МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

ЖЕРЕБЦОВА АНАСТАСИЯ ФЕДОРОВНА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО ДЛЯ 10 КЛАССА И МЕТОДИКА ЕГО ЦИФРОВОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ В СРЕДЕ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математическое образование в условиях ФГОС

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ:

Заведующий кафедрой математики и методики обучения математике д.п.н., профессор кафедры МиМОМ
Шкерина Л.В.

_14.12.2022____________________

Руководитель магистерской программы
д.п.н., профессор кафедры математики и методики обучения математике
Шкерина Л.В.
_14.12.2022____________________

Научный руководитель
д.п.н., профессор кафедры математики и методики обучения математике
Майер В.Р.
_14.12.2022____________________

Обучающийся
А.Ф. Жеребцова

_11.12.2022____________________

Оценка
____

Красноярск 2022

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений. Общий объем работы составляет 109 страниц. Работа иллюстрирована 75 рисунками и 1 таблицей. Библиографический список включает 52 источника.

Цель исследования: разработка содержания и методики цифрового сопровождения элективного курса «Геометрия Лобачевского» для обучающихся 10 класса.

Магистерская диссертация решает следующие *задачи*:

1. Изучить и проанализировать вопросы, связанные с аксиоматическим обоснованием школьного курса геометрии, учебную и научно-методическую литературу по теме исследования.
2. Проанализировать существующий опыт отечественной и зарубежной школы по обучению старшеклассников геометрии Лобачевского как в рамках основных, так и элективных (факультативных) курсов в школе.
3. Изучить возможности системы динамической математики Живая математика, позволяющие создавать собственные инструменты для использования их при обучении геометрии Лобачевского в школе.
4. Разработать содержание элективного курса «Геометрия Лобачевского» для 10 классов, а также методику его цифрового сопровождения с использованием среды Живая математика.
5. Провести апробацию разработанной методики, оценить ее эффективность.

На теоретическом уровне: определены разделы геометрии Лобачевского, которые будут включены в содержание разрабатываемого курса, разработаны задачи и основные чертежи-иллюстрации для наглядного представления курса.

На практическом уровне: разработана рабочая программа элективного курса «Геометрия Лобачевского» для обучающихся 10 класса с углубленным изучением математики, разработана методика цифрового сопровождения данного курса, проверена эффективность разработанной методики в ходе экспериментальной работы.

В магистерской диссертации были использованы такие *методы* исследования:

- теоретический (изучение и теоретический анализ научной, педагогической и специальной литературы; моделирование, обобщение данных);
- практический (реализация построенных чертежей; разработка диагностирующей компоненты (тестирование)).

В первой главе рассматриваются основные понятия геометрии Лобачевского: абсолютная геометрия, аксиома Лобачевского, параллельные и сверхпараллельные прямые, эквидистанта и орицикл.

Во второй главе приводится содержание, строится модель знаний, описывается методика цифрового сопровождения организации и обучения элективного курса. Диагностирующая компонента – контроль знаний обучающихся организуется с помощью заданий и проектной работы. Описываются чертежи-иллюстрации и методика их построения, с помощью которых выстраивается обучение курса и организуется работа обучающихся. Даются методические рекомендации по использованию данных чертежей.

В заключении описываются результаты решения задач, поставленных во введении. Представлены дальнейшие планы использования и внедрения разработанного элективного курса в образовательный процесс.

В приложениях располагаются примеры создания собственных инструментов пользователя для обучающихся, примеры задач, которые будут использоваться при изучении элективного курса. Представлена рабочая программа элективного курса «Геометрия Лобачевского», а также входное диагностическое тестирование для апробации.

Результатом работы является рабочая программа элективного курса «Геометрия Лобачевского» и методика его цифрового сопровождения.

Было установлено, что если в процессе обучения геометрии использовать данную методику, то это будет способствовать повышению интереса обучающихся к геометрии и повышению качества обучения по данному предмету.

ESSAY

The Master's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a bibliographic list and appendices. The total volume of the work is 109 pages. The work is illustrated with 75 figures and 1 table. The bibliographic list includes 52 sources.

The purpose of the study: to develop the content and methodology of digital support of the elective course "Lobachevsky Geometry" for students of the 10th grade.

The Master 's thesis solves the following tasks:

1. To study and analyze the issues related to the axiomatic justification of the school course of geometry, educational and scientific and methodological literature on the topic of research.

2. To analyze the existing experience of domestic and foreign schools in teaching Lobachevsky geometry to high school students both in the framework of basic and elective (optional) courses at school.

3. To explore the possibilities of the dynamic mathematics system Live Mathematics, allowing you to create your own tools for using them when teaching Lobachevsky geometry at school.

4. To develop the content of the elective course "Lobachevsky Geometry" for grades 10, as well as the methodology of its digital support using the Live Mathematics environment.

5. To test the developed methodology, evaluate its effectiveness.

At the theoretical level: sections of Lobachevsky geometry have been identified, which will be included in the content of the course being developed, tasks and basic drawings-illustrations have been developed for a visual presentation of the course.

At the practical level: the working program of the elective course "Lobachevsky Geometry" has been developed for students of the 10th grade with in-depth study of mathematics, the methodology of digital support of this course has been developed, the effectiveness of the developed methodology has been tested during experimental work.

The following research methods were used in the master 's thesis:

• theoretical (study and theoretical analysis of scientific, pedagogical and specialized literature; modeling, generalization of data);

• practical (implementation of the constructed drawings; development of the diagnostic component (testing)).

The first chapter discusses the basic concepts of Lobachevsky geometry: absolute geometry, Lobachevsky's axiom, parallel and superparallel lines, equidistant and oricycle.

The second chapter provides the content, builds a knowledge model, describes the methodology of digital support for the organization and training of an elective course. The diagnostic component – the control of students' knowledge is organized with the help of assignments and project work. The drawings-illustrations and the methodology of their construction are described, with the help of which the training of the course is built and the work of students is organized. Methodological recommendations on the use of these drawings are given.

In conclusion, the results of solving the tasks set in the introduction are described. Further plans for the use and implementation of the developed elective course in the educational process are presented.

The applications contain examples of creating user's own tools for students, examples of tasks that will be used when studying an elective course. The working program of the elective course "Lobachevsky Geometry" is presented, as well as input diagnostic testing for approbation.

The result of the work is the working program of the elective course "Lobachevsky Geometry" and the methodology of its digital support.

It was found that if this technique is used in the process of teaching geometry, it will help to increase the interest of students in geometry and improve the quality of training in this subject.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Современный этап развития образования характеризуется эпохой цифровизации, которая поддерживается как ФГОС, так и целым рядом федеральных проектов. Быстро меняющиеся подходы и тенденции к качеству образования, принятие новых федеральных государственных образовательных стандартов обязывают учителей вносить соответствующие изменения в учебный процесс.

Математическое образование, как и обучение остальным дисциплинам, вынуждено отходить от традиционных обучающих методов и апробировать новые методики, чтобы повысить качество обучения школьников. Обучающимся не всегда интересно изучать геометрию, особенно в тех случаях, когда она преподносится им только в виде статичных чертежей из учебника или неподвижной картинки с экрана проектора. Не все обучающиеся могут адекватно и с интересом воспринимать традиционное преподавание геометрии, от чего у них снижается мотивация к изучению предмета, не вполне достаточно формируются навыки самостоятельного изучения постоянно усложняющегося материала [46].

Немаловажную роль в российском образовании играет патриотическое воспитание. Как известно, по многим нематематическим дисциплинам формирование любви к Родине, гордости за Россию осуществляется через задания, доклады и другие формы оценивания предметов. В математике подобное универсальное учебное действие можно развить только через задачи и деловые игры. При обучении математике школьников можно знакомить с различными выдающимися математиками, но, как правило, это ученые других стран, в большинстве своем из стран Западной Европы.

По нашему мнению, наиболее важным в формировании любви и гордости к своей Родине будет как раз изучение таких математических дисциплин, которые разрабатывали наши русские и советские ученые. Одним из таких математиков является Николай Иванович Лобачевский, который открыл для всего мира новую геометрию, изменив традиционный подход к евклидовой геометрии как к единственно возможной геометрии.

Изучение геометрии Лобачевского в рамках элективного курса для 10 классов поможет обучающимся не только познакомиться с основами неевклидовой геометрии, но также позволит поднять авторитет российской математической науки в представлении школьников. Они будут знать, что не только западноевропейские ученые могут делать грандиозные открытия (пусть некоторые математики и делали свои открытия на территории России), но также у нас были и свои величайшие умы мировой науки, которые добивались уникальных математических результатов.

Изучение геометрии Лобачевского будет для обучающихся интереснее и нагляднее, если обучение будет осуществляться с помощью методики цифрового сопровождения на всем протяжении курса.

Методика цифрового сопровождения учебных дисциплин появилась в педагогике сравнительно недавно, однако, несмотря на это, она достаточно активно практикуется. Разные авторы применяют цифровые технологии в образовании с целью улучшения понимания материала, перекладывая вычислительные проблемы на «плечи» компьютера, позволяя обучающимся сосредоточиться на овладении ключевыми понятиями теории. Создаются различные виртуальные тренажёры, позволяющие улучшить качество обучения студентов и школьников. Так А.А. Галиакберова в своей статье [12] рассказывает о преимуществах симуляторов, для более комфортного изучения геометрии профильных школ в дистанционном формате. Автор статьи ставит акцент на том, что данные симуляторы помогут обучающимся эффективно изучить геометрию и подготовиться к ЕГЭ.

П.А. Агафонов и Н.Г. Подаева в статье [40] выделяют большое количество преимуществ цифрового сопровождения курса геометрии в целях расширения кругозора обучающихся. Они акцентируют внимание читателя на социокультурном развитии школьников на уроках геометрии через специально разработанную методику цифрового сопровождения курса.

Борисова Е. В своей статье [8] раскрывает методику цифрового сопровождения курса геометрии у студентов через модульные тесты, доказывая своими педагогическими экспериментами их эффективность. По её словам, цифровое сопровождение курса может быть основано только на работе в цифровой среде.

А.В. Кострюков и Ю.В. Семагина активно применяют обозначенную темой исследования методику для повышения качества самостоятельного изучения геометрии студентами [31]. По их мнению, цифровое сопровождение будет наглядно демонстрировать большинство тем курса, которые могут оказаться непонятными для обучающихся.

Подводя итог обсуждения актуальности нашего диссертационного исследования, отметим, что содержание разработанного нами элективного курса не является новым. Кружковые или факультативные занятия по основам геометрии Лобачевского в практике внеурочной деятельности некоторых общеобразовательных отечественных учреждений имели место и раньше. Особенно активным этот процесс был в восьмидесятые – девяностые годы двадцатого века, сразу после выхода книги для внеклассного чтения в IX и X классах Р.Н. Щербакова и Л.Ф. Пичурина «От проективной геометрии – к неевклидовой» [52]. Наибольшее число таких занятий проводилось в региональных центрах, в школах с углублённым изучением математики. А в городе Казани, в университете которого 23 февраля 1826 года профессор Лобачевской представил доклад, содержащий одно из величайших открытий XIX века, практически во всех школах старшеклассникам рассказывали о неевклидовой геометрии.

Актуальность нашего исследования заключается в том, что в соответствии с запросами цифрового общества оказалась востребованной цифровая трансформация как основных, так и элективных курсов в школе.

Анализ результатов исследований, посвященных проблеме, связанной с разработкой и внедрением в учебный процесс цифрового сопровождения элективного курса по геометрии Лобачевского, анализ нашего опыта преподавания в школе некоторых тем этого курса позволяют выделить **противоречие**: между потребностью школы в разработке методики цифрового сопровождения в среде Живая математика элективного курса по геометрии Лобачевского с соответствующей корректировкой его содержания, с одной стороны, и отсутствием методик сопровождения в среде Живая математика существующих кружковых, факультативных и элективных курсов по планиметрии Лобачевского в школе, с другой стороны.

Необходимость разрешения указанного противоречия определяет **проблему исследования**: Каким должно быть содержание элективного курса по геометрии Лобачевского в 10 классе и методика его цифрового сопровождения, чтобы обучающиеся могли эффективно освоить этот курс?

Необходимость разрешения этой проблемы определила **тему исследования**: «Элективный курс по геометрии Лобачевского для 10 класса и методика его цифрового сопровождения в среде Живая математика».

Цель исследования: разработка содержания и методики цифрового сопровождения элективного курса «Геометрия Лобачевского» для обучающихся 10 класса.

Объект исследования: процесс обучения в 10 классе элективному курсу по геометрии Лобачевского с использованием среды Живая математика.

Предмет исследования: содержание и методика цифрового сопровождения элективного курса «Геометрия Лобачевского» в процессе обучения школьников.

Гипотеза исследования: Обучающиеся 10 класса смогут эффективно освоить элективный курс по геометрии Лобачевского, если будет разработана методика цифрового сопровождения этого курса с использованием анимационных, конструктивных и вычислительных возможностей среды Живая математика, а содержание этого курса адаптировано под эту методику.

В соответствии с поставленной целью исследования можно выделить следующие **задачи**:

1. Изучить и проанализировать вопросы, связанные с аксиоматическим обоснованием школьного курса геометрии, учебную и научно-методическую литературу по теме исследования.
2. Проанализировать существующий опыт отечественной и зарубежной школы по обучению старшеклассников геометрии Лобачевского как в рамках основных, так и элективных (факультативных) курсов в школе.
3. Изучить возможности системы динамической математики Живая математика, позволяющие создавать собственные инструменты для использования их при обучении геометрии Лобачевского в школе.
4. Разработать содержание элективного курса «Геометрия Лобачевского» для 10 классов, а также методику его цифрового сопровождения с использованием среды Живая математика.
5. Провести апробацию разработанной методики, оценить ее эффективность.

Для решения поставленных задач нами были выбраны следующие **методы** исследования:

- теоретический (изучение и теоретический анализ научной, педагогической и специальной литературы; моделирование, обобщение данных);
- практический (реализация построенных чертежей; разработка диагностирующей компоненты (тестирование)).

Научная новизна и **теоретическая значимость** исследования заключается:

- в теоретическом обосновании целесообразности цифрового сопровождения «Геометрии Лобачевского» в поддержку курса;
- в обосновании и разработке программ пошагового построения и визуализации различных чертежей-иллюстраций, а также методического обеспечения курса.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработана методика цифрового сопровождения элективного курса «Геометрия Лобачевского» (наполненный теоретическим материалом, демонстрационными программами и практическими упражнениями), который поможет обучающимся расширить знания в области геометрии, поспособствует развитию логического мышления, пространственного воображения и повышению интереса к изучению геометрии.

Настоящая работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений. Она посвящена элективному курсу геометрии Лобачевского и, одновременно, дополнительным дисциплинам, которые необходимы для освоения элективного курса.

В первой главе рассматриваются основные понятия геометрии Лобачевского: абсолютная геометрия, аксиома Лобачевского, параллельные и сверхпараллельные прямые, эквидистанта и орицикл.

Во второй главе приводится содержание, строится модель знаний, описывается методика цифрового сопровождения организации и обучения элективного курса. Диагностирующая компонента – контроль знаний обучающихся организуется с помощью заданий и проектной работы. Описываются чертежи-иллюстрации и методика их построения, с помощью которых выстраивается обучение курса и организуется работа обучающихся. Даются методические рекомендации по использованию данных чертежей.

В заключении описываются результаты решения задач, поставленных во введении. Представлены дальнейшие планы использования и внедрения разработанного элективного курса в образовательный процесс.

В приложениях располагаются примеры создания собственных инструментов пользователя для обучающихся, примеры задач, которые будут использоваться при изучении элективного курса. Представлена рабочая программа элективного курса «Геометрия Лобачевского», а также входное диагностическое тестирование для апробации.

Предполагаемая область применения курса – старшая школа (элективный курс для 10 классов с углубленным изучением математики).

ГЛАВА 1. Теоретические основы геометрии Лобачевского и особенности изложения этой теории для обучающихся 10 класса с использованием динамических чертежей-иллюстраций.

§1.1 Абсолютная геометрия как общая часть евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского, аксиома Лобачевского, простейшие следствия геометрии Лобачевского.

История геометрии насчитывает достаточно большой промежуток времени. Начиная от древнего мира и по сегодняшний день, геометрия продолжает своё развитие, вовлекая в себя большое количество последователей, как математиков и художников, так и просто интересующихся геометрией людей.

Основоположником геометрии считается геометрия Евклида, которая в своё время стала общим сборником трудов математиков-философов того времени. Евклид в своем труде «Начала» смог не только собрать все открытия геометрии того времени, но также дал возможность избавить последующих математиков от создания подобного произведения. Все воспринимали евклидову геометрию, как основополагающую, не требующую сомнений геометрию. Но при этом, она всё же имела ряд особенностей, которые вызывали сомнения у математиков, стремящихся к истинности знания.

Прежде чем перейти к особенностям евклидовой геометрии, которые ставили данное творение под сомнение, отметим некоторые основные аргументы, которые подчёркивают безраздельный авторитет «Начал» Евклида, его безусловные достоинства [29]:

1. «Начала» Евклида – первый дошедший до нас труд по обоснованиям геометрии. Образец логической строгости математических доказательств, образец научного доказательства. Эта книга явилась завершением, венцом всего накопленного трудами нескольких поколений древнегреческих

математиков и философов. В ней как в фокусе, собраны достижения геометрии за огромный период культурного развития человечества.

2. "Начала" Евклида имели громадное влияние на развитие математических наук. Геометрия Евклида и ее разделы, получившие развитие в XVIII-XX в., положены в основу физики и астрономии, механики и многих прикладных теоретических дисциплин. По этой книге изучали математику Коперник, Галилей, Декарт, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Ломоносов, Лобачевский и другие великие умы науки. Так, например, Ньютон следовал Евклиду в своей книге «Математические начала натуральной философии».

3. Ещё в начале XX века учебники по школьной геометрии, по существу, представляли собой популярное изложение «Начал» Евклида, т.е. вся школьная геометрия являлась пересказом "Начал" в несколько иной форме.

Не смотря на всю значимость труда Евклида, у него всё же были свои недостатки. Остановимся на отдельных несовершенных особенностях «Начал» Евклида, большинство из которых были обнаружены лишь по истечении более двух тысячелетий [29]:

1. Евклид не сумел чисто формально построить геометрию. Он не выделил основные понятия геометрии. Данные им определения геометрических понятий являются лишь некоторым приближённым наглядным их описанием, т.е. они не строгие. Они приводятся в общем списке вместе с определениями других фигур.

2. Некоторые первые определения нигде в дальнейшем не используются, хотя большинство остальных определений оказались востребованными при доказательстве предложений, либо при определении новых понятий.

3. В некоторых определениях используются понятия, которые нигде не определяются (например, длина, ширина, конец и т.д.). Равенство фигур, о котором идёт речь в аксиоме 7, опирается на движение, но об этом понятии ничего не говорится.

Евклид не рассматривает бесконечные прямые. В его представлении прямая – это отрезок, который можно «продолжить», то есть получить другую прямую (отрезок), содержащую первую.

4. Список евклидовых постулатов и аксиом слишком беден для обоснования геометрии. Так, например, нельзя обосновать расположение точки между двумя другими, нахождение двух точек по разные стороны относительно прямой. Поэтому Евклид подкрепляет доказательства обращением к чертежу. После выхода труда «Начала» многие учёные дополняли труд Евклида. Так Архимед добавил известную аксиому, позволяющую обосновывать процесс измерения отрезков.

5. Не все постулаты и аксиомы оказались независимыми. Например, четвёртый постулат Евклида удалось вывести из остальных постулатов и аксиом.

Особый интерес вызвал 5 постулат. Пытливым умам науки казалось, что существует возможность его доказать, используя остальные аксиомы и постулаты. Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что при доказательстве признаков параллельности прямых в евклидовой геометрии не используется 5 постулат. Он существенно используется при доказательстве обратных утверждений: если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой образующиеся при этом внутренние накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, внутренние односторонние углы в сумме равны двум прямым [3].

Так как Евклид при доказательстве параллельных прямых не пользовался утверждением пятого постулата, сам постулат вызывал большое количество сомнений у других математиков. Более двух тысяч лет геометрию Евклида все воспринимали как эталон, но, при этом, всё же находились математики, которые ставили под сомнение пятый постулат евклидовой геометрии, пытаясь опровергнуть его истину. Так, начиная с греческого математика Посидония (I в. до н.э.), «попытки доказать пятый постулат предпринимали очень многие математики: Сабит ибн Корра (IX век), Омар Хайям (1048-1131), Джон Валлис (1616-1703), Джироламо Саккери (1667-1733), Иоганн Ламберт (1728-1777), Адриан Лежандр (1752-1833), Фаркаш Бояи (1777-1857) и многие другие» [39].

К началу XIX в. попытки доказать пятый постулат или аксиому параллельности привели математиков к мысли, что это сделать принципиально невозможно. Впервые это явно было выражено в работах профессора Казанского университета Николая Ивановича Лобачевского (1793–1856). Он заменил аксиому параллельности ее отрицанием и создал новую геометрическую теорию, которую назвал «воображаемой» геометрией [1, 47]. Эта теория была им глубоко разработана. Получены результаты, соответствующие аналогичным утверждениям евклидовой геометрии. О своих исследованиях Лобачевский доложил на ученом совете физико-математического факультета Казанского университета в 1826 г. и опубликовал результаты в 1829 г. Его современники не были подготовлены для того, чтобы понять и оценить новые идеи, заключенные в работах Лобачевского.

В это же время К.Ф. Гаусс занимался теорией параллельных. В его записках были найдены некоторые теоремы новой геометрии. Он не публиковал эти свои результаты, боясь остаться непонятым. Но, при этом, Гаусс помог Николаю Ивановичу освятить свою теорию мировой общественности [24].

Венгерский математик Янош Бояи (Bolyai, 1802–1860), пытаясь доказать пятый постулат, также пришел к неевклидовой геометрии. Свои исследования он опубликовал в 1832 г. в виде приложения ("Аппендикс") к сочинениям своего отца Фаркаша Бояи [24]. Но данные исследования не получили распространения и признания в мировом математическом сообществе, так как результаты Николая Ивановича по разработке новой теории были опубликованы и представлены миру на несколько лет раньше.

Работы этих математиков не получили признания при их жизни. Лишь во второй половине XIX в. после установления общих принципов логического обоснования геометрии была доказана непротиворечивость новой теории, которая получила название геометрии Лобачевского.

Николай Иванович не отказывался от первых четырёх постулатов геометрии Евклида, а даже подтверждал, что они необходимы при построении системы аксиом геометрии, однако пятый постулат он взял противоположный постулату Евклида [2]. Это позволило в будущем сделать большое количество открытий как в математике, так и в физике. Однако «несмотря на всё своеобразие геометрии Лобачевского, различие между нею и евклидовой обнаруживается лишь на расстояниях, больших по сравнению с «абсолютной длиной» k». А длина эта, по Лобачевскому, не меньше, чем 100 000 диаметров орбиты Земли! Вот почему геометрию Лобачевского называют ещё и космической геометрией. Для расчётов в земных масштабах подходит и евклидова геометрия. Различия между этими двумя геометриями тут просто стираются [29].

До Лобачевского евклидова геометрия считалась единственно возможным учением о пространстве [30]. Открытие неевклидовой геометрии положило начало далеко идущим взглядам на геометрию и предмет ее исследования. Появились и другие неевклидовы геометрии. При этом повысился интерес к вопросам оснований геометрии и возникла необходимость дать строгое логическое обоснование самой евклидовой геометрии.

Первым крупным достижением в этой области явилось исследование немецкого математика Морица Паша (1843–1930) "Лекции по новой геометрии" (1882). Он предложил 12 аксиом для обоснования геометрии [6].

Гильберт в книге «Основания геометрии» рассматривает три вида основных объектов (или как он их называет – «вещей»): точки, прямые, плоскости, которые являются элементами пространства [13]. Свойства отношений между этими объектами выражаются в аксиомах, которые разбиты на пять групп. После аксиом каждой группы доказываются их логические следствия – теоремы.

Рассмотрим основные аксиомы, сформулированные Давидом Гильбертом в своей книге «Основания геометрии». В качестве изображений будем использовать чертежи-иллюстрации [15], которые наглядно и достоверно смогут дать возможность представить аксиомы разных групп. Все чертежи были разработаны в среде Живая математика в качестве цифрового сопровождения к разрабатываемому курсу. Данный список аксиом будет изучаться обучающимися на курсе в виде экспериментальных построений, основанных как на теории, так и на личном опыте обучающихся. Ведь многие аксиомы планиметрии Евклида обучающиеся изучали в курсе геометрии 7-9 классов.

Первая группа аксиом описывает свойства основного отношения принадлежности (или соединения) точки и прямой, точки и плоскости. Для удобства будем в некоторых случаях заменять слово «принадлежит» привычными нам словами «содержит» или «лежит» [50].

1. Для любых двух точек A и B существует прямая a, содержащая каждую из этих двух точек (рис. 1 (а)).

2. Для любых двух точек A и B существует не более одной прямой, содержащей каждую из точек A и B (рис. 1 (б)).

3. На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой (рис. 1 (в)).

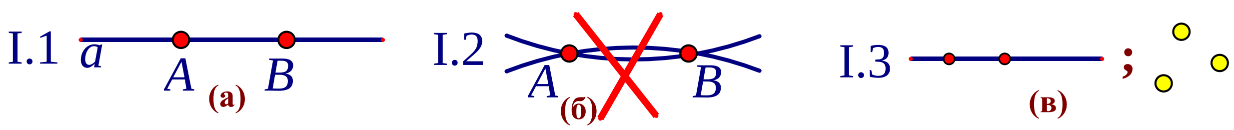

Рисунок 1.

4. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, существует плоскость α, содержащая каждую из трех точек A, B, C. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка (рис. 2 (а)).

5. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, содержащей эти точки (рис. 2.3 (б)).

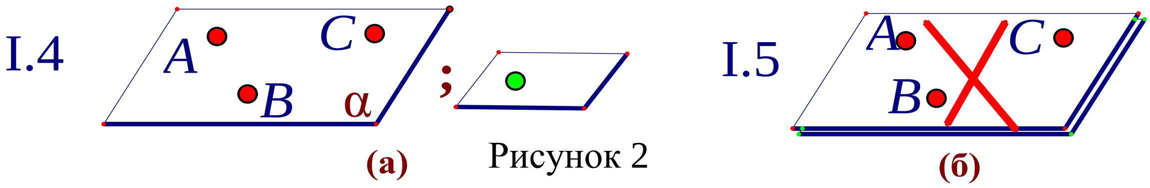

Рисунок 2

6. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка C прямой a лежит в плоскости α (рис. 3 (а)).

7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют ещё, по крайней мере, одну общую точку B (рис. 3 (б)).

8. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости (рис. 3 (в)).

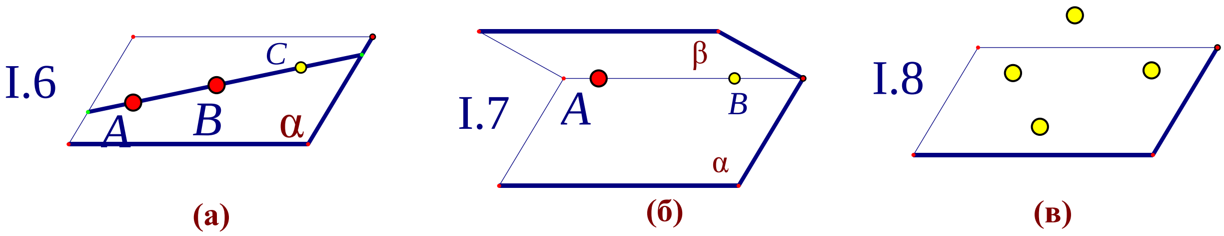

Рисунок 3

Вторая группа – аксиомы порядка, используют отношение “лежать между” для троек точек и делают возможным установить порядок точек на прямой. На основании этого Гильберт определяет некоторые другие понятия:

1. Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C суть три различные точки прямой, и B лежит также между C и A (рис. 4 (а)).

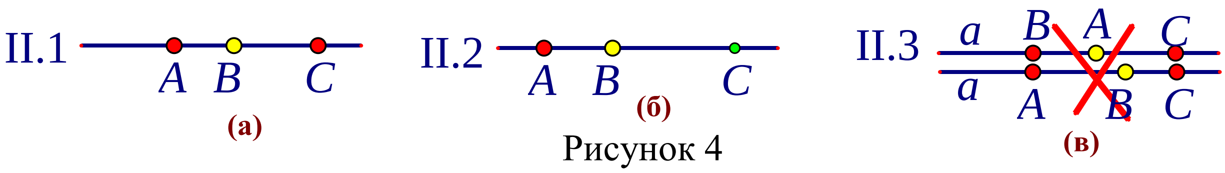

Рисунок 4

2. Для любых двух точек A и B на прямой AB существует, по крайней мере, одна точка C такая, что точка B лежит между A и C (рис. 4 (б)).

3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими (рис. 4 (в)).

II.4 Аксиома Паша

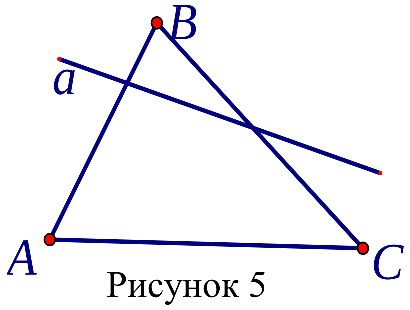

Рисунок 5

4. Аксиома Паша: если прямая a лежит в плоскости треугольника ABC, не проходит через его вершины и пересекает одну из его сторон, то она пересекает еще одну его сторону (рис. 5).

В третьей группе аксиом вводится новое основное неопределяемое понятие – “конгруэнтность”, или “равенство”, отрезков и углов [3].

1. Если A и B две точки, A' – вершина луча h, то на луче h существует точка B', что AB = A'B'.

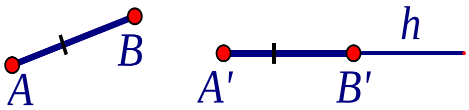

Рисунок 6

Эта аксиома дает возможность откладывать на луче от его вершины отрезок, равный данному отрезку (рис. 6).

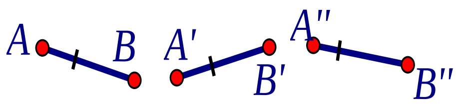

Рисунок 7

2. Если два отрезка равны третьему, то первый равен второму, то есть: из A'B'=AB и A"B"=AB следует, A'B'=A"B" (рис. 7).

3. Пусть AB и BC – два отрезка прямой a, не имеющие общих внутренних точек, A'B' и B'C' – два отрезка прямой a, тоже не имеющие общих внутренних точек. Если при этом AB=A'B' и BC=B'C', то AC=A'C'.

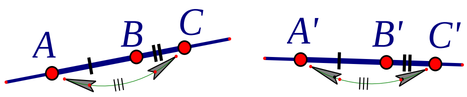

Рисунок 8

Третья аксиома (рис. 8) позволяет определить на множестве отрезков корректное определение суммы отрезков, вывести необходимые свойства этой операции.

4. Пусть даны $\angle(h,k)$ и луч h' в некоторой плоскости. Тогда в заданной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч h', существует и единственный луч k' такой, что $\angle(h,k)=\angle(h',k')$, и все внутренние точки $\angle(h',k')$ лежат в заданной полуплоскости (рис. 9). Каждый угол равен самому себе: $\angle(h,k)=\angle(h,k)$.

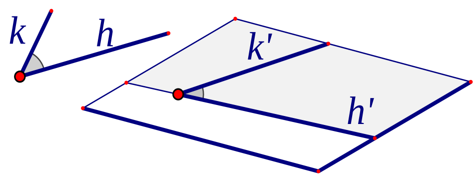

Рисунок 9

Данная аксиома даёт возможность откладывать от любого луча в заданную полуплоскость угол равный данному углу и притом единственный.

5. Если для двух треугольников ABC и A'B'C' AB=A'B', AC=A'C', $\angle BAC=\angle B'A'C'$, то $\angle ABC=\angle A'B'C'$ (рис. 10).

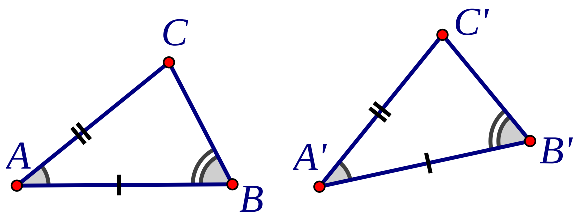

Рисунок 10

Четвертой группой аксиом является группа непрерывности.

1. (Аксиома Архимеда). Для любых отрезков AB и CD существует натуральное число n такое, что nCD>AB (рис. 11).

Эта аксиома дает возможность получить как угодно большие отрезки. Отрезок nCD получен в результате последовательного откладывания на луче AB отрезков, равных отрезку CD.

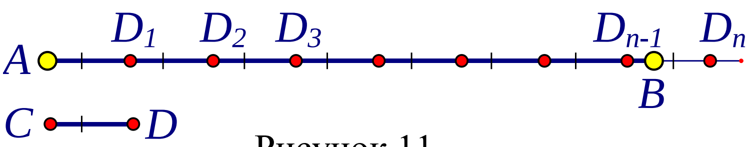

Рисунок 11

2. Аксиома Кантора. Если имеется бесконечная последовательность

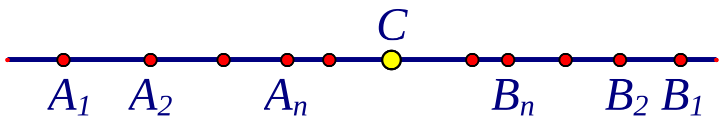

Рисунок 12

вложенных друг в друга (каждый последующий отрезок содержится в предыдущем отрезке) стягивающихся (каким бы ни был заранее данный отрезок ε, в данной последовательности найдется отрезок, который меньше данного отрезка ε) отрезков, то существует точка, лежащая внутри всех отрезков последовательности (рис. 12).

Теория, построенная на аксиомах групп I–IV, называется абсолютной геометрией [26]. Она служит основополагающей базой для создания евклидовой и неевклидовой геометрий. Далее различные геометрии получаются в зависимости от того, какие свойства параллельных прямых принять в качестве аксиомы V группы.

Аксиома Кантора с другими аксиомами обеспечивает доказательство несчетности бесконечного множества точек прямой, что позволяет представлять себе прямую как непрерывную линию, состоящую из точек.

На основании аксиом первых четырёх групп (аксиом абсолютной геометрии) можно получить некоторые важные результаты о параллельных прямых, в частности, признаки параллельности прямых и существование параллельных прямых [27].

Аксиома параллельности была выделена Гильбертом как отдельная группа аксиом [13].

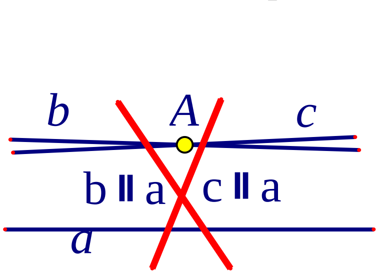

Рисунок 13

1. Даны прямая a и не принадлежащая ей точка A. В плоскости, определяемой точкой A и прямой a, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой a (рис. 13).

Аксиома параллельности эквивалентна пятому постулату Евклида. Это означает, что, используя аксиомы абсолютной геометрии (группы I-IV) и аксиому V, можно доказать пятый постулат; и обратно, используя аксиомы I-IV и пятый постулат, можно доказать аксиому V. В качестве примера приведём доказательство теоремы эквивалентности аксиомы параллельности пятому постулату Евклида. Обучающиеся на этапе изучения эквивалентности пятого постулата Евклида смогут самостоятельно доказать эквивалентность [51], выполняя построения в среде Живая математика и рассуждая, отвечая на наводящие вопросы учителя. Сначала приведём доказательство пятого постулата Евклида, используя аксиому параллельности.

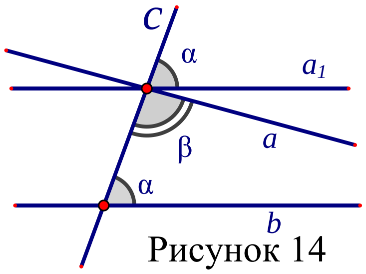

Рисунок 14

Пусть прямые a и b пересечены прямой c, и сумма внутренних односторонних углов α и β меньше двух прямых (рис. 14). Построим прямую a_1 так, чтобы соответственные углы при пересечении прямых a_1 и b прямой c равнялись α. Прямая a_1 отлична от прямой a и $a_1 || b$. На основании аксиомы V прямая a пересекает прямую b. Пятый постулат доказан.

Для полноты представления доказательства теперь изложим доказательство аксиомы V, используя пятый постулат.

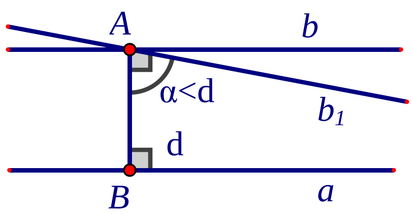

Рисунок 15

Даны прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой (рис. 15). Проведем перпендикуляр AB к прямой a и прямую b через A, перпендикулярную AB и лежащую в плоскости (A,a). Любая прямая b_1 этой плоскости, проходящая через точку A и отличная от b, образует с прямой AB неравные смежные углы. Один из них острый, обозначим его α. Он в сумме с прямым углом между AB и a составляет угол меньше двух прямых, т.е. $\alpha + d < 2d$. На основании пятого постулата Евклида, прямые a и b_1 пересекаются. Итак, все прямые, проходящие через А отличные от прямой b и лежащие в плоскости (А,а), пересекают прямую а. Справедлива аксиома параллельности. Теорема доказана.

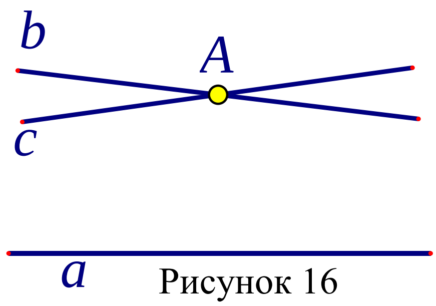

Рисунок 16

Если принять, что сумма углов любого треугольника равна 2d (или двум прямым), то можно доказать справедливость аксиомы параллельности. Обучающиеся смогут выполнить доказательство данной теоремы, пользуясь лишь построением чертежа в среде Живая математика и собственные рассуждения, учитывая приобретенные знания.

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) основана на аксиомах абсолютной геометрии $\sum_{абс}$ = {I группа (8 аксиом принадлежности); II группа (4 аксиомы порядка); III группа (5 аксиом конгруэнтности); IV группа (2 аксиомы непрерывности)} и следующей аксиомы Лобачевского [3]:

Существуют прямая а и точка А, ей не принадлежащая, что через точку А проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую а и лежащих с ней в одной плоскости.

Стоит обратить внимание, что это утверждение сформулировано как отрицание аксиомы V. Поэтому учителю, при объяснении данной темы, необходимо упомянуть, что в условии предполагается существование по крайней мере одной прямой а и одной точки А, которые обладают указанными свойствами (рис. 16). Используя аксиому Лобачевского и 19 аксиом абсолютной геометрии можно совместно с обучающимися доказать, что заключение этой аксиомы распространяется на любые прямую и не лежащую на ней точку. После доказательства вместе с обучающимися можно сформулировать вывод в виде теоремы, что для любой прямой а и любой точки А, ей не принадлежащей, через точку А проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую а и лежащих с ней в одной плоскости.

Ясно, что все определения и теоремы абсолютной геометрии имеют место и в геометрии Лобачевского. Рассмотрим простейшие следствия геометрии Лобачевского, которые будут изучаться обучающимися в разрабатываемом курсе.

На плоскости Лобачевского справедливы результаты абсолютной геометрии (полученные без аксиомы параллельности) о треугольниках [16]. Это – первый, второй и третий признаки равенства треугольников, первая теорема о внешнем угле треугольника, теоремы о пересечении биссектрис и медиан, первая и вторая теоремы Саккери-Лежандра и другие. Приняв аксиому Лобачевского, мы получаем новые теоремы [5]:

1. Сумма внутренних углов любого треугольника меньше 2d.
2. Сумма углов треугольника непостоянна.
3. Сумма внутренних углов любого простого четырехугольника на плоскости Лобачевского меньше 4d.
4. Если на плоскости Лобачевского три угла одного треугольника соответственно равны трем углам второго треугольника, то эти треугольники равны.

Также, принимая аксиому Лобачевского, у нас появляются новые определения фигур на плоскости, с помощью которых можно выполнять решение новых практико-ориентированных задач [10]. На данном этапе изучения планиметрии Лобачевского обучающимся важно объяснить, что новая геометрия визуально отличается от той, что они изучали ранее, но при этом сохраняет большинство свойств евклидовой планиметрии. Новые фигуры, с которыми обучающиеся далее будут встречаться являются противоречивыми на первом этапе. Поэтому важно максимально наглядно показать, а также дать возможность обучающимся «пощупать» новые фигуры неевклидовой геометрии, чтобы все противоречия постепенно переросли в достоинства этой теории.

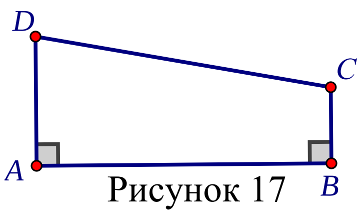

Рисунок 17

Так в геометрии появляется двупрямоугольник [42]. Это выпуклый четырёхугольник, в котором два угла, прилежащие к одной его стороне, прямые (рис. 17).

Если ABCD – двупрямоугольник и ∠A=∠B=d, то сторона AB называется основанием, а стороны AD и BC – боковыми сторонами. Если боковые стороны равны, то двупрямоугольник является четырёхугольником Саккери.

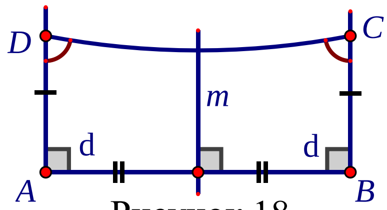

Рисунок 18

Двупрямоугольники, как и обыкновенные фигуры плоскости евклидовой геометрии, обладают своими особенными свойствами. Данные свойства необходимы для дальнейшего изучения эквидистанты и орицикла на плоскости Лобачевского, о которых будет сказано в третьем параграфе данной главы.

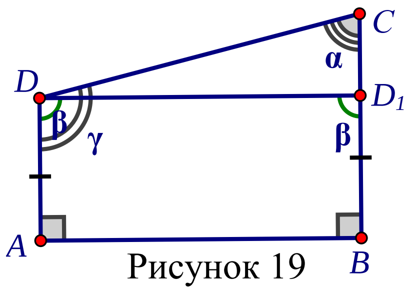

Рисунок 19

1. Если в двупрямоугольнике ABCD с основанием AB стороны AD и BC равны (т.е. ABCD - четырёхугольник Саккери), то ∠C = ∠D < d (рис. 18).

2. Если в двупрямоугольнике ABCD с основанием AB выполняется неравенство AD < BC, то ∠C<∠D (рис. 19).

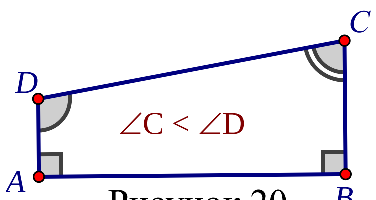

Рисунок 20

3. Если в двупрямоугольнике ABCD с основанием AB выполняется неравенство ∠C < ∠D, то AD < BC (Рис. 20).

Геометрия Лобачевского имеет не последнее место в математическом образовании и стоит, по важности, наравне с геометрией Евклида. Об этом важно напоминать обучающимся, особенно на первых этапах изучения планиметрии Лобачевского. В данном параграфе были рассмотрены только основные и базовые положения теории Лобачевского, необходимые для формирования начальных представлений о геометрии, отличной от общепринятой. При этом, к концу изучения данных основ, обучающиеся будут уже не только понимать серьезность и важность новой геометрии, но также ставить планиметрию Лобачевского в один ряд Евклидовой.

§1.2. Параллельные и сверхпараллельные прямые на плоскости Лобачевского, угол параллельности.

На евклидовой плоскости все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. На плоскости Лобачевского картина совершенно иная, что вытекает из следующей теоремы: расстояние a от переменной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние a принимает все возможные положительные значения.

При изучении параллельных прямых учителю важно сформировать представления о параллельных прямых не только готовыми чертежами, но также дать возможность обучающимся самим построить несколько параллельных прямых на предложенной учителем модели, чтобы сформировать у них определение параллельности прямых на интуитивном уровне, через самостоятельные построения [11].

В геометрии Лобачевского параллельными называют лишь некоторые

Рисунок 21

прямые, не пересекающие данную прямую [32]. Все параллельные прямые являются направленными. Направление задается парой упорядоченных точек, лежащих на этой прямой, и находящихся друг от друга на достаточно большом расстоянии. Одну из этих точек обозначим заглавной латинской буквой без штриха, вторую – со штрихом, например, А и А' (рис. 21). Направление на прямой, мы будем задавать, указывая порядок точек. Если первой указана точка А, то имеется ввиду направление от А к А'. В противном случае - от А' к А.

Рассмотрим пример, как можно вместе с обучающимися изучить тему параллельных прямых, выполняя построения учителем и обучающимися вместе.

Пусть даны прямые AA' и BB', лежащие в одной плоскости, и точка P, принадлежащая BB'. Параллельной прямой (в геометрии Лобачевского) называется прямая BB' параллельная прямой AA' в точке P в направлении от A к A', если выполняются следующие два критерия:

1) прямые AA' и BB' не имеют общих точек (критерий непересечения);

2) для любой точки R, принадлежащей AA', и любого луча h с началом в точке P, и лежащего внутри угла RPB' (рис. 22), луч h пересекает луч RA'

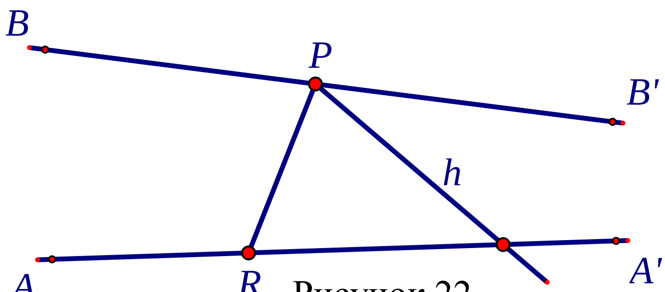

Рисунок 22

(критерий угла).

Несложно доказать, что критерий угла достаточно проверить лишь для одной точки R прямой AA', для остальных он будет выполняться автоматически.

Лобачевский доказывает основную теорему о параллельных прямых: прямая сохраняет признак параллельности во всех своих точках. Мы же примем данную теорему без доказательства, изучив чертеж-иллюстрацию на рисунке 23.

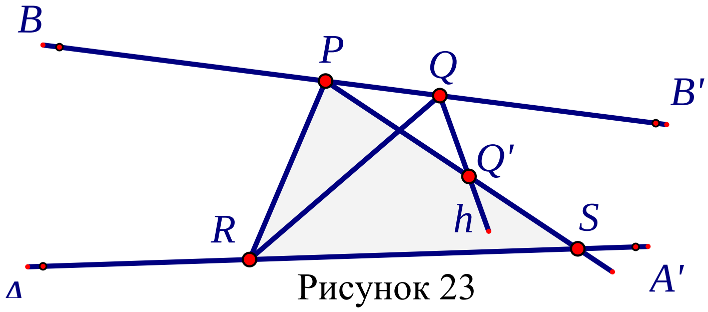

Рисунок 23

В геометрии Лобачевского помимо аксиомы параллельности и вытекающей из ней теоремы, появляется также и угол параллельности: Острый угол, который образует прямая BB' с перпендикуляром MN.

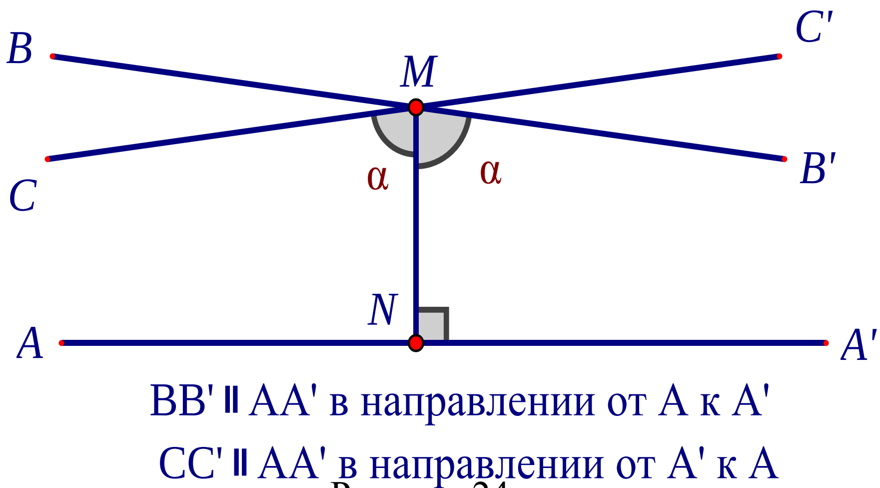

Рисунок 24

На рисунке 24 угол $\alpha = \angle NMB' = \angle NMC$ - является углом параллельности.

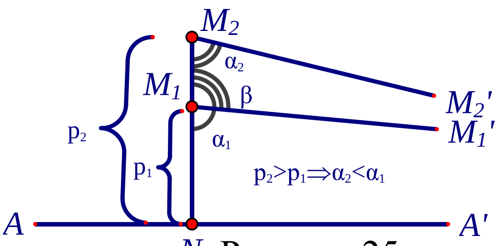

Рисунок 25

Угол параллельности имеет некоторые свойства, которые хотелось бы отметить в данном параграфе.:

1. С возрастанием p угол параллельности α строго убывает (рис. 25).

2. Если точки A и B находятся на равных расстояниях от прямых a и b соответственно, то углы параллельности в этих точках по отношению к a и b равны.

Данные свойства включены в содержание разрабатываемого курса и будут являться обязательными для изучения обучающимися, так как есть список задач, в решении которых данные свойства применяются. Также для обоснования этого свойства обучающимся потребуются две теоремы.

1. Для любого острого угла существует прямая, перпендикулярная к одной его стороне и не пересекающая другую сторону.

2. Для любого острого угла существует единственная прямая, перпендикулярная к одной его стороне и параллельная другой.

Из данных теорем вытекают следующие следствия:

1. (представляет собой свойство 3 угла параллельности). Любой острый угол является углом параллельности для некоторой прямой.

2. Для любого угла, не являющегося развёрнутым (рис. 26), существует единственная прямая, параллельная обеим сторонам этого угла (в

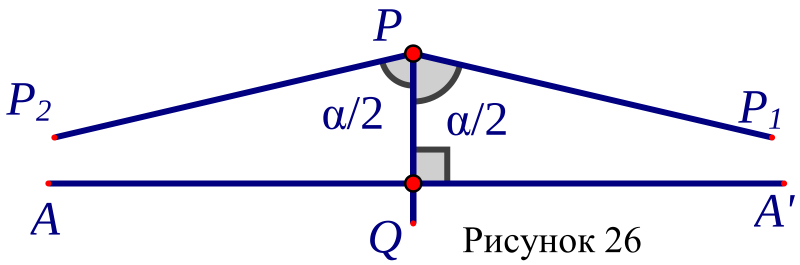

Рисунок 26

противоположных направлениях).

3. Угол параллельности α является функцией, которая зависит лишь от расстояния x от точки P до прямой параллельности, причём если x стремится к 0, то α(x) стремится к π/2, если x стремится к бесконечности, то α(x) стремится к нулю. Н.И. Лобачевский доказал, что $\alpha(x) = 2\mathrm{arctg}(e^{-x/k})$, где k – некоторая константа.

После изучения основ об угле параллельности, стоит перейти к изучению свойств параллельных прямых [49]. Данные свойства выделены не как в евклидовой геометрии, а имеют ряд своих особенностей, исходя из формулировки аксиомы параллельности.

При изучении данных свойств с обучающимися, будет достаточно построения чертежей и формулирования свойств. Так как это лишь элективный курс в помощь основному курсу математики, то нагружать обучающимися сложными доказательствами, по нашему мнению, нерационально. Это может как запутать обучающихся в изучении новой геометрии, так и может ослабить интерес к темам элективного курса [23].

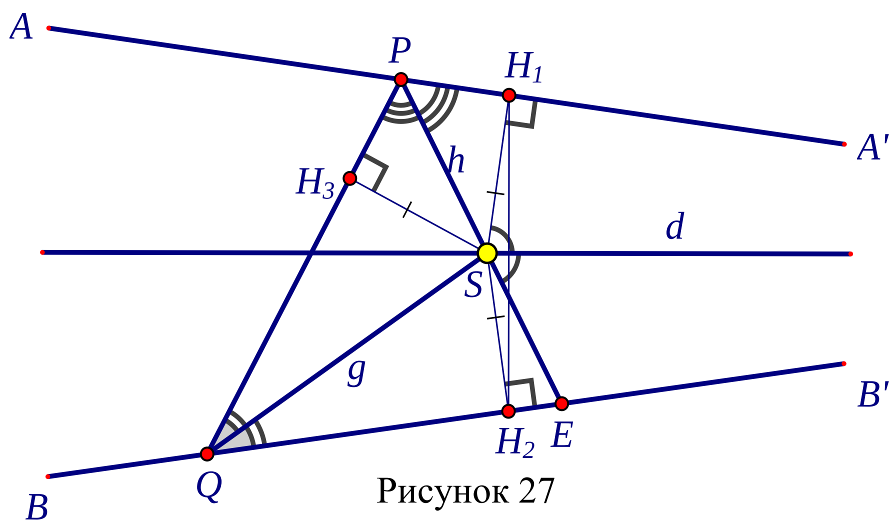

Рисунок 27

1. Если прямая AA′ параллельна прямой BB′, то эти прямые имеют ось симметрии (рис. 27).

2. (симметричность параллелизма). Если одна прямая параллельна второй в некотором направлении, то вторая прямая параллельна первой в этом

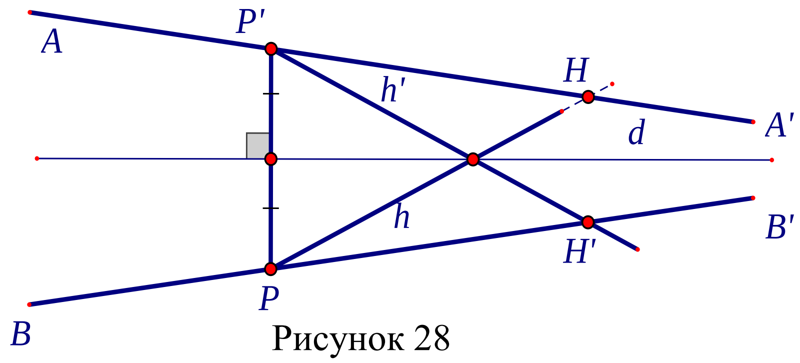

Рисунок 28

же направлении (рис. 28).

3. (транзитивность параллелизма). Если одна прямая параллельна второй, а вторая третьей в некотором направлении, то первая прямая параллельна третьей в этом же направлении.

Так как в геометрии Лобачевского, в отличие от евклидовой геометрии выделено понятие бесконечных прямых, данные прямые могут быть параллельны друг другу. В теории поведение параллельных прямых на бесконечности выделено отдельно, так как оно отлично от «привычной» геометрии и требует дополнительных умственных затрат в понимании и, главное, представлении подобного раздела геометрии [38].

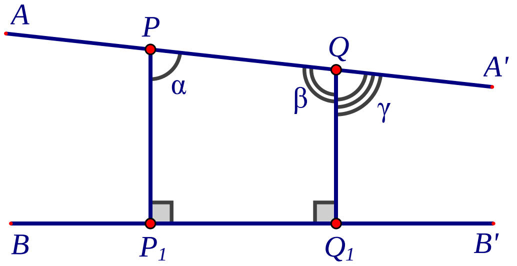

Рисунок 29

Первое, на что стоит обратить внимание в разделе параллельных прямых на бесконечности, так это на теорему о поведении параллельных прямых на бесконечности: две параллельные прямые монотонно и неограниченно сближаются в сторону параллельности, а в противоположную сторону – монотонно и неограниченно расходятся (рис. 29).

Так как в геометрии Лобачевского понятие параллельных прямых отличается от понятия в евклидовой смысле, то возникают новые виды прямых, которые ранее не встречались. Так возникают сверхпараллельные прямые.

Две прямые, не являющиеся параллельными и пересекающимися, называются сверхпараллельными (расходящимися) [33].

На рисунке 30 прямые BB' и CC' пучка прямых с центром в точке P параллельны прямой AA' в разных направлениях, прямая BB' – в направлении от A к A', прямая CC' – в направлении от A' к A. Прямые DD', EE' и FF'

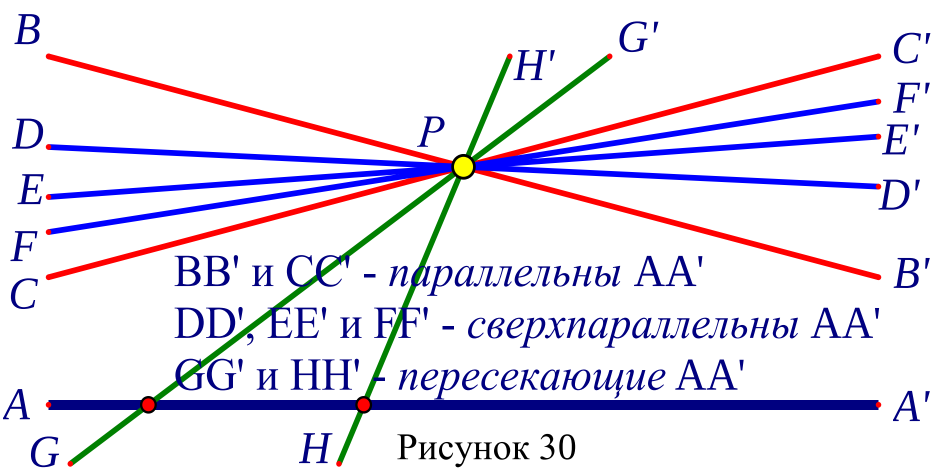

Рисунок 30

сверхпараллельны по отношению к AA', прямые GG', HH' – пересекающие этого пучка по отношению к AA.

Можно заметить, что, передвигаясь по одной из сверхпараллельных в ту или другую сторону от их общего перпендикуляра, получаем всё большие и большие расстояния точек этой сверхпараллельной до другой. Оказывается, что расстояния MP точек M одной из сверхпараллельных до другой неограниченно возрастают по мере удаления точки M от основания их общего перпендикуляра AB [28].

Сверхпараллельные прямые, также, как и просто параллельные прямые имеют свой собственный набор признаков и свойств, благодаря которым можно не только охарактеризовать наличие данных прямых, но также и решать типовые и практико-ориентированные задачи. В первую очередь, хотелось бы отметить признаки сверхпараллельных прямых:

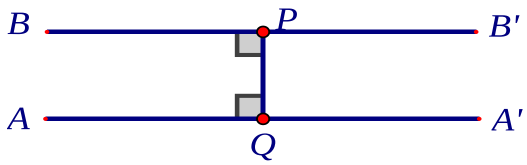

Рисунок 31

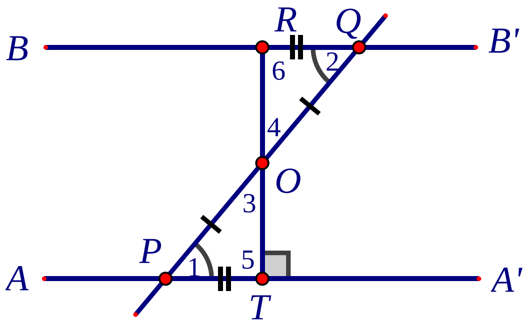

Рисунок 32

1. Если две прямые имеют общий перпендикуляр, то они сверхпараллельны (рис. 31).

2. Если при пересечении двух прямых третьей односторонние или внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые сверхпараллельны (рис. 32).

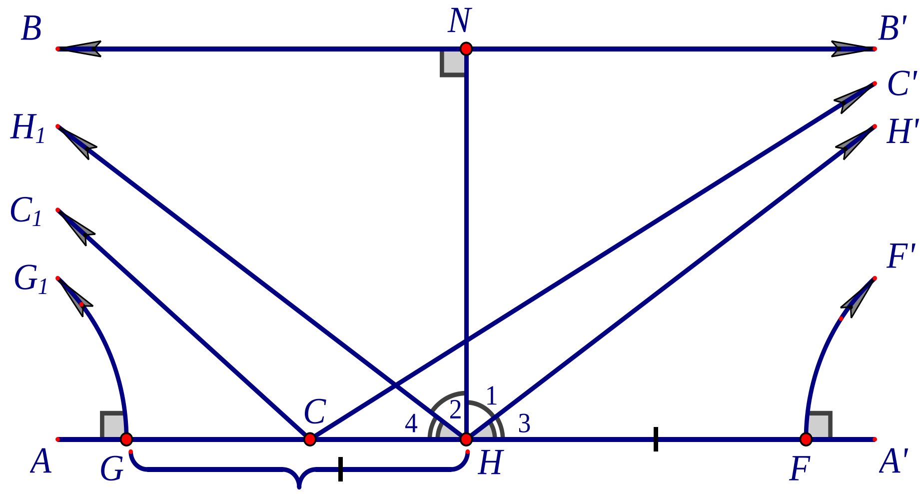

Рисунок 33

У сверхпараллельных прямых стоит отметить одно из основных свойств, необходимых для формирования полного представления о данном виде прямых: две сверхпараллельные прямые имеют единственный общий перпендикуляр, по обе стороны от которого расстояние между прямыми неограниченно возрастает (рис. 33).

Исходя из указанного выше свойства, можно сделать вывод, что всякие две сверхпараллельные прямые неограниченно расходятся от их общего перпендикуляра. Лобачевский назвал сверхпараллельные прямые «разводными».

Таким образом, параллельные и сверхпараллельные прямые, встречающиеся в неевклидовой геометрии, являются неотъемлемой частью изучения теории. Они являются одним из базовых постулатов геометрии Лобачевского, которые нужно знать, чтобы полноценно изучить теорию и сформировать новые представления, отличные от евклидовой геометрии.

§1.3. Пучки прямых на плоскости Лобачевского, эквидистанта и орицикл.

После изучения видов, свойств и признаков параллельных и сверхпараллельных прямых, принято переходить к изучению следующего раздела геометрии Лобачевского – пучки прямых. Она также, как и предыдущая тема, рассмотренная в параграфе выше, является одной из основополагающих тем изучения элективного курса.

На плоскости Лобачевского существует три вида пучков (рис. 34).

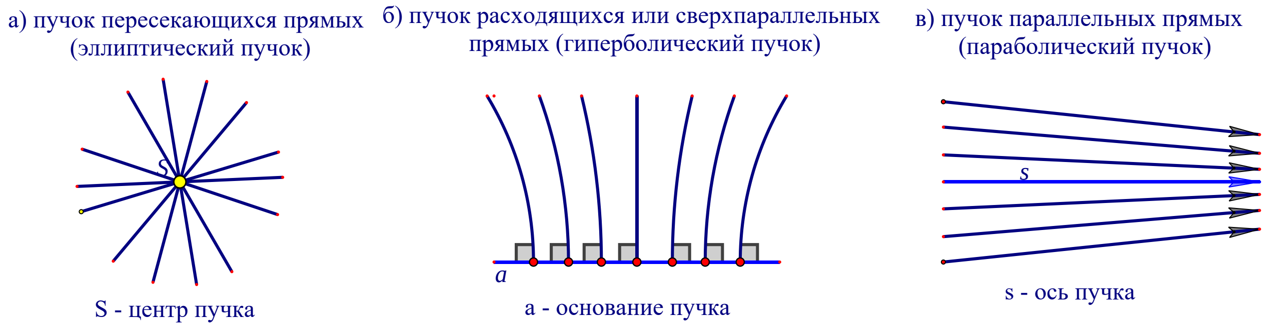

Рисунок 34

Пучок пересекающихся прямых определяется центром пучка, пучок расходящихся или сверхпараллельных прямых – основанием пучка (прямой, которой перпендикулярны все прямые пучка), пучок параллельных прямых – осью пучка (одной из прямых пучка) [3].

Вместе с обучающимися можно выделить свойство всех трёх пучков: через каждую точку плоскости проходит единственная прямая каждого вида пучков (исключение составляет лишь одна точка в пучке пересекающихся прямых – ее центр).

В теории о пучках прямых будут рассматриваться также треугольники, которые связаны с темой нашего параграфа. Рассмотрим теорему о серединных перпендикулярах на плоскости Лобачевского:

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку прямых.

Рассмотрим $\triangle ABC$, положим h_1 - серединный перпендикуляр к стороне AB, h_2 - серединный перпендикуляр к стороне BC, h_3 - серединный перпендикуляр к стороне AC. Доказательство будем проводить в зависимости от взаимного расположения первых двух серединных перпендикуляров, т.е. прямых h_1 и h_2.

Случай 1: прямые h_1 и h_2 пересекаются (рис. 35). Пусть O – общая точка h_1 и h_2. В этом случае из равенства прямоугольных треугольников APO и BPO следует, что $AO = BO$ (P – середина AB). Аналогично, $BO = OC$. Из последних двух равенств следует, что $AO = CO$. Но тогда

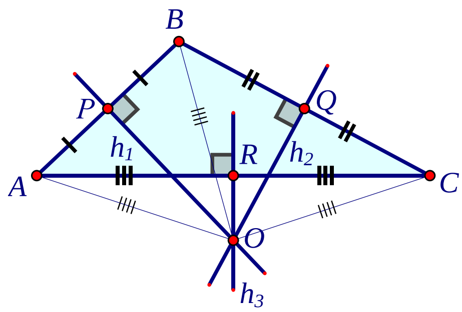

Рисунок 35

треугольники AOR и COR (R – середина AC) равны по трём сторонам, отсюда их углы при общей вершине R равны между собой и в сумме составляют 2d. Таким образом $OR \perp AC$ и, следовательно, O принадлежит h_3, т.е. серединные перпендикуляры принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром в точке O.

Случай 2: прямые h_1 и h_2 сверхпараллельны (рис. 36). По теореме,

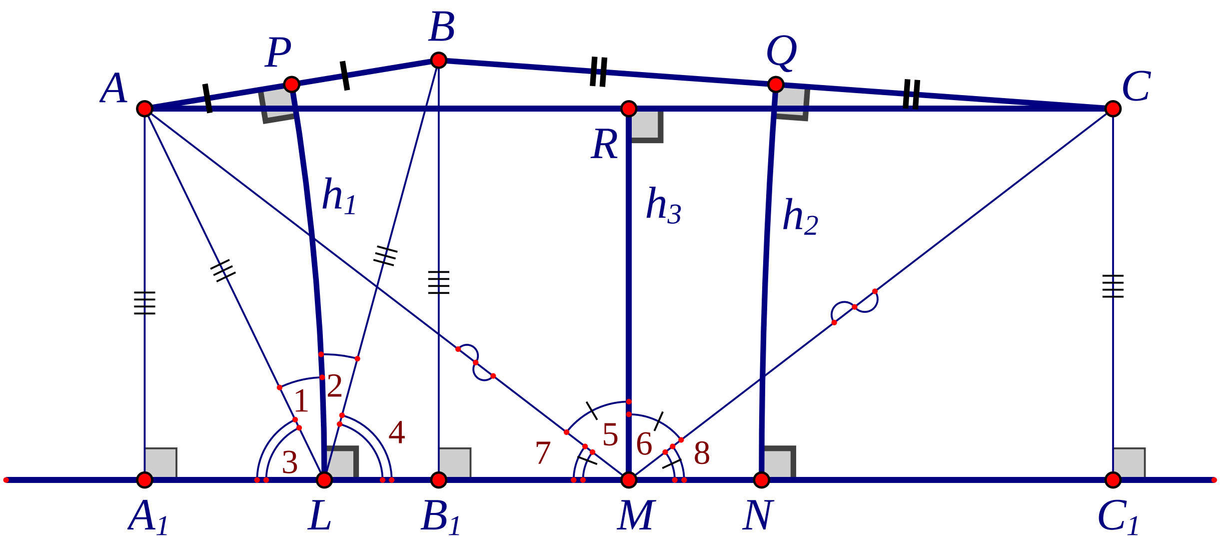

Рисунок 36

изложенной в параграфе выше, существует единственная прямая, перпендикулярная h_1 и h_2. Обозначим эту прямую LN, где L принадлежит h_1, а N – h_2. Пусть P, Q и R – середины сторон AB, BC и AC соответственно, A_1, B_1 и C_1 – ортогональные проекции A, B и C соответственно на прямую LN, M – точка пересечения луча h_3 с прямой LN.

1. $\triangle APL = \triangle BPL$ как прямоугольные треугольники по двум катетам, отсюда $AL = BL$ и $\angle 1 = \angle 2$.

2. $\angle 3 = \angle PLA_1 - \angle 1 = \pi/2 - \angle 1 = \pi/2 - \angle 2 = \angle 4 \Rightarrow \triangle AA_1L = \triangle BB_1L$ как прямоугольные треугольники по гипотенузе и острому углу.

3. Из равенства треугольников AA_1L и BB_1L следует, равенство катетов, лежащих против равных углов, т.е. $AA_1 = BB_1$.

4. Проводя аналогичные рассуждения, получаем $CC_1 = BB_1$. В силу транзитивности равенства имеем $AA_1 = CC_1$.

5. $\triangle ARM = \triangle CRM$ как прямоугольные треугольники по двум катетам, отсюда $AM = CM$ и $\angle 5 = \angle 6$.

6. $\triangle AA_1M = \triangle CC_1M$ как прямоугольные треугольники по катету ($AA_1 = CC_1$) и гипотенузе ($AM = CM$), отсюда $\angle 7 = \angle 8$.

7. Так как $\pi = \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 2\angle 5 + 2\angle 7 = 2(\angle 5 + \angle 7) \Rightarrow \angle 5 + \angle 7 = \pi/2 \Rightarrow RM \perp LN$, таким образом, прямая h_3 лежит вместе с первыми двумя серединными перпендикулярами в пучке сверхпараллельных прямых с основанием LN.

Случай 3: прямые h_1 и h_2 являются параллельными. Если h_1 и h_3 пересекаются в некоторой точке, тогда в соответствии со случаем 1 и прямая h_2 должна содержать эту точку. Это противоречит параллельности прямых h_1 и h_2.

Если h_1 и h_2 - расходящиеся прямые, то в соответствии со случаем 2 все три серединных перпендикуляра будут принадлежать пучку расходящихся прямых. Это опять невозможно.

Итак, все серединные перпендикуляры должны лежать в одном пучке параллельных прямых. Теорема полностью доказана.

При изучении данной теоремы вместе с обучающимися можно доказать один из предложенных выше случаев. Остальные можно оставить на самостоятельное изучение для тех обучающихся, кому будет интересно закончить доказательство самостоятельно. Остальным будет достаточно сформулировать выводы из вытекающих случаев.

Исходя из описанного доказательства теоремы, вытекает следующее следствие: на плоскости Лобачевского не около всякого треугольника можно описать окружность.

Изучение серединных перпендикуляров на плоскости Лобачевского последовательно приводит к определению соответствующих точек пучков прямых.

Пусть К – некоторый пучок прямых на плоскости Лобачевского. Точки А и В называются соответствующими точками относительно пучка К, если эти точки симметричны относительно некоторой прямой пучка К.

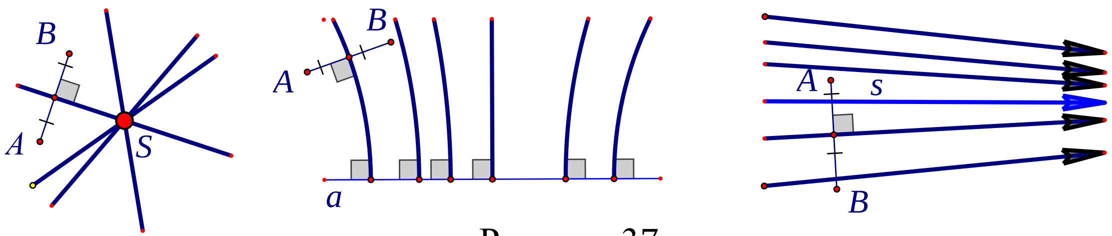

Рисунок 37

Другими словами, точки А и В являются соответствующими относительно некоторого пучка К, если серединный перпендикуляр к отрезку АВ принадлежит К (рис. 37), либо $A = B$.

Соответствующие точки имеют свой набор свойств. Первые два свойства легко следуют из определения.

1 (рефлексивность). Любая точка плоскости является соответствующей самой себе.

2 (симметричность). Если А и В - соответствующие точки, то В и А также соответствующие точки.

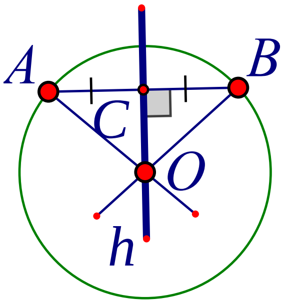

Рисунок 38

3. Если А и В – соответствующие точки относительно пучка пересекающихся прямых с центром в точке О, то $AO = BO$ и точка В принадлежит окружности с центром в О и радиуса ОА.

Свойство 3 следует из равенства треугольников AOC и BOC (см. рисунок 38).

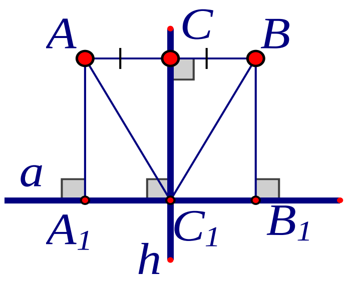

Рисунок 39

4. Если A и B – соответствующие точки относительно пучка расходящихся прямых с осью a, то точки A и B равноудалены от прямой a.

Свойство следует из равенства треугольников AA_1C_1 и BB_1C_1 по гипотенузе и острому углу при вершине C_1, перед этим доказывается, что $\triangle ACC_1=\triangle BCC_1$ (рис. 39).

5. Если A и B – соответствующие точки относительно пучка параллельных прямых, a и b – прямые этого пучка, проходящие через A и B соответственно, то серединный перпендикуляр h к отрезку AB является осью симметрии прямых a и b.

6 (транзитивность). Две точки, соответствующие третьей относительно некоторого пучка, являются соответствующими относительно этого же пучка.

Шестое свойство, а также введение новых понятий теории можно рассмотреть с обучающимися, выполняя совместные построения. Например, возьмем пучок прямых K, выходящих из одной точки O. На произвольном расстоянии от центра пучка O возьмем точку A и отметим все точки, соответствующие точке A относительно пучка K.

Множество всех точек, соответствующих точке A относительно пучка прямых K, называется траекторией точки A относительно пучка K. Точка A называется порождающей точкой траектории.

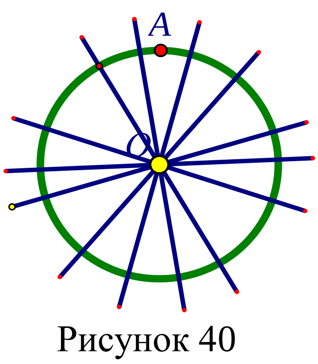

Рисунок 40

Из свойств 1, 2 и 6 соответствующих точек следует, что в качестве порождающей можно использовать любую точку траектории.

Из свойства 3 следует, что траектория точки A относительно пучка пересекающихся прямых с центром в точке О, отличной от А, является окружность с центром О и радиуса ОА (рис. 40).

Свойства траектории пучка:

1. Каждая ось траектории пучка пересекающихся прямых пересекает траекторию в двух и только в двух точках, а каждая ось траектории пучка расходящихся или параллельных прямых – в одной и только в одной точке.

2. Прямая, лежащая на плоскости данного пучка, пересекает любую траекторию данного пучка не более чем в двух точках.

По аналогии с окружностью вводятся понятия секущей и хорды траектории пучка: прямая, пересекающая траекторию пучка в двух точках, называется секущей, а отрезок секущей, соединяющий эти две точки, – хордой траектории. Концы любой хорды траектории являются соответствующими точками относительно пучка [5].

3. Серединный перпендикуляр к хорде траектории пучка является осью траектории.

4. Если АВ – хорда траектории пучка, которая не принадлежит оси пучка, а АА1 и ВВ1 – лучи траектории, исходящие из точек А и В, то эти лучи принадлежат одной полуплоскости с границей АВ и углы А1АВ и В1ВА являются равными друг другу острыми углами.

Основными простейшими кривыми плоскости Лобачевского обычно называют циклические линии. Циклические линии – траектории всех трех типов пучков на плоскости Лобачевского.

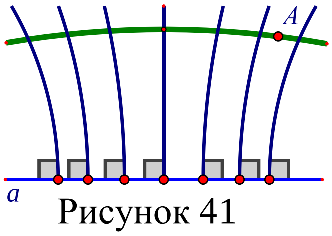

Рисунок 41

Траектория точки А относительно пучка расходящихся прямых с основанием a, называется эквидистантой.

Основание a пучка расходящихся прямых называется базой эквидистанты (рис. 41).

Если на евклидовой плоскости, также как и на плоскости Лобачевского, ввести понятие эквидистанты, то на евклидовой плоскости эквидистанта – это прямая, параллельная ее базе.

Эквидистанта обладает некоторыми свойствами, общими с прямой и окружностью в евклидовой геометрии. Так, прямую линию можно «двигать по самой себе», то есть если прямую передвинуть так, что какие-либо две ее точки А и В совпали с двумя точками A' и B' той же прямой, то прямая во втором положении совпадет с первоначальной прямой. Так же обстоит дело и с окружностью, которую можно вращать вокруг ее центра, и она будет «скользить сама по себе» [28].

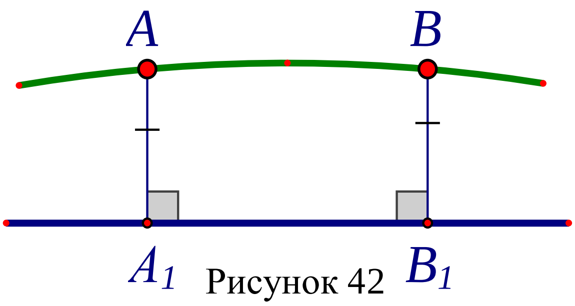

Рисунок 42

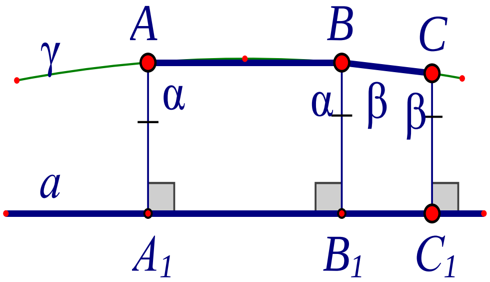

Рисунок 43

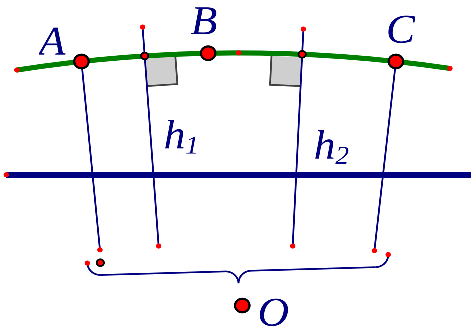

Рисунок 44

Свойства эквидистанты:

1. Все точки эквидистанты находятся на одном и том же расстоянии от ее базы (рис. 42).

2. Никакие три точки эквидистанты не принадлежат одной прямой

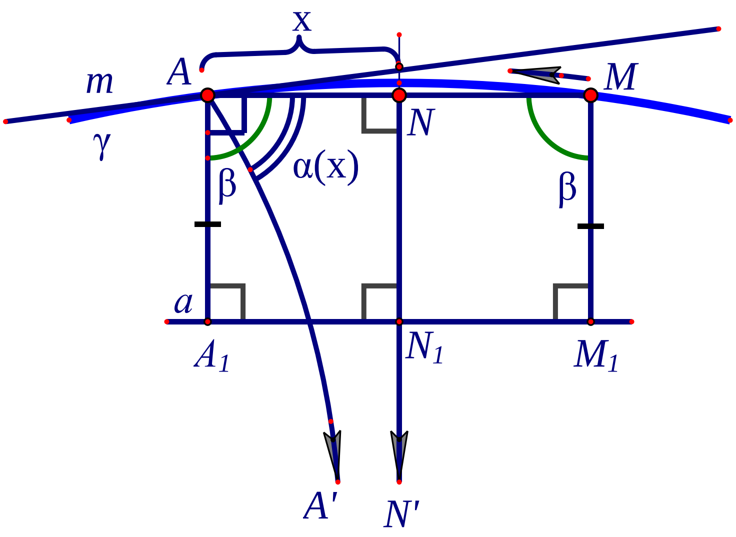

Рисунок 45

(рис. 43).

3. Никакие три точки эквидистанты не принадлежат одной окружности (рис. 44).

4. В каждой точке эквидистанты существует касательная, причём все точки эквидистанты расположены по одну сторону от касательной (рис. 45).

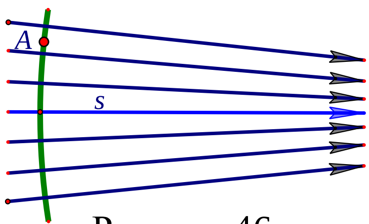

Рисунок 46

Траектория точки A относительно пучка параллельных прямых с осью s, называется орициклом.

Ось s пучка параллельных прямых называется направляющей орицикла (рис. 46).

Свойства орицикла:

1. Никакие три точки орицикла не принадлежат одной прямой (рис. 47).

2. Никакие три точки орицикла не принадлежат одной окружности (рис. 48).

В соответствии с общим определением касательной к траектории пучка прямая, проходящая через точку A орицикла и перпендикулярная к оси, проходящей через эту точку, называется касательной к орициклу в точке A.

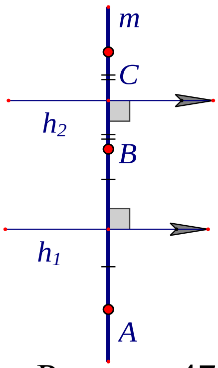

Рисунок 47

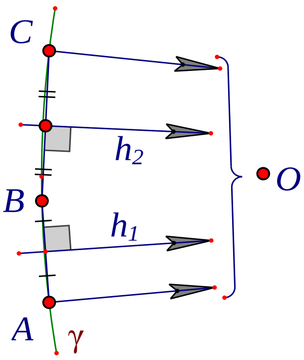

Рисунок 48

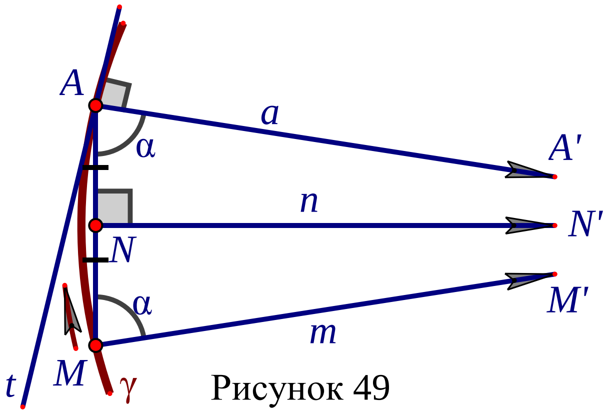

Рисунок 49

3. В каждой точке орицикла существует касательная, причём все точки орицикла расположены по одну сторону от касательной (рис. 49).

Два орицикла называются параллельными, если они являются траекториями одного и того же пучка параллельных прямых. Отсюда следует, что два параллельных орицикла имеют одни и те же оси и не имеют ни одной общей точки. Исходя из этого вытекает четвёртое свойство орицикла:

4. Все орициклы равны (рис. 50).

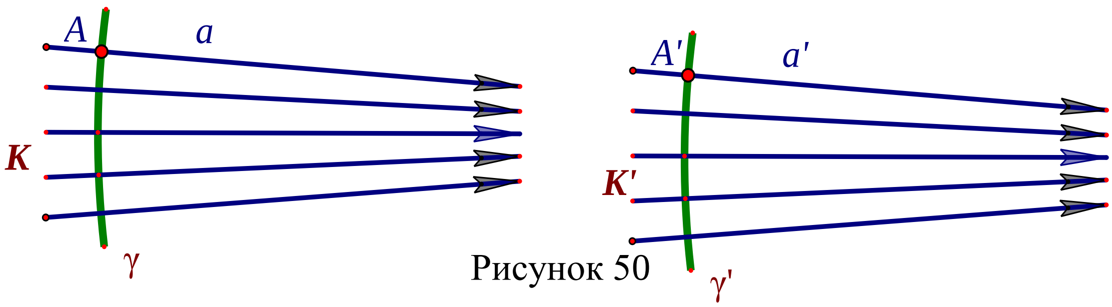

Рисунок 50

Каждая ось двух параллельных орициклов пересекает как один, так и другой орицикл в одной и только в одной точке. Можно доказать, что отрезки осей двух параллельных орициклов с концами на данных орициклах равны друг другу. Это свойство, а также равенство параллельных орициклов аналогичны соответствующим свойствам параллельных прямых на евклидовой плоскости.

При изучении предложенных в параграфе тем, будет полезно дать возможность обучающимся самостоятельно построить свои собственные инструменты пользователя, чтобы в дальнейшем применять данные темы как инструмент [34].

Таким образом, представленные темы геометрии Лобачевского будут являться базовыми для изучения предполагаемого курса для 10 классов. Их изучения, считаем, являются основополагающими для формирования логического мышления и пространственного воображения обучающихся.

Выводы по главе 1. Геометрия Лобачевского имеет не последнее место в математическом образовании и стоит, в иерархии значимости, наравне с геометрией Евклида. Были рассмотрены только основные и базовые знания теории Лобачевского, необходимые для формирования начальных представлений о геометрии, отличной от общепринятой.

Параллельные и сверхпараллельные прямые, встречающиеся в неевклидовой геометрии, являются неотъемлемой частью изучения теории. Они являются одним из базовых постулатов геометрии Лобачевского, которые нужно знать, чтобы полноценно изучить теорию и сформировать новые представления, отличные от евклидовой геометрии.

Изучение основных разделов геометрии Лобачевского и представление их в главе помогает сформировать полное представление о новом разделе геометрии, отличное от привычной для школьного курса теории, его непротиворечивости и понятности. Все представленные разделы геометрии Лобачевского могут использоваться при изучении данной теории не только в высших учебных заведениях, но также и в школах. Обучающиеся с интересом могут вовлечься в процесс изучения представленных в главе разделов, могут понять нестандартную для их представлений и воображения теорию, а также могут самостоятельно решать задачи, предложенные учителем как типовые, так и практико-ориентированные. Методика их изучения и введения в теорию геометрии Лобачевского как элективный курс для 10 физико-математических и технологических классов представлена в следующей главе.

ГЛАВА 2. Непротиворечивость планиметрии Лобачевского, методика цифрового сопровождения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.

2.1. Некоторые факты проективной геометрии, необходимые для доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского.

Изучение элективного курса по геометрии Лобачевского не может начинаться сразу с основ неевклидовой геометрии. Так как обучающиеся 10-х классов только недавно освоили планиметрию евклидовой геометрии, то резкое погружение обучающихся в новую область науки может пагубно сказаться как на качестве изучения курса, так и на мотивационных аспектах обучения.

Мы считаем, что для начала необходимо дать обучающимся возможность вспомнить базовый материал евклидовой геометрии, на основе которого уже можно будет изучать новую область. Для успешного изучения обучающимися геометрии Лобачевского, школьникам необходимо знать и понимать аксиомы планиметрии Евклида. Используя изученные в прошлом школьном звене знания, обучающиеся без особых усилий смогут разобраться в основаниях геометрии и принять изменённый V постулат Евклида в геометрии Лобачевского.

Чтобы заинтересовать обучающихся новой областью геометрии, необходимо сначала дать основы проективной геометрии, которая является «промежуточной» наукой между евклидовой геометрией и геометрией Лобачевского. Само собой, все основы проективной геометрии знать обучающимся необязательно, так как проективная геометрия является самостоятельной областью науки. В разрабатываемом курсе раздел проективной геометрии дается без доказательств теорем. Так как целью изучения является совершенно другая область геометрии, а проективная геометрия, в нашем случае, является лишь инструментом. В данном параграфе мы представим лишь основные факты проективной геометрии, которые будут являться базой для начала изучения курса планиметрии Лобачевского.

Изучение проективной геометрии будет особо интересно обучающимся, которые вместе с основным получают художественное образование, так как данная область геометрии активно изучается в разделе перспективы [20].

Как и в основаниях геометрии, здесь мы будем использовать построенные нами чертежи-иллюстрации, специально к разрабатываемому курсу. Методика введения данных чертежей-иллюстраций будет заключаться не только в демонстрации преподаваемого материала, но также и в построении/копировании данных чертежей обучающимися самостоятельно, построении собственных чертежей, исходя из предложенных задач, а также в построении собственных инструментов пользователя, которые помогут обучающимся быстро и без лишних построений выполнять необходимые чертежи, используя среду Живая математика.

Сама по себе проективная геометрия является своеобразным «дополнением» геометрии Евклида [52], которое позволяет выделить «простейшую величину», такую как сложное отношение. Также проективная геометрия вводит дополнительно понятия несобственной прямой, точки и плоскости, которые также необходимо будет изучить обучающимся в самом

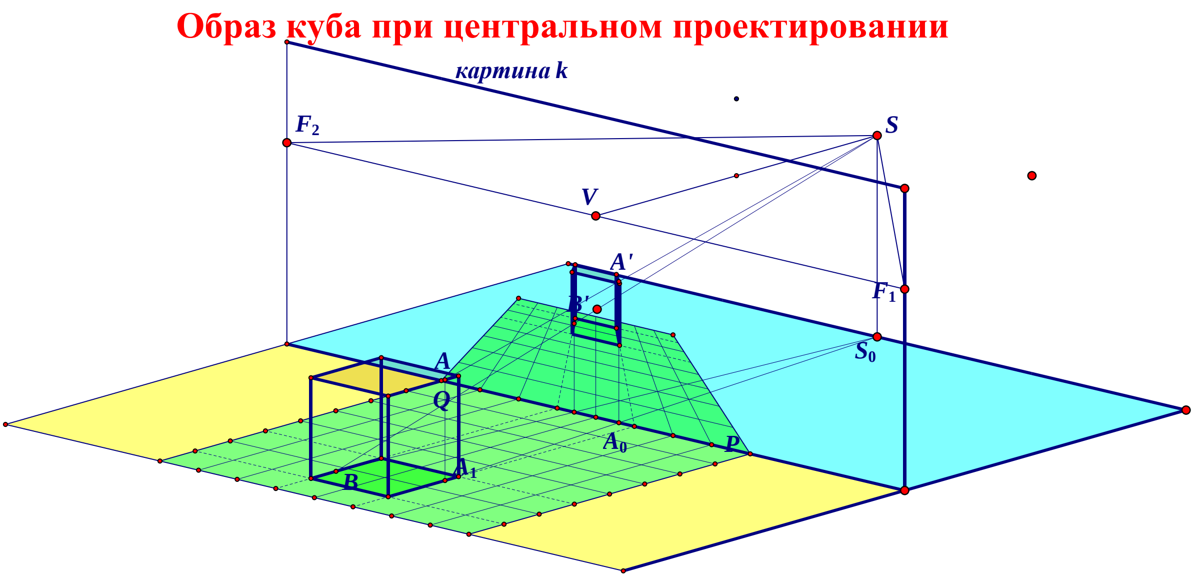

Рисунок 51

начале изучения новой геометрии.

Основная идея проективной геометрии, по мнению Дезарга [52], заключается в отсутствии изменений при любом центральном проектировании. В качестве примера на рисунке 51 представлено изображение центрального проектирования куба из точки S на вертикальную плоскость изображения, построенное в системе динамической геометрии Живая математика.

Проективной плоскостью называется любое непустое множество, элементы которого называются точками, а определенные подмножества точек

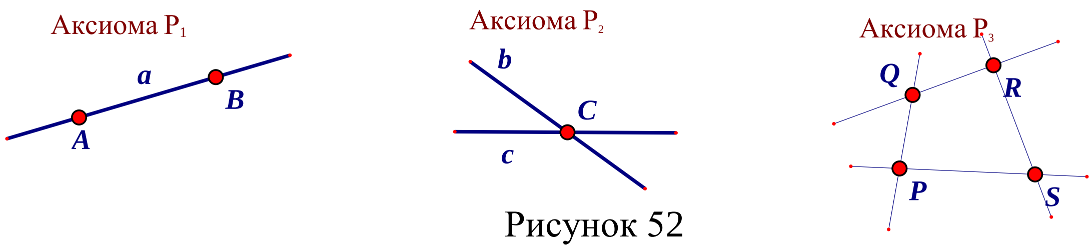

Рисунок 52

называются прямыми, при условии, что выполняются следующие три аксиомы (рис. 52):

1. Для любых двух точек существует и притом единственная прямая, содержащая эти точки.

2. Для любых двух прямых существует точка, принадлежащая этим прямым.

3. Существуют четыре точки общего положения (т.е. никакие три из них не лежат на одной прямой).

При изучении тем проективной геометрии предполагается активное применение систем динамической геометрии, особенно среды Живая математика, которая позволяет выполнять построение любых чертежей, соблюдая все законы геометрии.

Немаловажную роль в данном параграфе играют проективные преобразования, являющиеся основой для перехода с евклидовой геометрии к геометрии Лобачевского. Обучающиеся подробно познакомятся с каждым из них и попробуют сделать самостоятельно геометрические построения для решения задач по данным темам, пользуясь средой Живая математика.

Проективное преобразование – преобразование проективной плоскости, при котором сохраняется прямолинейность расположения точек и сложное отношение любой четверки коллинеарных точек [4]. Пример создания собственных инструментов пользователя расположен в приложении А.

Свойства проективных преобразований

1. Если проективное преобразование оставляет неподвижной каждую из 4 точек общего положения, то это преобразование – тождественное.

2. Неколлинеарные точки проективного преобразования отображаются на неколлинеарные точки.

3. При проективном преобразовании репер отображается на репер, прямая – на прямую, пучок прямых – на пучок прямых.

4. Любое проективное преобразование имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку.

Особое место среди всех проективных преобразований имеет гомология, с которой обучающиеся ранее не встречались. Теоретическое изучение данной темы будет неотрывно связано дополнениями чертежей, построенных в среде Живая математика, что позволит обучающимся успешно усваивать новый и, на первый взгляд, противоречивый материал.

Гомология – нетождественное проективное преобразование, имеющее, по крайней мере, три различные неподвижные точки, лежащие на одной прямой [49].

Прямая, содержащая неподвижные точки гомологии, называется осью гомологии. Все точки оси гомологии – неподвижные.

Свойства гомологии:

1. Преобразование обратное гомологии – гомология.

2. Соответственные прямые в гомологии пересекаются на оси гомологии.

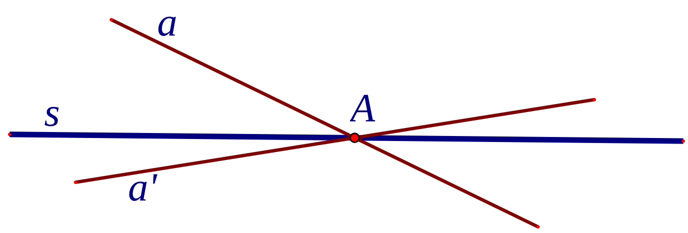

Рисунок 53

Пусть s – ось гомологии a, a' – произвольная прямая (рис. 53). Так как на проективной плоскости любые две прямые пересекаются, то обозначим точку пересечения прямых a и s через A. Положим $a' = f(a)$. Так как A – неподвижная точка, то A принадлежит a', и $A = a \cap a'$.

3. Прямые, проходящие через различные соответственные точки в гомологии отображаются на себя.

Пусть s – ось гомологии f, A и A' - различные соответственные точки, a – прямая, проходящая через A и A′. Обозначим через P – общую точку прямой a и оси s. Учитывая, что P – неподвижная точка, то $f(a) = f(AP) = A'P = a$.

4. Прямые, проходящие через различные соответственные точки в гомологии пересекаются в одной точке. Эта точка называется центром гомологии.

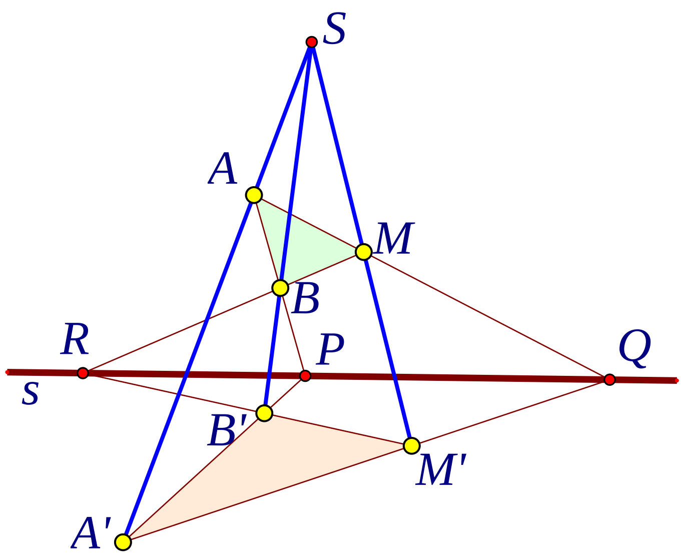

Рисунок 54

Пусть в гомологии f с осью s точка A отображается на точку A′, точка B – на точку B′ (рис. 54), причём обе пары соответственных точек – различные. Обозначим через S – точку пересечения прямых AA′ и BB′, через P – точку пересечения AB и A′B′. По свойству 2 точка P принадлежит оси гомологии s.

Пусть M – произвольная точка плоскости, M′ – ее образ в гомологии. Положим $Q = AM \cap A'M'$, $R = BM \cap B'M'$. По свойству 2 точки Q и R лежат на оси гомологии s.

Рассмотрим треугольники ABM и A′B′M′, они дезарговы [4], т.к. s – их ось перспективы. Но тогда по теореме, обратной к теореме Дезарга, треугольники имеют центр перспективы S, отсюда S принадлежит MM′.

5. Центр гомологии является неподвижной точкой.

Действительно, по свойству 3, прямые AA′ и BB′ отображаются на себя, но тогда их общая точка S тоже должна отобразиться на себя.

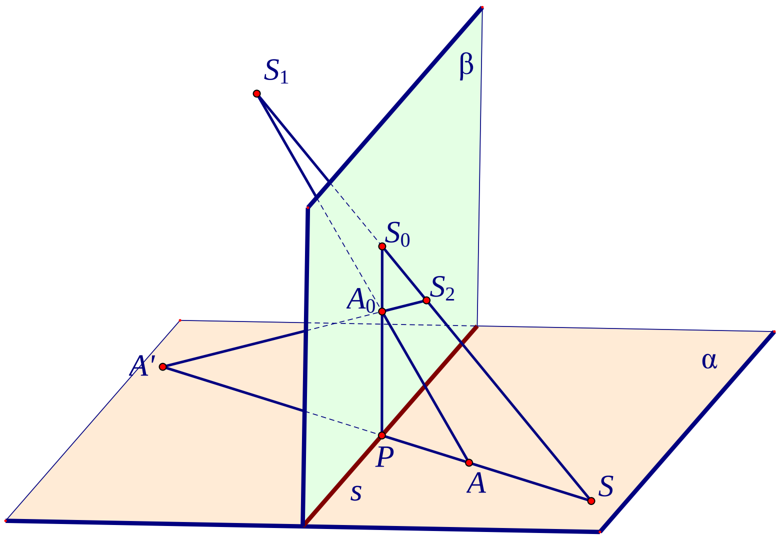

Рисунок 55

6. Любая гомология однозначно определяется центром, осью и парой соответственных точек, не лежащих на оси, причём центр и соответственные точки различные и коллинеарные (рис. 55).

7. Любую гомологию можно представить в виде композиции двух центральных проектирований [4].

Особое место в данной теории является проективное преобразование круга на себя. Обучающимся необходимо понять, что независимо от положения оси гомологии деление прямой, проходящей через центр окружности и центр гомологии, будет равновеликим, что в реальности может показаться неубедительным, так как обучающиеся ещё привыкли доверять своей интуиции при изучении чертежей, а не пользоваться логическими рассуждениями [48].

Если прямая проходит через точку, лежащую внутри круга, то она пересекает окружность этого круга в двух точках (этот факт можно изложить обучающимся без доказательства).

После изучения основных положений проективной геометрии, обучающиеся знакомятся с аксиомами Д. Гильберта евклидовой геометрии. Вместе с их изучением параллельно рассматриваются начальные сведения планиметрии Лобачевского. На протяжении всего изучения оснований геометрии обучающиеся будут заниматься сравнением моделей и аксиом разных областей геометрии, параллельно доказывая эквивалентность некоторых из них.

Изучив основные темы оснований геометрии обучающимся будет предложено доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского прежде, чем они начнут изучать основные элементы новой геометрии.

Основное, что необходимо знать обучающимся, это непротиворечивость геометрии Лобачевского. Впервые столкнувшись с данной областью теории, у обучающихся может возникнуть внутреннее противоречие о достоверности данной науки. Поэтому мы считаем необходимым добавить в курс изучения раздел о непротиворечивости геометрии Лобачевского после изучения основных аксиом данной геометрии.

Прежде чем переходить к доказательству непротиворечивости теории Лобачевского, учителю с обучающимися следует построить модель системы аксиом абсолютной геометрии с добавленной к ним аксиомы Лобачевского. Рассуждения учителя, которые в дальнейшем можно использовать на практике, представим ниже:

Говорят, что на базе некоторой теории T_0 построена модель M системы аксиом $\sum = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ теории T, если в теории T_0 удалось придать конкретный смысл основным понятиям теории T так, что все аксиомы $\sum$ оказались выполненными (рис. 56).

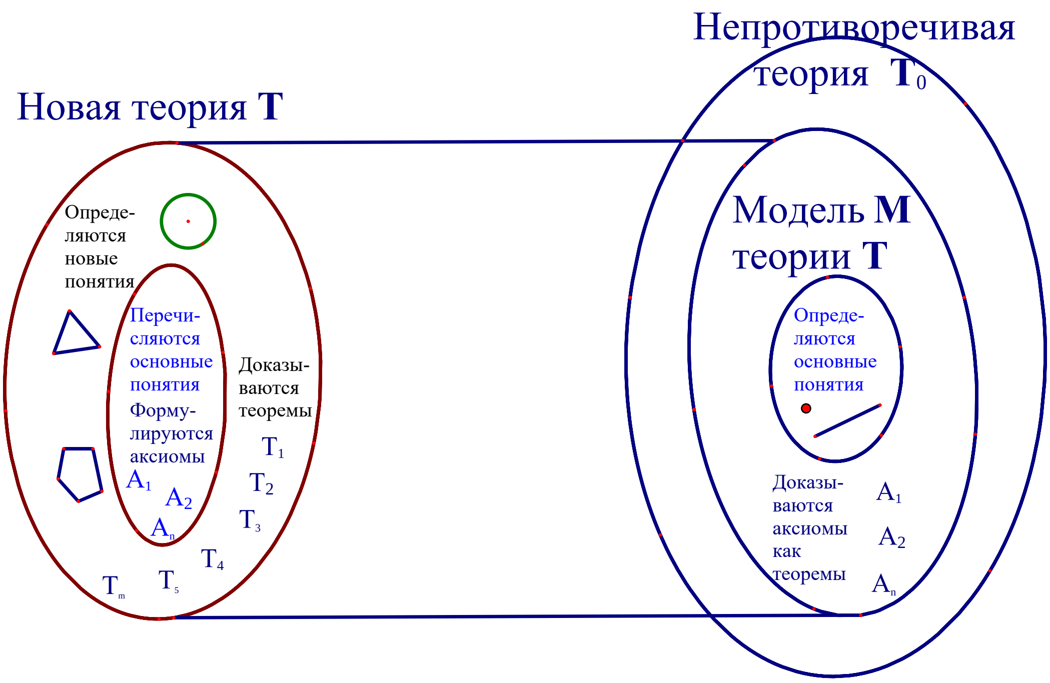

Рисунок 56

Система аксиом абсолютной геометрии, состоящая из аксиом A_1, A_2, …, A_n, непротиворечива, если из этой системы аксиом нельзя вывести два противоречащих друг другу утверждения.

Исходя из изложенного, можно сформулировать критерий непротиворечивости. Система аксиом абсолютной геометрии непротиворечива, если существует модель этой системы, построенная на базе некоторой непротиворечивой теории T_0.

Основное требование, которое предъявляется к системе аксиом, состоит в том, что она должна быть непротиворечивой. Это требование означает следующее: во-первых, система аксиом не должна содержать двух каких-либо взаимно исключающих друг друга предложений (например, таких: «Для любых двух различных точек существует одна и только одна содержащая их прямая» и «Для любых двух различных точек существует по меньшей мере одна содержащая их прямая»); во-вторых, мы должны быть уверены в том, что, как бы далеко ни развивали следствия из нашей системы аксиом, мы никогда не придем к двум противоречащим друг другу предложениям. Убедиться в выполнении первого условия весьма просто, так как система аксиом состоит из конечного числа предложений. Что касается второго условия, то здесь дело обстоит сложнее. Ведь число теорем, которые могут быть выведены из данной системы аксиом, является неограниченным (если, конечно, в системе аксиом содержится достаточное число предложений) [45].

Непротиворечивость геометрии Лобачевского исторически была доказана уже после открытия данной области геометрии такими математиками, как Кэли, Клейн, Пуанкаре и Гильберт. Творчество последнего окончательно доказало непротиворечивость странной для 19 века геометрии, выходящей за рамки математический представлений того времени [25].

Непротиворечивость системы аксиом Лобачевского подтверждается различными моделями, в частности:

- интерпретация Бельтрами в круге;
- интерпретация Бельтрами гиперболической планиметрии на псевдосфере;
- евклидова модель Кэли-Клейна;
- проективная модель Кэли-Клейна;
- интерпретация Пуанкаре на полуплоскости;
- интерпретация Пуанкаре внутри евклидова круга;
- интерпретация Пуанкаре на гиперболоиде [7].

Окончательно непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана лишь в следующий период развития математики, в 70-х годах прошлого века. Немецкий математик Клейн заметил, что доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского вытекает из одной работы 1859 г, английского математика Кэли по проективной геометрии. Любопытно, что самому Кэли и в голову не приходило, что его работа имеет какое-либо отношение к геометрии Лобачевского [14, 41]. Аналогичный результат, но из иных соображений, получил тогда же итальянский геометр Бельтрами. Само доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского изложено в первом параграфе первой главы.

Изучая непротиворечивость геометрии Лобачевского на курсе, обучающиеся не только смогут доказать данное свойство геометрии, но также они смогут почувствовать себя «своеобразными первооткрывателями», так как выполнение доказательства непротиворечивости геометрии будет выполняться в виде командной проектной работы [43]. Проект будет рассчитан на два аудиторных занятия, с полным погружением в тему, поэтому обучающиеся, с консультациями и помощью от учителя, смогут не только просто изучить важный раздел курса, но также смогут научиться уверенно производить доказательства в новой геометрии.

Так как изучение аксиом оснований геометрии обучающиеся к моменту начала выполнения проекта уже завершат, то у них не составит труда доказать непротиворечивость через остальные группы аксиом. Используя конкретное содержание: («точка» — грань пирамиды, «прямая» — ребро пирамиды, «плоскость» — вершина пирамиды), обучающиеся смогут построить модель I группы аксиом, после чего совместно с учителем вывести все необходимые следствия, главным из которых будет являться отсутствие противоречащих.

Основной вывод, который должны сделать обучающиеся по окончании своего проектного задания заключается в том, что доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной модели, в которой реализуется данная аксиоматика [44].

После выполнения проектного задания обучающимся будет предложено обосновать независимость аксиомы V параллельности от аксиом абсолютной геометрии. Делая выводы проектного задания, обучающиеся смогут доказать, что аксиома V Евклида и аксиома V Лобачевского будут взаимоисключающими утверждениями, но при этом аксиома V Евклида будет независима от аксиом абсолютной геометрии [3].

Таким образом, у обучающихся появится идея доказательства независимости аксиомы от других аксиом. Выполняя все необходимые рассуждения, школьники смогут проверить независимость всех аксиом евклидовой геометрии, повторив проделанную работу Д. Гильберта, которая отражена в «Основания геометрии» [13].

После изучения тем основания геометрии, обучающиеся перейдут к изучению непосредственно самой геометрии Лобачевского и решению задач на модели Кэли-Клейна, так как данная модель будет наиболее удачно подходить для понимания материала.

2.2 Построение модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, методика цифрового сопровождения проверки аксиом и доказательства некоторых утверждений.

Все построения модели Кэли-Клейна и чертежи-иллюстрации, используемые в данной работе выполнены с помощью среды Живая математика.

Система динамической геометрии Живая математика предназначена для решения любых математических задач, в первую очередь задач элементарной геометрии и алгебры. Среда позволяет выполнять различные построения виртуальными инструментами, прежде всего циркулем и линейкой, при условии строго соблюдения законов геометрии и правил логического вывода [22]. Данная система предназначена для учителей математики в качестве вспомогательного компонента образовательного процесса. Визуализируя геометрические построения, совершая в данной среде построение графиков функции в алгебре, позволяет обучающимся легче воспринимать новый материал и решать задачи.

Интерфейс среды Живая математика включает в себя целый комплекс базовых опций, позволяющих выполнять многие нетривиальные построения. В среде возможно реализовать построение чертежей как из курса планиметрии, так и из курса стереометрии. Есть все необходимые опции, позволяющие определять длины отрезков и градусные меры углов, а также внутри среды имеется вычислительная система, которая позволяет производить все виды математических вычислительных операций. Встроенный калькулятор среды позволяет вычислять необходимые параметры не только методом ввода чисел, но и активно применять измерения построенных объектов чертежа. Благодаря этому, при изменении чертежа меняются не только измеряемые параметры, но и вычисленные данные, необходимые для решения задачи.

В среде имеются базовые инструменты, позволяющие облегчить процесс построения чертежей для цикла задач из любой темы школьного курса геометрии. Среди инструментов Живой математики имеются заранее сконструированные правильные многоугольники и правильные многогранники, что облегчает построение чертежа, сокращая время, которое можно будет использовать для решения других геометрических задач.

Что немало важно, среда Живая математика позволяет свободно и, главное, наглядно изучать сложную тему планиметрии – векторы. Конструируя чертежи к задачам, решаемым векторным способом, обучающимся будет наиболее понятна данная тема. Что может говорить об успешном усвоении данной темы большим количеством обучающихся, чем традиционным методом.

Также среда поддерживает опцию создания анимации, что существенно способствует визуализации класса математических задач, решение которых ориентировано на движение и преобразования [17, 19]. Благодаря использованию в чертежах опции анимация, задачи приобретают «живой» вид и раскрываются во всех своих формах, помогая обучающимся лучше представлять образы расположения чертежей и возможности их изменения.

Живая математика предоставляет максимально наглядные и интуитивно понятные обучающимся чертежи, а также позволяет изучать задачи на построение. В интерфейсе среды есть все необходимые кнопки, которые дают возможность несколькими способами строить окружности и все необходимые углы. Среда имеет пользовательские опции автоматического деления окружности и отрезка на две и более частей. Это позволяет при дальнейшем изучении задач на построение, сокращать время построения чертежа, чтобы не упустить новые важные тонкости данной темы геометрии.

Среда Живая математика может не только поддерживать решение большинства задачи курса геометрии. С помощью этого программного средства можно решать и задачи алгебры, в которых присутствуют графики функций, а также олимпиадные задачи [35,36,37].

Самостоятельное построение собственных инструментов пользователя и решение с их помощью конкретных задач теории является неотъемлемой частью освоения курса. Процесс создания и применения таких «помощников» способствует более качественному усвоению базовых основ планиметрии Лобачевского, визуализации свойств объектов этой необычной теории.

Прежде всего, следует создать инструменты, аналогичные встроенным в Живую математику инструментам, позволяющим выполнять такие простейшие построения как луч, прямая, параллельные и перпендикулярные прямые, нахождение середины отрезка. Отметим, что учителем так подбирается последовательность создания этих инструментов, чтобы построение очередного инструмента использовало предыдущие.

Цифровое сопровождение элективного курса геометрии Лобачевского позволит сформировать у обучающихся необходимые представления о новой для них дисциплине. Внедрение чертежей-иллюстраций, построение моделей в Живой математике, решение задач с помощью динамических чертежей, создание собственных инструментов, все это необходимо для формирования представлений полной картины области геометрии. Обучающиеся смогут не только использовать собственное воображение, как принято изучать геометрию в большинстве школ России, но также смогут наглядно видеть все чертежи. У обучающихся будет возможность проводить исследование решения задач, что значительно расширит не только интерес обучающихся к предмету, но также и позволит обучающимся определиться быстрее в профессиональной деятельности и выбрать будущую профессию осознанно [18].

Создание динамических gsp-файлов, поддерживающих элективный курс «Планиметрия Лобачевского на модели Кели-Клейна» для обучающихся профильных классов, позволяет каждому участнику курса не только познакомиться с новой геометрией, но и «прикоснуться» к этой необычной геометрии, став разработчиком одной из ее моделей. Такой методический подход, на наш взгляд, способствует не только качественному усвоению элективного курса, но и формирует у обучающихся исследовательский стиль мышления [21].

Построение плоскости Лобачевского на модели Кэли-Клейна является сложным и, немного, «скучным» в понимании обучающихся занятием. Оно требует большой концентрации внимания и знаний, которые будут применяться при построении и проверке аксиом. Поэтому при изучении данного раздела курса мы предлагаем не углубляться в сложные проверки и доказательства теории, а, применяя элементы технологии мозгового штурма, выполнить построение модели с обучающимися в игровой форме [9]. Так обучающимся будет интересно изучать проверку каждого элемента теории, предлагая любые идеи.

Рассмотрим построение модели Кэли–Клейна плоскости Лобачевского в среде Живая математика. Данное построение можно использовать в качестве эталонного рассуждения обучающихся и корректировать его по ходу проведения занятия.

На Евклидовой плоскости возьмем произвольную окружность А, назовём ее абсолют. Все точки внутри окружности А – открытый круг L – назовем точками плоскости Лобачевского. Таким образом, мы придали конкретный смысл основному объекту «точка» плоскости Лобачевского. На множестве L определим другие основные понятия (объекты и отношения), используемые в аксиомах I-IV, VЛ и докажем справедливость этих аксиом. Так будет построена модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.

Прямыми назовем хорды (естественно без концов, так как рассматривается открытый круг) абсолюта A. Отношение «принадлежности» точек и прямых, а также отношение «лежать между» для всевозможных троек точек понимаем в евклидовом смысле.

Справедливость трёх планиметрических аксиом I группы установить не сложно.

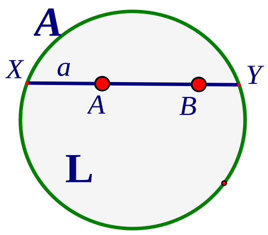

Рисунок 57

I.1. В аксиоме I.1 утверждается, что через две любые точки проходит прямая. Действительно, если A и B - произвольные точки L (рисунок 57), то рассмотрим евклидову прямую, содержащую эти точки, найдем точки X и Y пересечения этой прямой с абсолютом A. Открытая хорда a с концами в X и Y и будет прямой модели, содержащей A и B. Таким образом, аксиома I.1 выполняется.

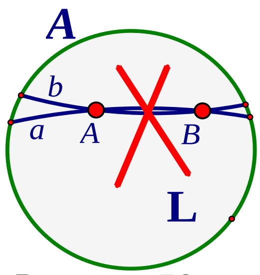

Рисунок 58

I.2. Проверим справедливость аксиомы I.2, в которой утверждается, что через две точки проходит не более одной прямой. Предположим, что через точки A и B проходят две прямые a и b модели (рис. 58). В этом случае на евклидовой плоскости найдутся две различные прямые, содержащие A и B, что невозможно. Таким образом, аксиома I.2 выполняется.

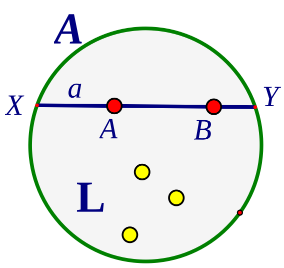

Рисунок 59

I.3. Наконец, аксиома I.3, в соответствии с которой требуется, чтобы на каждой прямой существовало, по крайней мере, две точки, а на самой плоскости – три точки, не лежащие на одной прямой. Действительно, поскольку концы любой хорды XY абсолюта A - различные точки, то между ними всегда существуют две точки (рисунок 59), а во внутренней области L абсолюта A существуют три неколлинеарные точки. Таким образом, аксиома I.3 тоже выполняется.

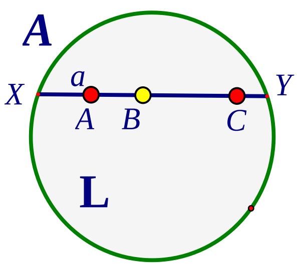

Рисунок 60

Основное отношение группы II аксиом порядка – «точка лежит между двумя другими точками» также понимаем в евклидовом смысле, поэтому справедливы все аксиомы этой группы. Проверим их по порядку.

II.1. Если точка B лежит между точками A и C в L (рисунок 60), то по определению отношения "лежать между" точка B лежит между точками A и C в евклидовом смысле. Это означает, что эти точки лежат на одной евклидовой прямой, причём абсолют A высекает на ней хорду XY, внутренняя область которой и является уже прямой a нашей модели, причём точка B лежит также между C и A. Таким образом, аксиома II.1 выполняется.

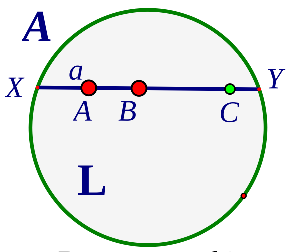

Рисунок 61

II.2. Пусть A и B - две произвольные точки открытой хорды XY абсолюта A (рис. 61), являющейся прямой нашей модели. Для определённости будем считать, что B лежит между A и Y. По теореме для точек B и Y существует точка C, лежащая между этими точками. Но тогда B лежит между A и C. Таким образом, аксиома II.2 выполняется.

II.3. Пусть существует в L прямая a, которая содержит три точки A, B и C такие, что A лежит между B и C и, одновременно, B лежит между A и C (рис. 62). Это означает, что на евклидовой плоскости найдутся три точки A, B и C одной прямой, среди которых более одной точки лежит между двумя другими. Противоречие. Значит наше допущение невозможно. Таким образом, аксиома II.3 выполняется.

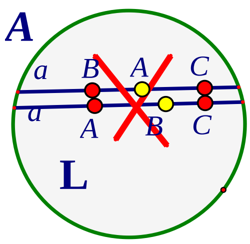

Рисунок 62

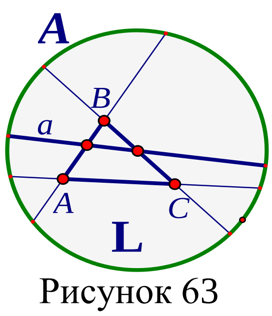

Рисунок 63

II.4. Пусть ABC - произвольный треугольник во внутренней области L абсолюта A и a - некоторая хорда, пересекающая сторону AB этого треугольника (рис. 63). Ясно, что треугольник ABC является треугольником и на евклидовой плоскости, а прямая евклидовой плоскости, содержащая хорду a, пересекает сторону AB в ее внутренней точке. Из аксиомы Паша группы аксиом порядка абсолютной геометрии следует, что открытая хорда a (прямая модели) пересечёт, по крайней мере, одну из двух других сторон треугольника. Таким образом, аксиома Паша II.4 выполняется и на модели.

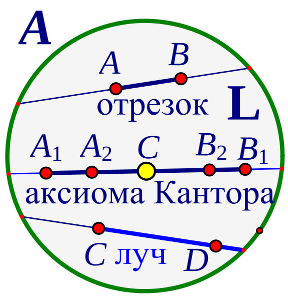

Рисунок 64

Как обычно вводятся понятия отрезка и луча. На рисунке 64 показаны отрезок AB и луч CD. Справедлива также аксиома IV.2 Кантора, в которой речь идет о существовании точки C, принадлежащей бесконечной последовательности $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$ вложенных друг в друга стягивающихся отрезков.

Проверим справедливость аксиомы Лобачевского VЛ. Рассмотрим произвольную прямую a модели, которая является внутренней областью хорды XY, концы которой лежат на абсолюте A (рисунок 65). Евклидовы прямые XA и YA разбивают евклидову плоскость на две пары вертикальных углов. Рассмотрим ту пару этих углов, которая содержит бесконечное множество евклидовых прямых, не пересекающих хорду XY. Абсолют A на каждой из прямых этой пары углов высекает хорду, обозначим через b и c - внутренние области двух из них. Очевидно, b и c - прямые модели, которые содержат точку A и не пересекают прямую a. Таким образом, аксиома VЛ выполняется.

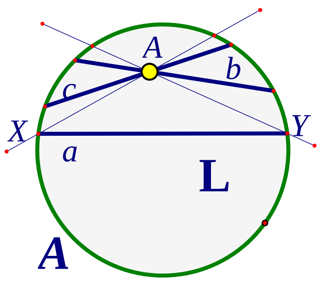

Рисунок 65

Итак, все аксиомы первой, второй и пятой групп аксиом планиметрии Лобачевского выполняются.

Основные проблемы возникают при придании конкретного смысла отношению "конгруэнтность" отрезков и углов. Очевидно, что конгуэнтность в евклидовом смысле не подойдёт, поскольку расстояния между точками на нашей модели ограничены диаметром абсолюта A. Откладывая последовательно равные отрезки на любом луче, мы на некотором шаге выйдем из области L. Поэтому необходимо так определить равенство отрезков, чтобы при перемещении их от центра к окружности (абсолюту А) эти отрезки неограниченно уменьшались в евклидовом смысле. Аналогичную ситуацию мы наблюдаем на проективной плоскости при изучении линейной перспективы. Там отрезки уменьшаются, приближаясь к линии горизонта, которая изображает бесконечно удаленную прямую.

Таким образом, мы должны так определить отношение конгруэнтности, чтобы выполнялись оставшиеся аксиомы, т.е. пять аксиом третьей группы и аксиома Архимеда четвёртой группы.

Пополним евклидову плоскость, на которой рассматриваем открытый круг, бесконечно удаленными точками. Получим проективную плоскость.

Рассмотрим проективное преобразование проективной плоскости, отображающее абсолют А и множество L всех внутренних точек на себя. При этом получаем преобразование открытого круга, которое назовем движением (L) на плоскости Лобачевского.

Некоторые движения евклидовой плоскости также отображают открытый круг на себя. К ним относятся повороты вокруг центра О абсолюта А и осевые симметрии с осями, проходящими через О. При этом получаем преобразования множества L, которые будем помечать знаком (E): движение (E), осевая симметрия (E), поворот (E).

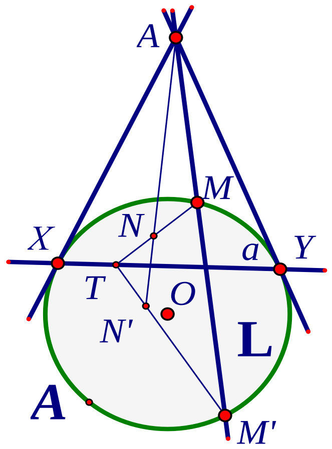

Рисунок 66

Отмеченные выше движения (E) есть частные случаи движений (L).

Ещё одним важным частным случаем движений (L) является преобразование множества L, полученное в результате гомологии проективной плоскости, центр гомологии А и ось гомологии a которой – полюс и поляра относительно абсолюта, причем ось гомологии пересекает абсолют в двух точках X и Y (см. рисунок 66). При этом произвольная точка M абсолюта А отображается на точку M', являющейся второй точкой пересечения прямой AM и абсолюта-окружности А. Эта гомология - гармоническая, следовательно, точка M' отображается в M. Такое движение (L) назовем осевой симметрией (L). Это преобразование действительно является движением (L), так как при этом абсолют A и множество L отображаются на себя.

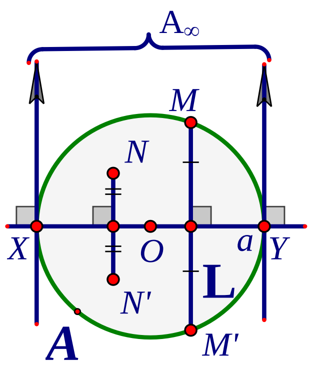

Рисунок 67

Напомним, что для построения образа N' произвольной точки N модели L необходимо, во-первых, найти пересечение T прямой MN и оси гомологии a, во-вторых, построить пересечение N' прямых AN и TM'.

В частности, если ось a гомологии проходит через центр O абсолюта, то центр гомологии – бесконечно удаленная точка A_∞ (см. рисунок 67). Она принадлежит прямым, перпендикулярным прямой a. В этом случае осевая симметрия (L) является осевой симметрией (E), которую мы будем обозначать S_a.

Рассмотрим несколько свойств движений (L), которые потребуются нам для завершения построения модели Кэли-Клейна (будем обозначать их заглавной латинской буквой D в сочетании с номером свойства).

1. Если движение (L) имеет две неподвижные точки, то это – осевая симметрия (L) или тождественное преобразование.

2. Для любых двух точек A и B существует осевая симметрия (L),

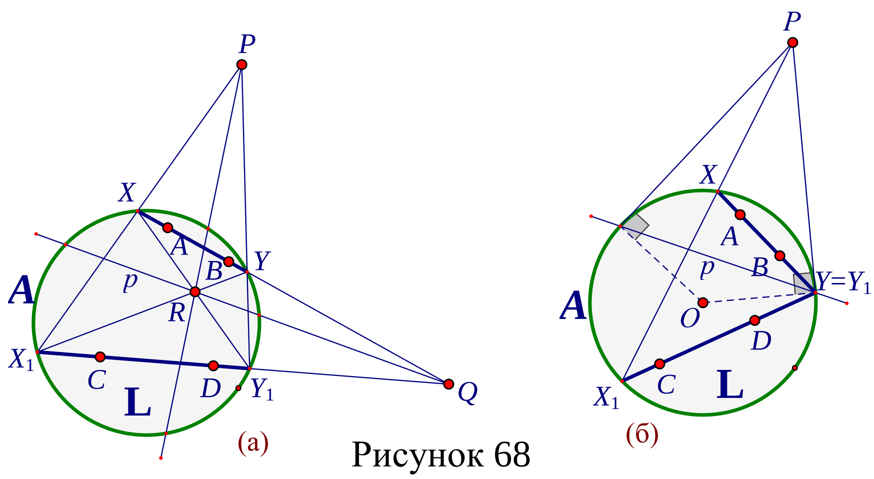

Рисунок 68

отображающая A на B.

3. Для любых двух прямых модели L существует осевая симметрия (L), отображающая любую из этих прямых на вторую прямую.

Чертежи, иллюстрирующие случаи, когда прямые AB и CD являются сверхпараллельными или параллельными, представлены на следующих двух рисунках 68 (а) и (б) соответственно. Из них вытекает следствие: если два луча модели L имеют общую вершину, то существует осевая симметрия (L), отображающая один луч на другой, причём ось симметрии содержит начало этих лучей.

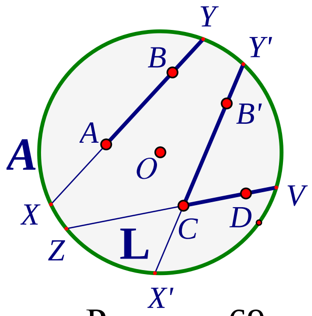

Рисунок 69

4. Существует движение (L), которое любой из двух данных лучей (L) отображает на другой луч (рис. 69).

5. Если при нетождественном движении (L) центр O абсолюта A является неподвижной точкой, то это движение (L) есть либо осевая симметрия (E), либо поворот (E) (рис. 70).

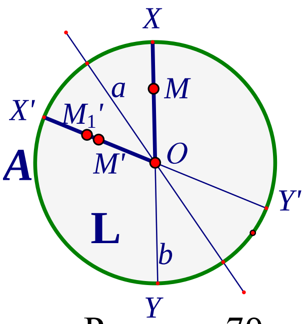

Рисунок 70

Теперь на модели определим расстояния между точками. Нас устроит такое определение, при котором, во-первых, выполняются все необходимые свойства расстояний и, во-вторых, сохраняется расстояние при любых движениях (L).

Основным инвариантом проективных преобразований является сложное отношение четырех точек. Для отрезка модели с концами в точках A и B, обозначим его $[AB]_L$, можно рассмотреть сложное отношение (AB,XY), где X, Y – точки пересечения прямой AB с абсолютом (рис. 71). Однако в чистом виде использовать это число в качестве длины отрезка нельзя, т.к. не выполняются основные свойства расстояний. Нужно найти некоторую функцию от этих выражений, которая

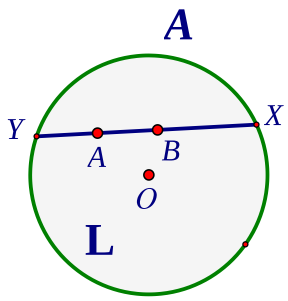

Рисунок 71

обеспечила бы выполнение основных свойств. Оказалось, что логарифмическая функция хорошо подходит для наших целей. В этом мы убедимся.

Расстоянием AB_L (длиной отрезка $[AB]_L$) между точками A и B назовем число $k \cdot \ln(AB,XY)$, где X, Y – точки пересечения прямой AB с абсолютом и пара A,X разделяет пару B,Y, k – положительное действительное число. В дальнейшем будем считать, что k = 1.

Данное определение корректное, т.к. (AB,XY)>0.

Свойства расстояний

1. Расстояние между A и B равно расстоянию между B и A, то есть $AB_L=BA_L$.

2. $AB_L= \ln\frac{AX \cdot BY}{BX \cdot AY}$, где AX, BY, BX, AY– расстояния между точками в евклидовом смысле.

3. Расстояние между точками – число положительное.

4. Расстояние AB_L может принимать все значения от 0 до $+\infty$ для точек B, лежащих на луче (L) с вершиной в точке A.

5. Если точка C лежит между точками A и B, то $AC_L+CB_L=AB_L$.

Для определения равенства отрезков мы использовали понятие движения. Можно также считать отрезки равными, если равны их длины, что подтверждается следующим свойством.

Отрезки $[AB]_L$ и $[CD]_L$ равны тогда и только тогда, когда равны их длины, то есть $AB_L= CD_L$.

Приведём доказательства некоторых аксиом группы аксиом конгруэнтности (равенства), не дублируя их формулировок [10].

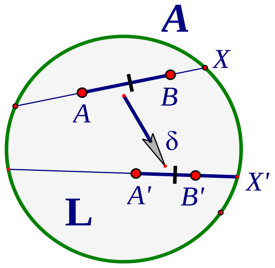

Рисунок 72

III.1. Пусть дан отрезок $[AB]_L$, лежащий на луче $[AX)_L$ и луч $[A'X')_L$ с началом в точке A' (рис. 72). По свойству D.4 существует движение (L) δ, отображающее первый луч на второй, при этом отрезок $[AB]_L$ отобразится на отрезок

$[A'B']_L$, лежащий на луче $[A'X')_L$. Тогда отрезок $[AB]_L$ равен отрезку $[A'B']_L$. Аксиома доказана.

III.4. Дан угол $\angle(h,k)_L$ и луч h'_L. Существует δ - движение (L), отображающее луч h_L на луч h'_L. При этом луч k_L отображается на луч k'_L. Если k'_L в указанной полуплоскости относительно прямой, содержащей h'_L, то $\angle(h',k')_L$ – искомый ($\angle(h',k')_L=\angle(h,k)_L$). В противном случае следует рассмотреть еще симметрию (L) с осью, содержащей h'_L. Аксиома доказана.

III.5. Пусть даны два треугольника ABC, $A'B'C'$ и $[AB]_L= [A'B']_L$, $[AC]_L= [A'C']_L$, $\angle BAC_L=\angle B'A'C'_L$. Рассмотрим движение (L) δ, которое $\angle BAC$ отображает на $\angle B'A'C'$. При этом $B \to B'$, $C \to C'$. В противном случае ($B \to B''$, $C \to C''$ мы получили бы $B'B''_L= 0$ или $C'C''_L=0$, как это сделано при доказательстве свойства DR, а это противоречит свойству 3. Значит, движение δ отображает $\angle ABC_L$ на $\angle A'B'C'_L$, и эти углы равны. Аксиома доказана.

IV.1. (Аксиома Архимеда). Даны отрезки $[AB]_L$ и $[CD]_L$. Для действительных чисел аксиома Архимеда справедлива, значит, существует натуральное число n, что $AB_L<nCD_L$.

На луче $[AB)_L$ отложим отрезок $[AB_1]_L$, длина которого равна nCD_L (такой отрезок получается при последовательном откладывании на луче n отрезков равных $[CD]_L$). Точка B лежит между A и B_1 (в противном случае получаем противоречие со свойством 5). Аксиома доказана.

Этим заканчивается доказательство того, что рассматриваемый открытый круг на евклидовой плоскости является моделью плоскости Лобачевского при специальном определении основных понятий и отношений.

В приложении А размещены примеры создания основных собственных инструментов пользователя, также примерные задачи, которые будут использоваться при изучении курса.

Таким образом, представленное построение планиметрии Лобачевского вместе с обучающимися, поможет им не только сформировать представления и усвоение нового для обучающихся материала, но также позволит им наглядно видеть все чертежи. Обучающиеся все чертежи смогут построить самостоятельно, создать необходимые инструменты, которые помогут облегчить построение решений задач на модели Кэли-Клейна.

§2.3. Рабочая программа элективного курса по геометрии Лобачевского для 10 класса, результаты опытно-экспериментальной работы.

Основные темы курса геометрии Лобачевского, оснований геометрии и проективной геометрии, изложенных выше являются базовыми темами изучения элективного курса геометрии 10 класса профильных классов с углубленным изучением математики. Данный курс был разработан с целью расширить представления о математическом образовании обучающихся, развить их пространственное воображение и логическое мышление. А также, курс был разработан с целью улучшить качество понимания материала курса геометрии основной школы.

Курс «Геометрия Лобачевского» должен изучаться именно в 10 классе, когда обучающиеся уже знакомы с аксиомами евклидовой плоскости и способны изучить, представить и понять новую геометрию, значительно отличающуюся от привычной. Рабочая программа курса рассчитана на 2 часа в неделю (всего 68 часов).

Цели изучения курса:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- расширение и углубление знаний, полученных при изучении курса геометрии;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом

для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;

- воспитание средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

В ходе обучения в рамках предмета учащиеся овладевают разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт:

- построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин;
- выполнения и самостоятельного составления алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале; выполнения расчетов практического характера; использования математических формул и самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и эксперимента;
- самостоятельной работы с источниками информации, обобщения и систематизации полученной информации, интегрирования ее в личный опыт;
- проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов, различения доказанных и недоказанных утверждений, аргументированных и эмоционально убедительных суждений.

Планируемые результаты освоения учебного предмета включают в себя:

- Преодоление формализма в решении задач.
- Установка на поиск способа решения всех задач данного типа, а не на получение ответа в конкретной задаче.
- Владение языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
- Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных

источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

- Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- Владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Содержание курса:

1. *История аксиоматического метода. Абсолютная геометрия* (12 часов)

Исторический обзор аксиоматического построения евклидовой геометрии: от аксиом и постулатов Евклида к системам аксиом Д.Гильберта и Л.С. Атанасяна. Проблема пятого постулата Евклида. Требования к системам аксиом: непротиворечивость, независимость и полнота. Модель системы аксиом. Конечные (игрушечные) плоскости как модели некоторых систем аксиом. Абсолютная геометрия как часть евклидовой геометрии, в которой не требуется выполнение аксиомы параллельности. Какие свойства треугольников и четырёхугольников будут выполняться в абсолютной геометрии?

2. *Н.И. Лобачевский и его теория* (8 часов)

Н.И. Лобачевкий, его трагическая судьба, стойкость духа и великий научный подвиг. Аксиома Лобачевского, простейшие следствия системы аксиом планиметрии Лобачевского о сумме углов треугольника и четырёхугольника, о непостоянстве суммы углов треугольника, о равенстве двух треугольников по трём углам. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, абсолют, проверка выполнимости групп аксиом принадлежности и порядка, а также аксиомы Лобачевского. Построение компьютерного аналога модели Кэли-Клейна в среде Живая математика, изображение простейших фигур: точки, прямой, отрезка, луча, треугольника, четырёхугольника и т.д.

3. Параллельные и сверхпараллельные прямые (8 часов)

Определение параллельных и сверхпараллельных прямых на модели Кэли-Клейна. Разработка в среде Живая математика собственных инструментов пользователя, позволяющих создавать анимационные динамически устойчивые чертежи: а) направленной прямой, б) прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой в данном направлении; в) построение всех параллелограммов по трём их вершинам. Решение задач по теме «Параллельные прямые» на модели Кэли-Клейна: а) построение прямой, параллельной двум параллельным прямым б) построение прямых, параллельных двум пересекающимся прямым; в) построение прямых, параллельных двум сверхпараллельным прямым; г) построение трапеции по трём ее вершинам. Для всех задач разработать собственные инструменты пользователя.

4. Основы проективной геометрии (4 часа)

Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: пополнение евклидовой плоскости несобственными точками и несобственной прямой, сложное отношение точек как отношение простых отношений, сложное отношение прямых, гармонические четвёрки точек и прямых, гармонические свойства полного четырёхвершинника и окружности, проективные преобразования, гомология, полюс и поляра.

5. Основные положения теории Лобачевского (20 часов)

Определение перпендикулярных прямых на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Разработка в среде Живая математика собственного инструмента пользователя, позволяющего создавать анимационный динамически устойчивый чертеж построения прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной данной прямой. Решение задач на построение компьютерных моделей: а) прямоугольного треугольника; б) прямой, перпендикулярной одной стороне произвольного угла и параллельной другой его стороне; в) общего перпендикуляра двух сверхпараллельных прямых; г) угла параллельности для произвольной точки и прямой. Доказать утверждение о том, что параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра. Определение расстояния между точками на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Создание в среде Живая математика инструмента пользователя, позволяющего находить расстояние между любыми двумя точками. Используя инструмент, проверить экспериментально основные свойства расстояний: симметричность, транзитивность, аддитивность. Построить произвольный прямоугольный треугольник и проверить выполнимость теоремы Пифагора. Определение на модели Кэли-Клейна осевой симметрии плоскости Лобачевского как гомологии, ось которой пересекает абсолют, центр является полюсом для оси, а пара соответственных точек лежит на абсолюте и одновременно на прямой, проходящей через центр гомологии. Создание в Живой математике соответствующего инструмента пользователя. Определение движения как композиции осевых симметрий. Построить образы некоторых геометрических фигур на модели в среде Живая математика. Решение задач на модели Кэли-Клейна по теме «Движения, осевая симметрия»: а) построение середины отрезка; б) удвоение отрезка; в) построение биссектрисы угла; г) удвоение угла; в) построение серединного перпендикуляра к отрезку; г) используя пункт б, проверить выполнимость аксиомы Архимеда. Используя свойства движения, проверить выполнимость аксиом группы конгруэнтности. Определение на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского величины произвольного угла как евклидову меру образа этого угла под действием движения, отображающего вершину угла в центр абсолюта. Построить произвольный треугольник, одна из вершин которого совпадает с центром абсолюта, и экспериментально проверить, что сумма его углов меньше

180º. Вывести формулу Лобачевского для определения величины угла параллельности.

6. Пучки прямых на плоскости Лобачевского (12 часов)

Рассмотреть пучок пересекающихся прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения окружности – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства окружности. Рассмотреть пучок сверхпараллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения эквидистанты – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства эквидистанты. Рассмотреть пучок параллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения орицикла – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства орицикла.

7. ***Проведение тестирований*** (входного, двух промежуточных, итогового) (4 часа).

Полный пример рабочей программы элективного курса представлен в приложении Б.

Разработанный элективный курс и методика его цифрового сопровождения, явилась основой планирования и осуществления опытно-экспериментальной работы. В целях эксперимента возьмём из курса аксиомы геометрии, которые уже знакомы обучающимся и попробуем с помощью нашей методики расширить представления об аксиомах геометрии у обучающихся.

Опытно-экспериментальная работа проводилась в 2021-2022 гг. на базе школы № 3 г. Ачинска, Красноярского края. В эксперименте участвовало две группы обучающихся 10 класса по 10 человек в каждом. Всего в опытно-экспериментальной работе приняли участие 3 учителя и 20 обучающихся.

Организация и проведение констатирующего этапа эксперимента.

Целью опытно-экспериментальной работы на констатирующем этапе являлось теоретическое и практическое обоснование актуальности темы исследования. Методами исследования на этом этапе являлись: анализ учебно-методического комплекса Геометрии 7-9 и 10-11 классов, используемых в школе, где планируется проведение эксперимента, наблюдение за процессом учебной деятельности.

В ходе констатирующего этапа были решены следующие задачи:

1. Анализ нормативно-правовых документов, учебно-методических комплексов по проблеме исследования позволил уточнить тему школьного курса геометрии, которая будет использована для эксперимента.

Осуществление опытно-поисковой работы на данном этапе эксперимента позволило выделить тему «Аксиомы геометрии» в качестве основной темы эксперимента. Данная тема изучается в курсе геометрии основной школы, а также на её основе строится основной курс изучения геометрии Лобачевского. На данном этапе было разработано входное тестирование для групп обучающихся, определены критерии оценивания и отбора обучающихся для проведения эксперимента.

2. Выявление исходного уровня сформированности аксиоматических знаний обучающихся общеобразовательной школы и выбор экспериментальных и контрольных групп по результатам проверки входного тестирования.

Обобщение результатов констатирующего этапа эксперимента показало, что большинство обучающихся как контрольной, так и экспериментальной групп имеют базовые знания аксиом планиметрии. Анализ входного диагностического теста обучающихся выделил, что большинство обучающихся не владеет аксиоматическим методом или не помнит аксиомы планиметрии. Далеко не все обучающиеся могут применить остаточные знания аксиоматического метода при решении задач. Все вышеперечисленное свидетельствует о недостаточном уровне понимания аксиом и их применения при решении задач.

Базируясь на результатах констатирующего этапа эксперимента, был осуществлен поисково-формирующий этап эксперимента, целью которого была разработка и апробация методики цифрового сопровождения при изучении аксиом планиметрии. Отслеживалась динамика уровня понимания и применения знаний об аксиомах в результате реализации методики.

Контрольно-обобщающий этап эксперимента был направлен на проверку выдвинутой гипотезы исследования. На данном этапе было проведено измерение остаточных знаний аксиоматики геометрии Евклида, анализировались, интерпретировались и обобщались результаты эксперимента по остаточным знаниям об аксиомах геометрии у обучающихся, поступивших в профильный класс с углубленным изучением математики.

Для мониторинга улучшений и повышения качества знаний аксиом геометрии применялись разработанная методика цифрового сопровождения курса аксиом в обучении геометрии, контрольно-измерительные материалы: на входном этапе – входное диагностическое тестирование (приложение В); на промежуточном этапе – промежуточные тестовые работы, состоящие не только из тестов с правильным выбором ответа, но также включены задания с открытым и развёрнутым ответом; на итоговом этапе – контрольное тестирование на знание аксиом, как планиметрии, так и стереометрии.

Констатирующий этап эксперимента стартовал с проверки однородности контрольной и экспериментальной групп относительно качества остаточных знаний об аксиомах геометрии.

В экспериментальной группе обучение геометрии осуществлялось по разработанной методике цифрового сопровождения материала, а в контрольной группе – по традиционной методике. До эксперимента обучающиеся групп находились в одинаковых начальных условиях.

Входное диагностическое тестирование по геометрии было рассчитано на 20 минут и содержит 15 заданий с выбором правильного ответа.

Результаты входного диагностического тестирования показали, что уровень остаточных знаний в группах не высок и составляет 60 %.

Таблица 1 – результаты изучения аксиом геометрии на старте/заключении эксперимента

Этап	**Группа**	**Результат изучения аксиом геометрии**		
		Базовый	**Повышенный**	**Высокий**
До эксперимента	Экспериментальная	6	3	1
	Контрольная	6	2	2
После эксперимента	Экспериментальная	1	5	4
	Контрольная	5	3	2

Представим полученные результаты в виде диаграммы, выразив их для наглядности в процентах:

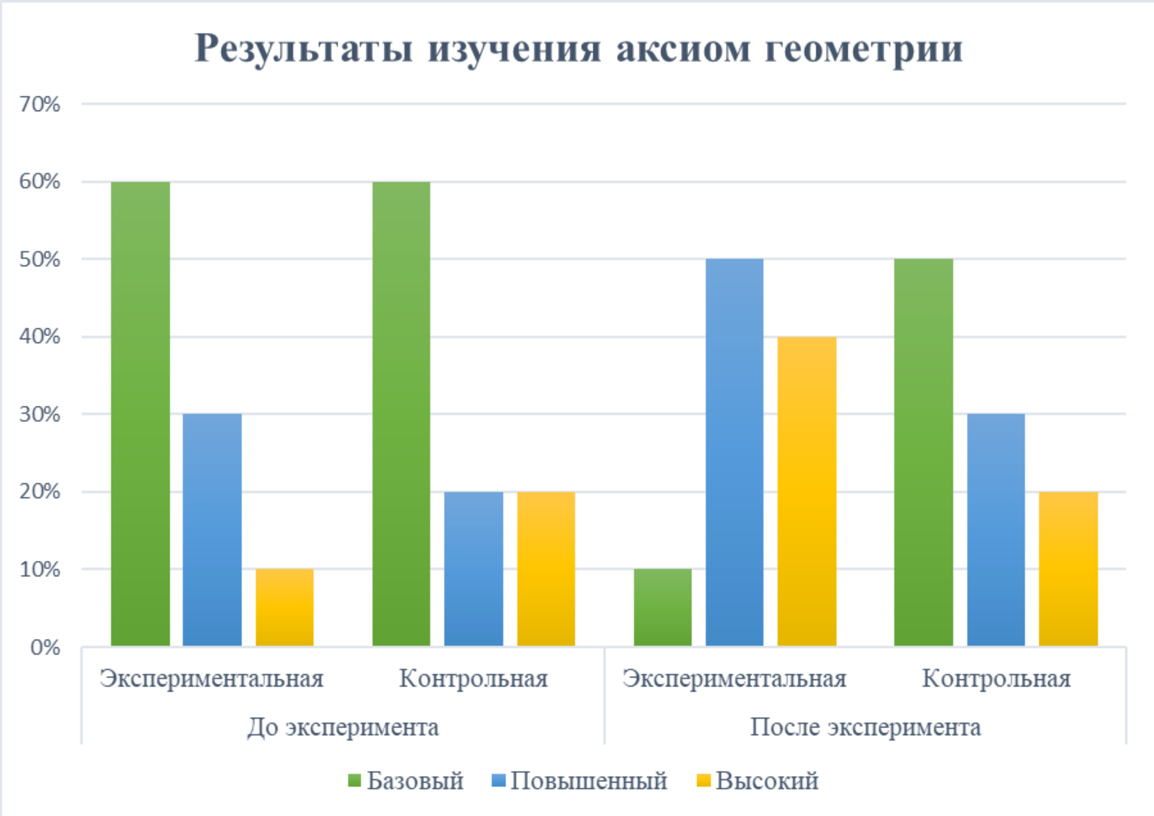

Рисунок 73

Анализ представленных результатов позволил сделать следующие выводы:

- на уровне экспериментальной группы произошло существенное снижение доли обучающихся с базовым знанием аксиом геометрии;
- на уровне контрольной группы значительных изменений не произошло, следовательно можно сделать вывод, что по сравнению с разработанной нами методикой, традиционная методика обучения не выделяет аксиомы на том уровне, чтобы у обучающихся были сформированы основные представления.

Таким образом, можно сделать вывод, что результаты опытно-экспериментальной работы разработанной методике подтвердили эффективность разработанной методики цифрового сопровождения курса изучения аксиом геометрии.

Выводы по главе 2

Разработанный элективный курс «Геометрия Лобачевского» является интересным для обучающихся, которые хотели бы связать в дальнейшем свою жизнь с математикой или архитектурой. Курс позволяет развивать и укреплять пространственное воображение, навыки исследовательской и проектной деятельностей и многое другое, что позволит обучающемуся старшей школы определиться с выбором профессиональной деятельности.

Была представлена методика цифрового сопровождения курса с использованием GSP-файлов при обучении геометрии Лобачевского в рамках элективного курса.

Результаты опытно-экспериментальной работы показали, что разработанная методика цифрового сопровождения курса позволяет значительно повысить качество обучения геометрии, в сравнении с традиционной методикой обучения. Обучающимся было интересно принимать участие в эксперименте, так как наличие большого количества чертежей дало возможность разнообразить предмет геометрии и сделать его интересным для молодого поколения.

Таким образом, можно сделать вывод, что наше исследование на данной стадии можно подвести к завершению и перейти к реализации курса «Геометрия Лобачевского» в качестве внеурочной деятельности в образовательном учреждении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно поставленной цели данной диссертационной работы были решены все поставленные задачи:

1. Изучены и проанализированы вопросы, связанные с аксиоматическим обоснованием школьного курса геометрии, учебная и научно-методическая литература по теме исследования.

2. Проанализирован существующий опыт отечественной и зарубежной школы по обучению старшеклассников геометрии Лобачевского как в рамках основных, так и элективных (факультативных) курсов в школе.

3. Изучены возможности системы динамической математики Живая математика, позволяющие создавать собственные инструменты для использования их при обучении геометрии Лобачевского в школе.

4. Разработаны содержание элективного курса «Геометрия Лобачевского» для 10 классов, а также методика его цифрового сопровождения с использованием среды Живая математика.

5. Проведена апробация разработанной методики, оценена ее эффективность.

Полная апробация элективного курса планируется в 2023-2024 учебном году на базе МАОУ «Школы № 3» города Ачинска, Красноярского края, с целью доказательства окончательной уверенности в эффективности разработанной методики цифрового сопровождения курса.

В поддержку элективного курса была разработана библиотека чертежей-иллюстраций и методика их построения, которые дополняют содержание курса и его разделы, включают в себя как чертежи-иллюстрации для теоретического изучения, так и для практического решения большого цикла задач.

Следует отметить, что данный курс действительно востребован в учебном процессе, поскольку он позволяет существенно повысить интерес к изучению геометрии, значительно расширить знания обучающихся в этих областях, а также развить творческую деятельность школьников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абенов Б. Б., Белошицкий П. С. Геометрия Лобачевского //Прогрессивные технологии и экономика в машиностроении: сборник трудов VII Всероссийской научно-практической конференции для студентов и учащейся молодежи, г. Юрга, 7-9 апреля 2016 г. Т. 2.—Томск, 2016. – Изд-во ТПУ, 2016. – Т. 2. – С. 242-244.

2. Акимова И. Я., Ахметова Ф. Х. Заметки о геометрии Лобачевского //Концепт. – 2016. – №. 6. – С. 62-67.

3. Анищенко С.А. Лекции по геометрии, ч.3 Основания геометрии.: учебное пособие / Издание 2, доработанное и дополненное; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2009, - 121 с.

4. Анищенко С.А. Учебное пособие «Лекции по геометрии», ч.2, Глава 5, §6, Издательство КГПУ, 1999 г. стр. 135-170

5. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского // М. : БИНОМ. Лаборатория знаний,. – 2014.

6. Башков В. И., Малахальцев М. А. Геометрия Лобачевского и современное научное мировоззрение //Георесурсы. – 2001. – №. 3 (7). – С. 12-13.

7. Болотов С. Ю. Геометрия Лобачевского и ее непротиворечивость //ББК 74.584. 26 Т30 Ответственный за выпуск: ЮИ Борсяков. – 2012. – С. 153.

8. Борисова Е. Тесты модульного контроля, как элемент цифрового сопровождения образовательной траектории студента //Danish Scientific Journal. – 2021. – №. 51-2. – С. 25-30.

9. Василенко В. Г. Игровые методы проведения учебных занятий в высшей школе // Вестник РМАТ. 2014. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/igrovye-metody-provedeniya-uchebnyh-zanyatiy-v-vysshey-shkole (дата обращения: 13.10.2022).

10. Вернер А. Л. и др. Об опыте преподавания геометрии Лобачевского //In memoriam NI Lobatschevskii. – 1995. – Т. 3. – №. 2. – С. 28-33.

11. Гайбуллаев Н. Формирование геометрических представлений учащихся средней школы при изучении евклидовой геометрии и неевклидовых геометрий. – 1972.

12. Галиакберова А. А., Галямова Э. Х., Матвеев С. Н. Методические основы проектирования цифрового симулятора педагогической деятельности //Вестник Мининского университета. – 2020. – Т. 8. – №. 3 (32). – С. 2.

13. Гильберт Д. Основания геометрии. – 2013.

14. Делоне Б. Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. – 2016.

15. Дубровский В. Н., Лебедева Н. А., Белайчук О. А. 1С: Математический конструктор-новая программа динамической геометрии //Компьютерные инструменты в образовании. – 2007. – №. 3. – С. 47-56.

16. Жаров С. В. Геометрические идеи НИ Лобачевского (к 225-летию со дня рождения) //Математическое образование. – 2017. – №. 1. – С. 48-51.

17. Жеребцова А.Ф. Динамические фракталы в среде Живая математика // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2017 г. С. 281–284

18. Жеребцова А.Ф. Об изучении основ геометрии Лобачевского в профильных математических классах на основе среды Живая математика // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 27 апреля 2021 г. С. 235–237

19. Жеребцова А.Ф. Сильченко А.А. Построение композиции динамических фракталов в среде Живая математика как содержательный элемент элективного курса // Перспективы развития науки в современном мире:

сборник статей по материалам X международной научно-практической конференции. 22 сентября 2018 г. С. 181–186

20. Жеребцова А.Ф. Элективный курс «Геометрия Лобачевского» как средство популяризации геометрии у обучающихся 10 класса// Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы XI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 90-летию КГПУ им. В.П. Астафьева. Красноярск, 10–11 ноября 2022 г, С. 160-162

21. Жеребцова А.Ф., Майер В.Р. О коллекции собственных инструментов для изучения основ геометрии Лобачевского в профильных математических классах на базе среды Живая математика // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. Красноярск, 11–12 ноября 2021 г. С. 87–93

22. Живая математика: сборник методических материалов. М.: ИНТ. 176с.

23. Зенина А.Н. Методика проведения факультативных занятий по математике [Электронный ресурс] URL: https://infourok.ru/metodika-provedeniya-fakultativnih-zanyatiy-po-matematike-1271048.html (Дата посещения: 17.05.2021)

24. Каган В.Ф. Великий русский ученый Н.И. Лобачевский и его место в мировой науке № 129. Изд. 3, URSS. 2021. 88 с.

25. Каган В.Ф. Лобачевский: Жизнь и творчество великого математика. Создание и развитие неевклидовой геометрии URSS. 2021. 360 с.

26. Каган В.Ф. Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Часть 1: Геометрия Лобачевского и ее предыстория. Часть 2: Интерпретации геометрии Лобачевского и развитие ее идей URSS. 2021. 500 с.

27. Камучева Д. А. Геометрия Лобачевскгого //Международный академический вестник. – 2018. – №. 6. – С. 81-83.

28. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. стереотип. URSS. 2022. 352 с.

29. Ковешников Е. В., Савченко В. Н. Неполнота и неопределённость классической геометрии Евклида и история их преодоления в геометриях Лобачевского, Римана, Гильберта и Мандельброта //Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2011. – №. 5. – С. 77-83.

30. Коновалова Е. А., Смирнова Н. Б. Николай Иванович Лобачевский-основатель неевклидовой геометрии //Culture and society: history and present. – 2015. – С. 142-146.

31. Кострюков А. В., Семагина Ю. В. Геометро-графический язык как основа организации учебного процесса при формировании графической культуры студента вуза //Концепт. – 2018. – №. 5. – С. 28-39.

32. Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий. – 2016.

33. Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. – 2013.

34. Майер В. Р. О концепции использования компьютерных технологий в геометрической подготовке учителя математики // Формирование духовной культуры личности в процессе обучения математике в школе и вузе, Тезисы докладов XX Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, г. Вологда, 2 – 4 октября 2001 г, С. 114-115

35. Майер В. Р. Системы динамической геометрии в математическом образовании школьников и студентов педагогических вузов // Математическое образование в цифровом обществе, Материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, г. Самара, 26-28 сентября 2019 г, С. 103-105

36. Майер В. Р., Баранова М. Ю. О подготовке будущих учителей математики к использованию в школьном курсе геометрии компьютера средствами профильной дисциплины по выбору // Тезисы докладов участников XXXI всероссийского семинара преподавателей математики высших учебных заведений, посвященного 25-летию семинара, г. Тобольск, 26-29 сентября 2012 г, С. 79-81

37. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики: монография; Краснояр. гос. пед. ун-т им В.П. Астафьева. – Красноярск, 2014. – 516 с.

38. Мичурина К. А. Особенности преподавания геометрии Лобачевского в старшей школе //Наука молодых. – 2020. – С. 167-169.

39. Петров Ю. П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 448 с

40. Подаева Н. Г., Агафонов П. А. Геометрические задачи на построение в электронной образовательной среде как средство развития понятийных психических структур обучающихся: социокультурный подход //Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Гуманитарные науки. – 2020. – №. 12-2. – С. 103-109.

41. Прасолов В. В., Скопенков А. Б. Размышления о признании геометрии Лобачевского, – 2013.

42. Прасолов В. Геометрия Лобачевского. – 2022.

43. Селиверстова Е. М. Использование проектной методики при изучении темы «Неевклидовы геометрии» //доктор педагогических наук, профессор Нижегородского государственного университета имени НИ Лобачевского. – 2017. – С. 186.

44. Семаков И. Е., Федоровских Е. С. Новая непротиворечивая геометрия. Практическое применение геометрии Лобачевского //Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции. – УГЛТУ, 2019. – С. 93-95.

45. Сербина Л. И., Корчак К. И. Теоретико-познавательные аспекты неевклидовой геометрии Лобачевского и возможности их применения //Вопросы педагогики. – 2021. – №. 4-1. – С. 270-275.

46. Тайманов И. А. Место истории геометрии в популяризации и преподавании математики //Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – №. 0. – С. 31-42.

47. Тихомиров В. М. Планиметрия Евклида и Лобачевского от Евклида до Гильберта //Математическое просвещение. – 2018. – Т. 22. – №. 0. – С. 69-84.

48. Фоменко М. В. и др. Неевклидова геометрия. Зарождение и перспективы развития //Новые технологии в учебном процессе и производстве. – 2017. – С. 241-244.

49. Хатамов И. о роли понятия длины отрезка в процессе изучения неевклидовых геометрий в средней школе //Проблемы педагогики. – 2021. – №. 3 (54). – С. 24-29.

50. Шевченко В. Е. Опыт изучения оснований геометрии (аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии Лобачевского) в средней школе. – 1970.

51. Шурыгин В. В., Шурыгин В. В. Об одном подходе к изложению основ геометрии Лобачевского студентам младших курсов и школьникам //Электронные библиотеки. – 2019. – Т. 22. – №. 6. – С. 737-748.

52. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой: Вокруг абсолюта URSS. 2017. 160 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Прямая. Одним из наиболее часто используемых инструментов окажется инструмент «Прямая», опишем алгоритм его создания. Внутри абсолюта (произвольной фиксированной окружности) выбираем две точки A и B, строим евклидову прямую AB, находим точки пересечения этой прямой с абсолютом, строим хорду с концами в этих точках, прямую AB скрываем. Завершая процедуру создания инструмента, подсветим сначала центр абсолюта, затем точку на абсолюте, далее – точки A и B и, наконец, построенную хорду вместе с ее концами (стиль точки, являющейся концом хорды, желательно выбрать «маленькая»). Осталось обратиться к команде «Создать инструмент», присвоить ему имя.

Направленная прямая. Как и в предыдущем случае строим внутри абсолюта произвольные точки A и B. Чтобы задать на прямой AB направление от A к B, строим луч AB, находим его пересечение X с абсолютом. Аналогично строим луч BA и его пересечение Y с абсолютом. Наконец, используя инструменты Живой математики «отрезок» и «стрелка», строим вектор $\overrightarrow{YX}$. Этот вектор и будет служить изображением направленной прямой AB, стрелка на хорде XY с концом в точке X будет указывать выбранное пользователем направление. Отметим, что при создании инструмента «Направленная прямая» следует после подсвечивания центра и точки абсолюта подсветить точки A, B, X и Y именно в том порядке, в каком они указаны.

Параллельная прямая. Следующий инструмент это «Прямая, параллельная направленной прямой». Внутри абсолюта выбираем три неколлинеарные точки A, B и C, строим точку X (на рисунке 74 ее имя скрыто) пересечения луча AB и абсолюта, используя созданный выше инструмент, строим направленную прямую CX в направлении от C к X (инструмент «Направленная прямая»

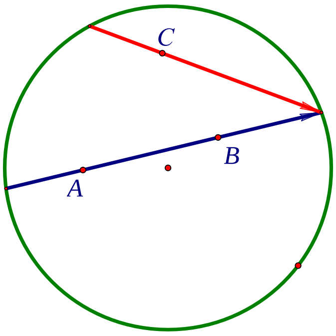

Рисунок 74

применим не только к точкам модели, но и тогда, когда они лежат на абсолюте).

Задачи. Обучающимся предлагается с использованием созданных выше инструментов выполнить следующие задачи на построение:

Задача 1. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две параллельные прямые. Постройте прямую, параллельную этим прямым и не лежащую с ними в одном пучке параллельных прямых.

Задача 2. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две прямые, не являющиеся параллельными (пересекающиеся или расходящиеся). Постройте все прямые, параллельные обеим данным прямым.

Задача 3. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны неколлинеарные точки A, B и C. Постройте точку D такую, чтобы четырёхугольник ABCD оказался а) параллелограммом, б) трапецией.

Факты проективной геометрии.

Сложное отношение упорядоченной четвёрки коллинеарных точек A, B, C и D рассматривается только для собственных точек и определяется как частное от деления простого отношения (AB,C) = $\overline{AC}/\overline{BC}$ на простое отношение (AB,D) = $\overline{AD}/\overline{BD}$. Обозначается оно (AB, CD). Это свойство позволяет корректно определить сложное отношение четырёх прямых одного пучка.

Вводится понятие гармонической четвёрки точек. Используя свойство биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника, доказывается, что пара A, B вершин треугольника APB гармонически разделяет пару точек C и D, являющихся точками пересечения прямой AB с биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине P, т.е. (AB,CD)=-1. Далее, выводятся гармонические свойства полного четырёхвершинника. Одно из них заключается в том, что если рассмотреть произвольную точку D вне окружности, провести из D касательные, касающиеся окружность в точках M и N, затем – секущую, пересекающую окружность в точках A и B, то пара A, B гармонически разделяет пару C, D, где C – точка пересечения секущей с прямой MN. Таким образом, все точки, являющиеся четвёртыми гармоническими к точкам A, B и D (т.е. (AB,CD) = – 1), лежат на одной прямой MN, которая называется *полярой* точки D, сама точка D называется *полюсом* прямой MN.

Кроме движений плоскости, представляющих собой повороты вокруг центра окружности и осевых симметрий, содержащих центр окружности, рассматриваются следующие преобразования. Пусть S некоторая точка, лежащая вне окружности, s – поляра точки S. Произвольной точке M ставится в соответствие такая точка M′, что (SK,MM′) = -1, где K точка пересечения прямых SM и s. Такие преобразования называются *гармоническими гомологиями* с центром S и осью гомологии s.

Перпендикулярная прямая, полюс прямой. Создадим вспомогательный инструмент «Полюс прямой». Для этого изображаются точки A и B, лежащие внутри абсолюта, находятся концы X и Y хорды, содержащей A и B, затем, касательные к окружности в точках X и Y, наконец точку пересечения касательных, которая представляет собой полюс прямой AB. Прямые назовём *перпендикулярными*, если каждая из соответствующих им евклидовых прямых, содержит полюс второй прямой. Создадим теперь заявленный инструмент. Изобразим произвольные неколлинеарные точки A, B и C, для прямой AB, используя инструмент «Полюс прямой», построим точку D, которая является полюсом прямой AB, далее, построим евклидову прямую CD, найдём точки пересечения CD с абсолютом, открытая хорда окружности, соединяющая эти точки и будет искомым перпендикуляром к AB. Созданный инструмент назовём «Перпендикулярная прямая».

Расстояние. Опишем алгоритм создания инструмента, позволяющего находить расстояние между точками на нашей модели. Выберем произвольные точки A и B внутри абсолюта. Построим точку X пересечения луча AB с абсолютом и точку Y пересечения луча BA с абсолютом. Поскольку векторы $\overline{AX}$ и $\overline{BX}$ сонаправлены и AX > BX, то $\overline{AX}/\overline{BX} = AX/BX > 1$. Так как $\overline{AY}$ и

$\overline{BY}$ тоже сонаправлены и AY < BY, то 0 < $\overline{AY}/\overline{BY}$ = AY/BY < 1. Но тогда сложное отношение (AB,XY) равно (AX/BX) /(AY/BY) > 1. С помощью меню «Измерения» среды Живая математика найдём евклидовы длины отрезков AX, BX, AY, BY. Расстоянием между точками A и B на нашей модели назовём натуральный логарифм от сложного отношения (AB,CD), т,е. AB = ln(AB,CD). Используя графический калькулятор, сначала вычислим (AB,CD) = (AX·BY)/(AY·BX), затем – натуральный алгоритм от этого сложного отношения. Завершая создание инструмента, подсветим центр и точку на абсолюте, затем точки A и B, наконец, найденное значение логарифма. Осталось обратиться к команде «Создать новый инструмент» и присвоить ему имя «Расстояние».

Середина отрезка, удвоение отрезка, симметричная точка. Создадим инструмент, позволяющий находить середину отрезка. Для этого рассмотрим произвольные точки A и B, лежащие внутри абсолюта. Построим полюс P прямой AB = p, затем – секущие AP и BP, которые высекет на абсолюте 4 точки, являющиеся вершинами полного четырёхвершинника (на рисунке 75 он окрашен). Одна из его диагональных точек, обозначим ее C, будет принадлежать отрезку AB. Измерения с помощью созданного выше инструмента покажут, что AC = BC. Из гармонических свойств полного четырёхвершинника следует, что точки A и B являются соответственными точками гармонической гомологии с осью PC и центром, совпадающим с полюсом Q прямой PC.

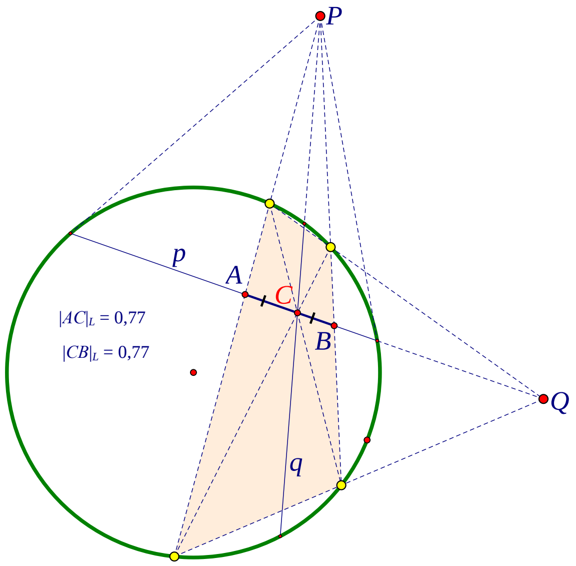

Рисунок 75

Задачи. Обучающимся предлагается с использованием созданных выше инструментов решить следующие задачи на построение:

Задача 4. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского построить прямоугольный треугольник.

Задача 5. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского построить серединный перпендикуляр к данному отрезку. Создать соответствующий инструмент «Серединный перпендикуляр к отрезку».

Задача 6. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского дан острый угол. Постройте прямую, параллельную одной стороне угла и перпендикулярную второй стороне этого угла.

Задача 7. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две расходящиеся прямые. Постройте прямую, перпендикулярную этим прямым.

Задача 8. На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского дана прямая. Постройте множество точек, находящихся на одном расстоянии от этой прямой и по одну сторону от нее (эквидистанта этой прямой).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

«Школа №3»

РАССМОТРЕНО	УТВЕРЖДАЮ
на методическом совете	Директор МАОУ «Школа №3»
Протокол №__ от _____20___ г.	_____________ М.С. Киселева
	Приказ №___ от _____20___ г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«Геометрия Лобачевского»

Возраст обучающихся: с 15 до 17 лет

Срок реализации: 1 год

Составитель:

Учитель математики

Жеребцова Анастасия Федоровна

Ачинск, 2022

Пояснительная записка

Данная программа дополнительного образования «Геометрия Лобачевского» для 10 классов с углубленным уровнем изучения математики рассчитана на 68 учебных часов (2 часа в неделю).

Важную роль в развитии школьника играет пространственное мышление и его невысокий уровень является практически непреодолимым препятствием для успешного изучения ряда дисциплин: географии, физики, химии, черчения, рисования, стереометрии и других.

На протяжении всей истории человечества геометрия служила источником развития не только математики, но и многих других наук т.к. именно в ней появились первые теоремы и доказательства, сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений и, наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов.

Программа элективного курса по геометрии для учащихся 10–го класса с углубленным уровнем обучения ориентирована на коррекцию уровня подготовки, дополнение и углубление базового и предметного образования, компенсацию недостатков обучения, расширение знаний школьного курса геометрии. Математика является обязательным предметом для сдачи ЕГЭ и одну третью часть материала единого государственного экзамена составляют задачи по геометрии. Результаты ЕГЭ показывают пробелы изучения геометрии в школе. Самыми трудными заданиями по математике являются геометрические задачи. Можно выделить следующие недостатки в подготовке выпускников: формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии, неумение использовать изученный материал в ситуации, которая отличается от стандартной. В связи с этим необходимо делать акцент не только на овладение теоретическими фактами, но и на развитие умений решать геометрические задачи разного уровня сложности и математически грамотно их записывать. Изучение отличного от школьного курса геометрии материала в процессе решения задач позволяет реализовать широкие возможности для дифференцированного обучения учащихся. Задачи предлагаются в большом количестве: от самых простых, базовых, до достаточно трудных. В результате даже у менее подготовленных учащихся появляется чувство уверенности в том, что они могут применять базовые знания в более сложных ситуациях.

Целью изучения данного элективного курса является повышение теоретических знаний курса геометрии, усиление роли теоретических обобщений и дедуктивных заключений. Это позволит учащимся при решении задач перейти с уровня формально-оперативных умений на более высокий уровень, позволяющий строить логические цепочки рассуждений, делать выводы о выборе решения, анализировать и оценивать полученные результаты, что соответствует целям и задачам курса профильного обучения.

Особенность изучаемого курса состоит в том, что он направлен на формирование у учащихся новых видов познавательной и практической деятельности, поскольку именно геометрия дает представление о строго установленной истине, воспитывает потребность доказывать то, что утверждается в качестве истины.

Одной из главных **задач** современной школы является применение полученных знаний в школе на практических занятиях. Но научиться решать задачи по геометрии значительно сложнее, чем по алгебре, т.к. это связано с многообразием приемов и методов их решения. Вообще, умение решать задачи основывается на хорошем знании теоретической части курса, знании достаточного количества геометрических фактов и владении определенным арсеналом приемов и методов решения геометрических задач. Изучение методов решения геометрических задач будет более эффективным, если рассматривать на примере одной задачи возможности использования различных геометрических и алгебраических методов.

Рабочая программа курса рассчитана на 2 часа в неделю (всего 68 часов).

Цели изучения курса:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- расширение и углубление знаний, полученных при изучении курса геометрии;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;
- воспитание средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

В ходе обучения в рамках предмета учащиеся овладевают разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт:

- построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин;
- выполнения и самостоятельного составления алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале; выполнения расчетов практического характера; использования математических формул и самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и эксперимента;
- самостоятельной работы с источниками информации, обобщения и систематизации полученной информации, интегрирования ее в личный опыт;
- проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов, различения доказанных и недоказанных утверждений, аргументированных и эмоционально убедительных суждений.

Планируемые результаты освоения учебного предмета включают в себя:

- Преодоление формализма в решении задач.
- Установка на поиск способа решения всех задач данного типа, а не на получение ответа в конкретной задаче.
- Владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
- Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
- Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- Владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Содержание курса:

1. История аксиоматического метода. Абсолютная геометрия (12 часов)

Исторический обзор аксиоматического построения евклидовой геометрии: от аксиом и постулатов Евклида к системам аксиом Д.Гильберта и Л.С. Атанасяна. Проблема пятого постулата Евклида. Требования к системам аксиом: непротиворечивость, независимость и полнота. Модель системы аксиом. Конечные (игрушечные) плоскости как модели некоторых систем аксиом. Абсолютная геометрия как часть евклидовой геометрии, в которой не требуется выполнение аксиомы параллельности. Какие свойства треугольников и четырёхугольников будут выполняться в абсолютной геометрии?

2. *Н.И. Лобачевский и его теория* (8 часов)

Н.И. Лобачевкий, его трагическая судьба, стойкость духа и великий научный подвиг. Аксиома Лобачевского, простейшие следствия системы аксиом планиметрии Лобачевского о сумме углов треугольника и четырёхугольника, о непостоянстве суммы углов треугольника, о равенстве двух треугольников по трём углам. Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, абсолют, проверка выполнимости групп аксиом принадлежности и порядка, а также аксиомы Лобачевского. Построение компьютерного аналога модели Кэли-Клейна в среде Живая математика, изображение простейших фигур: точки, прямой, отрезка, луча, треугольника, четырёхугольника и т.д.

3. *Параллельные и сверхпараллельные прямые* (8 часов)

Определение параллельных и сверхпараллельных прямых на модели Кэли-Клейна. Разработка в среде Живая математика собственных инструментов пользователя, позволяющих создавать анимационные динамически устойчивые чертежи: а) направленной прямой, б) прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой в данном направлении; в) построение всех параллелограммов по трём их вершинам. Решение задач по теме «Параллельные прямые» на модели Кэли-Клейна: а) построение прямой, параллельной двум параллельным прямым б) построение прямых, параллельных двум пересекающимся прямым; в) построение прямых, параллельных двум сверхпараллельным прямым; г) построение трапеции по трём ее вершинам. Для всех задач разработать собственные инструменты пользователя.

4. *Основы проективной геометрии* (4 часа)

Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: пополнение евклидовой плоскости несобственными точками и несобственной прямой, сложное отношение точек как отношение простых отношений, сложное отношение прямых, гармонические четвёрки точек и прямых, гармонические свойства полного четырёхвершинника и окружности, проективные преобразования, гомология, полюс и поляра.

5. *Основные положения теории Лобачевского* (20 часов)

Определение перпендикулярных прямых на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Разработка в среде Живая математика собственного инструмента пользователя, позволяющего создавать анимационный динамически устойчивый чертеж построения прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной данной прямой. Решение задач на построение компьютерных моделей: а) прямоугольного треугольника; б) прямой, перпендикулярной одной стороне произвольного угла и параллельной другой его стороне; в) общего перпендикуляра двух сверхпараллельных прямых; г) угла параллельности для произвольной точки и прямой. Доказать утверждение о том, что параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра. Определение расстояния между точками на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Создание в среде Живая математика инструмент пользователя, позволяющий находить расстояние между любыми двумя точками. Используя инструмент, проверить экспериментально основные свойства расстояний: симметричность, транзитивность, аддитивность. Построить произвольный прямоугольный треугольник и проверить выполнимость теоремы Пифагора. Определение на модели Кэли-Клейна осевой симметрии плоскости Лобачевского как гомологии, ось которой пересекает абсолют, центр является полюсом для оси, а пара соответственных точек лежит на абсолюте и одновременно на прямой, проходящей через центр гомологии. Создание в Живой математике соответствующего инструмента пользователя. Определение движения как композиции осевых симметрий. Построить образы некоторых геометрических фигур на модели в среде Живая математика. Решение задач на модели Кэли-Клейна по теме «Движения, осевая симметрия»:

а) построение середины отрезка; б) удвоение отрезка; в) построение биссектрисы угла; г) удвоение угла; в) построение серединного перпендикуляра к отрезку; г) используя пункт б, проверить выполнимость аксиомы Архимеда. Используя свойства движения, проверить выполнимость аксиом группы конгруэнтности. Определение на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского величины произвольного угла как евклидову меру образа этого угла под действием движения, отображающего вершину угла в центр абсолюта. Построить произвольный треугольник, одна из вершин которого совпадает с центром абсолюта, и экспериментально проверить, что сумма его углов меньше 180^{o}. Вывести формулу Лобачевского для определения величины угла параллельности.

6. ***Пучки прямых на плоскости Лобачевского*** (12 часов)

Рассмотреть пучок пересекающихся прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения окружности – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства окружности. Рассмотреть пучок сверхпараллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения эквидистанты – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства эквидистанты. Рассмотреть пучок параллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка, создать собственный инструмент пользователя построения орицикла – траектории точки относительно этого пучка прямых. Проверить некоторые свойства орицикла.

7. ***Проведение тестирований*** (входного, двух промежуточных, итогового) (4 часа).

Учебно-тематический план.

(2 часа в неделю,	**Содержание**	**К-во часов**	**Теоретич. занятия**	**Практич. занятия**

всего 68 часов) № п\п				
1	История аксиоматического метода. Абсолютная геометрия	12	4	8
2	Н.И. Лобачевский и его теория	8	2	6
3	Параллельные и сверхпараллельные прямые	8	2	6
4	Основы проективной геометрии	4	1	3
5	Основные положения теории Лобачевского	20	5	15
6	Пучки прямых на плоскости Лобачевского	12	4	8
7	Проведение тестирований	4	-	4

Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Содержание	Кол-во часов
История аксиоматического метода. Абсолютная геометрия		
1	Входное тестирование	1
2-3	Исторический обзор аксиоматического построения евклидовой геометрии: от аксиом и постулатов Евклида к системам аксиом Д.Гильберта и Л.С. Атанасяна.	2
4-5	Проблема пятого постулата Евклида	2

6-7	Требования к системам аксиом: непротиворечивость, независимость и полнота	2
8	Модель системы аксиом	1
9	Конечные (игрушечные) плоскости как модели некоторых систем аксиом	1
10-11	Абсолютная геометрия как часть евклидовой геометрии, в которой не требуется выполнение аксиомы параллельности	2
12-13	Какие свойства треугольников и четырёхугольников будут выполняться в абсолютной геометрии?	2
Н.И. Лобачевский и его теория		
14-15	Н.И. Лобачевкий, его трагическая судьба, стойкость духа и великий научный подвиг	2
16-17	Аксиома Лобачевского, простейшие следствия системы аксиом планиметрии Лобачевского о сумме углов треугольника и четырёхугольника, о непостоянстве суммы углов треугольника, о равенстве двух треугольников по трём углам	2
18-19	Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, абсолют, проверка выполнимости групп аксиом принадлежности и порядка, а также аксиомы Лобачевского	2

20-21	Построение компьютерного аналога модели Кэли-Клейна в среде Живая математика, изображение простейших фигур: точки, прямой, отрезка, луча, треугольника, четырёхугольника и т.д	2
Параллельные и сверхпараллельные прямые		
22	Определение параллельных и сверхпараллельных прямых на модели Кэли-Клейна	1
23-25	Разработка в среде Живая математика собственных инструментов пользователя, позволяющих создавать анимационные динамически устойчивые чертежи: а) направленной прямой, б) прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой в данном направлении; в) построение всех параллелограммов по трём их вершинам	3
26-28	Решение задач по теме «Параллельные прямые» на модели Кэли-Клейна: а) построение прямой, параллельной двум параллельным прямым б) построение прямых, параллельных двум пересекающимся прямым; в) построение прямых, параллельных двум сверхпараллельным прямым; г) построение трапеции по трём ее вершинам	3
29	Разработка собственных инструментов	1

	пользователя	
Основы проективной геометрии		
30	Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: пополнение евклидовой плоскости несобственными точками и несобственной прямой	1
31	Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: сложное отношение точек как отношение простых отношений, сложное отношение прямых	1
32	Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: гармонические четвёрки точек и прямых, гармонические свойства полного четырёхвершинника и окружности	1
33	Основные факты проективной геометрии (без доказательства), необходимые для завершения построения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского: проективные преобразования, гомология, полюс и поляра	1

34	Первое промежуточное тестирование	1
Основные положения теории Лобачевского		
35	Определение перпендикулярных прямых на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского	1
36	Разработка в среде Живая математика собственного инструмента пользователя, позволяющего создавать анимационный динамически устойчивый чертеж построения прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной данной прямой	1
37-38	Решение задач на построение компьютерных моделей: а) прямоугольного треугольника; б) прямой, перпендикулярной одной стороне произвольного угла и параллельной другой его стороне; в) общего перпендикуляра двух сверхпараллельных прямых; г) угла параллельности для произвольной точки и прямой. Доказать утверждение о том, что параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра	2
39-40	Определение расстояния между точками на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Создание в среде Живая математика инструмент пользователя, позволяющий находить расстояние	2

	между любыми двумя точками	
41-42	Используя инструмент, проверить экспериментально основные свойства расстояний: симметричность, транзитивность, аддитивность. Построить произвольный прямоугольный треугольник и проверить выполнимость теоремы Пифагора	2
43-44	Определение на модели Кэли-Клейна осевой симметрии плоскости Лобачевского как гомологии, ось которой пересекает абсолют, центр является полюсом для оси, а пара соответственных точек лежит на абсолюте и одновременно на прямой, проходящей через центр гомологии	2
45-46	Создание в Живой математике соответствующего инструмента пользователя. Определение движения как композиции осевых симметрий. Построить образы некоторых геометрических фигур на модели в среде Живая математика	2
47-49	Решение задач на модели Кэли-Клейна по теме «Движения, осевая симметрия»: а) построение середины отрезка; б) удвоение отрезка; в) построение биссектрисы угла; г) удвоение угла; в) построение серединного перпендикуляра	3

	к отрезку; г) используя пункт б, проверить выполнимость аксиомы Архимеда	
50	Используя свойства движения, проверить выполнимость аксиом группы конгруэнтности	1
51-52	Определение на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского величины произвольного угла как евклидову меру образа этого угла под действием движения, отображающего вершину угла в центр абсолюта	2
53	Построить произвольный треугольник, одна из вершин которого совпадает с центром абсолюта, и экспериментально проверить, что сумма его углов меньше 180º	1
54	Вывести формулу Лобачевского для определения величины угла параллельности	1
55	Второе промежуточное тестирование	1
Пучки прямых на плоскости Лобачевского		
56-57	Рассмотреть пучок пересекающихся прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка	2
58	Создание собственного инструмента пользователя построения окружности – траектории точки относительно этого	1

	пучка прямых	
59	Проверка некоторых свойств окружности	1
60-61	Рассмотреть пучок сверхпараллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка	2
62	Создание собственного инструмента пользователя построения эквидистанты – траектории точки относительно этого пучка прямых	1
63	Проверка некоторых свойств эквидистанты	1
64-65	Рассмотреть пучок параллельных прямых, построить траекторию некоторой точки относительно этого пучка	2
66	Создание собственного инструмента пользователя построения орицикла – траектории точки относительно этого пучка прямых	1
67	Проверка некоторых свойств орицикла	1
68	Итоговое тестирование	1

Учебно-методическая литература

1. Анищенко С.А. Лекции по геометрии, ч.3 Основания геометрии.: учебное пособие / Издание 2, доработанное и дополненное; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2009, - 121 с.

2. Анищенко С.А. Учебное пособие «Лекции по геометрии», ч.2, Глава 5, §6, Издательство КГПУ, 1999 г. стр. 135-170
3. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского // М. : БИНОМ. Лаборатория знаний,. – 2014.
4. Живая математика: сборник методических материалов. М.: ИНТ. 176с.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Входное тестирование

1. Сколько плоскостей можно провести через две точки пространства?

- Ни одной
- Одну
- Две
- Бесконечно много

2. Через точку М, не лежащую на прямой а, проведены прямые, пересекающие прямую а. Тогда:

- Эти прямые не лежат в одной плоскости
- Эти прямые лежат в одной плоскости
- Никакого вывода сделать нельзя
- Часть прямых лежат в плоскости, а часть – нет

3. Сколько плоскостей можно провести через одну точку пространства?

- Ни одной
- Одну
- Две
- Бесконечно много

4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ... и притом только одна

- Окружность
- Плоскость
- Фигура

5. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

- Прямая, параллельная прямой, проходящей через данные точки

- Перпендикуляр, проведенный к середине отрезка, соединяющего данные точки
- Плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через данные точки
- Плоскость, перпендикулярная отрезку

6. Из точки, не принадлежащей плоскости опущен на нее перпендикуляр и проведена наклонная. Найдите проекцию наклонной, если перпендикуляр равен 12 см, а наклонная 15 см.

- 3 см
- 9 см
- 27 см
- 81 см

7. Найдите угол наклона отрезка к плоскости, если его проекция на эту плоскость в два раза меньше самого отрезка.

- 30°
- 45°
- 60°
- 90°

8. Какое из следующих утверждений верно

- Любые четыре точки лежат в одной плоскости
- Любые три точки не лежат в одной плоскости
- Любые четыре точки не лежат в одной плоскости
- Через любые три точки проходит плоскость

9. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные пары из трех параллельных прямых?

- одну
- Две
- Три

- Шесть

10. Найдите геометрическое место прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную на ней точку.

- Прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку
- Плоскость, перпендикулярная данной прямой
- Плоскость, параллельная данной прямой
- Плоскость, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку

11. Что не может быть следствием аксиомы или теоремы?

- Утверждение, не требующее доказательства
- Новая теорема, для доказательства которой использованы некоторые положения первоначальной
- Утверждение, непосредственно выводимое из аксиомы или теоремы
- Ни один из вышеперечисленных вариантов не подходит

12. Почему, если одна из прямых, проходящих через точку, лежащую вне заданной прямой, параллельна этой прямой, то другие прямые, проходящие через эту точку, не могут быть ей параллельны? Укажите неправильный ответ на этот вопрос.

- Это противоречит аксиоме параллельных прямых
- Любая другая прямая, если она также параллельна заданной, совпадает с первой
- Все другие прямые имеют точку пересечения с заданной прямой, хотя она может находиться на сколь угодно большом расстоянии от исходной точки
- Ни один из вышеперечисленных вариантов не подходит

13. Три точки, одинаково удалённые от некоторой прямой и лежащие по одну сторону от неё, лежат:

- На разных прямых

- На одной прямой
- На двух прямых

14. Любые перпендикуляр и наклонная к некоторой прямой всегда:

- Пересекаются
- Лежат параллельно
- Совпадают

15. Через любые 3 точки, не лежащие на одной прямой можно провести:

- Плоскость
- Окружность
- Треугольник
- Ни один из вариантов ответа не является правильным

Система оценивания тестирования: Каждое задание оценивается в 1 балл.

Отметка «5»: 13–15 баллов

Отметка «4»: 10–12 баллов

Отметка «3»: 7–9 баллов

Отметка «2»: 0–6 баллов

Обучающиеся, получившие отметки 4 и 5 допускаются для дальнейшего изучения элективного курса геометрии Лобачевского, остальным будет предложена повторная попытка или выбор другого элективного курса.