я заметил, что многие названия, связанные с математикой, встречаются и в фамилиях людей. Мне стало любопытно, и я решил поподробнее изучить этот материал.

Каждый гражданин при рождении получает свой индивидуальный «опознавательный» знак – фамилию. Теперь все события, которые будут происходить в его жизни, связаны этим магическим словом. Зачем нужна фамилия? Наверное, хотя бы для того, чтобы о нем все знали и могли узнать о нем не только по фотографии, но и без нее. Природа происхождения фамилий такова, что одни происходят от общеизвестных слов, другие – от названия животных, третьи – от математических терминов. Впрочем, об этих фамилиях, которые происходят от названий геометрических фигур, и пойдет речь в работе.

Самые первые понятия в геометрии люди приобрели еще в глубокой древности. Геометрия – одна из самых древних наук. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» по-гречески земля, а «метрео» – мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития служила, преимущественно, практическим целям. В дальнейшем геометрия сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур [2].

Каждый человек, имея фамилию, хочет узнать о своих «корнях» как можно больше. Нередко в фамилии человека заложена его судьба уже при рождении. Это живая история, и тем интереснее становится ее изучение. Фамилия (лат. familia «семейство») – наследственное родовое имя, указывающее на принадлежность человека к одному роду, ведущему начало от общего предка, или в более узком понимании – к одной семье.

Слово «фамилия» – латинского происхождения. В Римской империи оно обозначало общность, состоявшую из семьи хозяев и их рабов. Похожий смысл – это слово позже имело достаточно долго в Европе и в России. Только к XIX в. слово «фамилия» в русском языке приобрело свое второе значение, ставшее сегодня официальным и основным: «наследственное семейное именование, прибавляемое к личному имени».

Исследование проводилось в лицек № 6 «Перспектива». В начале работы рассматривались вопросы происхождения фамилии по различным источникам: статьям, интернет-ресурсам, книгам, справочникам. Затем проводились диагностические исследования, в которых принимали участие учащиеся 4–9 классов. Всего 229 учащихся.

Сопоставление фамилий и геометрических фигур

Фамилия	Геометрические названия
К**овал**ь, Кон**овал**ов, К**овал**ев, К**ова**л**ь**чук, Кон**овал**енко	овал
Шаров, **Шар**овский, **Шар**ипов, Ми**шар**ин, **Шар**ламов	шар
Круглов, **Круг**овой, **Круг**ликов	круг
Яб**луч**анская, **Луч**енко, Бо**луч**евская	луч
Угольникова	угол
Кубышкин, **Куб**арев	куб
Лас**точки**на, Све**точки**на	точки
Квадратенко	квадрат
Метриков	метр
Криваянов	кривая

В списках я смог найти всего 24 фамилии, которые содержат названия геометрических фигур: овал, круг, шар, куб, угол, луч, кривая, метр, точки.

Таким образом, названия геометрических фигур очень редко встречаются в фамилиях (менее 1 %).

Когда составлял списки «математических» фамилий, в голову пришла мысль: «Не влияет ли фамилия на развитие математических способностей человека?» Из 24 человек с математической фамилией по геометрии только у 8 стоит оценка пять. У остальных три или четыре.

Из 10 фамилий великих русских математиков только в одной фамилии (К**овал**евская) встречается название геометрической фигуры. Н.И. Лобачевский, И.М. Виноградов, Д.Ф. Его́ров, С.В. Ковале́вская, А.Н. Колмогоров, М.В. Ломоносов, Л.С.А., Н.Н. Лу́зин, А.А. Марков, В. Стеклов.

Таким образом, названия геометрических фигур в фамилиях встречаются довольно редко. Геометрия нужна каждому человеку, неважно, какая у него профессия, она помогает развивать пространственное мышление, воображение, логику. Я с большим интересом буду изучать эту науку в будущем. Если бы люди не стали изучать геометрию и пользоваться ею, то прогресс и множество современных изобретений дались бы человечеству с большим трудом.

Библиографический список

1. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы / сост. П.И. Алтынов, И.И. Баврин. М.: Дрофа, 2004.
2. Математика. Школьная энциклопедия / сост. С.М. Никольский. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003.
3. Сайт «Мы Николаевы!». URL: www.nikolaev.narod.ru
4. Энциклопедия для детей. Математика / сост. М. Аксенова. М.: Аванта+, 2004. Т. II.

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ш.Ш. Саая,
обучающийся (8 класс), КзПКУ, Кызыл
Научный руководитель **С.В. Хамар-оол,**
преподаватель отдельной дисциплины «Математика»
КзПКУ, Кызыл

Аннотация. Статья посвящена решению задач повышенной сложности с помощью дополнительного построения. Такие дополнительные построения, вводящие новые углы и новые отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, облегчающих решение задачи. В одних случаях эти построения очевидны, в других требуют изобретательности, геометрической интуиции.
Ключевые слова: *дополнительные построения, треугольники, окружность, прямая.*

Дополнительное построение (далее ДП) – это метод решения на чертеже плоской фигуры планиметрических задач. Суть метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче, на котором трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, дополняется новыми (вспомогательными) элементами, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Цель работы – изучение основных видов дополнительных построений при решении геометрических задач и их применение при решении задач повышенной сложности. Объект исследования – геометрические задачи. Предмет – метод дополнительных построений.

Приведем некоторую классификацию дополнительных построений, наиболее часто используемых в школьном курсе математики.

1. Построение вспомогательной окружности, описанной около многоугольника.

Цель – получение вписанных, центральных углов, опирающихся на одну и ту же или равные дуги.

2. Построение боковых сторон трапеции до их пересечения.

Цель – получение треугольника и использование его свойств, использование замечательного свойства трапеции.

3. Удвоение медианы.

Цель – получение параллелограмма и использование его свойств.

4. Построение дополнительных прямых в треугольниках и многоугольниках, пересекающих их стороны или вершины, в частности, высот, медиан, биссектрис.

Цель – получение равных или подобных треугольников; получение углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами; перенос соотношений длин отрезков с одной стороны угла на другую.

5. Проведение дополнительных прямых в окружностях, в частности, радиусов, диаметров, хорд, секущих, касательных.

Цель: 1) получение вписанных и центральных углов;

2) получение углов между касательной и хордой;

3) использование теоремы о касательной и секущей.

Приведем примеры решения задач с использованием некоторых методов дополнительных построений.

Задача 1. Найти высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания – 4 и 14 [1].

Решение. Через одну из вершин трапеции, прилежащих меньшему основанию, провести прямую, параллельную боковой стороне. Отсечется параллелограмм, а так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то противолежащие основания равны 4, а оставшаяся часть основания равна 10. Трапеция делится на параллелограмм и треугольник со сторонами 10, 6, 8. Через вершину этого треугольника провести высоту и по теореме Пифагора найти ее длину. Квадрат высоты треугольника одновременно будет равен $36 - x^2 = 64 - (100 - 20x + x^2)$, где x – часть основания треугольника. Решив уравнение, получим $x = 3{,}6$. Соответственно, высота $h = 4{,}8$.

Задача 2. Точка M – середина стороны треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Известно, что $\angle BKM = 27°$, а $\angle ACB = 67°$. Найти $\angle BCL$ [3].

Решение. На продолжении отрезка LM отметим точку N так, что $NM = LM$. Тогда треугольники CLM и BNM равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle BNM = \angle CLM = 90°$ и $BN = CL$.

Так как $KN = KL + 2LM = KL + AK = AL$, то равны прямоугольные треугольники BNK и ALC (по двум катетам). Следовательно, $\angle BKM = \angle CAM$.

Перечень задач повышенного уровня сложности,
в решении которых используется метод дополнительных построений

1. В равнобедренную трапецию, периметр которой 80, а площадь равна 320, можно вписать окружность. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания [4].

2. Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$ [4].

3. Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 6, AC = 24$ [5].

4. Дан прямоугольник $ABCD$. На диагонали AC отметили точки K и M (K лежит между M и A) так, что $AB = AK, BC = AM$. Из точек M и K опустили перпендикуляры MP и KT соответственно на сторону AB. Докажите, что $AT + PM = AC$ [2].

5. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляр AX на биссектрису угла B и перпендикуляр AY на биссектрису внешнего угла C. Чему равна длина отрезка XY, если $AB = 5, AC = 11, BC = 12$ [3, с. 23].

6. Из вершины A A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Докажите, что PM равен половине периметра треугольника ABC [3].

Библиографический список

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Учебник по геометрии. 7–9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений. 22-е изд. М.: Просвещение, 2020. 384 с.
2. Наш конкурс // Квантик. 2020. № 1. С. 32.
3. Онлайн-курсы образовательного центра Сириус. URL: https://edu.sirius.online/#/ (дата обращения: 11.03.2023).
4. Онлайн сайт «Решу ОГЭ». URL: https://oge.sdamgia.ru/problem?id= 352464
5. Росучебник. URL: https://rosuchebnik.ru/material/dopolnitelnye-postroeniya-v-planimetrii/

ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ НАБОРА МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «СТЕРЕОМЕТРИЯ» ПРЕДМЕТА «ГЕОМЕТРИЯ»

Ш.Ш. Саая,
обучающийся (8 класс), КзПКУ, Кызыл
Научный руководитель **С.В. Хамар-оол,**
преподаватель отдельной дисциплины «Математика»
КзПКУ, Кызыл

Аннотация. В проекте говорится о технологиях создания геометрических фигур для изучения стереометрии. Трудности в изучении стереометрии вызваны тем, что зрительное восприятие геометрических объектов не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает. Например, скрещивающиеся прямые могут выглядеть как пересекающиеся или как параллельные прямые, прямой угол может выглядеть как острый или тупой угол, равные отрезки могут выглядеть как отрезки разной длины.
Ключевые слова: *технологии изготовления, 3D-моделирование, OpenSCAD, пайка из латунной проволоки каркаса фигур, демонстрационные фигуры.*

В наше время современные технологии активно внедряются во все сферы производств. В свою очередь, изучение 3D-моделирования является важным разделом технологического образования. В курсе «Технология» в 6 и 7 классах изучается программа 3D-моделирования OpenSCAD. Она позволяет создать и распечатать модели геометрических фигур на 3D-принтере.

Еще один из способов создания моделей фигур является пайка из латунной проволоки каркаса фигур. В OpenSCAD легко моделировать правильные фигуры и их сечения, а вот задача создать наклонную призму или неправильный многогранник – это проблема. На уроках геометрии рассматривают и строят сечения не только в правильных многогранниках и прямых призмах, но и в наклонных призмах, различных пирамидах. Цель нашего исследования состоит в изготовлении наборов моделей геометрических тел для изучения раздела «Стереометрия» предмета «Геометрия».

Достоинства 3D-технологии

1. Создание модели какого-то изделия на компьютере и получение полноценного физического объекта, соответствующего заданным параметрам.
2. Тиражирование изделий в любом количестве.
3. Сокращение сроков изготовления.
4. Моделирование элементов любой формы и сложности.
5. Быстрота и высокая точность изготовления.
6. Использование разных материалов.

Недостатки 3D-технологии

1. Размеры печати зависят от габаритов 3D-принтера. Принтер может напечатать только то, что поместится на платформе. Что-то большее печатать по частям, а затем склеивать их;

2. Модель из пластика непрозрачна, наглядность процесса построения сечения теряется.

Традиционная ручная технология имеет достоинства:

– наглядность конструкции;

– возможность внесения изменений после изготовления модели.

Недостатки: трудоемкость изготовления модели.

Экономические расчеты производились по формуле: $C_c = C_1 + C_2 + A_o$, *где* C_c – себестоимость проектного продукта, C_1 – стоимость материалов, C_2 – стоимость коммунальных услуг, A_o – амортизация оборудования.

Таблица 1

Расчет стоимости материалов

Название материала	Стоимость за единицу	Количество материала	Сумма
Проволока латунная Ø 2 мм	710 руб. за 1 кг	0,15	106,5 руб
Проволока стальная вязальная Ø 1,5 мм	220 руб. за 1 кг	0,06	13,2 руб
Наждачная бумага	600 руб. за м²	0,02	12 руб
Паяльный припой	499 руб. – 100 гр	10 гр	49,9 руб
Пластик для 3D-принтера ABS фирмы «REC»	4200 руб. за 2 кг	0,295 кг	1239 руб
Итого сумма			1408,6 руб

Таблица 2

Расчет стоимости коммунальных услуг

Вид услуг	Себестоимость за единицу	Количество	Сумма
Электроэнергия	клВт/ч – 2,95 руб.	8	23,6 руб.
Теплоснабжение	м² – 0,59 (в день)	6 м²	3,54 руб.
Водопровод	м² – 21,7	0,01	0,21 руб.
Итого сумма			27,35 руб.

Таблица 3

Расчет стоимости оборудования

Оборудование	Стоимость	Количество	Сумма
3D принтер Picaso Designer X	180 000 руб.	1	180000 руб.
Паяльник электрический	300 руб.	1	300 руб.
Сумма			180300 руб.

Себестоимость проектного продукта (C_c)

Стоимость материалов C_1=1408,6 руб.

Стоимость коммунальных услуг C_2= 27,35 руб.

Стоимость оборудования C_o=180300 руб.

Амортизация оборудования: $A_o = C_o \cdot 0{,}05\% = 180300 \cdot 0{,}05\% = 90$ руб., $C_c = 1408{,}6 + 27{,}35 + 90 = 1525{,}95$ руб.

На примере компании «Партнер» показан разброс цен на наборы фигур по стереометрии, где самая низкая цена 4 964 рубля. При этом данный набор не очень богат деталями: Ц = 4108 руб., себестоимость проектного продукта C_c = 685,76 руб., $P = 4964 - 1525{,}95 = 3438{,}05$ руб. $69{,}25$ (%) выгоды.

Расчеты рентабельности изготовления набора геометрических тел, используя технологию пайки и распечатки на 3D-принтере, показывают достаточно выгодный показатель – 69,25 %. Это выше, чем ожидалось.

Библиографический список

1. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: монография. Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. 384 с.
2. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Геометрия – это несложно: учебное пособие по курсу «Математика». 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2005. 172 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ИЛЛЮЗИИ В ФОТОГРАФИЯХ

И.В. Зиновьева,
обучающийся (8 класс), лицей № 6 «Перспектива», Красноярск
Научный руководитель **Е.В. Малеева**,
учитель математики, лицей № 6 «Перспектива», Красноярск

Аннотация. Часто на фотографиях предметы выглядят совершенно не так, как в реальности. Цель работы – выяснить, как создаются некоторые геометрические и оптические иллюзии на фото. В ходе работы изучена различная литература по иллюзиям, их видам, областям применения, созданы фотографии-иллюзии. На основе полученных из фотографий рисунков были построены чертежи с использованием перспективы из начертательной геометрии, на которых наглядно показано, за счет чего создается заданная иллюзия. Оказалось, что не все фотографии можно объяснить с помощью перспективы. Тогда обратились к геометрической оптике, а именно, закону преломления лучей. Цель работы достигнута, все иллюзии на полученных фотографиях объяснены либос помощью перспективы, либо с помощью геометрической оптики.

Ключевые слова: *начертательная геометрия, перспектива, проекция, геометрическая оптика, преломление лучей.*

На уроках геометрии, приступая к решению задачи, мы часто строим чертеж, опираясь на свое зрительное восприятие. Но такой подход к решению задачи часто приводит к ошибочным выводам, а значит, к неверному решению. Почему так происходит? Почему один и тот же предмет, видимый невооруженным глазом, вблизи кажется крупнее, чем когда мы смотрим на него издалека?

Разберемся, как использовать перспективу для объяснения иллюзии на фото.

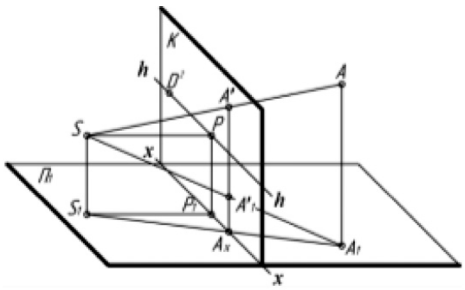


Рис. 1. Перспектива для объяснения иллюзии на фото

Для того чтобы построить точки A' и A'_1, необходимо (рис. 1) через точку S и точку S_1 провести вертикальную плоскость, которая пересечет предметную плоскость $П_1$, а картину $К$ – по вертикальной прямой A' и A'_1, идущих от точки A_x – точки пересечения S_1A_1 с основанием картины x-x. На этой линии пересечения и находятся точки A' и A'_1 [2]. При фотографировании я поэкспериментировала с расстояниями между людьми, между людьми и фотоаппаратом, а также с уровнем расположения фотоаппарата.

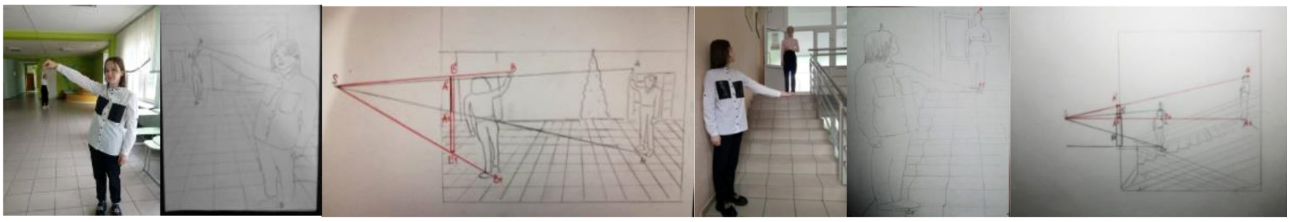


Рис. 2. Серия фотоэкспериментов

Проекция более удаленной фигуры на плоскость фотографии гораздо меньше ее реальных размеров, благодаря чему появляется ощущение, что одна фигура держит за руку другую (маленькую фигуру). На плоскости фотографии точки A_1 и B_2 совпадают и поэтому появляется иллюзия, что ноги одной фигуры стоят на ладони другой. Перспектива дальней фигуры намного меньше ее реального размера (рис. 2).

Сделав несколько фотографий-селфи, я заметила, что когда камера находится близко к лицу, нос намного больше уха, однако когда камера находится на большем расстоянии, ухо и нос становятся в размере примерно одинаковыми.

Проекция носа на плоскость фотографии гораздо больше проекции уха, благодаря чему появляется ощущение, что нос становится больше, а ухо меньше (рис. 3).

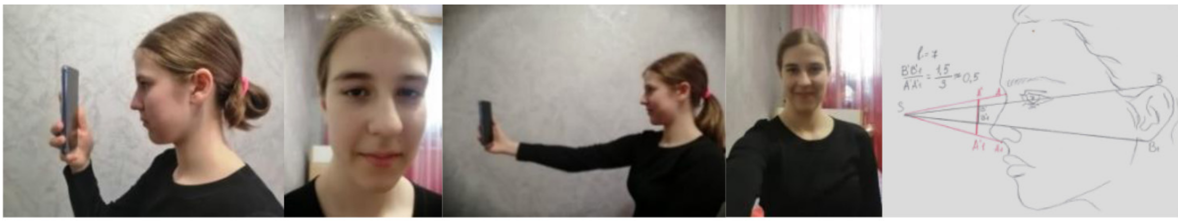


Рис. 3. Соотношение проекций уха и носа

У человека в реальности отношение длины носа к длине уха примерно равно единице. Сравним полученные результаты на рис. 4.

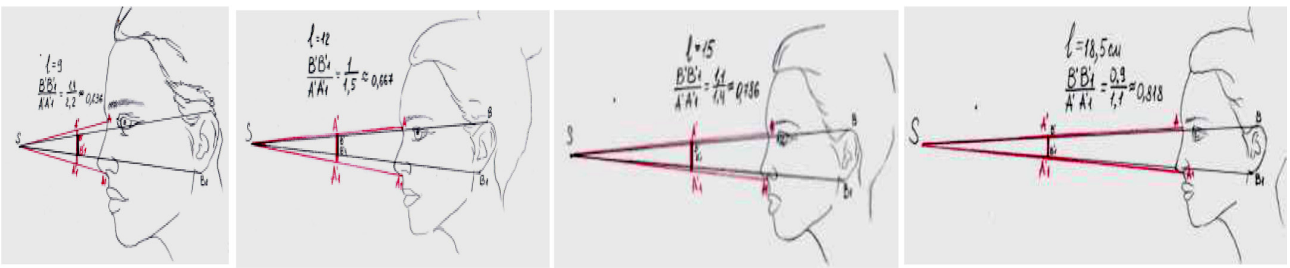


Рис. 4. Отношение длины носа к длине уха

Чем больше расстояние от камеры до лица человека, тем ближе коэффициент к 1, а значит, минимальная разница в размере между носом и ухом.

При получении следующих фотографий с иллюзиями мы заметили, что с помощью перспективы их не объяснить. Встретились с оптическими иллюзиями и геометрической оптикой. Для получений снимков и иллюзий на шахматной доске была изображена черная стрелка, смотрящая вправо (рис. 5).

Рис. 5. Эффект перспективы на фотографиях с иллюзиями

Чтобы построить изображение предмета, нужно пустить два луча. Первый луч проходит из верхней точки предмета параллельно главной оптической оси, после на линзе луч преломляется и проходит через точку фокуса. Второй луч идет через центр линзы. На месте пересечения двух лучей и получается изображение. На рис. 6 показано, как изображение, проходя через линзу, уменьшается и переворачивается, где D – расстояние от предмета до линзы, F – расстояние от линзы до изображения [1].

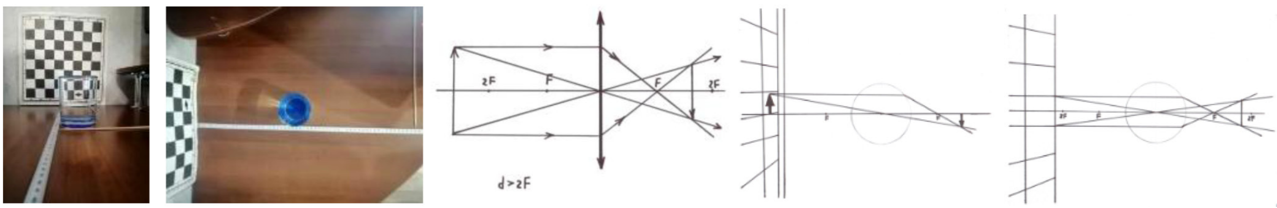


Рис. 6. Перспектива изображения

Поменяв расстояние между объектами, получаем следующие снимки. Расстояние между предметами меньше, чем на рис. 1. На фотографиях (рис. 7) стрелочка переворачивается и увеличивается в размере.

Снова поменяем расстояние между объектами.

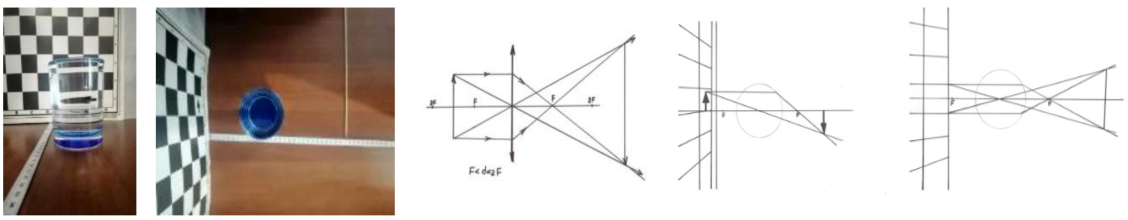


Рис. 7. Изменение перспективы с изменением расстояния

На фотографиях (рис. 8) стакан находится очень близко к шахматной доске. Мы видим, что изображение не переворачивается, а только увеличивается. Такое изображение называют мнимым.

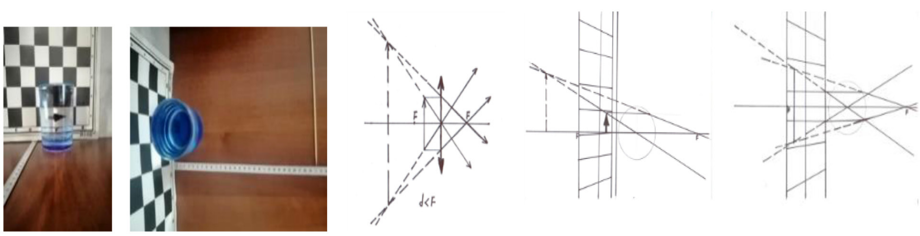


Рис. 8. Пример мнимого изображения

В ходе работы были созданы и рассмотрены фотографии с иллюзиями. Одни из них были объяснены с помощью перспективы, другие – с помощью геометрической оптики. После серии опытов были созданы снимки с заранее задуманной иллюзией, а это значит, что фотографы могут заранее продумывать эффектные снимки с использованием иллюзий.

Полученные знания о геометрических и оптических иллюзиях можно применить в разных областях, ведь иллюзии встречаются повсеместно.

Библиографический список

1. Михеенко А.В. Геометрическая оптика: учеб. пособие. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2018. 100 с.
2. Филисюк Н.В., Мальцева В.А. Инженерная графика. Построение перспективы здания и теней: методические указания для практических занятий и самостоятельной работы студентов всех направлений всех форм обучения. Тюмень: РИО ФГБОУ ВПО ТюмГАСУ, 2014. 26 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ТРЕНАЖЕР-ПОМОЩНИК «СОСТАВ ЧИСЛА»

И.Д. Козлов,
обучающийся (4 класс), средняя школа «Комплекс Покровский», Красноярск
Научные руководители **К.А. Матвеева,**
учитель начальных классов,
И.Г. Кошкин,
педагог дополнительного образования

Аннотация. В работе обсуждается сложность изучения некоторых тем по математике. Сравнивается эффективность классического метода изучения темы «Состав числа» и обучения с помощью игровой программы. Описывается процесс создания и испытания авторской программы, ее улучшение. Приведены итоги тестирования контрольной группы до использования программы и контрольное тестирование.
Ключевые слова: *числа и цифры, состав числа, программирование в математике, Scratch, робототехника.*

Цифры – это письменные знаки, с помощью которых мы записываем числа. Цифры ограничены в количестве. Число обозначает количество предметов. Оно не может быть применено само по себе – у него всегда есть самостоятельный смысл. При этом любое число состоит из одних и тех же десяти цифр в разных комбинациях. Число может иметь и всего один знак, то есть выглядеть как цифра – разница будет только в смысловой нагрузке.

Знание состава числа – залог быстрого счета, устного и письменного. Это фундамент, на котором будет строиться дальнейшее обучение математике. По сути своей, состав числа – это то, как можно это число разбить на два слагаемых. Состав числа начинают изучать с опорой на наглядный материал. Обычно таким материалом выступают числовые домики. Они представляют собой здание с крышей и двумя квартирами на каждом этаже. На крыше всегда живет число, состав которого нужно выучить. На этажах расположены цифры, на которые это число можно разбить. Чем больше таких вариаций, тем больше этажей и тем выше дом.

Современными программами не предусмотрено, чтобы ребенок решал примеры и задачи, используя свои пальцы или счетные палочки. На это нет времени. Он должен производить вычисления в быстром темпе, а это возможно только в том случае, если он помнит состав чисел. В первом полугодии первоклассники будут решать примеры (и задачи) в пределах первого десятка. Решать надо довольно быстро, аккуратно записывать в тетрадь.

Для того чтобы определиться с темой, которая вызывает трудности у первоклассников, мы с классным руководителем Кристиной Анатольевной решили провести анкетирование среди учителей начальных классов. В тестировании участвовали 10 учителей начальной школы.

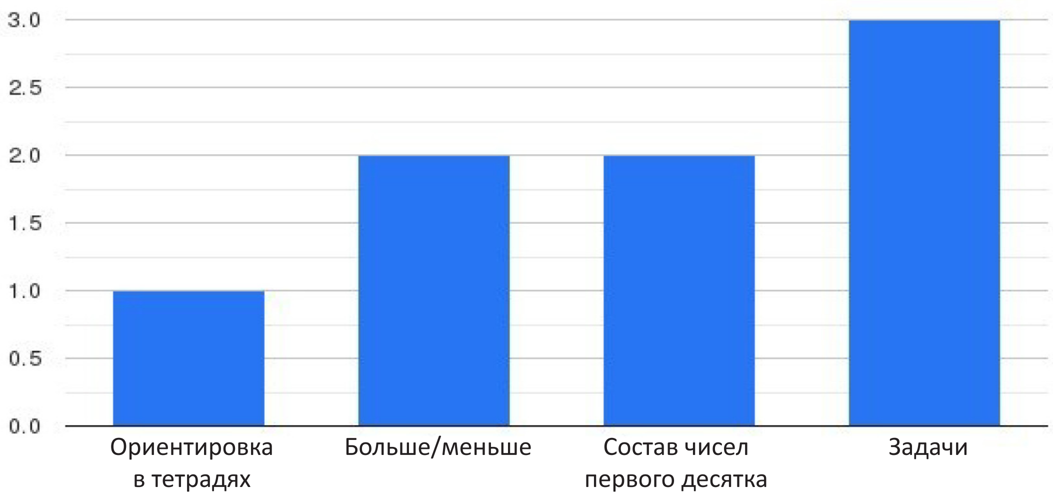


Рис. 1. Трудности первоклассников

Результаты анкетирования показали, что одна из самых трудных тем для первоклассников – «Состав числа и задачи».

Потом были проверены знания первоклассников по теме «Состав чисел первого десятка». Для этого я попросил учителя 1 класса «К», где учится моя сестра, проверить знания детей по этой теме. Для проверки знаний были выбраны карточки с числовыми домиками.

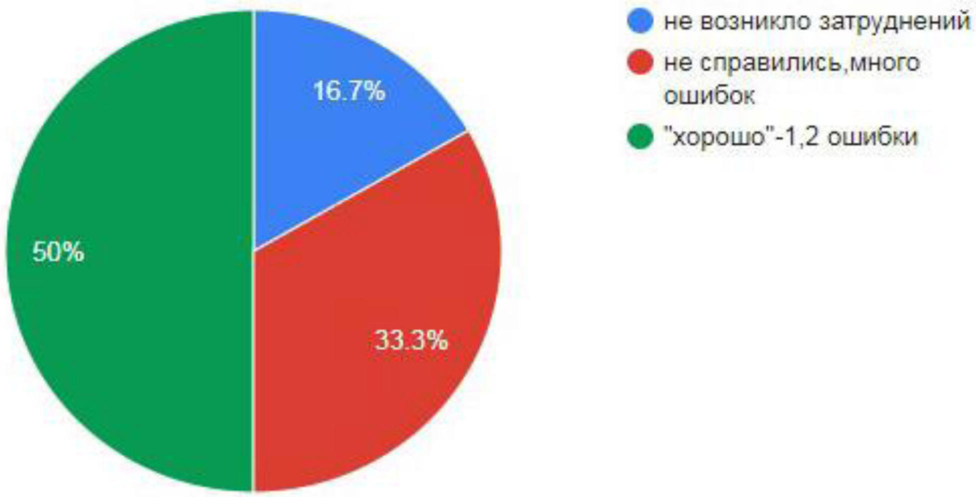


Рис. 2. Результаты проверки знаний первоклассников

Автор статьи любит заниматься программированием и робототехникой, занимается в секции «Робототехника». Поэтому было принято решение сделать программу с помощью приложения для создания игр и анимации Scratch. Scratch – это бесплатный язык программирования и одновременно программа, предоставляющая визуальный интерфейс для создания игр и анимаций. Это среда разработки предназначена исключительно для учебных целей и настоящими программистами не используется. Это приложение удобно тем, что не требует специально прописанных команд. Все уже есть там, в виде оформленных блоков с задачами. Мне нужно было лишь четко понимать, что я хочу видеть и выбирать нужные блоки, а потом накладывать фон и звуки. В своей программе я взял за основу числовые домики. На экране есть домик с пустыми окошками и вариантами ответов. Нужно выбрать правильный вариант, чтобы перейти к следующему домику. Соседи в домике расположены хаотично, вычислить логически, как это можно сделать в традиционных домиках, в моей программе нельзя.

Тестирование программы проходило в том же 1 «К». Во время тестирования выяснилось, что на данный момент моя программа для первоклассников очень легкая, так как с момента опроса и до момента создания программы прошел целый месяц. За это время ребята успели хорошо выучить состав числа первого десятка. Я решил повысить сложность и эффективность программы, а для этого мне нужно сделать больше пустых окошек. Таким образом, увеличится количество примеров, которые нужно решить, чтобы заполнить домик. Я со своим научным руководителем Иваном Геннадьевичем работал целый месяц над улучшением моих числовых домиков. Новая программа имеет несколько больших отличий от демонстрационной версии. Я усложнил числовые домики, теперь в них появляется несколько пустых окошек. Так как я очень люблю играть в разные компьютерные игры, я решил ввести элемент игры в свою программу и использовать элементы робототехники. Управлять программой теперь нужно будет не просто компьютерной мышкой, а специальным джойстиком, собранным из конструктора Wedo2.0.

Тестирование новой программы проходило в конце первого полугодия. Первоклассники к этому времени уже наизусть знают состав числа. При таком позднем запуске моя программа не сможет помочь в обучении, только лишь проверить знания. Чтобы программа обучала, нужно начинать использовать ее намного раньше, при изучении чисел. Но испытание программы во второй раз детям понравилось больше. Ребята отметили, какая игра красочная, всем хотелось попробовать поиграть с джойстиком. Моя работа будет продолжена в следующем году. Вместе с Кристиной Анатольевной мы опробуем программы с новыми первоклассниками.

Библиографический список

1. Моро М.И., Волкова С.И., Степанова С.В. Математика. М.: Просвещение, 2015. Ч. 1. 128 с.
2. Умназия. Как объяснить ребенку состав числа. URL: https://umnazia.ru/blog/all-articles/kak-objasnit-rebenku-sostav-chisla
3. Учи.ру. Как понять состав числа? URL: https://uchi.ru/otvety/questions/chto-takoe-sostav-chisla
4. Scratch для юных программистов / пер. с англ. А.В. Банкрашкова. М.: АСТ, 2019. 94 с.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

О.В. Маслова,
обучающийся (11 класс), средняя школа № 144, Красноярск
Научный руководитель **Е.А. Аешина,**
кандидат педагогических наук, доцент,
КГПУ им. В.П. Астафьева

Аннотация. Статья посвящена исследованию геометрического смысла произведений векторов. Были даны геометрические интерпретации трех видов произведений векторов: скалярное, векторное и смешанное, выведены формулы для более наглядного иллюстрирования и упрощения дальнейшего практического применения их геометрического смысла.
Ключевые слова: *произведение векторов, площадь, объем.*

В школьном курсе геометрии такому важному разделу, как «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», уделяется достаточно мало внимания. Основные понятия, изучаемые при этом, отрабатываются на достаточно узком круге несложных задач. Также отметим, что другие произведения векторов, кроме скалярного, в школе не изучаются. Но, например, те, кто сдает ЕГЭ по физике, знает, что в некоторые физические формулы, например для нахождения силы Лоренца и силы Ампера, входит векторное произведение. Интерес к познанию новых видов произведений векторов и определения их геометрического смысла, определило актуальность тематики данного исследования.

Алгоритм вывода геометрического смысла скалярного произведения основывается на построении прямоугольных треугольников на данных векторах, выходящих из одной точки (рис. 1), и нахождении косинуса угла этого треугольника по формулам: $\cos\alpha = \frac{a_{\text{пр}}}{|\vec{a}|}$, $\cos\alpha = \frac{b_{\text{пр}}}{|\vec{b}|}$.

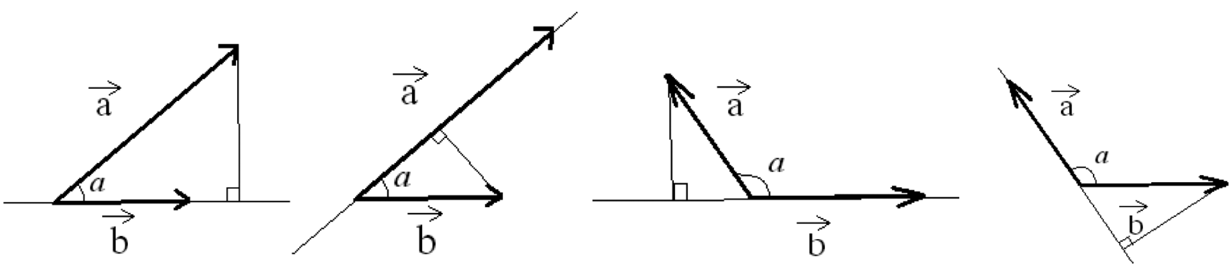


Рис. 1. Прямоугольные треугольники, построенные на данных векторах

Видоизменив известную формулу скалярного произведения векторов [1, с. 171], получим: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot a_{\text{пр}}$ или $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot b_{\text{пр}}$. В случае если угол между векторами тупой, то скалярное произведение векторов считается аналогично, как было сказано выше, только со знаком «–».

При поиске геометрического смысла векторного произведения мы основывались на достраивании данных векторов, выходящих из одной точки, до параллелограма (рис. 2), и нахождении его площади с помощью высоты.

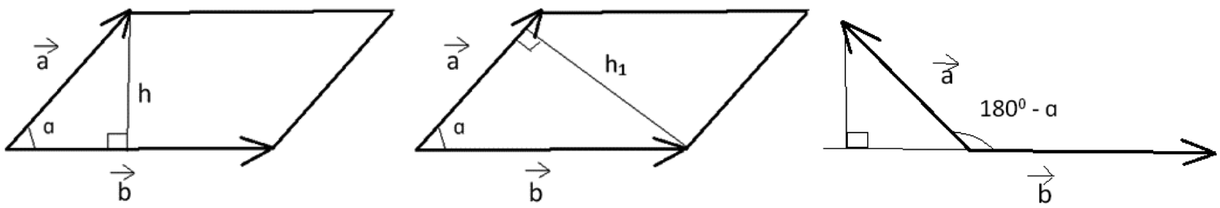


Рис. 2. Параллелограммы, построенные на данных векторах

Высоты параллелограммов вычисляем по формулам: $h = \sin\alpha \cdot |\vec{a}|$ и $h_1 = \sin\alpha \cdot |\vec{b}|$. Видоизменив формулу площади параллелограмма с помощью предыдущих, имеем: $S = \sin\alpha \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Сравнив с формулой векторного произведения, приходим к выводу, что площадь параллелограмма численно равна векторному произведению данных векторов: $\vec{a} \times \vec{b} = \sin\alpha \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = S$. В случае если угол между векторами тупой, то формула будет иметь вид: $\vec{a} \times \vec{b} = \sin(180^{\circ} - \alpha) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = S$. Так как каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то площадь треугольника можно также найти, используя геометрическую интерпретацию векторного произведения.

При поиске геометрического смысла смешанного произведения мы достраивали три некомпланарных вектора, выходящих из одной точки, до параллелепипеда и находили его объем, используя геометрический смысл скалярного и векторного произведений векторов, а также их алгебраические свойства [2, с. 2] (рис. 3).

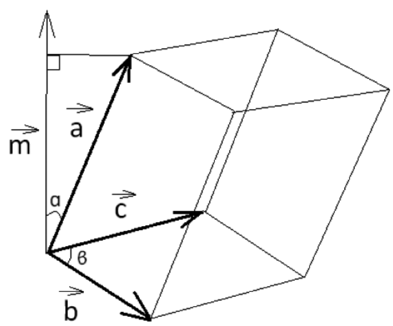


Рис. 3. Параллелепипед, образованный векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

Формула нахождения объема прямоугольного параллелепипеда имеет вид: $V = S \cdot h$. Площадь основания можно найти, используя геометрическое определение векторного произведения. В качестве высоты параллелепипеда будет выступать длина проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, содержащую вектор $\vec{m}$: $a_{пр} = \cos\widehat{\vec{a}\,\vec{m}} \cdot |\vec{a}|$. Тогда объем данного параллелепипеда равен: $V = \cos\widehat{\vec{a}\,\vec{m}} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{m}|$ – это есть скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{m}$, где вектор $\vec{m}$ результат векторного произведения векторов $\vec{c}$ и $\vec{b}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $V = \vec{a} \cdot \overrightarrow{(c \times b)}$. Заметим, что параллелепипед состоит из шести равных по объему тетраэдров или из двух равных по объему треугольных призм [1, с. 116]. Таким образом, можно по аналогии вычислять объемы призм и пирамид. В исследовании также приведен цикл задач с их решением, иллюстрирующих практическое применение геометрических интерпретаций произведений векторов.

Библиографический список

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 10–11 классы. М.: Просвещение, 2022. 287 с.
2. Меньшова И.В. Аналитическая геометрия / МГТУ им. Н.Э. Баумана. М., 2018.

ПИРАМИДЫ ЕГИПТА: ЧИСЛО ПИ В ОТНОШЕНИЯХ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д.А. Ревин
обучающийся (6 класс), лицей № 6 «Перспектива», Красноярск
Научный руководитель **Е.В. Малеева,**
учитель математики, лицей № 6 «Перспектива», Красноярск

Аннотация. Сколько существуют пирамиды, столько люди их изучают, пытаются разгадать их тайны, но до сих пор нет ответов на многие вопросы. Цель работы – выяснить, существуют ли другие пирамиды Египта, в которых, как и в пирамиде Хеопса, существует связь между отношениями длин элементов и числом Пи, и провести сравнительный анализ размеров их элементов. Был проведен сравнительный анализ отношений длин элементов в 27 пирамидах Древнего Египта. В четырех из них результаты были очень близки к результатам пирамиды Хеопса. Вычисление отношений длин элементов этих пирамид к длинам соответственных элементов пирамиды Хеопса показало, что эти пирамиды подобны пирамиде Хеопса. В ходе работы была написана программа на языке Python, которая облегчила вычисления и пригодится в дальнейших исследованиях.
Ключевые слова: *пирамида, подобие фигур, число Пи, отношение, периметр, высота.*

Все знают о великих пирамидах Египта. Современные ученые считают, что они имеют огромное значение для науки, начиная с их архитектуры и заканчивая содержащимися внутри иероглифами и древними реликвиями [1]. Сколько существуют пирамиды, столько люди их изучают, пытаются разгадать их тайну. Казалось бы, что уже должны быть разгаданы все загадки этих пирамид, но до сих пор нет ответов на многие вопросы. Так, в книге «Строительство и архитектура в Древнем Египте» с сожалением констатируется: «Исследователь, разбирающийся в строительстве, инженерных работах и тому подобных вопросах и желающий изучить древние методы сооружения зданий и монументов, не имеет поэтому точных данных не только об их деталях, но и о том, какие методы и приспособления использовали при их возведении египтяне, а также о том, какими знаниями по математике, астрономии и другим наукам они обладали» [3]. В. Замаровский говорит о вопросах, которые задают себе люди, приезжающие к пирамидам: ««Если сторону основания этой пирамиды разделить на удвоенную высоту, мы получим лудольфово число. Откуда такое совпадение?» Египтологи отказываются тратить попусту время на решение подобных псевдопроблем, им не хватает его и на споры „о вещах, не лишенных смысла“. Это, однако, вовсе не значит, что и мы должны оставить эти вопросы без внимания. На них следует остановиться хотя бы потому, что ими интересуются многие, а взгляды, высказанные по этому поводу, получили достаточно широкое распространение» [2].

Принято считать, что основы математики были заложены в Древнем Египте и Вавилоне, а свое развитие математика как наука получила позже в Древней

Греции. По мнению Н.М. Охлопкова, занимающегося изучением истории математики и составлением исторической математической картины мира, закономерность развития математики можно выстроить в ряд, где в начале стоит практическая (эмпирическая) математика Древнего Египта и Вавилонии. Математика зарождается как вычислительная математика, изучает постоянные конечные положительные величины. И только потом появляется теоретическая математика Древней Греции, которая изучает постоянные положительные конечные и бесконечные величины [4]. Но тогда возникает вопрос, а как же число Пи, обнаруженное многими исследователями с разным уровнем точности в соотношениях элементов пирамиды Хеопса в Гизе? Если египтяне были знакомы только с постоянными конечными положительными величинами, то откуда тут взялось число Пи? Это случайность? Или наоборот, такая закономерность присуща многим или любым пирамидам? И все-таки, что-то заставляет думать, что это не случайность, и у некоторых пирамид тоже обнаружится подобная закономерность.

Гипотеза: соотношение периметра и высоты, связанное с числом Пи, присутствует не только у пирамиды Хеопса, но и у других пирамид Египта, и это можно объяснить с точки зрения математики.

Цель – выяснить, существуют ли другие пирамиды Египта, в которых, как и в пирамиде Хеопса, существует связь между отношениями длин элементов и числом Пи, и провести сравнительный анализ размеров их элементов.

Кандидатом технических наук, доктором химических наук, автором 140 научных работ, в том числе четырех монографий и нескольких изобретений, Н.А. Васютинским, как и В. Замаровским и многими другими, было найдено в пирамиде Хеопса соотношение периметра и высоты с числом Пи.

При выполнении работы была изучена различная литература, связанная как с египетскими пирамидами, так и с понятием пирамиды в математике, а также тема подобия фигур.

Были проведены два эксперимента, созданы модели пирамид, одна – модель пирамиды Хеопса, три модели со случайными размерами. Проведенные вычисления показали, что в пирамидах со случайно выбранными размерами отношение периметра основания пирамиды к удвоенной высоте не равно числу Пи. Следовательно, закономерность, обнаруженная в пирамиде Хеопса, не может повторяться в любых пирамидах со случайно выбранными размерами. Но тогда предположение, что египтяне сознательно выбрали такие размеры, которые связаны числом Пи, имеет право на существование. Кроме того, в ходе эксперимента было установлено, что все созданные макеты не являются подобными фигурами, поэтому возник вопрос «Как создать пирамиду, подобную данной?» Для этого была создана программа на языке программирования Pithon, которая облегчила вычисления и пригодится в дальнейших исследованиях.

Был проведен сравнительный анализ отношений длин элементов в 27 пирамидах древнего Египта. В четырех из них результаты были очень близки к результатам пирамиды Хеопса. Вычисление отношений длин элементов этих пирамид к длинам соответственных элементов пирамиды Хеопса показало, что эти пирамиды подобны пирамиде Хеопса.

Таким образом, гипотеза была доказана и цель достигнута.

Думаю, многим моим одноклассникам и другим школьникам будет интересно узнать на уроках, как математика проявляется в таких достопримечательностях, как Великие египетские пирамиды.

Библиографический список

1. Баранюк К. Какие тайны до сих пор скрывают египетские пирамиды? // BBC Future. 2015. URL: https://www.bbc.com/russian/science/2015/12/151222_vert_fut_whats_inside_pyramids
2. Замаровский В. Их величества пирамиды / пер. со словацкого О.И. Малевича; послесл. Н.С. Петровского. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 448 с.
3. Кларк С., Энгельбах Р. Строительство и архитектура в Древнем Египте. 360 с.
4. Охлопков Н.М. Исследование закономерностей развития математической картины мира и особенностей развития современной математики // Вестник СВФУ. 2010. Т. 7, № 4.

ВЛИЯНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ НА КАЧЕСТВО ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

А.А. Шарифова, Д.Д. Терскова
обучающийся (9 класс), средняя школа № 144, Красноярск
Научный руководитель **Е.А. Аешина,**
кандидат педагогических наук, доцент,
КГПУ им. В.П. Астафьева

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о влиянии дистанционного обучения и применения цифровых образовательных ресурсов на уровень и качество знаний обучающихся по предмету.
Ключевые слова: *дистанционное обучение, цифровой образовательный ресурс.*

2020 г. не прошел бесследно для российского образования. Массовый уход на дистанционное обучение затронул все образовательные учреждения. «Дистанционка» стала привычным и обыденным мероприятием для всех. В такое непростое время обучающиеся должны были получать знания, умения по всем преподаваемым дисциплинам на том же уровне, что и при очном обучении.

Дистанционное обучение – процесс взаимодействия ученика и учителя на расстоянии с сохранением всех присущих обучению компонентов (целей, содержания, методов, организационных форм, средств обучения) и с применением специфических технических средств (интернет-технологий или других интерактивных сред). В процессе данного вида обучения учителя и обучающиеся школ осуществляли взаимодействие с помощью различных образовательных платформ и цифровых образовательных ресурсов. К наиболее применяемым можно отнести: 1) Якласс (образовательный интернет-ресурс для школьников, учителей и родителей. Портал содержит онлайн-тренажеры по школьной программе и автоматическую проверку домашних заданий); 2) Учи.ру (крупнейшая российская образовательная онлайн-платформа, на которой ученики изучают школьные предметы в интерактивной форме по индивидуальной траектории, учатся программированию, развивают гибкие навыки, готовятся к ВПР и ОГЭ, а также участвуют в российских и международных олимпиадах); 3) Skysmart (интерактивная рабочая тетрадь – проект онлайн-школы Skysmart. Содержит задания для учеников 5–11 классов по школьной программе: математика, русский язык, обществознание, английский); 4) РЭШ (масштабный проект, который объединяет интерактивные видеоуроки по всем предметам школьного курса. Здесь представлены уроки с 1 по 11 класс от лучших преподавателей страны); 5) электронный журнал; 6) Zoom (сервис беспроводного взаимодействия для организации видеоконференций, вебинаров, групповых чатов).

В исследовании рассмотрим вопрос влияния дистанционного обучения и использования цифровых образовательных ресурсов на качество знаний учащихся по математике.

В исследовании приняли участие обучающиеся 9 классов средней школы № 144 Красноярска (45 человек). Специфика исследования заключалась в анализе уровня знаний испытуемых по тем темам курсам математики, которые выносились на дистанционное изучение в период локдауна 2020 г. В 2020 г. по дисциплине «Алгебра» в 7 классе на дистанционное обучение были вынесены многие темы, в частности: 1) степень с натуральным показателем и свойства; 2) одночлены/многочлены и операции с ними [1]. Проанализировав содержание данных тем, мы составили тест с заданиями открытого и закрытого типов, ориентированными на выявление предметных знаний учащихся.

Для понимания значимости различия очного и дистанционного обучения в эксперименте дополнительно приняли участие обучающиеся 8 классов (40 человек), которые изучили данную тему в очном формате.

Исследуя полученные в ходе тестирования результаты, мы получили итоговое количество обучающихся, успешно справившихся с тестом в каждом классе (рис. 1; 2).

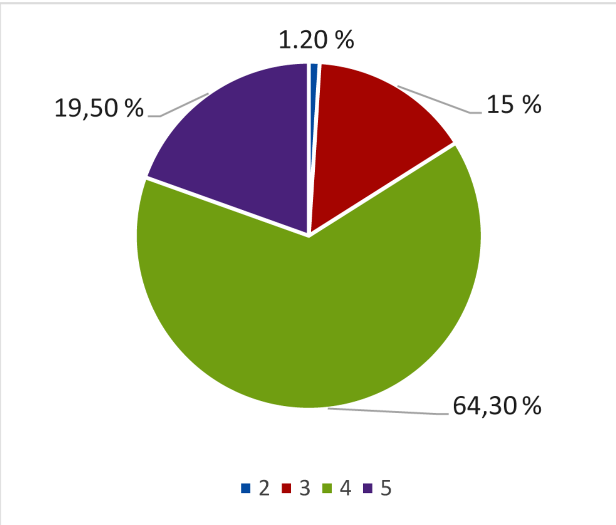


Рис. 1. Результаты тестирования (9 класс)

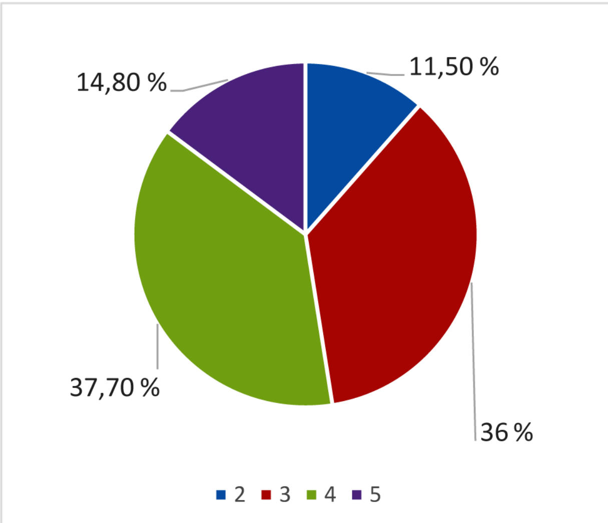


Рис. 2. Результаты тестирования (8 класс)

Видим разницу в процентном соотношении полученных оценок в 8 и 9 классах. В 9 классе оценку «2» получили лишь 1,2 % опрошенных, а в 8 классах этот процент намного выше – 11,5 %. Что касается оценок «3» и «4», то здесь 9 классы лидируют: 15 и 64,3 % против 36 и 37,70 %. Пятерок также значительно больше в 9 классе, чем в 8.

Полученные результаты дали интересную картину. Результаты 9 классов на достаточно высоком уровне, и это при том, что обучающиеся осваивали темы в дистанционном формате, на пике внедрения и образовательный процесс различных платформ и ЦОР. Поэтому мы пришли к выводу, что на процесс получения знаний не влияет форма обучения (очная/дистанционная), и, вероятнее всего, уровень остаточных знаний у учащихся лишь зависит от того, как хорошо слушает на уроках сам школьник, и от того, как преподают этот материал учителя. По итогам исследования сформирована брошюра, содержащая актуальные и полезные рекомендации обучающимся по работе в различных образовательных ресурсах.

Библиографический список

1. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: в 2 ч. / А.Г. Мордкович и др. М.: Мнемозина, 2019. Ч. 2. 231 с.

Молодежь и наука XXI века

XXV Международный форум студентов,
аспирантов и молодых ученых

II Межрегиональный Креатив-форум
школьников Енисейской Сибири

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В КОНТЕКСТЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Материалы II Межрегионального Креатив-форума
школьников Енисейской Сибири

Красноярск, 16 мая 2024 года

Электронное издание

Редактор *Ж.В. Козупица*
Корректор *А.П. Малахова*
Верстка *Н.С. Хасаншина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Отдел научных исследований и грантовой деятельности КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 8(391) 217-17-82

Подготовлено к изданию 29.08.2024.
Формат 60х84 1/8.
Усл. печ. л. 9,5