

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»

(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

**Шевцова Анастасия Александровна**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**ТЕМА «Формирование представления о числе в 5-6 классах как составляющей  
математической грамотности школьника»**

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика



**ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ**

Зав. кафедрой: к.п.н., доцент Шашкина М.Б.

17.05.24

*М.Б. Шашкина*

(дата, подпись)

Руководитель: к.ф.-м.н, доцент Калачева С.И.

17.05.2024

*С.И. Калачева*

(дата, подпись)

Дата защиты 14.06.2024

Обучающийся: Шевцова А.А.

Оценка *удовлетворительно*

Прописью

Красноярск, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования представления о числе	5
1.1. Представление о числе в математической грамотности школьника	5
1.2. Возрастные и психолого-педагогические особенности обучающихся 5-6 классов.....	14
Глава 2. Разработка рекомендаций по формированию понятия о числе у обучающихся 5-6 классов.....	33
2.1. Методический аппарат для формирования представления о числе обучающихся 5 класса .....	33
2.2. Рекомендации по организации изучения отдельных тем курса математики 5 класса.....	37
2.3. Результаты апробации предлагаемых рекомендаций .....	47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	55

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Формирование математической грамотности в школьном образовании в соответствии с задачами, сформулированными в ФГОС ООО, реализуется в рамках развития общей функциональной грамотности личности. Специфика математической грамотности состоит в предметности предъявляемых требований к компетентности учащихся. Соответствующие требования составляют основу стратегического планирования в формировании математической грамотности на уроках. Проблематичность формирования математической грамотности обуславливается предметными затруднениями при освоении общеобразовательной школьной программы, а также недостаточностью развития универсальных учебных действий, включая навыки счета.

В соответствии с научными исследованиями счетная деятельность требует определенной психофизиологической и психологической организации человека, которая требует стимулирования определенных анализаторов. Соответствующие анализаторы составляют функциональный комплекс, на основе которого человек осуществляет счетные операции. Счетная деятельность тесно сопряжена с представлениями учащихся о числах и соответствующим разделом в школьном курсе математики – теория чисел. Данный классический раздел в математическом обучении посвящен отношениям, построенным на множестве натуральных чисел и их свойствах, включая свойство делимости.

Задачи элементарной теории чисел включаются в содержание работ по математическим олимпиадам вплоть до 10-11 классов, в содержание ВПР для 5-6 классов, и даже в варианты ОГЭ и ЕГЭ по базовой и профильной математике.

Вопросы элементарной теории чисел затрагиваются составителями и разработчиками учебных пособий по школьному курсу математики, авторами которых выступают следующие математики: М. И. Башмаков, Е. А. Бунимович, Н. Я. Виленкин, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, Г. К. Муравин, С. М. Никольский, Л. Г. Петерсон и др.

В то же время теоретический и практический аспект обучения в элементарной теории чисел в условиях современного школьного образования требуют систематизации. В частности, остается неопределенным вопрос о критериях, по которым следует говорить о сформированности представлений и числе как необходимой для математической грамотности компетентности.

Объект – процесс формирования понятия о числе у учащихся 5 класса.

Предмет – организация процесса обучения математике, способствующая формированию представления о числе.

Цель исследования – разработка рекомендаций по развитию представлений о числе на уроках математике в 5-6 классах.

Задачи:

1. сформулировать значимость представлений о числе в математической программе школы в современном мире;

2. привести возрастные и психолого-педагогические особенности младших подростков;

3. определить основные методы формирования представлений о числе;

4. разработать научный аппарат для формирования представлений о числе;

5. систематизировать дидактический материал для экспериментальной работы;

6. провести сравнительную диагностику критериев развития представлений о числе.

Методы исследования: метод анализа научной литературы; метод формирующего эксперимента.

Методологическая основа исследования:

Структура исследования определяется логикой построения научного исследования и включает введение, первую главу (три параграфа), вторую главу (три параграфа), заключение и список литературы.

## **ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования представления о числе**

### **1.1. Представление о числе в математической грамотности школьника**

Для анализа представлений о числе как важной компетентности в структуре математической грамотности учащихся 5-6 классов следует определить роль числа в современном обществе и установить содержательные аспекты данного понятия.

Число как полноценная понятийная категория возникает в период античности. На данном этапе число используется для учета определенных объектов. В древности первичной основой для счета выступали части тела и пальцы, что обуславливает распространенность двудольных, десятичных и пятикратных систем счисления, как отмечает Л. Леви-Брюль. Автор отмечает, что именно это объясняет, например, необходимость сбора одной пятой доли от военной добычи в казну в исламской культуре, в период правления Мурада III в Османской империи. Многие народы и в настоящее время используют для счета пальцы на руках и ногах, как папуасы. Число, как отмечает Л. Леви-Брюль, продолжая мысль Ф. Энгельса, происхождением обязано реальности и объектам, которые существуют в ней. Необходимость в числе появилась, когда человек столкнулся с необходимостью учета объектов, обладающих общим признаком, или свойством. Возникли первые словесные выражения в представлениях о числе: «много», «один» и, чуть позднее, «немного». Существуют, однако, упоминания и о современных языковых системах, где подсчет подразумевает, что каждая единица – это отдельно взятый объект [24, с.18-19].

Постепенно появились полноценные обозначения чисел. Цифра «два» отражала в различных культурах человеческие и животные органы. Последующие числа полностью связаны со счетом на пальцах. Именно пальцы являются основным «инструментом» для счета в период возникновения чисел [39]. Связь чисел и пальцев отражается в филологическом аспекте, например, в тюркских языках. Подобная связь наблюдается между словом «пять» (рука), на основе которого возникло число «пять». Данная связь прослеживается в алтайской

культуре: в слове «элиг» одновременно фиксируются значения «ширина пальца» и «пятьдесят» [37, с. 225]. По сути, именно возникновение числа «три» ознаменовало полноценный переход от слов «много» и «один» к рядам чисел и цифр [9, с. 5-6]. Следует отметить, что счет на пальцах, в соответствии с принципом рекапитуляции Холла, является логически первым и историческим обусловленным инструментом для счета, которым начинают пользоваться маленькие дети, а также сохранившиеся в изначальном виде культуры.

Первичное представление о числе, таким образом, состояло в отождествлении числа с определенными объектами, или их свойствами. Выражение количества, множества определенных объектов и было основным представлением о числе [29].

Основная природа числа с ходом исторического развития человечества подлежала абстраклизации. Своеобразной промежуточной формой, хоть и историческим непоследовательной, между абстракцией и эмпирикой является мифологический компонент числа. Системы верований и религиозных взглядов в различных культурах придавали особый сакральный смысл каждому числу. Любопытно, что подобной силой обладали в большинстве ситуаций цифры первой десятки [23, с. 136].

Эволюционное становление представлений о числе отражает диалектический переход от эмпирического компонента к абстрактному компоненту в развитии человеческого мышления. Впоследствии число получает развитие в ментально-конкретном аспекте. Диалектика абстрактного компонента числа состоит в том, что отражение действительности в сознании человека требует от него в определенной ситуации познания абстрагирования от целостного объекта для концентрации на определенных свойствах. Абстрагирование при работе с числами как свойствами объекта позволяет рассматривать непрерывный процесс в дискретном формате. Число становится отражением определенного идеального представления о конкретном объекте, абсолютным значением его свойства [30, с. 7].

Именно абстракция позволяет выразить число, что является особым свойством числа. Вторичность числа как характеристики определенного свойства в соответствии с диалектической логикой числа нивелируется постепенным отражением в числе любой абстрактности [38]. Абстрактность числа позволила людям со временем усматривать на основе отношений между числами определенные связи в природных явлениях. Так, людям удалось определить на основе определенного количества дней цикличность природных и климатических изменений. Другая любопытная закономерность – зависимость высоты звука струны от продолжительности данного звука.

К любопытному выводу приходит в своем исследовании, посвященном истории представлений о числе, В.А. Белов. Автор отмечает, что вся история числа, фактически, сводится к постепенному кодированию каждого существующего объекта и процесса через числа. Логичным исходом представляется полноценная оцифровка действительности [3].

Тенденция к оцифровке реальности особенно явно проявляется на современном этапе общественного развития. Согласно научной литературе, особенностью цифрового общества является стремление цивилизации к дематериальной форме социального существования. В частности, подобной формой являются символы и цифры, которые составляют сведения экономического, социально-коммуникационного и культурного характера [20]. В качестве примера оцифровки можно привести современные изменения в способах оплаты покупок. Первоначально все покупки совершались в очном формате, непосредственно в магазине, на кассе. Впоследствии появилась заочная форма покупок. Параллельно шел переход от товарообменных отношений к товарно-денежным операциям, затем договорами с использованием ценных бумаг. Наконец, появляется онлайн-покупка и договоры, в которых принимают техническое участие роботы. Многие исследователи признают одновременно искусственность цифровой среды и необходимость использования цифр в современных общественных отношениях, что является особенностью среды, которая была сформирована посредством информационных технологий.

Продуцирование информации и цифрового технологического обеспечения для познавательных процессов служит для реализации интересов, как на частном, так и на публичном уровне. Фактически, существует полноценная цифровая среда, именуемая виртуальной реальностью, под которой следует понимать искусственный прототип физической действительности, разработанный человеком. Свойствами виртуальной реальности следует признать отсутствие постоянства и вариативность [16]. Научная литература достаточно серьезно поднимает проблематику существования физически существующего человеческого сознания с особенностями сенсорного восприятия и физиологии в виртуальной реальности. Данный вопрос актуализирует точку зрения, согласно которой цифровое общество представляет собой социальную совокупность отношений, в рамках которой ответственность за собственные поступки уменьшается при повышенном запросе людей на упрощение окружающей действительности и собственного положения [35].

Понимание таких сложных процессов в современной социальной действительности, когда число становится абсолютным значением определенного объекта, требует формирования определенных компетенций на всех уровнях получения образования, не говоря уже о бытовых представлениях о числе. На этапе школьного образования именно математика представляет собой дисциплину, освоение которой позволит сформировать представления о числе и соответствующих счетных действиях и операциях.

На уровне развития необходимых компетенций для формирования представлений о числе необходимо обратиться к образовательным стандартам. В первую очередь нас интересует уровень основного общего образования в школе, включающий программу за 5-6 класс, так как именно на данном этапе расширяется представление школьников о числе. Согласно ФГОС ООО (Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»), при изучении математики ожидаются следующие предметные результаты:

- «умение оперировать понятиями: натуральное число, простое и составное число, делимость натуральных чисел, признаки делимости, целое число, модуль числа, обыкновенная дробь и десятичная дробь, стандартный вид числа, рациональное число, иррациональное число, арифметический квадратный корень; умение выполнять действия с числами, сравнивать и упорядочивать числа, представлять числа на координатной прямой, округлять числа; умение делать прикидку и оценку результата вычислений» [32].

Таким образом, необходимость формирования представлений о числе закреплена в отечественном образовании на уровне образовательного стандарта ФГОС ООО.

Обратимся к федеральной рабочей программе основного общего образования по математике (базовый уровень). Согласно ожидаемым предметным результатам за 5-6 класс по теме «Числа и вычисления», учащиеся должны освоить следующие:

- Понимать и правильно употреблять термины, связанные с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями.

- Сравнивать и упорядочивать натуральные числа, сравнивать в простейших случаях обыкновенные дроби, десятичные дроби.

- Соотносить точку на координатной (числовой) прямой с соответствующим ей числом и изображать натуральные числа точками на координатной (числовой) прямой.

- Выполнять арифметические действия с натуральными числами, с обыкновенными дробями в простейших случаях.

- Выполнять проверку, прикидку результата вычислений.

- Округлять натуральные числа.

- Выполнять, сочетая устные и письменные приёмы, арифметические действия с натуральными и целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами.

- Вычислять значения числовых выражений, выполнять прикидку и оценку результата вычислений, выполнять преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий.

- Соотносить точку на координатной прямой с соответствующим ей числом и изображать числа точками на координатной прямой, находить модуль числа.

- Соотносить точки в прямоугольной системе координат с координатами этой точки.

- Округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел.

Следовательно, вычислительные операции и составление математической модели представляют собой важные компетенции, по которым можно оценить степень сформированности представлений о числе у учащихся. По нашему мнению, выделить соответствующие компетенции нам позволит математическая грамотность учащихся.

Понятие «математическая грамотность» впервые было сформулировано в исследовании PISA, которое датируется 2000 годом. Особенность данного исследования состоит в том, что оно проводится на систематической основе каждые три года [21]. Данное понятие постепенно детализировалось в последующих исследованиях. Наконец, в исследовании PISA-2023 приводится следующее определение: это способность личности к применению, интерпретации математических закономерностей в реальных профессиональных и бытовых ситуациях. Математическая грамотность человека подразумевает знание операций, фактов и понятийного аппарата в математической науке. На основании соответствующих компетенций человек способен объяснять и даже прогнозировать определенные процессы [40].

Рассмотрим еще одно современное определение математической грамотности, которое дал в своей статье проф. А. В. Боровских. Автор дает критический анализ определения «математическая грамотность», которое сформулировано в исследовании PISA. Основной претензией исследователя стало отсутствие четких существенных признаков математической грамотности, по которым можно было бы судить о математической грамотности более предметно

[6, с. 33]. А. В. Боровских в соответствии с сущностью понятия «грамотность» формулирует следующий существенный признак математической грамотности – освоение знаково-символических средств. Соответствующий терминологический подход А. В. Боровских акцентирует внимание на содержание, проявления, структуру, функции и основные параметры математической грамотности. Определение математической грамотности сформулировано следующим образом: «Математической грамотностью называется интеллектуальная способность, состоящая во владении математическими знаковыми средствами и проявляющаяся в решении задач с использованием этих средств» [6, с. 35]. Анализ знаковых средств в структуре математической грамотности А. В. Боровских осуществлял на уровне младшей школы. Ключевой вывод данного исследования состоит в том, что основной педагогической целью в развитии математической грамотности на уровне начальной школы является формирование компетенций «схематизации» [6, с. 42]. Схема представляет собой знаковое средство, при помощи которого фиксируются отношения между компонентами задачи по математике.

Для выделения компетенций, по которым можно определить сформированность представлений о числе у учащихся 5-6 классов, обратимся к исследованию Л.О. Денищевой, К.А. Краснянской, О.А. Рыдзе, проведенному на базе ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» [12]. Данный институт занимается разработкой диагностических заданий, соответствующих диагностическим работам по системе PISA. В соответствующем исследовании представлена градация уровней развития математической грамотности учащихся.

Структура достаточного уровня математической грамотности учащихся подразумевает освоение ими предметных компетенций базового уровня и успешное практическое использование данных компетенций. Для повышенного уровня учащихся 5-6 классов характерно наличие твердых компетенций предметного характера, на основе которых они способны выстраивать математическую модель реальных обстоятельств и решать заключенную в них

проблему. Крайне малое количество детей в 5-6 классе достигает оптимального уровня математической грамотности. Оптимальный уровень подразумевает достаточную компетентность школьников для математического моделирования проблемы, успешного решения, интерпретации полученных математических результатов, рефлексии по данным результатам. Более подробная характеристика уровней представлена в таблице 1.

#### Достаточный

- отвечают на вопросы в знакомых практических ситуациях, требующих применения элементарной математики для описания проблемы или ее решения. В них в явном виде представлена вся информация (числа, отношения, зависимости и т.д.), необходимая для ответа на вопрос; читают информацию, представленную в общем описании ситуации и в тексте самого задания, ориентированного на использование математических знаний и умений школьника; извлекают нужную математическую информацию, которая представлена в одной или двух формах (например, только текст или текст и рисунок); выполняют стандартные процедуры (рассуждения, вычисления), соответствующие прямым указаниям.
- описание ситуации, идентичной известной или не сложной ситуации, типичной для повседневной жизни; в явном виде информацию (в тексте задания, в справочных материалах и пр.), необходимую для решения, ответа на поставленный вопрос; вопрос, для ответа на который нужно выполнить 1–2 логических шага или действия.

#### Повышенный

- интерпретируют и распознают такие ситуации, где требуется сделать не более, чем прямой вывод; извлекают нужную информацию из двух-трех источников; применяют для решения проблем стандартные алгоритмы, формулы, процедуры, соглашения (свойства действий и правила нахождения величин); выполняют известные процедуры, которые могут требовать принятия решений на каждом последующем шаге; проводят рассуждения, необходимые для обоснования ответа; интерпретируют полученные результаты с учетом особенностей представленной ситуации; приводят обоснование полученного ответа; применяют самоконтроль в процессе проведения рассуждений / решения и оценки реальности полученного ответа.
- ситуацию, аналогичную изученной или известную из повседневной жизни; справочную информацию, представленную в одной двух формах (например, в форме числовых данных, последовательности действий (инструкции)); вопросы, для ответа на которые нужно выполнить 2–3 логических шага или 2–4 действия; возможно, что потребуется переформулировка поставленного вопроса с учетом возможного плана решения.

#### Оптимальный (опережающий)

- анализируют и интерпретируют информацию, сообщаемую в нескольких различных формах, и на этой основе из известных моделей выбирают или конструируют модели несложных ситуаций; учитывают при создании модели условия / ограничения, которые указаны в предложенной ситуации или следуют из нее; в рамках модели самостоятельно выбирают и выполняют известные процедуры (схема рассуждения, алгоритм вычисления), включая те, которые могут требовать принятия решений на каждом последующем шаге; проводят рассуждения, для выполнения которых может потребоваться понимание логических связей и терминов; обосновывают сделанный вывод, объясняют полученное решение поставленной проблемы; анализируют новый учебный материал или описание реальной ситуации и применяют полученные сведения для решения поставленной проблемы.
- описание ситуации, которая сводится к известной; новый материал, незнакомый учащимся (не предлагался или был представлен эпизодически на уроках, ученику не приходилось встречаться с подобными ситуациями в повседневной жизни); справочную информацию разного формата, на основе которой делаются выводы или разрабатывается способ решения

Рисунок 1 – Уровни математической грамотности (для 5–6 классов)

Анализ соответствующих заданий, которые включаются в систему PISA, позволил нам определить следующие компетенции, по которым можно определить сформированность представлений о числе:

- создание математической модели (высокий уровень – детальное описание созданной математической модели, точно отражающей условия задачи, объяснение реального, профильного смысла математического выражения; средний уровень – создание правильной математической модели без объяснения реального смысла; низкий уровень – отсутствие математической модели, или создание математической модели, не соответствующей условиям задачи);

- понимание смысла арифметического действия (оптимальный уровень – объяснение смысла арифметического выражения и результата через объекты, которые описываются заданными числами; средний уровень – выполнение арифметического действия без объяснения; низкий уровень – отсутствие арифметического действия, соответствующего условиям задания);

- навыки сравнения величин (оптимальный уровень – применение навыков сравнения в реальной жизненной ситуации; достаточный уровень – использование навыков сравнения в математических упражнениях; недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения для выполнения математических заданий);

- соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (оптимальный уровень – успешное сравнение двух реальных фигур по площади, установление зависимости между величинами; достаточный уровень – построение геометрических фигур по условиям задачи, фиксация верного ответа; недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения к реальным ситуациям).

Для диагностики данных компетенций нами будут использоваться задания по математике, которые предлагаются в диагностической работе PISA.

Таким образом, понятие числа играет существенную роль для современного общественного развития. В историческом контексте это обуславливается переходом представлений о числе от эмпирического аспекта к абстракции,

инструментальному значению в счетной деятельности и полноценному социальному символу в эпоху цифровизации.

Необходимость формирования представлений о числе диктуется нормативной-правовой и исторической плоскостью: соответствующая компетенция (представление о числе) фиксируется на уровне ФГОС ООО; настоящий этап общественного развития именуется как «цифровая эпоха», что, с философской точки зрения, говорит о важном изменении места числа в познании человеком окружающей действительности – каждый объект человек стремится представить в виде совокупности чисел, описывающих определенные отношения, процессы и логические связи.

Составляющие сформированного представления о числе были выделены нами на основе анализа понятия «математическая грамотность» у школьников и соответствующих диагностических заданий: соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел; навыки сравнения величин; понимание смысла арифметического действия; создание математической модели.

## **1.2. Возрастные и психолого-педагогические особенности обучающихся 5-6 классов**

Согласно принципу рекапитуляции С. Холла каждый человек в рамках биологического и социального онтогенетического развития проходит все этапы эволюции как вида и развития цивилизации и общества. Развитие представлений о числе также обладает определенной историей, как мы выяснили ранее, причем этап абстрагирования числа от объекта приходится в онтогенезе ребенка на программу 5-6 классов по математике, когда учебная программа подразумевает необходимость работы с абстрактными числами. Это важно, так как иначе применить представления о числе учащимися в современных реалиях к цифровому обществу не представляется возможным. В связи с этим следует дать психофизиологическую характеристику учащихся в 5-6 классах.

Возраст представляет собой определенную степень развития психики личности, которая имеет временные рамки протекания. Психологические особенности возраста имеют тесную связь с историческими обстоятельствами, в которых ребенок растет и развивается. Не менее важными факторами являются наследственность, специфика общения ребенка [33].

Для всех возрастных групп предусмотрены определенные социальные ситуации развития. Речь идет об определенной совокупности внутренних предпосылок и социальных обстоятельств развития ребенка. Совокупное влияние данных факторов стимулирует изменения в психологии личности, характерные для определенного возраста.

Исследования отечественных и зарубежных ученых показали, что в математике с 11-12 лет ребенок начинает демонстрировать способность к абстрактности и начинает рассуждать в абстрактной форме. Период обучения в 5-6 классах соответствует младшему подростковому возрасту.

Учащиеся в пятом классе принадлежат, если можно так выразиться, особой возрастной группе: зачастую, это учащиеся, у которых происходит переход от детства к младшему подростковому возрасту. Психологической особенностью данного возраста является формирование чувства взрослости, одного из ключевых подростковых новообразований. Приходится констатировать, что подростковый возраст является одним из самых кризисных периодов в развитии индивида, что связано с глубокой и сложной перестройкой одновременно на уровне психики и физиологии [22]. Сущность кризиса состоит в том, что подросток, будучи только вышедшим из детского возраста, уже активно стремится к равноправию в отношениях с взрослыми, хотя объективно и не может этого добиться в силу недостаточности опыта, зрелости, социально-психологической готовности. Между объективной невозможностью стать полноценным членом общества и активным стремлением этого достичь возникает противоречие, что приводит к смене фокуса внимания подростка с взрослых на сверстников. Характерная для младшего школьного возраста ведущая деятельность по обучению сменяется коммуникативной деятельностью в

младшем подростковом возрасте. В частности, это отмечает В.В. Давыдов, который, впрочем, признает, что учебная деятельность все еще остается одним из приоритетных видов деятельности подростка. В основном, автор связывает это с началом профориентации, однако, данный мотив еще не до конца сформирован у младших подростков. Тем не менее, интеллектуальное и физиологическое созревание стимулирует успехи в обучении, создает возможности для освоения более сложных учебных тем и компетенций. В частности, младшие подростки более способны в продолжительной учебной работе. Как правило, остаточным явлением в младшем подростковом возрасте является склонность к игровым формам: подростки еще только начинают расти, и психологически комфортной и знакомой формой познавательной деятельности еще остается игра [34]. Данное обстоятельство можно использовать в дидактической работе, однако, игры следует усложнять в соответствии с задачами возрастного развития и обучения.

Ключевые для настоящего исследования особенности младшего подросткового возраста формулирует в соответствующей классификации А.П. Краковский. В частности, автор отмечает следующие особенности:

- стремление к достойному статусу признания среди сверстников в ученическом коллективе и в семейных отношениях;
- высокий уровень утомляемости;
- поиск прочного дружеского общения;
- страх социальной изолированности от класса и прочих коллективов и малых групп, включая семью;
- возникновение приоритетности в вопросе академической конкуренции в классе;
- первичное отрицание собственных акцентированно детских пристрастий, вещей;
- утрата авторитетности, основанной на возрастной разнице;
- протестное отношение к запретам, лишенным обоснования;
- повышенное внимание к ошибкам, допускаемым педагогами;

- начало критического осмысления собственных ресурсов и сформулированных еще в детстве целей;
- отсутствие адаптационных механизмов в условиях неудачи, или относительно низкой академической успеваемости;
- высокий уровень мечтательности и береженого отношения к собственным мечтам;
- высокий уровень эмоциональной нестабильности;
- повышенный уровень соответствия между делом и словом;
- высокий интерес к активным физическим нагрузкам, включая спортивные виды деятельности;
- возникновение более «взрослых» увлечений, включая кинематограф, музыкальную деятельность, сбор коллекционных предметов [19].

Перечисленные особенности младшего подросткового возраста играют важную роль в личностном развитии подростка и его последующей учебной деятельности. Степень влияния данных факторов на развитие ребенка носит достаточно индивидуальный характер, к тому же, не следует отрицать влияние прочих факторных групп, включая социально-экономическую обстановку [11].

Осуществим более подробный обзор некоторых особенностей младшего подросткового возраста. Для рассматриваемого периода характерна резкая психическая перестройка, как ранее мы отмечали, что и приводит к кризисному состоянию. Обучение лишилось приоритетности как вид деятельности, и на смену ему приходит именуемое Д. Б. Элькониным интимно-личностное общение. Отдаление от взрослых зачастую создает предпосылки для серьезных конфликтов [5].

Противоречивость младшего подросткового возраста определяется существенной неравномерностью в развитии психики и физиологии организма индивида. Возрастные конфликты с родителями, как правило, возникают, будучи основанными на стремлении подростка повысить собственную значимость как взрослый человек, хотя таковым подросток еще и не является. Конфликты

возникают также с педагогами, но, что еще серьезнее – возникают внутри самого подростка [36].

Подробнее остановимся на такой особенности, как повышенный уровень утомляемости в младшем подростковом возрасте. Исследователь Г. Г. Шахвердов усматривает в качестве предпосылок подобного состояния специфику физиологического развития организма. Это приводит к повышенному уровню энергетических расходов, связанных с постоянным ростом организма. Таким образом, даже небольшая интеллектуальная, или физическая нагрузка сверх привычной нормы способна быстро утомить организм.

Следующая ключевая особенность младшего подросткового возраста состоит в личном переживании собственной академической неуспешности по определенным предметом. Предпосылки данной ситуации существуют уже на уровне школьной программы: предметов в 5 классе становится значительно больше, к тому же, по каждой дисциплине свои требования формулирует теперь отдельный педагог. Отсутствие успеха в обучении, или других видах деятельности, зачастую, приводит к интенсивной негативной эмоциональной реакции. Младший подросток, столкнувшись с трудностями над сложным заданием, отказывается его выполнять. Ситуация успеха, при этом, является полноценным дидактическим инструментом педагога при работе с младшими подростками, что стимулирует положительный эмоциональный фон. В. А. Сухомлинский отмечает, что полноценный учебно-познавательный мотив должен подкрепляться успехом в учебной деятельности [1].

Не менее важной особенностью младшего подросткового возраста является повышенные возможности для осуществления самостоятельной работы в учебной деятельности. Познавательная деятельность младших подростков приобретает более самостоятельный характер. Это касается практически всех видов познавательной активности: освоение новых знаний, выполнение заданий практического характера, формулирование основных закономерностей и ключевых идей, построение логических межпредметных связей [18].

В младшем подростковом возрасте внимание как процесс приобретает регулируемый, управляемый и организованный характер. Само по себе внимание не следует рассматривать в качестве специфической формы познания. Внимание выступает организующим фактором в функционировании мышления, памяти и восприятия. У младших подростков повышается уровень креативности и критической восприимчивости.

Обратим внимание на повышенный объем памяти, что обуславливается совокупным функционированием логической оценки информации и последующей фиксации результатов оценки в памяти. Младшие подростки больше склонны к воспроизведению запоминаемого материала собственным словарным запасом и конкретизированным обобщениям. Память также может отличаться у младших подростков индивидуальными отличительными свойствами, в частности, скорость воспроизведения (одни подростки способны сразу оперировать запоминаемым материалом, другим требуется для этого время).

Помимо физиологии и психики следует отметить социальный аспект становления: в младшем подростковом возрасте формулируются основные векторы и установки морального и социально-нормативного поведения. Младшие подростки сталкиваются с таким новообразованием, как самосознание личности. Говоря же о коммуникативной деятельности как ведущей для данного возраста, необходимо отметить, что общение со сверстниками также становится важным источником получения новых знаний. Сверстники представляют одну из значимых референтных для младшего подростка групп.

В младшем подростковом возрасте продолжается развитие теоретического мышления. Углубление данного новообразования создает основу для работы учащихся с гипотезами, когда необходимо выполнить творческое задание. Подростки, решая новые учебные задачи, сталкиваются с возможностью выбора креативных решений в определенных заданиях. Соответствующее психическое новообразование формулирует И. Ю. Кулагина [22]. Младший подросток приобретает больше возможностей для переноса опыта в другие обстоятельства,

чтобы решать определенные задания. В частности, это касается абстрактных закономерностей.

В младшем подростковом возрасте происходит освоение определенных интеллектуальных операций. Речь идет об обобщении, классификации и аналогии. Посредством данных операций подросток устанавливает межпредметные связи, производит критический анализ изучаемых процессов, фиксирует их общие признаки. Таким образом, уровень качества в анализе абстракций во многом определяется интенсивным развитием теоретического рефлексивного мышления.

Л. С. Выготский обращает внимание на изменения в младшем подростковом возрасте в функционировании воображения индивида. Абстрактное мышление способно перевести воображение в сферу мечтательных образов. Автор отмечает обращение подростковых мечтаний и фантазий во внутренний мир, доступ к которому подросток предоставляет избирательно. Воображение в данной плоскости представляет собой субъективную форму мышления [10].

Возвращаясь к противоречиям младшего подросткового возраста, необходимо обратить внимание, по мнению И. Ю. Кулагиной, на стремление подростков к сходству и общности со сверстниками. Противоречие создает потребность подростка в самовыражении и выделении своей «особости» в соответствующей возрастной среде общения. Для подростка важно, чтобы его творческие и интеллектуальные результаты получили признание другими подростками, в частности, в ученическом коллективе.

Зачастую, наблюдается несоответствие между ожидаемой оценкой творчества индивида и реальной оценкой другими подростками. Подобное несоответствие способно исказить самооценку, превозвысив ее, или занизив. Это может сказаться на личностном переживании академической успешности.

Ключевая особенность развития мыслительных процессов в младшем подростковом возрасте, играющая роль в настоящем исследовании, состоит в переходе к абстрактному мышлению от конкретно-образного мышления. Наглядность как компонент в мышлении подростка сохраняется при

последующем углублении. В частности, благодаря конкретно-образному компоненту мышления младший подросток приобретает способность к конкретизации понятия на уровне частных представлений и образов [7].

Абстрактное мышление способствует приобретению у учебной деятельности подростка теоретической направленности. Непосредственно само знание становится объектом интереса, а также вопросы его применения на практике. В сознании подростка возникает потребность в обосновании информации, ранее носившей фактологический характер. Индивид стремится к установлению логических связей между следствиями и аргументами. Формируется способность к рассуждению при расширении познавательных мотивов.

Предпосылками соответствующих изменений выступают определенные внешние факторы:

- возникновение новых учебных дисциплин;
- теоретический базис научных направлений в качестве содержания учебной программы;
- рост качества познавательных процессов при оценке предлагаемых абстрактных закономерностей.

Рассмотрим особенности мотивационной сферы младшего подросткового возраста в соответствии с исследованием И. С. Беганцовой [2]. Было установлено преобладание внешних мотивов над внутренними мотивационными установками. Учебная мотивация выстраивается на социально и личностной основе, что выражается в стремлении получить отметку в соответствии с потребностью, к статусной самореализации в классе, выполнению родительских требований. Познавательный мотив занимает в данной иерархии последнее место. Формирование учебной мотивации в младшем подростковом возрасте требует индивидуального подхода от педагога по математике, посредством которого будут созданы условия, способствующие полноценному личностному становлению и раскрытию его потенциала. На учебном занятии необходимо постоянно поддерживать положительный эмоциональный фон, чтобы повысить

уверенность учащихся в собственных возможностях и снизить влияние стрессогенных факторов. Также не следует забывать про такой дидактический инструмент, как ситуация успеха. Младшие подростки постепенно формируют и развивают собственные умения учиться.

Согласно подходу Ж. Пиаже, индивид в младшем подростковом возрасте переживает «стадию конкретных операций или операционных группировок» в развитии мыслительных процессов [28]. В учебной деятельности младших подростков присутствуют определенные приемы, включая целеполагание, контроль, коррекцию, рефлекссию и планирование. Приемы учебной деятельности призваны обеспечить способность учащихся к смысловому группированию материала, выделению ключевой мысли, умению изучать содержание учебника. Психолог А. Я. Пономарев придерживается мнения, что именно в 12 лет приходится пик развития интеллектуальных способностей, который не следует приравнивать к креативности, пик активизации которой будет проходить гораздо позднее [26].

В соответствии с ранее обозначенными особенностями младшего подросткового возраста мы можем привести следующие методические рекомендации, направленные на организацию обучения младших подростков на уроках математики:

1. Источником для грамотного мотивирования младших подростков на познавательную деятельность могут стать индивидуальные запросы и интересы. В этом выражается психологическое обеспечение личностного развития учащихся. Выявление интересов может быть осуществлено посредством определенных методик или анкетирования. Младший подростковый возраст требует индивидуального подхода с ребенком.

2. Отметим важность программы по математике в 5-6 классах для общего развития младших подростков. Особого внимания требует создание условий для развития компетенций доказывания, обоснования осуществляемых числовых операций, формирования математического инструментария. На данном этапе

также закладываются основы для успешного освоения программы по геометрии, химии и прочим школьным дисциплинам.

3. Основопологающим требованием к построению учебной программы по математике за 5-6 классы является идейно-содержательное структурирование с развитием основных тем и идей начального образования по математике и последующего изучения математики в 10-11 классах. В частности, углубляется освоение числовой, алгебраической, геометрической, логической линии, начало которым было положено еще на уровне начальной школы.

4. Математическое обучение подразумевает необходимость интеллектуальных усилий. Педагог должен создавать условия для сохранения произвольной концентрации внимания учащихся в течение урока. Быстрое утомление может наступить, если урок состоит из сплошных и однообразных числовых операций и преобразований алгебраического типа. Основной дидактический прием – переключение внимания учащихся между видами учебной деятельности.

5. В рамках планирования занятия необходимо запланировать сменяющие друг друга методы и формы организации учебно-познавательной деятельности. Приоритетная форма работы – парное выполнение математических заданий. Постепенно данная форма переходит в индивидуальную, или групповую работу. Групповая работа требует четкой организации, будучи ограниченной во времени использования.

Особое внимание следует обратить на использование игровых форм, которые представляют интерес для учащихся в силу остаточного интереса после начальной школы. В частности, речь идет о сюжетно-ролевых играх. Другая любопытная форма – мини-проекты. Посредством метода проектов педагог формирует у учащихся 5-6 классов способности к самостоятельному планированию собственных действий при достижении учебной цели.

6. В рамках обучения на уроках по математике необходимо способствовать формированию математического понятийного аппарата у учащихся, включая грамотное построение математических высказываний. Сюда следует относить

правильность в произношении математической терминологии и оперировании соответствующими терминами, успешно давать объяснения при решении математического задания [8]. Развитию математической грамотной речи способствуют парные и групповые формы работы.

7. Рассмотренные формы педагогической работы требуют систематической основы для развития универсальных учебных действий.

8. При проведении урока педагог должен достаточно равномерно распределить учебное внимание между всеми учащимися в классе. Формами соответствующего внимания являются: взгляд на учащегося при определенной педагогической реакции, диалог, ответ на вопрос учителя, ответ у доски, похвала в конце занятия и пр. Младшие подростки испытывают острую потребность во внимании взрослого, хоть и стремятся от него отдалиться.

### **1.3. Существующие методы и формы формирования представления о числе**

Программа математики в 5-6 классах школьного образования формулирует основную цель изучения данной дисциплины. Цель состоит в развитии представлений о числе, формировании компетентности по осуществлению арифметических операций в устной и письменной форме, математическом моделировании реальной ситуации. Соответствующее развитие должно осуществляться на систематической основе [15].

Следует отметить, что педагогическая деятельность по формированию представлений о числе сопровождается определенными проблемами, как для педагогов, так и для учащихся. В частности, отмечается недостаточность методического обеспечения для осуществления деятельностного подхода в учебной деятельности при изучении линии числа в курсе математики [25].

Понятийный аппарат по математике в программе 5 класса включает понятия, связанные с дробями: «обыкновенная дробь», «числитель обыкновенной дроби», «знаменатель обыкновенной дроби» и пр. Предметом изучения являются

способы сравнения дробных чисел и фиксации дробей на числовой прямой. Устанавливаются правила, по которым обыкновенные дроби складываются и вычитаются, если у них общий знаменатель [4].

Педагог при расширении представлений учащихся о числе через изучение обыкновенных дробей должен использовать практические ситуации в качестве примера, что также позволит актуализировать материал, пройденный по программе начальной школы. Так, при помощи числового луча учитель по математике может углубить понятие о равенстве и сравнении дробей в 5 классе:

$$1/5 = 2/10; 3/5 = 6/10; 1 = 10/10 = 5/5; 2/5 > 3/10.$$

Тема «Обыкновенные дроби» логически продолжается в изучении десятичных дробей. Причина подобной логической связи состоит в том, что первичное представление о десятичной дроби состоит в том, что это дробь, знаменатель которой включает 10, 100 и пр. Действия над десятичными дробями трактуются через действия над обыкновенными дробями.

Отрицательные числа осваиваются в программе по математике за 6 класс. Координатная прямая в данном случае позволяет визуализировать множества положительных и отрицательных чисел, будучи аллюзией на термометр. Именно его низкие и высокие показатели позволяет сформировать базовое представление об изучаемых множествах. После термометра педагог рассматривает уже непосредственно числовую прямую с координатами, вводя понятия «противоположные числа» и «модуль числа».

Отметим важность модуля числа при рассмотрении действия сравнения между собой целых чисел и правил, по которым осуществляются действия над дробными и целыми числами, не исключая его сложность для восприятия при первом знакомстве. Первичной формой представления складывания числа с противоположным знаком становится правило вычитания подобных чисел. При изучении действий умножения и деления чисел с разными знаками устанавливаются определенные правила выполнения данных действий.

В 6 классе завершается изучение тематического блока по множеству рациональных чисел. Впоследствии педагог лишь создает условия для отработки навыков по осуществлению действию над рациональными числами.

Методика преподавания математики определяет мотивационные установки учащихся 5-6 классов. Это особенно важно в условиях особой сложности математики как абстрактной учебной дисциплины. Фактически, именно математические игровые формы становятся приоритетной формой педагогической работы с учащимися [17].

Приведем методическую схему, которая составляет базис использования игровых технологий при обучении математике в 5-6 классах:

- 1) Формулирование дидактической цели через задачу в игре;
- 2) Установление связи между учебными задачами и правилами игры;
- 3) Включение в игру в качестве средства учебного материала;
- 4) Организация познавательной активности на соревновательной основе в рамках игровой математической деятельности;
- 5) Игровой результат подразумевает связь с успехом решения математической задачи.

Фактически, любая математическая задача может быть представлена в виде игровой формы, включая задачи, направленные на формирование представлений о числе. В частности, педагог может использовать мозговой штурм по разработке возможных решений предлагаемой задачи.

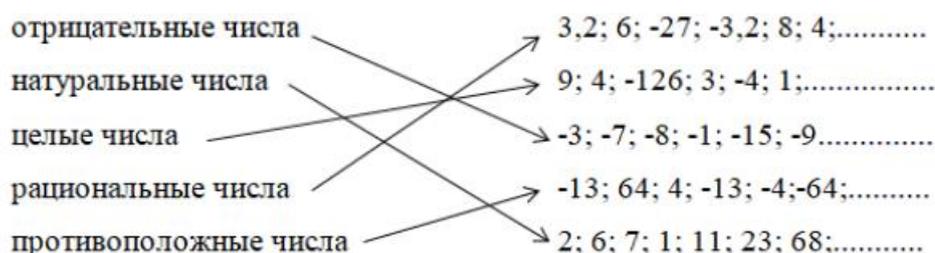
Изучение линии числа на уроках математики необходимо обращаться к межпредметным связям и практическим ситуациям. В частности, примером данного подхода может выступить биологический факт: объем перекачиваемой сердцем крови составляет 7,9 тонн. На основе данного факта можно построить задания: какой объем крови будет перекачан в среднем у молодого человека в возрасте 25 лет? Можно также привести пример из астрономической науки: 25 февраля 1746 года наблюдалось полное солнечное затмение на территории Москвы, а 16 октября 2126 года данное явление повторится снова. Задание можно сформулировать так: подсчитайте, сколько составляет цикл солнечного затмения?

Специфика в изучении линии числа на уроках математики состоит в значении данной линии для развития логических мыслительных навыков у учащихся. На формирование логического мышления в 5-6 классах направлены следующие задачи.

Задание №1. «Угадай число» (подведение под понятие).

1) Назови не менее десяти чисел, которые можно отнести к множеству рациональных (целых, натуральных и т.п.)

2) Соедини стрелками подходящие по смыслу сочетания:



Углубление линии числа осуществляется за счет включения множества натуральных чисел в множество рациональных чисел. В методе проектов можно использовать то обстоятельство, что ряд рациональных чисел обладает продолжительной историей развития. Учащимся для проектов можно предложить следующие темы:

- 1) Истоки возникновения чисел с отрицательным знаком;
- 2) Рациональные числа как основа гармонии окружающей среды;
- 3) Древнеегипетские дроби;
- 4) Создатели рациональных чисел.

Рассмотрим в качестве особого метода изучения числовой линии на уроках математики 5-6 классов дидактические числа. Под дидактической сказкой следует понимать вид сказочного произведения, которые через определенные образы создает условия для успешного освоения учащимся определенной темы, или отработки навыков и умений [27].

Приведем основные аспекты применения дидактических сказок на уроках по математике [31]:

1) Целеполагание. В начале занятия по математике учащимся педагог может зачитать определенные отрывки сказок, что стимулирует внимание школьников, повышает мотивацию. Отрывки должны соответствовать содержанию и теме урока по математике.

2) Изучение новой учебной темы. Дидактические сказки способны создать положительный эмоциональный фон при освоении нового учебного материала. Данное обстоятельство способно повлиять на процесс запоминания на бессознательном уровне.

3) Отработка учебного материала. В содержание данного этапа педагог может включить творческие задания, связанные с дидактическими сказками и свойствами чисел. Соответствующие задания могут быть направлены на продолжение сказок, анализ сказок, исправление сказок и пр.

Примером задания на данном этапе урока может рассматриваться следующее задание: «Жила-была дробь  $5/7$ . Она пошла гулять и встретила куб...». Сказку предлагается закончить учащимся самостоятельно. Содержание сказки оценивается на предмет правильности отражаемых математических закономерностей.

4) Проверка результатов освоения учебного материала. Учащимся для проверки знаний предлагается задание по придумыванию сказки о свойствах чисел.

Педагогическую работу по включению сказок в формирование представлений о числе следует начинать с использования образов из сказок известных авторов (И. Токмакова, Л. Кэррол и пр.). Следующий этап – проведение полноценного урока-сказки, а после этого можно предложить учащимся самостоятельно придумать сказку о числовых свойствах. Сама по себе задача придумать сказку не вызывает труда, но включить в сказку свойства чисел представляет сложность.

В одном из исследований приводится пример сказки, которая была придумана учащимся 6 класса, в котором освещается переместительное свойство сложения, свойства умножения на ноль чисел. Сказка повествует о цифрах «5» и

«3» как о подругах, которые жили соответственно в большом и маленьком кармане сумки. Впоследствии подруги встретились с цифрой «0», которая могла с помощью знака умножения превратить их в пустоту. Подруги, перепугавшись, вернулись в сумку, перепутав карманы. Так, цифры спаслись и придумали правило о переместительном свойстве [17].

В качестве методической основы для формирования представлений о числе в 5-6 классах, по нашему мнению, необходимо обратиться к цифровым технологиям.

Существуют полноценные электронные ресурсы и платформы для математического обучения [17]. В структуре данных платформ предусматриваются включение учебного материала по широкому перечню тем, в том числе, темы числовой линии в школьном курсе математики. Учащимся предлагается пройти полноценные занятия в интерактивном формате, выполнить определенные задания и в конце пройти тест для проверки. Доступ к платформе также может получить педагог по математике, чтобы проверить результаты учащегося, и даже оставить комментарий по работе. Подобные платформы предоставляют возможности для дополнительной отработки навыков и умений, связанных с числовыми операциями. Среди существующих онлайн-платформ можно обратить внимание на «Prodigy Math Game», или «Khan Academy».

Важным методическим средством при формировании представлений о числе выступают презентации и мультимедийные технологии по их созданию. Данные презентации создают пространство для визуализации числовых концепций и проектов, посвященных числам. В презентации можно изобразить, например, числовой ряд в виде прямой. Также можно решать задачи, выстраивая визуальную математическую модель.

Отдельно следует обратить внимание на учебники по математике в электронном формате. В определенных учебных пособиях более глубокое раскрытие получает элементарная теория чисел, также могут быть представлены задания на отработку соответствующей темы. Учащиеся могут обращаться к электронным учебникам с мобильных устройств, что позволяет их изучать, как

дома, так и в школе, на уроках [13]. Примером приложения, с которого можно прочитать электронный учебник по математике, является «Mathletics». В учебник также включены электронные тестовые формы, прохождение которых позволяет отработать полученные навыки и знания о числах.

Также существует множество приложений для мобильных телефонов, посредством которых учащиеся могут успешно изучать числовые операции в теории чисел. Некоторые программы предлагают учебные игры, структурированные в виде головоломок и пр.

Отметим также дидактическую значимость и пользу от онлайн-тестов и квизов как важных методических инструментов при проверке знаний о числовых операциях. Учащиеся при прохождении онлайн-тестов смогут определить уровень собственных знаний и возможные пробелы. Подобные онлайн-тесты способствуют грамотному распределению учебного времени на уроках математики, чтобы педагог сконцентрировался на особенно проблемных вопросах. Отдельно обратим внимание на электронные приложения по типу «Photomath»: с помощью подобных приложений решением математических примеров можно заниматься при помощи камеры на телефоне. Учащийся фотографирует определенный пример по математике, и, после распознавания, предлагает подробное описание возможных решений [14].

Таким образом, методическими особенностями изучения линии числа в математике в 5-6 классах являются: расширение представлений о числе за счет последовательного увеличения множества натуральных чисел до дробей, смешанных чисел, отрицательных чисел, действительных чисел, рациональных чисел; активное стимулирование развития способностей учащихся к абстрагированию.

Для оценки эффективности в формировании представлений о числе в 5-6 классах нами были отобраны следующие методы обучения математике: использование дидактических сказок; применение игровых методов; обращение к цифровым технологиям.

## Выводы по главе 1

1. Понятие числа играет существенную роль для современного общественного развития. В историческом контексте это обуславливается переходом представлений о числе от эмпирического аспекта к абстракции, инструментальному значению в счетной деятельности и полноценному социальному символу в эпоху цифровизации.

Необходимость формирования представлений о числе диктуется нормативной-правовой и исторической плоскостью: соответствующая компетенция (представление о числе) фиксируется на уровне ФГОС ООО; настоящий этап общественного развития именуется как «цифровая эпоха», что, с философской точки зрения, говорит о важном изменении места числа в познании человеком окружающей действительности – каждый объект человек стремится представить в виде совокупности чисел, описывающих определенные отношения, процессы и логические связи.

Составляющие сформированного представления о числе были выделены нами на основе анализа понятия «математическая грамотность» у школьников и соответствующих диагностических заданий: соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел; навыки сравнения величин; понимание смысла арифметического действия; создание математической модели.

2. Ключевая особенность развития младших подростков в 5-6 классах – формирование абстрактного компонента в мышлении, способность к абстрагированию в теоретическом мышлении. Данная способность формируется на основе общей психофизиологической интенсификации в развитии индивида, включая развитие мышления, памяти, восприятия. Именно абстрактность является важной компетенцией для углубления представлений пятиклассников и шестиклассников о числе.

На этом основании мы выделили следующие рекомендации при организации обучения математике в 5-6 классах: обеспечение преемственности на

протяжении единого математического обучения; переключение внимания с одного вида учебной деятельности на другой вид посредством смены форм и методов организации учебно-познавательной деятельности; использование парных форматов работы на уроке для развития грамотной математической речи.

3. Методическими особенностями изучения линии числа в математике в 5-6 классах являются: расширение представлений о числе за счет последовательного увеличения множества натуральных чисел до дробей, смешанных чисел, отрицательных чисел, действительных чисел, рациональных чисел; активное стимулирование развития способностей учащихся к абстрагированию.

Для оценки эффективности в формировании представлений о числе в 5-6 классах нами были отобраны следующие методы обучения математике: использование дидактических сказок; применение игровых методов; обращение к цифровым технологиям.

## **Глава 2. Разработка рекомендаций по формированию понятия о числе у обучающихся 5-6 классов**

### **2.1. Методический аппарат для формирования представления о числе обучающихся 5 класса**

Цель формирующего этапа эксперимента – разработка и апробация методических рекомендаций для педагогов формированию представлений о числе учащихся 5-6 классов и определение педагогических условий, при которых рекомендации произведут необходимый дидактический эффект для математического обучения.

Оценке подлежали следующие критерии:

1) создание математической модели:

- высокий уровень – детальное описание созданной математической модели, точно отражающей условия задачи, объяснение реального, профильного смысла математического выражения;

- средний уровень – создание правильной математической модели без объяснения реального смысла;

- низкий уровень – отсутствие математической модели, или создание математической модели, не соответствующей условиям задачи);

2) понимание смысла арифметического действия:

- оптимальный уровень – объяснение смысла арифметического выражения и результата через объекты, которые описываются заданными числами;

- средний уровень – выполнение арифметического действия без объяснения;

- низкий уровень – отсутствие арифметического действия, соответствующего условиям задания;

3) навыки сравнения величин:

- оптимальный уровень – применение навыков сравнения в реальной жизненной ситуации;

- достаточный уровень – использование навыков сравнения в математических упражнениях;

- недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения для выполнения математических заданий;

4) соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел:

- оптимальный уровень – успешное сравнение двух реальных фигур по площади, установление зависимости между величинами;

- достаточный уровень – построение геометрических фигур по условиям задачи, фиксация верного ответа;

- недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения к реальным ситуациям.

Для диагностики данных компетенций нами будут использоваться задания по математике, которые предлагаются в диагностической работе PISA.

Для достижения поставленной цели на формирующем этапе исследования были разработаны методические рекомендации и апробирована серия специальных дидактических игр и упражнений для расширения представлений о числе учащихся 5 класса. Также в методических рекомендациях был представлен следующий дидактический материал:

- использование дидактических игр;

- сочинение учащимися дидактических сказок;

- проблематизация обучения через метод проектов;

- использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

Для достижения эффективности данной работы была разработана система занятий, которая способствовала развитию счетной деятельности учащихся 5 класса. В таблице 2 представлены темы по математике за 5 класс и методы формирования представлений о числе, используемые в соответствующих условиях.

Таблица 2 – Характеристика распределения методов в системе обучения пятиклассников математике на базе исследования

Тема урока в школьной программе математики за 5 класс	Применяемый в формирующем эксперименте метод	Дидактическое объяснение
Сложение и вычитание натуральных чисел	Дидактическая игра «Числовой лабиринт»	Игра позволяет закрепить навыки сложения при одновременном сравнении числовых значений (выбор наибольшего (наименьшего)) среди чисел.
Сложение многозначных натуральных чисел. Вычитание многозначных чисел	Дидактическая сказка «Новый филиал Незнайки и Пончика на Луне»	Предлагается посчитать с использованием действий сложения и вычитания доходы и расходы на новый филиал, а также посчитать прибыль от предприятия как разность доходов и расходов.
Натуральные числа и шкалы.	Дидактическая игра «Лучший счетчик»	Создаются условия для проверки умений выполнять арифметические операции над натуральными числами. Игра командного типа, смысл – в выборе «счетчика» в каждой команде, защищающего математическую честь своего коллектива.
Умножение и деление десятичных дробей	Дидактическая игра «Математические турниры»	Создаются условия для проверки у учащихся умений выполнять умножение и деление десятичных дробей.
Числовые выражения, порядок действий.	Дидактическая сказка «Пекарня Кошея Бессмертного»	Подсчет доходов и расходов также формирует финансовую грамотность на уроках математики. Подача задания имеет особенность: одно единственное предложение-задание, в конце которого сформирован вопрос, и внутри которого задаются условия для решения.
Площадь и периметр прямоугольника и многоугольников, составленных из прямоугольников, единицы измерения площади	Проектная работа «Пять вёрст до небес, и всё лесом»	Индивидуальная проектная работа на расширение знаний об истории возникновения математики и счета в Древней Руси. Учитель формулирует задание: «Найдите русские народные пословицы, прибаутки, в содержании которых упоминаются старорусские меры длины рассмотреть содержание и значение, истолковать их смысл». Обучающиеся выполняют задание, используя для поиска всевозможные ресурсы.
Решение текстовых задач на все арифметические	Проект «Система быстрого счета по Я. Трахтенбергу»	Проект предполагает групповую работу по разбору методики быстрого счета. Предлагается из числа обучающихся

действия		сформировать три проектных команды. Каждая команда выбирает капитана, который будет представлять результаты труда. Команде дается задание - подготовить и изложить правило умножения на одно из чисел на основе книги Катлер Э., Мак-Шейн Р. «Система быстрого счёта по Трахтенбергу».
Площадь и периметр прямоугольника и многоугольников, составленных из прямоугольников, единицы измерения площади	Проект «Геометрические задачи на разрезание»	Разрезание фигуры как процесс означает попытку разделения клеточной фигуры на несколько других малых фигур, порой с небольшим ограничением.
Повторение и обобщение. Числовые и буквенные выражения, порядок действий, использование скобок	Использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.	Задачи имеют преимущественно финансовую функциональную направленность.
Повторение и обобщение. Решение текстовых задач с практическим содержанием	Урок-сказка (сказка-соревнование)	Урок позволяет закрепить и развить навыки сравнения натуральных чисел, выполнения арифметических действий с натуральными числами. Также закрепляется работа по формированию навыков решения уравнений и умений решать текстовые задачи.

Таким образом, в процессе определения методического аппарата для формирования представления о числе обучающихся 5 класса были разработаны методические рекомендации и апробирована серия специальных дидактических игр и упражнений для расширения представлений о числе учащихся 5 класса. Важное место в дидактическом материале методических рекомендаций отводится использованию математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

## **2.2. Рекомендации по организации изучения отдельных тем курса математики 5 класса**

В данном параграфе мы опишем некоторые методические разработки по применению отобранных для эксперимента методов обучения математике.

### ***1. Использование дидактических игр.***

Учащимся могут предлагаться следующие дидактические игры:

1) Дидактическая игра «Математические турниры» (используется при изучении темы «Умножение и деление десятичных дробей»).

Цель игры: проверить уровень освоения учащимися навыков по выполнению умножения и деления десятичных дробей.

Основные игровые правила:

Проведение математического турнира осуществляется в конце занятия, когда учащиеся находятся в состоянии утомления. Продолжительность турнира составляет 15-20 минут. Класс предварительно необходимо разделить на две основные команды. Основными заданиями для каждой команды являются две-три задачи нормального уровня сложности (в качестве альтернативы – 5-6 примеров).

Учащиеся в каждой команде в течение 6-8 минут записывают в тетради решения предлагаемых соответствующей команде заданий. Свои решения учащиеся должны успешно объяснять. Внутренняя консультация в каждой команде допускается. По истечению времени начинается турнир.

В каждой команде предварительно выбирается капитан. Капитаны по очереди называют участников турнира из другой команды. Указанная пара учащихся из двух команд осуществляют обмен выданными заданиями и выходят записывать примеры к доске. После объяснений со своими примерами выходит следующая пара учащихся.

Победителем в турнире признается команда, которая больше заданий другой команд успешно выполнит и сможет объяснить. Отслеживание ответов лежит на всем классе. Педагог выступает в роли арбитра. Приведем примеры для заданий в турнире:

- Найдите произведение пяти целых семи десятых и нуля целых трех сотых.

- Найдите квадрат нуля целых девяти десятых.

- Решите уравнение  $36,9 \cdot x = 0,0369$ .

- Найдите частное двух целых восемнадцати тысячных и нуля целых трех сотых.

- Найдите частное четырех целых восьми десятых и нуля целых одной сотой.

2) Дидактическая игра «Лучший счетчик» (используется при изучении темы «Натуральные числа и шкалы»).

Цель: проверить уровень развития умений по выполнению арифметических действий над натуральными числами.

Основные игровые правила:

Педагог предварительно просит учащихся дома придумать 3-4 задания для счета в устной форме. На самом уроке предварительно класс разделяется на три команды. Внутри команд выбирается учащийся, который будет играть роль «счетчика». Именно данный учащийся будет выступать от имени всей команды. Учащиеся других команд будут выдвигать ему собственные устные примеры, которые «счетчик» должен успешно решить. Если допускается ошибка, то выступать начинает «счетчик» следующей команды. «Счетчик» в команде может быть не один, однако, между командами должно быть одинаковое число «счетчиков». Победителем является команда, в которой меньше всего «счетчиков», которые успешнее всего справились с предлагаемыми примерами. Данная игра может проводиться в начале занятия, в качестве разминки.

3) Дидактическая игра «Числовой лабиринт» (Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел).

Перед началом игры на каждый стол педагог кладет карточку с лабиринтом. Если есть проектор, то лабиринт можно изобразить на экране, при этом для успешного прохождения лабиринта разграничить два варианта (рисунок ). Учащиеся должны пройти лабиринт в соответствии с поставленным заданием.

В качестве задания для числового примера может быть получение наименьшего, или наибольшего числа в результате прохождения лабиринта.

Учащиеся по ходу прохождения игры учатся сравнивать отрицательные и положительные числа.

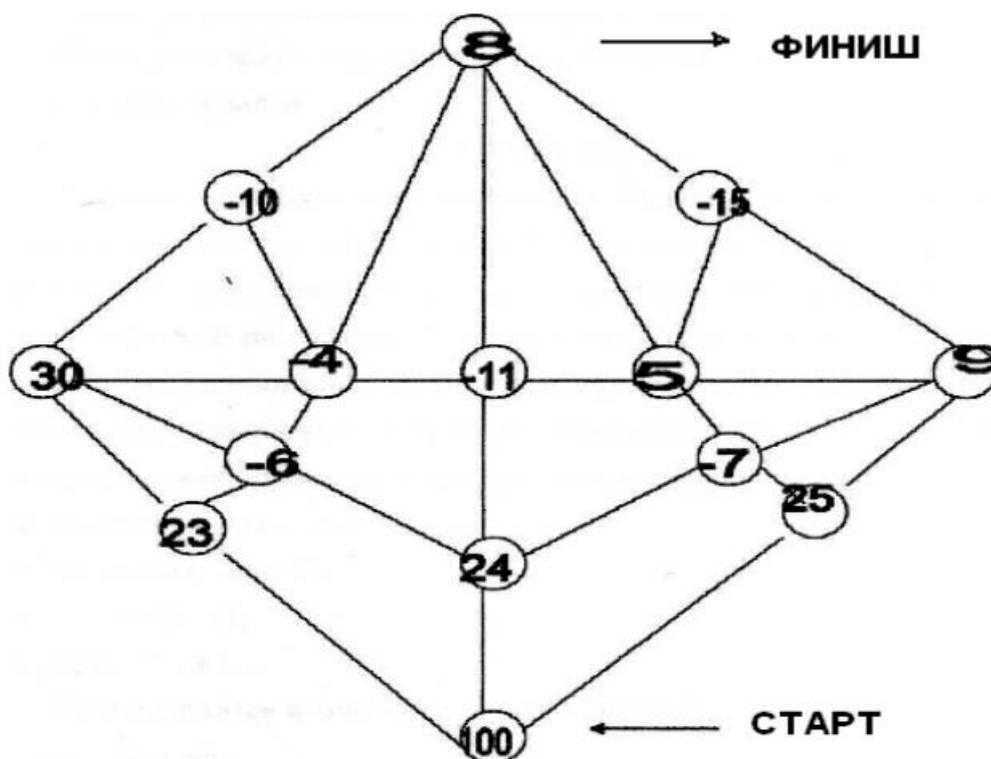


Рисунок – Пример «Числового лабиринта»

## II. Сочинение учащимися дидактических сказок.

Дидактическая сказка может включаться непосредственно в содержание урока (придумывание сказки учащимися), или же сам урок будет выстроен по логике определенной сказочной истории.

**В Приложении В представлен конспект урока-сказки по теме «Натуральные числа».**

Сюжеты дидактических сказок также имеют, как правило, воспитательный характер.

Рассмотрим примеры таких дидактических сказок.

**1. Дидактическая сказка «Новый филиал Незнайки и Пончика на Луне»** (темы: Сложение многозначных натуральных чисел. Вычитание многозначных чисел)

*Друзья с Луны предложили Незнайке и Пончику открытие филиала на Луне по продаже соли. Незнайка и Пончик очень обрадовались расширению своего бизнеса, однако, прежде всего, решили посчитать предварительные доходы и расходы для данного мероприятия. Посмотрите на список и определите, где здесь доходы, а где расходы на новый филиал. Посчитайте то и другое.*

*Доход от продаж – 40000 руб.,*

*Коммунальные услуги (электричество, вода, вывоз мусора) – 7000 руб.,*

*Затраты на хозяйственные нужды – 5000 руб.,*

*Пенсия бабушки Анны – 12000 руб.,*

*Затраты на рекламу – 1000 руб.,*

*Приобретение бензина, расходы на проезд по городу – 4000 руб.*

*Назовите, какие доходы у Незнайки с Пончиком планируются за месяц? Как вы думаете, как правильно поделить прибыль от филиала на Луне между Незнайкой и Пончиком?*

**2. Дидактическая сказка «Пекарня Кощея Бессмертного» (тема «Числовые выражения, порядок действий»).**

*«Задумал как-то Кощей Бессмертный пекарню свою открыть, да людей радовать. Назовите расход и доход Кощея Бессмертного от его Пекарни в данном случае, если доход от продажи булочек с мухоморами - 15000 рублей, доход от продажи пирожных с крылышками летучей мыши - 8000 рублей, затраты на сырье (сбор мухоморов и ловлю летучих мышей) составили 7000 рублей, оплата коммунальных услуг от ЖКХ-компании «Горыныч и Головы» (вода, обогрев, электричество в пекарне) составила 2000 рублей, оплата ремонтных работ холодильника от подрядчика «Дед Мороз и лето» – 600 рублей? Выберите один ответ из предложенных: 1) доходы – 9600, расходы – 23000; 2) доходы – 23000, расходы – 9600».*

В данной дидактической сказке подсчет доходов и расходов также формирует финансовую грамотность на уроках математики. Следует также отметить, что сама подача задания нова: одно единственное предложение-задание,

в конце которого сформирован вопрос, и внутри которого задаются условия для решения.

### ***III. Проблематизация обучения через метод проектов.***

Метод образовательного проекта представляет собой важный методический инструмент в формировании математической грамотности учащихся 5-6 классов. Посредством данного метода учащиеся успешно предлагают решение определенных ситуаций, которые существуют в реальности. В частности, ярким примером являются финансовые задачи, например, приобретение определенных товаров, оплата услуг в коммунальной сфере и пр.

Учащимся будут предложены темы для проектов по математике в 5 классе.

При создании проекта подразумевается исследовательская деятельность:

- Вглубь веков или как считали древние;
- Величие числа;
- Число в эпоху цифровизации;
- Реальность как математическая модель;
- Математика в сказках;
- Биология в числах и формулах и пр.;
- Начала геометрии: Древняя Греция и Древний Египет;
- «Геометрические задачи на разрезание»;
- «Система быстрого счета по Я. Трахтенбергу».

*Последний проект предполагает использование приема быстрого счета, созданного ученым-математиком Я. Трахтенбергом.* При должной сноровке и усердии, научиться всем методикам, которые описываются в его книге «Система быстрого счета по Я. Трахтенбергу» вполне реально. Более того, она отлично тренирует мозг, и как написано в книге, даже у людей, не имеющих математических способностей, просыпается тяга к математике и учебе в целом.

Проект предполагает групповую работу по разбору методики быстрого счета. Предлагается из числа обучающихся сформировать три проектных команды. Каждая команда выбирает капитана, который будет представлять результаты труда. Команде дается задание - подготовить и изложить правило

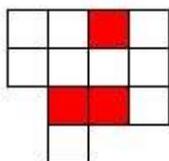
умножения на одно из чисел на основе книги Катлер Э., Мак-Шейн Р. «Система быстрого счёта по Трахтенбергу». Каждой группе рекомендуется излагать материал по принципу «от простого – к сложному», для чего, соответственно, брать числа по факту роста сложности арифметических вычислений.

Наиболее простым при этом является умножение на 11, поэтому предлагается последовательность: первая группа – число 11; вторая группа – число 12; третья группа – число 6. Далее следуют выступления групп с использованием интерактивной доски программного обеспечения.

*Еще один проект - «Разрезание фигуры (геометрические задачи на разрезание)».* Этот процесс означает попытку разделения клеточной фигуры на несколько других малых фигур, порой с небольшим ограничением.

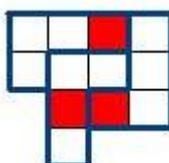
Предварительно педагог с обучающимися разбирают пример решения одной задачи вместе.

Условие задания следующее: каким образом можно данную фигуру на три части, одинаковые по размерам и при этом в каждой из них оставить клетку красного цвета.



Чтобы решить задачу, определим общее число клеток в изначальной фигуре – 12. Теперь разделим их на три искомые фигуры, получается  $12:3=4$ . Таким образом, нужно разделить фигуру на 3 фигуры по 4 клетки в каждой.

Прочерчиваем толстые линии для наметки для разрезки фигуры:



Следующий этап - индивидуальная проектная деятельность по решению задач на разрезание.

*Ниже приведены несколько вариантов таких задач для проектов.*

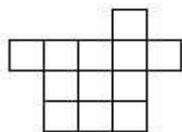
Учитель при необходимости может давать следующие подсказки:

1. При изучении условий задачи, можно, рассматривая фигуру, сразу посчитать, какое число клеточек составляет малую фигуру, на  $n$ -число которых необходимо разрезать основную большую. Это делается просто: нужно разделить количество всех клеток большой фигуры на число малых фигурок, на которые необходимо поделить изначальную.

2. Когда определено число клеток в большой фигуре, можно порассуждать, какие разновидности фигур сюда могут подойти. Скажем, если по предварительному расчету определено, что мини-фигура должна иметь 3 клетки, то понятно, что есть только типа данных фигур: угол из трех клеточек, и «досочка»  $3 \times 1$ .

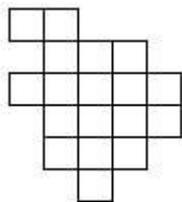
Задача № 1:

Знаменитый герой мультфильма «Вини-Пух» ослик делая задание, решил разрезать фигуру на три кусочка, которые были бы одного размера и у него никак не получалось, но тут появился Пятачок и подсказал ему. Найдите это решение.



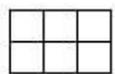
Задача № 2:

Пятачок и ослик не могут справиться с задачей: разделить большую фигуру на три поменьше одинаковых по размерам. Подскажите им решение.



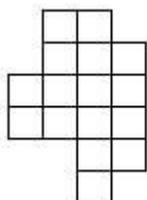
Задача № 3:

Необходимо разрезать данную фигуру на три прямоугольника, которые будут разными по размерам (здесь необходимо напомнить понятие прямоугольника).



#### Задача № 4:

Дана фигура, которую Винни-Пух пытается разделить на четыре части одного размера. Помогите ему осуществить эту задумку.



Еще одна проектная работа - «Пять вёрст до небес, и всё лесом». Данная проектная работа имеет индивидуальный характер и направлена на расширение знаний об истории возникновения математики и счета в Древней Руси. Учитель формулирует задание: «Найдите русские народные пословицы, прибаутки, в содержании которых упоминаются старорусские меры длины, рассмотрите содержание и значение, истолковать их смысл». Обучающиеся выполняют задание, используя для поиска всевозможные ресурсы.

В любом проекте важно ознакомиться с критериями оценки. Нами сформирован «Оценочный лист», позволяющий проанализировать обучающимся свою работу в рамках проекта самостоятельно.

Таблица 3 - Оценочный лист по математическим проектам при формировании понятия числа в 5 классе

Критерии	Отлично 5 баллов	Хорошо 4 балла	Требуется доработки 3 балла	Баллы
Умение работать в группе	Принимал активное участие в выполнении задания; ответственно и уважительно относился к участникам группы; предлагал аргументированно свои варианты.	Принимал участие в выполнении задания, уважительно относился к участникам группы.	В малой степени принимал участие в выполнении заданий, не в значительной мере был активным.	

Решение задачи	Задача решена верно.	Задача решена. Есть небольшие недочеты.	Задача решена частично или решена не верно.	
Оформление работы	Грамотная работа с точки зрения грамматики, стилистики, орфографии.	Имеются не грубые ошибки с точки зрения грамматики, стилистики, орфографии.	Имеются грубые ошибки с точки зрения грамматики, стилистики, орфографии.	
Защита работы	Докладчики грамотно и четко излагают материал, демонстрируют эрудицию, убедительно и полно отвечают на дополнительные вопросы.	Докладчики грамотно излагают материал, но не показывают достаточно глубоких знаний, допускают не грубые речевые ошибки, не точно отвечают на дополнительные вопросы.	Докладчики при выступлении демонстрируют не четкое изложение материала, допускают множество ошибок, не могут ответить на дополнительные вопросы.	
Содержание работы	Работа демонстрирует точное понимание задания; тема раскрыта полно; логичное и точное предоставление материала.	Работа демонстрирует понимание задания; тема раскрыта не полно; нарушена логика предоставления материала.	Работа демонстрирует частичное понимание; тема раскрыта частично, требует доработки; логика предоставления материала нарушена.	
Творческий подход	Представлены различные подходы к решению проблемы. Работа отличается индивидуальностью и выражает точку зрения микрогруппы.	Демонстрируется одна точка зрения на проблему; проводятся сравнения, но не делаются выводы.	Ученик просто копирует информацию из предложенных источников; нет критического взгляда на проблему; работа мало связана с темой веб-квеста.	

Градация по баллам:

30-27 баллов - оценка 10

26-25- баллов - оценка 9

24-20 баллов - оценка 8

19-16 баллов - оценка 7

15-13 баллов - оценка 6

12-10 баллов - оценка 5

9-7 баллов - оценка 4

6-4 балла - оценка 3

5-3 балла - оценка 2

#### ***IV. Использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.***

Задания, соответствующие содержанию диагностических заданий исследования PISA, являются важной группой заданий, используемых в формировании математической грамотности.

Роль подобных заданий состоит в развитии компетентности учащихся по применению математических законов в бытовых ситуациях, математическому моделированию.

Приведем несколько примеров.

1. *«Выручка от вашей сделки перечислена в банк. Вы планируете снять деньги со своей карты. На экране банкомата показывается сумма ваших накоплений на карте = 6513 рублей. Чтобы снять всю сумму, какое число нужно ввести, с учетом того, что банк берет за свои услуги снятия наличных 50 рублей. Выберите один ответ из предложенных: 1) 6600; 2) 6400; 3) 6500».*

2. *Англичанка Мэри Поппинс приехала как турист в Россию. Чтобы купить русские сувениры на память, ей необходимо поменять свои фунты стерлингов на российские рубли. Одна матрешка стоит 600 рублей. Леди Мэри желает купить три штуки, а один ее фунт стерлингов приравнивается к 90 рублям. Сколько ей потребуется английских денег, чтобы приобрести три сувенира? Выберите один ответ из предложенных:*

*1) 160 фунтов; 2) 270 фунтов; 3) 180 фунтов; 4) 200 фунтов».*

3. В 5-ом классе при формировании функциональной грамотности (как математической так и финансовой) можно вводить к изучению термин «экономия». Рассмотрим задачу:

*«Проезд в лунном метро стоит 50 лунатиков. Можно приобрести в кассе проездной билет на целый месяц сразу. Пончик приобрел его, чтобы ездить в новый филиал своей фирмы и за лунный февраль совершил 55 поездок в лунном метро. Какая экономия получилась у Пончика? Варианты ответов: 1) 50; 2) 1570; 3) 2750; 4) 1180.*

Таким образом, нами систематизирован и сформирован дидактический материал в рамках методических разработок по применению отобранных для эксперимента методов формирования представлений о числе в 5 классе по четырем категориям: использование дидактических игр; сочинение учащимися дидактических сказок; проблематизация обучения через метод проектов;

использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

### **2.3. Результаты апробации предлагаемых рекомендаций**

Эмпирическое исследование в рамках экспериментальной работы проводилась на базе образовательного учреждения «*наименование*» в 5 «Б» классе, в составе 24 человек.

В эксперименте была проведена констатирующая и контрольная диагностика. В состав диагностики вошел комплекс заданий из диагностического блока. В рамках каждого критерия были отобраны определенные задания.

**Задание 1.** «Кассовый аппарат». Кассовый автомат используют для пополнения счёта на карте «Проезд на транспорте».

Информация на экране автомата:

Клиент может ежедневно вносить:

- Купюрами – не более 300 рублей,
- Мелочью – не более 30 рублей.

У Гриши есть 70 рублей мелочью (монеты по 10 р. и 5 р.) – 8 монет, а также 400 рублей шестью купюрами. Всего у Гриши денег – 470 рублей. Он пересчитал все монеты и купюры и заполнил таблицу.

**Вопрос 1/2.** Составьте числовое выражение, которое показывает, что Гриша учел в таблице всю сумму денег.

**Оцениваемый критерий:** создание математической модели (0-3 балла).

**Вопрос 2/2.** Докажите, что Гриша может за два дня положить на счёт все купюры на сумму 400 рублей. Объясните свой ответ.

**Оцениваемый критерий:** понимание смысла арифметического действия (0-3 балла).

**Задание 2.** «Кожаная мозаика». В кружке «Кожаная мозаика» ребята делают панно из кусочков кожи. Лена и Маша решили сложить квадрат со стороной 6 см с помощью одинаковых фигур. Лена – из прямоугольников, Маша – из треугольников.

**Вопрос 1/2.** Запишите в таблице 1 (см. Приложение А), сколько фигур потребуется каждой девочке.

**Оцениваемый критерий:** соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (0-2 балла).

**Вопрос 2/2.** На занятии кружка ученики разложили все оставшиеся кусочки кожи по форме, пересчитали их, придумали название каждой форме. Вот что у них получилось.

Ребята хотят сложить квадрат со стороной 6 см из одинаковых кусочков. Запишите названия всех форм, из которых смогут сложить такой квадрат.

**Оцениваемый критерий:** соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (0-2 балла).

**Задание 3.** «Выкладывание плитки». Витя с дедушкой решили выложить плиткой небольшой участок земли перед крыльцом дома на дачном участке. Размеры участка земли – 1 м х 1 м (100 см х 100 см). Они решили купить плитку квадратной формы со стороной 20 см.

**Вопрос 1/2.** Сколько таких плиток им надо купить? Выберите и отметьте верный ответ (см. Приложение А).

**Оцениваемый критерий:** соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (0-2 балла).

**Вопрос 2/2.** В магазине выяснилось, что нет плиток нужного размера, но имеются два вида плиток, которые можно приложить друг к другу и сложить из них плитку размером 20 см х 20 см. Рассчитайте, сколько плиток каждой формы нужно купить. Для этого заполните следующую таблицу (см. Приложение А).

**Оцениваемый критерий:** навыки сравнения величин (0-2 балла).

**Задание 4.** «Багаж в аэропорту». Иван Иванович собирается полететь в отпуск на самолете авиакомпании «Сокол».

Он узнал, что в салон самолета можно взять ручную кладь весом не более 7 кг. Также в стоимость билета входит 1 место багажа весом до 20 кг.

Если у пассажира несколько мест багажа, то на каждое из них можно оформить дополнительное место багажа. Дополнительное место – один предмет весом до 20 кг – стоит 1000 р. Если предмет весом больше 20 кг, то за каждый «лишний» килограмм сверх двадцати нужно заплатить ещё 300 р. (вес округляется в большую сторону до килограмма).

Прибыв в аэропорт, Иван Иванович взвесил каждый предмет своего багажа.

Вопрос 1/2. Какие два предмета может взять с собой в салон самолета Иван Иванович? Запишите в следующей таблице названия этих предметов (см. Приложение А).

**Оцениваемый критерий:** навыки сравнения величин (0-2 балла).

Вопрос 2/2. Иван Иванович взял в салон самолета рюкзак и ноутбук. Как Ивану Ивановичу поступить с оставшимися предметами? Запишите ответ, объясните его.

**Оцениваемый критерий:** навыки сравнения величин (0-2 балла).

Таким образом, мы получаем следующую градацию уровней по оцениваемым критериям в соответствии с выполняемыми заданиями:

1) создание математической модели (3 балла): высокий уровень – 3 балла; 2 балла – средний уровень; 0-1 балл – низкий уровень;

2) понимание смысла арифметического действия (3 балла): оптимальный уровень – 3 балла; средний уровень – 2 балла; низкий уровень – 0-1 балл;

3) навыки сравнения величин (6 баллов): оптимальный уровень – 5-6 баллов; достаточный уровень – 3-4 балла; недостаточный уровень – 0-2 балла;

4) соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (6 баллов): оптимальный уровень – 5-6 баллов; достаточный уровень – 3-4 балла; недостаточный уровень – 0-2 балла.

Результаты по констатирующей диагностике представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Констатирующая диагностика 5 «Б» класса по отобранным нами критериям и заданиям

УЧАЩИЕСЯ	КРИТЕРИИ			
	МАТ МОД	АРИФ ДЕЙ	СРАВ ВЕЛ	ГЕОМЕТР
1	2	1	4	3
2	2	2	3	3
3	1	1	3	4
4	2	0	2	3
5	3	2	5	4
6	2	1	3	3
7	2	1	3	2
8	1	2	2	4
9	1	2	2	4
10	1	1	3	1
11	2	1	1	2
12	0	1	1	2
13	2	3	4	5
14	2	2	2	2
15	1	2	3	3
16	2	2	3	3
17	1	1	4	2
18	2	1	3	2
19	2	2	3	3
20	3	2	5	5
21	0	1	2	2
22	0	0	1	0
23	2	0	2	0
24	1	0	2	1

На рисунке 2.1 схематично изображено распределение результатов учащихся по уровням развития соответствующих критериев.

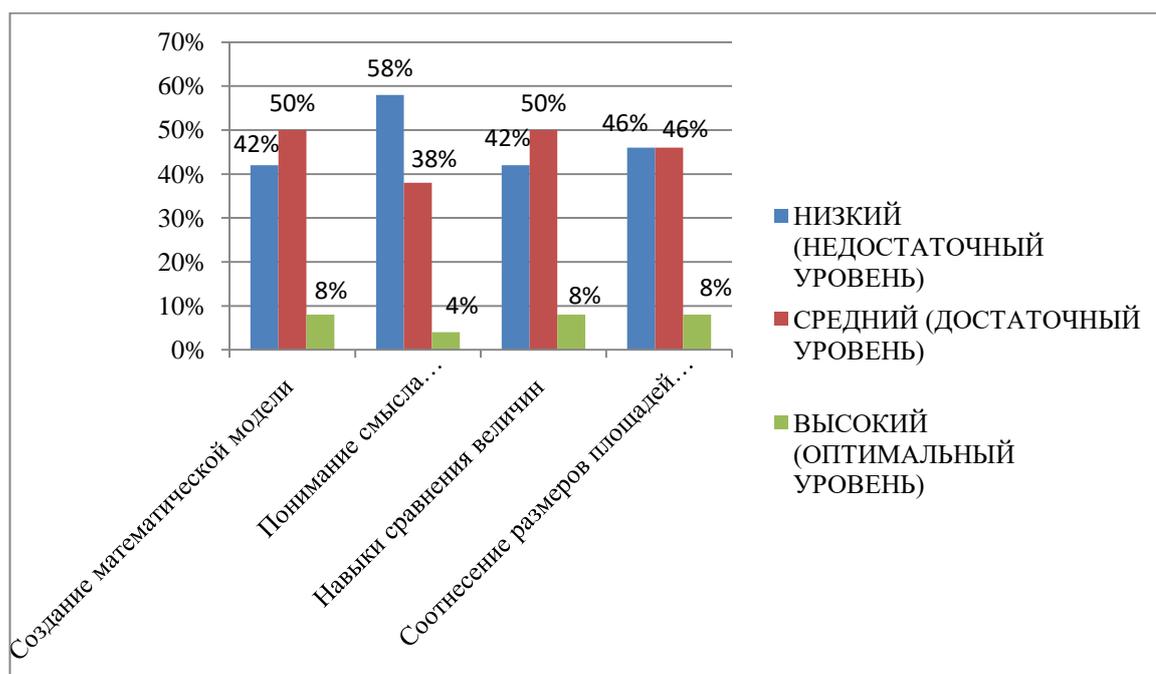


Рисунок 2.1 – Уровни развития по отобранным критериям на констатирующем этапе диагностики

На основе полученных данных мы можем сделать следующий вывод. Низкий (недостаточный) и средний (достаточный) уровни являются преобладающими показателями в исследуемой выборке. В соответствии с выделенными критериями, можно судить о том, что математическое моделирование ситуации и сравнение величин у большинства учащихся находится на достаточном уровне. Недостаточный уровень наблюдается в понимании смысла арифметической операции. Оптимального для последующего углубления и развития математической грамотности школьников уровня практически не выявлено (2-3 учащихся).

После проведения экспериментальной работы была проведена повторная диагностика, результаты которой представлены в таблице 4. Задания были предложены те же самые. Учащимся не сообщалось, правильно ли они решили задания в прошлый раз.

Таблица 4 – Контрольная диагностика 5 «Б» класса по отобранным нами критериям и заданиям

УЧАЩИЕСЯ	КРИТЕРИИ			
	МАТ МОД	АРИФ ДЕЙ	СРАВ ВЕЛ	ГЕОМЕТР
1	3	2	4	4
2	2	2	3	3
3	2	2	4	4
4	2	1	4	4
5	3	2	5	4
6	2	2	3	3
7	2	1	3	3
8	2	2	4	4
9	1	2	4	5
10	2	2	3	2
11	2	1	3	3
12	2	1	2	3
13	2	3	4	5
14	2	2	3	2
15	2	2	4	3
16	2	2	3	3

<b>17</b>	1	2	5	3
<b>18</b>	2	2	3	2
<b>19</b>	2	2	3	3
<b>20</b>	3	2	6	5
<b>21</b>	1	2	3	2
<b>22</b>	0	0	2	3
<b>23</b>	2	1	3	1
<b>24</b>	2	1	3	3

На рисунке 2.2 схематично изображено распределение результатов учащихся по уровням развития соответствующих критериев.

Исходя из результатов экспериментальной работы, следует, что оптимального для развития математической грамотности уровня не удалось достичь в ходе применения дидактических игр и сказок. Тем не менее, экспериментальная работа позволила добиться преобладающего достаточного уровня в развитии компетенций по всем четырем критериям: создание математической модели (17 учащихся); понимание смысла арифметической операции (16 учащихся); навыки сравнения величин (19 учащихся); соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации (16 учащихся).

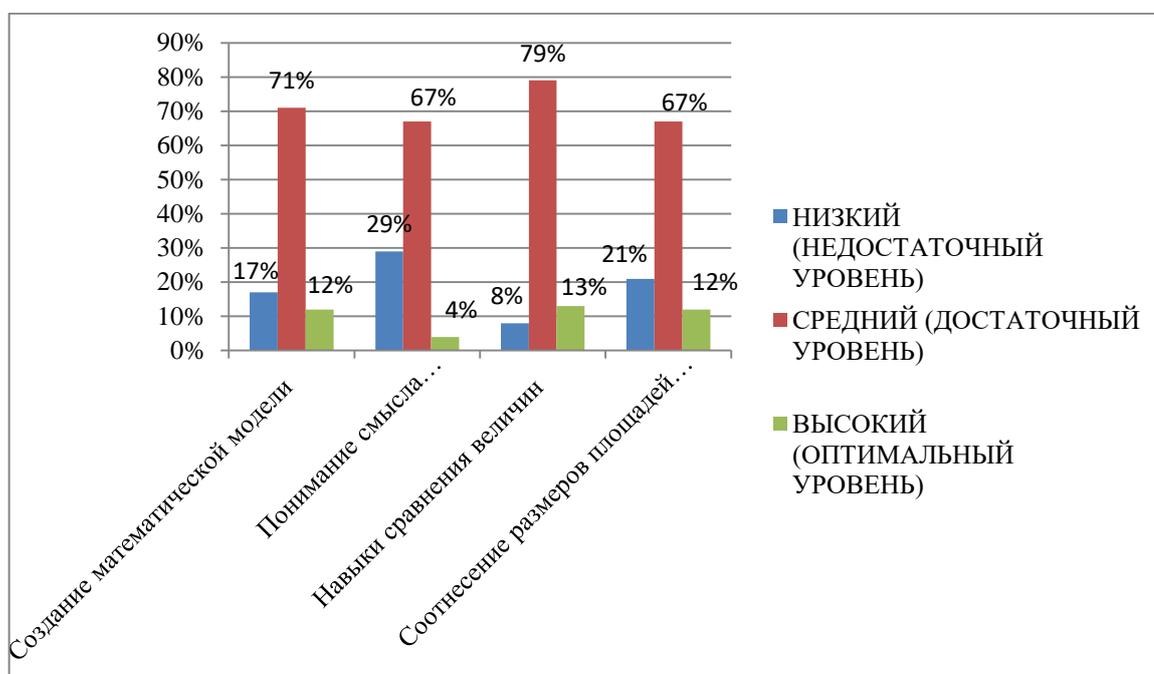


Рисунок 2.2 – Уровни развития по отобранным критериям на контрольном этапе диагностики

Таким образом, экспериментальная работа позволила добиться улучшения показателей по выделенным в теоретическом анализе критериев, на основании которых мы можем судить о сформированности представлений о числе. Преобладающий достаточный и средний уровень по всем четырем критериям позволяет нам сделать вывод, что мы смогли добиться такого уровня развития представлений о числе, чтобы учащиеся успешно абстрагировались при восприятии и операциях с числами и также могли фактически представлять реальную ситуацию в качестве математической и числовой модели.

### **Выводы по главе 2.**

В процессе определения методического аппарата для формирования представления о числе обучающихся 5 класса были разработаны методические рекомендации и апробирована серия специальных дидактических игр и упражнений для расширения представлений о числе учащихся 5 класса. Важное место в дидактическом материале методических рекомендаций отводится использованию математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

Нами систематизирован и сформирован дидактический материал в рамках методических разработок по применению отобранных для эксперимента методов формирования представлений о числе в 5 классе по четырем категориям: использование дидактических игр; сочинение учащимися дидактических сказок; проблематизация обучения через метод проектов; использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

Экспериментальная работа позволила добиться улучшения показателей по выделенным в теоретическом анализе критериев, на основании которых мы можем судить о сформированности представлений о числе. Преобладающий достаточный и средний уровень по всем четырем критериям позволяет нам сделать вывод, что мы смогли добиться такого уровня развития представлений о

числе, чтобы учащиеся успешно абстрагировались при восприятии и операциях с числами и также могли фактически представлять реальную ситуацию в качестве математической и числовой модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие числа играет существенную роль для современного общественного развития. В историческом контексте это обуславливается переходом представлений о числе от эмпирического аспекта к абстракции, инструментальному значению в счетной деятельности и полноценному социальному символу в эпоху цифровизации.

Необходимость формирования представлений о числе диктуется нормативной-правовой и исторической плоскостью: соответствующая компетенция (представление о числе) фиксируется на уровне ФГОС ООО; настоящий этап общественного развития именуется как «цифровая эпоха», что, с философской точки зрения, говорит о важном изменении места числа в познании человеком окружающей действительности – каждый объект человек стремится представить в виде совокупности чисел, описывающих определенные отношения, процессы и логические связи.

Составляющие сформированного представления о числе были выделены нами на основе анализа понятия «математическая грамотность» у школьников и соответствующих диагностических заданий:

- создание математической модели (высокий уровень – детальное описание созданной математической модели, точно отражающей условия задачи, объяснение реального, профильного смысла математического выражения; средний уровень – создание правильной математической модели без объяснения реального смысла; низкий уровень – отсутствие математической модели, или создание математической модели, не соответствующей условиям задачи);

- понимание смысла арифметического действия (оптимальный уровень – объяснение смысла арифметического выражения и результата через объекты, которые описываются заданными числами; средний уровень – выполнение арифметического действия без объяснения; низкий уровень – отсутствие арифметического действия, соответствующего условиям задания);

- навыки сравнения величин (оптимальный уровень – применение навыков сравнения в реальной жизненной ситуации; достаточный уровень – использование навыков сравнения в математических упражнениях; недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения для выполнения математических заданий);

- соотнесение размеров площадей фигур в реальной ситуации – геометрическая плоскость чисел (оптимальный уровень – успешное сравнение двух реальных фигур по площади, установление зависимости между величинами; достаточный уровень – построение геометрических фигур по условиям задачи, фиксация верного ответа; недостаточный уровень – невозможность применения навыков сравнения к реальным ситуациям).

Для диагностики данных компетенций нами будут использоваться задания по математике, которые предлагаются в диагностической работе PISA.

Ключевая особенность развития младших подростков в 5-6 классах – формирование абстрактного компонента в мышлении, способность к абстрагированию в теоретическом мышлении. Данная способность формируется на основе общей психофизиологической интенсификации в развитии индивида, включая развитие мышления, памяти, восприятия. Именно абстрактность является важной компетенцией для углубления представлений пятиклассников и шестиклассников о числе.

На этом основании мы выделили следующие рекомендации при организации обучения математике в 5-6 классах: обеспечение преемственности на протяжении единого математического обучения; переключение внимания с одного вида учебной деятельности на другой вид посредством смены форм и методов организации учебно-познавательной деятельности; использование парных форматов работы на уроке для развития грамотной математической речи.

Методическими особенностями изучения линии числа в математике в 5-6 классах являются: расширение представлений о числе за счет последовательного увеличения множества натуральных чисел до дробей, смешанных чисел,

отрицательных чисел, действительных чисел, рациональных чисел; активное стимулирование развития способностей учащихся к абстрагированию.

Для оценки эффективности в формировании представлений о числе в 5-6 классах нами были отобраны следующие методы обучения математике: использование дидактических сказок; применение игровых методов; обращение к цифровым технологиям.

В процессе определения методического аппарата для формирования представления о числе обучающихся 5 класса были разработаны методические рекомендации и апробирована серия специальных дидактических игр и упражнений для расширения представлений о числе учащихся 5 класса. Важное место в дидактическом материале методических рекомендаций отводится использованию математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

Нами систематизирован и сформирован дидактический материал в рамках методических разработок по применению отобранных для эксперимента методов формирования представлений о числе в 5 классе по четырем категориям: использование дидактических игр; сочинение учащимися дидактических сказок; проблематизация обучения через метод проектов; использование математических задач, которые соответствуют диагностическим работам PISA.

Экспериментальная работа позволила добиться улучшения показателей по выделенным в теоретическом анализе критериев, на основании которых мы можем судить о сформированности представлений о числе. Преобладающий достаточный и средний уровень по всем четырем критериям позволяет нам сделать вывод, что мы смогли добиться такого уровня развития представлений о числе, чтобы учащиеся успешно абстрагировались при восприятии и операциях с числами и также могли фактически представлять реальную ситуацию в качестве математической и числовой модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева А. Д. Формирование личности в переходный период от подросткового к юношескому возрасту. М.: Педагогика, 1987. 181 с.
2. Беганцова И. С. Изучение мотивации учебной деятельности младших подростков в условиях общеобразовательной школы // Молодой ученый. 2014. № 21.1 (80.1). С. 72-76.
3. Белов В. А. Основы представлений о числе и их взаимосвязь с цифровизацией: историко-философский аспект (часть 2) // Эпос. 2023. Т. 9. № 9/4. С. 90-126.
4. Бондарева Ю. А. Методика формирования самоконтроля у учащихся 5-6 классов при изучении чисел // Актуальные вопросы гуманитарных и социальных наук: от теории к практике : Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Чебоксары, 19 января 2023 года / Гл. редактор Ж.В. Мурзина. Чебоксары: Общество с ограниченной ответственностью «Издательский дом «Среда», 2023. С. 170-171.
5. Боно де Э. Гениально! Инструменты решения креативных задач. М.: Альпина Паблишер, 2015. 349 с.
6. Боровских А. В. О понятии математической грамотности // Педагогика, 2022. Т. 86, № 3. С. 33-45.
7. Брейтигам Э. К. Обусловленность технологии обучения математике в школе возрастными особенностями учащихся // Педагогический журнал. 2021. Т. 11. № 3-1. С. 24-39.
8. Брейтигам Э. К., Кулешова И. Г. Взаимосвязь знаково-символической деятельности и понимания при обучении математике // Дидактика математики: проблемы исследования: международный сборник научных работ, редкол.: Е.И. Скафа (науч. ред. и др.); Донецкий нац. ун-т. Донецк, 2017. № 46. С.7-17.
9. Васильев А. В. Целое число. М.: Научное книгоиздательство, 1919. 272 с.

10. Выготский Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте. СПб. : Союз, 1997. 91 с.
11. Григорьева Ю. И. Характеристика младших подростков в контексте развития творческих способностей // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус. 2016. Т. 15. № 3. С. 103-108.
12. Денищева Л. О. Подходы к составлению заданий для формирования математической грамотности учащихся 5-6 класса // Отечественная и зарубежная педагогика. 2020. Т. 2. № 2(70). С. 181-201.
13. Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы V Международной науч. конф. (Красноярск, 21-24 сентября 2021 г.). Ч. 1 / под общ. ред. М.В. Носкова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2021. 528 с.
14. Информационные технологии в образовании и науке (ИТОН-2023): материалы IX Международной научно практической конференции в рамках IV Международного форума по математическому образованию (27 марта-1 апреля 2023 г.) / отв. ред. А.А. Агафонов. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2023. 233 с.
15. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М. : Издательство Юрайт, 2024. 264 с.
16. Кинг Б. Эпоха дополненной реальности. М.: Олимп-Бизнес, 2018. 528 с.
17. Кириакиди В. М. Методические аспекты использования цифровых ресурсов при изучении числовой линии в 5-6 классах // Цифровая трансформация образования: актуальные проблемы, опыт решения : Материалы Всероссийской научно-практической конференции, Волгоград, 23 ноября 2023 года. Чебоксары: Издательский дом «Среда», 2023. С. 156-159.
18. Кле М. Психология подростка / Психология развития / Под ред. А. К. Болотовой и О. Н. Молчановой. М: ЧеРо, 2005. 524 с.
19. Ковалев А. Г. Психология личности. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1970. 391 с.

20. Колосова О. Ю. Человек и общество в новой цифровой реальности // Экономические и гуманитарные исследования регионов. 2018. № 2. С. 78 – 81.
21. Краснянская К. А. Математическая грамотность и условия ее успешного формирования в 5-6-х классах // Отечественная и зарубежная педагогика. 2023. Т. 2. № S1(90). С. 110-124.
22. Кулагина И. Ю. Возрастная психология. М.: Изд-во УРАО, 1997. 176 с.
23. Леви-Брюль Л. Первобытное мышление. Перевод с французского / под редакцией проф. В.К. Никольского и А.В. Кисина. М., 1939. 337 с.
24. Леонтьев А. А. Язык и разум человека. М.: Политиздат, 1965. 128 с.
25. Мамонтова Т. С. Методика изучения числовых систем в школьном курсе математики // Региональное образование XXI века: проблемы и перспективы. 2023. № 1(33). С. 24-26.
26. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др. ; Под ред. В.А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.
27. Мухамедьянова Р. Р., Любичева В. Ф. Дидактические сказки в процессе обучения младших подростков математике // Омский научный вестник. 2007. № 5(59). С. 154-157.
28. Обухова Л. Ф. Концепция Жана Пиаже : за и против. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 191 с.
29. Панфилова В. З. Типология грамматической категории числа и некоторые вопросы ее исторического развития // Вопросы языкознания. 1976. № 4. С. 18-38.
30. Панфилов В. З. Язык, мышление, культура // Вопросы языкознания. 1975. №1. С. 3-12 .
31. Переверзева С. А. Дидактические сказки в процессе обучения математике младших подростков // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования : Сборник научных трудов по материалам Всероссийской научно-методической конференции, Балашов, 17

мая 2018 года / Под редакцией М. А. Ляшко. Балашов: Издательство «Саратовский источник», 2018. С. 148-150.

32. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. URL: [https://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_389560/](https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_389560/) (дата обращения: 20.04.2024)

33. Роберт И. В. Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы, перспективы использования. М.: Школа-Пресс, 1994. 321 с.

34. Сорокина Л. А. Экология здоровья и экологическая культура как перспективные направления в образовательной среде школы // Астраханский вестник экологического образования. 2014. № 1 (27). С. 97–100.

35. Тимошенко А. А., Тимченко А. В. Цифровизация в понимании философии, права, политологии и экономики: междисциплинарный подход // Российский журнал правовых исследований. 2020. № 2. С. 35-44.

36. Харламов И. Ф. Педагогика. М.: Гардарики, 1999. 520 с.

37. Юдахин К. К. Киргизско-русский словарь: Около 40 000 слов. М. : Сов. энциклопедия, 1965. 973 с.

38. Японская С. А. О так называемых «определениях через абстракцию» // Методологические проблемы науки. М., 1972. С.36-40.

39. Dzhakaeva A. A. The concept of number, the history of its formation and development // Mir Nauki, Kultury, Obrazovaniya. 2020. No. 6(85). P. 638-639.

40. PISA 2021 Mathematics Framework (Second Draf) [Электронный ресурс] // PISA 2022 MATHEMATICS FRAMEWORK. URL: <https://pisa-2021maths.oecd.org/fles/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draf.pdf> (дата обращения: 16.09.2023).

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ЧИСЛЕ

**Задание 1.** «Кассовый аппарат». Кассовый автомат используют для пополнения счёта на карте «Проезд на транспорте».

Информация на экране автомата:

Клиент может ежедневно вносить:

- Купюрами – не более 300 рублей,
- Мелочью – не более 30 рублей.

У Гриши есть 70 рублей мелочью (монеты по 10 р. и 5 р.) – 8 монет, а также 400 рублей шестью купюрами. Всего у Гриши денег – 470 рублей. Он пересчитал все монеты и купюры и заполнил таблицу.

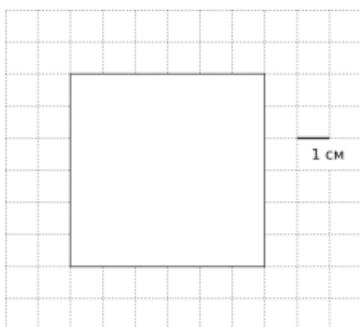


Количество монет и купюр

**Вопрос 1/2.** Составьте числовое выражение, которое показывает, что Гриша учел в таблице всю сумму денег (0-3 балла).

**Вопрос 2/2.** Докажите, что Гриша может за два дня положить на счёт все купюры на сумму 400 рублей. Объясните свой ответ.

**Задание 2.** «Кожаная мозаика». В кружке «Кожаная мозаика» ребята делают панно из кусочков кожи. Лена и Маша решили сложить квадрат со стороной 6 см с помощью одинаковых фигур. Лена – из прямоугольников, Маша – из треугольников.



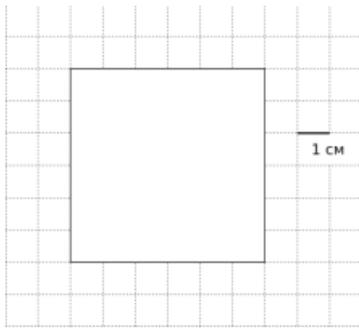
**Вопрос 1/2.** Запишите в таблице 1, сколько фигур потребуется каждой девочке.

	ЛЕНА	МАША
ФОРМА		
КОЛИЧЕСТВО ФИГУР		

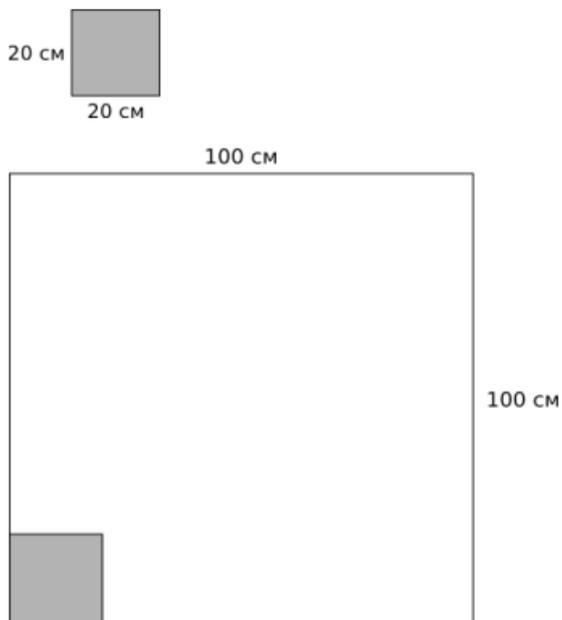
**Вопрос 2/2.** На занятии кружка ученики разложили все оставшиеся кусочки кожи по форме, пересчитали их, придумали название каждой форме. Вот что у них получилось.

НАЗВАНИЕ ФОРМЫ	ФОРМА	КОЛИЧЕСТВО ОДИНАКОВЫХ КУСОЧКОВ
«КВАДРАТ»		36
«МЯГКИЙ ЗНАК»		6
«КРЕСТИКИ-НОЛИКИ»		3
«УГОЛОК»		9

Ребята хотят сложить квадрат со стороной 6 см из одинаковых кусочков. Запишите названия всех форм, из которых смогут сложить такой квадрат.



**Задание 3.** «Выкладывание плитки». Витя с дедушкой решили выложить плиткой небольшой участок земли перед крыльцом дома на дачном участке. Размеры участка земли – 1 м х 1 м (100 см х 100 см). Они решили купить плитку квадратной формы со стороной 20 см.



**Вопрос 1/2.** Сколько таких плиток им надо купить? Выберите и отметьте верный ответ.

А. 10 000 шт.

Б. 400 шт.

В. 100 шт.

Г. 25 шт.

**Вопрос 2/2.** В магазине выяснилось, что нет плиток нужного размера, но имеются два вида плиток, которые можно приложить друг к другу и сложить из них плитку размером 20 см х 20 см. Рассчитайте, сколько плиток каждой формы нужно купить. Для этого заполните следующую таблицу.

ФОРМА ПЛИТКИ	Сколько надо плиток этой формы, чтобы сложить из них плитку размером 20 см х 20 см? Сколько надо плиток этой формы, чтобы выложить квадратную площадку размером 100 см х 100 см	Сколько надо плиток этой формы, чтобы выложить квадратную площадку размером 100 см х 100 см?
 10 см 20 см		
 10 см 10 см		

**Задание 4.** «Багаж в аэропорту». Иван Иванович собирается полететь в отпуск на самолете авиакомпании «Сокол».

Он узнал, что в салон самолета можно взять ручную кладь весом не более 7 кг. Также в стоимость билета входит 1 место багажа весом до 20 кг.

Если у пассажира несколько мест багажа, то на каждое из них можно оформить дополнительное место багажа. Дополнительное место – один предмет весом до 20 кг – стоит 1000 р. Если предмет весом больше 20 кг, то за каждый «лишний» килограмм сверх двадцати нужно заплатить ещё 300 р. (вес округляется в большую сторону до килограмма).

Прибыв в аэропорт, Иван Иванович взвесил каждый предмет своего багажа.



19 кг 900 г



1 кг 800 г



3 кг 900 г



4 кг 500 г

Вопрос 1/2. Какие два предмета может взять с собой в салон самолета Иван Иванович? Запишите в следующей таблице названия этих предметов.

Решение 1		
Решение 2		

Ручная кладь

**Вопрос 2/2.** Иван Иванович взял в салон самолета рюкзак и ноутбук. Как Ивану Ивановичу поступить с оставшимися предметами? Запишите ответ, объясните его.



ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАНИЙ И СИСТЕМА ОЦЕНИВАНИЯ  
 ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5 КЛАССОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ

<b>Задание 1. «Кассовый аппарат». 1 из 2.</b>	
<b>Характеристики задания:</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Содержательная область оценки - Количество</li> <li>• Компетентностная область оценки - Формулировать</li> <li>• Контекст - Личная жизнь</li> <li>• Уровень сложности задания –1</li> <li>• Формат ответа – краткий ответ</li> <li>• Описание задания («объект оценки») – выполнение расчетов с натуральными числами; составление числового выражения, соответствующего условию задания</li> <li>• Дополнительные характеристики. Проверяются действия универсального характера: планировать ход решения, упорядочивать действия</li> </ul>	
<b>Система оценивания</b>	
1 балл	Записано числовое выражение подсчёта суммы денег (сумма четырёх произведений), например, $10 \times 6 + 5 \times 2 + 50 \times 4 + 100 \times 2$ . Ответ считается верным, если слагаемые записаны в любом порядке, а также сомножители в каждом произведении записаны в любом порядке <i>Пример верного ответа:</i> $5 \times 2 + 6 \times 10 + 50 \times 4 + 2 \times 100$ или $10 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 100 \cdot 2$
0 баллов	Другие ответы Ответ отсутствует.

<b>Задание 2. «Кассовый аппарат». 2 из 2.</b>	
<b>Характеристики задания:</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Содержательная область оценки - Количество</li> <li>• Компетентностная область оценки - Формулировать</li> <li>• Контекст - Личная жизнь</li> <li>• Уровень сложности задания - 2</li> <li>• Формат ответа – развернутый ответ</li> <li>• Описание задания («объект оценки») – выполнение расчетов с натуральными числами; понимание смысла арифметического действия (деление с остатком), прикидка результата</li> <li>• Дополнительные характеристики. Проверяются действия универсального характера: формулировать вывод</li> </ul>	
<b>Система оценивания</b>	
2 балла	Дано объяснение, в котором показано, сколько денег (и какими купюрами) можно положить в первый и сколько во второй день. В итоге из объяснения должно быть видно, что все купюры внесены за 2 дня. Обязательно должно быть указано, что сумма за 2 дня равна 400 р., или это видно из объяснения (см. пример 2). <i>Примеры возможного объяснения (ответы детей):</i>

	<p><i>Пример 1.</i> «1 день – 200 р. купюрами по 100р., 2 день – 200 р. купюрами по 50 р, всего 400 р.»</p> <p><i>Пример 2.</i> 1 день – 250 р., 2 купюры по 100 р. и 1 – 50 р., 2 день – остальные 150 р., 3 купюры – по 50 р.</p> <p><i>Пример 3.</i>  <math>50 \cdot 4 = 200</math>  <math>100 \cdot 2 = 200</math>  <math>200 + 200 = 400</math> – за два дня</p>
1 балл	<p>Объяснение неполное, в нем не упомянуто, какие именно и сколько купюр вносится в первый и во второй день, но сумма за 2 дня составляет 400 р. Кроме того, в объяснении не должно быть неверных утверждений.</p> <p><i>Примеры возможного объяснения (ответы детей):</i></p> <p><i>Пример 1.</i> «За первый день Гриша может положить 300 рублей, а во второй день 100».</p> <p><i>Пример 2.</i> «За два дня можно внести купюрами 400 рублей: 1 день - 250 р., 2 день - 150 р.»</p> <p><i>Пример 3.</i> «1 день – 300 р., 2 день – 100 р., <math>400 : 300 = 1</math> (ост.100). 100 рублей - во второй день».</p> <p><i>Пример 4.</i> «400 р. можно внести за 2 дня: 1 день - 200р., 2 день - 200 р.»</p> <p><i>Пример 5.</i> «В первый день Гриша положит все купюры равные 50, во второй все 100».</p>
0 баллов	<p>Другие ответы.          Ответ отсутствует.</p>

**Задание 3. «Кожаная мозаика». 1 из 2.**

**Характеристики задания:**

- **Содержательная область оценки** – Пространство и форма
- **Компетентностная область оценки** - Применять
- **Контекст** - Личная жизнь
- **Уровень сложности задания** - 2
- **Формат ответа** – краткий ответ
- **Описание задания («объект оценки»)** – применение представления о площади, составление данного квадрата из предложенных фигур
- **Дополнительные характеристики.** Проверяются действия универсального характера: представлять мысленно предложенную ситуацию, находить число одинаковых частей, из которых составлено целое, заполнять таблицу

**Система оценивания**

2 балла	Ответы: 12 и 18
1 балл	Получен один из верных ответов, а второй не указан или неверный
0 баллов	Другие ответы. Ответ отсутствует

<b>Задание 4. «Кожаная мозаика». 2 из 2.</b>	
<p><b>Характеристики задания:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Содержательная область оценки</b> – Пространство и форма</li> <li>• <b>Компетентностная область оценки</b> - Формулировать</li> <li>• <b>Контекст</b>- Образование/профессиональная деятельность</li> <li>• <b>Уровень сложности задания</b> –3</li> <li>• <b>Формат ответа</b> – краткий ответ</li> <li>• <b>Описание задания («объект оценки»)</b> – составление квадрата из данных фигур</li> <li>• <b>Дополнительные характеристики.</b> Проверяются действия универсального характера: мысленно моделировать предложенную ситуацию, находить число одинаковых частей, из которых составлено целое, проверять правильность предположения.</li> </ul>	
<b>Система оценивания</b>	
2 балла	Указаны названия двух форм – «квадрат», «мягкий знак» – и не указаны названия других форм
1 балл	Указаны названия трёх форм: две верные - «квадрат», «мягкий знак», одна неверная - «уголок» или «крестики-нолики», которую нельзя использовать для составления данного квадрата («уголок», потому что эта форма не покрывает весь квадрат); «крестики-нолики», потому что этой формы надо 4 штуки, а их осталось только 3).
0 баллов	Другие ответы. Ответ отсутствует.

<b>Задание 5. «Выкладывание плитки». 1 из 2.</b>	
<p><b>Характеристики задания:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Содержательная область оценки</b> – Пространство и форма</li> <li>• <b>Компетентностная область оценки</b> - Применять</li> <li>• <b>Контекст</b>- Личная жизнь</li> <li>• <b>Уровень сложности задания</b> - 1</li> <li>• <b>Формат ответа</b> – выбор ответа (из четырех предложенных)</li> <li>• <b>Описание задания («объект оценки»)</b> – применение представления о площади для решения практической задачи, конструирование фигуры из составных частей</li> <li>• <b>Дополнительные характеристики.</b> Проверяются действия универсального характера: планировать ход решения, мысленно конструировать ситуацию нахождение количества равных частей в целом</li> </ul>	
<b>Система оценивания</b>	
1 балл	Выбран ответ «25»
0 баллов	Другие ответы. Ответ отсутствует.

**Задание 6. «Выкладывание плитки». 2 из 2.****Характеристики задания:**

- **Содержательная область оценки** – Изменение и зависимости
- **Компетентностная область оценки** - Применять
- **Контекст** - Личная жизнь
- **Уровень сложности задания** - 2
- **Формат ответа** – краткий ответ
- **Описание задания («объект оценки»)** – соотнесение размеров площадей данных фигур, установление зависимости между величинами
- **Дополнительные характеристики.** Проверяются действия универсального характера: устанавливать зависимость между данными, представленными в соседних столбцах таблицы, составлять целое из заданных частей, обобщать информацию, заполнять таблицу

**Система оценивания**

2 балла	Верно заполнены все ячейки таблицы		
	Форма плитки	Сколько надо плиток этой формы, чтобы сложить из них плитку размером 20 см x 20 см?	Сколько надо плиток этой формы, чтобы выложить квадратную площадку размером 100см x 100 см?
	10 см  20 см	2	50
10 см  10 см	4	100	
1 балл	Верно заполнена хотя бы одна строка или один столбец таблицы, а другие строки/столбцы не заполнены или заполнены неверно.		
0 баллов	Другие ответы. Ответ отсутствует.		

<b>Задание 7. «Багаж в аэропорту». 1 из 2.</b>							
<p><b>Характеристики задания:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Содержательная область оценки</b> – Количество</li> <li>• <b>Компетентностная область оценки</b> - Применять</li> <li>• <b>Контекст</b> - Личная жизнь</li> <li>• <b>Уровень сложности задания</b> - 2</li> <li>• <b>Формат ответа</b> – краткий ответ в виде слов – названий предметов</li> <li>• <b>Описание задания («объект оценки»)</b> – сравнение величин; округление величин; прикидка результата сложения двух или нескольких величин</li> <li>• <b>Дополнительные характеристики.</b> Проверяются действия универсального характера: интерпретировать данные, приведенные в тексте и на рисунке; учитывать все условия, находить разные решения практической задачи</li> </ul>							
<b>Система оценивания</b>							
2 балла	<p>С использованием соответствующих названий предметов багажа приведены 2 решения в <u>любом</u> порядке</p> <table border="1" data-bbox="496 669 1010 804"> <thead> <tr> <th>Решение 1</th> <th>Решение 2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>рюкзак</td> <td>компьютер (или лэптоп)</td> </tr> <tr> <td>компьютер (или лэптоп)</td> <td>Коробка</td> </tr> </tbody> </table>	Решение 1	Решение 2	рюкзак	компьютер (или лэптоп)	компьютер (или лэптоп)	Коробка
Решение 1	Решение 2						
рюкзак	компьютер (или лэптоп)						
компьютер (или лэптоп)	Коробка						
1 балл	Приведено <u>одно любое</u> решение, а другое решение не приведено или приведено неверное.						
0 баллов	Другие ответы. Ответ отсутствует.						

<b>Задание 8. «Багаж в аэропорту». 2 из 2.</b>	
<p><b>Характеристики задания:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Содержательная область оценки</b> – Количество</li> <li>• <b>Компетентностная область оценки</b> - Интерпретировать</li> <li>• <b>Контекст</b> - Личная жизнь</li> <li>• <b>Уровень сложности задания</b> - 3</li> <li>• <b>Формат ответа</b> – развернутый ответ</li> <li>• <b>Описание задания</b> («объект оценки») – расчеты с величинами, числами; сравнение, округление величин; прикидка результата</li> <li>• <b>Дополнительные характеристики.</b> Проверяются действия универсального характера: интерпретировать данные, приведенные в тексте; планировать ход решения, делать вывод, объяснять рациональное решение поставленной проблемы</li> </ul>	
<b>Система оценивания</b>	
2 балла	<p>Дан верный ответ: «Сдать в багаж», «Оформить дополнительное место багажа за 1000 р.» В объяснении должно говориться о том, что одно из мест надо сдать в багаж <u>бесплатно (чемодан)</u> или <u>просто сдать в багаж</u>, а за второе (коробка) надо заплатить 1000 р. (коробка весит около 5 кг, что меньше 20 кг, значит, оплата 1000 р.)</p> <p><i>Примеры возможного объяснения (ответы детей):</i></p> <p><i>Пример 1.</i> «Чемодан он сдаст как багаж. А коробка будет дополнительный багаж. За коробку он дополнительно отдаст 1000 р.»</p> <p><i>Пример 2.</i> «Чемодан сдать бесплатно в багаж, а коробка весит меньше 20 кг, значит, заплатить за неё 1000р.»</p> <p><i>Пример 3.</i> «20кг он повезёт на месте багажа, а за оставшиеся 4кг 500г ему надо доплатить 1000 р.».</p>
1 балл	<p>Дан верный ответ: «Сдать в багаж чемодан и коробку» ИЛИ «Сдать в багаж» ИЛИ «Оформить дополнительное место багажа», а <u>объяснение, неполное</u>. Например, говорится, как поступить только с одним из оставшихся предметов (см. Примеры 1,3), ИЛИ не указано, сколько надо заплатить за дополнительное место багажа (см. Пример 2), ИЛИ указана неверная оплата за коробку (вместо 1000 р. указано, например, 1200 р. или 1500 р.), но явно видно, что один предмет сдается в багаж бесплатно.</p> <p><i>Примеры возможного объяснения (ответы детей):</i></p> <p><i>Пример 1.</i> «Сдать в багаж. Объяснение: Чемодан весит меньше 20 кг, его можно сдать в багаж бесплатно».</p> <p><i>Пример 2.</i> «Чемодан сдаст в багаж, а коробку за дополнительную плату».</p> <p><i>Пример 3.</i> «Оформить дополнительное место багажа. Объяснение: она весит меньше 20 кг, дополнительное место стоит 1000 р.»</p> <p><i>Пример 4.</i> «Чемодан он может положить в место для багажа, которое входит в стоимость билета, и доплатить 1500 рублей за коробку».</p>
0 баллов	<p>Другие ответы. Ответ отсутствует.</p>

### Урок-сказка по теме «Натуральные числа» в 5 классе.

#### Цель изучения:

- закрепить и развить навыки сравнения натуральных чисел, выполнения арифметических действий с натуральными числами;
- продолжить работу по формированию навыков решения уравнений;
- развивать умения решать текстовые задачи;
- развивать умения решать логические задачи.

#### Форма проведения урока: сказка-соревнование.

#### Ход урока:

**Учитель:** Сегодня у нас необычный урок повторения темы «Натуральные числа», урок-соревнование, участниками которого будут три команды (учащиеся разделились на команды заранее, по желанию).

Познакомлю вас с правилами состязания:

Соперникам по очереди задаются вопросы. Будьте внимательными, так как некоторые из них адресованы всему классу. В этом случае отвечает та команда, участники которой первыми поднимут руку.

Если команда не может ответить на вопрос или даёт неправильный ответ, то право ответа предоставляется соперникам.

За каждый правильный ответ команда получает 1 балл.

В зависимости от количества набранных баллов, в конце урока соревнующиеся получают оценку.

**Учитель:** Таковы условия соревнования.

Необычность урока состоит и в том, что это будет урок-сказка.

В мире много сказок

Грустных и смешных.

И прожить на свете

Нам нельзя без них!

Пусть герои сказок

Дарят нам тепло,

Пусть тепло навеки

Побеждает зло!

Думаю, что вам хорошо известна сказка Алексея Толстого «Золотой ключик, или Приключения Буратино», но я вас познакомлю с математической версией этой сказки. Надеюсь, вы поможете Буратино выпутаться из тех трудных ситуаций, в которые он постоянно попадает.

Итак, каморка папы Карло...

Сверчок сказал Буратино, что в каморке кроется какая-то тайна, и, чтобы её узнать, надо правильно ответить на вопросы, которые, оказывается, написаны на холсте.

Буратино – мальчик шустрый, но деревянный, поэтому ему нужна ваша помощь.

### **I команде**

**Сравните числа, в которых цифры заменены звездочками:**

а) \*\*\*\* и \*\*\*;

б)  $52^{**}$  и  $51^{**}$ .

### **II команде**

**Угадайте корни уравнения:**

а)  $3 \cdot x = x \cdot 7$ ;

б)  $y \cdot y - 4 = 12$ .

Ответ: а)  $x=0$ ; б)  $y=4$ .

### **III команде**

**Найдите значение выражения:**

а)  $49 \cdot 27 + 51 \cdot 27$ ;

б)  $402 \cdot 87 - 302 \cdot 87$ .

Ответ: а) 2700; б) 8700.

Учитель: Выполнено первое задание, и вам открывается тайна – за холстом есть потайная дверь.

А что за этой дверью – не знает никто. Дверь можно открыть только золотым ключиком, который хранится у старой черепахи Тортилы. Узнав об этом, Буратино решил утром отправиться на поиски ключика.

**Внимание!**

### **Задание № 2**

#### **I команде**

**Буратино лег спать пораньше, в восемь часов вечера, предварительно заведя будильник на девять часов с тем, чтобы встать утром.**

**Сколько часов он проспал, пока его не разбудил будильник? (1 час)**

#### **II команде**

**У Буратино в комоде лежали вперемежку три пары чулок с красными полосками и 5 пар чулок с синими полосками.**

**Какое наименьшее число чулок он должен взять из комода в темноте, чтобы иметь не менее пары чулок одного цвета? (3 чулка)**

#### **III команде**

**Учитель:** Дождавшись утра, Буратино отправился в путь. Дорога предстояла трудная и далёкая. На окраине города внимание Буратино привлекла харчевня «Три пескаря». Проголодавшийся Буратино решил подкрепиться.

Войдя в харчевню, он увидел Карабаса Барабаса, лису Алису и кота Базилио. На вертеле готовилось фирменное блюдо – утка. У Буратино совсем не было денег, тогда коварный и злой Карабас Барабас предложил ему пойти на сделку.

Если Буратино правильно ответит на вопрос, то он его не только накормит, но даст ещё 7 золотых монет в придачу. Если же Буратино неправильно ответит на вопрос, то его кинут в огонь для приготовления очередного фирменного блюда. Вот какой вопрос задал Карабас Барабас:

**Одна утка на вертеле жарится до готовности один час.**

**За сколько часов зажарятся на одном вертеле сразу две утки? (1 час)**

**Учитель:** Всѣ обошлось как нельзя лучше. Сытый Буратино с семьѣю золотыми монетами продолжил путь. За городом Буратино увидел красивую лужайку и посреди неѣ – маленький домик.

В нём жила Мальвина – девочка с голубыми волосами. За еѣ домиком дорога разветвляется на три части. Мальвина рассказала Буратино о том, что вдоль каждой дороги написано уравнение. Нужно найти корни уравнений и по указателю направлений определить путь, ведущий к пруду черепахи Тортилы.

Поможем Буратино справиться с этим трудным заданием. Все участники соревнования решают уравнение в тетрадах, а один человек от команды – у доски. Будьте готовы помочь представителю своей команды.

### **Задание № 3**

**Найдите корень уравнения:**

**I команде**

$$(x + 3) \times 7 = 133; (x=16)$$

**II команде**

$$181 - 8x = 45; (x=17)$$

**III команде**

$$124 : (x - 14) = 31. (x=16)$$

**Учитель:** К пруду Тортилы вѣл указатель с числом 17, поэтому Буратино пошѣл по второй дороге.

Оказывается, лиса Алиса и кот Базилио были свидетелями всего происходящего. Они решили заманить Буратино в страну Дураков. Как вы знаете, лиса Алиса и кот Базилио убедили Буратино зарыть свои 7 монет в землю.

Они посоветовали ему вырыть 3 ямки.

В первую ямку положить  $x$  монет, во вторую – на 3 монеты меньше, чем в первую, а в третью – в 2 раза больше, чем во вторую.

Составьте к сформулированной задаче краткую запись и уравнение. Запишите их в тетрадах.

$$(Ответ:  $x+(x-3)+(x-3)*2=7$ )$$

Учитель: Лиса Алиса и кот Базилио обманули Буратино. Они натравили на него сыщиков, и он, бросив свои монеты, бежал из Страны Дураков. Чтобы вернуться на правильный путь, ведущий к пруду, Буратино пришлось идти через топкое болото.

### **Задание № 5**

**Учитель:** Чтобы узнать, чем это путешествие закончилось, вам придётся последовать за Буратино по математическим кочкам.

Не торопитесь при выполнении вычислений, а то можете соскользнуть с кочки и увязнуть в болоте. (Цепочкой, по одному ученики выходят к доске и записывают ответы). Если увидели, что предыдущий участник команды допустил ошибку, можете её исправить.

(1 команда: 1215 – 5000 – 636 – 106

2 команда: 1638 – 3000 – 816 – 102

3 команда: 952 – 4000 – 721 – 103)

Очередное препятствие преодолено, хотя некоторых оступившихся пришлось вытягивать из болота.

Наконец-то Буратино подошёл к пруду, в котором живут черепаха Тортила и много-много зелёных лягушек. Квакушки со всех сторон окружили Буратино и рассказали ему о своей мечте.

### **Задание № 6**

**В окрестностях пруда четыре болота. В каждом болоте по 58 кочек, а на каждой кочке живет по шесть лягушек. Каждая лягушка мечтает стать лягушкой-путешественницей.**

**Сколько нужно уток, чтобы осуществилась их мечта?**

Надеюсь, вы не забыли способ передвижения лягушки-путешественницы по воздуху!

(Ответ:  $4 \cdot 58 \cdot 6 \cdot 2 = 2784$  утки)

**Учитель:** Благодарные лягушки на кувшинке довели Буратино до черепахи.

### **Задание № 7**

Оказывается, Тортила отдала золотой ключик Буратино не просто так, как рассказал Алексей Толстой, а совсем иначе.

Она вынесла три коробочки: красную, синюю и зелёную.

На красной коробочке было написано «Здесь лежит золотой ключик», на синей – «Не пустая коробочка», на зелёной – «Здесь сидит змея». Тортила прочла надписи и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой – змея, а одна коробочка пуста, но все надписи неверны. Если отгадаешь, в какой коробочке лежит золотой ключик, он твой».

Так, где же лежит золотой ключик? Тот, кто первым объяснит решение задачи, принесёт команде один балл.

(Ответ: в 3 коробочке)

Учитель: Получив ключик, довольный Буратино вернулся домой...

С какими результатами каждая команда пришла к концу путешествия?

(подведение итогов)

Учитель: Право открыть потайную дверь предоставляется участнику победившей команды.

Преодолев так много испытаний,

Вы оказались у двери в Мир Знаний.

«Входите в неё, –

скажу вам я. –

Добро пожаловать, друзья!»