МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт Математики, физики и информатики

Кафедра Математики и методики обучения математике

Готовчикова Арина Олеговна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема «Обучение решению задач на применение движений плоскости на уроках геометрии в основной школе с использованием среды Живая математика»

Направление подготовки/специальность 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой МиМОМ, доцент, к.п.н. Шашкина М.Б.

____
(дата, подпись)

Руководитель д.п.н., профессор, профессор каф. МиМОМ Майер В.Р.

____
(дата, подпись)

Дата защиты _______________

Обучающийся Готовчикова А.О.

____
(дата, подпись)

Оценка ______________

Красноярск 2024

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Практическая значимость школьного курса геометрии обусловлена тем, что её объектом являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Геометрическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе. Геометрия является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. Развитие логического мышления учащихся при обучении геометрии способствует также усвоению предметов гуманитарного цикла.

Практические умения и навыки геометрического характера необходимы для трудовой деятельности и профессиональной подготовки школьников. Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении геометрических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, место геометрии в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся, а также формированию качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Курс геометрии характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности. Увеличивается теоретическая значимость изучаемого материала, расширяются внутренние логические связи курса, повышается роль дедукции, степень абстрактности изучаемого материала. Учащиеся овладевают приемами аналитико-синтетической деятельности при доказательстве теорем и решении задач. Систематическое изложение курса позволяет продолжить работу по формированию представлений у учащихся о строении математической теории, обеспечивает развитие логического мышления школьников. Изложение материала характеризуется постоянным обращением к наглядности, использованием рисунков и чертежей на всех этапах обучения и развитием геометрической интуиции на этой основе. Целенаправленное обращение к примерам из практики развивает умения учащихся вычленять геометрические факты, формы, и отношения.

Одна из основных идей развития математики и математического образования, высказанная великим педагогом и ученым Феликсом Клейном в 1872 году в его Эрлангенской программе, является применение в математике и ее обучении геометрических преобразований. Геометрические преобразования, а в школе это в первую очередь движения (параллельный перенос, поворот, осевая симметрия) и подобия (гомотетии и их композиции с движениями), стали в большинстве передовых стран одними из важнейших понятий в математической подготовке школьников и студентов. Однако, если в период, предшествующий цифровой трансформации общества, учитель ограничивался обращением к ученикам с просьбой мысленно представить себе то или иное преобразование, то появившиеся в последние десятилетия системы динамической математики предоставляют школьным и вузовским педагогам дополнительные возможности для эффективного обучения как самим преобразованиям, так и применению этих систем при решении задач методом преобразований. К сожалению, в большинстве российских школ обучение движениям и подобиям осуществляется без использования систем динамической математики. Отмеченное выше позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемая нами тема выпускной квалификационной работы является актуальной.

Цель исследования – разработать и экспериментально апробировать методику применения среды Живая математика при обучении решению задач методом движений на уроках геометрии в основной школе.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в 7-9 классах основной школы, ориентированный на использование в обучении геометрии системы динамической математики Живая математика.

Предмет исследования: методика обучения решению задач на применение движений плоскости на уроках геометрии в основной школе с использованием среды Живая математика.

Задачи исследования:

а) проанализировать темы школьного учебного материала, связанные с решением задач методом движений, выяснить, в какой степени движения плоскости и решение задач этим методом представлены в основных школьных учебниках;

б) изучить дидактические возможности среды Живая математика как виртуальной лаборатории по обучению учащихся основной школы геометрическим преобразованиям;

в) разработать методику обучения решению задач методом движений на основе интеграции традиционной методики обучения геометрическим преобразованиям и дидактических возможностей среды Живая математика

г) реализовать разработанную методику обучения решению задач методом движений с использованием возможностей среды Живая математика, подготовить соответствующие gsp-файлы, осуществить апробацию разработанной методики.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

1.1 О роли геометрических преобразований в математике и математическом образовании, представленность этой теории в основном школьном учебнике по геометрии 7-9 классов

Геометрические преобразования – это преобразования геометрических объектов (геометрических фигур, плоскости, пространства и т.п.), т.е. взаимно-однозначные отображения геометрических объектов на себя, что означает, что каждая точка объекта имеет только один образ и только один прообраз [9].

Геометрия – один из важнейших компонентов математического образования, она необходима для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры и эстетического воспитания учащихся. Изучение геометрии вносит вклад в развитие логического мышления и формирование понятия доказательства.

Школьный курс геометрии состоит из двух частей - планиметрии и стереометрии.

Планиметрия – это раздел геометрии, который изучает геометрические фигуры на плоскости (Рис. 1) [6].

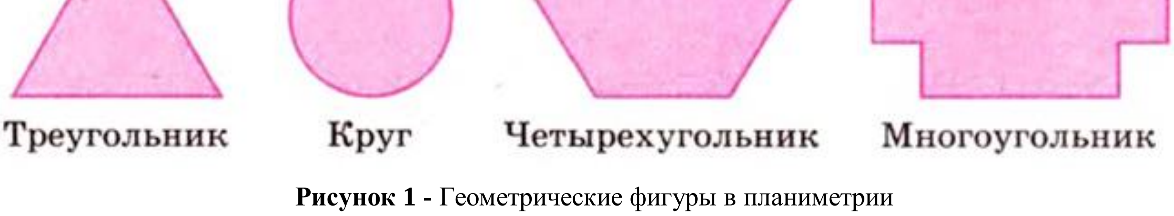


Рисунок 1 - Геометрические фигуры в планиметрии

Стереометрия – это раздел, который изучает фигуры в пространстве. Именно стереометрия знакомит нас с разнообразием пространственных форм, законами изображения пространственных фигур (Рис.2) [6].

Рисунок 2 - Геометрические фигуры в стереометрии

При геометрических исследованиях часто возникает потребность вместе с данной фигурой рассматривать вспомогательную фигуру, которая получается из данной с помощью подходящего геометрического преобразования.

Геометрическое преобразование плоскости – взаимно-однозначное отображение этой плоскости на себя. Наиболее важными геометрическими преобразованиями, изучаемыми в школьном курсе геометрии, являются движения, т.е. преобразования, сохраняющие расстояние [17].

Некоторые преобразования фигур в пространстве определяются таким же образом, как и преобразования фигур на плоскости (например, параллельный перенос), но для некоторых из них (например, симметрия) имеются определённые особенности [3].

Движение в пространстве определяется таким же образом, как и на плоскости. При движении в пространстве сохраняются расстояния между точками. И так же, как и на плоскости, прямые переходят в прямые, отрезки в отрезки, углы между полупрямыми сохраняются. Новым свойством, которым обладает движение в пространстве, являются то, что при движении плоскость переходит в плоскость.

Использование геометрических преобразований в школьном курсе имеет большое методическое значение. Методы симметрии, поворота, параллельного переноса, гомотетии позволяют учащимся решать большой класс задач на доказательство, построение, вычисление и исследование. Использование метода геометрических преобразований при решении задач развивает образное мышление, способствует развитию различных форм мыслительной деятельности школьников. К сожалению, лишь немногие обучающиеся владеют этими методами.

Атанасян Л. С, Бутузов В. Ф, Кадомцев С. Б. Геометрия 7-9 классы, учебник, являющийся завершённой предметной линии учебников по геометрии для учащихся 7 — 9 классов общеобразовательных организаций. Классический практико-ориентированный курс геометрии, подкорректирован с учетом реализации проверенных временем принципов обучения; Максимальное использование принципа наглядности в подаче материала позволяет обеспечить вариативность, дифференцируемость и другие принципы обучения; Дана широкая система задач, позволяющая достигнуть учащимся планируемых результатов как на базовом, так и на углублённом уровнях [14].

Учебник Л.С. Атанасяна «Геометрия 7-9» является основным среди образовательных организаций. Учащиеся по данному учебнику самостоятельно могут освоить понятие движения и его видов [2].

Знакомство с осевой и центральной симметрией начинается в 8 классе. Преобразования рассматриваются как свойства геометрических фигур. Более подробное изучение происходит в 9 классе в главе «Движения», где рассматриваются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот. Разобраны примеры применения движений при решении геометрических задач разной степени сложности. А также, исследуется вопрос о связи понятий наложения и движения. Пункт «Наложения и движения» обозначен звездочкой, что относится к необязательному изучению. Задачи темы направлены на развитие навыков построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе и повороте.

1.2 Возможности среды Живая математика как средство обучения движениям и решению задач методом движений

Живая математика – это виртуальная математическая лаборатория, среда моделирования и динамического представления чертежей, графиков и других объектов школьной и внешкольной математики [16].

Работая с программой Живая математика, учитель может проиллюстрировать объяснения эффектными и точными чертежами, организовать экспериментальную исследовательскую деятельность учащихся, повысить разнообразие форм работы на уроке, увеличить долю активной творческой работы в учебном процессе [7].

Живая математика имеет полный набор возможностей для выполнения построений на плоскости, их преобразований и дальнейшей работы с ними, то есть практически полностью охватывает планиметрический материал [4].

Предлагаемые создателями программы методические рекомендации это подтверждают — работе на плоскости посвящена большая часть предлагаемых материалов: от элементарных построений (точка, прямая, отрезок, простейшие фигуры и пр.) до построения довольно сложных моделей, которые в какой-то степени можно использовать для наглядной демонстрации при доказательстве некоторых теорем из курса геометрии в основной школе [20].

Настоящая ценность конструкций Живой математики в том, что они могут двигаться: их можно перемещать и деформировать, масштабировать и т.д., не разрушая наложенные ограничения и связи, или другими словами, сохраняя заданные математические свойства. При деформации фигуры определенные соотношения между элементами остаются неизменными, но соотношения, которые явно не заданы, не сохраняются. Поэтому, изменяя фигуру, можно изучить все многообразие ее форм с заданными свойствами [7].

В основу обучения геометрическим преобразованиям на базе системы динамической математики (СДМ) положены следующие дидактические принципы:

1) использование возможностей СДМ самостоятельно задавать обучающимися любые геометрические преобразования, строить образы геометрических фигур, способствующие изучению их свойств и признаков;

2) проводить компьютерные эксперименты, позволяющие обучающимся самостоятельно выявлять требуемые свойства фигур с помощью подходящих геометрических преобразований, верифицировать эти свойства, а также визуализировать процесс их обоснования;

3) строить анимационные модели, поддерживающие решения задач и доказательства теорем, связанные с исследованием фигур методом геометрических преобразований [8].

Раздел «Движение» в геометрии является довольно сложным для понимания у обучающихся, потому что при традиционном методе обучения трудно представить сам процесс перемещения точек, прямых, фигур и т.п.

Среда Живая математика – это современное решение для успешного усвоения материала курса геометрии для учащихся основной школы. С её помощью ученикам можно наглядно понять принцип работы со свойствами и признаками, а также решать задачи с движением.

Благодаря программе «Живая математика» можно вызвать интерес обучающихся к изучению геометрии, исследованию геометрических фигур, их свойств и законов [5].

Меняется отношение учащихся и к геометрическому объекту, созданному своими трудами, по отношению к тому, как если бы его просто дали в готовом виде или определили. Ведь ученик помнит весь процесс творения – с чего начинался объект, какие трудности пришлось преодолеть, прежде чем прийти к желаемому результату. Он сам размещает чертеж на экране, определяет, какие элементы конструкции должны быть видимыми, а какие – нет, каким объектам дать имена, а какие будут безымянными. В соответствии со своим вкусом выбирает цвет, толщину линий, насыщенность, может сопровождать свои чертежи пояснениями, надписями и т. п. Затратив значительные усилия на создание чертежа, добившись своей цели, учащийся начинает ценить свою работу – а, следовательно, и созданные им объекты.

«Живая математика» является отличным дополнением к образовательному процессу. Она помогает учителю демонстрировать законы, понятия и решения различных учебных задач [11].

Итак, применение программы Живая Математика в процессе обучения:

- развивает навыки самостоятельного мышления;

- формирует положительное и ответственное отношение к учебе, прослеживается рост успеваемости;

- повышается самооценка учащегося, самокритичность;

- появляется заинтересованность и потребность в получении дополнительных знаний; - раскрывается интерес к научной деятельности;

- высокий эстетический уровень оформления работ, делает изучение математики привлекательным [10].

Наглядность должна использоваться в той мере, в какой она способствует формированию знаний и умений, развитию мышления. Демонстрация и работа с предметами должны вести к очередной ступени развития, стимулировать переход от конкретно-образного и наглядно-действенного мышления к абстрактному, словесно-логическому.

1.3 Методика обучения решению задач методом движений на основе интеграции традиционной методики и дидактических возможностей среды Живая математика

В современном мире технологии проникают в каждую сферу жизни человека. Сфера обучения не является исключением, педагогам предлагается изучить среду Живой математики, чтобы повысить успеваемость и усвоение курса геометрии школьниками.

Развитие средств обучения математики дает лишь возможность решения некоторых проблем усваивания тем, которые только при определенных условиях превращаются в реальность.

Современный ученик должен уметь применять полученные знания на практике и понимать по какому принципу действуют те или иные математические операции или свойства [12, 18].

Любому педагогу понятно, что дальнейший научно-технический прогресс необходим для улучшения освоения материала, но не каждый понимает, что вместе с прогрессом необходимо помнить о традиционных методах обучения. Решение проблем возможно только знающими, компетентными, предвидящими результат своих действий специалистами.

Методика обучения геометрии приобретает новые виды и формы. Освоение среды «Живая математика» откроет новые методы преподавания геометрии, поскольку усвоение образовательной программы станет более успешным для учащихся.

Дидактические средства и методики, которые традиционно используются при исследовании свойств геометрических объектов и понятий статистического характера, оказались малоэффективными при обучении такому динамическому понятию, как геометрическое преобразование [9].

Действительно, далеко не все учащиеся обладают пространственным мышлением и умеют мысленно строить модели и фигуры, и тем более совершать различные преобразования над ними.

Благодаря среде Живая математика ученик может наглядно проводить нужные манипуляции для исследования понятий геометрических преобразований.

При изучении определенных преобразований есть возможность динамически визуализировать нужное понятие. Для этого достаточно выбрать любую точку плоскости, пространства или фигуры и, используя возможности среды Живая математика, построить ее образ, таже возможно изменение ее положения наблюдать за перемещением образа [9].

При создании рисунка ученик осуществляет все построения, которые он выполняет традиционными чертежными инструментами в школьной тетради. Отличие от рисунка на листе бумаги заключается в том, что на рабочем поле Живой математики появляется чертеж, в который «вшит» алгоритм построения, т. е. на самом деле результатом виртуального построения является не один чертеж, а целое семейство чертежей. Это позволяет ученику при необходимости изменить положение независимых объектов чертежа и получить новый чертеж, в котором будут сохранены все заложенные при построении отношения между элементами чертежа (параллельность и перпендикулярность, принадлежность точек линиям, деление отрезков в данном отношении и т. д.).

Такая возможность создания с помощью среды Живая математика динамических чертежей усиливает общедидактический принцип наглядности за счет анимационных возможностей средства обучения.

Решение большинства задач, связанных с созданием эффекта анимации, содержит элементы творческой и исследовательской деятельности. Для ее реализации необходимо обстоятельно изучить геометрические свойства исследуемого объекта, познакомиться со всеми нюансами его построения. Поэтому самостоятельное создание учеником эффекта анимации означает глубокое его проникновение в существо проблемы, формирование на деятельностной основе у обучающегося компетенций исследователя и экспериментатора.

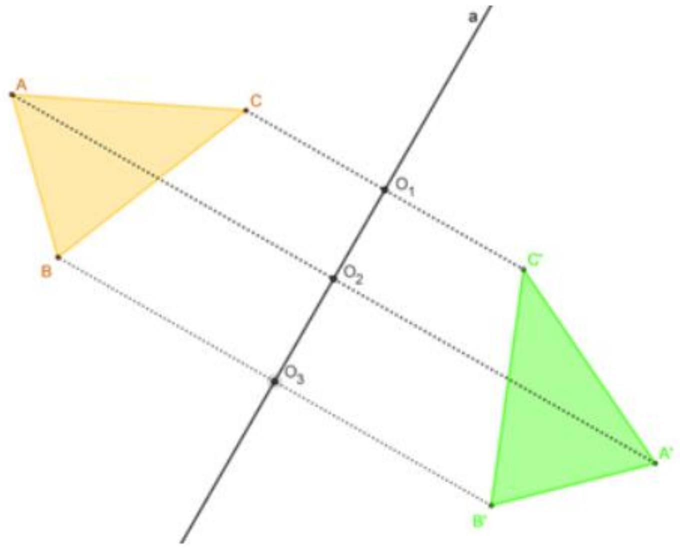
Электронная вычислительная машина при решении геометрических задач выступает как эффективное средство формирования навыков и умений моделирования геометрических объектов, как стимулирующее средство достижения поставленных целей [13].

Грамотное и рациональное использование качественных компьютерных программных средств, таких как Живая математика, повышает эффективность процесса обучения, предоставляя учащимся возможность активного, деятельностного подхода в обучении [10].

ГЛАВА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

2.1 Обучение решению задач на применение осевой симметрии

Осевая симметрия или симметрия относительно прямой — это такое преобразование, при котором каждой точке фигуры, находящейся по одну сторону от прямой, соответствует точка, находящаяся по другую сторону от прямой, а отрезки, соединяющие эти точки, перпендикулярны прямой и делятся ею пополам. Эта прямая называется осью симметрии, а соответствующие точки — симметричными точками относительно прямой (Рис. 3) [21, 22, 25].



$$\left.\begin{matrix} CC' \perp a, CO_1 = O_1C' \\ AA' \perp a, AO_2 = O_2A' \\ BB' \perp a, BO_3 = O_3B' \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \xrightarrow{a} \Delta A'B'C'$$

Рис. 3 – Осевая симметрия

Разобравшись с понятием «осевая симметрия», рассмотрим несколько задач на ее применение.

Продемонстрируем наш подход к использованию среды Живая математика на примере решения следующей элементарной задачи. (Рис. 4)

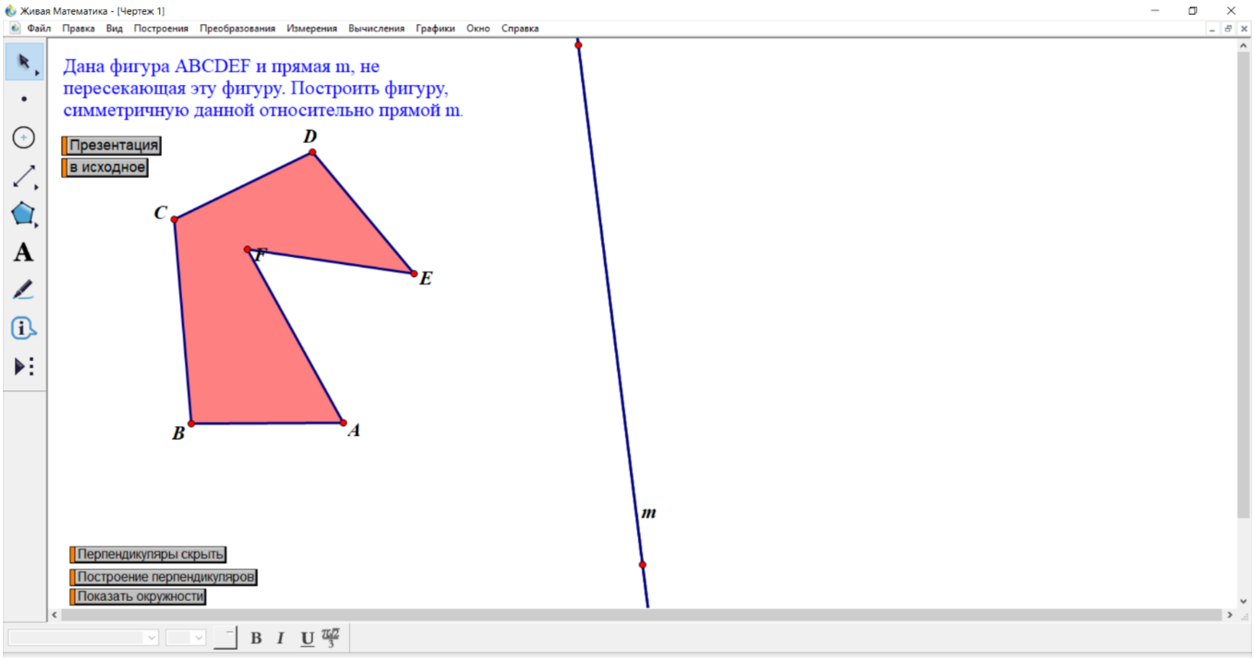


Рис. 4 – Условие и чертеж к задаче

Учитель заранее готовит в среде Живая математика динамический чертёж, который нельзя построить ни в школьном учебнике, ни нарисовать мелом на доске, ни изобразить в школьной тетради. Для этого на рабочем поле среды оформляется формулировка задачи (рис. 4), строится фигура ABCDEF и прямая m (с помощью мыши можно менять расположение обеих фигур). Далее, подсвечиваем сначала вершину фигуры, затем прямую m, и через кнопку «Построение» выбираем команду «Перпендикуляр». Такими манипуляциями мы получаем шесть перпендикуляров на каждую вершину фигуры. (Рис. 5)

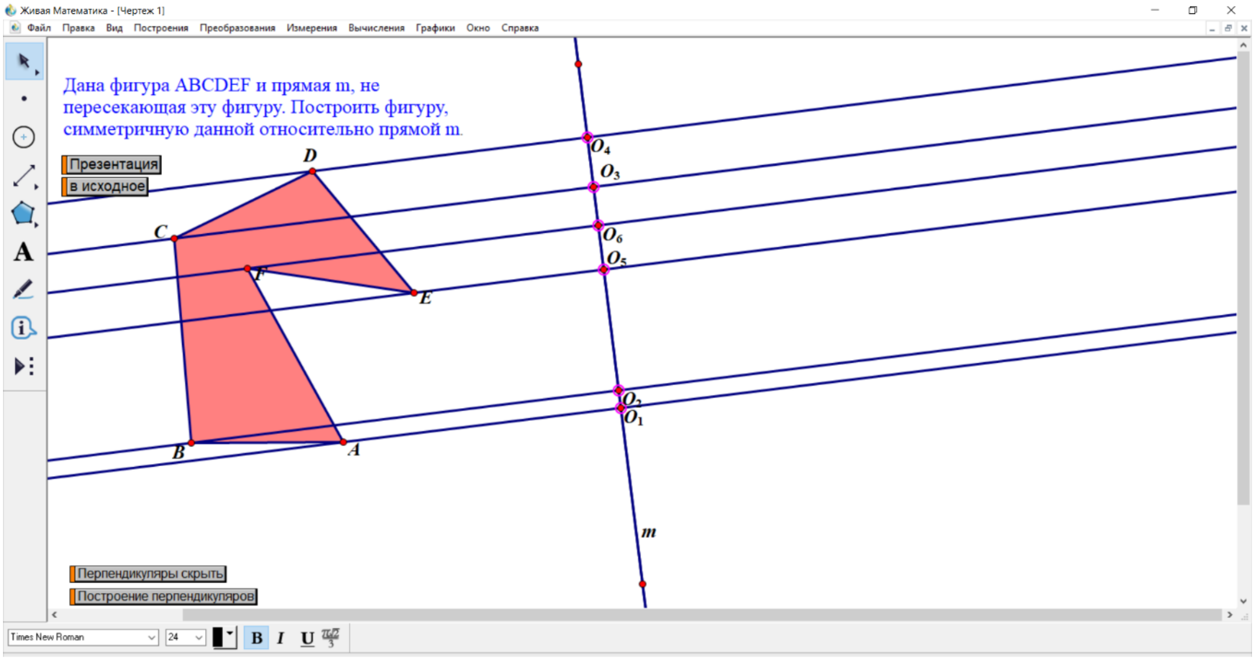


Рис. 5 – Построение перпендикуляров

После построения перпендикуляров мы построим окружности с центром пересечения перпендикуляров с данной нам прямой и расстоянием до вершины фигуры. Для этого мы выбираем точку пересечения перпендикуляра и прямой m и соответствующую вершину фигуры, и далее через кнопку «Построение» выбираем команду «окружность по центру и точке». У нас появляется окружность, благодаря которой мы находим образ вершины фигуры. (Рис. 6) Такую манипуляцию проводим с каждой вершиной, после чего найденные точки соединяем последовательно, получая нужную нам фигуру, которая симметрична данной. (Рис. 7)

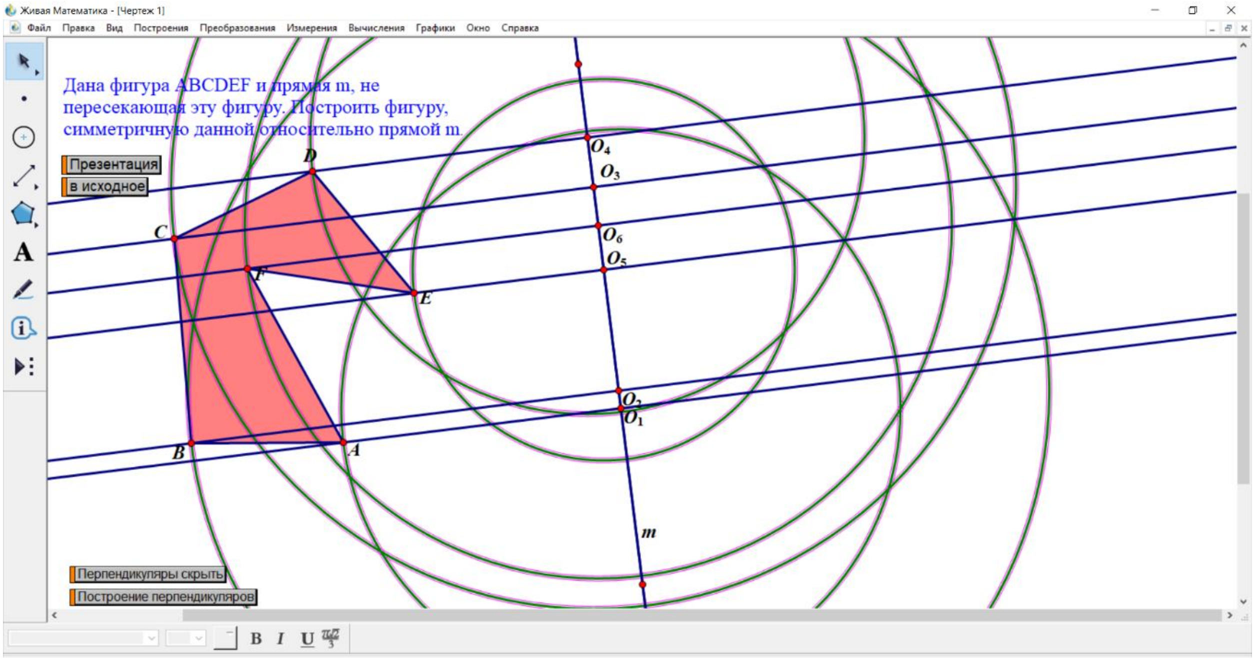


Рис. 6 – Построение окружностей

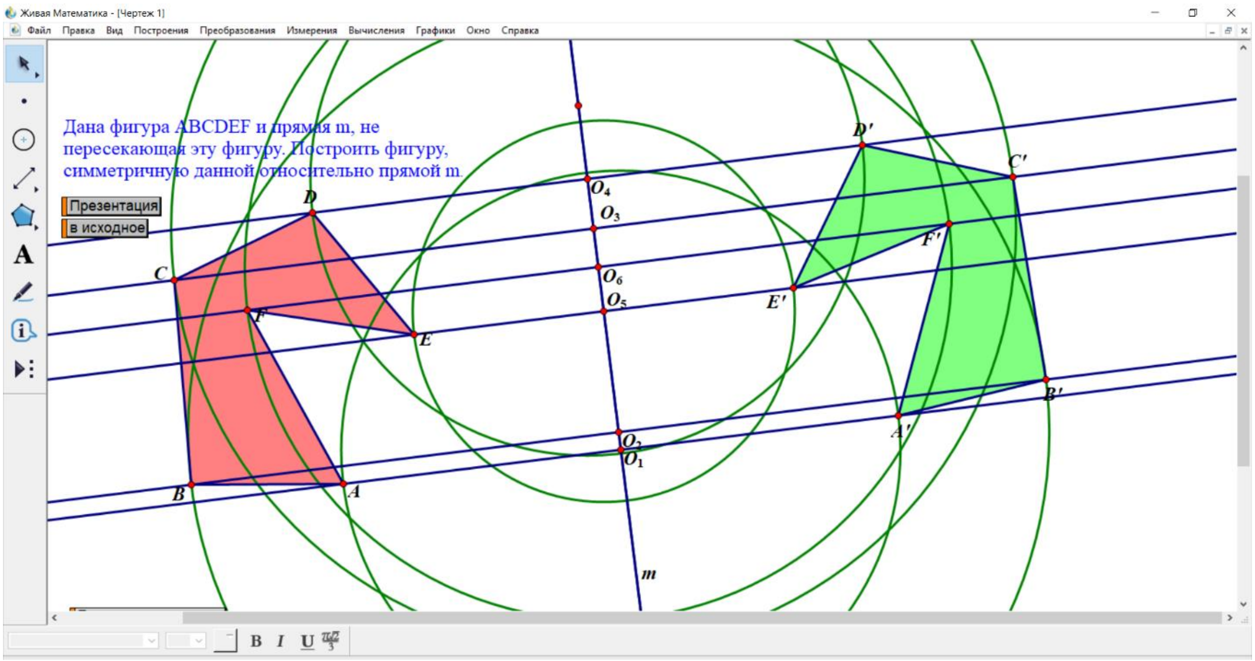


Рис. 7 – Обозначение точек пересечения и получение искомой фигуры

Составим алгоритм решения подобных заданий:

1. Проведем перпендикуляры для каждой вершины заданной фигуры с осью симметрии.
2. На полученных прямых найдем точки пересечения с осью симметрии, и через эту точку и соответствующую вершину фигуры

проводим окружность, где получаем образ выбранной нами вершины.

3. Последовательно соединяем найденные точки, и получаем искомую фигуру.

Рассмотрим подобное задание и выполним его, следуя алгоритму, который представлен выше (Рис. 8) [29].

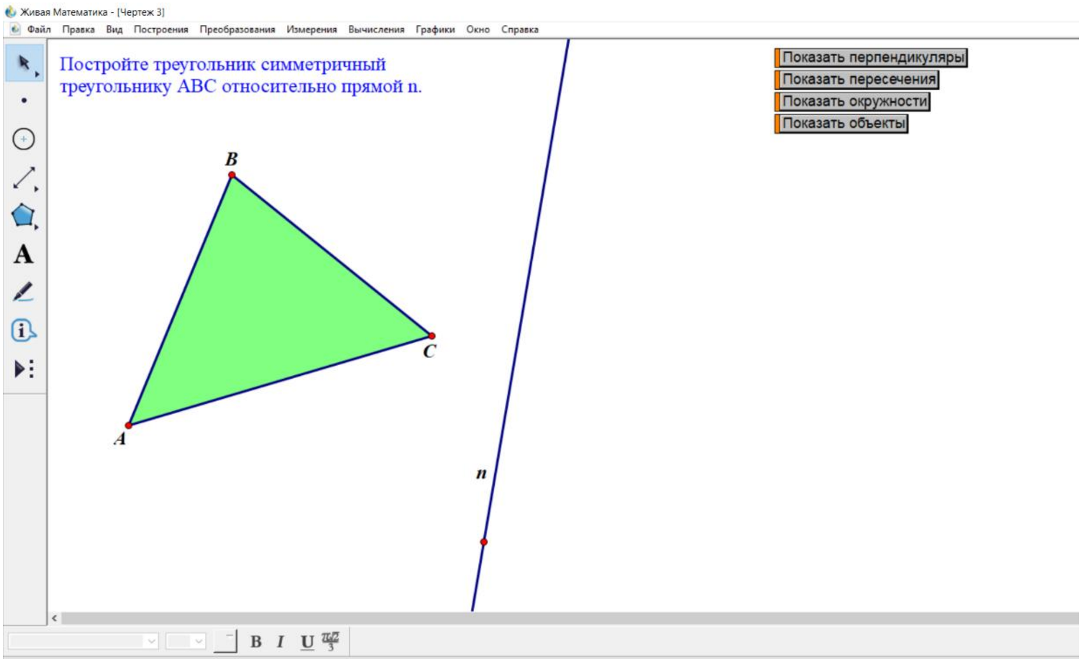


Рис. 8 – Условие задания и чертеж

Итак, первым делом мы проводим прямые из вершин данного треугольника, которые перпендикулярны данной прямой. (Рис. 9)

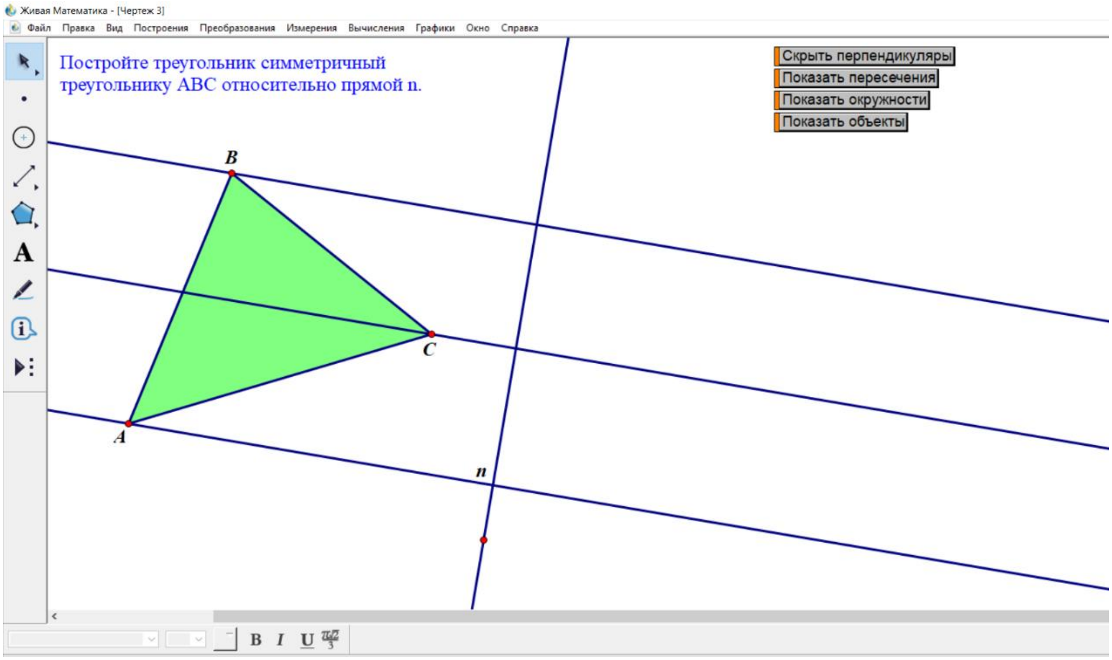


Рис. 9 – Построение перпендикуляров

Второе действие – это обозначить точки пересечения перпендикуляров с прямой n. (Рис. 10)

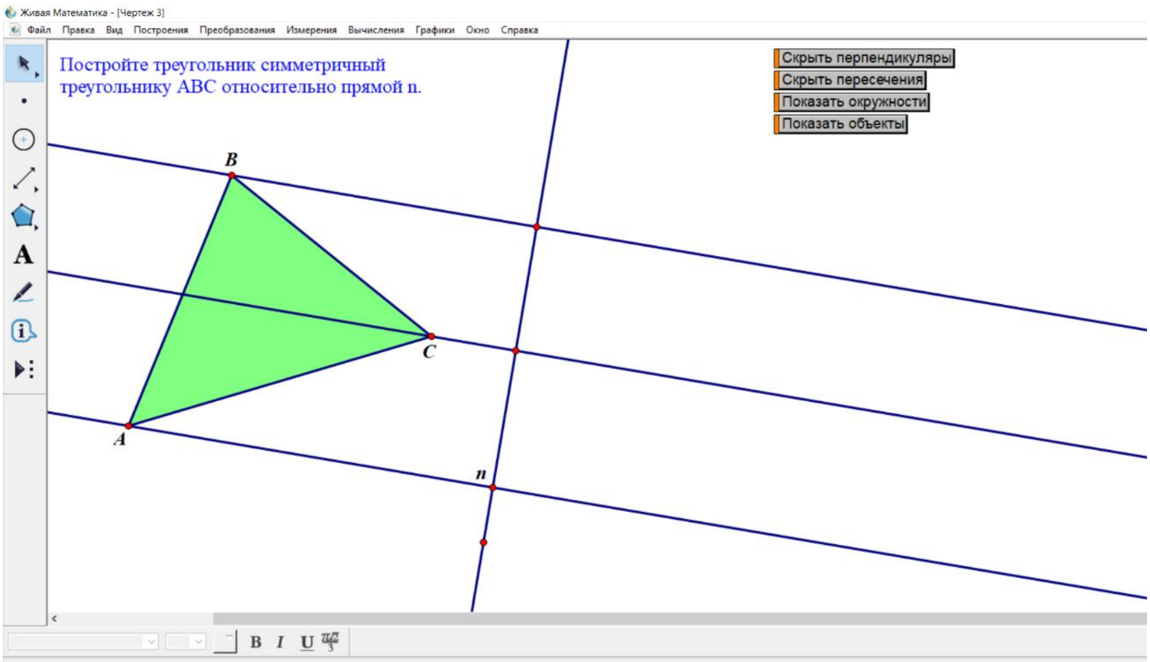


Рис.10 – Точки пересечения перпендикуляров с осью симметрии

Далее мы строим окружности с центром в точке пересечения перпендикуляра с прямой n для того, чтобы найти образы вершин. (Рис. 11)

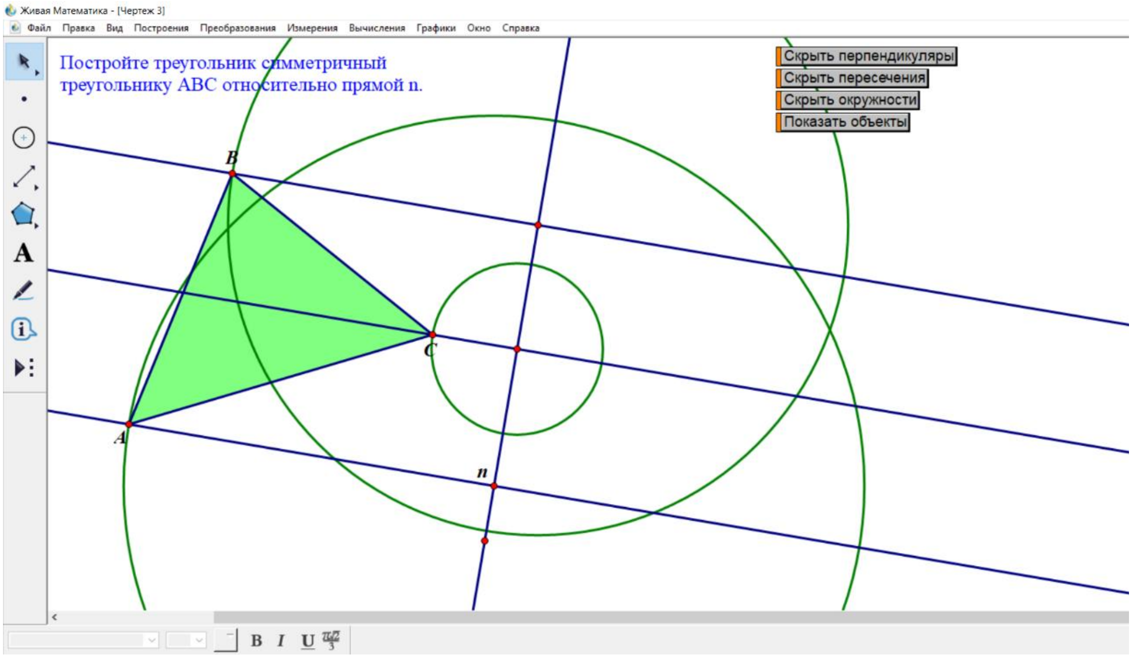


Рис.11 – Построение окружностей

И теперь все что нам осталось, это обозначить полученные точки и последовательно их соединить, тем самым мы получили искомый нам треугольник. (Рис. 12)

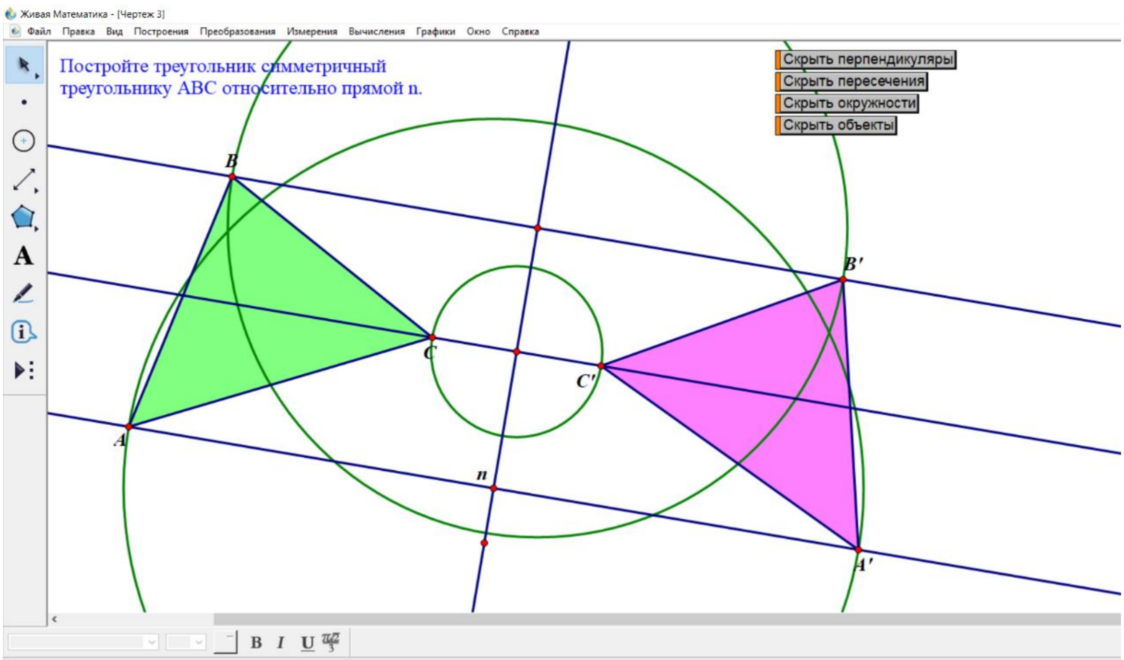


Рис. 12 – Получение точек пересечения и нахождение искомой фигуры

2.2 Обучение решению задач на применение поворота плоскости

Если одна фигура получена из другой фигуры поворотом всех её точек относительно центра O на один и тот же угол в одном и том же направлении, то такое преобразование фигуры называется *поворотом* (Рис. 13) [28].

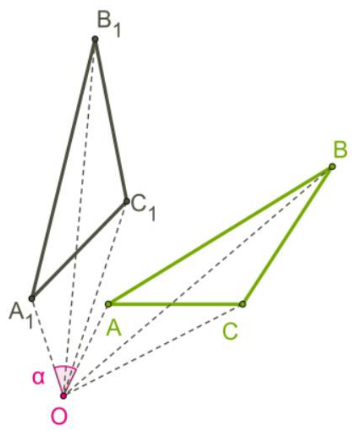


Рисунок 13 – Поворот треугольника АВС на угол а

Параллельный перенос обладает следующими свойствами:

- Преобразование, обратное повороту, есть поворот с тем же центром на противоположный угол;
- Композиция двух поворотов с общим центром есть поворот на угол, равный сумме углов данных поворотов (возможно, с точностью до прибавления или вычитания 360°);
- Поворот на нулевой угол является тождественным преобразованием;
- Поворот, отличный от тождественного преобразования, имеет единственную неподвижную точку (центр поворота). Если угол поворота, отличного от тождественного преобразования, не равен 180°, то неподвижных прямых нет.

В качестве примера, рассмотрим задачу № 1167 учебника «Геометрия 7-9» Атанасян по теме поворот. (Рис. 14) [2]

З а д а н и е № 1167. Постройте треугольник, который получается из ΔАВС поворотом вокруг точки А на ∠150° против часовой стрелки.

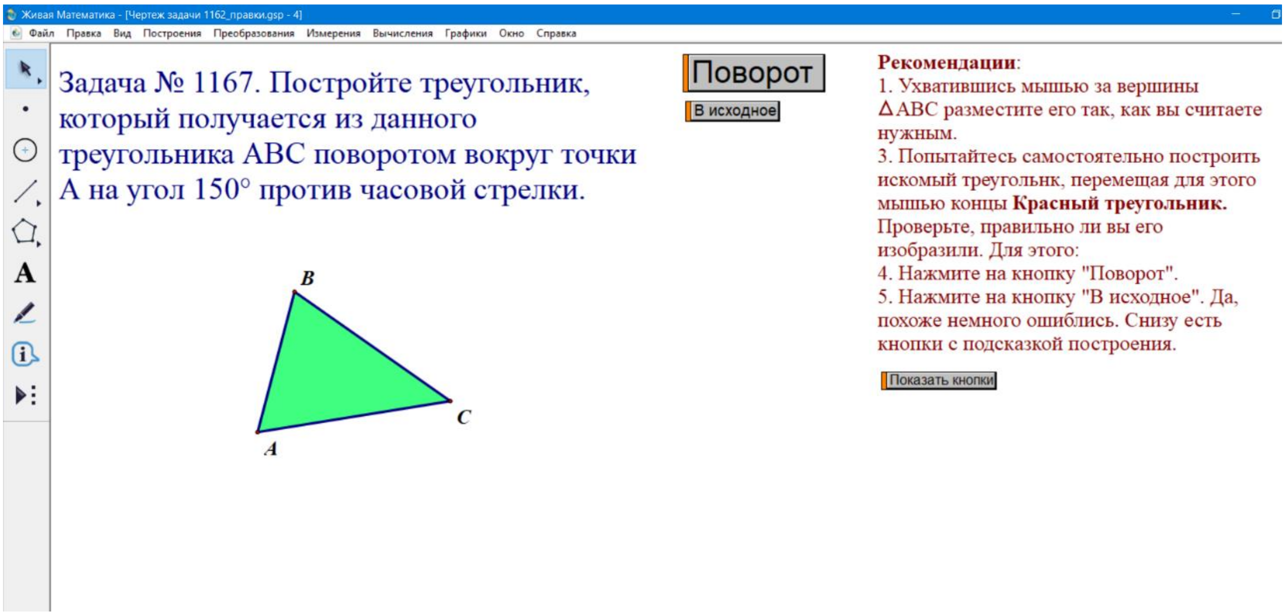


Рисунок 14 – Задача № 1167.

Чтобы выполнить поворот треугольника ABC на заданный угол, построим две окружности с помощью инструмента «Окружность». Первая окружность с центром А и радиусом АВ, а вторую с тем же центром и радиусом АС. Теперь выбираем поочередно точки В и С. Через команду «Преобразования» - «Повернуть» задаем угол 150° и получаем проекции нужных нам точек B_1 и C_1. С помощью инструмента «фигура» соединяем точки А , B_1 и C_1 и нужный нам треугольник готов. (Рис. 15)

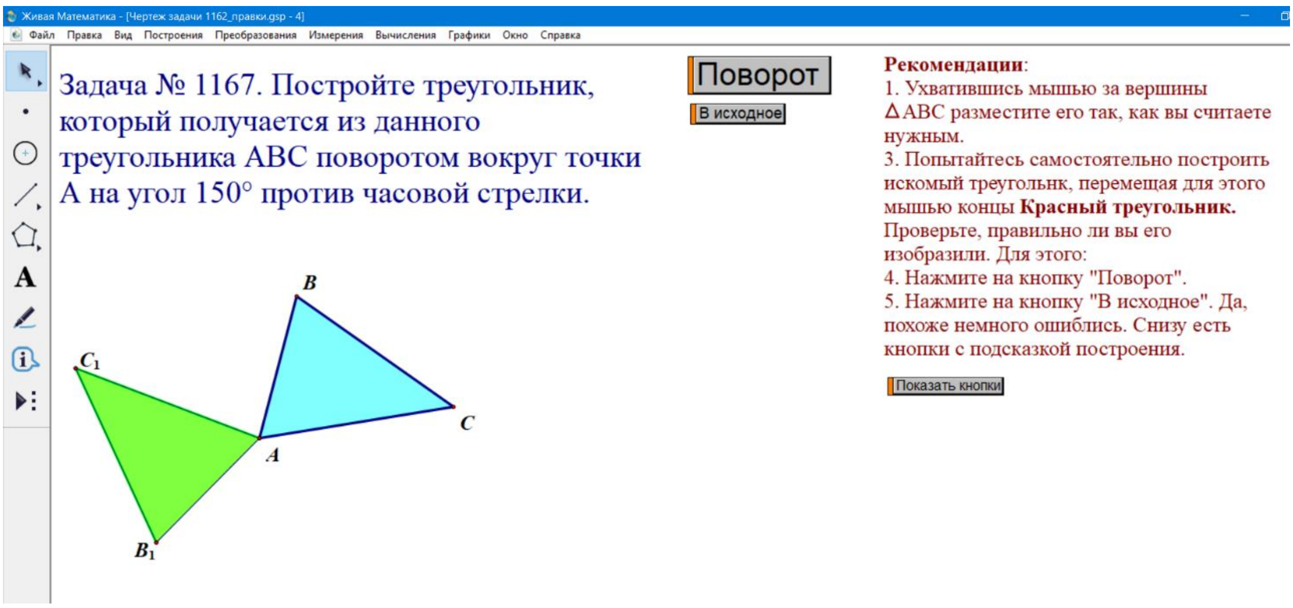


Рисунок 15 – Построение искомого треугольника.

Для учеников разработаны рекомендации исследования поворота треугольника на заданный угол. Сначала им предлагается самостоятельно проверить свои умения, а затем проверить себя. Если результат выдался неудачным, то ученик может воспользоваться подсказками. (Рис. 16)

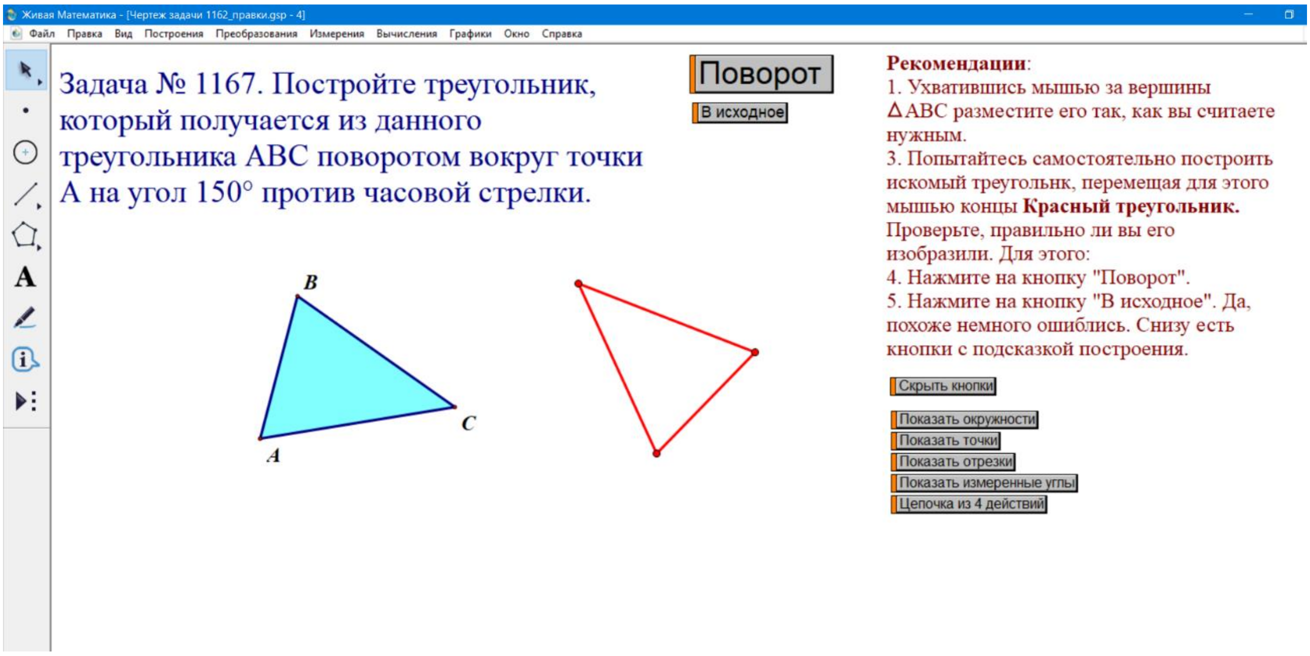


Рисунок 16 – Рекомендации для обучающихся.

З а д а н и е № 1177. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. A_2, B_2, C_2 - точки, которые соответственно являются серединами отрезков AM, BM, CM. Докажите, что $\Delta\ A_1B_1C_1=\Delta\ A_2B_2C_2$.

В учебнике предлагается решение этой задачи:

Так как точка M – пересечение медиан ΔABC, следовательно, $AM=2MA_1$. Учитывая, что A_2 – середина отрезка AM, получается, что $MA_1=MA_2$, отсюда точки A_1 и A_2 – симметричны относительно точки M. Аналогично B_1 и B_2, а также C_1 и C_2 симметричны друг другу относительно M.

Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. При этой симметрии точки A_1, B_1, C_1 отображаются в точки A_2, B_2, C_2. Соответственно и треугольник Δ $A_1B_1C_1$ отображается на Δ $A_2B_2C_2$ и, следовательно, они равны.

С использованием Живой математики, решение этой задачи методом поворота можно максимально визуализировать, используя для этого компьютерную анимацию, имитирующую процесс поворота (Рис. 17, 18).

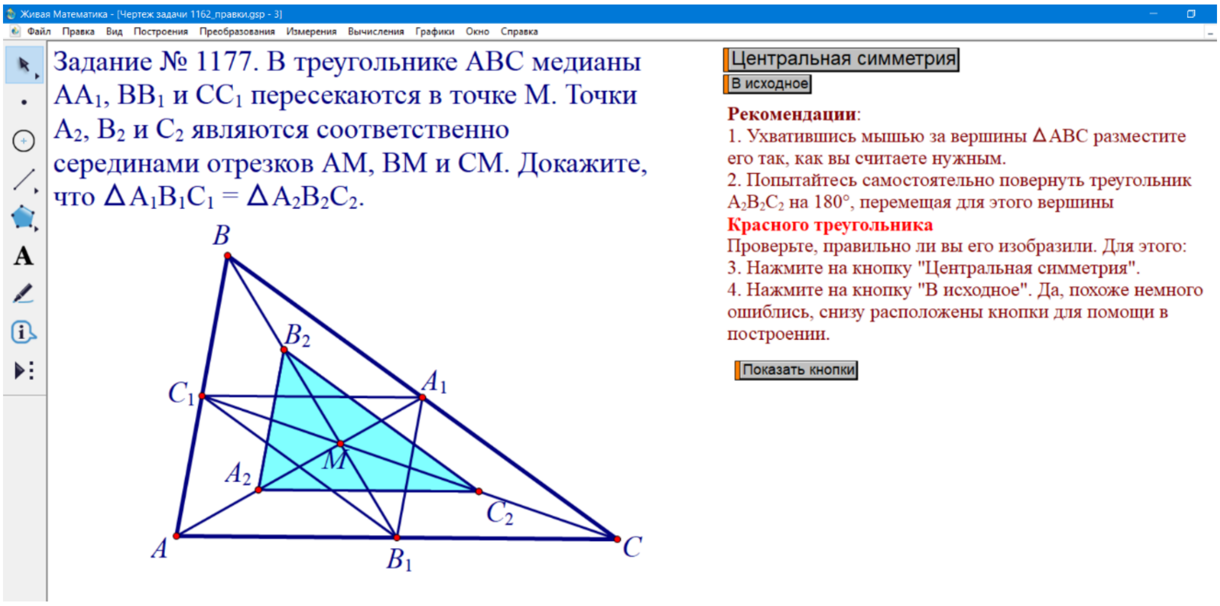


Рисунок 17 – Задача №1177 и рекомендации к ее решению.

Учителю для этого необходимо создать динамический чертёж, имитирующий процесс поворота треугольника $A_2B_2C_2$ вокруг его точки M пересечения медиан (центра тяжести треугольника) на угол 180º. Перечислим основные этапы этого построения:

1) на каждом из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 как на диаметрах строятся полуокружности с центром в точке M и с ориентацией от первой точки ко второй против часовой стрелки;

2) на каждой полуокружности выбирается одна точка, строится подвижный треугольник с вершинами в этих точках, который окрашивается голубым цветом;

3) создаётся кнопка «Центральная симметрия», отображающая подвижный треугольник в треугольник $A_1B_1C_1$ (для этого достаточно подсветить последовательно шесть точек: первую вершину подвижного треугольника и ее образ A_1, затем вторую вершину подвижного треугольника и ее образ B_1, наконец, третью вершину и ее образ C_1);

4) создаётся кнопка «В исходное», отображающая подвижный треугольник в треугольник $A_2B_2C_2$ (для этого достаточно подсветить последовательно шесть точек: первую вершину подвижного треугольника и ее образ A_2, затем вторую вершину подвижного треугольника и ее образ B_2, наконец, третью вершину и ее образ C_2).

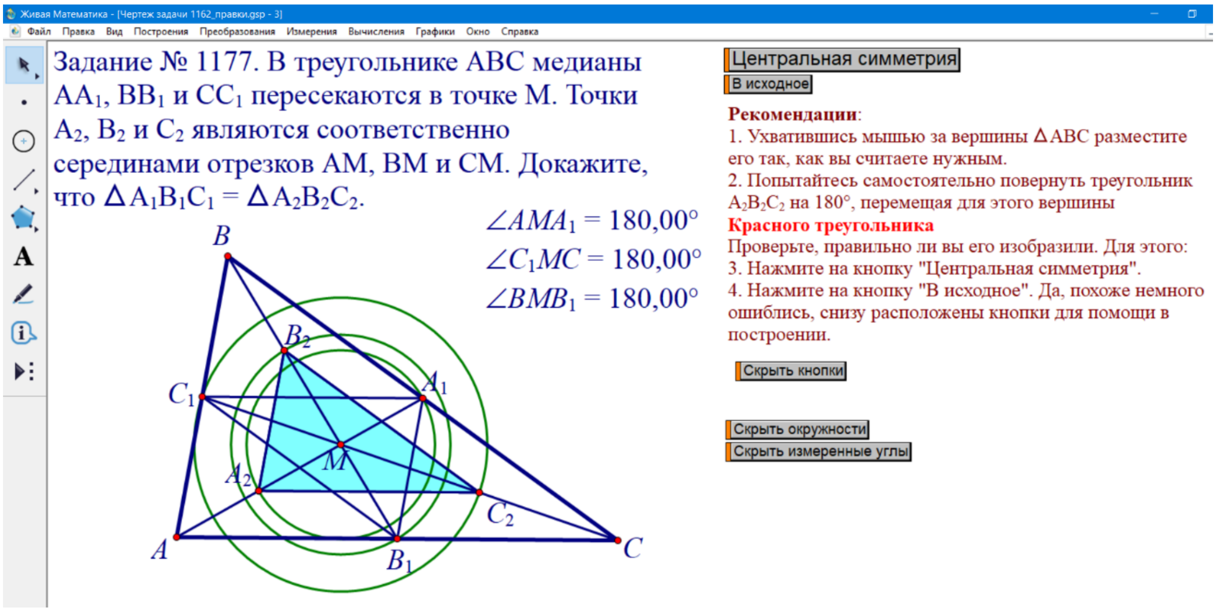


Рисунок 18 – Дополнительные построения к задаче.

Как и в предыдущих задачах обучающемуся предоставляется возможность самостоятельно построить образ треугольника $A_2B_2C_2$, перемещая вершины подвижного (красного) треугольника на угол 180º вокруг точки M (с использованием интуиции и определения поворота или с использованием циркуля и линейки). Проверить себя он может, нажав на кнопку «Центральная симметрия».

Учитель, меняя положение вершин треугольника ABC, может, не создавая новый динамический чертёж, а используя построенный, рассмотреть различные виды треугольника: остроугольного, тупоугольного, прямоугольного.

Как это следует из истории математики использование движений плоскости применимо не только к геометрическим построениям с помощью циркуля и линейки, но и ко многим задачам, например, на доказательство, а также к задачам на вычисление длин и площадей. В качестве примера на применение поворота плоскости к решению задачи на вычисление площади приведём следующую задачу, сопроводим решение комментариями и динамическим чертежом, выполненным в среде Живая математика.

З а д а н и е . Дан квадрат ABCD, площадь которого равна 36. Найдите площадь прямоугольного треугольника, вершина прямого угла которого совпадает с C, гипотенуза EF содержит B, а вершина E одного из острых углов является серединой стороны AD квадрата [24].

Решение с динамическим чертежом и комментариями.

1. Решение задачи начнём с построения чертежа (Рис.19). В соответствии с условием задачи изображаем квадрат ABCD (учитель выполняет построения на маркерной доске, одновременно с этим демонстрирует построения на экране, используя для этого подготовленный заранее чертёж, ученики выполняют аналогичную работу за партами, у каждой пары обучающихся есть ноутбук, один из них выполняет построения в тетради, второй – в среде Живая математика). Используя встроенный инструмент «Середина», находим на стороне AD точку E – середину AD. Строим отрезок CE – катет треугольника, изображаем перпендикуляр к CE, содержащий вершину C квадрата. Строим прямую BE, находим точку F пересечения перпендикуляра и прямой BE. Скрываем обе прямые, строим отрезки CF и EF. Прямоугольный треугольник CEF готов, окрашиваем жёлтым цветом его внутреннюю область.

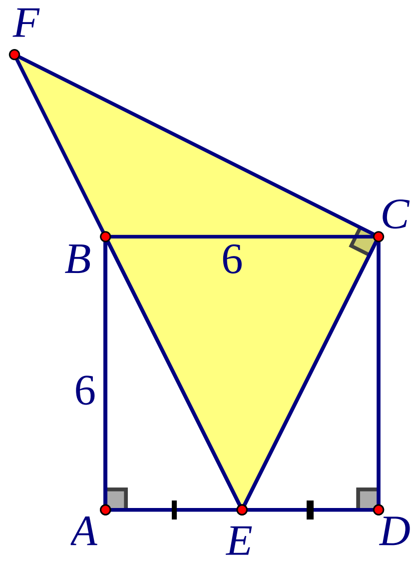
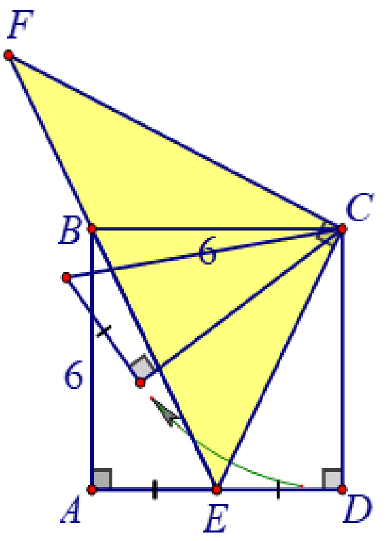


Рисунок 19 – Чертеж к задаче

2. Ясно, что стороны квадрата равны 6, площади каждого из треугольников ABE и DCE равны 9, площадь треугольника BCE, обозначим ее S_1 равна 18, т.е. $S_1 = 18$. Так как треугольник BCE является частью не только квадрата, но и жёлтого треугольника, то учитель интересуется, площадь какой части жёлтого треугольника осталось найти, чтобы решить задачу? Ответ очевиден: осталось найти площадь треугольника BCF.

3. Поскольку площадь треугольника CDE известна, то можно попытаться найти часть треугольника BCF, равную треугольнику CDE. Для этого предлагается повернуть треугольник CDE вокруг C на угол -90° (т.е. по часовой стрелке). Учитель демонстрирует в среде Живая математика этот поворот (Рис. 20, левый стоп-кадр). Интересуется у учеников какая точка куда отобразится: точка D отобразится на точку B, сторона CD на сторону CB, точка E должна отобразиться в точку прямой AB, т.к. $AB \perp BC$. С другой стороны, E должна отобразиться в точку луча CF, т.к. $CF \perp CE$. Но тогда E отобразится на точку N - пересечения AB и CF, причём BN = DE =3 (Рис. 20, правый стоп-кадр). Отсюда, площадь треугольника NBC, обозначим ее S_2, равна 9, т.е. $S_2 = 9$. Теперь для решения задачи осталось найти площадь небольшого треугольника BNF. Обозначим его площадь через S_3. Несмотря

на то, что этот треугольник небольшой, найти его площадь будет сложнее, чем площади двух предыдущих.



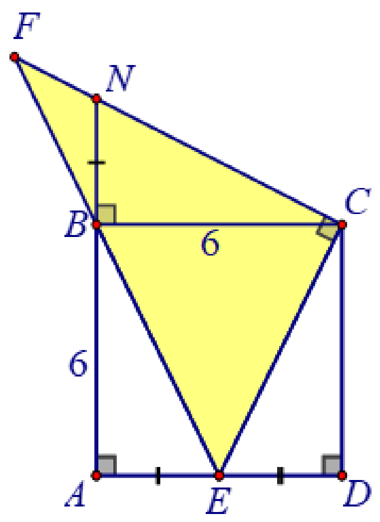


Рисунок 20 – Стоп-кадры поворота ΔCDE

4. Совершим ещё один поворот, но уже левого белого треугольника BAE. Итак, повернём теперь треугольник BAE вокруг точки B на угол 180° (Рис. 21, левый стоп-кадр). Совместно с учениками установим, что вершина A отобразится на симметричную ей относительно B точку, обозначим ее К, а точка E на точку M. Так как BК = AB = 6 и N лежит на BК, а BN=3, то N - середина BК. Причём MК = AE = 3. Отметим также, что F принадлежит BM, т.к ∠NBF=∠ABE как вертикальные углы, а ∠ABE=∠КBM в соответствии с тем, что любой поворот сохраняет величины углов.

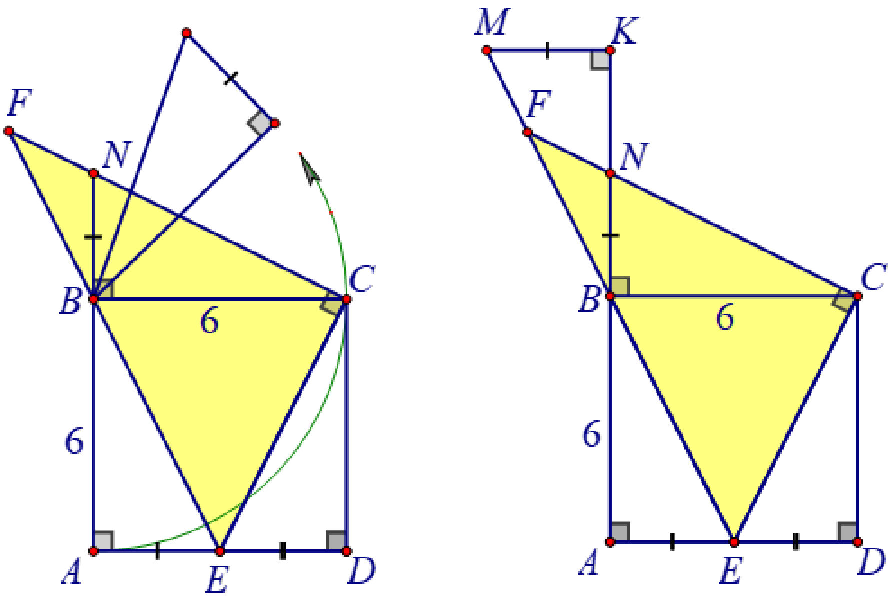


Рисунок 21 – Стоп-кадры поворота ΔBAE

5. Обозначим через L - точку пересечения прямых KM и CF. Прямоугольные треугольники LKN и CBN равны по катетам и вертикальным углам при вершине N. Но тогда LK = DC = 6 и M - середина LK, т.к. LM = LK - MK = 6 - 3 = 3 = MK. Отсюда, BM и LN - медианы и F - точка пересечения медиан треугольника KBL, площадь которого равна 36/2=18. Построим третью медиану KT. Так как медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников, то площадь S_3 треугольника BFN равна 18/6 = 3. (Рис.22)

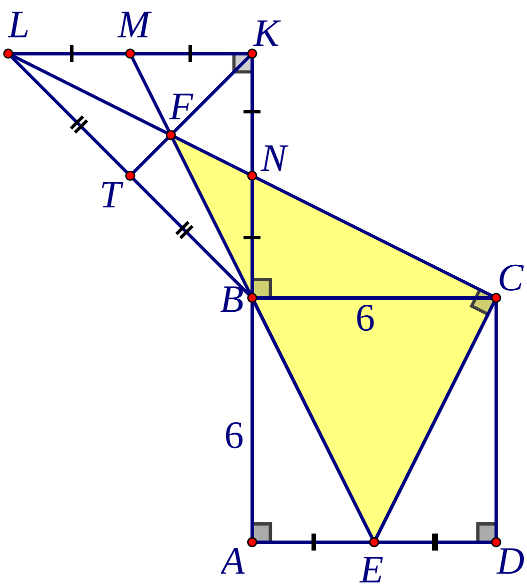


Рисунок 22 – Построение треугольника LKB

6. Итак, площадь треугольника FCE равна сумме площадей треугольников BCE, BCN и BFN, т.е. $S_1 + S_2 + S_3 = 18 + 9 + 3 = 30$.

Ответ: 30.

2.3 Обучение решению задач на применение параллельного переноса

Параллельным переносом фигуры называется перенос всех точек пространства на одно расстояние в одном направлении. Параллельный перенос определяет вектор, по которому совершается перенос в дорожном строительстве; широко используемых полимерных материалов; определенных видов промышленных отходов в удобрения, строительные материалы (Рис. 23) [15, 21, 23].

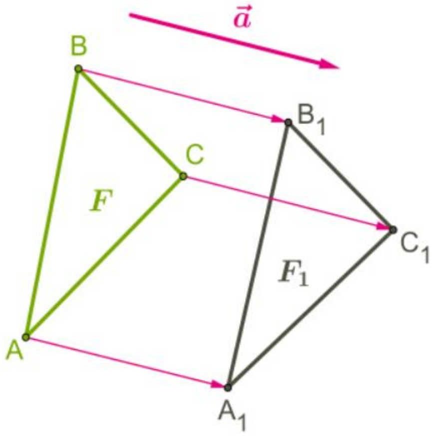


Рисунок 23 – Перенос треугольника АВС на вектор а

Параллельный перенос обладает следующими свойствами:

- Параллельный перенос является движением, сохраняющим направлением;
- Композиция параллельных переносов является параллельным переносом;
- При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние;

•При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или на себя) [26, 27].

Продемонстрируем наш подход к использованию среды Живая математика на примере решения следующей элементарной задачи № 1162 из учебника «Геометрия 7-9 класс» авторского коллектива под руководством проф. Л.С. Атанасяна по теме параллельный перенос. (Рис. 24)

З а д а ч а № 1162. Начертите отрезок АВ и вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте отрезок A_1B_1, который получается их отрезка АВ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

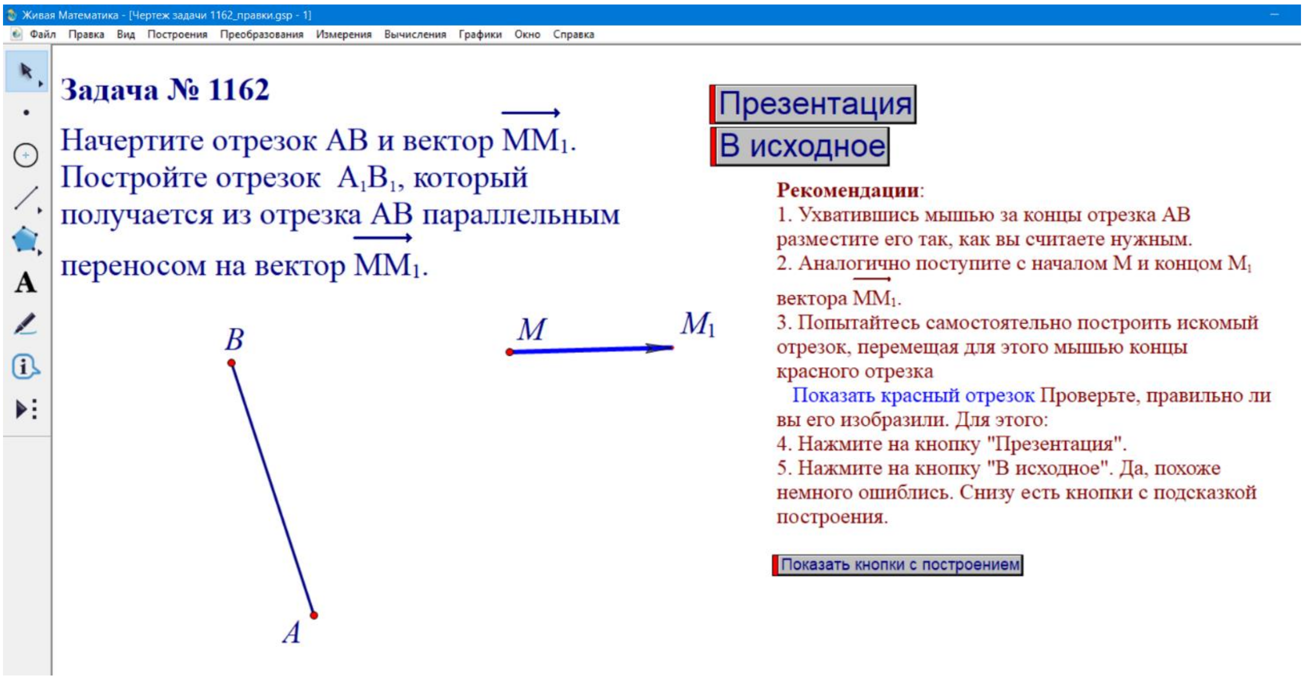


Рисунок 24 – Условия задачи № 1162

Учитель заранее готовит в среде Живая математика динамический чертёж, который нельзя построить ни в школьном учебнике, ни нарисовать мелом на доске, ни изобразить в школьной тетради. Для этого на рабочем поле среды оформляется формулировка задачи (Рис. 24), строится отрезок АВ и вектор $\overrightarrow{MM_1}$ (с помощью мыши можно менять расположение обеих фигур). Далее, подсвечиваем сначала М, затем M_1, задаём перенос на вектор

$\overrightarrow{MM_1}$, подсвечиваем точки А и В и выбираем команду меню «Преобразования» - «перенести». Такими манипуляциями мы получаем две точки A_1 и B_1, которые получились методом параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Чтобы создать эффект перемещения отрезка АВ на экране изображается вспомогательный подвижный отрезок, затем подсвечивается начало этого отрезка и точка A_1, далее подсвечивается конец отрезка и точка B_1, наконец в меню «Правка» выбирается команда «Кнопки» с опцией «Перемещение». На экране появляется кнопка «Презентация», при нажатии на которую концы подвижного отрезка совмещаются с A_1 и B_1. Аналогично создаётся кнопка «В исходное», с помощью которой подвижный отрезок мгновенно совмещается с исходным отрезком АВ, одновременно с этим подвижный отрезок и точки A_1 и B_1 исчезают (Рис. 25). Отметим, что сокрытие подвижного отрезка даёт ученику и учителю возможность менять положение как отрезка АВ, так и данного вектора, что позволяет за короткое время рассмотреть большое количество вариантов задачи 1162 с различным расположением фигур.

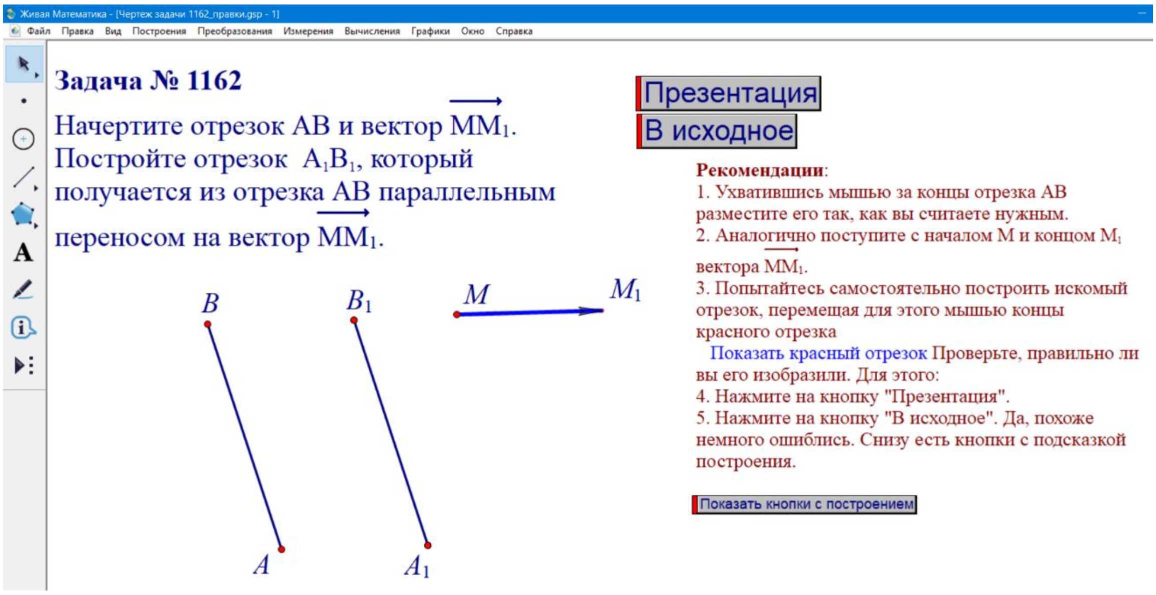


Рисунок 25 – Построение искомого отрезка A_1B_1.

Перед тем как использовать презентацию обучающемуся предлагается два способа самостоятельного построения искомого отрезка A_1B_1.

Способ №1 (использующий интуицию и откладывание вектора от точки). Предлагается изобразить самостоятельно отрезок A_1B_1, который получится из AB переносом на данный вектор. Если ученик не знает, как изобразить отрезок в среде, он может воспользоваться кнопкой «Построить красный отрезок», на экране появится отрезок A_1B_1 красного цвета, положение которого регулируется мышью. Ученик, который усвоил понятие переноса, может интуитивно найти это положение, перемещая мышью вектор $\overrightarrow{MM_1}$ и откладывая его сначала от точки A, затем от точки B, найдя тем самым достаточно точные положения концов A_1 и B_1 искомого отрезка.

Способ №2 (использующий построения циркулем и линейкой). Применяя команды меню «Построения», через точки A и B проводятся прямые a и b, параллельные данному вектору, строятся окружности c_1 и c_2, с центрами в точках A и B радиусов, равных длине данного вектора, точки пересечения окружностей c_1 и c_2 с соответствующими лучами прямыми a и b дадут абсолютно точные положения точек A_1 и B_1. (Рис. 26)

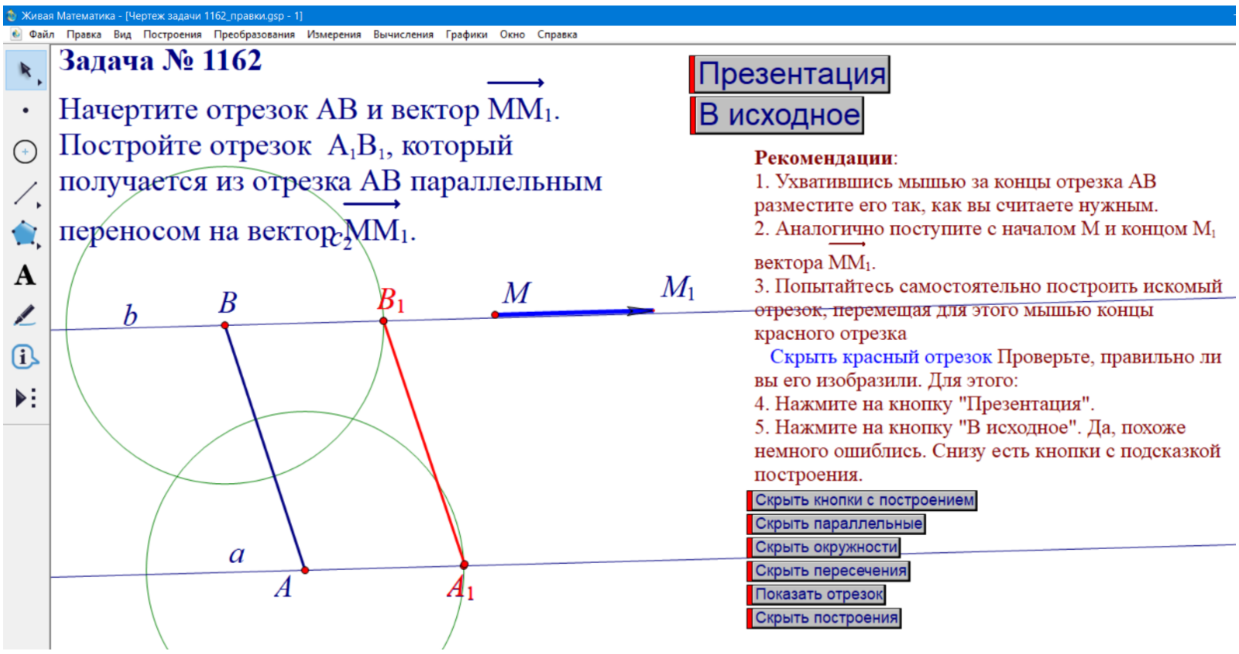


Рисунок 26 – Рекомендации и построения для успешного выполнения задания.

Во всех случаях (при решении способом 1, способом 2 или любым другим способом) обучающийся может проверить своё решение, нажав на кнопку «Презентация» и, наблюдая за перемещением отрезка АВ.

Рассмотрим еще одну задачу из этого же учебника и построим все нам данные. (Рис. 27)

З а д а ч а № 1163. Начертите треугольник АВС, вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника АВС параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$, если он: а) не параллелен ни одной из сторон треугольника; б) параллелен стороне АС.

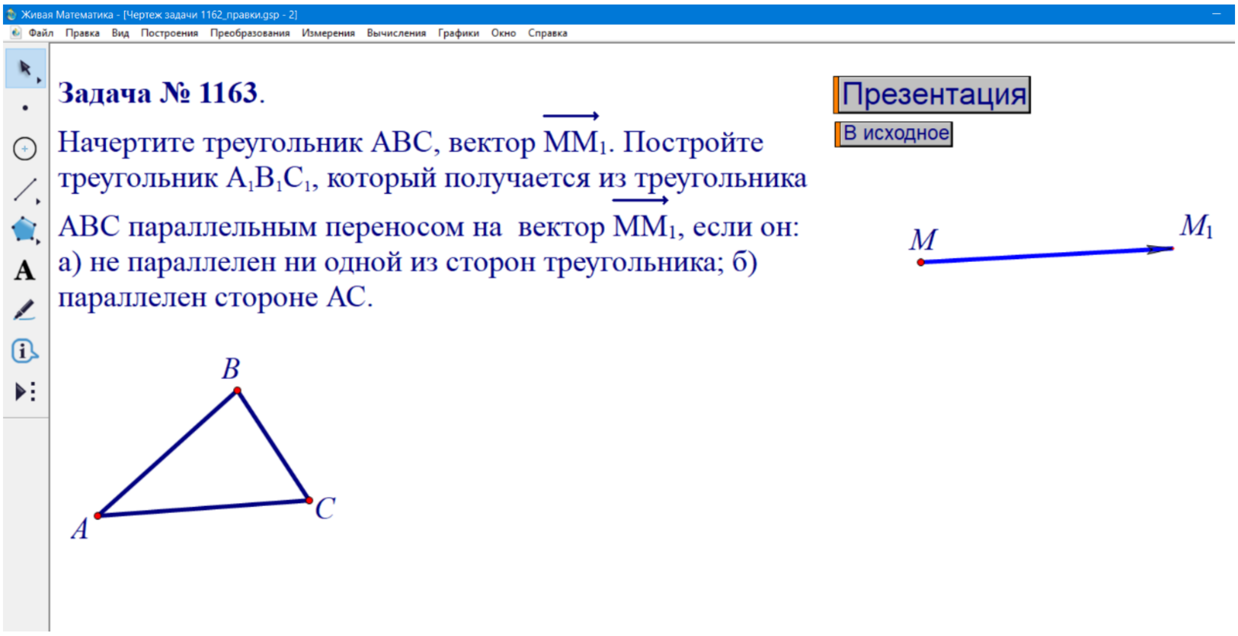


Рисунок 27 – Задача № 1163 из учебника «Геометрия 7-9» Атанасян.

Сначала выполним построения и создадим демонстрацию параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Для этого мы выбираем вершины треугольника и команду «Преобразования» - «Перенести». Таким образом мы получаем точки A_1, B_1 и C_1. Соединяем их инструментом «Отрезок», и мы видим искомый нам треугольник $A_1B_1C_1$, который получен из треугольника АВС параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$. (Рис. 28)

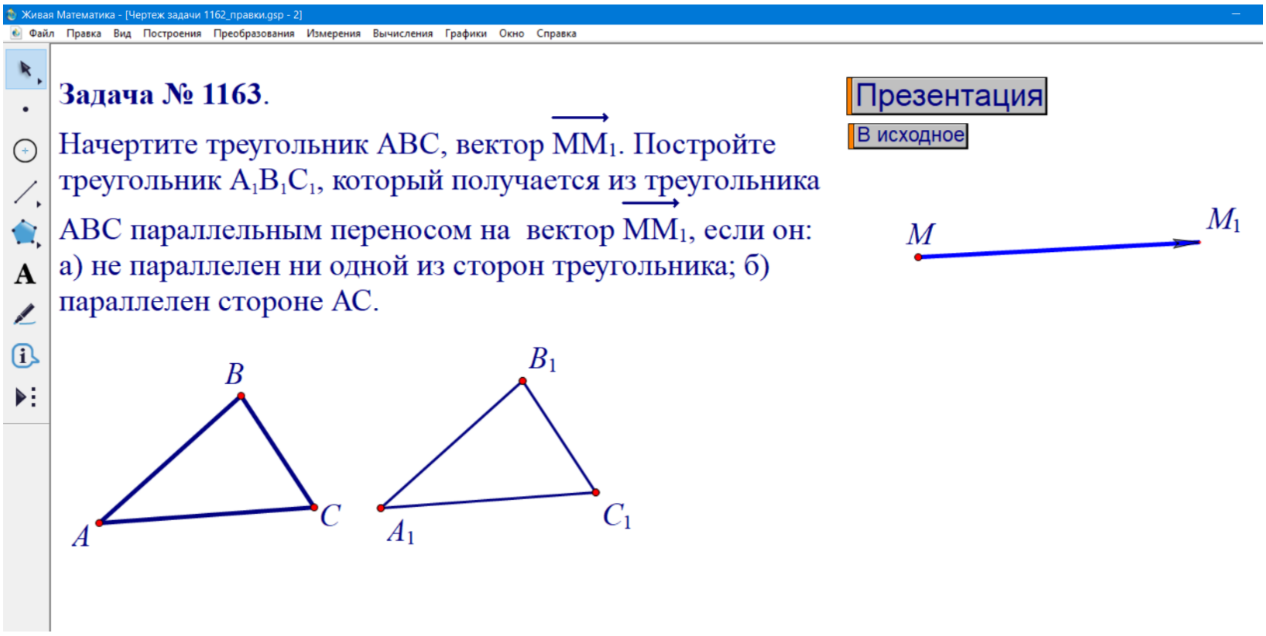


Рисунок 28 - Треугольник $A_1B_1C_1$, который получен из треугольника ABC параллельным переносом на вектор MM_1.

Также представлены рекомендации для ученика, с помощью которых он исследует параллельный перенос треугольника на вектор. (Рис.29)

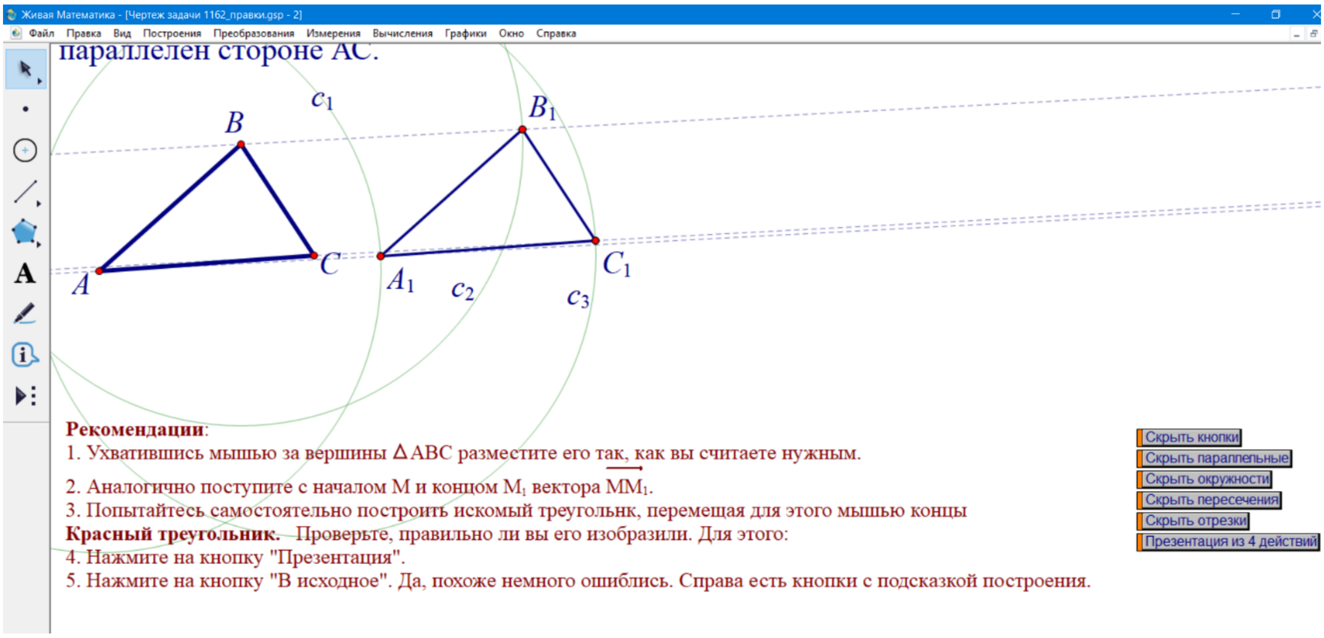


Рисунок 29 – Рекомендации для исследования параллельного переноса треугольника на вектор.

2.4 Конспект урока по реализации разработанной методики обучения решению задач методом движения, результаты опытно-экспериментальной работы.

Цель педагогического эксперимента - апробировать методику применения среды Живая математика при обучении решению задач методом движений на уроках геометрии в основной школе. Для того чтобы понять, насколько наша методика обучения является эффективной мы провели несколько уроков в 8 и 9 классах в МАОУ «СШ №21».

Продемонстрируем разработанную методику обучения решению задач методом движения, а конкретно рассмотрим фрагмент урока на тему «Осевая и центральная симметрии» в 8 классе.

План – конспект фрагмента урока геометрии в 8 классе

Тема: «Осевая и центральная симметрии»

Тип урока: «открытие» нового знания.

Цели урока: Рассмотреть понятие осевой и центральной симметрии, как свойства некоторых геометрических фигур. Научить строить симметричные точки и распознавать фигуры, обладающие осевой симметрией и центральной симметрией.

Задачи урока:

Образовательные:

1. Познакомить с понятием «симметрия», изучить виды симметрии.

2. Рассмотреть осевую и центральную симметрии как свойства некоторых геометрических фигур.

3. Научить строить симметричные точки и распознавать фигуры, обладающие осевой и центральной симметриями.

Развивающие:

1. Развивать логическое мышление, воображение, память.

2. Повысить математическую компетентность учащихся.

Воспитательные:

1.Повышение интереса к математике через использование информационных технологий.

2. Воспитание человека, умеющего ценить красоту и гармонию окружающего мира.

3. Расширение кругозора.

Оборудование: учебник «Геометрия 7-9» автор Атанасян Л.С., ПК, интерактивная доска, использование информационных технологий (интерактивная среда Живая математика) [2].

Ход урока

Мотивация изучения нового материала.

Постановка цели и задач урока

Учитель: Ребята, внимательно посмотрите на эти картинки. Как вы думаете, что в них особенного? Чем они похожи друг на друга? Попробуйте подвигать картинки и посмотрите, что меняется. – Дети исследуют зависимость движений и делают выводы. (Рис. 30, 31)

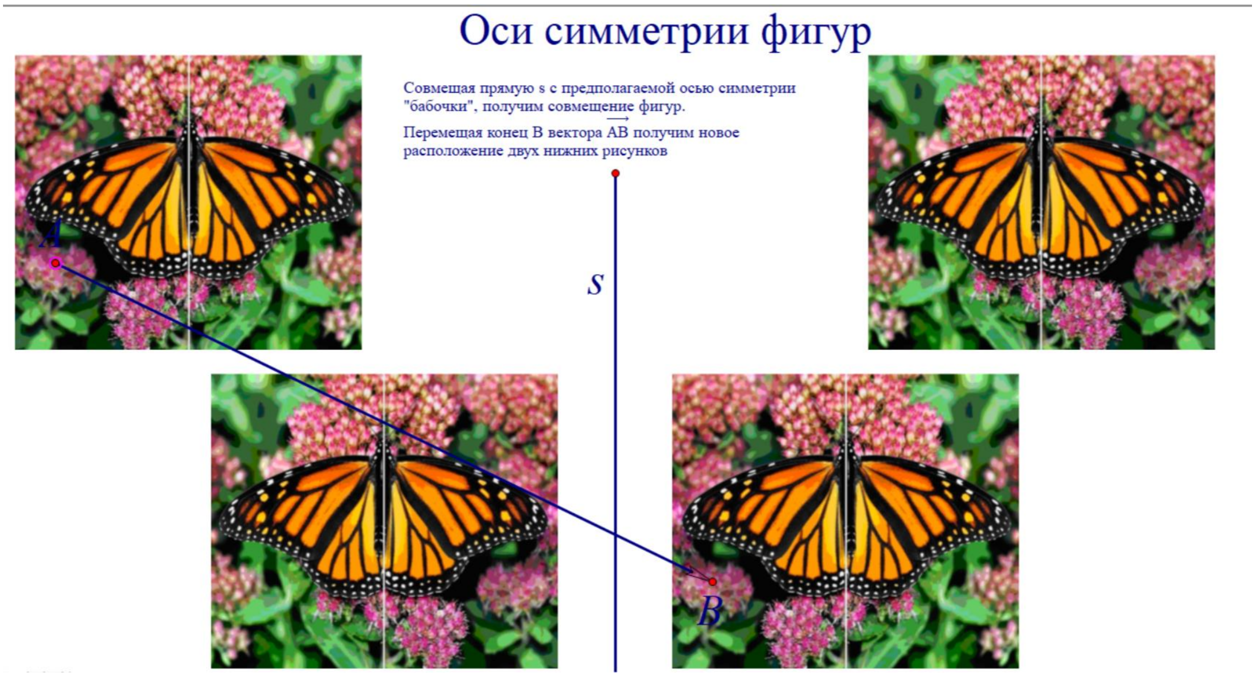


Рисунок 30 – Исследование осевой симметрии.

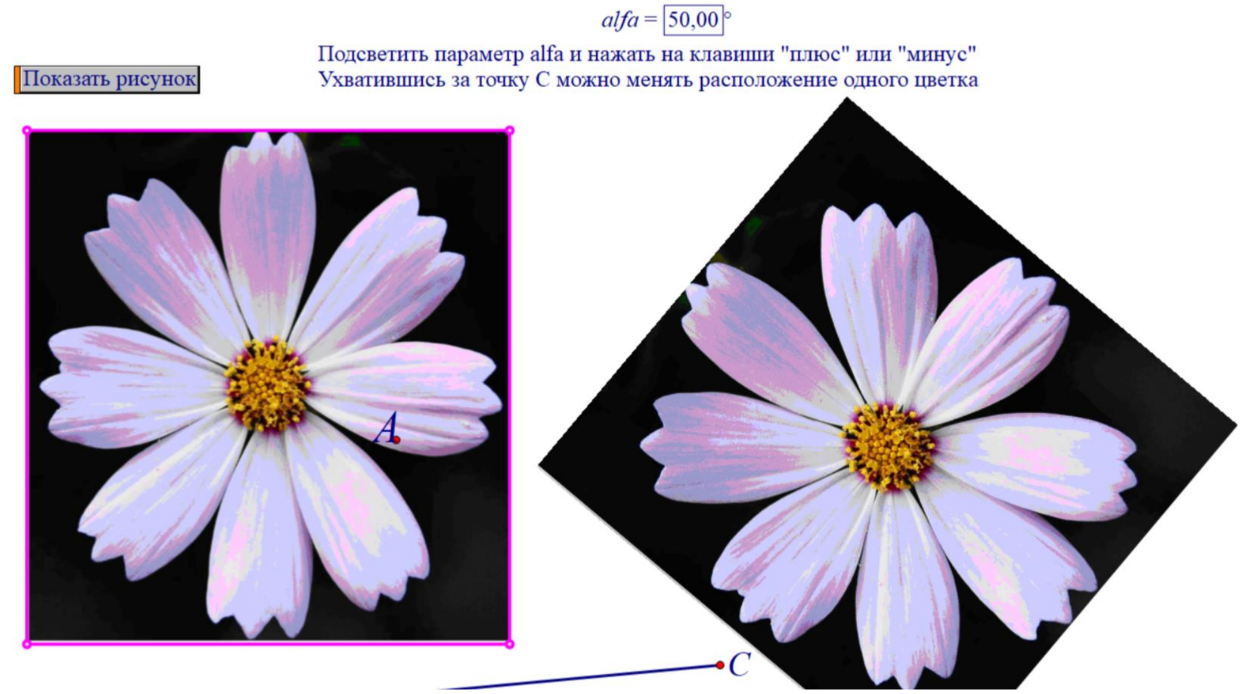


Рисунок 31 – Исследование центральной симметрии.

Учитель: хорошо, а что значит симметричные? И как вы думаете симметрия бабочки такая же как симметрия цветочка?

Ответы учащихся: Симметрия – это когда одна сторона такая же, как и другая. У бабочки и цветочка разные симметрии.

Учитель: Да, ребята, вы правильно мыслите. Давайте с вами попробуем сформулировать тему сегодняшнего урока.

Тема сегодняшнего урока «Осевая и центральная симметрии».

Целеполагание. Учитель: Какие цели мы поставим перед собой на этом уроке? (Ответы учащихся)

Учитель: Сегодня на уроке мы:

- Изучим два вида симметрии
- Научимся строить симметричные фигуры
- Ответим на вопросы: «Что общего у бабочки, автомобиля и человека, чем отличаются стрекоза и снежинка?»
- Научимся распознавать фигуры и объекты, имеющие ось симметрии и центр симметрии.

Выдающийся математик Герман Вейль высоко оценил роль симметрии в современной науке: "Симметрия, как бы широко или узко мы не понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство".

Мы живем в очень красивом и гармоничном мире. Нас окружают предметы, которые радуют глаз. Например, бабочка, снежинка, листок растения. Вы обращали на них внимание? Сегодня мы с вами прикоснемся к этому прекрасному математическому явлению – симметрии. Слово “симметрия” в переводе с греческого звучит как “гармония”, означая красоту, соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей. Издавна человек использовал симметрию в архитектуре. Древним храмам, башням средневековых замков, современным зданиям она придает гармоничность, законченность.

Симметрия многообразна в своем проявлении. К простейшим видам симметрии относятся:

а) симметрия относительно точки (центральная симметрия);

б) симметрия относительно прямой (осевая симметрия);

Сейчас нам предстоит самостоятельно вывести определение осевой симметрии и центральной симметрии.

Класс выполняет задание:

1) На компьютере открываем программу Живая математика

2) Выбираем инструмент «отрезок» и изображаем его. Назовем его вершины АВ.

3) Теперь возьмем инструмент «прямая» и выполним ее построение. Назовем ее с.

4) Курсором подсвечиваем прямую с и точку А. Нажимаем на кнопку «Построения» и далее команду «Перпендикуляр». То же самое проделываем с точкой В.

5) С помощью инструмента точка, находим пересечения перпендикуляров с прямой с. Называем их M и N.

6) Подсвечиваем курсором точку N и A, далее команда «Построения» - «Окружность по центру и точке». То же самое делаем с точками M и B.

7) Теперь обозначаем точкой пересечение окружности и перпендикуляра содержащего точку A, и то же самое для перпендикуляра, содержащего точку B. Называем эти точки пересечения A' и B' соответственно.

8) С помощью инструмента «отрезок» соединяем получившиеся точки A' и B'. (Рис. 32)

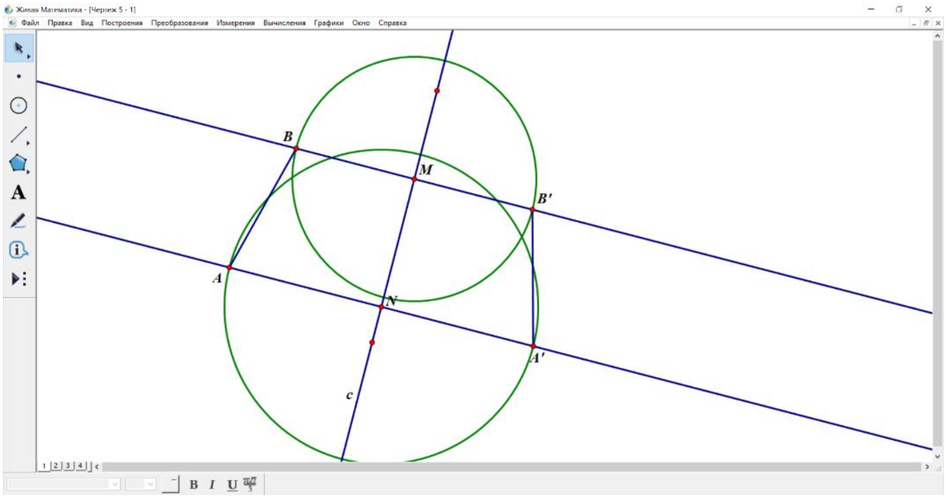


Рисунок 22 – Построение симметричного отрезка.

9) Вы можете подвигать за точки прямой и посмотреть, как меняется чертеж. Теперь давайте сформулируем определение. Определение: Две прямые AB и A'B' называются симметричными относительно прямой, если эта прямая проходит через_____________ отрезков AA' и BB' и ___________________ к ним.

Учитель: Назовите условия осевой симметрии?

Предполагаемые ответы учащихся:

1. равны расстояния от точек до прямой;
2. отрезок и прямая перпендикулярны

Учитель: Вопросы к классу

1. Как можно назвать прямую c?

2. Если точка лежит на прямой, то где искать симметричную ей точку?

3. Как построить точку симметричную данной относительно прямой?

- Приведите свои примеры из жизни симметричности относительно прямой

– У геометрических фигур может быть одна или несколько осей симметрии, а может и не быть совсем. А как вы думаете, сколько осей симметрии у прямоугольника? (Прямоугольник имеет 2 оси симметрии) (Рис.33)

– А у круга? (Круг имеет бесконечно много осей симметрии) (Рис.33)

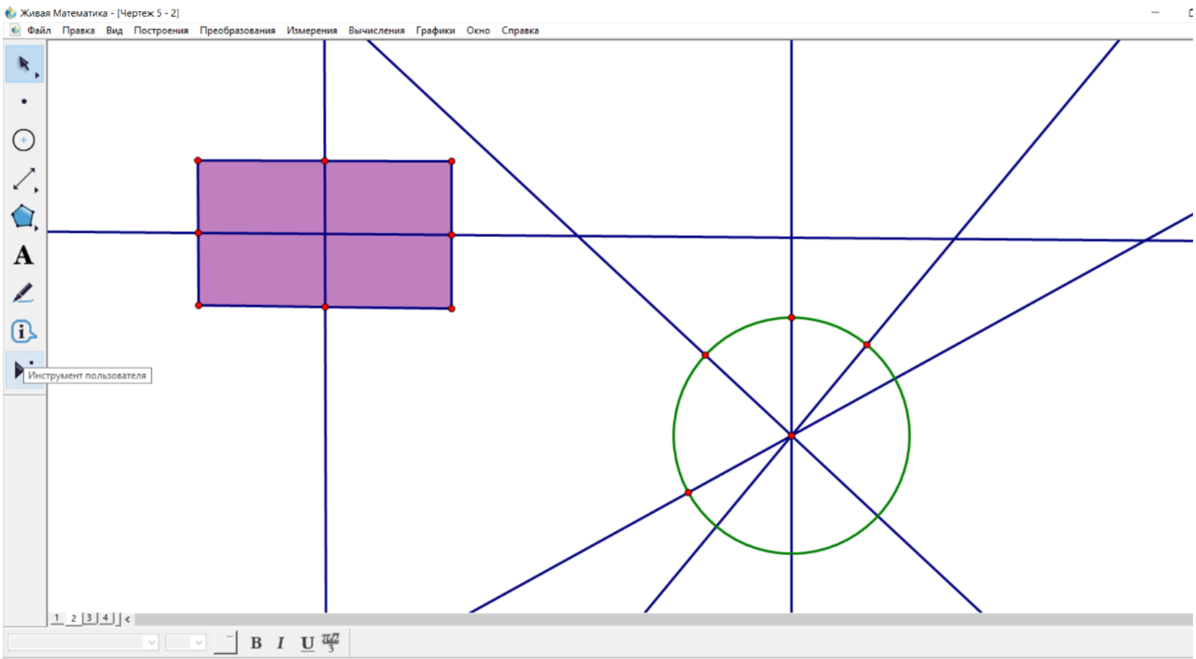


Рисунок 33 – Оси симметрии прямоугольника и круга.

– Симметричными могут быть не только точки, но и различные геометрические фигуры. Давайте построим треугольник, симметричный треугольнику, который изобразим в Живой математике. Сначала обсудим, как это сделать.

Для того чтобы построить треугольник симметричный данному, нужно построить точки симметричные вершинам этого треугольника, а затем их соединить. (Рис. 34)

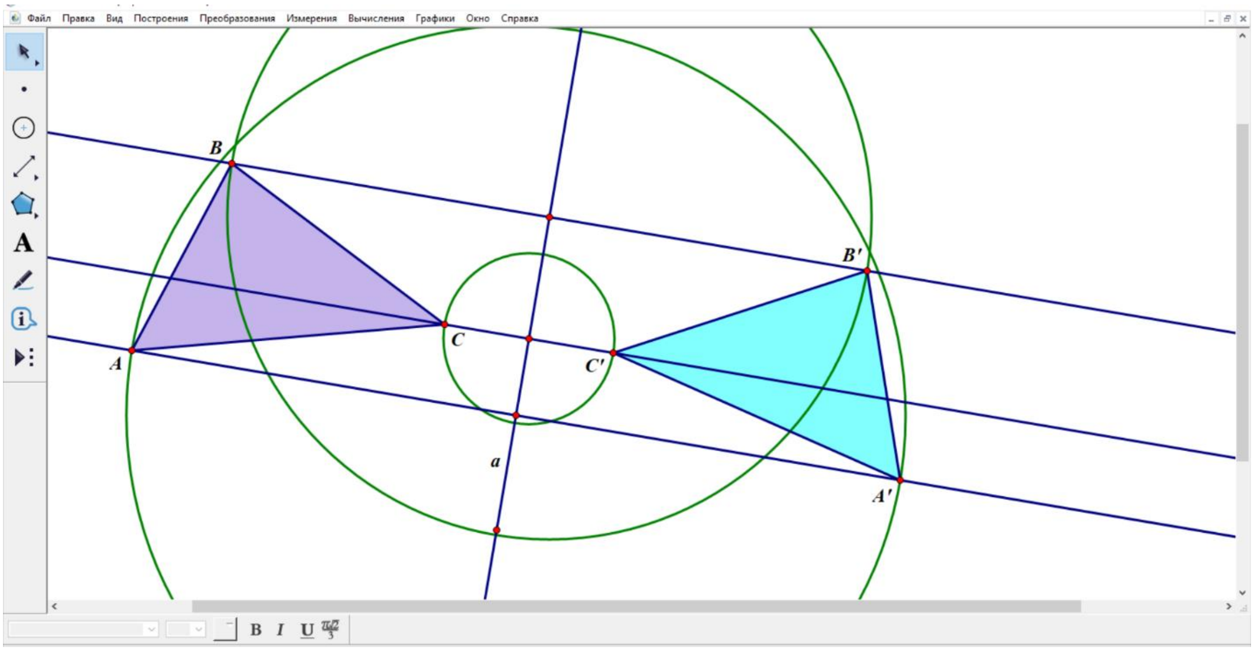


Рисунок 34 – Построение симметричных треугольников.

Оказывается, можно построить симметричные точки не только относительно прямой, но и относительно какой-либо точки.

Центральная симметрия – это симметрия относительно точки.

Возьмём произвольную точку А и точку О, относительно которой будем строить симметричную точку. Соединяем точки А и О отрезком, затем от точки О откладываем отрезок OA_1=OA. Таким образом, О – середина отрезка AA_1. Точки А и A_1 называются симметричными относительно точки О. (Рис. 35)

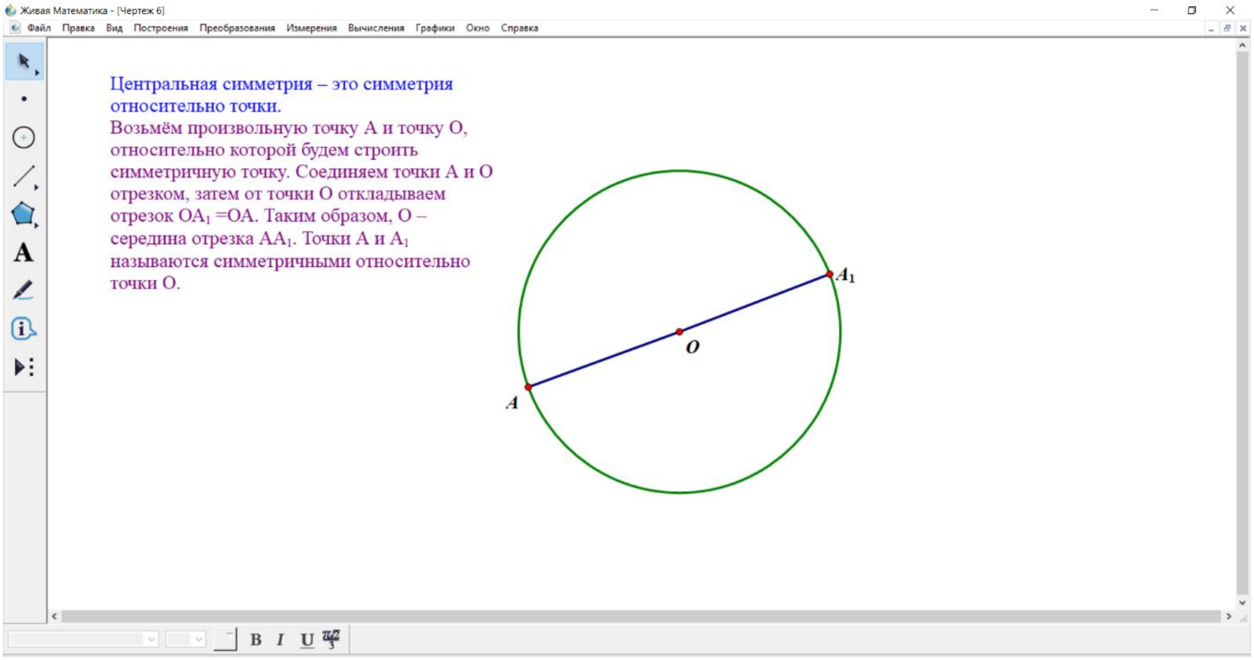


Рисунок 35 – Пример построения центральной симметрии.

Попробуйте сформулировать определение симметричных точек относительно точки.

А теперь построим треугольник A'B'C' симметричный треугольнику ABC относительно точки О.

1) Выбираем инструмент «Многоугольник» и изображаем треугольник. Назовем его вершины ABC.

3) Теперь возьмем инструмент «точка» и выполним ее построение. Назовем ее О.

4) Выбираем инструмент «прямая» и проводим через вершину треугольника и точкой О. То же самое проделываем со всеми вершинами.

6) Подсвечиваем курсором точку О и А, далее команда «Построения» - «Окружность по центру и точке». То же самое делаем с точками В и С.

7) Теперь обозначаем точкой пересечение окружности и прямой содержащую точку А, и то же самое для прямых, содержащих точки В и С. Называем эти точки пересечения А' и В', С' соответственно.

8) С помощью инструмента «отрезок» соединяем получившиеся точки А' и В', С'. Получаем искомый треугольник, который симметричен треугольнику АВС относительно точке О. (Рис. 36)

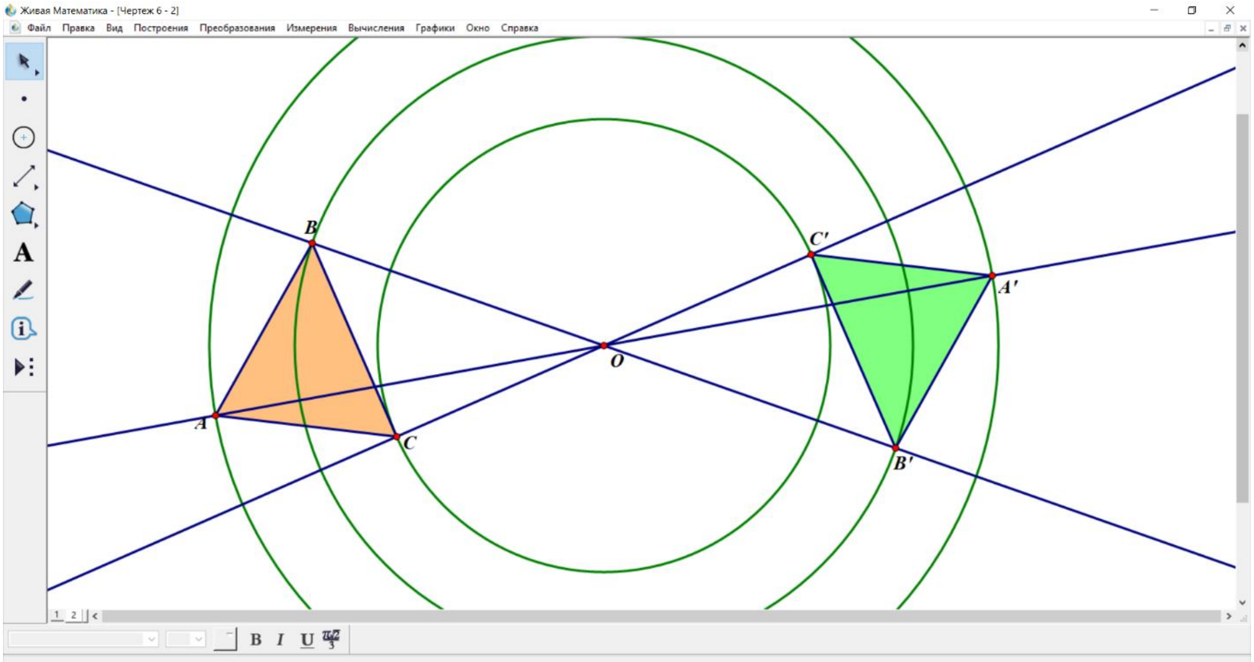


Рисунок 36 – Центральная симметрия треугольника.

Попробуйте сформулировать определение фигуры, симметричной относительно точки. В этом случае говорят, что фигуры обладают центральной симметрией.

Приведите примеры фигур, обладающие центральной симметрией. - Параллелограмм, окружность.

Закрепление изученного материала

1) Построить точку А', симметричную А относительно прямой b.

2) Построить отрезок А'В', симметричный отрезку АВ относительно центра (точки О).

Подводя итоги проведенных занятий хочется отметить, что большинство учащихся были вовлечены в учебный процесс, для них это было необычным подходом к изучению темы по геометрии. До этого учащиеся не встречались с программой Живая математика, но это не вызвало больших затруднений и под нашим руководством ученики с легкостью выполняли предложенные задания.

После каждого занятия мы проводили с обучающимися рефлексию в виде анкетирования, где учащиеся могли выразить свою удовлетворенность работой с интерактивной средой Живая математика. Результаты анкетирования представлены на диаграмме. (Рис.37)

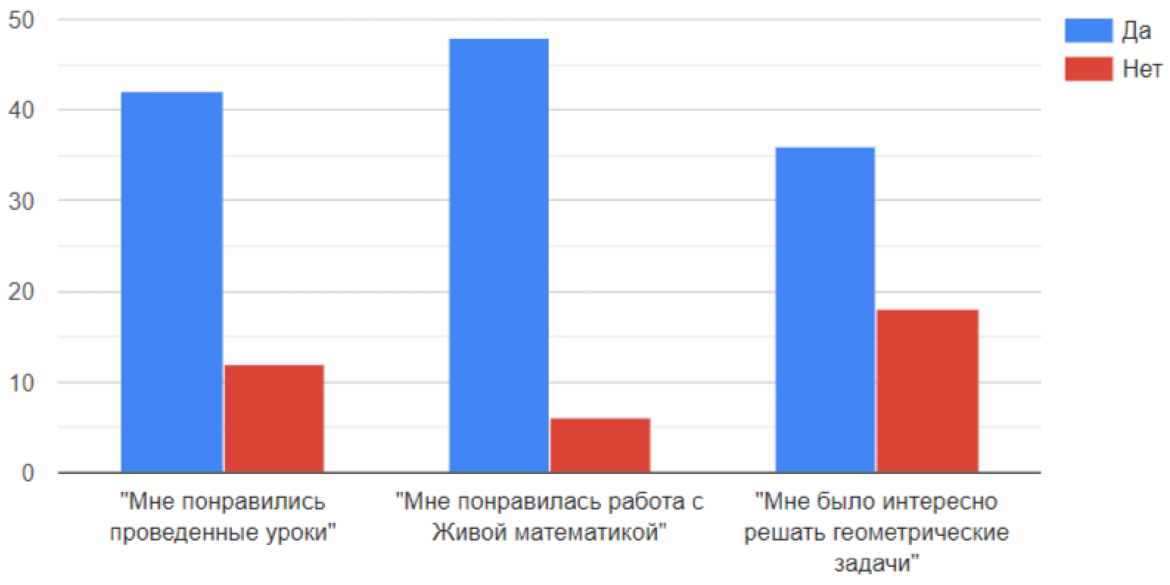


Рисунок 37 – Результаты анкетирования 8А и 8Б классов.

Цель педагогического эксперимента была достигнута. Результаты показали, что работа с Живой математикой повышает уровень заинтересованности к изучению геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сейчас сложно представить современное обучение без использования технологий. Уже придумано огромное количество программ для комфортного и наглядного обучения математики. Наибольшая наглядность требуется в курсе геометрии, а особенно в разделе «Движение».

Изучение возможностей среды Живая математика для реализации экспериментального, исследовательского подхода к обучению геометрии в основной школе представляется актуальным направление м в теории и методике обучения математике, востребованным в практике работы учителем.

Мы представили авторский подход к решению задач на применение движения с использованием среды Живая математика.

Хочется отметить, что развитие средств обучения математики дает лишь возможность решения некоторых проблем усваивания тем, которые только при определенных условиях превращаются в реальность.

Современный ученик должен уметь применять полученные знания на практике и понимать по какому принципу действуют те или иные математические операции или свойства.

Методика обучения геометрии приобретает новые виды и формы. Освоение среды Живая математика откроет новые методы преподавания материала по геометрии для обучающихся, поскольку усвоение программы станет более успешным.

Подводя итоги, отметим, что все сформулированные во введении задачи были решены, цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Андреасян Г.М., Майкова Е.Н., Захарова Ю.О. и др. Информационно коммуникационные технологии в образовании // Форум молодых ученых. 2020. №10 (50). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/informatsionno-kommunikatsionnye tehnologii-v-obrazovanii-1

2 Атанасян, Л.С. Геометрия 7-9 классы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Поздняк, И.И. Юдина. – Москва: Издательство «Просвещение», 2023. – с. 313-331. – Текст: непосредственный.

3 Васильев, А.А. Стереометрия / А.А. Васильев. – Текст: электронный // mathtask.ru: сайт. – 2019. URL: http://www.mathtask.ru/0063-stereometry.php/.

4 Гатауллин А.М Объектная визуализация в программе «Живая математика» // Материалы Международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании и науке - ИТОН 2012» , Казань,2012 С-47

5 Гатауллина С.Р. Решение стереометрических и параметрических задач с помощью программы «Живая математика» / С.Р. Гатауллина / Nsportal.ru. 18.02.2023 г. Режим доступа: https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2023/02/18/reshenie-stereometricheskih-i-parametricheskih-zadach-s-pomoshchyu.

6 Евкина, А. Планиметрия - формулы, определение и вычисление с примерами решения/ А. Евкина. – Текст: электронный // www.evkova.org: сайт. – 2018. URL: https://www.evkova.org/planimetriya/.

7 Живая математика. Сборник методических материалов. — М.: Институт Новых Технологий. — 176 с.

8 Майер В.Р. Применение среды Живая математика при обучении геометрическим преобразованиям студентов – будущих учителей математики / В.Р.Майер, А.А. Ворошилова // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и

общество: история и перспективы развития». Красноярск, 14-15 ноября 2018 г., стр. 36-43. Режим доступа: http://elib.kspu.ru/document/32581.

9 Майер В.Р. Системы динамической геометрии как средство обучения геометрическим преобразованиям будущих учителей математики /Т.В. Апакина, А.А. Ворошилова/ Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2016, №4 (38), с. 60-64.

10 Медведева О.А. Возможности программы «Живая математика» в обучении математике / О.А. Медведева // Журнал «1 сентября». 28 января 2024 г. Режим доступа: https://1-sept.ru/component/djclassifieds/?view=item&cid=4:publ-ssh-bf&id=2438:%D0%B2%D0%BE%D0%B7%D0%BC%D0%BE%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D1%8B- .

11 Попов С. В. Информационная система «Живая математика» как среда развития математических компетенций. / Вестник МГПУ. Серия «Современный колледж». 2022. № 2 (2). С. 28-37.

12 Рамазанова К.Ш. Методы решения конструктивных задач на плоскости/ К.Ш. Рамазанова, Н.В. Тимербаева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 70 с. Режим доступа: https://kpfu.ru/docs/F989984310/metodichka_13.pdf .

13 Семчанков В.А. Использование компьютерных технологий в школьном курсе геометрии / В.А. Семчанков, В.Р. Майер // Тезисы докладов XVII семинара преподавателей математики педвузов. — стр. 153-154. Режим доступа: https://www.mathedu.ru/text/materialy_17_seminara_prepodavateley_matematiki_1998/p153/ .

14 Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст] / Министерство образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897. – 61 с.

15 Фоксфорд: сайт. – 2009-2024. – URL: https://foxford.ru/wiki/matematika/parallelnyy-perenos-na-ploskosti?utm_referrer=https%3A%2F%2Fyandex.ru%2F . – Текст электронный.

16 Фунтиков, Р.А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» / Р. А. Фунтиков. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2018. — № 33 (219). — с. 8-11. — URL: https://moluch.ru/archive/219/52350/.

17 Юнциклопедия, Геометрические преобразования / Юнциклопедия. – Текст: электронный // yunc.org: сайт. – 2015. URL: https://yunc.org/Геометрические преобразования/.

18 Ястребов А. В. Методика преподавания математики: теоремы и справочные материалы: учеб. пособие для вузов. М.: Юрайт, 2020. 199 с.

19 Infourok: сайт. – 2023. - URL: https://infourok.ru/centralnaya-i-osevaya-simmetriya-4502022.html - Текст: электронный.

20 int-edu Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория/ int-edu: сайт. – 2017. - URL: https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0. - Текст: электронный.

21 Interneturok: сайт. – 2009-2024. URL: https://interneturok.ru/lesson/geometry/11-klass/effektivnye-kursy/dvizhenie-i-podobie-v-prostranstve-chast-2-parallelnyy-perenos . Текст электронный.

22 Nsportal.ru: сайт. – 2023. - URL: https://nsportal.ru/shkola/matematika/library/2023/07/02/5-6-klass-modul-prakticheskaya-geometriya-tema-osevaya - Текст: электронный.

23 Pedsovet.su: сайт. - 2024. – URL: https://pedsovet.su/load/34-1-0-59114 - Текст: электронный.

24 Problems.ru: сайт. – 2004-2024. – URL: https://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=471.

25 Skysmart: сайт. - 2020. – URL: https://skysmart.ru/articles/mathematic/osevaya-i-centralnaya-simmetriya - Текст: электронный.

26 Tutoronline: сайт. – 2010-2023. - URL: https://wika.tutoronline.ru/geometriya/class/9/parallelnyj-perenos-v-geometrii . - Текст: электронный.

27 Work5: сайт. – 2024. – URL: https://krasnoyarsk.work5.ru/spravochnik/matematika/primenenie_parallelnogo_perenosa. – Текст электронный.

28 Yaklass: сайт. – 2023. - URL: https://www.yaklass.ru/p/geometria/9-klass/dvizhenie-10434/parallelnyi-perenos-i-povorot-9251/re-35537b4b-fe94-48de-8388-56489b9264e2/. - Текст: электронный.

29 Zabir.ru: сайт. – 2024. - URL: https://zabir.ru/zadachi/na/osevuyu/simmetriyu/ - Текст: электронный.

30 Zabir.ru: сайт. – 2024. - URL: https://zabir.ru/sreda/jivaya/matematika/ - Текст: электронный.