

# МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

## Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

Институт математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

УТВЕРЖДЕНО  
на заседании кафедры  
протокол № 9  
от 8 мая 2024 г.

Зав. кафедрой



М.Б. Шашкина

ОДОБРЕНО  
на заседании  
научно-  
методического  
совета ИМФИ  
протокол № 7  
от 15 мая 2024г.  
Председатель




Е.А. Аешина

### ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине  
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Для профилей по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование,  
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)  
реализуемых на основе единых подходов к структуре и содержанию  
«Ядра высшего педагогического образования»  
Квалификация: бакалавр

Составитель:



Багачук А.В., доцент кафедры  
математики и МОМ

## **1. Назначение фонда оценочных средств.**

1.1. **Целью** создания ФОС дисциплины «Дифференциальные уравнения» является установление соответствия учебных достижений запланированным результатам обучения и требованиям основной профессиональной образовательной программы, рабочей программы дисциплины.

1.2. ФОС по дисциплине «Дифференциальные уравнения» **задачи:**

- оценка уровня сформированности компетенций, характеризующих способность выпускника к выполнению видов профессиональной деятельности по квалификации бакалавр, освоенных в процессе изучения данной дисциплины.

1.3. **ФОС разработан на основании нормативных документов:**

- федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование;

- основной профессиональной образовательной программы высшего образования;

- Положения о формировании фонда оценочных средств для текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре в федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева и его филиалах.

**2. Перечень компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины:**

- способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач (ПК-1).

**3.2.2. Фонд оценочных средств (контрольно-измерительные материалы)**

- 1.0. Примерный вариант теста (входной контроль).
- 1.1. Вопросы к коллоквиуму.
- 1.2. Контрольная работа №1.
- 1.3. Контрольная работа №2.
- 1.4. Самостоятельная работа.
- 1.5. Вопросы к зачету.

### Вопросы к коллоквиуму

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Проверьте, что линейное дифференциальное уравнение I порядка удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
3. Что называется интегральной кривой?

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Являются ли приведенные ниже функции однородными? Если да, то укажите степень однородности:  $f_1 = \frac{4x^2 + y^2}{-2y + x}$ ;  $f_2 = \frac{(\sqrt{xy} + 2y)^3}{x^2 + y^2}$ ;  $f_3 = \ln \frac{2x + y}{3x + 5y}$ ;  
 $f_4 = \ln \frac{x}{y} + 4x$ ;  $f_5 = x \ln \frac{2x}{y} - y$ .

3. Как задаются начальные условия для дифференциального уравнения первого порядка?

1. Однородные уравнения.
2. Можно ли сказать, что через каждую точку плоскости проходит по одной интегральной кривой уравнения  $\frac{dy}{dx} = ay$ ?

3. Какие линейные дифференциальные уравнения называются однородными?

1. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.
2. Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными  
 а)  $y' = \frac{y}{x} - x^3 y^4$ ; б)  $y^2 dx + x^2 dy = 0$ ; в)  $a(x dy + 2y dx) = x y dy$ ?

3. Какая функция называется однородной степени  $k$ ?

1. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какие из уравнений являются линейными а)  $(x + y) y' + x - y = 0$ ; б)  $x y' - y = x^2 \cos x$ ; в)  $y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$ ; г)  $x y' + y - e^x = 0$ ; д)  $x y' + 2y - x y^2 = 0$ ?

3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

1. Теорема о замкнутом подмножестве полного метрического пространства.
2. Какие из перечисленных функций являются однородными, а какие нет  
 $f_1 = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{y - x}$ ;  $f_2 = x^3 + 5x^2 y - y^3$ ;  $f_3 = 2x^2 + y^2 - 3x + 5$ ;  $f_4 = \frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}$ ;  
 $f_5 = \frac{x^2 - y^2}{5x}$ ?

3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?

- Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения I порядка, ее геометрический смысл.
- Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными  
а)  $x^2 y' + y^2 = xy y'$ ; б)  $(a^2 - x^2)dy + xy dx = 0$ ; в)  $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ ?
- Какое дифференциальное уравнение называется однородным?  
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.  
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:  
а)  $y' + \frac{1 - y^2}{1 - x^2} = 0$ ; б)  $(3xy^2 + 2x^3)dx + y^3 dy = 0$ ; в)  $y' = x^2 + y$ ?
- Какая подстановка используется для решения однородного дифференциального уравнения?  
1. Уравнения с разделяющимися переменными.  
2. Какие из уравнений являются линейными а)  $(x + y)y' + x - y = 0$ ; б)  $xy' + y \sin x = x^3 - 1$ ; в)  $y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$ ?
- В чем состоит условие Липшица для функции  $f(x, y)$  по  $y$ ?  
1. Однородные уравнения.  
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:  
а)  $y' \cos x + y \sin x = 1$ ; б)  $(y^2 - x^2)dx + 2xy dy = 0$ ; в)  $(x - y + 1)y' = x + y + 1$ ?
- Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  пересекаться?  
1. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.  
2. Какие из уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными  
а)  $x^2 y' + y^2 = xy y'$ ; б)  $(a^2 - x^2)dy + xy dx = 0$ ; в)  $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ ?
- Какие условия являются достаточными для единственности решения дифференциального уравнения?  
1. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений первого порядка.  
2. Какие из уравнений являются линейными а)  $xy' + y - e^x = 0$ ; б)  $xy' + 2y - xy^2 = 0$ ; в)  $x^2 y' - y = x^2 \cos x$ ?
- Справедливо ли утверждение: если функция  $f(x, y)$  имеет ограниченную частную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , то она удовлетворяет условию Липшица по переменной  $y$ ?  
1. Теорема о замкнутом подмножестве полного метрического пространства.  
2. Определите тип, к которому принадлежат следующие уравнения:  
а)  $(a^2 - x^2)dy + xy dx = 0$ ; б)  $y' = \frac{y}{x} - x^3$ ; в)  $y' = x^2 + 2x - y$ ?
- Является ли решением линейного однородного уравнения функция  $y = 0$ ?  
Может ли это решение быть получено из общего?  
1. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения I порядка.

2. Являются ли приведенные ниже функции однородными? Если да, то укажите степень однородности:  $f_1 = \frac{x^3 + y^3}{5x - y + 3x}$ ;  $f_2 = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ;  $f_3 = \ln \frac{2x + y}{3x + 5y}$ .
3. В чем состоит метод вариации постоянных?

### Контрольная работа № 1

#### *Вариант № 1*

1. Решите уравнение  $(x^2 + xy + y^2) dx = x^2 dy$ .
2. Найти кривую, проходящую через точку  $A(3; 2)$  и обладающую тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.
3. Найдите частное решение уравнения  $y' - 3x^2 y = x^5 + x^2$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .
4. Решите уравнение  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ .
5. Решите уравнение  $y''' = \frac{2}{x^3}$ .

#### *Вариант № 2*

1. Решите уравнение  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ .
2. Найти кривую, проходящую через точку  $A(2; 4)$ , зная, что абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью  $Ox$  равна удвоенной абсциссе точки касания.
3. Проинтегрируйте уравнение  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ .
4. Решите уравнение  $xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}$ .
5. Решите уравнение  $y'' + 2xy' = 0$ .

#### *Вариант № 3*

1. Решите уравнение  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ .
2. Найти кривую, проходящую через точку  $A(1; 2)$ , для которой абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью  $Ox$  равна  $3 \frac{2}{3}$  абсциссы точки касания.
3. Проинтегрируйте уравнение  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ .
4. Решите уравнение  $x dy - y dx = y dy$ .
5. Решите уравнение  $y'' + 2y = 0$ .

#### *Вариант № 4*

1. Найдите частное решение уравнения  $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 2$ .
2. Найти кривые, у которых длина поднормали постоянна и равна  $p$ .
3. Проинтегрируйте уравнение  $xy' + y - e^x = 0$ .
4. Решите уравнение  $y' + 2y = y^2 e^x$ .
5. Решите уравнение  $y'' = \frac{2}{x^5}$ .

### **Контрольная работа №2**

#### *Вариант № 1*

1. Найдите частное решение уравнения  $y'' - 4y' + 3y = 2x^2 e^x$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ .
2. Решите уравнение  $y'' - 2y' + y = 4e^x$ .
3. Решите уравнение  $y'' + y = 6\sin 2x$ .

#### *Вариант № 2*

1. Найдите частное решение уравнения  $y'' + 4y = 4e^{2x}$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = y'(0) = 0$ .
2. Решите уравнение  $y'' - y' + y = -13 \sin 2x$ .
3. Решите уравнение  $y'' - y = x^2 - x + 1$ .

### **Самостоятельная работа**

#### *Вариант № 1*

Определите тип следующих уравнений и решите их:

1.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
2.  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
3.  $y \ln y - xy' = 0$

#### *Вариант № 2*

Определите тип следующих уравнений и решите их:

1.  $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$

$$2. y' = 9y^2 - 4$$

$$3. y' - 3x^2y = x^5 + x^2$$

### **ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ**

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
3. Уравнения с разделяющимися переменными. Примеры.
4. Однородные дифференциальные уравнения. Примеры.
5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Примеры..
6. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений 1-го порядка. Поле направлений. Изоклины.
7. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
8. Метод вариации постоянной для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 1 порядка.
9. Дифференциальные уравнения Бернулли. Примеры.
10. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.
11. Теорема о линейной комбинации частных решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
12. Понятия определителя Вронского. Теорема об определителе Вронского частных решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
13. Линейно зависимые функции. Теорема об определителе Вронского линейно зависимых функций.
14. Линейно независимые функции, определитель Вронского линейно независимых функций,
15. Линейно независимые функции. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка.
16. Метод вариации постоянных для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка.

17. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка.

18. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами: определение, методы их решения.

19. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами вида  $(x)$ .

20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами  $(x) sbx$

$Q_m(x)\sin bx$ .