МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

Динисова Екатерина Андреевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
канд. пед. наук., доцент Шашкина М.Б.
26.05.2023

Научный руководитель:
канд. физико-математических наук,
доцент Е.И. Ганжа

Дата защиты
27.06.23

Обучающийся: Е.А. Динисова

Оценка

Красноярск, 2023 г.

Содержание

Введение

Актуальность. Современные нормативные документы в области образования требуют высокого уровня подготовки выпускников образовательных учреждений. Требования ФГОС СОО к качествам выпускников школ не ограничиваются теорией, а требуют практических приложений, то есть умения применять полученные знания на практике.

Реформы, проводимые в последние десятилетия в среде российского образования и направленные на повышение компетентностного уровня выпускников школ, дают положительные результаты. В основе такой эффективности – перевод форм обучения от классических к инновационным, обучение школьников умению учиться, развитие их способности к саморазвитию за счет активной познавательной деятельности и т.д.

Изложенное работает во всех предметных областях, в том числе и в математике. При применении указанных выше универсальных учебных действий и других приемов, обучающиеся достаточно легко решают простые задачи из повседневной жизни.

Тем не менее, имеются темы, которые довольно сложны для понимания школьников, а тем более для применения на практике. К ним относится тема «Практические приложения производной». Тогда встает вопрос о формировании математической грамотности обучающихся. Именно она способствует формированию у обучающихся умений рассуждать, формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разных контекстах реального мира, то есть готовность учащихся к применению математики в повседневной жизни, к решению любых практических задач, что является основным требованием госстандартов.

Вопросам формирования математической грамотности обучающихся посвящены работы Т.Н. Волкова, Е.Н. Калинкиной, Т.В. Расташанской, С.Н. Назарова, В.А. Петрова, Г.А. Пожаровой, Т.А. Трофимовой, Т.В. Шевелева и др.

Проведенный анализ результатов научных исследований, направленных на формирование математической грамотности позволил определить **противоречие:**

Между возможностями, представляемыми предметной областью «Математика» для формирования у обучающихся математической грамотности и недостаточным использование этих возможностей в организации процесса обучения.

Потребность в разрешении вышеназванных противоречий определяет **проблему** исследования, которая заключается в поиске ответа на вопрос: как осуществлять процесс обучения математике в школе, чтобы Российское образование стало конкурентоспособным?

Цель исследования – разработать, теоретически обосновать и опытно-экспериментальным путем проверить результативность методики формирования математической грамотности в 10-11 классах в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

Объект исследования – процесс изучения темы «Практические приложения производной».

Предмет исследования – методика формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

Гипотеза исследования: если методику изучения производной построить на основе решения ее практических приложений, то это позволит повысить уровень сформированности математической грамотности обучающихся 10-11 классов.

Задачи исследования:

- определить основные понятия и условия формирования математической грамотности;

- выделить особенности формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов;

- проанализировать учебники математики на предмет наличия задач с практическим применением производной;

- выделить роль задач с практическим применением производной в формировании математической грамотности обучающихся 10-11 классов;

- разработать и апробировать комплекс задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной»;

- описать исследовательский эксперимент и сделать выводы.

Методы исследования: анализ учебно- и научно-методической литературы, сравнительный анализ исследований по теории и методике обучения математике, обобщение методического опыта учителей математики.

Теоретическая значимость работы заключается в структурировании понятий функциональной грамотности и входящей в нее математической грамотности учащихся.

Практическая значимость работы заключается в разработке и апробации комплекса задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

Структура работы включает введение, три главы, заключение, список литературы, приложения. Объем работы включает 48 страниц, 5 таблиц, 6 рисунков, 2 приложения. Список литературы включает 24 источника.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

1.1 Математическая грамотность: понятие и условия формирования

Согласно требованиям ФГОС СОО, изучение предмета должно обеспечить «осознание значения математики в повседневной жизни человека, понимание роли математических процессов в современном мире, формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления мире» [22, с. 46].

Современные требования ФГОС к результатам обучения математики включают обязательное овладение предметными знаниями. Отмечается, что математическое образование играет большую роль в развитии познавательных способностей, в формировании определенного склада ума, в выработке привычки к систематической и методичной работе у обучающихся.

Из Государственной программы РФ «Развитие образования», рассчитанной на 2018-2025 гг. следует, что одной из основных задач ФГОС является формирование функциональной грамотности» [17, с. 1].

А.А. Леонтьев указывает, что «функционально грамотный человек – это человек, способный использовать все постоянно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности» [14, с. 35].

Из цитируемой выше образовательной госпрограммы следует, что «в качестве основных составляющих функциональной грамотности выделена математическая грамотность [17, с. 1].

Согласно исследованиям PISA «математическая грамотность – это способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разных контекстах реального мира. Она включает математические понятия, процедуры, факты и инструменты, чтобы описать, объяснить и предсказать явления. Она помогает понять роль математики, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые необходимы конструктивному, активному и размышляющему гражданину» [20, с. 1].

Т.Н. Волкова под математической грамотностью понимает «способность определять и понимать роль математики в мире, высказывать обоснованные математические суждения, умение применять математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину» [4, с. 173].

Изложенное соответствует современным социально-экономическим условиям, которые требуют от каждого обучающегося не просто теоретических знаний, а умений применять полученные знания на практике. Это подтверждается многими исследователями.

Можно утверждать, что каждому человеку, вне зависимости от того, кем он станет, необходимо знание математики. Поэтому в общей системе знаний значение ее нельзя переоценить: нет такой сферы деятельности человека, где бы ни использовалась математика.

Е.Н. Калинкина считает, что понятие «математическая функциональная грамотность предполагает владение умениями:

- выявлять проблемы, возникающие в окружающем мире, решаемые посредством математических знаний;
- решать их, используя математические знания и методы;
- обосновывать принятые решения путем математических суждений;
- анализировать использованные методы решения;
- интерпретировать полученные результаты с учетом поставленной задачи» [7, с. 4].

Данные умения позволяют развивать логическое мышление, решать достаточно сложные задачи не только на уроках математики, но и по другим предметам, а также решать задачи повседневной жизни.

Все это становится возможным только при наличии у обучающихся мотивации к учению, стремления к получению знаний и использованию их в решении повседневных насущных и предстоящих в будущем задач. Только мотивированность и самоорганиазция могут повысить уровень личностного развития обучающегося, его математическую грамотность.

Для прогресса личностного развития и при разрешении проблем в реальных жизненных условиях следует не только передавать обучающимся знания, умения и навыки, но и формировать базовые предметные компетенции, а согласно требованиям ФГОС – формировать универсальные учебные действия (УУД) [22, с. 1].

В контексте ФГОС УУД представлены как «умение учиться, способность учащихся к саморазвитию и самосовершенствованию» [22, с. 1].

М.В. Гамезо и И.А. Домашенко указывают, что УУД – это «действия, которые открывают возможности широкой ориентации учащихся в различных предметных областях, в строении учебной деятельности, включая осознание самими учащимися целевой направленности, ценностно-смысловых и операциональных характеристик этой учебной деятельности» [5, с. 69].

В качестве видов УУД исследователи представляют личностные, познавательные, коммуникативные и регулятивные УУД. В основе личностных УУД лежит самоопределение, ценностно-смысловая ориентация, смыслообразование и ориентация в социальных ролях и межличностных отношениях. Познавательные УУД – это умение учиться, желание познавать. Коммуникативные УУД основаны на умении общаться, толерантности к чужому мнению и готовности к поиску консенсуса. Регулятивные УУД – это основные умения планировать свои действия, учитывать правила, осуществлять самооценку, рефлексия.

Можно утверждать, что даже если профессия в будущем не будет связана с математикой, любой человек будет вынужден принимать решения, основанные на анализе входных данных, делать логические выводы и т.д. В незнакомой ситуации он должен будет применить определенные математические методы, причем не обязательно они будут сложными. Даже задачу с незнакомым контекстом можно решить, абстрагировавшись собственно от сюжета, выделив значения известных переменных и вычленив математическую модель, представив информацию графически и т.д. Всему этому должен научиться каждый еще в школе.

И.В. Дубровина указывает, что школьный возраст, в котором математическая грамотность должна формироваться, характеризуется «взаимопроникновением мышления и речи. Подростки стремятся мыслить логически, заниматься теоретическими рассуждениями и самоанализом, относительно свободно размышляют на нравственные темы. Им легко дается способность делать общие выводы на основе частных посылок и, напротив, переходить к частным умозаключениям на базе общих посылок (индуктивный и дедуктивный тип мышления). Развитие письменной и монологической речи, учит подростков формулировать мысли, передавать собеседнику при помощи рассказа свои мысли и чувства, свою собственную картину мира» [6, с. 63].

В результате работы обучающиеся усваивают материал лучше, приобретают первичный опыт использования математических знаний в быту, что позволяет повысить уровень математической грамотности обучающихся.

Итак, можно представить условия формирования математической грамотности обучающихся:

- соблюдение системности формируемых математических знаний;

- параллельное ведение теоретической и практической предметной базы;

- погружение в реальные ситуации, формирование готовности к знакомству с математической стороной окружающей действительности;

- перенесение способов решения учебных задач на реальные ситуации, формирование опыта поиска путей решения житейских задач, математическое моделирование реальных ситуаций;

- познание мира и решение задач разными способами – развитие когнитивной сферы;

- формирование коммуникативной, читательской, информационной, социальной компетенций;

- планирование деятельности, конструирование алгоритмов вычислений, построений, то есть развитие регулятивной сферы;

- контролирование процесса и результата решения задачи, выполнение проверки на соответствие исходным данным и правдоподобию, а также коррекция и оценка результата собственной деятельности.

Исходя из всего вышеизложенного, в школе обучающийся должен приобрести необходимый набор знаний, умений и навыков, которые позволят ему применять их в реальной ситуации – только тогда он будет уверенно чувствовать себя во взрослой самостоятельной жизни. Реализовать данное требование ФГОС позволяют практико-ориентированные задачи.

Именно поэтому на сегодняшний день выделяется практико-ориентированный подход, основой которого являются задачи из окружающей обучающегося действительности.

Таким образом, математическая грамотность – это способность обучающегося использовать приобретенные математические знания для решения задач в различных сферах. Она неразрывно связана с практико-ориентированными задачами. Рассмотрим особенности последних.

1.2 Особенности формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов

Важную роль в формировании математической грамотности играют повседневные потребности, при удовлетворении которых требуется решение практико-ориентированных задач. Действительно, очень важно уметь применять знания и умения для разрешения конкретных ситуаций, возникающих в реальной повседневной жизни. Такие задачи требуют независимости мышления, оригинальности, даже изобретательности, на что в конечном счете направлена система образования. Формировать такие способности позволяют специальные практико-ориентированные задачи.

В.А. Петров указывает, что «практико-ориентированные задачи – это задачи из окружающей действительности, тесно связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни» [15, с. 46].

В.В. Фирсов определяет понятие практико-ориентированного обучения математике как «осуществление целенаправленной содержательной и методической связи школьного курса математики с практикой, что предполагает введение в школьную математику специфических моментов, характерных для исследования прикладных проблем математическими методами» [23, с, 32].

С.Н. Назарова выделяет следующие «виды практико-ориентированных заданий по математике:

- аналитические (определение и анализ цели);

- организационно-подготовительные (планирование и организация индивидуальной, групповой или коллективной работы по созданию объектов, анализ и исследование свойств объектов труда);

- оценочно-коррекционные (формирование оценки своим действиям и осуществление коррекции процесса и результатов деятельности, проведение поиска способов совершенствования деятельности)» [12, с. 94].

У практико-ориентированных задач есть свои особенности, которых отличают их от других математических задач. В качестве основных Т.Н. Волкова предлагает следующие «особенности:

- значимость получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающихся. Значимость может быть общекультурной, познавательной, профессиональной, социальной;

- условие задачи должно быть сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов математики. Условие также может быть из другого предмета или из жизненной ситуации;

- информация и данные в задаче могут быть представлены в разной форме, таких как рисунок, график, таблица, схема, диаграмма и т.д.;

- явное или неявное указание области применения результата решения» [4, с. 174].

Обязательным компонентом практико-ориентированной задачи является контекст – это «особенности и элементы окружающей обстановки, представленные в задании в рамках описанной ситуации» [19, с. 6].

Ряд авторов в качестве контекстов практико-ориентированных задач предлагает следующие:

- индивидуальный или личный контекст (задачи, связанные с повседневной личной жизнью учащегося, его семьи, друзей, группы сверстников: покупки, игры, здоровье, спорт, путешествия и т.п.);

- профессиональный (задачи, связанные со сферой труда: строительство, архитектура, контроль качества, бухгалтерский учет и т.п.);

- социальный или общественный (задачи про сообщества: демография, государственная политика, реклама, национальная статистика, система голосования и т.п.);

- научный (задачи про то, как применять математику в природе, в науке и технике) [19, с. 6].

Кроме обязательных особенностей, практико-ориентированные задачи могут иметь нестандартную структуру, когда некоторые элементы не определены; избыточные, недостающие, либо противоречивые данные в условии задачи; также может быть несколько способов решения» [4, с. 175].

Как показывает анализ, практико-ориентированные задачи имеют довольно изученную научную основу. Тем не менее, подавляющее большинство задач в учебниках имеет теоретическую направленность.

Поэтому учителю приходится их получать самостоятельно. Путей получения их два – это подбор и собственно конструирование (рис. 1).

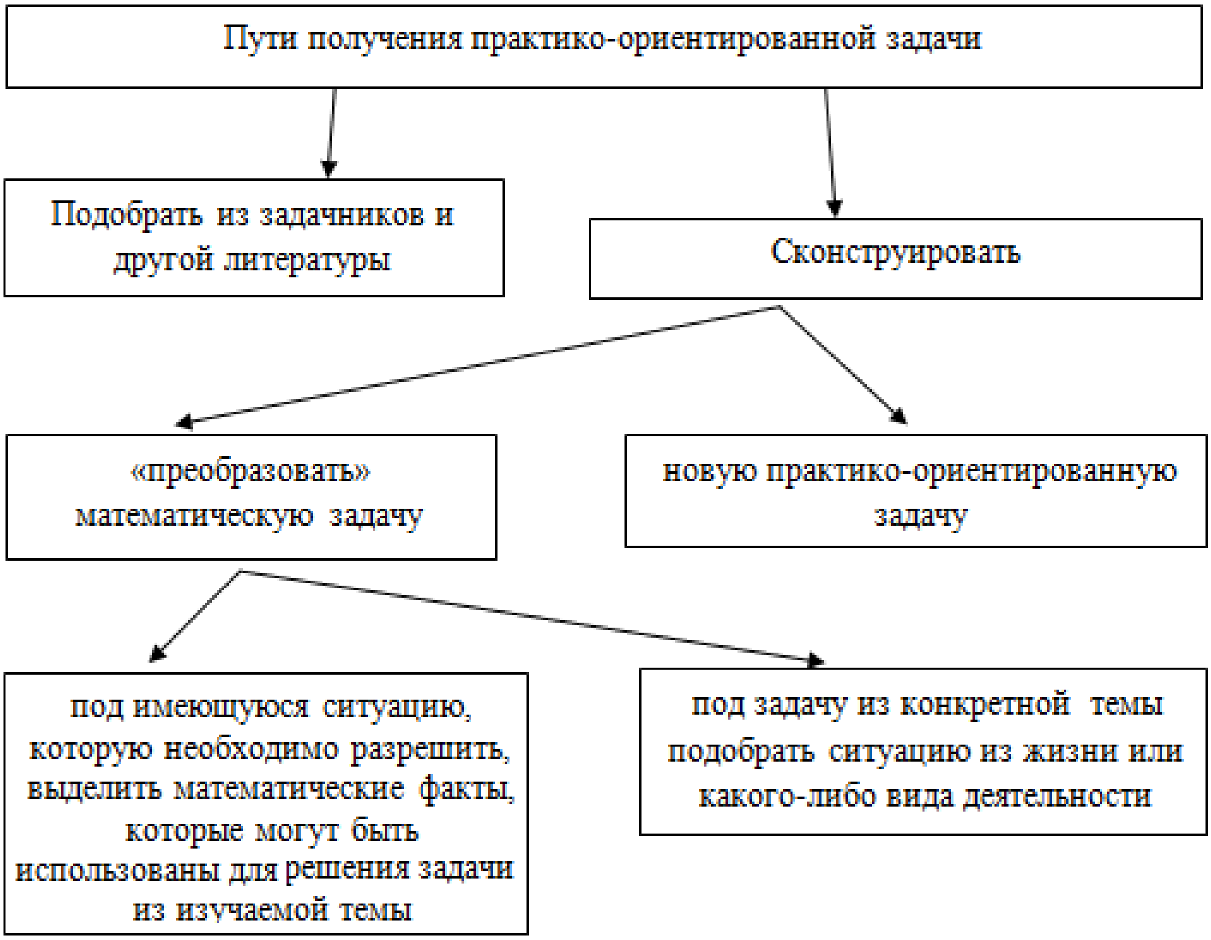

Рисунок 1 – Пути получения практико-ориентированной задачи

Относительно подбора задач из другой литературы следует обращать внимание на применение задачи к ситуациям, которые могут окружать обучающихся. Более серьезный подход требуется при конструировании практико-ориентированной задачи. При этом можно как создать новую, так и преобразовать уже имеющуюся математическую задачу в практико-ориентированную. При преобразовании необходимо либо задачу подобрать под житейскую ситуацию, либо под конкретную тему подобрать задачу из жизни.

Т.А. Трофимова считает, что при конструировании собственных заданий следует «учитывать аспекты, которые легли в основу разработки заданий в представленных кейсах: учащимся следует предлагать не типичные учебные задачи, характерные для такого предмета, как математика, а близкие к реальности проблемные ситуации, представленные в определенном контексте и разрешаемые доступными учащемуся средствами математики» [21, с. 65].

Отметим, что решение практико-ориентированных задач в большей степени строится на построении модели реальной ситуации, описанной в конкретной задаче. Включая такие задачи в процесс обучения, педагог может их использовать на разных этапах урока: на этапе актуализации полученных знаний, на этапе изучения нового материала, на этапе закрепления, а также при закреплении и обобщении.

Исследователи считают, что в результате при взаимодействии с окружающей действительностью обучающиеся усваивают материал лучше, приобретают первичный опыт использования математических знаний в быту и повышают свой уровень математической грамотности.

Вместе с тем, исследователи указывают на проблемы, возникающие при решении практико-ориентированных задач. К ним относятся:

- неумение изначально понять содержание задания и суть задаваемого вопроса. В результате с самого начала решение строится неверно;

- построение неверной математической модели по условию задачи оказывается при недостаточно развитом умении смыслового чтения;

- неумение применять известный алгоритм в нестандартной ситуации;

- часто недостаточно развиты аналитические навыки;

- нередко плохо сформированы вычислительные навыки;

- выделяется неумение проводить анализ условия задания при решении собственно практико-ориентированных задач.

Для того, чтобы решить эти проблемы, необходимо развивать умение обучающихся пользоваться справочными материалами, записывать математически верно модель, алгоритм и само решение задачи. Следует также научить школьников применять знания в нестандартных ситуациях.

Решая с обучающимися практико-ориентированные задачи, условия которых описывают проблемные ситуации, возникающие в той или иной профессиональной деятельности, важно показывать тесную взаимосвязь математики и реальных жизненных условий.

Изложенное становится возможным, когда обучающийся становится не объектом обучения, а его субъектом. Другими словами, на уроке главная роль принадлежит обучающемуся, а педагог является помощником, консультантом. В таком случае основной задачей педагога становится не просто дать информацию обучающимся, а предложить найти новые знания самим.

При этом важно не столько научить решать задачи, а сформировать и развить личностные особенности обучающихся при помощи рассмотренных в первом параграфе универсальных учебных действий.

Исследователи отмечают, что систематическая работа по решению практико-ориентированных задач повышает мотивацию обучающихся к изучению предмета, материал осваивается более осмысленно, заметно стремление обучающихся к творческой и исследовательской деятельности, ими приобретаются и совершенствуются навыки самостоятельной и коллективной работы, осознается важность математики в решении реальных жизненных ситуаций. В результате обеспечивается положительная динамика результатов учебной деятельности обучающихся по математике.

Таким образом, практико-ориентированные задачи позволяют обучать школьников решению жизненных проблем при помощи предметных заданий, повышают интерес обучающихся к предмету, способствуют развитию их интереса, любознательности, творческой активности.

При решении практико-ориентированных задач обучающиеся учатся самостоятельно искать, обобщать, делать выводы, а также осознают важность математики как науки, которая приносит реальную пользу при решении задач в повседневной жизни. Такой подход к обучению позволяет в дальнейшем решать проблемы, возникающие в жизни и в профессиональной деятельности. В целом при наличии подобных умений и навыков можно говорить о математической грамотности обучающихся.

Вывод по первой главе

Данная глава нас знакомит с понятием математической грамотности. В этой главе приводится множество определений, взятых из различных источников разных авторов для того чтобы наиболее полно раскрыть данное понятие.

В результате анализа научно-методической литературы определено, что наличие математической грамотности можно определить, если обучающийся может распознать проблемы окружающей среды, решаемые при помощи математики; сформулировать выявленную проблему на языке математики; выбрать или разработать наиболее подходящий алгоритм решения; решить указанную проблему при помощи математических способов и методов и проанализировать их; интерпретировать, сформулировать и записать окончательный результат решения выявленной проблемы.

Также были определены условия формирования математической грамотности обучающихся. Среди них:

- соблюдение системности формируемых математических знаний;

- параллельное ведение теоретической и практической предметной базы;

- погружение в реальные ситуации, формирование готовности к знакомству с математической стороной окружающей действительности;

- перенесение способов решения учебных задач на реальные ситуации, формирование опыта поиска путей решения житейских задач, математическое моделирование реальных ситуаций;

- познание мира и решение задач разными способами – развитие когнитивной сферы;

- формирование коммуникативной, читательской, информационной, социальной компетенций;

- планирование деятельности, конструирование алгоритмов вычислений, построений, то есть развитие регулятивной сферы;

- контролирование процесса и результата решения задачи, выполнение проверки на соответствие исходным данным и правдоподобию, а также коррекция и оценка результата собственной деятельности.

Сделан вывод о том, что математическая грамотность – это способность обучающегося использовать приобретенные математические знания для решения задач в различных сферах. При этом важно не столько научить решать задачи, сколько сформировать и развить личностные особенности обучающихся при помощи УУД.

2. ВОПРОСЫ ИЗУЧЕНИЯ ЗАДАЧ С ПРАКТИЧЕСКИМ ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

2.1 Анализ задач с практическим применением производной в учебниках математики

В настоящее время производная и ее применение, первообразная и интеграл, элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве изучаются в разных учебниках в 9-11 классах. Если рассматривать цель изучения темы «Производная», то сюда войдет изучение всех элементов математического анализа.

В учебнике Ш.А. Алимова «Алгебра и начала математического анализа» содержится глава 8 «Производная и ее геометрический смысл». Автор в отдельную главу выделяет «Применение производной к исследованию функций» (глава 9) [1, с. 236].

В учебнике изучение производной начинается с рассмотрения физической задачи об определении мгновенной скорости тела в момент времени t. Составитель не использует понятия «приращение аргумента» и «приращение функции»; употребляет термин «предел» и символ lim. Отмечается, что в школьном курсе математики некоторые формулы производных строго не доказываются, либо принимаются без доказательства.

При вычислении производных простейших функций используются наглядные представления. Также автор приводит строгое определение предела функции в точке и подробно поясняет его.

Рассматривая привила дифференцирования Ш.А. Алимов приводит к каждому из них разобранные примеры. К каждому параграфу автор прилагает задачи для самостоятельного решения. Все задания направлены на закрепление теории и развитие регулятивных УУД.

Задания представлены в трехуровневой системе: обязательные, дополнительные (более сложные) и трудные. Также имеется раздел «Проверь себя».

В учебнике М.И. Башмакова, в главе «Производная и ее применение» содержится более широкое понятие этой темы [2, с. 194].

Начинается изучение темы с вводной беседы. Рассматриваются механический и геометрический смыслы производной, определяется собственно производная и ее предельные переходы. Затем исследуются вычисление производной, исследование функции с ее помощью, а также изучаются приложения производной.

Прежде всего, автор предлагает рассмотреть механический, затем геометрический смысл производной, а также предлагает решение задач на вычисление углового коэффициента касательной к заданной кривой в данной точке. Само понятие предельного перехода разъясняется на примерах.

В каждую главу также входят темы для более детального самостоятельного изучения. В заключительной беседе предлагаются такие темы, как линеаризация, производная сложной функции и гладкость функции.

В учебнике Н.Я. Виленкина [3] предлагается большой теоретический материал. Каждый параграф сопровождается рядом разобранных примеров, а также списком задач для самостоятельного изучения. При этом наряду с обычными задачами предлагаются задачи повышенной трудности.

Прежде, чем перейти к производной, автор учебника предлагает изучить понятия приращение функции и дифференцируемость функции. После этого на основании задач направленных на вычисление мгновенной скорости движения и углового коэффициента касательной дается определение производной.

Затем приводятся задачи, описывающие процесс радиоактивного распада и задачи на отыскание линейной плотности вещества, для определения механического смысла производной. Выясняется геометрический смысл производной. Выводится уравнение касательной, показана связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

Все основные правила дифференцирования приведены с доказательствами. Определяется вторая производная, дается определение производной высшего порядка.

В учебнике все определения, теоремы, следствия имеют доказательства. Терминология строго сформулирована и обязательно имеет доказательную структуру.

Учебник «Алгебра и начала анализа» А.Н. Колмогорова, включает в себя раздел «Производная», в которой рассматриваются темы по приращению функции, понятию о производной, понятию о непрерывности функции и предельном переходе, представлены правила вычисления производных и производные тригонометрических функций [8, с. 210].

Изучение производной начинается с изучения приращения функции. Затем вводится понятие о касательной к графику функции, перед которым описано геометрическое устройство гладких кривых.

Отметим, что в данном учебнике не рассматривается понятие предельного перехода. Вместе с тем, предлагается подробное изучение геометрического смысла производной (задача о нахождении точного положения касательной к графику функции в заданной точке) и механического смысла производной (задача об определении мгновенной скорости движения).

Ю.М. Колягин в своем учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» представил данную тему в Главе II «Производная и ее геометрический смысл» [9, с. 217].

В учебнике представлен некоторый материал, предназначенный для исследования на профильном уровне. Это информация по определению предела последовательности, определению предела функции, а также определению функции, которая будет непрерывной как в точке, так и на интервале и др.

В учебнике по алгебре А.Г. Мерзляка тема «Производная и ее применение» изучается в параграфе 3. В нем дается определение производной, рассматриваются правила вычисления производных, признаки возрастания и убывания функции и точки экстремума функции, дано уравнение касательной, представлены предел и непрерывность функции в точке, а также представлены задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции.

Обучающиеся учатся применять производную для исследования свойств функции и построения графика функций. Имеются практико-ориентированные задачи, например, о скорости движения автомобиля в разные промежутки времени, о средней скорости движения тела, рассматриваются математические модели. Указывается, что производная используется при решении «целого ряда задач физики, химии, биологии, экономики и других наук» [10, с. 110].

Тем не менее, самих практико-ориентированных задач довольно мало. упор делается в основном на теорию.

«Алгебра и начала математического анализа» А.Г. Мордковича представлены базовым и профильным уровнями. В 4 главе базового учебника содержится тема «Производная».

Учебник выделяется тем, что автор описал алгоритмы, составление которых является одной из характерных черт учебника. Он предлагает алгоритмы для исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы, для отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке [11, с. 83].

Отметим, что в других учебных изданиях дается множество теорем по данной теме, однако подобных алгоритмов не представлено.

Кроме того, в учебнике А.Г. Мордковича достаточно подробно разъясняется связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Теория представлена на доступном уровне, обучающиеся могут изучать тему самостоятельно, сами разбирают примеры на основе разобранных в теме.

В учебнике отражены физический и геометрический смыслы производной, а также рассматриваются основные формулы дифференцирования. При этом А.Г. Мордкович рекомендует «перед изучением понятия производной повторить вопросы, связанных с линейной функцией и элементарными функциями, отработать понятия приращения функции и приращения аргумента, что может быть иллюстрировано графиками функций» [11, с. 87].

Изложение теории позволяет сформировать у обучающихся твердые навыки в нахождении производной. В основном теория ориентирована на самостоятельное изучение обучающимися. Но в то же время в каждом параграфе содержится большое количество примеров с подробными решениями. К учебнику также прилагается задачник, в котором представлены упражнения для самостоятельного решения трех уровней сложности.

Теория в учебниках А.Г. Мордковича базового и профильного уровня схожа. Отличие профильного уровня в большем практическом материале. Также подробно рассматриваются: определение последовательности, способы ее задания и свойства; понятие и вычисление производной n-го порядка, применение производной для доказательств тождеств и неравенств. Кроме того, подробно рассмотрена сложная функция, вводятся формулы для нахождения ее производной. На основе этих формул выводятся формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций. Характерной чертой является большое число разобранных примеров. В конце каждой главы автор учебника указывает основные результаты, которых должен достичь обучающийся.

Учебники С.М. Никольского [13] рассчитаны на обучение на базовом и профильном уровнях, что предоставляет возможность успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки.

Выясняется механический и геометрический смыслы производной. Теоремы приведены с доказательствами. Решаются задачи на оптимизацию.

Учебники включают в себя материал для дополнительного повторения. Поэтому можно считать, что большой объем дополнительного и углубленного материала позволяет учащимся более широко и глубоко овладеть знаниями. Учебники как базового, так и профильного уровня написаны одинаково доступным языком для школьников. В целом, учебные пособия содержат большое количество примеров к изучаемым формулам и основным задачам.

Итак, анализ учебников математики показывает, что методические особенности введения определения производной рассматриваются с двух различных точек зрения: с задач физических и с задач геометрических. Так, одни авторы прежде объясняют геометрический смысл производной функции и предлагают наглядные примеры: представляют графики и их описание, формулируют в форме задач с решениями. Другие сначала рассматривают задачи с решениями на приращение функции, а затем дают определение производной. При этом процесс решения обоих вариантов приводит к возникновению новой математической модели.

Кроме того, во время всевозможных видов уроков и самостоятельной познавательной деятельности учеников происходит развитие взаимосоответствующих профессиональных навыков.

Достоинством также является то, что в некоторые учебники включены вопросы и задания, которые обучающиеся могут решить самостоятельно на основе предложенных примеров.

Также положительным является наличие практической части, что дает учителю возможность устанавливать важные связи между математическим содержанием школьного обучения и выбором соответствующих методов, средств и форм организации деятельности обучающихся, необходимых для понимания актуального содержания и предоставляющих совершенствование познавательной инициативности школьников.

Важно и то, что некоторые темы применимы для факультативных курсов или для работы на профильном уровне.

Относительно недостатков можно было бы указать на разные периоды обучения (в 9, 10 или 11 классе), разные четверти, разный объем информации по теме, разные программы. Это может сказаться на снижении успеваемости обучающихся, например, при необходимости перейти в другую школу. Тем не менее, такое отличие предоставляет возможность применения широкого спектра методов обучения.

Таким образом, анализ применения производной в учебниках математики показывает, что изложение темы предлагается в основном на наглядно-интуитивном уровне, создается материальный образ математического объекта, дается формальное определение производной.

Наиболее полная теория производной дается в учебнике А.Н. Колмогорова. Учебник Ш.А. Алимова является отличным учебником с практической точки зрения в связи с тем, что автор, кратко излагая теорию, приводит обширный список подобранных заданий и разобранных примеров. Учебники Н.Я. Виленкина, А.Г. Мордковича, С.М. Никольского представлены базовым и профильным уровнями и сопровождаются большим количеством дополнительного практического материала.

2.2 Роль задач с практическим применением производной в формировании математической грамотности обучающихся 10-11 классов

Одним из основных разделов начал математического анализа является тема «Производная». Производная создана для упрощения многих сложных задач, является мощным орудием исследования функций и может быть полностью описана с помощью функций на математическом языке.

Тем не менее, практика показывает низкую математическую грамотность обучающихся. Тема «Производная» представляет трудность для восприятия обучающихся вследствие ее сложности, не явности практического применения в других предметах или в повседневной жизни, а также в связи с недостаточной разработанностью темы в методическом плане.

Как показал анализ учебников математики, в них в подавляющем большинстве предлагают задачи теоретического характера. Их абстрактность не дает возможности применения в реальных жизненных условиях, поэтому рассуждения о событиях повседневной жизни при решении математических задач обучающимся не знакомы. Но ведь именно математикой мы пользуемся в повседневной жизни при решении множества житейских вопросов и задач.

Как известно из первой главы, задача с практическим применением – это задача, связанная с проблемой из реальной жизни обучающихся, решаемая при помощи математических знаний. В таких задачах необходимы: доступность контекста для понимания обучающимися, соответствие контекста их возрастным особенностям или познавательным интересам, наличие проблемы или свойств объекта, последовательные целевые указания, демонстрация в контексте задачи связи математики с другими науками

Отсюда, велика роль задач с практическим применением производной в формировании математической грамотности обучающихся 10-11 классов. Жизненно необходимо еще в образовательном учреждении сформировать математическую грамотность каждого обучающегося. Ее наличие можно определить, если обучающийся может распознать проблемы окружающей среды, решаемые при помощи математики; сформулировать выявленную проблему на языке математики; выбрать или разработать наиболее подходящий алгоритм решения; решить указанную проблему при помощи математических способов и методов и проанализировать их; интерпретировать, сформулировать и записать окончательный результат решения выявленной проблемы.

Развитие умения распознавать проблему и решать ее с использованием математических фактов и методов, умение формулировать поставленную задачу на математическом языке, получение опыта по применению математических знаний для решения реальных проблем – все это вопросы математической грамотности.

Однако для формирования математической грамотности важно не только менять содержание обучения, но и использовать соответствующие формы и методы работы на уроках математики.

Формулирование, применение и интерпретация математики для решения задач в различных практических контекстах, в том числе с применением производной, в целом мыслить математически – значит сформировать математическую грамотность учащихся 10-11 классов. Также это выступает образовательным результатом по предмету математики согласно ФГОС ООО.

Для формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов важно учитывать определенные требования к разрабатываемым заданиям.

Прежде всего, ситуации, предлагаемые в задании должны иметь определенный контекст из повседневной жизни. При этом они должны быть решаемы при помощи математических методов. Контекст должен быть реальным, а проблема должны быть не просто актуальной, а близкой обучающимся, интересной, мотивирующей на решение задачи.

В ходе решения задачи учащийся должен иметь возможность пройти весь процесс – осознание проблемы, перевод ее на математический язык, поиск методов решения, получение результата решения.

Контекст должен быть достаточно кратким, он не должен запутывать или содержать лишнюю информацию. Все, что имеется в контексте должно быть использовано при решении задачи.

Можно предоставленную информацию иллюстрировать рисунками, таблицами, изображениями, диаграммами и т.д. при этом и сам обучающийся должен иметь возможность решать задачу при помощи визуализации.

Вопрос задачи должен помогать учащемуся понять проблему, раскрыть ее с разных сторон и пошагово ее решить.

Кроме того, при решении прикладных задач с применением производной используются основные правила дифференцирования и некоторые понятия дифференциального исчисления. Основной алгоритм решения такой задачи – поиск значений функции на концах отрезка и стационарных точек (минимальной и максимальной), поиск значения функции в стационарной точке и выбор оптимального значения.

В жизни часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда необходимо найти оптимальный выход – найти наилучший способ решения проблемы, найти наибольшее или наименьшее значение, найти более выгодный или экономный вариант и т.п. Такие задачи имеют большое практическое применение. И для их решения математика может стать хорошим средством.

Задачи на оптимизацию, в целом наилучшего значения – решаются при помощи математического моделирования, состоящего из трех этапов: составление модели, работа с ней и ответ на вопрос задачи.

Таким образом, задачи с практическим применением производной играют большую роль в формировании математической грамотности учащихся 10-11 классов. Формирование математической грамотности возможно при развитых УУД (универсальных учебных действиях), главным из которых является умение учиться, а также самостоятельный поиск информации, умение обобщать и делать выводы, осознание важности математики как науки и др.

Роль задач с практическим применением производной в формировании математической грамотности обучающихся 10-11 классов, в основном заключается в их применимости в технике, в строительстве, в экономике, в медицине, в быту и многих других областях, составляющих окружающий мир обучающихся.

Вывод по второй главе

Во второй главе проанализированы учебники математики для 10-11 классов следующих авторов: Ш.А. Алимова, М.И. Башмакова, Ю.М. Колягина, А.Г. Мерзляка, А.Г. Мордковича, С.М. Никольского.

Анализ учебников показал, что одни авторы прежде объясняют геометрический смысл производной функции и предлагают наглядные примеры: представляют графики и их описание, формулируют в форме задач с решениями. Другие сначала рассматривают задачи с решениями на приращение функции, а затем дают определение производной. При этом процесс решения обоих вариантов приводит к возникновению новой математической модели.

Выделены достоинства проанализированных учебников: в некоторые из них включены вопросы и задания, которые обучающиеся могут решить самостоятельно на основе предложенных примеров. Также положительным является наличие практической части, что дает учителю возможность устанавливать важные связи между математическим содержанием школьного обучения и выбором соответствующих методов, средств и форм организации деятельности обучающихся, необходимых для понимания актуального содержания и предоставляющих совершенствование познавательной инициативности школьников. Важно и то, что некоторые темы применимы для факультативных курсов или для работы на профильном уровне.

Роль задач в формировании математической грамотности обучающихся 10-11 классов определена тем, что они позволяют проникать вглубь реальных житейских процессов, что, в свою очередь, позволяет правильно ориентироваться в окружающем мире. Также отмечено, что возможности производной намного шире математики и ее можно применять при нахождении оптимального значения физических, химических, биологических и других процессов.

3. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ»

3.1 Разработка и апробация комплекса задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной»

Приведем разработанный нами комплекс задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

Всего было разработано 7 задач.

Итак, первая задача из области математики – геометрии.

Задача 1.

На даче нужно поставить бак без крышки в форме прямоугольного параллелепипеда для сбора воды с крыши и заполнения водой из озера для полива. Основание бака – квадрат, а объем бака – 108 дм^3.

Необходимо найти такие размеры бака, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.

Ход решения.

Учитель: Что видно из условия задачи?

Обучающиеся: Оптимизируемой величиной является площадь деталей, из которых должен быть сварен бак. Это одно квадратное основание и 4 боковых грани.

Учитель. Нарисуем схему бака (рис. 2)

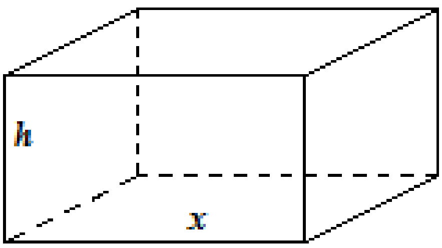

Рисунок 2 – Схема бака

Примем сторону основания за x. Тогда $S_{основ.} = x^2$.

Примем высоту бака за h. Тогда $S_{гран.} = 4xh$.

Выразим через x высоту h и площадь S бака:

$$V = hx^2, \quad 108 = hx^2, \quad h = \frac{108}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + 4x\,\frac{108}{x^2}$$

Параметры x следующие: $0 < x < 108$

Согласно представленным расчетам, составим математическую модель:

$$S(x) = x^2 + 4x\,\frac{108}{x^2}, \qquad 0 < x < 108$$

Итак, математическая модель составлена, далее находим наименьшее значение функции $S(x)$ на интервале (0; 108) по алгоритму.

$$S'(x) = 2x - 4\,\frac{108}{x^2}$$

$$2x - 4\,\frac{108}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 432$$

$$x^3 = 216$$

$$x = 6$$

Далее для ответа на вопрос задачи найдем высоту h.

$$h = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{6^2} = \frac{108}{36} = 3$$

Ответ. Размеры бака, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала, составят: ширина основания 6 дм и высота бака 3 дм.

Содержание контекста должно быть понятно обучающимся, а нематематические термины, используемые в задаче известны им, легко определяемы, либо интуитивно ясны.

Математика позволяет вместе с решением одной задачи научиться решать другие. Но вместе с этим создается такая ситуация, что приемы и способы решения можно использовать в других ситуациях. При этом решение не всегда можно предвидеть, но можно описать при помощи уравнений и других математических средств. Последнее и есть создание математической модели, которая составляется при решении любой математической задачи.

Задача 2.

К графику функции $y = x^2 + 2x - 4$. проведена касательная. Ей параллельна прямая $y = 5x - 3$. Найти абсциссу точки касания.

Ход решения.

Учитель. Касательная – это предельное положение секущей. В нашей задаче она имеет с прямой одинаковый угол наклона к оси абсцисс. То есть угловой коэффициент касательной, как и у заданной прямой, равен 5. Угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания (рис. 3).

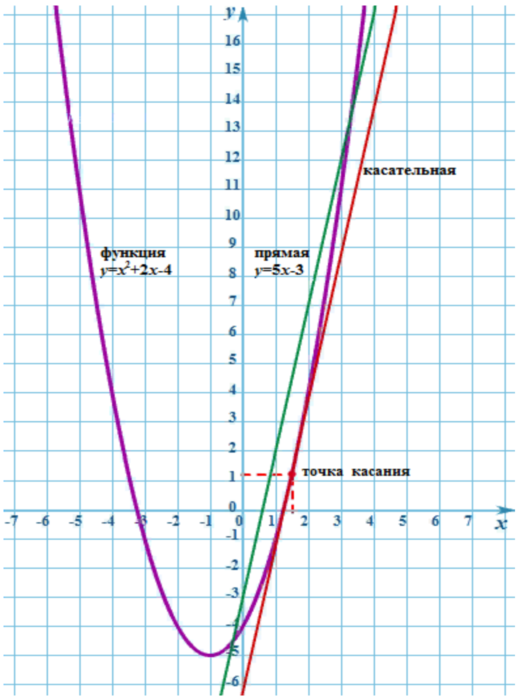

Рисунок 3 – Графики функции, прямой и касательной

Найдем производную.

$y'(x) = (x^2 + 2x - 4)' = 2x + 2$

Составим уравнение, подставив в выражение для производной неизвестную абсциссу точки касания x.

$2x + 2 = 5$

$2x = 5 - 2 = 3$

$x = 3/2 = 1{,}5$.

Ответ: абсцисса точки касания $x = 1{,}5$.

Математику можно использовать в других науках, ведь она позволяет лучше понять задание или сократить время решения. Сравним, например, решение в физике и в математике – при помощи физических формул и математической производной.

Задача 3.

Велосипедист движется прямолинейно по следующему закону:

$x(t) = -2+4t+3t^2$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах).

Нужно найти его скорость и ускорение через 2 секунды после начала движения.

Ход решения.

Учитель: Прежде вспомним формулы, где используется производная:

$v(t) = x'(t)$ – скорость,

$a = v't$ – ускорение.

Далее решим задачу.

Дано:

$x(t) = -2+4t+3t^2$; t = 2 сек.

Найти:

v = ?, a = ?

Решение.

Для того, чтобы сравнить физический и математический способы решения, создадим таблицу 1.

Таблица 1 – Сравнительный анализ способов решения

Физический способ	Математический способ
$x(t) = -2+4t+3t^2$	$x(t) = -2+4t+3t^2$
$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$	$v(t) = x'(t) = 4+6t$ $v(2) = 4+6*2 = 16$ м/сек

$x_0 = -2$ м $v_0 = 4$ м/сек $a = 3*2 = 6$ м/сек^2 $v = v_0 + at$ $v = 4 + 6*2 = 16$ м/сек	$a = v't = 6$ м/сек^2

Как видим, математическое решение проще и понятнее, чем решение при помощи физических или химических формул.

Ответ: скорость велосипедиста через 2 секунды после начала движения составит 16 м/сек, а ускорение также через 2 секунды после начала движения – 6 м/сек^2.

Для закрепления решим подобную задачу, но в которой нужно будет найти другой показатель, например, равнодействующую сил.

Задача 4.

Школьный автобус массой 5 тонн отошел от остановки и поехал со скоростью, которая возрастает по закону: $\upsilon = 0{,}1t^3 + 0{,}2t$.

Необходимо найти равнодействующую всех сил, которые воздействуют на автобус на второй секунде.

Ход решения.

Дано: $\upsilon = 0{,}1t^3 + 0{,}2t$.

Найти: F = ?

Решение:

$F = ma$ (сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое этому телу силой).

По условию задачи скорость возрастает по закону $\upsilon = 0{,}1t^3 + 0{,}2t$. Поэтому запишем ее и решим как производную:

$F = m\upsilon'$

$F = m(0{,}1t^3 + 0{,}2t)'$

$F = m(0{,}3t^2 + 0{,}2)$

$F = 5000(0{,}3*4 + 0{,}2)$

$F = 7000$ Н $= 7$ кН

Ответ: равнодействующая сил, воздействующих на автобус на второй секунде составляет 7 кН.

Производная применяется не только в физике. Успешное применение ее видно в химии, в биологии и анатомии.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 5.

Студенты, делая лабораторную работу по химии ждут химической реакции от вещества M. Известно, что зависимость между массой вещества M и временем t выражается формулой:

$M(t) = At^2 + Bt,$

где: A и B – постоянные.

Найти: скорость химической реакции.

Ход решения.

Итак, записываем условие задачи при помощи математических знаков:

Дано: $M(t) = At^2 + Bt,$

Найти: $V(t) = ?$

Решение:

Скорость химической реакции V равна производной от вещества в определенный момент времени:

$V(t) = M'(t)$

Следовательно:

$V(t) = (At^2 + Bt)' = 2At + B$

Ответ: скорость химической реакции $V(t) = 2At + B$.

Как видим, с производными можно работать даже при определении скорости химической реакции. Но в организме человека тоже происходят подобные реакции.

Рассмотрим использование производной при определении скорости выведения некоторого вещества из человеческого организма (задача 6).

Задача 6.

Известно, что концентрация определенного вещества в крови человека вследствие его выведения из организма изменяется по закону:

$$N(t) = 2^{e^{-0,05t}}$$

Определить, как изменяется скорость выведения вещества из организма с течением времени. Указать смысл знака скорости.

Ход решения.

Учитель: Изменение скорости можно найти при помощи производной.

Дано: $N(t) = 2^{e^{-0,05t}}$

Найти: $N'(t) = ?$

Решение.

$N'(t) = (2^{e^{-0,05t}})'$

$N'(t) = 2\,(^{e^{-0,05t}})' \cdot (-\,0,05t)'$

$N'(t) = 2^{\,e^{-0,05t}} \cdot (-\,0,05)$

$N'(t) = -\,0,1^{e^{-0,05t}}$

Ответ: $N'(t) = -\,0,1^{e^{-0,05t}}$. Знак минус (–) перед скоростью означает, что концентрация определенного вещества уменьшается с течением времени.

Производную можно использовать не только в науке физике, химии, биологии. Производная приносит неоценимую помощь и в обычной жизни, так как позволяет рассчитать неимоверные ситуации. Например, в строительстве.

Задача 7.

Для постройки дома была вытесана балка из цилиндрического бревна радиуса R. Осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на высоту в квадрате.

Найти такое сечение балки, чтобы ее прочность была наибольшей.

Ход решения.

Учитель. Для наглядности нарисуем чертеж по условию задачи. Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, поэтому ширину балки, обозначим буквой x. высоту – буквой h (рис. 4).

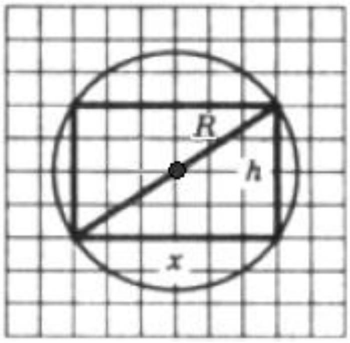

Рисунок 4 – Схема балки из цилиндрического бревна

В задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей, поэтому оптимизируемой величиной являетсяпрочность балки – обозначим ее буквой y.

По условию задачи осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, а ширину балки мы обозначили буквой x, поэтому:

$0 \leq x \leq 2R$ (при $x = 0$ и при $x = 2R$ прямоугольник становится отрезком, равным диаметру окружности).

Согласно теореме Пифагора высота прямоугольника h соотносится с его шириной следующим образом:

$x^2 + h^2 = 4R^2$

Следовательно, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, то есть:

$y = kxh^2$

(где коэффициент k — некоторое положительное число).

Следовательно,

$y = kx(4R^2 - x^2)$,

где: $x \in [0;2R]$.

Далее надо найти наибольшую прочность сечения балки y.

Воспользуемся предыдущим алгоритмом. Имеем:

$y = 4kR^2x - kx^3$;

$y' = 4kR^2 - 3kx^2$.

Приравняем производную к нулю:

$4kR^2 - 3kx^2 = 0$;

$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$

Заданному отрезку $[0;2R]$ принадлежит только точка x_1. Вычислим значения функции в точке x_1 и на концах отрезка, т. е. в точках 0 и $2R$:

$y = kR^2x - kx^3$

$f(0) = 0$,

$f(2R) = 0$,

$f(x_1) = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) > 0$

Следовательно,

$y_{\text{наиб.}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Это ширина x прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки. Для нахождения сечения балки с наибольшей прочностью следует найти высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}$$

Следовательно, $h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Значит: $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$.

Ответ. Сечение балки, при котором ее прочность будет наибольшей, будет прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно √2 или 1,414.

Итак, представленные задачи показали, что производная показывает быстроту изменения функции (величины y) при изменении величины x.

Другими словами – это скорость, с которой изменяется функция при изменении аргумента. При помощи производной задачи решаются проще.

3.2 Анализ исследовательского эксперимента

Исследовательский эксперимент проводился среди обучающихся 10-го класса общеобразовательной школы.

В эксперименте участвовало 20 ребят, которые были распределены на две группы – экспериментальную и контрольную.

Для диагностики математической грамотности обучающихся была разработана контрольная работа с заданиями (табл. 2).

Таблица 2 – Контрольная работа для диагностики математической грамотности обучающихся

Задания	Для констатирующего этапа	Для контрольного этапа
1	2	3
1	Производная – это: а) дифференциал аргумента; б) конечный предел отношения приращения функций к приращению аргумента когда она стремится к нулю; в) приращение аргумента; г) нет правильного ответа	Производной функции $y = f(x)$ называется: а) предел отношения приращения функции к приращению аргумента; б) предел приращения аргумента; в) предел приращения функции; г) отношение приращения функции к приращению аргумента
2	Геометрический смысл производной – это: а) угловой коэффициент касательной к графику функций; б) касательная; в) скорость изменения функций; г) дифференцирование	Формула, раскрывающая геометрический смысл производной: а) $y = kx+b$ б) $y = f (x)$ в) $y – y_0 = k (x – x_0)$ г) $k = f\,`(x)$
3	Производная единицы равна: а) 1; б) 0 в) x г) a (число)	Какая формула задает $(u \cdot v)'$? а) $u' \cdot v$ б) $u' \cdot v - u \cdot v'$ в) $u' \cdot v + u \cdot v'$ г) $u' \cdot v' - u \cdot v$
4	Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала (a, b), то эта функция … на этом интервале: а) возрастает б) убывает в) остается неизменной г) нет ответа	Условие, при котором функция убывает: а) $f`(x) = 0$ б) $f`(x) = f(x)$ в) $f`(x) < 0$ г) $f`(x)>0$

Окончание таблицы 2

1	2	3
5	Функция задана формулой $y = -8 / (x — 2)$. При каком значении аргумента функция принимает значение, равное 2: а) 4 б) -2 в) 2	Функция $y = f(x)$ считается убывающей на интервале x , когда при любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ равенство $f(x_2) > f(x_1)$ считается выполнимым, так ли это: а) нет б) зависит от условия задачи в) да
6	Функция $f(x)=x^2+5x+21$ возрастает на промежутке: а) $x > 2$ б) $x < -2{,}5$ в) $x > -2{,}5$	Функция задана формулой $y = x^2 -3x$. Значение функции, соответствующее значению аргумента -2, равно: а) -10 б) 10 в) 0
7	Функция $f(x)=x^3-6x^2+9x-7$ убывает на промежутке: а) $1 < x < 3$ б) $-3 < x < 1$ в) $-1 < x < 3$	Функция $f(x)=x^3-3x+21$ убывает на промежутке: а) $x > 1$ б) $-1 < x < 1$ в) $-1 < x < 1$
8	Найдите минимум функции $y=x^3+x^2-5x+1$: а) 3 б) 1,5 в) -3	Найдите максимум функции $y=1/3x^3-2x^2-5x+1/3$: а) -2 б) 1 в) 2
9	Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала (a, b), то эта функция … на этом интервале: а) возрастает б) убывает в) остается неизменной	Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала (a, b), то эта функция … на этом интервале: а) возрастает б) убывает в) остается неизменной
10	Найдите промежуток убывания функции $f(x)=x+1/x$: а) $x > -6$ б) $x < -6$ в) всюду убывает, кроме $x=0$	Найдите промежутки возрастания функции $y = 2x^5 – 5x^4$ а) $(- \infty; 0) \cup (2; + \infty)$ б) $(- \infty; 0)$ в) $(0, \pm 2)$

Ключи для контрольной работы:

- для констатирующего этапа – 1 б); 2 а); 3 б); 4 а); 5 б); 6 в); 7 а); 8 в); 9 б); 10 в); 11 в);

- для контрольного этапа – 1 а); 2 г); 3 в); 4 в); 5 в); 6 б); 7 в); 8 в); 9 а); 10 а); 11 б).

На вопросы теста учащиеся отвечали письменно на отдельных листах. Верные ответы принимались как базовые балльные оценки

Кроме того, экспериментатором проводилось наблюдение за записями учащихся. Отдельно отмечалось, как каждый учащийся проводил математические операции, использовал ли математические концепции, стратегии, тактики и т.д. Большое внимание уделялось тому, когда учащийся при решении составлял математическую модель. При необходимости задавались вопросы и отмечалось, насколько ответы аргументированы и грамотны, как учащийся интерпретирует свои решения. Все эти нюансы влияли на количество полученных учащимися баллов за один вопрос теста.

Критерии и уровни математической грамотности представлены в табл. 3.

Таблица 3 – Критерии и уровни математической грамотности

Критерии	Баллы	Уровни
Учащийся: - отвечает на вопросы и решает примеры довольно легко; - применяет математические концепции; - проводит операции для решения незнакомых задач; - выбирает, сравнивает, оценивает и аргументирует стратегию решения задачи; - разрабатывает и оперирует моделями для сложных ситуаций, выявляет ограничения; - формулирует и делится своими интерпретациями	11-15	Высокий
Учащийся: - решает легкие примеры, отвечает на легкие вопросы теста; - обобщает и использует найденную информацию; - использует знания в нестандартных контекстах; - связывает источники информации; - применяет собственное видение наряду с навыками символических и формальных математических операций; - анализирует свои действия и точно сообщает о своих выводах и об их соответствии исходной ситуации	6-10	Средний
Учащийся: - плохо отвечает на вопросы теста; - трудно выбирает представленную информацию, - анализ практической задачи представляет для него сложность; - работает с явными моделями для конкретных ситуаций; - использует ограниченный диапазон умений; - рассуждает только в прямом контексте; - дает объяснения, но не приводит аргументов своим действиям	1-5	Низкий

Итак, из полученных баллов по 10 ответам находился средний показатель, на основе которого определялся уровень математической грамотности каждого учащегося.

Для формирования математической грамотности обучающихся экспериментальной группы был разработан формирующий эксперимент, в который входил разработанный выше комплекс задач.

Исследовательский эксперимент проводился в три этапа:

I этап – констатирующий – определяется актуальный уровень математической грамотности обучающихся;

II этап – формирующий – проводятся формирующие занятия с экспериментальной группой, с контрольной группой не проводятся;

III этап – контрольный – сравнивается и анализируется динамика показателей математической грамотности обучающихся обеих групп.

Данные, полученные на различных этапах исследования следующие.

I этап – констатирующий.

Первичные результаты тестирования на констатирующем этапе эксперимента представлены в Приложении А.

Сводные показатели представлены в таблице 4.

Таблциа 4 – Сводные показатели математической грамотности обучающихся экспериментальной и контрольной групп в констатирующем эксперименте

Уровень	Экспериментальная группа		Контрольная группа	
	чел.	%	чел.	%
Высокий	-	-	-	-
Средний	5	50	6	60
Низкий	5	50	4	40
Всего	10	100	10	100

В целом показатели по группам примерно одинаковые, что наглядно видно на диаграмме рисунка 5.

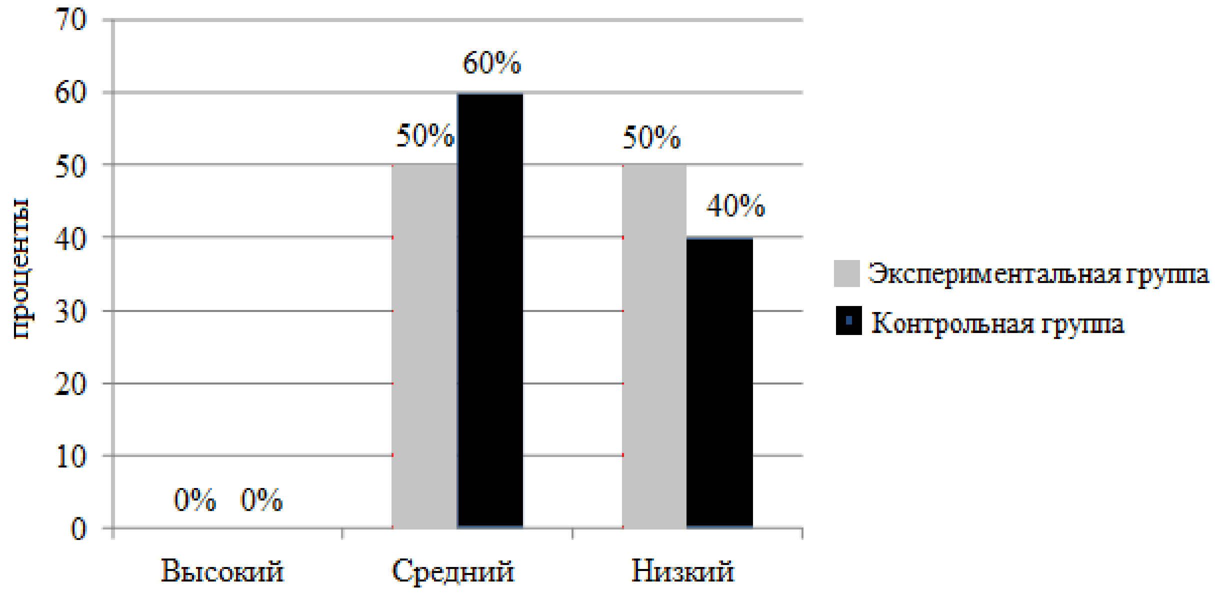

Рисунок 5 – Результаты показателей математической грамотности обучающихся экспериментальной и контрольной групп в констатирующем эксперименте

Из таблицы 4 и рисунка 5 видно, что на констатирующем этапе исследования в экспериментальной группе высокого уровня не выявлено, средний у 50% и низкий также у 50% обучающихся. В контрольной группе высокий уровень не выявлен, средний у 60% и низкий у 40% учащихся.

II этап – формирующий.

Дополнительно к традиционным урокам, были проведены формирующие занятия с экспериментальной группой.

Разработанный комплекс задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной», а также ход решения задач представлены в предыдущем параграфе.

С контрольной группой занятия не проводились, велись только традиционные уроки по алгебре. Это было необходимо для чистоты эксперимента.

III этап – контрольный.

Первичные результаты тестирования на контрольном этапе эксперимента представлены в Приложении Б.

Сводные показатели представлены в таблице 5.

Таблциа 5 – Сводные показатели математической грамотности обучающихся экспериментальной и контрольной групп в контрольном эксперименте

Уровень	Экспериментальная группа		Контрольная группа	
	чел.	%	чел.	%
Высокий	6	60	1	10
Средний	4	40	5	50
Низкий	-	-	4	40
Всего	10	100	10	100

Наглядно результаты показаны на диаграмме рисунка 6.

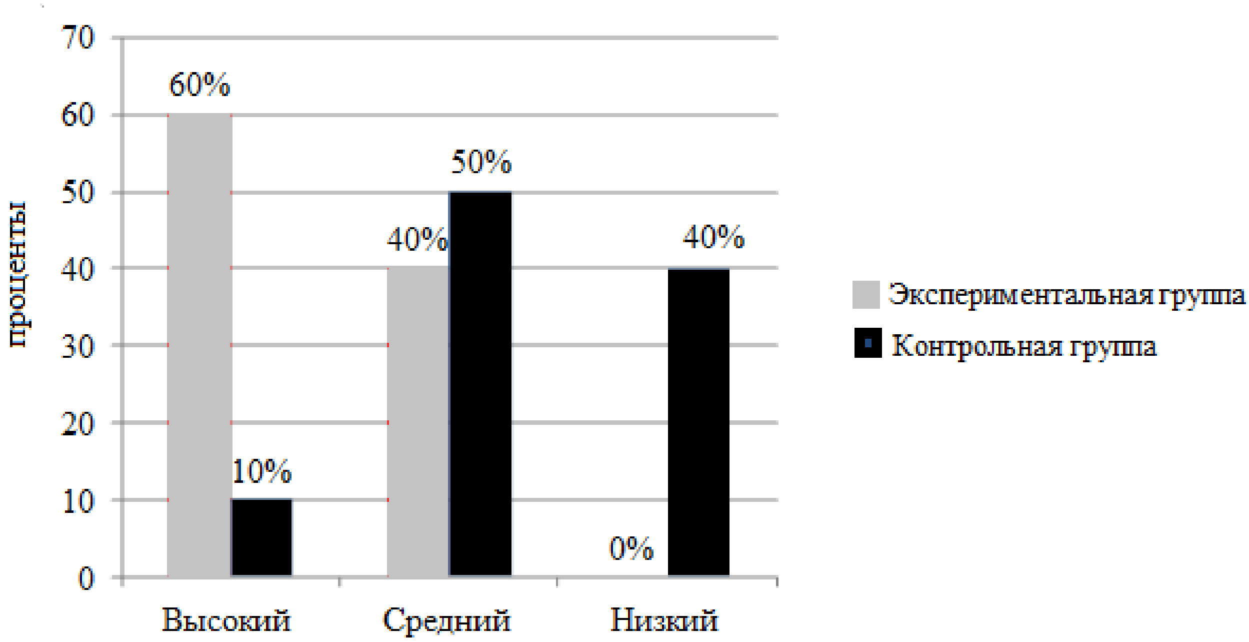

Рисунок 6 – Результаты показателей математической грамотности обучающихся экспериментальной и контрольной групп в контрольном эксперименте

Из таблицы 5 и рисунка 6 видно, что на контрольном этапе учащиеся экспериментальной группы показали: высокий уровень математической грамотности – 60% и средний – 40% учащихся. Низкого уровня не выявлено.

В контрольной группе один учащийся повысил свой уровень математической грамотности со среднего на высокий. У остальных учащихся, даже если несколько повысились показатели по баллам, все же остались на прежнем уровне. Поэтому в контрольной группе высокий уровень математической грамотности у 10%, средний – у 50% и низкий – у 40% учащихся.

По результатам эксперимента можно сказать, что в экспериментальной группе, с которой были проведены дополнительные формирующие занятия, показатели заметно выше, чем в контрольной группе, с которой проводились только традиционные уроки по алгебре.

Таким образом, задачи с применением производной показали, что возможности производной намного шире математики и ее можно применять при нахождении оптимального значения физических, химических, биологических и других процессов.

Итак, можно сделать общий вывод, что практико-ориентированные задачи проникают вглубь реальных житейских процессов, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем мире.

В целом можно утверждать, что задачи с использованием производной могут формировать математическую грамотность обучающихся вследствие их применимости в технике, в строительстве, в экономике, в медицине, в быту и многих других областях, составляющих окружающий мир обучающихся.

Вывод по третьей главе

В заключительной главе представлен комплекса задач, направленных на формирование математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

В качестве практических приложений представлены задачи из областей геометрии, физики, математики, химии, биологии и анатомии, строительстве, что указывает на возможности производной – ее применение намного шире математики.

Сделан промежуточный вывод о том, что практические приложения производной могут формировать математическую грамотность обучающихся вследствие их применимости в технике, в строительстве, в экономике, в медицине, в быту и многих других областях, составляющих окружающий мир обучающихся.

Для эмпирического доказательства гипотезы была проведена апробация формирования математической грамотности обучающихся 10-11 классов в процессе изучения темы «Практические приложения производной».

Исследовательский эксперимент проводился среди обучающихся 10-го класса. В эксперименте участвовало 20 ребят, которые были распределены на две группы – экспериментальную и контрольную.

Для диагностики математической грамотности обучающихся была разработана контрольная работа с заданиями.

Также разработана балльная оценка решения заданий.

Для формирования математической грамотности обучающихся экспериментальной группы был разработан формирующий эксперимент.

Исследовательский эксперимент проводился в три этапа:

I этап – констатирующий – определяется актуальный уровень математической грамотности обучающихся;

II этап – формирующий – проводятся формирующие занятия с экспериментальной группой, с контрольной группой не проводятся;

III этап – контрольный – сравнивается и анализируется динамика показателей математической грамотности обучающихся обеих групп.

В заключение сравнивались показатели экспериментальной группы, с которой проводился формирующий эксперимент и показатели контрольной группы, с которой такой эксперимент не проводился.

Сделаны выводы и подтверждена гипотеза исследования.

Заключение

Математика является сложным предметом, а тема «Производная» вообще трудна для восприятия школьников. Наибольшая проблема заключается в том, что производная не применяется на практике, в быту, в повседневной жизни обучающихся. Поэтому они не имеют реального представления о значении производной. Но это достаточно серьезная и необходимая тема для изучения и в целом для математической грамотности обучающихся.

Математическая грамотность – это способность личности грамотно использовать математические знания в повседневной жизни. При этом важно не столько научить решать задачи, сколько сформировать и развить личностные особенности обучающихся при помощи УУД, которые включают умения логически рассуждать и делать выводы, правильно применять формулы, а также навыки проведения математических расчетов, анализа, моделирования, интерпретации и т.д.

Формирование математической грамотности основывается, прежде всего, на мотивации самих обучающихся. Для этого следует перенести способы решения учебных задач на реальные ситуации, формировать у обучающихся опыт поиска путей решения житейских задач, применять математическое моделирование реальных ситуаций. Именно интерес к теме позволяет лучше воспринимать новый материал. Все это позволяет формировать базовые предметные компетенции, а именно – универсальные учебные действия, что соответствует требованиям ФГОС.

Реализовать изложенное позволяют практико-ориентированные задачи – задачи, тесно связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни. Их особенности заключаются в том, что условие задачи представляется как сюжет или проблема из жизненной ситуации, информация представляется в разной форме (рисунок, график, таблица, схема, диаграмма и т.д.), а также в значимости для обучающегося получаемого результата.

Анализ учебников математики показал высокую абстрактность предлагаемых задач по теме «Производная». Такое положение дел не дает возможности применения знаний в реальных жизненных условиях. Поэтому возникает необходимость создания и введения в школьный курс математики практико-ориентированных задач с использованием производной.

Представленный в работе комплекс практико-ориентированных задач с использованием производной позволяет формировать математическую грамотность обучающихся. В качестве практических приложений представлены задачи из областей геометрии, физики, математики, химии, биологии и анатомии, строительстве, что указывает на возможности производной – ее применение намного шире математики. Кроме того, рассмотрены разные приемы и способы решения и в разных ситуациях. Также рассмотрен вариант создания математической модели, которая составляется при решении любой математической задачи.

Рассмотрено сравнение решения задач при помощи физических формул и математической производной. Известно, что многие задачи можно решить быстрее при помощи производной, а практические приложения производной могут формировать математическую грамотность обучающихся вследствие их применимости в технике, в строительстве, в экономике, в медицине, в быту и многих других областях, составляющих окружающий мир обучающихся.

Констатирующий этап исследования по показателям математической грамотности показал следующее: в экспериментальной группе высокого уровня нет, средний у 50% и низкий у 50% учащихся. В контрольной группе высокий уровень не выявлен, средний у 60% и низкий у 40% учащихся.

Формирующий этап предполагал формирование у учащихся экспериментальной группы математической грамотности, для чего был использован разработанный комплекс задач с использованием производной. С контрольной группой уроки проводились в традиционной форме.

Контрольный этап исследования показал, что по показателям математической грамотности в экспериментальной группе выявлен высокий уровень у 60% и средний у 40% учащихся. Низкого уровня учащиеся не показали. В контрольной группе высокий уровень у 10%, средний у 50% и низкий у 40% учащихся.

В целом исследование показало, что изучение производной на основе практических приложений позволило сформировать математическую грамотность обучающихся 10-11 классов, что подтверждает выдвинутую гипотезу.

Таким образом, задачи исследования решены, цель достигнута.

Список литературы

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров / Под ред. Ш.А. Алимова. – М.: Просвещение, 2016. – 384 с.

2. Башмаков М.И. Математика / М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС 2017. – 394 с.

3. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд.– М. : Мнемозина, 2014. – 335 с.

4. Волкова Т.Н. Использование практико-ориентированных задач в обучении математике учащихся основной школы / Т.Н. Волкова // Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития. Сборник научных трудов по материалам II заочной Всероссийской научно-практической конференции. – 2017. – С.173–176.

5. Гамезо М.В. Атлас по психологии. Информационно методическое пособие / М.В. Гамезо, И.А. Домашенко. – М.: Педагогическое общество России, 2012. – 276 с.

6. Дубровина И.В. Руководство практического психолога: психологические программы развития личности в подростковом и старшем школьном возрасте / И.В. Дубровина. – М.: Астрель, 2015. – 268 с.

7. Калинкина Е.Н. Сборник заданий по развитию функциональной математической грамотности обучающихся 5-9 классов / Е.Н. Калинкина. – Новокуйбышевск, 2019. – 22 с.

8. Колгоморов А.Н. Алгебра и начала математического анализа :Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

9. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений; базовый и профильный уровни /

Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин / Под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2011. – 368 с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра и начала математического анализа : базовый уровень (ФГОС) 10 класс : учебник / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир / Под ред. В.Е. Подольского. – М.: Просвещение, 2021. – 368 с.

11. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.– М.: Мнемозина, 2013. – 287 с.

12. Назарова С.Н. Практико-ориентированные задачи по математике как средство повышения качества обучения / С.Н. Назарова // Вестник науки и образования. – 2016. – № 12 (24).. – С. 94–95.

13. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа : Учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.– М.: Просвещение, 2009. – 383 с.

14. Педагогика здравого смысла. Образовательная система «Школа 2100» / Под ред. А.А. Леонтьева. М.: Баласс, 2013. – 124 с.

15. Петров В.А. Прикладные задачи школьного курса математики на уроках математики: Кн. для учителей математики и студентов мат. фак. педвузов / В.А. Петров. – Смоленск: СГПУ, 2011. – 268 с.

16. Пожарова Г.А. Практико-ориентированные задачи как один из важнейших элементов формирования математической грамотности учащихся / Г.А. Пожарова // Молодой ученый. – 2021. – № 1 (343). – С. 62-64.

17. Постановление Правительства РФ «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» от 26.12.2017 г. № 1642 (ред. от 26.09.2022) // КонсультантПлюс – режим доступа: https://www.consultant.ru (дата обращения: 02.12.2022)

18. Развитие функциональной грамотности обучающихся основной школы: методическое пособие для педагогов / Под ред. Л.Ю. Панариной,

И.В. Сорокиной, О.А. Смагиной, Е.А. Зайцевой. – Самара: СИПКРО, 2019. – 114 с.

19. Расташанская Т.В. Развитие математической грамотности не основе предметного и межпредметного содержания: методическое пособие для учителя / Т.В. Расташанская, Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, М.С. Попов. – М.: Академия, 2021. = 50 с.

20. Результаты международного исследования PISA 2018. Публикации [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.centeroko.ru/pisa18/pisa2018_ml.html (дата обращения 03.03.2023)

21. Трофимова Т.А. Математическая грамотность : пособие по развитию функциональной грамотности старшеклассников / Т.А. Трофимова, И.Е. Барсуков, А.А. Бурдакова / Под ред. Р.Ш. Мошниной. – М.: Академия Минпросвещения России, 2021. – 68 с.

22. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования Приказ Минобрнауки России № 287 от 31.05.2021 [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://fgos.ru (дата обращения: 03.03.2023)

23. Фирсов В.В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения / В.В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1994. – 312 с.

24. Ященко И.В. ОГЭ-2021. Математика. Типовые тестовые задания / И.В. Ященко, Л.О. Рослова, И.Р. Высоцкий. – М.: Экзамен, 2020. – 80 с.

Приложение А

Первичные результаты тестирования по определению уровня математической грамотности у обучающихся экспериментальной и контрольной групп
на констатирующем этапе эксперимента

№	Имя, Ф.	Математическая грамотность										Средний показатель	Уровень
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Экспериментальная группа													
1	Ваня Я.	5	4	6	2	4	3	4	3	5	5	4,1	Низкий
2	Денис Г.	7	5	3	6	5	5	4	5	6	4	5	Низкий
3	Женя Г.	8	9	7	5	11	12	9	10	9	8	8,8	Средний
4	Ильяс Б.	3	5	3	5	3	5	2	5	5	4	4	Низкий
5	Ира А.	9	9	7	9	8	6	7	7	9	6	7,7	Средний
6	Лена И.	7	10	9	12	8	13	9	9	11	12	10	Средний
7	Максим И.	6	6	3	6	2	7	9	7	4	8	5,8	Средний
8	Наташа Л.	5	3	4	2	5	3	3	4	2	3	3,4	Низкий
9	Толя М.	6	5	6	4	5	3	6	5	5	4	4,9	Низкий
10	Юля П.	7	8	7	9	7	6	7	7	6	7	7,1	Средний
Контрольная группа													
1	Вика Д.	6	7	7	9	6	9	9	7	9	8	7,7	Средний
2	Даша Ц.	4	6	3	8	3	7	2	5	8	3	4,9	Низкий
3	Игорь М.	7	9	11	14	8	13	9	10	9	12	10,2	Средний
4	Катя Б.	7	9	7	4	8	4	6	6	3	6	6	Средний
5	Лара Т.	4	6	3	5	6	4	2	5	6	6	4,7	Низкий
6	Маша И.	4	2	3	5	3	4	2	5	3	3	3,4	Низкий
7	Надя У.	6	7	7	9	7	6	7	7	9	7	7,2	Средний
8	Паша Ф.	7	5	11	9	8	12	9	10	9	8	8,8	Средний
9	Сережа О.	7	8	9	6	7	7	9	6	9	8	7,6	Средний
10	Ян М.	6	3	8	3	7	2	5	8	3	5	5	Низкий

Приложение Б

Первичные результаты тестирования по определению уровня математической грамотности у обучающихся экспериментальной и контрольной групп
на контрольном этапе эксперимента

№	Имя, Ф.	Математическая грамотность										Средний показатель	Уровень
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Экспериментальная группа													
1	Ваня Я.	9	11	9	6	7	9	7	6	8	6	7,8	Средний
2	Денис Г.	10	9	7	12	11	12	9	10	9	8	9,7	Средний
3	Женя Г.	12	11	13	9	14	15	11	12	15	11	12,3	Высокий
4	Ильяс Б.	8	5	8	7	7	5	11	12	9	10	8,2	Средний
5	Ира А.	12	10	9	11	9	9	11	11	14	15	11,1	Высокий
6	Лена И.	14	14	15	14	14	13	15	14	15	14	14,2	Высокий
7	Максим И.	9	12	8	9	10	14	12	11	12	13	11	Высокий
8	Наташа Л.	6	8	9	7	6	8	5	8	5	7	6,9	Средний
9	Толя М.	13	11	12	12	14	12	8	9	10	13	11,4	Высокий
10	Юля П.	12	14	9	11	14	13	12	11	9	12	11,7	Высокий
Контрольная группа													
1	Вика Д.	7	8	8	9	6	9	9	7	8	8	7,9	Средний
2	Даша Ц.	4	6	3	8	3	7	4	5	8	4	5,2	Низкий
3	Игорь М.	7	9	11	14	12	13	9	10	13	12	11	Высокий
4	Катя Б.	8	8	7	5	8	4	6	6	5	6	6,3	Средний
5	Лара Т.	5	6	4	5	6	4	3	5	6	6	5	Низкий
6	Маша И.	4	3	3	5	4	4	3	5	5	5	4,1	Низкий
7	Надя У.	9	7	7	9	7	6	7	7	9	7	7,5	Средний
8	Паша Ф.	7	8	11	9	8	11	9	10	9	8	9	Средний
9	Сережа О.	7	8	9	8	7	8	9	7	9	8	8	Средний
10	Ян М.	6	4	8	3	7	3	5	8	4	5	5,3	Низкий