МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования

«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

Домрачева Виктория Владимировна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА»

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
И.о. заведующего кафедрой
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
26.05.2023
(дата, подпись)

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.И. Ганжа

Дата защиты
28.06.2023г.

Обучающийся
Домрачева В.В.

Оценка
Прописью

Красноярск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном обществе математическая грамотность является одним из важнейших компонентов общей культуры личности. Она позволяет человеку ориентироваться в современном мире, анализировать и обрабатывать информацию, принимать рациональные решения. Формирование математической грамотности становится особенно актуальным в условиях быстрого развития науки и технологий, когда все большее число профессий требует от людей высоких математических компетенций.

Однако, несмотря на значимость математической грамотности, ее уровень среди школьников не всегда достаточен для полноценной жизни и обучения в высшей школе. В особенности, эту проблему можно наблюдать в 10-11 классах, когда программа математики становится более сложной и абстрактной, а отсутствие необходимых знаний и умений может привести к неудовлетворительным результатам на ЕГЭ, а также к трудностям при поступлении в ВУЗы.

Понятие математической грамотности, введенное в отечественную дидактику из международного исследования PISA, стало предметом широкой общественной дискуссии о качестве российского образования и приоритетах в содержании математического образования. Низкие результаты наших школьников по сравнению с зарубежными сверстниками могут быть связаны с низким уровнем мотивации к изучению математики и, как следствие, недостаточным развитием математической грамотности.

Существуют работы Е.С. Квитко, К.А. Краснянской, Л.О. Рословой и других авторов, где описываются основы формирования и диагностики математической грамотности обучающихся. Однако, на практике учителям математики массовой школы не всегда доступны конкретные методические разработки по формированию и развитию математической грамотности учеников. В то же время, достижение данного образовательного результата становится все более актуальной целью в обучении математике. Поэтому, разработка методик и стратегий формирования математической грамотности обучающихся является важной задачей для теории и методики обучения математике.

Данная работа имеет важное значение для педагогической практики и научного исследования в области математического образования.

В целом, данное исследование является важным шагом в развитии методов обучения математике, и может способствовать повышению уровня математической грамотности учащихся в России и других странах.

Математическая грамотность является одним из ключевых понятий в обучении математике, так как это способность человека математически мыслить, формулировать, использовать и интерпретировать математику для решение различных задач в разнообразных практических контекстах, ведь она играет важную роль в формировании компетентных, критически мыслящих граждан. Она дает возможность человеку понимать, использовать и анализировать математические знания и методы в реальной жизни.

Математическая грамотность включает в себя не только умение решать математические задачи, но и понимание того, как применять математику в различных ситуациях. Она также включает в себя умение читать и понимать математические тексты, формулировать гипотезы и аргументировать свои выводы. Математическая грамотность имеет огромное значение в современном обществе, где математические знания и умения используются во многих областях, таких как экономика, технологии, наука, медицина и другие. Она помогает людям принимать обоснованные решения, понимать сложные явления и процессы, а также эффективно взаимодействовать с другими людьми.

В контексте изучения темы «Практические приложения интеграла» математическая грамотность играет особенно важную роль. Интегралы широко используются в различных областях, таких как физика, экономика, инженерия, статистика и другие. Они позволяют решать разнообразные задачи, связанные с определением площадей, объемов, масс, сил, энергии, длины пути. Поэтому важно, чтобы обучающиеся 10-11 классов имели достаточный уровень математической грамотности для того, чтобы понимать истинный смысл интегралов и уметь применять их в решении различных задач. Для этого необходимо развивать не только навыки решения конкретных задач, но и понимание того, как интегралы связаны с реальными явлениями и процессами. Таким образом, формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» может быть достигнуто через использование различных методов обучения, таких как интерактивные лекции, практические занятия и задачи, обсуждение примеров реальных применений интегралов, а также привлечение курсов и учебных ресурсов, которые способствуют пониманию и применению интегралов в реальной жизни.

Важно также учитывать индивидуальные особенности обучающихся, и адаптировать методы обучения к их потребностям и уровню математической подготовки. Некоторым ученикам может потребоваться дополнительное время и поддержка для того, чтобы полностью понять смысл интегралов, а также их применение.

Помимо этого, изучение темы «Практические приложения интеграла» может быть полезным для будущей профессиональной деятельности обучающихся, если они планируют работать в областях, где математические знания и умения являются необходимыми, например, в финансовой, технической, научной или медицинской сферах.

Кроме того, изучение темы «Практические приложения интеграла» может стать важным шагом в развитии критического мышления у обучающихся. При решении задач, связанных с интегралами, они должны анализировать информацию, формулировать гипотезы, проверять их на практике, аргументировать свои выводы и принимать обоснованные решения. Все это может помочь им развивать критическое мышление и способствовать их успеху в будущей жизни и карьере.

Таким образом, математическая грамотность является важной составляющей образования в современном мире, и изучение темы «Практические приложения интеграла» может помочь развить эту грамотность у обучающихся 10-11 классов. Она может помочь им не только понимать суть интегралов, но и уметь применять их в практике, развивать разностороннее мышление и готовиться к будущей профессиональной деятельности.

Актуальность. Развитие математической грамотности играет важную роль в формировании компетентных и успешных граждан в современном обществе. Изучение темы «Практические приложения интеграла» может стать важным шагом в этом процессе, помогая обучающимся развивать умение применять математику в реальной жизни и принимать обоснованные решения.

Исходя из данной актуальности, была выбрана следующая **тема исследования:** «Формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла»».

Проведенный анализ результатов научных исследований, направленных на формирование математической грамотности, позволил определить **противоречие:** между требованиями программы по математике и потребностями обучающихся в дополнительном материале, а также в использовании полученных знаний на практике.

Потребность в разрешении вышеназванных противоречий определяет **проблему исследования,** которая заключается в поиске ответа на вопрос: как эффективно развивать математическую грамотность учащихся в процессе обучения?

Цель исследования: разработать, теоретически обосновать и опытно-экспериментальным путем проверить результативность методики формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла».

Объект исследования: процесс изучения темы «Практические приложения интеграла».

Предмет исследования: методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла».

Гипотеза исследования: если включить в систему математической подготовки обучающихся 10-11 классов комплекс практико-ориентированных задач, то это поспособствует развитию математической грамотности обучающихся и повышению уровня их учебной мотивации.

Задачи исследования:

1. Провести теоретический анализ понятия математической грамотности и ее значения в обучении математике.

2. Охарактеризовать дидактические возможности практико-ориентированных задач для развития математической грамотности обучающихся.

3. Описать методы и средства обучения, способствующие развитию математической грамотности обучающихся 10-11 классов на уроках в процессе изучения данной темы.

4. Экспериментально проверить эффективность развития математической грамотности на уроках математики.

Методы исследования: анализ научной и учебно-методической литературы по проблеме исследования, выдвижение гипотез, педагогический эксперимент, наблюдение, сравнение.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что разработаны теоретические аспекты развития математической грамотности обучающихся 10-11 классов, направленные на использование практико-ориентированных задач во время урока, а также в реальной действительности.

Практическая значимость исследования обусловлена тем, что материалы исследования могут быть использованы в практической деятельности учителями математики в работе по формированию у школьников математической грамотности.

Структура выпускной квалификационной работы включает в себя: введение, две главы, заключение и библиографический список. Объём работы включает 110 страниц, 13 таблиц, 22 рисунков. Список литературы включает 35 источников.

В первой главе «Теоретические основания для формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» раскрывается основные понятие и структура математической грамотности. Рассматриваются способы ее исследования, характеризуются образовательные результаты, описанные в стандарте в соотношении с математической грамотностью, а также описываются результаты отечественных и зарубежных исследований.

Во второй главе «Методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» описываются и анализируются методы и средства обучения, способствующие развитию математической грамотности обучающихся, приводятся фрагменты уроков разработанной программы курса по выбору, а также приводятся и анализ результатов педагогического эксперимента, проведенного на базе 11 класса МКОУ «Большесалырской СШ» Ачинского района, Красноярского края.

Глава 1. Теоретические основания для формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла»

1.1. Понятие математической грамотности и ее значение в обучении математике

Математическая грамотность — это комплексный набор знаний, умений и навыков, необходимых для полноценного восприятия и использования математической информации в повседневной жизни и в профессиональной деятельности. Все это относится к уровню математической подготовки человека и характеризует его способность к решению математических задач, к пониманию математических терминов и символов, а также к использованию математических методов в реальных ситуациях.

Рисунок 1 – модель математической грамотности PISA-2021

Математическая грамотность включает в себя не только знание математических фактов и правил, но и умение применять их на практике. Она также связана с развитием мыслительных процессов, таких как логическое мышление, абстрактное мышление, решение проблем и критическое мышление. Математическая грамотность также включает в себя умение работать с математическими моделями, графиками, таблицами и диаграммами.

Значение математической грамотности в обучении математике заключается в том, что она является основой для дальнейшего изучения математики и других наук. Недостаточная математическая грамотность может препятствовать успешному усвоению математического материала и использованию математических знаний на практике. Поэтому формирование математической грамотности является одной из главных задач в обучении математике.

Важность математической грамотности в РФ обусловлена рядом документов, включающих Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации», Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) и другие нормативно-правовые акты в области образования.

Например, Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 г. №273-ФЗ, в статье 7 «Основные принципы организации образования» гласит: «Образование направлено на формирование общекультурных и профессиональных компетенций гражданина, включая математическую грамотность, необходимую для успешной социализации и профессиональной деятельности».

ФГОС включает в себя стандарты математической грамотности для разных уровней образования, которые определяют требования к знаниям, умениям и навыкам, необходимым для успешного усвоения математического материала.

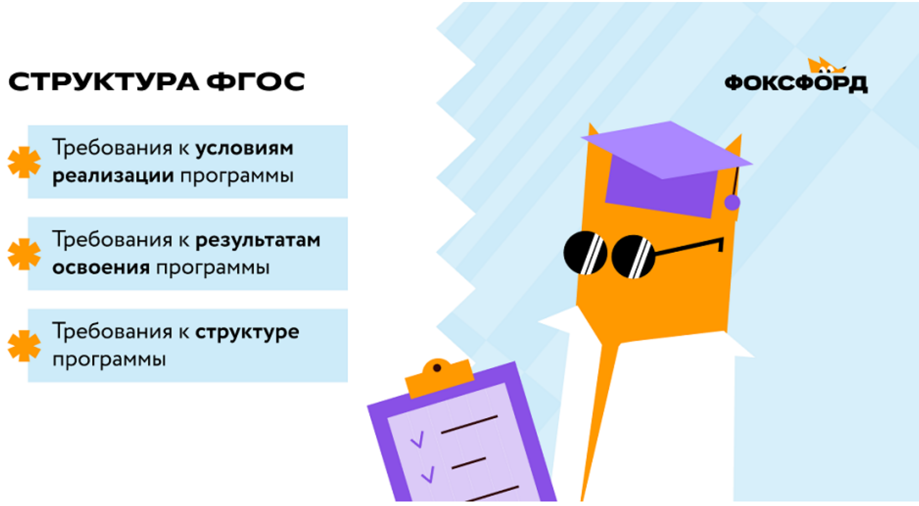


Рисунок 2 – основная структура обновленного ФГОС

Также важность математической грамотности подчеркивают документы, связанные с профессиональной деятельностью, например, профессиональные стандарты и требования к квалификации работников в различных областях, где математические знания и умения являются необходимыми условиями для выполнения работы.

Значение математической грамотности в современном мире трудно переоценить. Математическая грамотность является необходимым компонентом для успешной адаптации к быстро меняющимся условиям жизни и профессиональной деятельности, а также для личностного и интеллектуального развития.

Приведу следующие примеры значимости и важности математической грамотности в современном мире.

- **В науке и технологии** математика является одним из основных инструментов. Математические модели и методы используются в различных научных областях, таких как физика, химия, биология, экономика, социология и др. Они позволяют предсказывать результаты экспериментов, строить прогнозы, моделировать сложные процессы и исследовать связи между явлениями. Например, в медицине математические модели используются для описания биологических систем, расчета доз лекарств и оптимизации терапии.

- **В экономике и финансах** математика используется для анализа рисков, расчета доходности инвестиций, моделирования экономических процессов и принятия решений. Например, математические модели используются для расчета цен на финансовых рынках, прогнозирования экономических тенденций и оценки эффективности бизнес-проектов.

- **В области информационных технологий** математические знания используются для создания и разработки программного обеспечения, создания алгоритмов и решения задач искусственного интеллекта. Например, в области криптографии математические методы используются для защиты информации, а в области компьютерной графики - для создания трехмерных моделей.

- **В личностном развитии математическая грамотность** способствует формированию логического и критического мышления, умения анализировать информацию и принимать обоснованные решения. Она помогает людям успешно справляться с важными задачами и проблемами в повседневной жизни, такими как планирование бюджета, покупки, расчеты налогов и т.д. Более того, умение мыслить математически грамотно позволяет развивать творческий потенциал и находить нестандартные решения задач.

- **В развитии профессиональных навыков** играет важную роль, в особенности, таких профессиональных областях, как инженерия, наука, финансы. Именно в них, математическая грамотность является необходимым условием для карьерного роста и профессионального успеха. Например, инженеры используют математические методы для разработки и проектирования новых технологий и машин, а финансисты используют их для анализа и принятия решений в области инвестиций.

- **В важности решения глобальных проблем**, играет главную роль. Такие ситуации, как изменение климата, энергетические и экологические проблемы, медицинские и биологические исследования, также требуют использования математических методов и моделей. Например, математические модели используются для прогнозирования изменения климата и для оптимизации энергетических систем.

Таким образом, математическая грамотность играет важную роль в современном мире, позволяя людям успешно справляться с жизненными задачами, развивать свой профессиональный потенциал и вносить вклад в решение глобальных проблем.

Связь математической грамотности с успехом в обучении математике обусловлена тем, что математика является наукой, требующей высокого уровня абстрактного мышления, логического мышления, умения применять математические методы и алгоритмы для решения задач. Недостаток математической грамотности может привести к трудностям в понимании математических концепций и методов, а также в решении математических задач.

В Российской Федерации важность математической грамотности закреплена в законодательстве. В соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» основными задачами общего образования являются: «формирование у учащихся общих и профессиональных компетенций, включая компетенцию в области математики, информатики и естественных наук, способствующих дальнейшему обучению, личностному развитию и трудоустройству».

Кроме того, математическая грамотность является одним из ключевых показателей качества образования в России. В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и среднего общего образования в обязательную программу включены учебные курсы «Математика» и «Информатика и ИКТ».

Связь математической грамотности с успехом в обучении математике проявляется в следующих аспектах.

- **Понимание математических концепций** — это хорошее понимание математических методов, что является основой для успешного изучения математики. Ученики, обладающие высоким уровнем математической грамотности, легче усваивают новые математические концепции и методы.

- **Умение решать математические задачи** — это совокупность математической грамотности, включающей в себя умение решать математические задачи, а также знания. Ученики, обладающие этим навыком, более успешны в изучении математики и других информационных сферах.

- **Умение применять математические методы и алгоритмы** — это успешное изучение математики, которое требует умения использовать математические методы и алгоритмы для решения задач. Обладание высоким уровнем математической грамотности позволяет легко и быстро применять математические методы и алгоритмы для решения задач.

- **Подготовка к единому государственному экзамену** — в России успешная сдача ЕГЭ по математике является одним из ключевых показателей успешности образования. Ученики, обладающие высоким уровнем математической грамотности, имеют большие шансы успешно сдать ЕГЭ по математике и получить высокий балл.

Из всего вышеприведенного можно сделать вывод, что математика, ее основы необходимы в формировании личности, умеющей мыслить и применять на практике, простейшие (и не только) правила и законы. Формирование у обучающихся умения применять и интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты при решении задач по математической грамотности, поможет в любой сфере, даже далекой от простых и сухих формул.

Таким образом, высокий уровень математической грамотности является важным фактором успеха в жизни и профессиональном развитии, а также является ключевым элементом качества образования в России.

1.2. Особенности изучения темы «Практические приложения интеграла» в 10-11 классах.

Одной из тем школьного курса математики, которая вызывает много споров, является «Определенный интеграл». Интеграл ввели в школьную программу в связи с реформами образования конца 60-х – начала 70-х годов XX века. Специфика рассуждений, свойственная математическому анализу, привносит диалектичность в мышление учащегося, способствует формированию представлений о математике как развивающейся науке, позволяет учащимся совершить следующий шаг в обобщении полученных ими знаний из курса элементарной математики, а также открывает перспективу дальнейшего расширения имеющихся знаний. Все это способствует формированию качеств мышления, необходимых в настоящее время каждому образованному человеку, и отвечает социальным требованиям модернизации российского образования. Однако практика показывает, что трудности, возникающие при изучении этой темы в средней школе, сохраняются. Причины трудностей – высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность времени для осмысления сложных вопросов. Поэтому у учащихся не складывается целостного представления о понятии определенного интеграла, а остаются разрозненные, часто не связанные между собой сведения, что не только не способствует развитию математической культуры, но и затрудняет дальнейшее обучение в ВУЗе.

Понятие интеграла является одним из основных в математике. Изучение этой темы завершает школьный курс математического анализа, знакомит учащихся с новым инструментом познания мира, а рассмотрение в школе применения интегрального исчисления к важнейшим разделам физики показывает учащимся значение высшей математики.

Роль темы «Определенный интеграл» в школьном курсе математики привносит диалектичность в мышление учащихся, способствует формированию у школьников материалистического мировоззрения, облегчает изучение некоторых вопросов физики, геометрии.

Интегральное исчисление повышает научный уровень всего курса, помогает привести его по возможности в соответствие с современным состоянием науки, повышает математическую культуру выпускников школы.

Цель изучения данной темы – познакомить учащихся с интегрированием как операцией, обратной дифференцированию, показать применение интеграла к решению геометрических задач.

Интеграл принадлежит к числу математических понятий, происхождение и развитие которых тесно связано с решением прикладных задач. Это понятие и построенный на его основе метод применяются сегодня в самых различных областях научно-практической деятельности человека, в том числе в физике, в химии, биологии, экономике, технических дисциплинах и т.д.

Тема «Практические приложения интеграла» включает в себя ряд основных понятий и определений, которые являются важными для успешного изучения темы.

Таблица 1

Основные понятия при изучении темы «Интегралы»

Понятие	Определение
Первообразная	— это непрерывная функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если на промежутке X, если для каждого $x \in X, F'(x) = f(x)$. Операция нахождения первообразной функции f(x), называется интегрированием.
Неопределенный интеграл	— это совокупность всех первообразных функции $f(x)$. В общем случае, нахождение

Понятие	Определение
	неопределённого интеграла выглядит следующим образом: $\int f(x)dx = F(X) + \mathrm{C}$, где $f(x)$-подынтегральная функция, $F(x)$-первообразная функция функции $f(x)$, dx-дифференциал, C-константа интегрирования. Неопределённый интеграл представляет собой, как бы, «пучок» первообразных, из-за наличия постоянной интегрирования.
Свойства неопределённого интеграла	1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ 2. $\int d\big(F(X)\big) = F(x) + C$ 3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ 4. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
Определённый интеграл	Определенным интегралом для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$, называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю длины большего частичного промежутка. Он обозначается $\int_a^b f(x)dx$ и читается *«интеграл от* a *до* b *от функции* $f(x)$ *по* dx*»* $f(x)$*–подынтегральная функция,* a *и* b*–пределы интегрирования,* dx*–дифференциал.*
Формула Ньютона – Лейбница (для вычисления определенного интеграла)	$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Интеграл может использоваться для вычисления площади ограниченной графиком функции и осью, для определения объема тела вращения, для вычисления длины кривой и других приложений.

Примеры.

- **Вычисление площади фигуры, ограниченной графиком функции и осью OX.**

Если мы хотим вычислить площадь под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, мы можем использовать интеграл:

a) фигура, ограниченная сверху только графиком функции $y = f(x)$ и снизу осью OX

точки a и b *находим из уравнения* $f(x) = 0$

$$s = \int_a^b f(x)dx$$

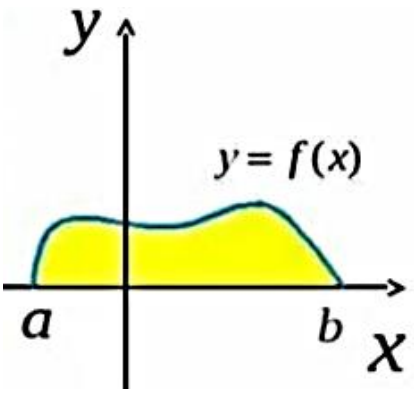


Рисунок 3 – формула и графический чертеж

b) криволинейная трапеция, ограниченная сверху осью OX, а снизу графиком функции $y = f(x)$ и по бокам прямыми $x = a$ и $x = b$

$$s = -\int_a^b f(x)dx$$

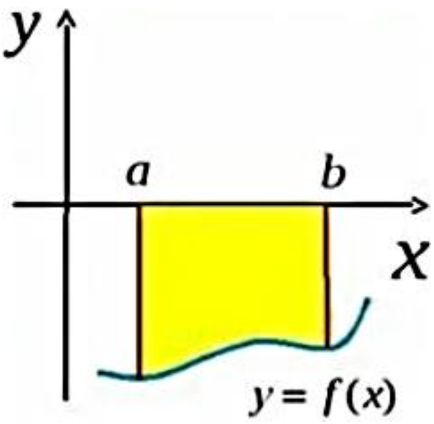


Рисунок 4 – формула и графический чертеж

- **Определение объема тела вращения.**

Если мы вращаем кривую вокруг оси, мы можем использовать интеграл для определения объема тела, полученного в результате вращения. Для примера рассмотрим тело, полученное вращением криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$ вокруг оси OX на отрезке $[a; b]$, для нахождения объёма мы можем использовать интеграл:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$

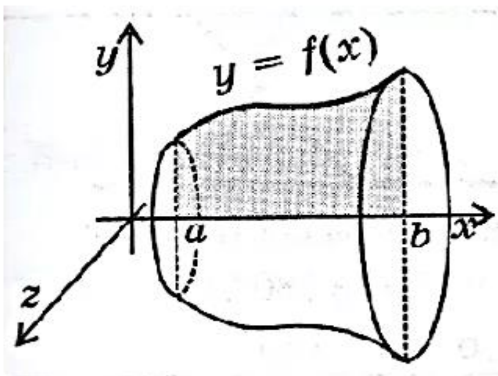


Рисунок 5 – формула и графический чертеж

- **Вычисление длины кривой.**

Если мы хотим вычислить длину кривой, мы можем использовать интеграл. Например, для вычисления длины кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ мы можем использовать интеграл:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

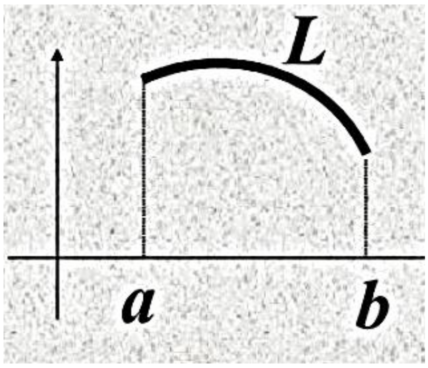


Рисунок 6 – формула и графический чертеж

Также важными понятиями в теме «Практические приложения интеграла» являются производная и график функции.

Понимание интеграла невозможно без определения производной функции — это основополагающий элемент в изучении данной математической концепции.

График функции также является важным элементом темы «Практические приложения интеграла». График функции $f(x)$ показывает зависимость значения функции от аргумента x и может использоваться для определения интеграла функции на определенном отрезке.

Таблица 2

Основные понятия при изучении темы «Интегралы»

Понятие	Физический и геометрический смысл понятий	Область применения
Определенный интеграл	— это площадь криволинейной фигуры в заданном участке.	Используется для вычисления площадей, объемов и их обобщений. Помогает измерять работу сил за какой-либо промежуток времени.

Понятие	Физический и геометрический смысл понятий	Область применения
Производная	— понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.	Используется в вычислении скорости, ускорения. А также применяется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества.
График функции	— это множество точек, у которых абсцисса представлена допустимой величиной аргумента x, а ордината - соответствующие величиной функции y.	Служит полезным помощников в определении интервалов возрастания и убывания функции, определении точек экстремума. Служит инструментом для решения уравнений, систем уравнений, решений неравенств с одной или несколькими переменными.

Тема «Практические приложения интеграла» связана с различными разделами математики, такими как дифференциальные уравнения, геометрия, теория вероятностей, физика и экономика.

- **Дифференциальные уравнения.**

Дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее саму функцию (y=y(x)), производные функции или дифференциалы (y', y'') и независимые переменные (наиболее распространённая – x). **Обыкновенным**

дифференциальным уравнением называют уравнение, в котором содержится неизвестная функция под знаком производной или под знаком дифференциала.

- **Геометрия.**

Интегралы могут быть использованы для вычисления объема, площади и длины кривых различных геометрических фигур. Например, интегралы могут быть использованы для вычисления объема тела вращения, площади криволинейной фигуры или длины кривой.

- **Теория вероятностей.**

Интегралы могут быть использованы для вычисления вероятности событий в статистической выборке. Например, интегралы могут быть использованы для вычисления среднего значения или дисперсии случайной величины.

- **Физика.**

Интегралы могут быть использованы для вычисления различных физических величин, таких как работа, энергия, момент импульса и т.д. Например, интегралы могут быть использованы для вычисления работы, совершенной при движении объекта по заданной траектории, или для вычисления момента инерции тела.

- **Экономика.**

Интегралы могут быть использованы для анализа экономических явлений, таких как спрос, предложение, доходность инвестиций и т.д. Например, интегралы могут быть использованы для вычисления доходности инвестиций, рассчитывая интеграл от доходности по времени.

В целом, практические приложения интеграла имеют широкий спектр применений в различных областях математики, науки и инженерии. Они позволяют вычислять различные физические и экономические величины, а также решать дифференциальные уравнения и анализировать статистические данные.

При изучении темы «Практические приложения интеграла» обычно используются реальные примеры и задачи из различных областей, чтобы показать, как интегралы могут быть применены на практике. Ниже приведены несколько примеров задач:

- **Расчет площади фигур:** дана кривая $y = x^2 - 4x + 5$. Найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой и осью x в интервале от $x = 0$ до $x = 3$.
- **Вычисление объема тел:** найти объем тела, полученного вращением кривой $y = 2x - x^2$ вокруг оси x.
- **Расчет массы и центра тяжести:** найти массу плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x$. Найти координаты центра тяжести этой фигуры.
- **Решение задачи о движении:** найти расстояние, пройденное частицей при движении по прямой линии, если ее скорость равна $v(t) = 3t^2 - 4t$, а начальная точка равна $x(0) = 0$.
- **Анализ экономических явлений:** рассчитать средний доход в период с 2010 по 2015 годы на основе данных о годовой прибыли компании, заданных функцией $p(t) = 2500 + 50t - 0{,}1t^2$, где t - количество лет с начала периода.
- **Вычисление вероятности:** найти вероятность того, что случайно выбранное число из интервала $[0; 2]$ будет больше, чем корень из этого числа.
- **Анализ статистических данных:** найти среднее значение и стандартное отклонение для выборки данных, заданных таблицей.

В каждой из этих задач необходимо использовать интегралы для вычисления различных параметров и характеристик. Такие задачи помогают студентам понять, как интегралы могут быть применены на практике в различных областях науки и инженерии.

Разберем ход работы на основе первого примера: Для нахождения площади фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 4x + 5$ и осью x в интервале от $x = 0$ до $x = 3$, необходимо вычислить определенный интеграл от функции $y = x^2 - 4x + 5$ в этом интервале:

$$S = \int_0^3 (x^2 - 4x + 5)dx$$

$$S = \left(\frac{3^3}{3} - 2(3^2) + 5(3)\right) - \left(0^3/_3 - 2(0^2) + 5(0)\right)$$

$$S = \left(\frac{27}{3} - 18 + 15\right) - 0$$

$$S = 6$$

Таким образом, площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 4x + 5$ и осью x в интервале от $x = 0$ до $x = 3$, равна 6 квадратных единиц.

Для графического представления нужно нарисовать график функции $y = x^2 - 4x + 5$у и обозначить границы интервала $x = 0$ и $x = 3$ на оси x. Затем нужно найти область, заключенную между графиком функции и осью x на этом интервале.

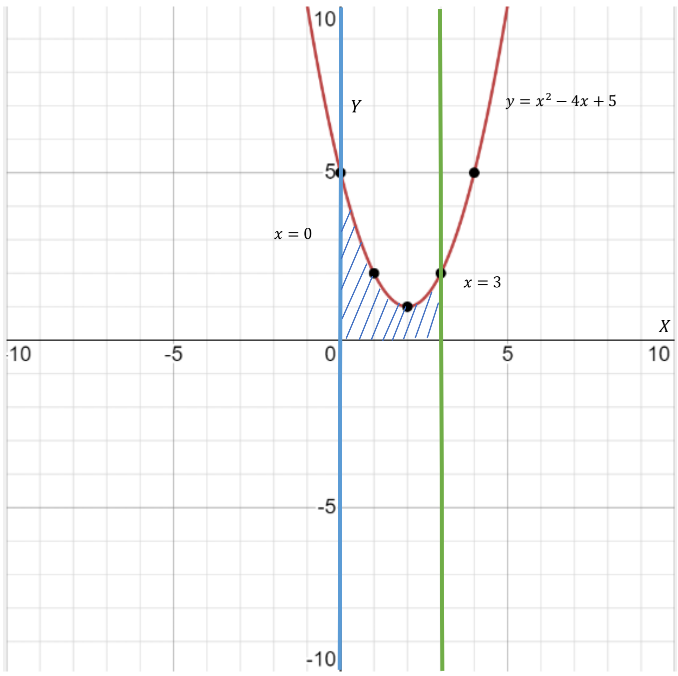


Рисунок 7– график функции $y = x^2 - 4x + 5$

После выполнения задания, всегда полезно взглянуть на чертеж и прикинуть, реальный ли получился ответ. В данном случает «на глазок» подсчитать количество клеточек в чертеже – ну, примерно 6 клеточек наберется, что похоже на ту же площадь, что и при вычислении определенного интеграла методом аналитического решения.

1.3. Анализ содержания темы «Определённый интеграл» в современных школьных учебниках алгебры

Анализ содержания темы «Определённый интеграл» в школьных учебниках алгебры разных авторов целесообразно начать с указания на то, что в старших классах школы образовательная деятельность делится на два уровня – базовый и профильный. Изучение математики на базовом и профильном уровнях имеют существенное различие в содержании программы, целях обучения и результатах освоения программы.

Предметные результаты освоения предметной области «Математика» в старшей школе, с разделением на базовый и профильный уровни, определены Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года №416 «Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (в редакции Приказа Минобрнауки России от 29.06.2017 № 613).

Таким образом, по теме «Определённый интеграл» на базовом и профильном уровне содержание учебного материала различается по сложности и по объему изучения материала. На базовом уровне данная тема подразумевает умение находить интеграл основных и простых элементарных функций. Профильный уровень подразумевает нахождение интегралов любых сложных элементарных функций. В последствии на базовом уровне сначала вводятся понятия первообразных, указываются правила поиска первообразных, составляется таблица, а затем вводится понятие определённого интеграла. находятся площади фигур. Профильный же уровень направлен на нахождения количества решений уравнения с помощью графика и полное исследование функций.

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева [1].

Рассматривать понятие определённого интеграла авторы начинают с традиционного геометрического подхода, но основной акцент производится на приложении первообразной к физическим и техническим задачам. В учебнике подробно рассматривается правила нахождения первообразной простых функций, а также приведена таблица первообразных. Для профильного уровня дается определение криволинейной трапеции, формула нахождения площади криволинейной трапеции, а также вычисление площадей с помощью интеграла.

Так же в учебнике содержатся дополнительные разделы, которые представляют интерес для углубленного изучения математики. К дополнительным разделам относятся: элементы комбинаторики, теории вероятности, статистики и некоторые разделы теории множеств, а также памятки с формулами на форзаце.

Данный учебник может быть использован для обучения как на базовом, так и на профильном уровне, который рассматривается более подробно.

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни / Ю.М. Колягин и др. [2].

Учебник содержит теоретический материал по всем разделам начала анализа в соответствие с положениями ФГОС СОО.

В данном учебном пособии для 11-го класса содержатся систематические сведения о числах и расширенные сведения о функциях.

При знакомстве с интегралом автор вводит понятие перообразной и приводит примеры из химии, про скорость реакции веществ и из физики, про силу тока. Также учащиеся знакомятся с определением первообразной для функции.

Сначала вводятся упрощенные, развернутые определения первообразной и интеграла функции, затем формула Ньютона-Лейбница и примеры задний с решением. В качестве закрепления понятия интеграла предлагаются упражнения по нахождению площадей фигур.

К преимуществам данного учебника можно отнести, что изложение учебного материала предусматривает уровневую дифференциацию обучающихся. Данный учебник может быть использован как для базового, так и для профильного уровней.

К недостаткам учебника можно отнести недостаточное внимание к первообразной в задачах по геометрии, физике и технике.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Мордкович А.Г. [3] Один из самых популярных учебных комплектов для изучения алгебры и начала анализа в 10-11 классах.

Изучение математического анализа в данном учебнике начинается с понятия предела последовательности, суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, предела функции. Достаточное внимание уделяется теме производной и технике дифференцирования, в том числе, и обратному процессу поиска функции по заданной производной – интегрированию.

В сравнении с другими традиционными учебниками, данный материал является более понятным для обучающихся по изложению материала, так же в нем приведено достаточное количество примеров разного уровня сложности с подробными решениями.

Каждая тема предполагает определенное количество часов, которое рекомендовано в учебнике. Особо выделяются такие темы, как неопределенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница, вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла. На них запланировано более половины от общего количества часов от всего курса математики.

Учебник может быть преимущественно использован для базового уровня обучения.

Проведя анализ различных учебных пособий по теме «Первообразная и интеграл», можем выделить основные элементы математического анализа, такие как:

- понятие определенного интеграла,
- техника интегрирования,
- понятие первообразной,
- понятие неопределенного интеграла,
- решение задач с помощью интегралов,
- простейшие дифференциальные уравнения.

Таким образом, из проведенного анализа учебного материала видно, насколько различаются подходы к изучению темы «Первообразная и интеграл» для базового и профильного уровней. Во всех проанализированных учебниках можно выделить общую черту: расслоение по уровню сложности (от легкого до повышенного), что полностью отвечает требованиям ФГОС.

1.4. Формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла»

Интеграл — это математический инструмент, который позволяет находить площади, объемы, центры тяжести, а также решать дифференциальные уравнения. Понимание практического применения интеграла важно для решения многих задач, как в науке, так и в инженерии, экономике и других областях. Для формирования математической грамотности учащихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» необходимо развивать умения решать задачи, связанные с данной темой.

Применение интегралов для нахождения площади под кривой — это одно из основных применений интегралов в геометрии и физике. Например, интеграл может использоваться для нахождения площади фигур, которые не имеют простых геометрических форм, таких как криволинейные фигуры. Для этого криволинейная фигура разбивается на бесконечно малые элементы, каждый из которых приближается к прямоугольнику, и интегралом находится суммарная площадь этих элементов. Чтобы ориентироваться в данной теме нужно разобраться, что является интегральной суммой.

Интегральной суммой для функции $y = f(x)$, построенной по разбиению Tотрезка $[a, b]$, называется сумма произведений значений функции в выбранных точкахC_iна длины элементарных участков.

$$\sum\nolimits_f (T) = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

Если$f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, $\sum_f (T)$ то приближенно равна площади соответствующей криволинейной трапеции.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм этой функции по разбиениям отрезка$[a,b]$, у которых максимальный Δx_i стремится к нулю, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_f(T)$.

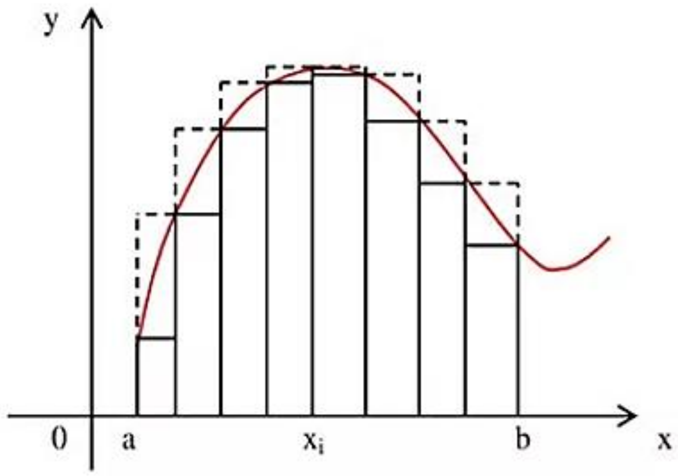


Рисунок 8 – предел интегральных сумм функции $y = f(x)$ по разбиениям отрезка$[a,b]$

Если $f(x) \geq 0$ в $[a,b]$, то этот интеграл выражает точную площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода, то эта функция интегрируема на$[a,b]$, т.е.$\int_a^b f(x)dx$ существует.

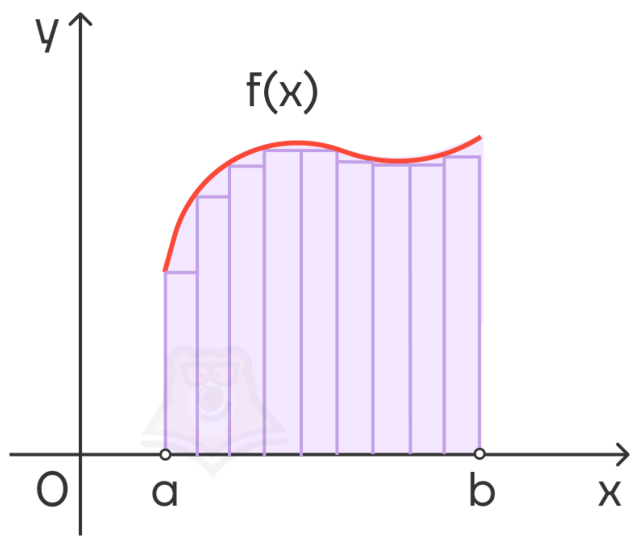


Рисунок 9 – понятие интегральной суммы для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

В физике интегралы широко применяются для решения дифференциальных уравнений, описывающих различные процессы, такие как движение тела, изменение температуры и т.д. Дифференциальные уравнения могут быть решены методом интегрирования, что позволяет получить аналитическое решение уравнения.

В экономике и финансах интегралы могут использоваться для расчета интегральных показателей, таких как общий объем продаж или общий объем прибыли, что позволяет более точно прогнозировать различные экономические процессы.

Таким образом, практическое применение интеграла распространено во многих областях, и оно позволяет решать множество задач, которые не могут быть решены с помощью обычных арифметических операций. Интеграл является мощным инструментом для моделирования и анализа различных процессов, и его использование может улучшить качество принимаемых решений и прогнозов.

В общем, практическое применение интеграла позволяет решать многие задачи, которые невозможно решить другими методами. Понимание этого инструмента и его возможностей может быть полезным для тех, кто работает в различных областях науки, техники и экономики.

Рассмотрим примеры задач и способы их решения.

Пример №1.

Вычисление площади фигуры, ограниченной графиком функции.

Для решения данной задачи необходимо найти первообразную функции, ограничивающей данную фигуру, на заданном интервале, затем вычислить определенный интеграл на этом интервале. Например, для вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции

$y = x^2$ на интервале от 0 до 1, необходимо вычислить определенный интеграл от 0 до 1 функции $y = x^2$, то есть:

$$S = \int_0^1 x^2 dx$$

$$S = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$S = \frac{x^3}{3}$$

$$S = \frac{1}{3}$$

Таким образом, площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ на интервале от 0 до 1, равна $\frac{1}{3}$.

Для наглядности рассмотрим график ниже.

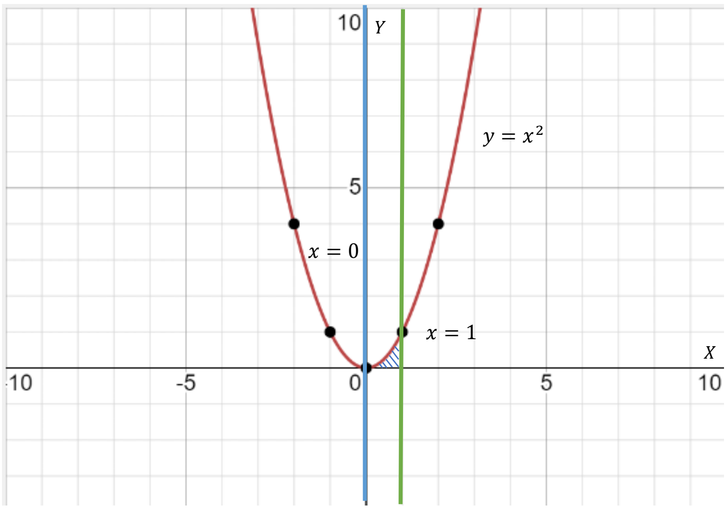


Рисунок 10 – график функции $y = x^2$

Пример №2.

Вычисление объема тела, полученного вращением вокруг оси OX.

Для решения данной задачи необходимо найти формулу для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси OX, затем подставить в эту формулу уравнение кривой и вычислить определенный интеграл на заданном интервале. Например, для вычисления объема тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг оси OX на интервале от 0 до 1, необходимо использовать формулу объема тела вращения:

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx$$

Подставляя уравнение параболы $y = x^2$ в данную формулу, получаем:

$$V = \int_0^1 \pi x^4 dx$$

$$V = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{5}$$

Таким образом, объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг оси OX на интервале от 0 до 1, равен $\frac{\pi}{5}$.

Пример №3.

Вычисление длины дуги кривой.

Для решения данной задачи необходимо использовать формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, на заданном интервале $[a, b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

где $f'(x)$ - производная функции $f(x)$ по x.

Например, для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y = x^2$ на интервале от 0 до 1, необходимо вычислить производную функции $y = x^2$, то есть $y' = 2x$, затем подставить значения в формулу:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Способы решения задач, связанных с темой «Практические приложения интеграла», могут быть представлены в виде таблицы:

Таблица 3

Методы решения задач

Тип задачи	Формула/метод	Пример
Вычисление площади фигуры, ограниченной графиком функции	$S = \int_a^b f(x)dx$	Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ на интервале от 0 до 1
Вычисление объема тела, полученного вращением вокруг оси OX	$V = \int_a^b \pi y^2 dx$	Вычислить объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2$ вокруг оси OX на интервале от 0 до 1
Вычисление длины дуги кривой	$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$	Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = x^2$на интервале от 0 до 1

Таким образом, формирование математической грамотности учащихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» связано с развитием умений решать задачи, связанные с данной темой, с использованием соответствующих формул.

Выводы по 1 главе

Математическая грамотность – это набор знаний, умений и навыков, необходимых для успешного применения математических концепций в повседневной жизни и профессиональной деятельности. В контексте обучения математике это означает, что грамотный ученик обладает достаточными знаниями и умениями для понимания и применения математических концепций, решения задач и использования математических методов в различных ситуациях.

Тема «Практические приложения интеграла» требует от учеников глубокого понимания основ интегрального исчисления, что делает ее достаточно сложной.

Для успешного изучения темы "Определённый интеграл" необходимо, чтобы ученики уже обладали хорошими знаниями в области дифференциального исчисления и математического анализа. Кроме того, для эффективного изучения этой темы требуется достаточная математическая грамотность, умение применять математические методы и алгоритмы, а также осознание того, как эти методы могут быть применены на практике.

Учебники, посвященные данной теме, охватывают широкий спектр задач, начиная от простых и заканчивая более сложными. В них также присутствуют специально разработанные задания, направленные на изучение определенного интеграла.

Таким образом, мы рассмотрели программу и содержание темы «Определённый интеграл» в школьном курсе математики, а также провели анализ содержания учебников для 10-11 классов.

Мы пришли к выводу, что изучение темы «Практические приложения интеграла» позволяет ученикам практически применить математические методы и значительно улучшить свою математическую грамотность. Более того, изучение этой темы помогает лучше понять связь между математикой и реальными приложениями, что может пригодиться в будущей профессиональной деятельности. Для эффективного формирования математических навыков ученикам необходимо предоставлять возможность самостоятельно решать практические задачи.

Глава 2. Методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла»

2.1. Использование интерактивных методов обучения в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла»

Использование интерактивных методов обучения в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» является важным для учеников 10-11 классов по нескольким причинам.

Во-первых, интерактивные методы обучения позволяют учащимся активно участвовать в процессе обучения и взаимодействовать с учителем и другими учениками. Это помогает ученикам лучше понимать материал и запоминать его, так как они имеют возможность задавать вопросы и обсуждать тему с другими.

Во-вторых, использование интерактивных методов обучения помогает учащимся увидеть практическое применение интеграла в реальной жизни. Например, они могут использовать интегралы для вычисления площади под кривой, объема тела, работы, совершаемой при перемещении объекта, или же для нахождения центра масс тела. Эти примеры помогают ученикам увидеть, как интегралы используются в реальной жизни и могут применять их в будущем.

В-третьих, интерактивные методы обучения могут помочь ученикам лучше понять, как использовать интегралы в решении задач. Учитель может предложить ученикам серию задач, которые они могут решать вместе, и показать, как применять интегралы для решения каждой из них. Это поможет ученикам лучше понимать, как использовать интегралы в разных ситуациях и решать задачи более эффективно.

В целом, использование интерактивных методов обучения в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» может помочь ученикам лучше понимать материал, увидеть его практическое применение и лучше освоить навыки решения задач.

Работа в парах и малых группах — это один из интерактивных методов обучения, который широко применяется в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» для формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов. Этот метод основан на организации совместной работы учащихся в малых группах или парам, где каждый ученик активно участвует в процессе обучения, обменивается мнениями, опытом и знаниями с другими учениками.

Для проведения работы в парах и малых группах можно использовать различные методы и приемы обучения, такие как:

1. Мозговой штурм (brainstorming) — это метод, при котором ученики в малых группах генерируют максимальное количество идей, связанных с темой «Практические приложения интеграла». Затем ученики обмениваются своими идеями и выбирают наиболее интересные и перспективные для дальнейшей работы.

2. Решение проблемных ситуаций — ученикам предлагаются задачи и проблемы, связанные с практическими приложениями интеграла, которые они должны решить вместе в парах или малых группах. Этот метод способствует развитию креативности, логического мышления и умения применять знания в практических задачах.

3. Обмен мнениями — ученики могут обсудить в парах или малых группах свои взгляды и мнения по поводу темы «Практические приложения интеграла», а также обменяться опытом и знаниями, полученными в ходе изучения этой темы. Этот метод способствует развитию коммуникативных навыков и умения работать в коллективе.

4. Работа с примерами — ученики могут работать в парах или малых группах над решением конкретных задач и примеров, связанных с темой «Практические приложения интеграла». Этот метод способствует более глубокому усвоению материала и развитию практических навыков.

5. Игровые методы — вместо традиционных упражнений и задач, ученики могут играть в игры, связанные с темой «Практические приложения интеграла». Например, можно провести игру «Поиск сокровища», где ученики должны применять знания по интегралам, чтобы найти сокровище на карте, решая задачи и головоломки.

Преимущества работы в парах и малых группах в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» заключаются в том, что:

- ученики могут лучше понять материал, обмениваясь мнениями и объясняя друг другу;
- ученики могут развивать коммуникативные навыки и умения работать в коллективе;
- ученики могут развивать креативность и логическое мышление, решая проблемные ситуации и играя в игры;
- ученики могут более глубоко усваивать материал и развивать практические навыки.

В целом, работа в парах и малых группах является эффективным методом обучения, который может помочь ученикам лучше понять тему «Практические приложения интеграла» и развить необходимые навыки для успешного применения знаний в практических ситуациях.

Учебный процесс, опирающийся на использование интерактивных методов обучения, организуется с учетом включенности в процесс освоения учебного материала всех учеников. Именно совместная деятельность означает, что каждый вносит свой вклад, так как в ходе коллективной работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Организуется парная и групповая работа, используется проектная работа, ролевые игры, работа с текстом и другими источниками информации. Интерактивные методы основаны именно на принципах взаимодействия, активности учеников, с опорой на групповой опыт и обязательной обратной связи. Образуется такая среда образовательного общения, которая характеризуется открытостью, общением участников, а также равенством их аргументов. В результате у учеников происходит накопление совместного знания и возможность взаимной оценки и контроля.

Симуляция – это помещение людей в «фиктивные, имитирующие реальные» ситуации для обучения или получения оценки проделанной работы, иначе это обучение действием или в действии.

Образовательная симуляция – это структурированный сценарий с подробно разработанной системой правил, заданий и стратегий, которые созданы с совершенно определенной целью: сформировать специфические компетенции, которые могут быть прямо перенесены в реальный мир.

В дополнение к использованию интерактивных методов обучения и проектных методов, учителя могут использовать различные ресурсы, такие как онлайн-курсы, видеоуроки и приложения для мобильных устройств, чтобы учащиеся могли получить дополнительные знания и применить их на практике. Также важно обеспечить доступность математического образования для всех учащихся, независимо от их возраста, расы, пола и социального статуса.

Использование игр и симуляций является одним из наиболее эффективных методов обучения в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла». Игры и симуляции позволяют ученикам более глубоко понять материал и применять его на практике, а также развивают логическое мышление, креативность и коммуникативные навыки.

Рассмотрим несколько примеров.

Один из примеров игрового подхода к изучению интегралов — это игра **«Интегралополис»**.

В этой игре ученикам предстоит решить задачи на вычисление определенного интеграла и зарабатывать очки за правильные ответы.

Задание. Вычислить определенный интеграл

1. $\int_{1}^{5} 7x^6 dx$
2. $\int_{1}^{2} 2x^2 dx$
3. $\int_{1}^{9} \frac{6}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int_{-6}^{0} (1 - x) dx$
5. $\int_{1}^{4} (2x + \frac{3}{\sqrt{x}}) dx$
6. $\int_{-1}^{3} (4x + 1) dx$
7. $\int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2) dx$
8. $\int_{-3}^{1} (2x^2 + 3x - 1) dx$
9. $\int_{0}^{\pi} (\frac{1}{\cos^2 x} - 5x) dx$
10. $\int_{0}^{\pi} (\cos x - 12x^3) dx$

Рисунок 11 – карточка-задание

Цель игры - построить свой город, потратив очки на различные постройки, например, дома, магазины, парки и т.д.

Рисунок 12 – графический макет «**Интегралополис**»

Таким образом, ученики могут применить свои знания по интегралам на практике и увидеть конкретные результаты своей работы.

Еще одним примером игрового подхода является симуляция **«Космическое путешествие»**.

Рисунок 13

В этой симуляции ученики играют роль космического корабля, который должен пролететь через поле гравитационных сил. Для того, чтобы корабль преодолел поле сил, ученикам необходимо рассчитать путь и вычислить определенный интеграл.

Задача.

Скорость прямолинейного движения тела выражается по формуле

$v = 2t + 3t^2$(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения, используя формулу $S = \int_a^d v(t)dt$.

Решение.

1. Решим задачу используя формулу $S = \int_a^d v(t)dt$, где a=t1=0с., а b=t2=5с.

2. Найдем путь, пройденный телом за 5с. $S = \int_0^5 (2t + 3t^2)dt =$

$= 2\int_0^5 tdt + 3\int_0^5 t^2dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2}|_0^5 + 3 \cdot \frac{t^3}{3}|_0^5 = t^2|_0^5 + t^3|_0^5 = 5^2 - 0^2 +$

$+5^3 - 0^3 = 25 + 125 = 150$

3. $S = 150(\text{м})$.

Ответ.

Путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения, равен 150 метров.

Решая подобные задачи, ученики смогут на практике применять свои знания по интегралам и понимать, как они могут использоваться в реальной жизни.

Еще одним примером игры является **«Архитектор»**.

Рисунок 14

В этой игре ученики играют роль архитектора, который должен построить здание, используя определенные интегралы для расчета площадей. Цель игры – построить здание с учетом всех требований и ограничений.

Итак, решим несколько задач.

Задача №1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0, x = 1, x = 2$.

Решение.

Начертим график, чтобы наглядно посмотреть, какую ищем площадь.

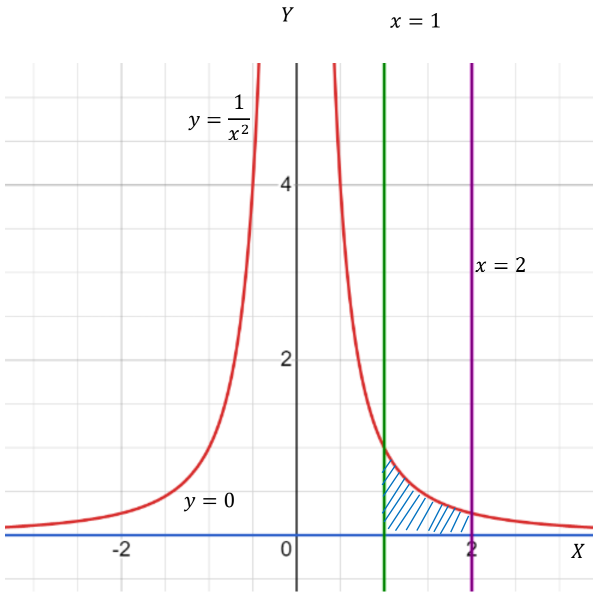


Рисунок 15 – площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0, x = 1, x = 2$.

Используя формулу для нахождения площади, найдем числовое значение.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Подставим значения в формулу $a = 1, b = 2, f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{(-1)}|_1^2 = -\frac{1}{x}|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ.

Площадь искомой фигуры равна 0,5 квадратных единиц.

Задача №2. (Общий случай)

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b, g(x) \le f(x)$.

Решение.

Начертим график, чтобы наглядно посмотреть, какую ищем площадь.

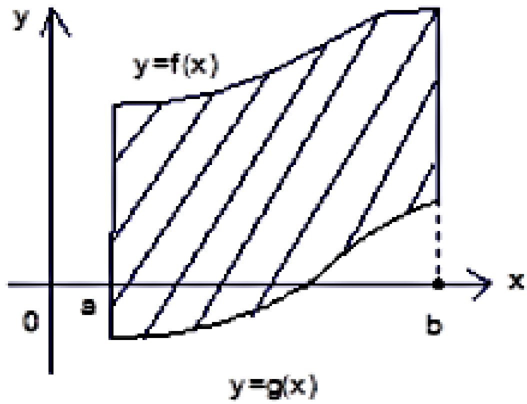


Рисунок 16 – площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b, g(x) \le f(x)$

Итак, 2 кривые образуют некую площадь, одна из них может находиться под осью x. Как же решить эту задачу? Для начала сдвинем фигуру на такое положительное m, так чтобы площадь находилась над осью x, и покажем это на графике ниже.

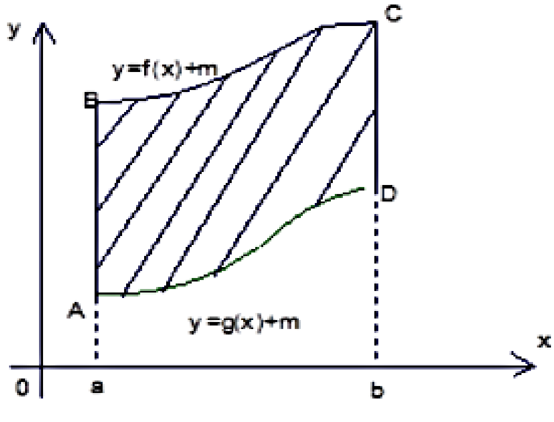


Рисунок 17 – сдвиг искомой площади

Следующим действием используем соответствующий определенный интеграл и вычислим площадь. А так как искомая площадь равна разности двух площадей запишем общий вид уравнения.

$$S = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx) =$$

$$= \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Ответ запишем в общем виде.

Ответ.

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Еще одним примером игры, которая может использоваться при изучении практических приложений интеграла, является **«Игра в интегралы».** В этой игре ученики разбиваются на команды и отвечают на вопросы, связанные с интегралами и их применением в реальной жизни. За каждый правильный ответ команда получает баллы, а за неправильный ответ баллы списываются. Побеждает команда, которая заработает больше всего баллов.

Вопросы (за каждый правильный ответ команда получает 1 балл):

- Применяется ли при решении задач интеграл в физике? (да)
- Могут ли пригодиться знания об интегралах при строительстве дома? (да)
- Запись, которая находится под знаком интеграла, называется? (подынтегральная)
- Нужно ли врачам обладать навыками интегрирования? (да)
- На какую букву английского алфавита похож знак интеграла? (S)
- Записать формулу Ньютона-Лейбница. ($S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$)

- Слова такие как предел, производная, функция относятся к теме «Интегралы»? (да)
- Можно ли измерить объем крови в теле человека с помощью интегрирования? (да)

Вопросы с вариантами ответов (за каждый правильный ответ команда получает 1 балл):

1. Какие законы физики описываются при помощи дифференциальных уравнений?

А) Законы сохранения энергии и импульса; (верно)

Б) Все законы физики могут быть описаны дифференциальными уравнениями;

В) Закон Гука;

Г) Закон Архимеда.

2. В каких областях математики используется интеграл для вычисления площади под графиком функции?

А) В алгебре;

Б) В анализе; (верно)

В) В геометрии;

Г) В комбинаторике.

3. Для чего может использоваться определенный интеграл?

А) Для нахождения максимума функции;

Б) Для нахождения производной функции;

В) Для решения дифференциальных уравнений;

Г) Для вычисления площади под графиком функции. (верно)

4. Какую физическую величину можно найти, проинтегрировав скорость по времени?

А) Расстояние, пройденное объектом; (верно)

Б) Ускорение объекта;

В) Энергию объекта;

Г) Импульс объекта.

5. Какую физическую величину можно вычислить при помощи интеграла?

А) Объём тела; (верно)

Б) Площадь поверхности;

В) Скорость объекта;

Г) Массу тела.

6. Что называется интегрированием?

А) операция нахождения интеграла; (верно)

Б) преобразование выражения с интегралами;

В) операция нахождения производной;

Г) предел приращения функции к приращению её аргумента

Таким образом, использование игр и симуляций в процессе изучения темы «Практические приложения интеграла» может стать отличным инструментом, способствующим более глубокому усвоению материала и развитию практических навыков. Однако, необходимо помнить, что такие методы должны использоваться в сочетании с традиционными методами обучения, такими как лекции, чтение и выполнение практических заданий.

Изучение примеров практического применения интеграла — это метод, при котором ученики обсуждают реальные примеры, в которых применяются интегралы для решения практических задач. Такой подход позволяет ученикам увидеть, как интегралы применяются на практике и какие проблемы могут возникнуть в процессе их применения.

Примером может быть задача из физики, например, определить скорость, с которой тело движется, зная функцию его ускорения от времени. Для решения этой задачи необходимо проинтегрировать функцию ускорения по времени, чтобы получить функцию скорости. Ученики могут обсудить этот пример, а также рассмотреть другие задачи, связанные с механикой, гидродинамикой, электродинамикой и другими областями науки.

Другой пример может быть связан с финансами, например, с расчетом процентов на банковский вклад. Ученики могут обсудить, как интегралы используются для расчета сложных процентов и других финансовых показателей.

Ученики могут также обсуждать примеры, связанные с интегралами в медицине, например, при определении площади под графиком зависимости концентрации лекарства в крови от времени. Эта информация используется для расчета дозировки лекарств, что является важным аспектом в медицине.

Изучение примеров практического применения интеграла помогает ученикам увидеть, как интегралы используются в реальной жизни и позволяет им понимать материал на более глубоком уровне, а также помогает ученикам развивать критическое мышление и умение применять полученные знания в реальных ситуациях.

2.2. Анализ методических подходов к применению прикладных задач при изучении темы «Определённый интеграл»

Одним из важнейших элементов формирования и развития математической компетентности у обучающихся являются практико-ориентированные задачи. Практико-ориентированная задача – это математическая задача, содержание которой описывает ситуацию окружающей действительности, связанную с формированием у учащихся практических навыков использования математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием дополнительной информации.

При решении практико-ориентированных задач основной упор делается на построение модели реальной ситуации, описанной в задании.

При решении практико-ориентированных задач следует учитывать их отличительные особенности от стандартных математических, включая предметные, межпредметные и прикладные задачи. Эти особенности могут включать в себя:

- практическую значимость, которая повышает познавательный интерес обучающихся к определенной теме;
- условие задачи формулируется как действие, ситуация или проблема, обучающиеся должны определить основную линию задачи, выявить избыточную информацию и произвести правильный анализ ситуации;
- информацию и данные в задании могут быть представлены в различной форме, например, изображение, таблица, схема, диаграмма, график и т.п.;
- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задачи.

Лучший тренажер математической грамотности – это практическое решение задач. С внедрением модуля «Реальная математика» в ГИА и ЕГЭ преподаватели начали активно включать практические задания в процесс обучения. Такие задания можно применять на разных этапах урока: актуализация знаний, изучение нового, закрепление изученного, применение пройденного материала, систематизация и обобщение. Работая во взаимодействии с окружающей действительностью, обучающиеся лучше усваивают материал и получают первый опыт применения математических знаний в повседневной жизни и повышают свою математическую компетентность.

Средства развития математической компетентности используются через практико-ориентированный подход, дифференцированный подход, развивающие подходы и системную деятельность.

Как показывает опыт наибольшие трудности при решении практико-ориентированных задач возникают на этапе понимания и извлечения необходимой информации из текста и интерпретации результата. Трудности первого типа отчасти связаны с тем, что данные для практического задания могут быть представлены в необычной форме (рисунок, таблица, схема, схема, график и т. д.).

Еще более необычной для ученика является ситуация, когда задание содержит недостающие или наоборот лишние данные, которые усложняют восприятие.

Рассмотрим различные статьи и учебные пособия по преподаванию темы «Интеграл», ориентированные на использование в процессе обучения прикладных задач, представленные в публикациях разных авторов.

В середине XX века на русский язык была впервые переведена монография известных зарубежных математиков Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов». Книга неоднократно переиздавалась и до сих пор остаётся актуальной для педагогов, заинтересованных в том, чтобы обучать математике доступно и наглядно, предоставляя обучающимся возможность увидеть различные аспекты применения математических знаний в учебной деятельности и в повседневной жизни. В данной книге изложение материала начинается с элементарных понятий и плавно переходит к современным разделам математики и техники. В книге очень подробно изложены элементарные понятия начал анализа, их связь с естествознанием и техникой. Книга представляет интерес в том числе и в качестве учебного материала по основам математического анализа как на базовом, так и на профильном уровнях.

Ещё одна книга, которая заслуживает внимания современных педагогов, – это «Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы», выпущенный под редакцией известного советского математика М.И. Сканави [4]. Это классический задачник, написанный в соответствии с программой по алгебре для поступающих в ВУЗы, и, хотя время выхода в свет этого сборника датируется 1992 годом, анализ его содержания указывает на то, что программные требования современных ВУЗов к уровню освоения выпускниками алгебры и начал анализа практически не отличаются от прежних. Вероятнее всего, это объясняется тем, что ещё до начала масштабной реформы системы образования с введением стандартов нового поколения к уровню подготовки выпускников школ, поступающих в технические ВУЗы, предъявлялись очень высокие требования.

В данном пособии задачи распределяются по принципу единства тем, типов, методов решений и разделяются на 3 группы в зависимости от уровня сложности их решения. Большая часть задач имеет подробные решения. Каждая глава содержит справочные сведения.

Отдельный класс представляют задачи на прикладное применение математического анализа. Данный сборник задач можно использовать преимущественно для профильного уровня обучения.

Так, многие из авторов в работе по тематике интегрирования функций используют конкретный пример из курсов физики или других естественных наук, что позволяет укрепить межпредметные связи. Также эти учебные пособия используют принцип практико-ориентированных задач, что способствует укреплению познавательного интереса к предмету.

Отдельного внимания заслуживает учебное пособие Е.Н. Эрентраут «Прикладные задачи математического анализа для школьников» [5]. В пособии представлен большой набор задач с практическим содержанием: экономического характера, отражающих проблемы окружающей среды, взятых из смежных с математикой учебных предметов – физики, химии, биологии, экологии, экономики, географии. Оно включает задачи прикладного характера из учебников Германии. Все задачи рассмотрены с целью проиллюстрировать практическое применение интеграла и вызвать интерес учащихся к этому разделу курса.

На основе собственного опыта хочется отметить, что применение практико-ориентированных задач на уроках математики, значительно повышает уровень математической подготовки школьника.

Одной из важных составляющих математической грамотности является умение решать задачи, которые имеют практическое применение в жизни. Однако мнения ученых на этот счет до сих пор расходятся. Некоторые педагоги и психологи считают, что учащиеся старшего возраста уже способны решать абстрактные задачи, не связанные с реальными жизненными ситуациями. Другие же ученые относятся к этому вопросу с учетом гендерных особенностей. [19]

Например, в Англии до сих пор существуют школы с разделением на мужские и женские классы. Такое разделение влияет на круг задач, которые решают ученики: мальчикам в раннем возрасте предлагают задачи на рассуждение и аналитику, а девочки учатся решать задачи на сложные вычисления, алгоритмизацию и различные расчеты. Но, несмотря на различия в подходе, все согласны, что при обучении школьников необходимо уделять значительное внимание практическим задачам. Важно, чтобы эти задачи были связаны с реальными ситуациями и могли быть применены в повседневной жизни.

Задачи в обучении математике должны быть обязательно связаны с знакомыми явлениями и объектами, но также могут включать и совершенно незнакомые обстоятельства, и явления. Например, это может быть расчет концентрации раствора на заводе, с которым учащийся ранее не сталкивался, или подсчет вероятности повреждения автомобильного стекла, если учащийся еще не имеет опыта вождения автомобиля.

В заключительной части можно сделать вывод, что практико-ориентированные задачи являются неотъемлемой частью обучения, так как они помогают формировать практические навыки, необходимые в повседневной жизни. Они также способствуют развитию умений действовать в социально значимых ситуациях, выбирать важную информацию, строить собственные пути решения, аргументировать свою позицию, работать в группе и развивать свои точки зрения и убеждения. В целом, практико-ориентированные задачи играют важную роль в формировании компетентных и успешных обучающихся.

2.3. Методы и средства обучения, способствующие развитию математической грамотности обучающихся при изучении темы «Определённый интеграл»

Вследствие принятия определения математической грамотности, были представлены не типичные учебные задачи, которые используются в традиционных системах обучения и мониторинговых исследований математической подготовки, а близкие к жизненным проблемные ситуации, представленные в некотором контексте и разрешаемые доступными учащемуся средствами математики.

Математические компетентности, включающиеся в математическую грамотность, можно формировать через специально разработанную систему задач:

Группа 1 - задачи, в которых требуется воссоздать факты и методы, произвести расчеты;

Группа 2 - задания, в которых требуется установить связи и интегрировать материал из разных областей математики;

Группа 3 - задания, в которых требуется выделить в жизненных ситуациях задачу, решаемую с помощью математики, построение модели решения.

Формирование ключевых навыков через решение задач - это эффективный подход для повышения математической грамотности учащихся на уроках математики. Такой подход основывается на развитии конкретных навыков, что позволяет студентам лучше усваивать материал и успешно применять его в решении задач.

Результаты международных исследований и уровни освоения математической грамотности позволяют сделать вывод о том, что приоритетным направлением совершенствования математического образования является достижение высокого уровня математической грамотности. Компетентностный подход к обучению математике заключается в предоставлении практических и прикладных рекомендаций, направленных на решение жизненных проблем и действия в реальных условиях. Такой подход позволит добиться успеха в математике и применять полученные знания на практике.

Обеспечение высокого уровня компетенции математической грамотности, основано на трех методах деятельности:

- использовать математику для моделирования предметов окружающего мира и взаимосвязи между ними;
- оперировать определенным набором математических знаний и умений;
- создавать планы решения проблем.

Компетентностно-ориентированный подход к обучению заключается как раз в сбалансированном формировании всех трех отмеченных обобщенных методов деятельности.

Для успешного формирования математической грамотности учеников необходимо изменить содержание аудиторной деятельности и ориентировать обучение на учащегося. Только через собственное действие ученик может научиться действовать. Ежедневная работа учителя на уроке, выбранные образовательные технологии, а также активное участие учеников на всех этапах учебного процесса - от формулирования гипотез и вопросов до контроля результатов - способствуют эффективному усвоению материала и формированию математической грамотности.

Оценка, самопроверка и взаимная экспертиза играют важную роль в повышении качества усвоения учебного материала учащимися. Благодаря этим методам ученики становятся активными участниками процесса обучения и научаются защищать свои работы.

Одним из способов развития математической грамотности является развитие у учащихся независимого (преобразующего) мышления за счет элементов развивающего обучения, например, при работе над словесной задачей, умение работать с учебным текстом и организация учебного процесса на основе современных информационных и коммуникационных технологий.

Последовательность этапов математического образования определяется задачами адаптации к новым информационным технологиям и коммуникативным условиям, а решение проблем непрерывности образовательного процесса требует постоянной работы по совершенствованию методик и методов обучения.

При работе над текстовым заданием вы можете использовать следующие формы:

- Задания на выполнение *математического анализа задания:* цель - развитие самостоятельного мышления.

- Работа *над преобразованием задачи:* цель состоит в том, чтобы тренировать умение детей составлять задачи, связанные с решенной. К таким задачам относятся аналогичные задачи, преобразованные задачи.

- Решать *взаимно - обратные задачи:* цель - развитие логического мышления. Данные задачи имеют одинаковый сюжет и данные, но отличаются обратными действиями.

- Задачи *творческого характера:* цель – тренировка творческих способностей учеников. Данные задачи предусматривают нахождение нового алгоритма решения.

Используя различные методы развития математической грамотности, учащиеся развивают речь, которая позволяет им логично, точно, аргументированно и точно выражать свои мысли.

Прикладные формы развития математических навыков приводят к повышению у студентов познавательной и исследовательской активности, самостоятельного мышления, способности применять полученные знания в различных сферах жизни.

Использование информационно-коммуникационных технологий на уроке дает возможность представить обработанный материал визуально, красочно, информативно и интерактивно, сэкономив время учителя и ученика.

Также создаются условия для индивидуальной работы ученика в своем темпе и разнообразного общения с преподавателем по необходимости. Использование ИКТ также позволяет быстро отслеживать и оценивать результаты обучения на уроке.

Следовательно, ученик может научиться действовать только в процессе самого действия, а повседневная работа учителя на уроке, образовательные технологии, которые он выбирает, формируют математическую грамотность учеников, соответствующую их возрастному уровню.

Развивать математическую грамотность необходимо постепенно. Регулярно включать в ход урока задания на «изменение и зависимость», «пространство и форма», «неопределенность», «количественное мышление» и так далее.

Эти задания можно использовать по усмотрению учителя:

- Как игровой момент на уроке;
- Как проблемный элемент в начале урока;
- В качестве задачи - «подтолкнуть» к созданию гипотезы для исследовательского проекта;
- В качестве задания на смену занятий на уроке;
- В качестве модели реальной жизненной ситуации, иллюстрирующей необходимость изучения концепции в классе;
- Как задача, создающая междисциплинарные связи в процессе обучения;
- В качестве задания, которое помогает сформулировать свою точку зрения и найти аргументы в ее защиту;
- В качестве своего элективного курса для развития математического мышления;
- Как упражнения, которое могут быть включены в школьные олимпиады, тесты по математике.

Для выполнения заданий требуется объем знаний и навыков, необходимых современному математически грамотному человеку.

Это включает:

- пространственные представления;
- пространственное воображение;
- свойства пространственных фигур;
- умение читать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различных формах (в виде таблиц, диаграмм);
- умение работать с формулами;
- использование статистических показателей для характеристики реальных явлений и процессов;
- выполнение действий с разными единицами измерения (длина, масса, время, скорость) и др.;

Одним из основных способов обеспечения высокого уровня компетентности в математической грамотности является реализация прикладной направленности обучения математике.

Одним из первоначальных методов, позволяющих учащимся проявить активность во время обучения, является эвристическое мышление или эвристическая беседа. Этот метод заключается в том, что учитель не сообщает учащимся готовых знаний, а ставит перед ними учебную проблему, а затем путем последовательно поставленных заданий подводит их к самостоятельному открытию нового для них факта.

Для эффективного обучения рекомендуется использовать метод «проблемного обучения», который позволяет ученикам не только получить готовые знания, но и организовать их «добывание» и «открытие». Учитель выбирает вопросы и задачи, которые будут интересны ученикам и вызовут их напряженную мыслительную активность. Такой подход к обучению позволяет стимулировать любопытство и развивать критическое мышление учеников.

Для достижения наилучших результатов обучения необходимо варьировать методы, используя исследовательский и наглядный подходы. Исследовательский метод позволяет ученикам самостоятельно добывать информацию по теме, например, через написание рефератов, докладов, а также исследование различных источников. В свою очередь, наглядный метод основан на использовании различных наглядных пособий, таких как плакаты, рисунки, а также технических средств, включая кинофильмы и диафильмы. При объединении этих методов достигается наилучший результат в обучении.

Для эффективного усвоения материала необходимо постоянно контролировать его уровень усвоения. Для этого можно проводить самостоятельные работы продолжительностью 20-15 минут и фронтальные опросы на каждом уроке. Перед изучением новой темы также рекомендуется проводить актуализацию знаний, чтобы облегчить понимание нового материала. Его можно изучать как проблему, что дает лучший результат, или же учитель может объяснить его самостоятельно, чтобы экономить время и предоставить больше возможностей для решения практических задач.

После изучения нового материала необходимо провести первичное закрепление, решив задачи по аналогии. Эффективнее всего начинать с простых задач и постепенно увеличивать их сложность. На втором уроке, после представления новой темы, полезно предложить ученикам нестандартные задачи, которые способствуют развитию логического мышления.

Курс "Алгебра и начала анализа" предполагает изучение лишь основ определенного интеграла. Факультативные занятия предполагают более углубленное изучение данной темы.

В теме "Интеграл" рассматриваются вопросы: первообразная функции, интеграл и его применение к нахождению площади, интеграл как предел интегральных сумм, площадь круга и его частей. Кроме того, в курсе "Геометрия" (11 класс) учащиеся знакомятся с применением определенных интегралов к вычислению объемов тел. Программа по математике не предполагает выработки навыков и техники интегрирования сложных функций.

Школьная программа по изучению интегрального исчисления часто сосредоточена на базовых аспектах этого раздела математики: нахождении первообразных функций, вычислении определенных интегралов, а также на практических задачах, связанных с нахождением площадей плоских фигур и объемов тел вращения. Хотя изучение основополагающих вопросов интегрального исчисления является важным, необходимо расширять знания учащихся и знакомить их с более широким спектром применения этой науки.

Многие учителя не учитывают, что использование разнообразных конструкций, содержащих определенные интегралы, позволяет создавать интересные уравнения, неравенства, системы уравнений и различные задачи с параметрами. Решение таких задач вызывает у школьников только положительные эмоции. Решая множество стандартизованных задач, учащиеся быстро устают от «однообразия», что может привести к «мозговому спаду». Никакой учитель не хотел бы столкнуться с этим на своих уроках.

Конструкции могут стать надежной помощью в обучении. Они могут вдохновить учеников на решение не только самого интеграла, но и на применение полученных результатов к решению конкретных задач, что, в свою очередь, вызовет у школьников интерес и увлечение. Составление конструкций также позволяет проводить внутриматематическое моделирование, которое поможет доказать учащимся, что тема «Интеграл» не существует изолированно, а используется при решении задач, ранее изученных тем. Таким образом, можно восстановить атмосферу сотрудничества в классе и решить проблему с «штурмом» в каждом ученике.

Некоторые примеры использования внутриматематического моделирования в теме «Интеграл»:

1. Моделирование изменения площади области под кривой графика функции при изменении аргумента - используя интеграл для вычисления площади под кривой, можно создать математическую модель, которая

позволяет предсказать изменение площади при изменении начальных значений и параметров функции.

2. Моделирование графиков функций - используя интеграл для получения значения функции в определенной точке или интервале значений аргумента, можно создать математическую модель, которая позволяет предсказывать поведение графика функции в заданных условиях.

3. Моделирование физических явлений - используя интеграл для вычисления работы, осуществляемой при перемещении объекта под действием силы, можно создать модель для прогнозирования поведения физической системы.

4. Моделирование экономических явлений - используя интеграл для вычисления общей стоимости производства и объемов производства, можно создать математическую модель для анализа экономических процессов и прогнозирования будущих тенденций.

5. Моделирование биологических процессов - используя интеграл для вычисления площади под кривой концентрации протеина в клетке, можно создать математическую модель для изучения взаимодействия белков в клетке и прогнозирования поведения клетки в различных условиях.

Это только некоторые примеры, и конструкции внутриматематического моделирования могут быть различными в зависимости от конкретных задач.

При решении задач, содержащих конструкции, необходимо учитывать, что учащиеся сталкиваются с переменными, которые появляются в пределах интегрирования. Важно проводить анализ и находить их области допустимых значений, так как вне них многие определенные интегралы не вычислимы.

2.4. Цикл уроков по теме «Практические приложения определённого интеграла»

С учетом методических рекомендаций, приведенных выше и на основании учебника «Алгебра и начала анализа 10−11» (авторы А. Г. Мордкович, П.В. Семенов) были разработаны уроки по теме «Практические приложения определенного интеграла».

Конспект занятия №1 по теме:

«Понятие интеграла. Формула Ньютона-Лейбница»

Тип урока: изучение нового материала.

Основная цель: познакомить обучающихся с определением интеграла; развивать интерес к математике, показав на историческом материале значимость интеграла; воспитывать самостоятельность и аккуратность.

Планируемые результаты:

Предметные: знание смысла определенного интеграла; формирование умений практического применения интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

Метапредметные: владение языком математической логики; навыки поиска и выделения необходимой информации; умение выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

Личностные: ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

Этапы занятия:

1. Постановка цели занятия.

2. Теоретическая часть.

3. Решение практических заданий.

4. Подведение итогов

Ход урока

1. Организационный момент:

- приветствие класса;
- проверить готовность класса к уроку;
- сообщить тему урока и цели.

2. Изучение нового материала.

Учитель для того, чтобы заинтересовать учащихся новым материалом, приводит исторические данные.

Давайте начнем знакомство с новой темой, рассмотрев ее исторический контекст. История интеграла связана с задачами нахождения квадратур. Квадратурные задачи, также известные как задачи о площадях плоских фигур, были изучены математиками Древней Греции и Рима. Они представляют собой тип задач, которые мы сейчас решаем, находя значения площадей. Символ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.), которое происходит от латинского integer означает «целый».

Ребята, на сегодняшнем уроке мы рассмотрим с вами три интересные задачи, но сперва мы познакомимся с новой для вас фигурой. Эта фигура изображена на рис.224 в учебнике на странице 287.

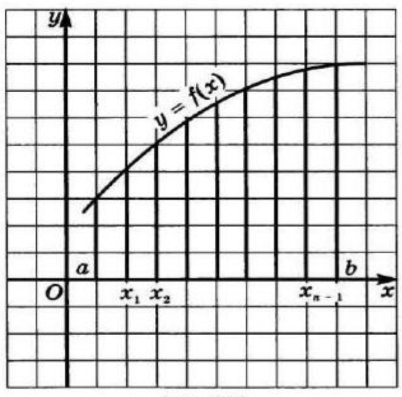


Рис. 224

287

Взгляните на нее. Снизу фигура ограничена осью абсцисс, с боков прямыми $x = a$ и $x = b$, а сверху графиком функции f непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;\ b]$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией.

Ответьте на вопрос, по каким признакам мы можем определить, является ли данная фигура криволинейной трапецией или нет?

Выслушивая ответы ребят, учитель вместе с ними выделяет основные признаки криволинейной трапеции: функция, ограничивающая фигуру, должна быть непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;\ b]$*, по бокам фигура ограничена прямыми* $x = a$ *и* $x = b$*, снизу – отрезком* $[a;\ b]$ *оси* x.

Теперь, когда имеем наглядное представление, решим задачу.

Задача. В декартовой прямоугольной системе координат ху дана фигура, ограниченная осью x, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$. Нам нужно вычислить площадь этой фигуры.

Решение.

Выполните данный чертеж у себя в тетрадях.

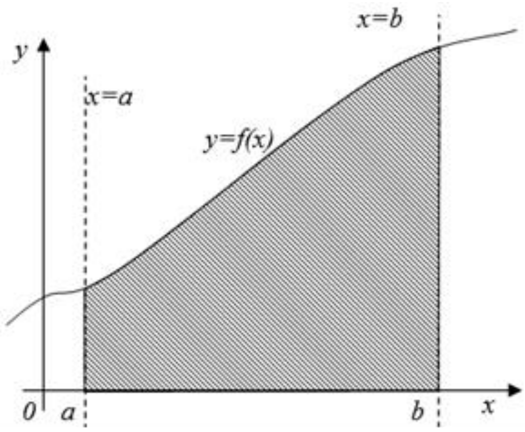


Рисунок 19 – график фигуры, ограниченной осью x, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$.

Мы уже изучили формулы для вычисления площади треугольника и некоторых типов четырехугольников в рамках уроков геометрии. Однако, для вычисления площади нашей конкретной фигуры, нам не хватает соответствующей формулы. Но не стоит отчаиваться! Мы можем применить геометрические знания и приблизительные методы расчета площади, чтобы получить нужный результат. Для этого разобьем отрезок $[\mathrm{a}; b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей с помощью точек $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{n-1}$. Далее проведем соответствующие ординаты. Наша криволинейная трапеция разбилась на n частей – на n узеньких столбиков. Площадь трапеции будет равна сумме площадей столбиков.

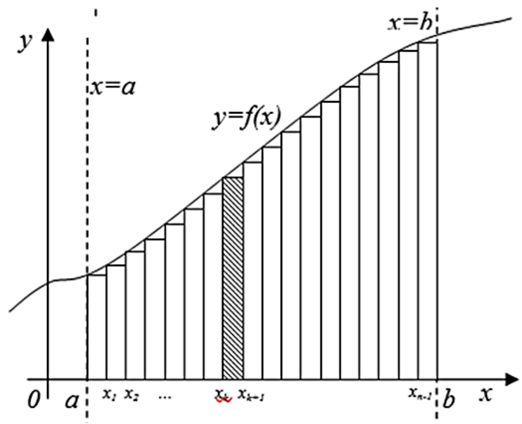


Рисунок 20 – график криволинейной трапеции разбитой на столбики

Рассмотрим отдельно k-тый столбик, т.е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[X_k; X_{k+1}]$. Мы заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(X_k)$. Площадь прямоугольника равна$f(X_k) \cdot \Delta X_k$, где ΔX_k-длина отрезка $[X_k; X_{k+1}]$. Мы получили приближенное значение площади k-го столбика.

Площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис.20):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$. Приближенное равенство $S \approx S_n$ тем точнее, чем больше n.

Принято считать, что искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (S_n): $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Рассмотрим теперь по учебнику решение задачи о вычислении массы стержня и постараемся выделить приемы, которыми пользовались при решении этой задачи и сравнить их с теми приемами, которыми пользовались мы в предыдущей задаче.

Один из учеников вслух читает по учебнику решение задачи, затем вместе с учителем ребята выделяют этапы решения задачи.

Действительно, мы, как и в первой задаче:

1) разбивали отрезок [a; b] на n равных частей;
2) составляли сумму
$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$
3) вычисляли $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Постарайтесь теперь без моей помощи разобрать по учебнику решение задачи №3 и проследить, присутствуют ли названные нами этапы в решении этой задачи.

Ребята приходят к выводу, что решение этой задачи проходит по той же схеме.

В курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. Если функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ непрерывна на отрезке [a; $\boldsymbol{b}$], то справедлива формула

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$**, где $\boldsymbol{F(x)}$ – первообразная для $\boldsymbol{f(x)}$.**

Приведенную формулу обычно называют **формулой Ньютона – Лейбница.**

Ребята, давайте еще раз проанализируем решение задачи, которое нас привело к формуле Ньютона – Лейбница и выделим основные этапы решения.

1) Нашли первообразную функции $f(x)$.

2) Вычислили значения в точках a и b, а затем вычислили разность этих значений.

3) Нашли S.

Оказывается, что для вычисления площади криволинейной трапеции, нужно найти первообразную для функции $f(x)$, ограничивающей эту трапецию на отрезке $[a;\ b]$, и вычислить ее приращение $F(b)-\ F(a)$.

Давайте теперь вернемся, к примеру 1, в котором мы вычисляли площадь фигуры используя геометрический смысл интеграла и найдем площадь этой же фигуры с помощью формулы Ньютона-Лейбница, а затем сравним результаты.

Ребята вычисляют площадь и убеждаются, что в двух случаях получаются одинаковыми.

Завершая урок, давайте вспомним, с какими новыми понятиями вы сегодня познакомились.

Ребята называют криволинейную трапецию и определенный интеграл.

Как можно найти значение определенного интеграла?

Можно вычислить, опираясь на понятие площади фигуры, можно аналитически, используя формулу Ньютона-Лейбница.

Где еще можно применить знания об определенном интеграле?

При решении физических задач.

Мы сегодня получили теоретические знания, связанные с понятием определенного интеграла, а на последующих уроках мы будим применять эти знания для решения различного рода задач.

3. Домашнее задание.

Рассмотреть и проработать основные положения по изученному материалу, а именно:

- стр.287-294 прочитать;
- выучить определения;
- выучить запись определенного интеграла (уметь читать определенный интеграл).

Конспект занятия №2 по теме:

«Определенный интеграл. Решение практико-ориентированных задач»

Тип урока: актуализация знаний.

Основная цель: формировать умение вычислять определенный интеграл, формировать навыки и опыт решения задач с помощью определенного интеграла, воспитывать самостоятельность и аккуратность.

Планируемые результаты:

Предметные: отработать навыки вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона– Лейбница.

Метапредметные: умение самостоятельно планировать пути достижения учебных целей; способность осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач; владение языком математической логики; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

Личностные: ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

Этапы занятия:

1. Постановка цели занятия.
2. Теоретическая часть.
3. Решение практических заданий.
4. Подведение итогов

Ход урока

1. Организационный момент:

- приветствие класса;
- проверить готовность класса к уроку;
- сообщить тему урока и цели.

2. Актуализация знаний.

Ребята, скажите, что называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a;\ b]$

Какие задачи приводят к понятию определенного интеграла?

Как читается запись: $\int_a^b f(x)dx$?

Что обозначают числа a и b в записи определенного интеграла?

В чем состоят физический и геометрический смыслы определенного интеграла?

Как вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$?

Вы большие молодцы, правильно ответили на все вопросы. А теперь откройте ученики и решим пару уравнений. Ульяна и Глеб выйдите, пожалуйста, к доске и решите данные уравнения из номеров

49.6 (г), **№ 49.7 (б)**, все остальные работают в тетрадях.

Решение:

№ 49.6 (г).

$$\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + 2\ln|x|\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + 2\ln 2 - \frac{1}{2}e^2 - 2\ln 1 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + 2\ln 2 = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1) + 2\ln 2$$

№ 49.7 (б).

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{-5x + 6} = -\frac{1}{5}\ln|-5x + 6|\ \Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln 6 + \frac{1}{5}\ln 11 = \frac{1}{5}(\ln 11 - \ln 6) = \frac{1}{5}\ln\frac{11}{6}$$

Отличная работа, ребята присаживайтесь. Теперь разберем практическую задачу.

Допустим, задана функция $y = f(x)$, представляющая путь, который проходит тело вдоль оси x от точки $x = a$ до точки $x = b$. Задача заключается в вычислении длины этого пути с помощью интеграла. Длина пути S вычисляется по формуле: $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\, dx$, где $\frac{\partial f}{\partial x}$ - производная функции $f(x)$.

Таким образом, чтобы вычислить длину пути, необходимо:

1. Найти производную функции $f(x)$;

2. Вычислить выражение $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$;

3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\, dx$.

Например, пусть задана функция $y = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда производная $f'(x) = 2x$, и мы можем вычислить интеграл:
$S = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$.

Это можно решить методом подстановки: заменим $2x$ на t, тогда $dx = \frac{dt}{2}$ и интеграл примет вид: $S = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

Для интегрирования этой функции можно воспользоваться формулой замены $sin(t) = z$, тогда $dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, и интеграл примет вид: $S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(t) \cdot cos^2(t)dt}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t) \cdot cos^2(t)dt}$.

Это простой интеграл, который можно решить по формуле вычисления интегралов от произведения двух функций: $\int udv = uv - \int vdu$. Решив его, мы получим: $S = \frac{1}{2}\sin(t) + t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, длина пути, который проходит тело по функции $y = x^2$ на отрезке [0, 1], равна $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 1.415$.

Подводя итоги урока, учитель отмечает, в какой мере достигнуты цели, называет лучших учеников, называет оценки, отмечает вопросы, по которым ребятам еще нужно работать, указывает на основные ошибки.

3. Домашнее задание. № 49.2 (в; г), № 49.4 (г), № 49.5 (б; в)

2.5. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Для реализации прикладной направленности обучения математике была выбрана экспериментальная работа, в основе которой лежит элективная программа.

Данная работа предназначена для повышения эффективности подготовки учащихся 11 классов к единому государственному экзамену по математике для основного школьного курса.

Совмещенная с учебными материалами программа занятий включает в себя элективные курсы, которые соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта и содержанию основных учебных планов курса математики. Овладение этим материалом и умение его применять в реальной жизни помогут школьникам решать задачи разной сложности и подготовят их к экзаменам по новой форме итоговой аттестации.

Каждое занятие, а также весь курс в целом, нацелены на развитие у школьников интереса к предмету, знакомство с новыми идеями и методами, расширение понимания изучаемого предмета на основном курсе и, главное, на решение проблемных задач. Этот курс знакомит студентов с математикой как общей культурной ценностью и помогает развивать понимание того, что математика — это инструмент для познания окружающего мира и самого себя.

В изучении естественных наук эксперимент играет важную роль, так как именно в процессе его проведения формируются и развиваются интересы студента в данной области. В то же время, в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Весь курс математики строится на решении задач разной сложности и важности. Таким образом, математика, как и естественные науки, требует практического опыта и решения задач для развития понимания и умения применять теоретические знания.

Элективная программа включает в себя:

- создание математической модели по задаче;
- текстовые задачи для практического расчета;

- чтение графиков и диаграмм.

Для обеспечения контроля знаний и навыков студентов каждый модуль курса сопровождается обучающими тестами и самостоятельной работой. И только после их освоения студенты могут приступить к следующему модулю. По окончании курса проводится итоговый тест.

Педагоги оценивают практические тесты и самостоятельную работу студентов на знание базовой теоретической информации. Если выполнено не менее 75% заданий, то работа считается «пройденной», иначе - «не выполненной». При необходимости, для подготовки к ЕГЭ, педагог может использовать материалы из библиографического списка.

Осуществление коррекции знаний учащихся основано на мониторинге отслеживания успешности обучения. При изучении данного факультатива заполняется таблица с результатами тестов и самостоятельной работы.

Так же был проведен мониторинг уровня учебной мотивации обучающихся 11-х классов.

Опытно-экспериментальная часть исследования проводилась на базе школы Красноярского края, Ачинского района, села Большая-Салырь с целью обоснования необходимости формирования математической грамотности у учащихся 11 класса в области «Практические приложения интеграла». В эксперименте приняли участие учащиеся 11 класса в количестве 18 человек.

Для достижения цели экспериментальной работы необходимо провести диагностику уровня математической грамотности и мотивации обучающихся 11 класса на уроках математики, разработать и провести элективные курсы занятий, основанные на практических задачах, а затем провести повторные диагностики.

В ходе диагностической работы класс был разделен на 2 группы (контрольная и экспериментальная), затем им были предложены по 6 задач, за каждое верно решенное задание, выставлялся один балл.

Критерии оценивания:

– Одно - два верных решений – низкий уровень успеваемости;

– Три - четыре верных решения – средний уровень успеваемости;

– Пять - шесть верных решений – высокий уровень успеваемости.

Задания, которые были предложены учащимся 11 класса, для диагностической работы.

<u>Задание №1</u>

Скорость движения точки $v = 9t^2 - 8t\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти путь, пройденный точкой за 4-ую секунду.

Варианты ответов: А) $100\text{м};$ Б) $98\text{м};$ В) 83м

Решение.

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)\,dt = (3t^3 - 4t^2)\Big|_3^4 = (3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2) - (3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2) =$$

$$= 192 - 64 - 81 + 36 = 83(\text{м}).$$

Правильный вариант ответа: В).

<u>Задание №2</u>

Два тела начали двигаться в одном направлении одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, второе – со скоростью $v = (4t + 5)\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 секунд?

Варианты ответов: А) $200\text{м};$ Б) $220\text{м};$ В) 240м

Решение.

Найдем путь, разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 секунд.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^2 + t^2)\Big|_0^5 = 275\ (\text{м}),$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75\ (\text{м}),$$

$$S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200(\text{м}).$$

Правильный вариант ответа: А).

Задание №3

Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Найти путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

Варианты ответов: А) 1200м; Б) 1110м; В) 1010м

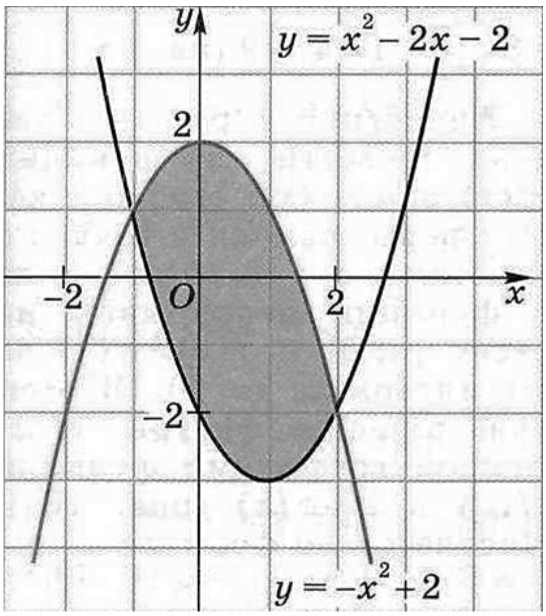
Решение.

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110(\text{м}).$$

Правильный вариант ответа: Б).

Задание №4

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $\text{y} = -x^2 + +2$ и $\text{y} = x^2 - 2x - 2$.



Варианты ответов: А) 19кв. ед; Б) 10кв. ед; В) 9кв. ед

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $-x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2$, корни которого $\text{x}_1 = -1, \text{x}_2 = 2$

Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций:

$$S = \int_{-1}^{2} \left((x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)\right)dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = 9(\text{кв. ед})$$

Правильный вариант ответа: В).

Задание №5

Тело двигается прямолинейно со скоростью, которая изменяется по закону $v = 2t + 1\ (\frac{м}{с})$. Найти расстояние, пройденное телом за интервал времени от $t_1 = 1(c)$ до $t_2 = 3(c)$.

Варианты ответов: А) 10м; Б) 15м; В) 12м

Решение.

$$S = \int_1^3 (2t+1)dt = \left(2 \cdot \frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_1^3 = 9 + 3 - 1 - 1 = 10(\text{м}).$$

Правильный вариант ответа А).

Задание №6

Скорость движения точки $v = 12t - 3t^2\ (\frac{м}{с})$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

Варианты ответов: А) 22; Б) 42; В) 32

Решение.

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = (6 \cdot 4^2 - 4^3) - 0 = 96 - 64 = 32(\text{м}).$$

Правильный вариант ответа В).

В ходе диагностической работы на измерение уровня учебной мотивации было предложено заполнить анкету.

Анкета

Дата ________ Ф.И. ____________________ Класс ____.

Дорогой друг!

Внимательно прочитай каждое неоконченное предложение и варианты ответов к нему. Подчеркни два варианта ответов, которые совпадают с твоим собственным мнением.

1.

1. Обучение в школе и знания необходимы мне для...

а) получения образования; б) поступления в вуз; в) будущей профессии; г) ориентировки в жизни; д) того, чтобы устроиться на работу.

2. Я бы не учился, если бы...

а) не было школы; б) не жил в России; в) не воля родителей; г) не получал знания; д) не жил.

3. Мне нравится, когда меня хвалят за...

а) хорошие отметки; б) успехи в учебе; в) приложенные усилия; г) мои способности; д) выполнение домашнего задания; е) мои личные качества.

2.

4. Мне кажется, что цель моей жизни...

а) работать, жить и наслаждаться жизнью; б) закончить школу; в) доставлять пользу людям; г) обучение.

5. Моя цель на уроке...

а) усвоить что-то новое; б) пообщаться с друзьями; в) слушать учителя; г) получить хорошую оценку; д) никому не мешать.

6. При планировании своей работы я...

а) тщательно обдумываю ее; б) сравниваю ее с имеющимся у меня опытом; в) сначала стараюсь понять ее суть; г) стараюсь сделать это так, чтобы работа была выполнена полностью; д) обращаюсь за помощью к старшим; е) сначала отдыхаю.

7. Самое интересное на уроке — это...

а) общение с друзьями; б) общение с учителем; в) изучение новой темы; г) объяснения учителем нового материала; д) получать хорошие отметки; е) отвечать устно.

3.

8. Я изучаю материал добросовестно, если...

а) он для меня интересен; б) у меня хорошее настроение; в) меня заставляют; г) мне не дают списать; д) мне надо исправить плохую отметку; е) я его хорошо понимаю.

9. Мне нравится делать уроки, когда...

а) ничто меня не отвлекает; б) они несложные; в) остается много свободного времени, чтобы погулять; г) я хорошо понимаю тему; д) нет возможности списать; е) всегда, так как это необходимо для глубоких знаний.

Спасибо за ответы!

Обработка результатов

Предложения 1, 2, 3, входящие в содержательный блок I диагностической методики, отражают такой показатель мотивации, как личностный смысл учения.

Предложения 4, 5, 6 входят в блок II и характеризуют другой показатель мотивации — способность к целеполаганию.

Блок III анкеты (предложения 7, 8, 9) указывает на иные мотивы. Каждый вариант ответа в предложениях названных блоков обладает определенным количеством баллов в зависимости от того, какой именно мотив проявляет себя в предлагаемом ответе (табл.). Внешний мотив — 0 баллов. Игровой мотив — 1 балл. Оценочный мотив — 2 балла. Позиционный мотив — 3 балла. Социальный мотив — 4 балла. Учебный мотив — 5 баллов.

Таблица 4

Ключ для показателей I, II, III мотивации

Номера предложений и баллы, им соответствующие	Варианты ответов						Показатели мотивации
	а	б	в	г	д	е	
1	5	4	4	3	4	-	I
2	0	3	0	5	4	-	
3	2	2	5	2	5	3	
4	3	0	4	5	-	-	II
5	5	1	3	2	0	-	
6	5	3	5	3	0	1	
7	1	3	5	4	2	3	III
8	3	1	0	0	2	5	
9	0	3	1	3	0	5	

Результаты, полученные в ходе диагностики учеников 11 класса, будут рассмотрены в следующем параграфе.

Для лучшего усвоения темы «Практические применения интеграла» было проведено шесть элективных занятий на основе календарно-тематического планирования.

Таблица 5

Календарно-тематическое планирование

№ занятия	Тема занятия	Дата	
		План.	Факт.
29	Понятие криволинейной трапеции.		
30	Практические применения определенного интеграла: вычисление площадей, объемов и длин кривых.		
31	Решение простых задач на движение тела с помощью интегралов.		
32	Геометрический и физический смысл интеграла.		
33	Решение задач практической направленности.		

1 этап: Анализ текста задачи.

В педагогической практике встречается ситуация, когда объясняющий пытается показать ученику решение проблемы, но на определенном этапе объяснения оказывается, что ученик забыл содержание проблемы, и поэтому все усилия были предприняты. напрасно. Чтобы исключить такие ситуации и «принять» проблему, т.е. понять ее и приступить к ее математизации, необходимо, чтобы ему были известны все слова из этой задачи.

1 шаг.

После первого прочтения задачи, необходимо выписать все слова, которые учащемуся могут быть непонятны и дать им пояснение.

Шаг 2.

После того, как все смыслы уточнены, необходимо учащимся еще раз прочитать задачу и ответить на вопрос

О чем задача?

Ответ на данный вопрос учащимися должен дать понять учителю, что сюжет задачи понятен и принят учащимися.

Шаг 3.

Далее обращаясь к тексту задания, выписываются все числовые характеристики, встретившиеся в задании, и, поясняется, что означает каждая из них.

Шаг 4.

Обращаясь к тексту задачи, учащиеся отвечают на вопрос:

– О чем задача?

– Что в ней дано?

– Какой вопрос задачи?

2 этап: Интерпретация условия задачи

Шаг 1. Это составление по условию задачи краткой записи, схемы, чертежа, рисунка и т.д.

В задаче на математическую грамотность обязательно представить ситуацию как она происходит в реальности – постараться смоделировать опору на жизненный опыт.

Не существует определенной формы стенографии для постановки задачи. Но требования к его составлению выделяются следующим образом:

• короткая заметка должна наглядно отображать взаимосвязь между значениями и соответствующими числовыми данными задачи;

• на основе короткой заметки учащиеся должны уметь самостоятельно воспроизвести состояние задачи.

Итак, при расстановке всей информации на схеме, выясняем, как связаны между собой числовые характеристики.

Таким образом, краткая запись является результатом фиксации проведенного анализа текста задачи. Она служит не только хорошей формой, организующей глубокий планомерный анализ задачи, но и неплохим средством для ее

осознания, для ясного представления зависимостей между данными и искомыми, для облегчения поиска решения задачи.

Шаг 2. После того, как на схеме, чертеже, рисунке обозначены данные и связи между ними, выясняем: есть ли в тексте задания лишняя информация? Есть ли противоречивая информация?

Если есть лишняя информация, значит, предлагаем сформулировать условие задачи без лишней информации.

3 этап. Поиск способа решения задачи.

Использование вопросов в управлении учащимися в классе является гибким и эффективным методом обучения. Вопросы позволяют выполнять самые разные работы по развитию учеников в кратчайшие сроки: они учат находить различия и сходства в объектах и явлениях, сопоставлять факты с доказательствами, мобилизовать предыдущий опыт и знания и так далее.

Для решения задач вопросы учителя должны соответствовать определенным требованиям:

- вопрос должен быть кратким и точным;
- задавать вопросы нужно в логической последовательности с постепенным увеличением сложности;
- вопросы должны соответствовать принципу от общего к частному;
- вопросы должны быть достаточно емкими для целостного восприятия, поскольку чрезмерная фрагментация изучаемого материала нарушает его логическую целостность, а слишком обобщенные вопросы могут скрыть ситуацию, которую следует обсудить со студентами;
- вопросы не должны требовать от учащихся односложных ответов (преподаватель может использовать вспомогательные, дополнительные, наводящие вопросы, позволяющие продолжить обсуждение изучаемой проблемы;
- если вопрос задается всему классу, после голоса должна быть пауза;

- поставленный вопрос должен вызывать размышления у учеников, способствовать развитию их активного мышления.

Общие методы поиска решения задачи.

Для успешного решения сложной задачи необходимо умение разбираться с простыми задачами, которые могут быть связаны с ней. При наличии такого навыка, ключевая задача может быть разбита на несколько более легких, решение которых приведет к решению основной задачи. Для этого можно использовать два подхода: синтетический и аналитический (по Н.В. Метельскому). [5].

При решении сложных задач многие студенты часто прибегают к использованию данных из условия и добавляют к ним другие имеющиеся данные. Если такие данные образуют простую задачу, она решается, иначе они образуют новую пару данных, которые помогут решить первую задачу. Таким образом, используя вспомогательные данные и любые другие данные основной проблемы, можно решить вторую простую задачу и получить вторые вспомогательные данные и так далее. Цель этого синтетического метода решения проблем заключается в получении такой простой задачи, результатом которой будет желаемый ответ на главную задачу.

Синтетический метод широко используется при решении арифметических задач. Основным недостатком синтетического метода является отсутствие какого-либо критерия в вопросе о том, с каких данных начинать решение и с каких вспомогательных величин определять, какие простые задачи решать в будущем для решения основной проблемы. Этот метод не подходит для поиска новых решений и мало помогает учащимся научиться самостоятельно решать проблемы, логически рассуждать и мыслить продуктивно. Используя синтетический метод, студенты часто выполняют ненужную работу, а иногда слабый ученик может предложить бессмысленные действия. Единственное, на что в какой-то мере можно положиться синтетическим методом, — это предыдущий опыт учащегося в решении задач, аналогии, ассоциации, которые может вызвать решаемая проблема. В этом случае анализ также оказывает ученикам некоторую помощь, которая проявляется в скрытой, секретной форме.

Достоинством синтетического метода является его компактность, достигаемая при представлении готовых решений, полученных в процессе синтетических или аналитических исследований.

Несмотря на слабую исследовательскую и дидактическую эффективность синтетического метода, он популярен среди школьников и даже учителей, поскольку очень прост и не требует больших умственных усилий.

В аналитическом методе решения отправляются не из состояния проблемы, как это делается в синтетическом методе, а из ее требования, вопроса. Это характерно для всех разновидностей аналитического метода решения задач.

Аналитический подход к решению задач начинается с формулировки вопроса: «Что нужно знать, чтобы выполнить требования задачи?». Для правильного ответа на этот вопрос необходимо учитывать все факторы, связанные с проблемой и определяющие ход решения. Важно учитывать зависимости между этими факторами и требованиями, чтобы найти наиболее эффективное решение.

Если условия задачи понятны и решение кажется очевидным, то следует применять синтетический метод решения. Однако, если задача достаточно сложная и опыт студента не подсказывает план решения, то лучше использовать аналитический метод и поискать примерное направление исследования.

Способы рассуждений при организации поиска решения задач

При решении проблем применяются два основных метода рассуждений: аналитический (анализ) и синтетический (синтез), которые основываются на аналитических и синтетических методах. Они помогают найти оптимальное решение проблемы, разложив ее на составные части или, наоборот, объединив их в единое целое.

Однако на практике для решения проблемы часто используется аналитико-синтетический метод.

Анализ означает способ рассуждений от общего к частному (анализ - разбиение на компоненты), поэтому при поиске решения проблемы, от поставленного вопроса к представляющимся данным, применяется аналитический способ.

Синтез — это метод рассуждения, который позволяет переходить от конкретных фактов к общей картине (синтезировать - создавать целое из частей). В контексте решения задач, этот метод применяется для получения ответа на поставленный вопрос на основе имеющихся данных. Тем не менее, следует отметить, что синтез не является чисто синтетическим методом, поскольку перед получением решения из имеющихся данных, необходимо проанализировать состояние проблемы и извлечь необходимые факты.

Сам метод решения проблемы — это цепочка рассуждений, основанная на анализе и синтезе. Организуя с детьми поиск решения задач, педагог должен переосмыслить систему специально подобранных вопросов, которые используются для организации выбора решения задачи. Эти вопросы не должны приводить к самостоятельному выбору решения. Поиск решения сложной проблемы заканчивается планом решения. Если вы ищете решение проблемы с одновременным созданием схемы решения, то план решения отслеживается непосредственно по схеме.

Далее только для экспериментальной группы был проведен элективный курс. Он направлен на расширение знаний учащихся, повышения уровня математической подготовки через решение большого класса задач. Материал данного курса содержит «нестандартные» методы, которые позволяют более эффективно решить широкий класс заданий, содержащий модуль, и, безусловно, может использоваться учителем как на уроках по математики в 10-11 классах, так и на факультативных и дополнительных занятиях.

Тема занятия: «Понятие криволинейной трапеции»

Фигура, ограниченная неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функцией $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ называется криволинейной трапецией.

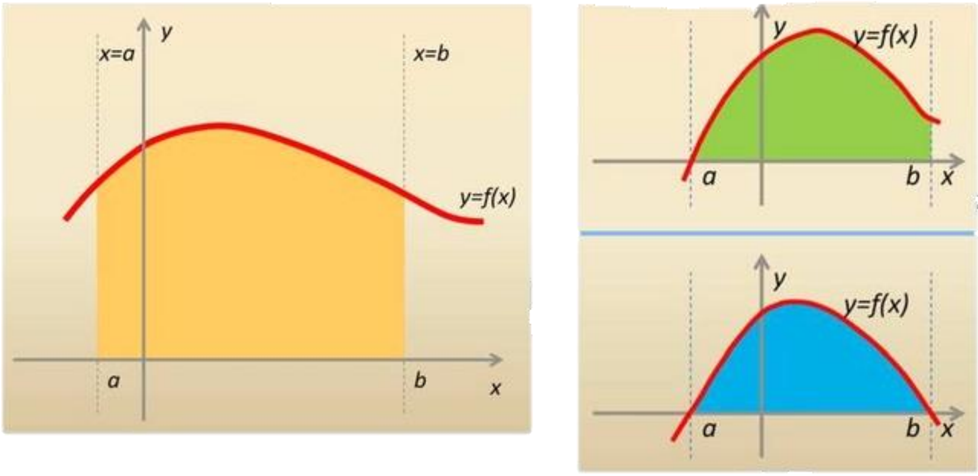


Рисунок 20 – графики криволинейной трапеции

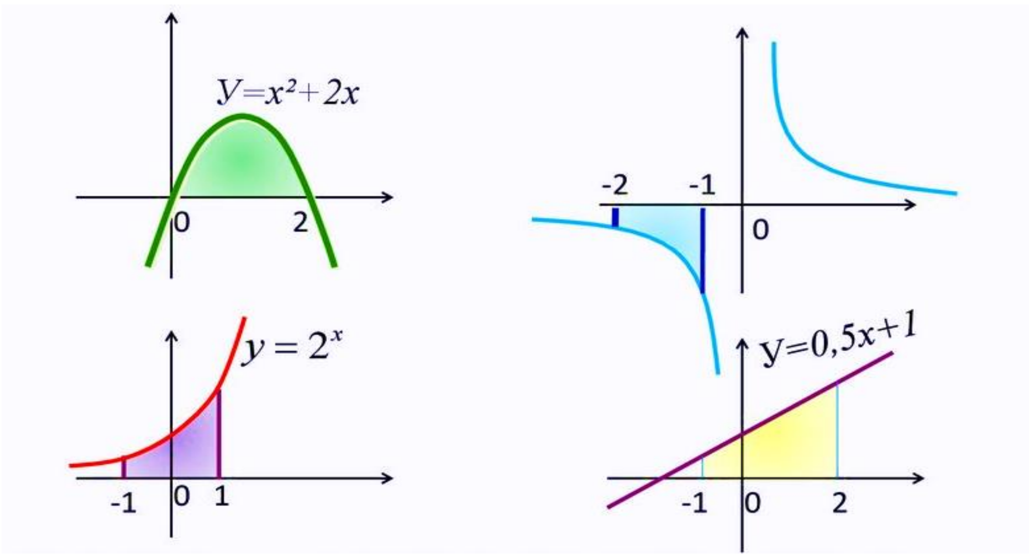
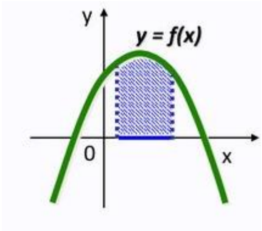
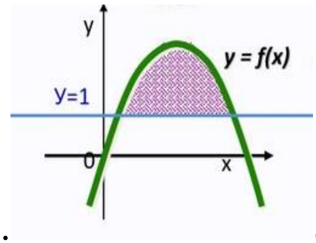


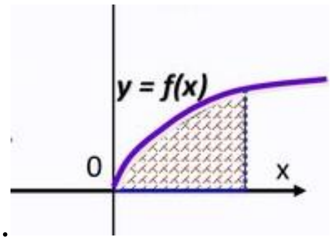
Рисунок 21 – виды криволинейной трапеции

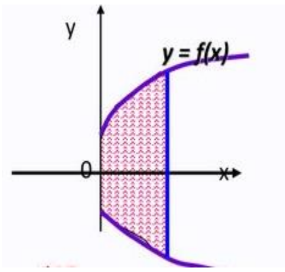
<u>Пример задания</u>

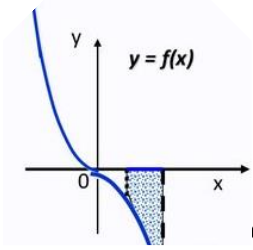
Разделить графики на 2 группы: 1-ая группа – фигуры, являющиеся криволинейной трапецией, 2-ая группа – фигуры, не являющиеся криволинейной трапецией.

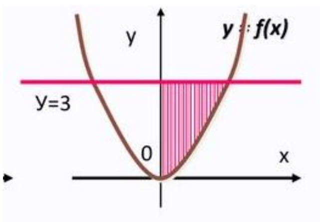
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

Тема занятия: «Геометрический и физический смысл интеграла»

Геометрический смысл

Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

<u>Пример задания</u>

Вычислить интеграл, если график функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 22. Найти площадь заштрихованной фигуры.

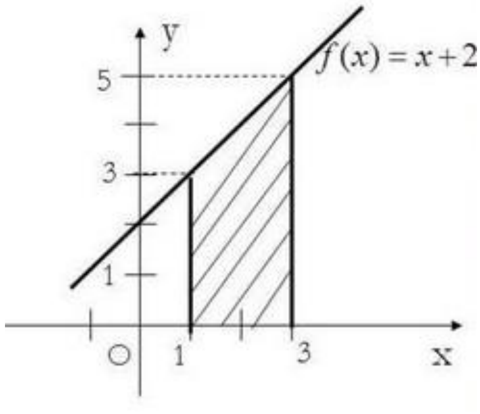


Рисунок 22 – график функции $y = f(x)$

Решение.

$$S = \int_1^3 (x+2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} + 6 - \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = 4 + 4 = 8$$

Ответ: площадь заштрихованной фигуры 8 кв.ед.

Физический смысл

При прямолинейном движении перемещение S численно равно определённому интегралу зависимости скорости V от времени t.

Пример задания

Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v = 3t^2 - 4t + 1$, (время измеряется в секундах, скорость – в см/с). Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения $(t = 0)$?

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

$$S = \int_0^3 (3t^2 - 4t + 1)dt = (t^3 - 2t^2 + t)\Big|_0^3 = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 = 27 - 18 + 3 = 12 \text{ (см)}$$

Ответ: путь 12 см.

Для завершающего этапа эксперимента были представление данные задания обеим группам:

Задание №1

При сжатии пружины на $0{,}05$м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на $0{,}1$м?

Варианты ответов: А) 1000; Б) 100; В) 1010

Решение.

Из условия известно, что величина сжатия пружины равна $0{,}05$м, а произведенная при этом работа - 25 Дж, поэтому воспользуемся формулой:

$$25 = \int_0^{0{,}05} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = 0{,}00125k$$

Откуда $k = \frac{25}{0{,}00125} = 20000\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$. Теперь по этой же формуле находим:

$$A = \int_0^{0{,}1} 20000xdx = 20000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}1} = 20000 \cdot \frac{0{,}01}{2} = 100(\text{Дж}).$$

Правильный вариант ответа: Б).

Задание №2

Тело двигается прямолинейно со скоростью, которая изменяется по закону $v = 3t^2 + 1\ (\frac{м}{с})$. Найти расстояние, пройденное телом за интервал времени от $t_1 = 0(c)$ до $t_2 = 4(c)$.

Варианты ответов: А) 70м; Б) 86м; В) 68м

Решение.

$$S = \int_0^4 (3t^2 + 1)dt = \left(3 \cdot \frac{t^2}{3} + +1t\right)\Big|_0^4 = 4^3 + 4 - 0^3 - 0 = 68(м).$$

Правильный вариант ответа: В).

Задание №3

Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы вытащить шарик массой 9 г из бочки, высота которой 3 м.

Решение.

Из физики известно, что $F = Ph$, то есть $A = \int_a^b Phdh$. Вес шарика будет равен произведению массы на ускорение свободного падения, то есть $P = gm$, где $g = 9{,}8$. Теперь можем вычислить работу силы:

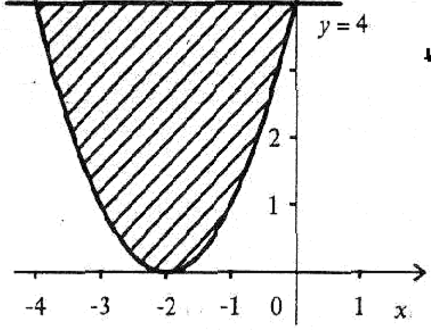
$$A = \int_0^3 gmh \cdot dh = g \cdot 0{,}09 \int_0^3 hdh = 0{,}09 \cdot 9.8 \frac{h^2}{2}\Big|_0^3 = 0{,}882 \cdot \frac{9}{2} = 3{,}969$$

Варианты ответов: А) 3,969; Б) 4,96; В) 3

Правильный вариант ответа: А).

Задание №4

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 2)^2$ и $y = 4$



Решение.

Найдем площадь по формуле: $S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$.

$$S = \int_{-4}^{0} (4 - (x+2)^2)dx = 10\frac{2}{3}$$

Варианты ответов: А) $10\frac{2}{3}$; Б) 10; В) 1

Правильный вариант ответа: А).

<u>Задание №5</u>

Пружина в спокойном состоянии имеет длину $0{,}2$ метра. Сила в 50 Н растягивает пружину на $0{,}01$ метра. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от $0{,}22$ до $0{,}32$ метра?

Варианты ответов: А) 35Дж; Б) 55Дж; В) 40Дж

Решение.

По закону Гука: $50 = 0{,}01k$, т.е. $k = 5000\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Находим пределы интегрирования $a = 0{,}22 - 0{,}2 = 0{,}02(\text{м}), b = 0{,}32 - 0{,}2 = 0{,}12(\text{м})$. Теперь по формуле получим:

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000x dx = 5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,02}^{0,12} = 2500 \cdot (0{,}0144 - 0{,}0004) =$$

$$= 2500 \cdot 0{,}014 = 35\ (\text{Дж}).$$

Правильный вариант ответа: А).

<u>Задание №6</u>

Скорость движения изменяется по закону $v = 2t\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение.

$$S = \int_2^3 2t\,dt = t^2\Big|_2^3 = 9 - 4 = 5(\text{м})$$

Варианты ответов: А) 5м; Б) 8м; В) 11м

Правильный вариант ответа: А).

Результаты, полученные в ходе диагностики учеников 11 класса, будут рассмотрены в следующем параграфе.

2.6. Итоги опытно-экспериментальной работы

С целью выявления уровня развития математической грамотности обучающихся 11 класса на уроках математики, мной была проведена экспериментальная работа. Детям предлагалось выполнить 6 заданий, позволяющих провести диагностику сформированности математической грамотности обучающихся.

Я посчитала правильно выполненные задания и выявила уровень развития математической грамотности каждого учащегося, принявшего участие в нашей экспериментальной работе.

Шкала оценивания:

– Если учащиеся допустили 0-1 ошибку, то у них высокий уровень развития математической грамотности;

– Если учащиеся допустили 2-3 ошибки, то у них средний уровень развития математической грамотности;

– Если учащиеся допустили 4 и более ошибок, то у них низкий уровень развития математической грамотности;

В таблице 6 и 7 представлены уровни сформированности математической грамотности у учеников 11 класса на констатирующем этапе.

Таблица 6

Уровни сформированности математической грамотности в контрольной группе на констатирующем этапе

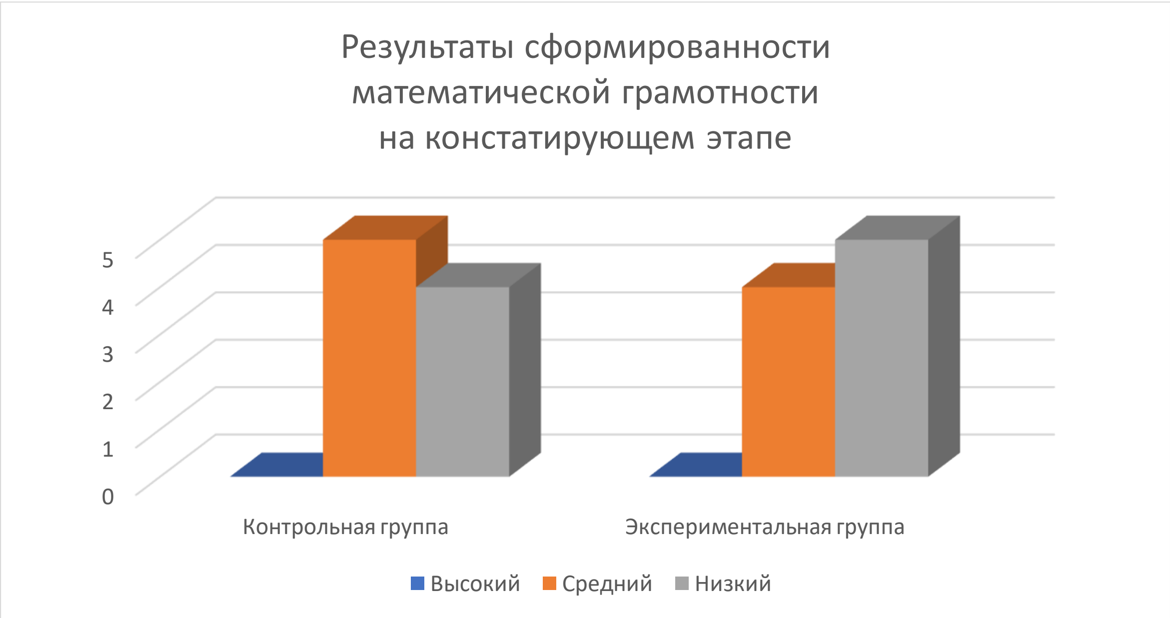
ФИО	Номер задания						Общее кол-во ошибок	Уровень
	1	2	3	4	5	6		
1. Ананьева Юлия	+	-	-	-	-	+	4	низкий
2. Гармаш Лев	+	+	+	+	-	-	2	средний
3. Гуртовой Олег	-	+	-	-	-	-	5	низкий
4. Кац Виктория	+	+	-	-	+	+	2	средний
5. Левина Олеся	+	-	-	+	-	-	4	низкий
6. Носов Денис	+	+	-	-	-	-	4	низкий

ФИО	Номер задания						Общее кол-во ошибок	Уровень
	1	2	3	4	5	6		
7. Нетяга Глеб	-	-	+	+	+	-	3	средний
8. Юсупов Дамир	-	-	-	-	-	+	5	низкий
9. Ярков Даниил	-	+	-	+	-	+	3	средний

Таблица 7

Уровни сформированности математической грамотности в экспериментальной группе на констатирующем этапе

ФИО	Номер задания						Общее кол-во ошибок	Уровень
	1	2	3	4	5	6		
1. Абрамов Иван	+	-	-	-	-	+	4	низкий
2. Бурлаков Ян	+	+	+	+	-	-	2	средний
3. Дударев Макс	-	+	-	-	-	-	5	низкий
4. Жукова Мария	+	+	-	-	+	+	2	средний
5. Лыкова Инна	+	-	-	+	-	-	4	низкий
6. Немов Алексей	+	+	-	-	-	-	4	низкий
7. Оксимов Илья	-	-	+	+	+	-	3	средний
8. Полевой Глеб	-	-	+	+	-	-	4	низкий
9. Полевая Ульяна	+	+	+	+	-	-	2	средний



Таким образом, видно уровень сформированности математической грамотности у учащихся 11 класса (как у детей контрольной группы, так и у детей экспериментальной группы) на среднем и низком уровне. Дети при выполнении заданий допускали ошибки. Так, среди учеников контрольной группы, низкий уровень сформированности математической грамотности был выявлен у 4 учеников (44%). Средний уровень сформированности математической грамотности у учащихся контрольной группы был выявлен у 5 учеников (55%). Таким образом, подводя итог проведённой диагностики уровня сформированности математической грамотности у учащихся 11 класса, можно сделать вывод о том, что у детей преобладает средний и низкий уровень сформированности математической грамотности. Следовательно, необходимо проводить занятия, которые будут направлены на развитие у детей математической грамотности.

Что касается учащихся экспериментальной группы, то среди 9 учеников, у 5 (55%) был выявлен низкий уровень сформированности математической грамотности. Данные дети справились правильно лишь с 2-мя заданиями из 6-ти предложенных. Средний уровень сформированности математической грамотности был выявлен также у 4 (44%) учащихся экспериментальной группы.

Ни у одного ученика по результатам диагностики не был выявлен высокий уровень сформированности математической грамотности. Никто не выполнил правильно все 6 предложенных заданий.

Основываясь на результате диагностики, можно сделать вывод о необходимости формирования у большинства обучающихся 11 классов основ математической грамотности в области «Практические приложения интеграла». С целью улучшения уровня знаний было организовано экспериментальное обучение с применением методики, которая позволила более эффективно изучать тему.

С целью выявления уровня учебной мотивации обучающихся 11 класса на уроках математики, мной так же была проведена экспериментальная работа. Детям предлагалось заполнить анкету, состоящую из 9 вопросов, позволяющих провести диагностику уровня мотивации обучающихся. Я проверила результаты и выявила уровень мотивации каждого учащегося, принявшего участие в нашей экспериментальной работе (табл. 8).

Таблица 8

Оценка мотивации обучающихся

Уровень мотивации	Показатели мотивации			Сумма баллов итогового уровня мотивации
	I (баллы)	II (баллы)	III (баллы)	
I	14—15	14—15	13—15	39—45
II	11—13	11—13	10—12	32—38
III	8—10	8—10	7—9	23—31
IV	6—7	5—7	3—6	12—22
V	до 5	до 4	до 2	до 11

I — *очень высокий уровень мотивации учения;*

II — *высокий уровень мотивации учения;*

Ш— *нормальный (средний) уровень мотивации учения;*

IV— *сниженный уровень мотивации учения;*

V — *низкий уровень мотивации учения*.

Кроме того, уровни мотивации по блоку I показывают, насколько сильным для школьника является личностный смысл обучения. Уровни мотивации по блоку II свидетельствуют о степени развитости у учащихся способности к целеполаганию. Анализ данных по каждому из этих показателей мотивации позволит руководителям образовательного учреждения, учителям, школьному психологу сделать вывод об эффективности педагогической работы в плане формирования личностного смысла учения и способности к целеполаганию, а также сформулировать соответствующие коррекционно-развивающие задачи.

Таким образом, оценка эффективности образовательного процесса на данном этапе тестирования осуществляется по следующим групповым показателям:

– количество учащихся с высоким и очень высоким уровнем развития учебной мотивации, выраженное в процентах от общего числа обследуемых;

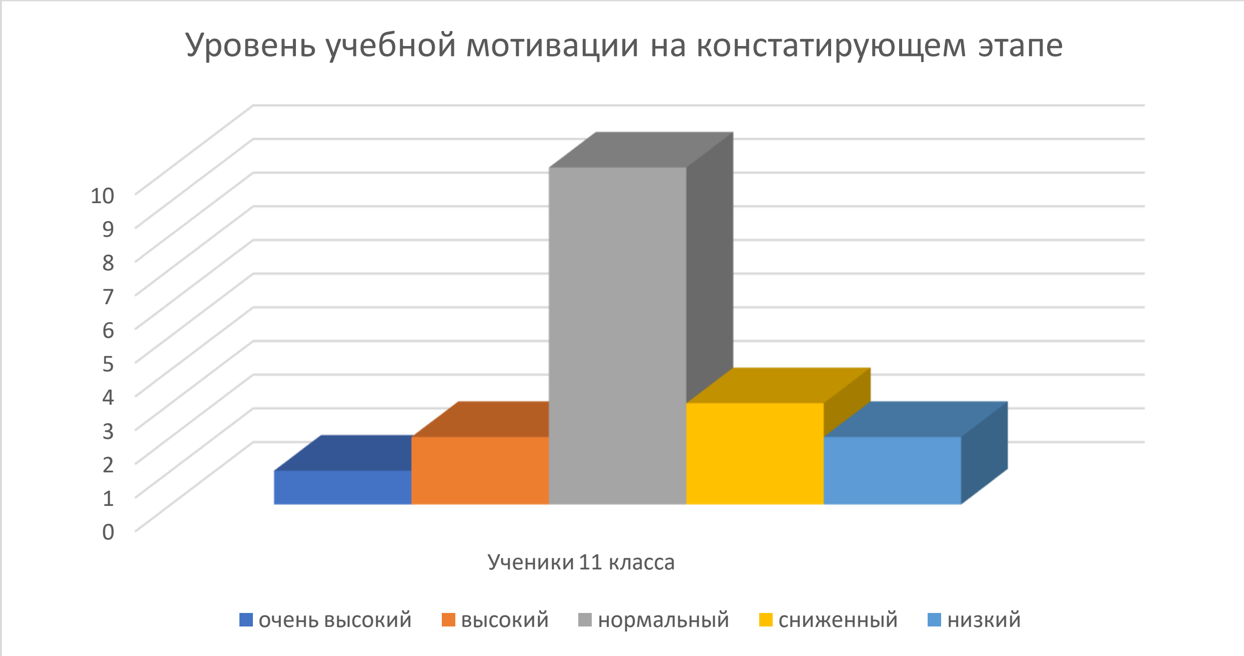
– количество учащихся со средним уровнем учебной мотивации, выраженное в процентах от общего числа обследуемых;

– количество учащихся с низким уровнем учебной мотивации, выраженное в процентах от общего количества обследуемых (табл. 9).

Таблица 9

Уровень учебной мотивации учащихся 11 класса на констатирующем этапе

ФИО	Номер задания									Общее кол-во баллов	Уровень сформированности
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1. Абрамов Иван	5	3	3	4	3	3	4	3	5	33	высокий
2.Ананьева Юлия	4	3	3	4	3	3	3	3	3	29	нормальный
3. Бурлаков Ян	4	4	3	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
4. Гармаш Лев	3	0	0	3	2	1	2	2	0	13	сниженный
5.Гуртовой Олег	3	0	2	0	1	1	2	2	0	11	низкий
6. Дударев Макс	4	4	3	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
7. Жукова Мария	3	0	2	3	2	1	1	2	1	15	сниженный
8. Кац Виктория	4	4	3	4	4	3	4	3	3	32	высокий
9. Левина Олеся	3	3	3	4	3	4	3	3	3	29	нормальный
10. Лыкова Инна	4	3	4	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
11. Немов Алексей	3	0	2	3	2	1	1	3	0	15	сниженный
12. Нетяга Глеб	4	3	3	4	3	3	3	3	3	29	нормальный
13. Носов Денис	4	4	3	4	3	3	3	3	3	30	нормальный
14. Оксимов Илья	4	3	3	4	3	3	2	3	3	28	нормальный
15. Полевой Глеб	4	4	3	4	3	3	5	3	2	31	нормальный
16. Полевая Ульяна	5	5	3	4	5	4	5	5	5	41	очень высокий
17. Юсупов Дамир	3	0	2	0	1	1	3	1	0	11	низкий
18. Ярков Даниил	4	4	3	4	3	3	5	3	2	31	нормальный



Таким образом, подводя итог проведённой диагностики уровня учебной мотивации у учащихся 11 класса, можно сделать вывод о том, что у детей преобладает средний уровень мотивации (55%). Высокий и сниженный уровень мотивации преобладают практически в равных мерах (16% и 11%). Следовательно, необходимо проводить занятия, которые будут направлены на развитие у детей учебной мотивации.

Следующим этапом, учащимися был пройден повторный экспериментальный тест, с целью выявления развития уровня математической грамотности обучающихся 11 класса. Детям предлагалось выполнить 6 заданий, позволяющих провести диагностику сформированности математической грамотности обучающихся.

Я посчитала правильно выполненные задания и выявила уровень развития математической грамотности каждого учащегося, принявшего участие в нашей экспериментальной работе.

В таблице 10 и 11 представлены уровни сформированности математической грамотности у учеников 11 класса на завершающем этапе.

Таблица 10

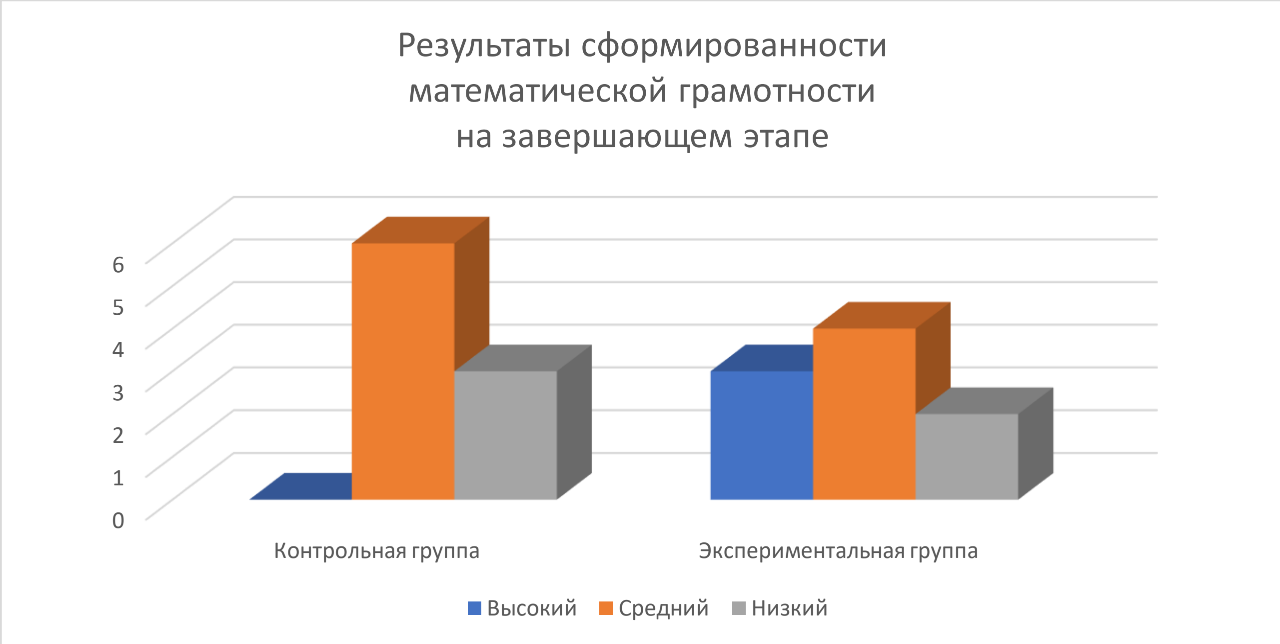
Уровни сформированности математической грамотности в контрольной группе на завершающем этапе

ФИО	Номер задания						Общее кол-во ошибок	Уровень
	1	2	3	4	5	6		
1. Ананьева Юлия	+	-	-	-	-	+	4	низкий
2. Гармаш Лев	+	+	+	+	-	-	2	средний
3. Гуртовой Олег	-	+	-	+	+	+	2	средний
4. Кац Виктория	+	+	-	-	+	+	2	средний
5. Левина Олеся	+	-	-	+	-	-	4	низкий
6. Носов Денис	+	+	+	-	-	-	3	средний
7. Нетяга Глеб	-	-	+	+	+	-	3	средний
8. Юсупов Дамир	-	-	-	-	-	+	5	низкий
9. Ярков Даниил	-	+	-	+	-	+	3	средний

Таблица 11

Уровни сформированности математической грамотности в экспериментальной группе на завершающем этапе

ФИО	Номер задания						Общее кол-во ошибок	Уровень
	1	2	3	4	5	6		
1. Абрамов Иван	-	+	-	+	+	+	2	средний
2. Бурлаков Ян	+	+	+	+	+	-	1	высокий
3. Дударев Макс	+	+	-	+	-	+	2	средний
4. Жукова Мария	+	+	-	-	+	+	2	средний
5. Лыкова Инна	+	-	-	+	-	-	4	низкий
6. Немов Алексей	+	+	-	-	-	-	4	низкий
7. Оксимов Илья	-	-	+	+	+	-	3	средний
8. Полевой Глеб	-	+	+	+	+	+	1	высокий
9. Полевая Ульяна	+	+	+	+	-	+	1	высокий

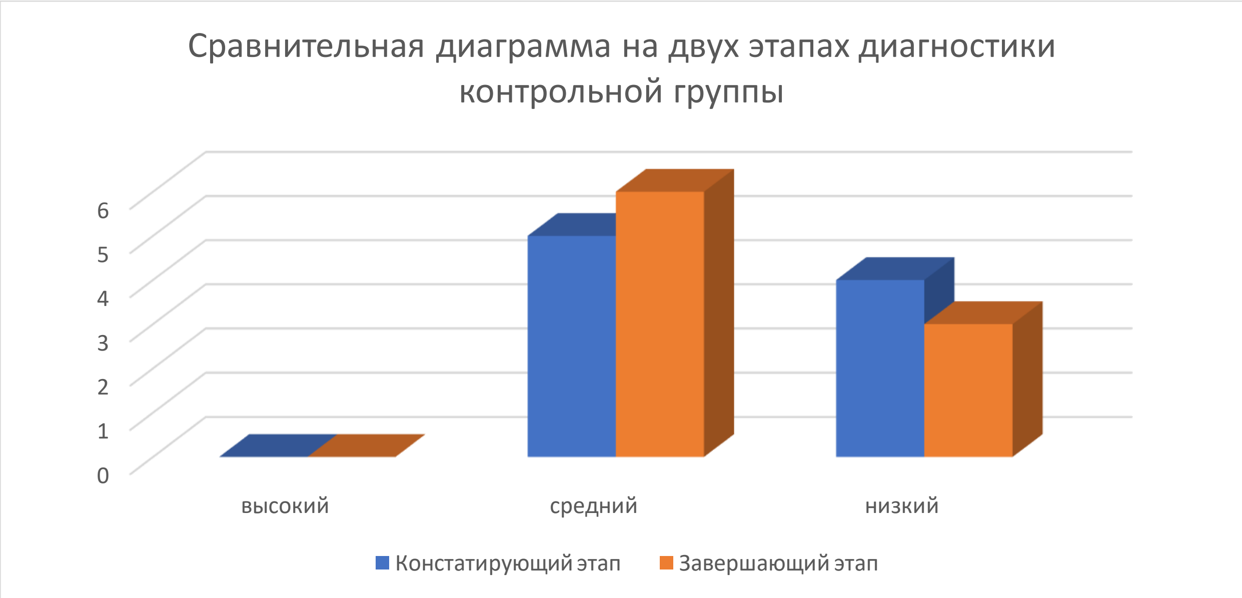


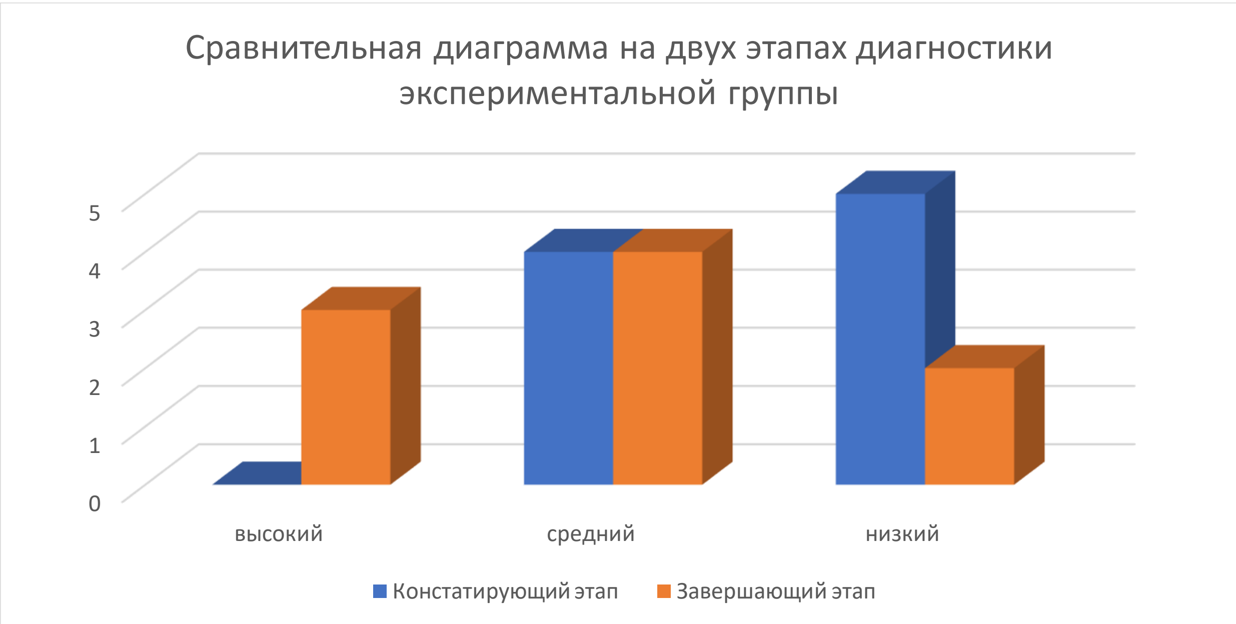
Таким образом, видно уровень сформированности математической грамотности у учащихся 11 класса (как у детей контрольной группы, так и у детей экспериментальной группы) в основном на среднем уровне. Дети при выполнении заданий допускали ошибки. Так, среди учеников контрольной группы, низкий уровень сформированности математической грамотности был выявлен у 3 учеников (33%). Средний уровень сформированности математической грамотности у учащихся контрольной группы был выявлен у 6 учеников (66%). Таким образом, подводя итог проведённой диагностики уровня сформированности математической грамотности у учащихся 11 класса, можно сделать вывод о том, что у детей преобладает средний и низкий уровень сформированности математической грамотности.

Что касается учащихся экспериментальной группы, то среди 9 учеников, у 2 (22%) был выявлен низкий уровень сформированности математической грамотности. Данные дети справились правильно лишь с 2-мя заданиями из 6-ти предложенных. Средний уровень сформированности математической грамотности был выявлен также у 4 (44%) учащихся экспериментальной группы. Высокий уровень сформированности математической грамотности у учеников, вошедших в экспериментальную группу, был выявлен у 3 человек.

Данные ученики правильно справились с 5-ю заданиями из 6-ти предложенных.

Таким образом, подводя итог проведённой диагностики уровня сформированности математической грамотности у учащихся 11 класса, можно сделать вывод о том, что у детей контрольной группы показатели практически не изменились. Что касается экспериментальной группы, у них повысились средний и высокий уровни сформированности математической грамотности, а низкий наоборот понизился. Следовательно, решение практико-ориентированных задач на элективных курсах, благоприятно влияют на повышение уровня развития математической грамотности у обучающихся.





Так же после прохождения элективных курсов, учащимися был пройден повторный экспериментальный тест, с целью выявления развития уровня учебной мотивации обучающихся 11 класса. Детям предлагалось заполнить анкету повторно, позволяющую провести диагностику учебной мотивации обучающихся.

Я проверила результаты и выявила уровень мотивации каждого учащегося, принявшего участие в нашей экспериментальной работе. (табл. 12)

Таблица 12

Уровень учебной мотивации учащихся 11 класса на завершающем этапе

ФИО	Номер задания									Общее кол-во баллов	Уровень сформированности
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1. Абрамов Иван	5	3	3	4	3	3	4	3	5	33	высокий
2.Ананьева Юлия	4	3	3	4	3	3	3	3	3	29	нормальный
3. Бурлаков Ян	4	4	3	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
4. Гармаш Лев	3	0	0	3	2	1	2	2	0	13	сниженный
5.Гуртовой Олег	3	0	2	0	1	1	2	2	0	11	низкий
6. Дударев Макс	4	4	3	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
7. Жукова Мария	3	0	2	3	2	1	1	2	1	15	сниженный
8. Кац Виктория	4	4	3	4	4	3	4	3	3	32	высокий
9. Левина Олеся	3	3	3	4	3	4	4	5	5	34	высокий
10. Лыкова Инна	4	3	4	4	3	3	4	3	3	31	нормальный
11. Немов Алексей	3	0	2	3	2	1	1	3	0	15	сниженный
12. Нетяга Глеб	4	3	3	4	3	3	3	3	3	29	нормальный
13. Носов Денис	4	4	3	4	3	3	3	3	3	30	нормальный
14. Оксимов Илья	4	3	3	4	3	3	2	3	3	28	нормальный
15. Полевой Глеб	4	4	3	4	3	3	5	4	3	33	высокий
16. Полевая Ульяна	5	5	3	4	5	4	5	5	5	41	очень высокий
17. Юсупов Дамир	3	0	2	0	1	1	3	1	0	11	низкий
18. Ярков Даниил	4	4	3	4	3	3	5	3	2	31	нормальный

Таблица 13

Оценка мотивации обучающихся

Уровень мотивации	Показатели мотивации			Сумма баллов итогового уровня мотивации
	I (баллы)	II (баллы)	III (баллы)	
I	14—15	14—15	13—15	39—45
II	11—13	11—13	10—12	32—38
III	8—10	8—10	7—9	23—31
IV	6—7	5—7	3—6	12—22
V	до 5	до 4	до 2	до 11

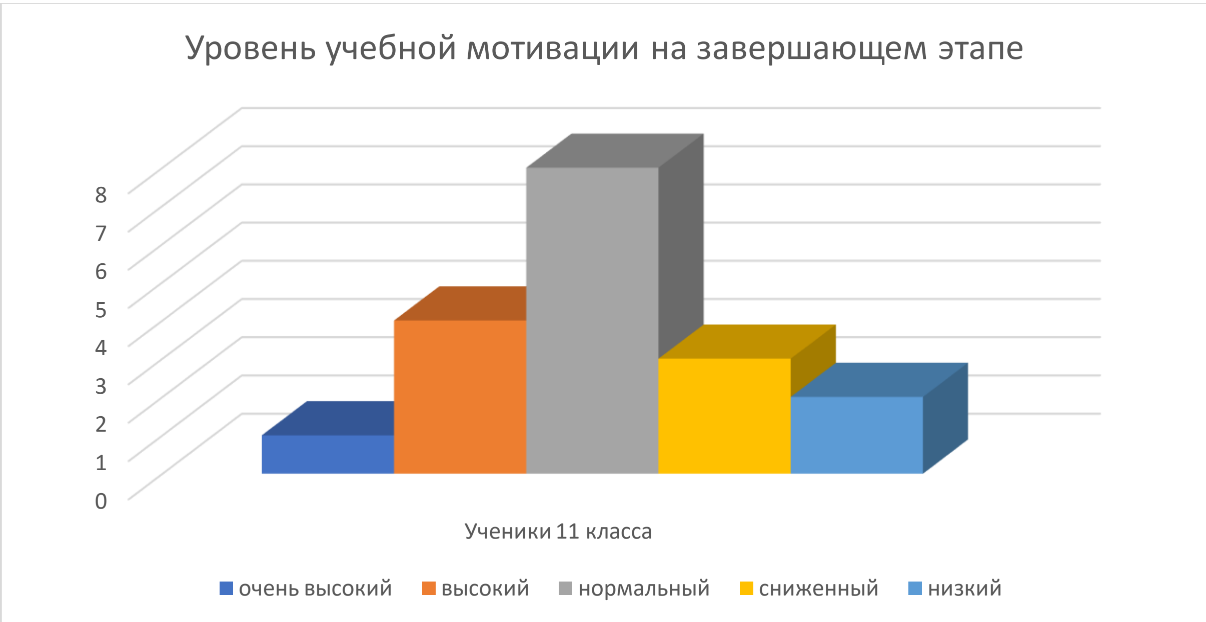
I — *очень высокий уровень мотивации учения;*

II — *высокий уровень мотивации учения;*

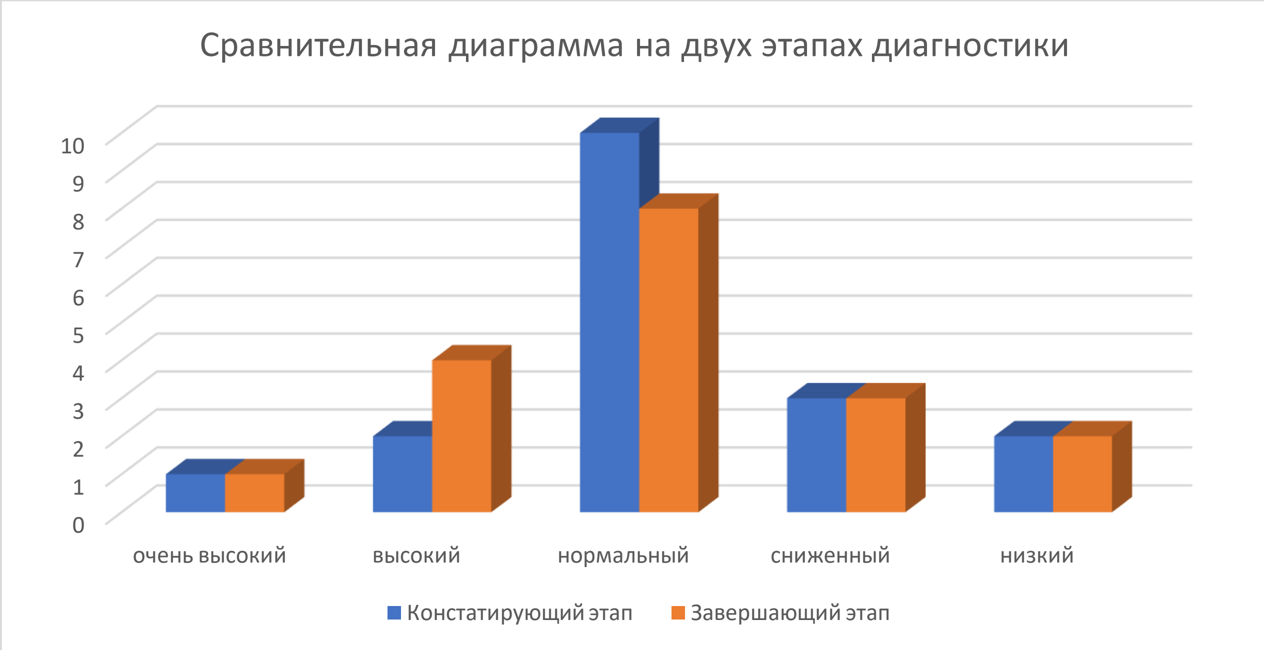
Ш— *нормальный (средний) уровень мотивации учения;*

IV— *сниженный уровень мотивации учения;*

V — *низкий уровень мотивации учения.*



Таким образом, подводя итог проведённой диагностики уровня учебной мотивации у учащихся 11 класса, можно сделать вывод о том, что у детей так же преобладает нормальный уровень мотивации (44%). Повысился процент высокого уровня мотивации (с 16% до 27%). Сниженный уровень мотивации практически не изменился. Следовательно, необходимо проводить занятия, которые будут направлены на развитие у детей учебной мотивации.



Формирование математической грамотности на уроках математики реализуется в рамках целостной образовательной программы. Учебный предмет «Математика» является основой развития у учащихся регулятивных универсальных учебных действий, в первую очередь логических и алгоритмических. Элективные занятия помогают учащимся повысить уровень учебной мотивации. В особенности тем учащимся, которые нацелены на хороший результат сдачи единого Государственного экзамена.

Выводы по 2 главе

Таким образом, изучение темы «Практические приложения интеграла» в 11 классах может быть более эффективным при использовании интерактивных методов обучения, таких как игры, симуляции и обсуждения практических примеров. Задачи с открытым ответом также могут помочь развить у учащихся навыки решения задач и аналитического мышления. Применение проектных методов обучения может существенно улучшить учебный процесс и помочь учащимся углубить свои знания и навыки в теме «Практические приложения интеграла», а также развить коммуникативные, организационные и творческие навыки.

В целом, использование различных методик может помочь формировать математическую грамотность учащихся и повысить их интерес к изучению темы «Практические приложения интеграла».

В результате проведённой диагностики уровня сформированности математической грамотности у учащихся 11 классов, можно сделать вывод о том, что у детей преобладает средний уровень сформированности математической грамотности. Следовательно, необходимо проводить занятия, которые будут направлены на развитие у детей математической грамотности. Успешность выполнения заданий на элективном курсе, способствуют развитию у учащихся учебной мотивации, что ведет к успешной сдаче единого Государственного экзамена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение, стоит подчеркнуть, что повышение уровня математической грамотности имеет огромное значение в различных сферах жизни: от научных и технических новшеств до экономического развития и принятия взвешенных решений. Наша работа показывает, что изучение темы «Практические приложения интеграла» является необходимым фактором в формировании математической грамотности учащихся и их подготовке к вызовам будущего.

В данной работе была изучена особенность формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов на уроках математики. Нами было доказано, что включение в систему математической подготовки обучающихся комплекса задач по теме «Практические приложения интеграла», способствует развитию математической грамотности обучающихся и повышению уровня их учебной мотивации.

В процессе исследования были получены следующие результаты.

Описана и изучена сущность и структура математической грамотности.

Определены дидактические возможности практико-ориентированных задач для дальнейшего их применения в развитии математической грамотности обучающихся.

Разработан комплекс учебно-методических материалов, предназначенный для проведения разнообразных форм внеклассной работы по математике. Он направлен на стимулирование развития математической грамотности у учащихся.

Был разработан и успешно проведен эксперимент, который показал эффективность разработанного нами комплекса задач для повышения уровня математической грамотности обучающихся.

Математическая грамотность становится фактором, способствующим развитию у учащихся способностей к творческому мышлению, умению выбирать профессиональный путь, использовать информационные и коммуникационные технологии в различных сферах жизни, а также обучению на протяжении всей жизни.

Задачи обучения математической грамотности учащихся могут быть реализованы при условии оптимального сочетания образовательного содержания уровня основного образования и дополнительных курсов, направленных на совершенствование прикладных математических навыков, используемых в различных жизненных ситуациях. Процесс формирования математической грамотности, является непрерывным и присутствует при изучении любого курса математики, в каждой теме, на каждом уроке.

Одним из важнейших аспектов развития математической грамотности является применение практических задач в учебном процессе. Это позволяет ученикам освоить ряд универсальных учебных навыков, таких как умение обрабатывать информацию, выделять главное, формулировать собственные решения и обосновывать их.

Основываясь на моих наблюдениях, я пришла к выводу, что регулярное использование задач, ориентированных на практику, способствует увеличению интереса учащихся к учебному процессу и формированию их мотивации на уроках.

В дальнейшем ставлю перед собой цель продолжать работу по составлению и использованию практико-ориентированных задач на уроках математики в основной школе для обеспечения стабильных результатов.

С учетом быстрого развития технологий и информационных систем, необходимо, чтобы учащиеся были готовы к применению математических знаний и навыков в реальном мире. Изучение практических приложений интеграла может помочь учащимся понять, как математические концепции применяются на практике, и как они могут использовать свои знания для решения реальных проблем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы, 2016. 291 с.

2. Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни, 2010. 118 с.

3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы, 2013. 281 с.

4. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы, 2013.

5. Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников, 2004.

6. Журавлев В. И. Педагогика: учебник для вузов / В. И. Журавлев. - Москва: Юрайт, 2019. - 480 с.

7. Новиков Д. А. Технологии обучения математике в современной школе: монография / Д. А. Новиков. - Москва: Дрофа, 2020. - 224 с.

8. Гареева Н.Н. Особенности метапредметных результатов обучения математике и средств их диагностики // Педагогический эксперимент: подходы и проблемы. 2018. № 4. С. 79–87

9. Кулешова С.А., Глушакова И.В. Приложения интеграла в физике. Москва: МФТИ, 2013. 224 с.

10. Колесникова Е.А., Панкратов В.И. Приложения интеграла в экономике. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. 160 с.

11. Матвеева М. А. Организация проектной деятельности на уроках математики: методические рекомендации для учителей / М. А. Матвеева, Н. В. Фадеева. - Санкт-Петербург: Питер, 2019. - 192 с.

12. Кулешова С. А. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов педагогических вузов / С. А. Кулешова. - Москва: Юрайт, 2018. - 304 с.

13. Леснова О. В. Особенности преподавания математики в современной школе: учебно-методическое пособие / О. В. Леснова, А. С. Трофимов. - Москва: Академия, 2020. - 272 с.

14. Ильин В.А. Основы математического анализа. Том 2 / В.А. Ильин, А.В. Куркина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 576 с.

15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 2 / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Высшая школа, 1982. - 480 с.

16. Рудин В.В. Математический анализ. Том 2 / В.В. Рудин. - М.: Наука, 1984. - 448 с.

17. Черемных Е. И. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Е. И. Черемных, А. А. Александрова, Т. В. Калинина. - Москва: Дрофа, 2021. - 352 с.

18. Петров В. В. Использование задачных упражнений в обучении математике: учебно-методическое пособие / В. В. Петров, М. В. Петрова. - Москва: Издательство Московского университета, 2018. - 128 с.

19. Холодная М.А. Приоритеты современного школьного образования: способность адаптироваться к социуму или интеллектуальное развитие и воспитание? // Психология и современное российское образование: материалы IV Всероссийского съезда психологов образования России (8–12 декабря 2008 г., Москва). М., 2008. С. 381–383.

20. Кудряшов Н.А. Сборник задач по математическому анализу. Том 2 / Н.А. Кудряшов. - М.: МЦНМО, 2004. - 528 с.

21. Степанова Т. М. Применение информационных технологий в обучении математике: монография / Т. М. Степанова, А. А. Галкин. - Москва: Юрайт, 2019. - 231 с.

22. Mathematics Teaching Practices. Organisation for Economic Co-operation and Development. [Электронный ресурс]. URL: https://www.oecd.org/education/school/mathematics-teaching-practices.htm (дата обращения: 20.04.2023).

23. National Council of Teachers of Mathematics. [Электронный ресурс]. URL: https://www.nctm.org/ (дата обращения: 20.04.2023).

24. Mathematics Education Resources. American Mathematical Society. [Электронный ресурс]. URL: https://www.ams.org/programs/math-ed/resources (дата обращения: 20.04.2023).

25. Mathematics Education. International Mathematical Union. [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathunion.org/activities/mathematics-education (дата обращения: 20.04.2023).

26. Mathematics Education Research Group of Australasia. [Электронный ресурс]. URL: https://www.merga.net.au/ (дата обращения: 20.04.2023).

27. Teaching Mathematics. The University of Texas at Austin. [Электронный ресурс]. URL: https://www.cetonline.org/resources/teaching-mathematics/ (дата обращения: 20.04.2023).

28. Mathematics Education Project. Massachusetts Institute of Technology. [Электронный ресурс]. URL: https://mathed.mit.edu/ (дата обращения: 20.04.2023).

29. Mathematics Education. European Mathematical Society. [Электронный ресурс]. URL: https://euro-math-soc.eu/activities/mathematics-education (дата обращения: 20.04.2023).

30. Mathematics Education. Australian Association of Mathematics Teachers. [Электронный ресурс]. URL: https://aamt.edu.au/Mathematics-Education (дата обращения: 20.04.2023).

31. Mathematics Education. Canadian Mathematical Society. [Электронный ресурс]. URL: https://cms.math.ca/Education/ (дата обращения: 20.04.2023).

32. «Математические приложения в экономике» на сайте «Финам. Экономические игры и симуляторы». [Электронный ресурс]. URL: https://finam.fm/investor/education/matematicheskie-prilozheniya-v-ekonomike/ (дата обращения: 20.04.2023).

33. «Математические методы в экономике и финансах» на сайте «Экономический журнал». [Электронный ресурс]. URL: https://ej.ru/?a=topic&id=121 (дата обращения: 20.04.2023).

34. «Практические задания по математическому анализу» на сайте «Математика онлайн». [Электронный ресурс]. URL: https://mathonline.wikidot.com/tasks (дата обращения: 20.04.2023).

35. «Методы математической физики и их приложения» на сайте «Физматлит». [Электронный ресурс]. URL: https://www.physmathlit.ru/book/3 (дата обращения: 20.04.2023).