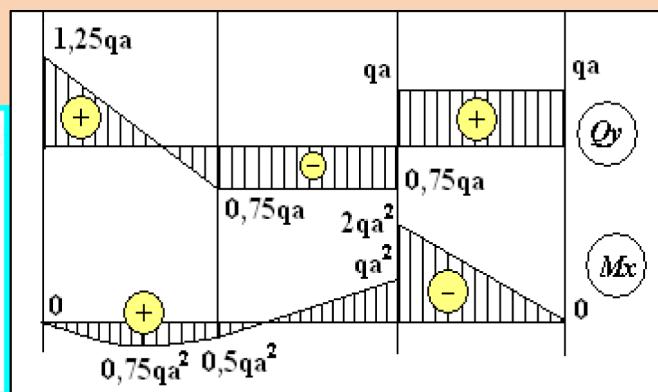
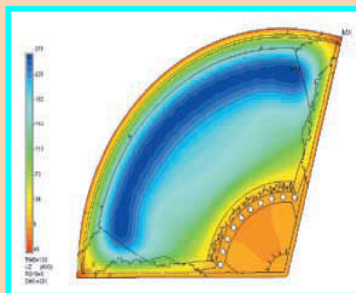


И.В. Богомаз  
Е.А. Степанов

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

*Электронное издание*



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева»

**И.В. Богомаз**  
**Е.А. Степанов**

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ**

Учебно-методическое пособие

*Электронное издание*

КРАСНОЯРСК  
2021

УДК 531  
ББК 22.21я.73  
Б 743

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Красноярского государственного педагогического университета  
им. В.П. Астафьева

**Рецензенты:**

Доктор технических наук, профессор

*В.В. Москвичев*

Кандидат технических наук, доцент

*Е.А. Чабан*

**Богомаз И.В., Степанов Е.А.**

Б 743 Основы теории прочности: учебно-методическое пособие / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2021. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux, Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-543-6

Подробно представлены расчеты статически определимых систем, основы расчета на прочность и жесткость при растяжении (сжатии), чистом и поперечном изгибе, сложном сопротивлении бруса. Адресовано студентам неинженерных специальностей педагогических вузов, учителям математики, физики и технологии средней общеобразовательной школы.

УДК 531  
ББК 22.21я.73

ISBN 978-5-00102-543-6

© Красноярский государственный  
педагогический университет  
им. В.П. Астафьева, 2021  
© Богомаз И.В., Степанов Е.А., 2021

## Оглавление

Введение .....	3
<b>Глава 1. Деформируемое твердое тело</b>	
1.1. Общие сведения. Изучаемые объекты. Гипотезы .....	8
1.2. Основные типы опорных закреплений. Вычисление реакций опор .....	12
1.3. Метод сечений. Виды сопротивлений бруса. Построение эпюр .....	25
1.4. Общий порядок построения эпюр .....	27
1.5. Построение эпюр продольных сил $N$ при растяжении (сжатии) бруса .....	28
<b>Глава 2. Механические свойства материалов</b>	
2.1. Упругая и пластическая деформация металлов .....	36
2.2. Краткие сведения о некоторых конструкционных материалах .....	38
2.3. Испытание на растяжение пластичных материалов .....	40
2.4. Определение характеристик прочности .....	40
2.5. Диаграмма растяжения хрупких материалов .....	45
2.6. Испытание материалов на сжатие .....	45
2.7. Влияние различных факторов на механические характеристики материалов .....	48
<b>Глава 3. Методы расчетов на прочность</b>	
3.1. Основные задачи расчетов на прочность .....	50
3.2. Расчет по допускаемым напряжениям .....	50
3.3. Расчет по разрушающим (предельным) нагрузкам .....	51
3.4. Расчет по предельным состояниям .....	52
<b>Глава 4. Осевое растяжение (сжатие)</b>	
4.1. Напряжения в поперечных сечениях в балках и стержнях .....	55
4.2. Перемещения. Условие жесткости .....	58
4.3. Расчеты на прочность и жесткость .....	60
<b>Глава 5. Геометрические характеристики плоских сечений</b>	
5.1. Статические моменты плоскости сечения. Центр тяжести .....	73
5.2. Осевые моменты инерции сечений .....	75
5.3. Радиусы инерции .....	76
5.4. Моменты инерции относительно параллельных осей .....	76
5.5. Моменты инерции простых фигур .....	78
5.6. Примеры вычисления центральных моментов инерции .....	80
<b>Глава 6. Плоский (поперечный) изгиб бруса</b>	
6.1. Построение эпюр внутренних усилий при изгибе .....	87
6.2. Основные понятия .....	102
6.3. Нормальное напряжение в сечении при плоском (поперечном) изгибе .....	105
6.4. Касательное напряжение в сечении при поперечном изгибе бруса. Формула Журавского .....	108
6.5. Расчеты на прочность при плоском изгибе .....	113
6.6. Расчет балок на жесткость .....	127
<b>Глава 7. Сдвиг. Расчеты на срез и смятие</b>	
7.1. Чистый сдвиг .....	132
7.2. Понятие о срезе и смятии .....	134



<b>Глава 8. Кручение</b>	
8.1. Основные понятия .....	146
8.2. Вычисление крутящих моментов .....	146
8.3. Построение эпюры крутящего момента $M_x$ .....	148
8.4. Напряжения при кручении круглого бруса .....	151
8.5. Расчеты на прочность при кручении .....	154
8.5. Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении .....	155
<b>Глава 9. Сложное сопротивление бруса</b>	
9.1. Основные понятия .....	157
9.2. Плоский и пространственный кривой изгиб .....	157
9.2.1. Нормальные напряжения при кривой изгибе .....	159
9.2.2. Нейтральная линия при кривой изгибе .....	160
9.2.3. Расчеты на прочность при кривой изгибе .....	161
9.3. Внецентренное сжатие бруса .....	163
9.3.1. Основные понятия и допущения .....	163
9.3.2. Нормальные напряжения при внецентренном сжатии .....	164
9.3.3. Нейтральная линия при внецентренном сжатии .....	166
9.3.4. Ядро сечения .....	167
9.3.5. Порядок расчета на прочность при внецентренном сжатии .....	169
Библиографический список .....	174
Приложение .....	175

## Введение

Повышать познавательный интерес, мотивацию к самообразованию, общекультурную эрудицию, расширять кругозор школьников невозможно без высокопрофессионального уровня педагога. *«Страшная это опасность – безделье за партией; безделье шесть часов ежедневно, безделье месяцы и годы. Это развращает, морально калечит человека, и ни школьная бригада, ни школьный участок, ни мастерская – ничто не может возместить того, что упущено в самой главной сфере, где человек должен быть труженником – в сфере мысли».*

Один из способов повышения профессионального уровня современного учителя может базироваться на том, что математические и естественно-научные предметные области нужно рассматривать в логико-содержательных связях в содержании и структуре изложения учебного материала. Содержание и структура изложения этих предметных областей могут быть объединены при решении задач общими определениями, понятиями, принципами и законами, а также единым соотношением эмпирического и теоретического уровней научного обоснования конкретной практической деятельности и ее результатов.

**История.** История развития механики твердого тела связана с именем Роберта Гука (1635–1703), сформулировавшего в 1676 г. закон деформирования упругих тел. В результате поставленных экспериментов Гук заключил: *«Каково удлинение, такова и сила»*, или в современной трактовке *«Деформация пропорциональна нагрузке»*. Однако и в этот период развитие механики связано с решением чисто технических проблем, поставленных практикой строительства. Но в начале XIX в. наука о прочности приобретает теоретический характер. Труды Навье (1785–1836), Лямэ (1797–1886) и др. осветили многие вопросы проблем прочности, углубили теоретические знания и заложили тот фундамент, на котором выросла стройная теория механики деформируемого твердого тела (МДТТ). В этот период были сформулированы основные допущения (гипотезы) и даны расчетные уравнения. Наука интересовалась прочностью материалов, но еще не давала ответа на вопрос о том, как рассчитывать сооружения. По выражению А. Лява, ученые этого периода *«интересовались скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом»*.

Особо отметим вклад российских ученых в науку о *сопротивлении материалов*. Следует назвать имена Л. Эйлера (1707–1783), члена Петербургской академии наук (занимался расчетом сжатых стержней на устойчивость); Д.И. Журавского (1821–1891) (получил формулу для определения касательных напряжений при изгибе, которой пользуются и в настоящее время); Ф.С. Ясинского (1856–1899) (занимался проблемой устойчивости упругих систем и дал наиболее полное обоснование расчетов на устойчивость). В начале XX в. появляются работы проф. И.Г. Бубнова (1872–1919), акад. А.Н. Крылова (1863–1945) и др., посвященные разработке расчетных методов для решения задач сопротивления материалов. Они развили методы анализа напряжений в теории корабельных кон-

струкций. А.Н. Крылов занимался проблемой колебаний кораблей, Н.Г. Бубнов – теорией изгиба прямоугольных пластин и, кроме того, опубликовал первые монографии по теории конструкций кораблей. Большой вклад в развитие СМ внес *С.П. Тимошенко* (1878–1972), автор учебников и научных работ по вопросам расчета сооружений на прочность и колебания.

В XX в. наиболее значительные работы были выполнены акад. *Н.Н. Давиденковым* (1879–1963) (теории прочности), акад. АН УССР *С.В. Серенсеном* (1905–1977) (исследовал прочность деталей при переменных нагрузках). Особо следует отметить работы чл.-корр. АН СССР *В.З. Власова* (1906–1958) по расчету тонкостенных стержней и оболочек, чл.-корр. АН СССР *Н.С. Стрелецкого* (1885–1967), сформулировавшего метод расчета по предельным состояниям строительных конструкций. Важные исследования по вопросам проблем прочности выполнены акад. *Ю.Н. Работновым* (1914–1984), чл.-корр. РАН *А.А. Ильюшиным*, акад. НАН Украины *Г.С. Писаренко*, акад. РАН *В.В. Болотиным*, чл.-корр. РАН *Н. А. Махутовым* и др. советскими учеными.

В настоящее время принято считать, что МДТТ, включающая в себя ряд дисциплин, завершила свое научное формирование и идет процесс более глубокого исследования уже намечившихся путей развития. Особо следует остановиться на механике разрушения (МР), которая возникла в 1950–1970-х гг. Причем, если границы других ветвей МДТТ определились достаточно четко, то этого не скажешь в отношении МР, в рамках которой требуется объединение усилий не только механиков и физиков, но и физико-химиков. Основные перспективы развития МДТТ следует связывать, прежде всего, с механикой разрушения, т. к. именно она занимается центральной проблемой разрушения.

К механике деформируемых твердых тел относятся такие дисциплины, как теоретическая и аналитическая механика, сопротивление материалов (СМ), теория упругости, механика машин и конструкций, теории пластичности и ползучести и ряд других.

Различие между СМ и другими дисциплинами заключается в первую очередь в подходе к решению задач. Наука о СМ носит *экспериментально-теоретический инженерный* характер, и ее развитие тесно связано с развитием техники и, таким образом, практической деятельностью человека. Трудно сказать, когда человеку впервые пришла мысль о прочности окружающих его вещей, но нет сомнения, что произошло это в доисторические времена. Первобытный человек сталкивался с разрушением своих жилищ, орудий труда, оружия, и вся его борьба с природой всегда была связана с представлениями о прочности. На первых порах осознание прочности было интуитивным. Со временем накапливались знания, учитывались ошибки и удачи. Это был период развития механики только на основе практического опыта, обобщение которого формулировалось в виде эмпирических правил. Несомненно, что строители древнейших сооружений только на базе опыта ранее возведенных сооружений назначали размеры новых сооружений такими, что они оказывались достаточно прочными.

В начале XIX в. наука о СМ приобретает теоретический характер. Труды *Навье* (1785–1836), *Лямэ* (1797–1886) и др. осветили многие вопросы проблем прочности, углубили теоретические знания и заложили тот фундамент, который изучается в СМ. В этот период были сформулированы основные допущения (гипотезы) и даны расчетные уравнения. Наука исследовала прочные характеристики материалов, рассчитывала на прочность строительные сооружения, элементы машин и механизмов.

В настоящее время принято считать, что СМ завершила свое научное формирование и идет процесс более глубокого исследования уже наметившихся путей развития.

# Глава 1. ДЕФОРМИРУЕМОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО

---

## 1.1. Общие сведения. Изучаемые объекты. Гипотезы

Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) носит *экспериментально-теоретический инженерный* характер, и ее развитие тесно связано с развитием техники и практической деятельностью человека.

Изменение размеров и формы тела под действием внешних сил называется деформацией. Деформации связаны с перемещениями точек, линий и плоскостей твердого тела. Различают упругие деформации, исчезающие после снятия внешнего воздействия, и пластические (или остаточные) деформации, остающиеся после снятия нагрузок.

Основное значение для решения этих задач имеет установление связи между силами, действующими на тело, и его деформациями. Данный вопрос является предметом механики деформируемого твердого тела (МДТТ), которая представляет собой комплекс технических дисциплин – сопротивление материалов, строительная механика, теории упругости, пластичности и ползучести, механика разрушения, экспериментальная механика. В этом комплексе сопротивление материалов является основополагающей дисциплиной, без знания которой невозможно создание надежных инженерных конструкций и сооружений.

К основам теории прочности относится раздел под названием «Сопротивление материалов» – *наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений*.

В сопротивлении материалов изучают основные виды деформаций твердого тела: растяжение или сжатие, изгиб, кручение, сдвиг (или срез).

*Прочность* – способность конструкции и ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку, не разрушаясь.

*Жесткость* – способность конструкций и их элементов противостоять под действием внешних нагрузок чрезмерным деформациям (изменению формы и размеров).

*Устойчивость* – способность конструкций и их элементов *сохранять определенную начальную форму упругого равновесия*.

Проведение расчетов на прочность, жесткость, устойчивость, как правило, осуществляется на стадии проектирования конструкций и сооружений. *Основные задачи* сводятся:

- к установлению *оптимальных размеров и форм* элементов конструкций и деталей машин;
- выбору *конструкционных материалов*, обеспечивающих надежную работу конструкции в течение заданного срока в соответствии с требованиями долговечности и с учетом реальных условий эксплуатации.

## Основные гипотезы и принципы сопротивления материалов

Для построения теории сопротивления материалов принимают ряд гипотез и принципов.

1. *Гипотеза сплошности материала.* Считается, что материал непрерывно заполняет объем элемента конструкции. Теория дискретного строения вещества не принимается во внимание.

2. *Гипотеза однородности и изотропности.* Свойство *однородности* означает, что весь объем материала обладает одинаковыми механическими свойствами. *Изотропным* называется материал, у которого характеристики свойств одинаковы во всех направлениях. В противном случае его называют *анизотропным* (дерево, стеклопластики). Свойства материала одинаковы во всех точках, а в каждой точке – во всех направлениях.

3. *Гипотеза малости деформаций* (допущение об относительной жесткости материала). Предполагается, что деформации (изменение размеров и формы тела) малы по сравнению с размерами деформируемого тела. С допущением о малости деформаций тесно связан принцип начальных размеров: *при составлении уравнений статики размеры элемента после нагружения считают такими же, как и до нагружения.*



Роберт Гук  
(Robert Hooke)  
(18.07.1635–3.03.1703)

4. *Гипотеза упругости и линейной деформируемости* материала. *Упругость* – свойство тела *восстанавливать первоначальные размеры после снятия нагрузок.* Тела предполагаются *абсолютно упругими*, при этом выполняется **закон Гука**, *устанавливающий прямую пропорциональную зависимость между деформациями и нагрузками.*

Роберт Гук – английский естествоиспытатель, ученый-энциклопедист, один из отцов физики, в особенности экспериментальной. В механике Гук открыл закон пропорциональности между упругими растяжениями, сжатиями и изгибами и производящими их напряжениями.

5. *Принцип суперпозиции, или принцип независимости действия сил*, является следствием двух последних допущений. *Результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.*

*Строительная конструкция*<sup>1</sup> – часть здания или сооружения, выполняющая определенные несущие, ограждающие и (или) эстетические функции.

**Изучаемые объекты, расчетная схема.** При всем разнообразии видов элементов конструкций их можно свести к небольшому числу основных форм реальных объектов – это брус или стержень, пластины, оболочки и массивные тела.

<sup>1</sup> Технический регламент о безопасности зданий и сооружений: федер. закон № 384 [принят Гос. Думой 23 декабря 2009 г.: одобрен Советом Федерации 25 декабря 2009 г.]. М., 2010. 20 с.



Брус или стержень – тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим (длиной) (рис. 1.1, а).

Пластина – тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами – шириной и длиной (крышки резервуаров, перекрытия сооружений и т. д.) (рис. 1.1, б).

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами (тонкостенные резервуары, котлы, купола зданий, корпуса судов, обшивка фюзеляжа) (рис. 1.1, в).

Массивное тело, у которого все три размера одного порядка (фундаменты сооружений, подпорные стенки) (рис. 1.1, г).

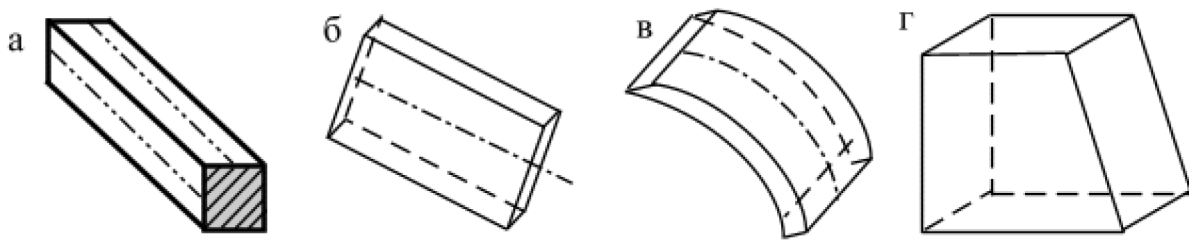


Рис. 1.1

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, с приложением действующих нагрузок, носит название расчетной схемы. При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в геометрию реального объекта. Основной упрощающий прием заключается в приведении элементов конструкции к типовым геометрическим схемам.

Большинство строительных сооружений – пространственные. Однако строительная конструкция по характеру действующих на нее нагрузок и виду составляющих ее частей может быть при расчете представлена рядом плоскостных систем, в которых один размер мал по сравнению с двумя другими. Пример железнодорожного моста через Енисей. Мост был сооружен русскими рабочими и техниками под руководством инженера Евгения Карловича Кнорре по проекту профессора Императорского Московского Технического Училища Лавра Проскурякова. Строительство начато в 1895 г. и завершено 28 марта 1899 г. (рис. 1.2).



Рис. 1.2

**Расчетная схема<sup>2</sup>** – модель конструктивной системы, используемая при проведении расчетов.

Расчетная схема моста может быть разложена на следующие плоскостные системы: на ряд поперечных сечений  $AA'BB'$ , толщина которых принимается равной единице длины (рис. 1.3, а).

<sup>2</sup> Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения: СТО 36554501-014-2008: введ. в действие 23.09.2008. М.: Строительство, 2008. 16 с.

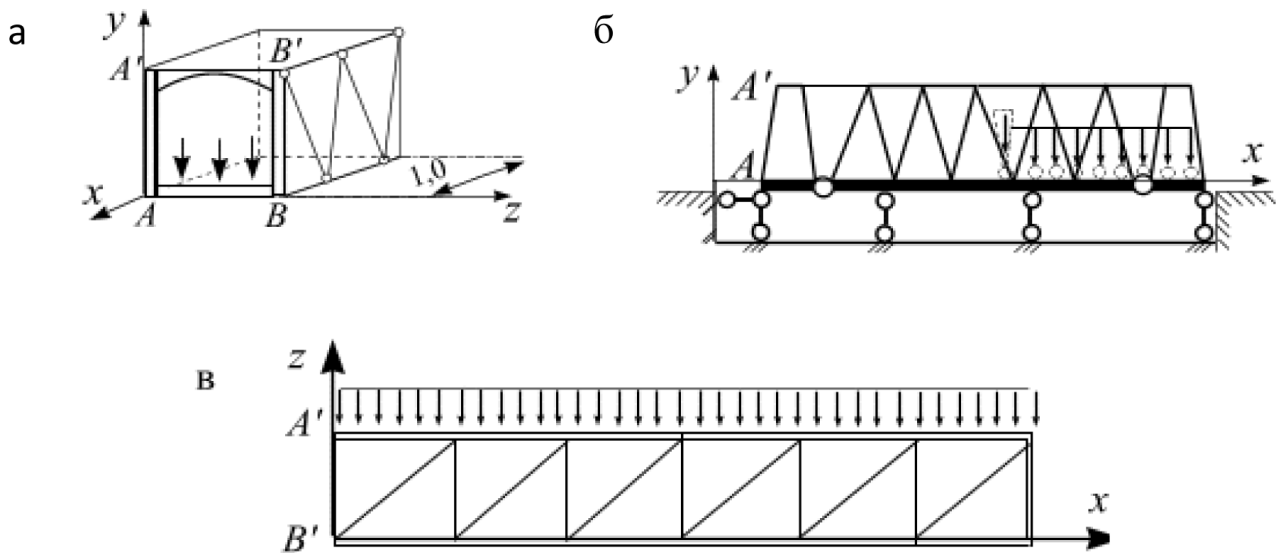


Рис. 1.3

1. На две вертикальные плоские фермы  $AA'$  и  $BB'$  с нагрузкой от собственного веса и веса поезда (рис. 1.3, б).

2. На горизонтальную ферму (в) с нагрузкой от давления ветра (рис. 1.3, в).

Строительные конструкции, которые не могут быть разложены на плоскостные системы, рассматриваются пространственными системами, например, купольные конструкции



Рис. 1.4

(*cupola* – купол, свод) – пространственная несущая конструкция покрытия. Например, собор Санта Мариа дель Фиоре во Флоренции (рис. 1.4).

Основной объект расчета – брус (или стержень) – твердое тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. *Продольная ось бруса* (ось  $z$ ) – геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений.

## Классификация нагрузок

**Внешние силы.** Имеются различные способы приложения нагрузок. Для большинства целей достаточно их различать:

- по *характеру распределения сил*;
- по *характеру действия сил*.

К нагрузкам, различаемым по *характеру распределения сил*, относятся объемные нагрузки, поверхностные нагрузки, погонные нагрузки и сосредоточенные силы.

*Объемные нагрузки* – приложенные ко всем частицам объема рассматриваемого тела (собственный вес, силы инерции). Интенсивность объемных нагрузок =

$$\frac{\text{сила}}{\text{длина}^3} \left( \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right).$$



*Поверхностные нагрузки* – распределенные по поверхности, например, давление, передаваемое жидкостью на стенки сосудов. Интенсивность поверхностных нагрузок =  $\frac{\text{сила}}{\text{длина}^2} \left( \frac{H}{\text{м}^2} \right)$ .

*Погонные нагрузки* – распределенные на протяжении длины, например, собственный вес стержня, распределенный по его длине. Интенсивность распределенной нагрузки =  $\frac{\text{сила}}{\text{длина}} \left( \frac{H}{\text{м}} \right)$ .

Сосредоточенные силы рассматриваются приложенными к точке. Это – приближенное представление силы, передаваемой через площадку, размеры которой малы по сравнению с расстоянием до этой площадки. Интенсивность сосредоточенной силы = *сила* (H).

К нагрузкам, различаемым по *характеру действия сил*, относятся непродолжительные и продолжительные статические нагрузки, повторные и динамические нагрузки.

**Внутренние силы** – результат действия одних частей тела на другие. Они существуют и при отсутствии внешних силовых воздействий как результат взаимодействия частиц тела. Но под действием внешних сил в материале возникают дополнительные внутренние силы, сопровождающие деформацию. Эти силы и определяются в задачах сопротивления материалов. Для определения внутренних сил применяется *метод сечений*.

## 1.2. Основные типы опорных закреплений. Вычисление реакций опор

Различают четыре основных типа опорных устройств плоских систем: гибкая связь (стержень невесомый), шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная опоры и жесткое закрепление.

**I. Гибкая невесомая нерастяжимая нить. Невесомый стержень, шарнирно закрепленный по концам.** Связь в виде гибкой невесомой нерастяжимой нити (*троса, каната* и т. д.) или *невесомого стержня, шарнирно закрепленного по концам* (рис. 1.5, а), не дает телу удаляться от точек подвеса в единственном направлении – вдоль нити или стержня.

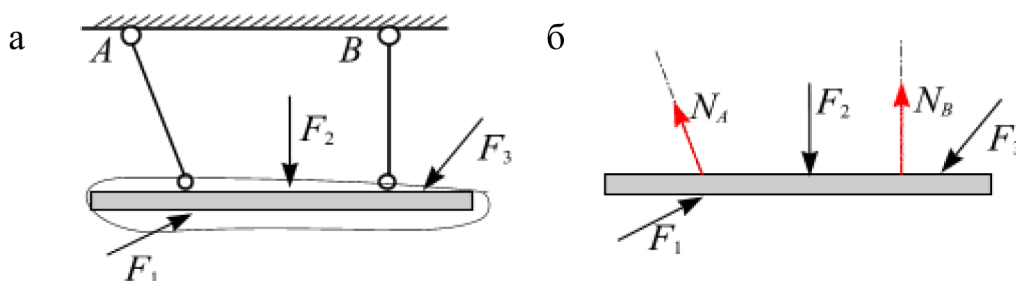


Рис. 1.5

**Вычисление реакций опор гибких связей.** При составлении уравнений равновесия *применяется принцип неизменности начальных размеров* – не учитываются изменения в точках приложения внешних сил, которые возникают за счет

деформации твердого тела. Способы вычисления опорных реакций известны из теоретической механики.

По возможности, порядок записи уравнений равновесия заданной системы сил составляется так, чтобы система уравнений «распалась» на три независимых уравнения относительно неизвестных реакций опор.

Чтобы направить силы реакций гибких связей, необходимо выделить замкнутой кривой тело, равновесие которого рассматривается, отбросить гибкие связи, заменяя при этом их действие силами – реакциями связей ( $N_A$  и  $N_B$ ). Направлять эти реакции связей нужно вдоль нитей (стержня) от рассматриваемого тела (рис. 1.5, б).

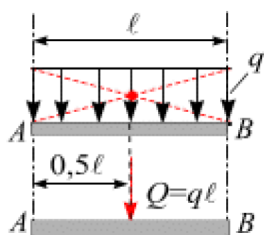


Рис. 1.6

**Справка.** Пусть на участке  $AB$ , длина которого  $l$  (рис. 1.6), равномерно распределена нагрузка интенсивностью  $q$ .

Равнодействующая  $Q$  направлена параллельно равномерно распределенной нагрузке, приложена в середине участка  $AB$  и равна:  $Q = q \cdot l$ .

**Пример 1.1.** Абсолютно жесткий брус  $BC$  поддерживается тремя невесомыми стержнями и загружен заданными нагрузками (рис. 1.7, а).

Вычислить реакции опор гибких связей. *Дано:*  $a = 1,2$  м;  $b = 0,8$  м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $F = 42$  кН;  $q = 20$  кН/м.

**Решение.** Перейдем от заданного объекта к расчетной схеме (рис. 1.7, б). Для этого выделим жесткий брус  $BC$ , отбросим связи и заменим их действие реакциями:  $N_1, N_2, N_3$ .

Заменим равномерно распределенную нагрузку  $q$  сосредоточенной силой:

$$Q = q \cdot b = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ кН};$$

разложим силу  $F$  на ее проекции:

$$F_x = F \cos 30^\circ = 42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 36,4 \text{ кН};$$

$$F_y = F \sin 30^\circ = 42 \cdot \frac{1}{2} \approx 21 \text{ кН}.$$

Начертим расчетную схему (рис. 1.7, б).

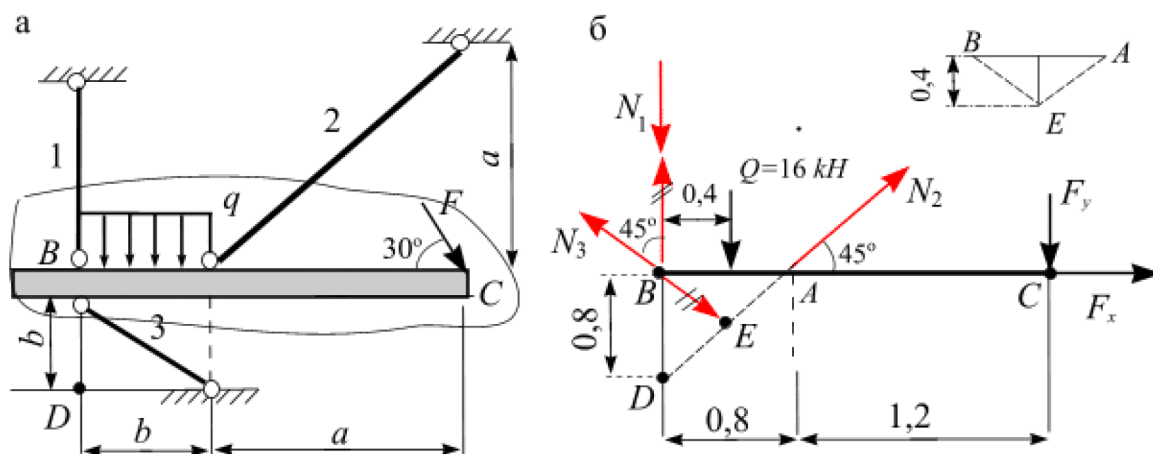


Рис. 1.7

Приступим к вычислению реакций опор  $N_1, N_2, N_3$ . Для этого нужно определить положение соответствующих моментных точек.

**Справка.** Способ моментной точки применяется главным образом в тех случаях, когда направления линий действий неизвестных реакций опор пересекаются попарно. Точку пересечения линий действия двух реакций называют моментной точкой (или точкой Риттера). Составляя последовательно уравнения моментов относительно полученных моментных точек, получаем систему уравнений, решение которых позволяет вычислить неизвестные реакции.

1. Моментная точка для вычисления внутреннего усилия  $N_2$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_1$  и  $N_3$ . Этой точкой является точка  $B$ .  
Запишем уравнение моментов относительно точки  $B$ :

**Справка.** Момент – это сила, умноженная на плечо!

$$\sum M_B = 0, \quad \underbrace{-Q \cdot 0,4}_{\text{сила}} + \underbrace{N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 0,8}_{\text{сила} \cdot \text{плечо}} - \underbrace{F_y \cdot 2}_{\text{сила} \cdot \text{плечо}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot 0,4 + N_2 \cdot 0,7 \cdot 0,8 - 21 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{1}{0,56} (6,4 + 42) \approx 86,4 \text{ кН}.$$

2. Моментная точка для вычисления внутреннего усилия  $N_3$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_1$  и  $N_2$ . Этой точкой является точка  $D$ .  
Запишем уравнение моментов относительно точки  $D$ :

$$\sum M_D = 0, \quad -Q \cdot 0,4 - N_3 \cdot \sin 45^\circ \cdot 0,8 - F_y \cdot 2 - F_x \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot 0,4 - N_3 \cdot 0,7 \cdot 0,8 - 21 \cdot 2 - 36,4 \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 = -\frac{1}{0,56} (6,4 + 42 + 29,1) \approx -138,4 \text{ кН}.$$

Меняем на расчетной схеме направление этой реакции.

3. Моментная точка для вычисления внутреннего усилия  $N_1$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_2$  и  $N_3$ . Этой точкой является точка  $E$ .  
Запишем уравнение моментов относительно точки  $E$ :

$$\sum M_E = 0, \quad -N_1 \cdot 0,4 - Q \cdot 0 - F_y (1,2 + 0,4) - F_x \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -N_1 \cdot 0,4 - 21 \cdot 1,6 - 36,4 \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow N_1 = -\frac{1}{0,4} (33,6 + 14,6) \approx -120,4 \text{ кН}.$$

Меняем на расчетной схеме направление этой реакции.

Проверка (рис. 1.8):

$$\sum F_{ix} = \cos 45^\circ \cdot (-N_3 + N_2) + F_x = 0,7(-138,4 + 86,4) + 36,4 \approx 0;$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = \sum F_{iy} &= -N_1 + N_3 \cdot \cos 45^\circ - Q + N_2 \cdot \sin 45^\circ - F_y = \\ &= -120,5 + 138,6 \cdot 0,7 - 16 + 86,4 \cdot 0,7 - 21 = 0. \end{aligned}$$

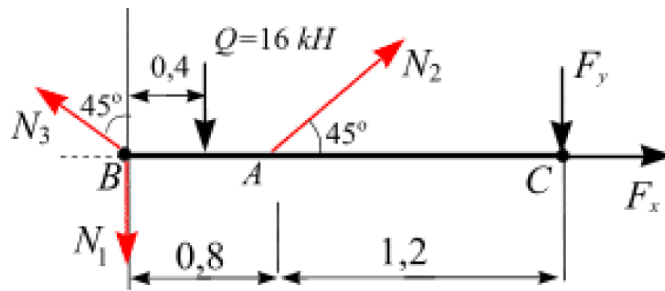


Рис. 1.8

Внутренние усилия в стержнях вычислены верно.

Ответ:

$$N_1 = 120,4 \text{ кН};$$

$$N_2 = 86,4 \text{ кН};$$

$$N_3 = 138,4 \text{ кН}.$$

**Пример 1.2.** Жесткий брус  $CD$ , деформацией которого можно пренебречь, поддерживается тремя невесомыми стержнями и нагружен равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 1.9, а).

Дано:  $F = 50 \text{ кН/м}$ ,  $a = 0,8 \text{ м}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

Вычислить реакции опор гибких связей.

**Решение.** Перейдем от заданного объекта к расчетной схеме. Выделим жесткий брус  $CD$ , заменим рассеченные стержни реакциями  $N_1, N_2, N_3$ , соответственно, разложим силу  $\bar{F}$  на проекции  $F_x$  и  $F_y$ :

$$F_x = F \cos 60^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ Н}; \quad F_y = F \sin 60^\circ = 50 \cdot 0,87 = 43,5 \text{ Н}.$$

Вычертим расчетную схему конструкции и укажем на ней размеры, реакции опор и проекции внешней силы (рис. 1.9, б).

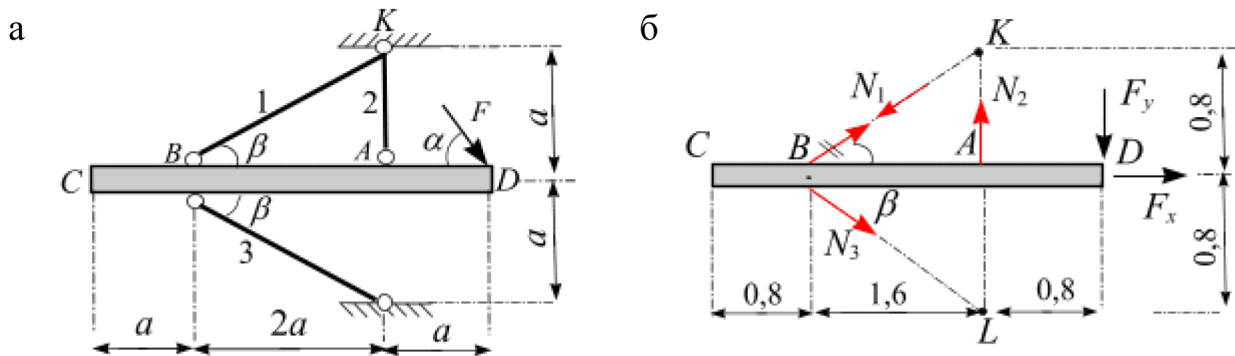


Рис. 1.9

Из геометрии задачи (рис. 1.10) вычислим тригонометрические функции угла  $\beta$ :

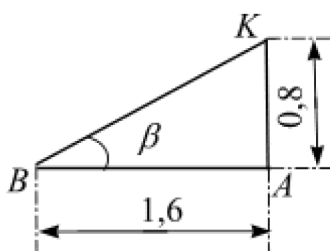


Рис. 1.10

$$\Delta ABK \Rightarrow BK = \sqrt{(1,6)^2 + (0,8)^2} = 0,8\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{0,8}{0,8\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447; \\ \cos \beta = \frac{1,6}{0,8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,894. \end{cases}$$

Запишем уравнения равновесия и вычислим реакции гибких связей в стержнях.

1. Моментной точкой для вычисления  $N_2$  является точка  $B$ : точка пересечения линий действия двух сил:  $N_1$  и  $N_3$ . Тогда:

$$\sum M_B = 0, \quad \underbrace{-F_y}_{\text{сила}} \cdot \underbrace{(0,8+1,6)}_{\text{плечо}} + \underbrace{N_2}_{\text{сила}} \cdot \underbrace{1,6}_{\text{плечо}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{F_y \cdot (0,8+1,6)}{1,6} = \frac{43,5 \cdot 2,4}{1,6} \approx 65,25 \text{ кН.}$$

2. Моментной точкой для вычисления  $N_3$  является точка  $K$  (рис. 1.9, б):

$$\sum M_K = 0, \quad N_3 \cdot 0,8 \cdot \cos \beta + N_3 \cdot 1,6 \cdot \sin \beta - F_y \cdot 0,8 + F_x \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 (\cos \beta + 2 \sin \beta) - F_y + F_x = 0 \Rightarrow$$

$$N_3 = \frac{F_y - F_x}{(\cos \beta + 2 \sin \beta)} = \frac{43,5 - 25}{(0,894 + 2 \cdot 0,447)} = \frac{18,5}{1,79} \approx 10,34 \text{ кН.}$$

3. Моментной точкой для вычисления  $N_1$  является точка  $L$  (рис. 1.9, б):

$$\sum M_L = 0, \quad -N_1 \cdot 0,8 \cdot \cos \beta - N_1 \cdot 1,6 \cdot \sin \beta - F_y \cdot 0,8 - F_x \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 (\cos \beta + 2 \sin \beta) + F_y + F_x = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = -\frac{F_y + F_x}{(\cos \beta + 2 \sin \beta)} = -\frac{43,5 + 25}{1,79} \approx -38,3 \text{ кН.}$$

Проверка (рис. 1.11):

$$\sum F_x = \cos \beta \cdot (-N_1 + N_3) + F_x = 0,894(-38,3 + 10,34) + 25 \approx 0;$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -N_1 \cdot \sin \beta - N_3 \cdot \sin \beta + N_2 - F_y = \sin \beta (-N_1 + N_3) N_2 - F_y = \\ &= -0,446(38,3 + 10,3) + 62,25 - 43,5 \approx 0. \end{aligned}$$

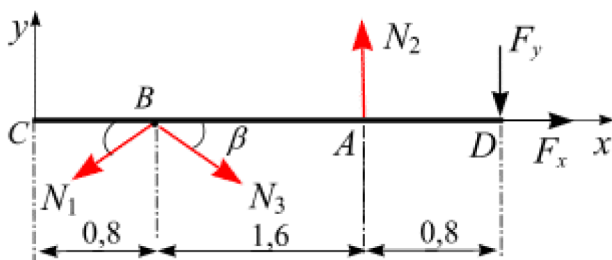


Рис. 1.11

Ответ:

$$N_1 = 21,4 \text{ кН;}$$

$$N_2 = 14,5 \text{ кН;}$$

$$N_3 = 21,4 \text{ кН.}$$

**Пример 1.3.** Жесткий брус поддерживается тремя стержнями и нагружен постоянными нагрузками  $m$  и  $q$  (рис. 1.12, а). Вычислить реакции опор гибких связей. Дано:  $m = 44 \text{ кНм}$ ,  $q = 42 \text{ кН/м}$ ,  $a = 0,8 \text{ м}$ .

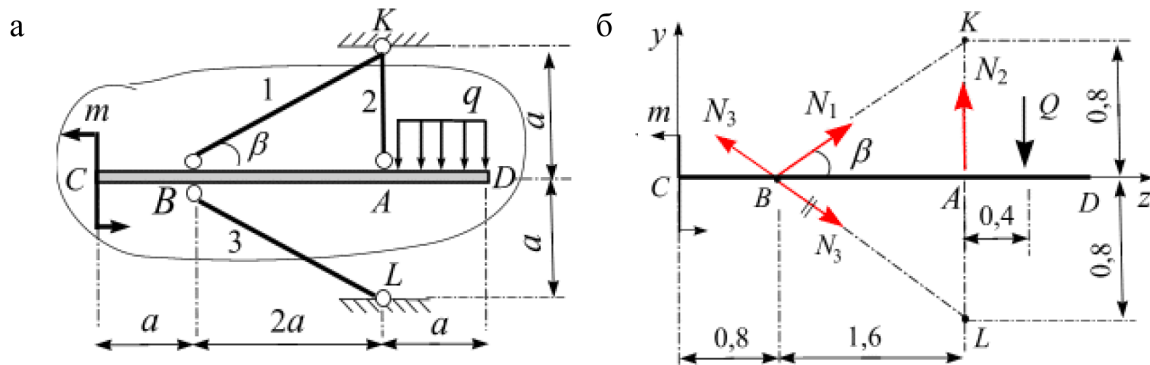


Рис. 1.12

**а**

**б**

**Справка.** Система сил  $\bar{F}, \bar{F}'$ , состоящая из двух параллельных сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной линии действия, называется *парой сил* (рис. 1.13, а). Будем называть пару сил, создаваемую силами, *сосредоточенным моментом* и обозначать его дуговой стрелкой в направлении вращения балки (рис. 1.13, б):  $m = F \cdot d$ .

Рис. 1.13

Студенты часто совершают ошибку, умножая внешний сосредоточенный момент  $m$ , приложенный к балке, на плечо. Покажем, что (рис. 1.13, а):

$$\sum M_B = F(h+a) - F' \cdot a = [F=F'] = F \cdot h = m.$$

**Решение.** Перейдем от заданного объекта к расчетной схеме (рис. 1.12, б). Для этого выделим жесткий брус  $CD$ , отбросим связи и заменим их действие реакциями:  $N_1, N_2, N_3$ .

Заменим равномерно-распределенную нагрузку  $q$  сосредоточенной силой:  
 $Q = q \cdot a = 42 \cdot 0,8 = 33,6 \text{ кН}$ .

Начертим расчетную схему (рис. 1.12, б).

Из геометрии задачи вычислим тригонометрические функции угла  $\beta$  (рис. 1.13):

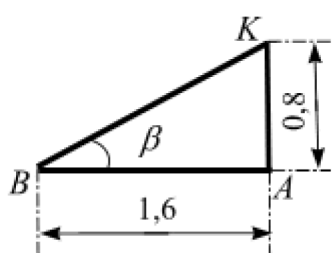


Рис. 1.13

$$\Delta BAK : BK = \sqrt{(1,6)^2 + (0,8)^2} = 0,8\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{0,8}{0,8\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447 \approx 0,45; \\ \cos \beta = \frac{2 \cdot 0,8}{0,8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894 \approx 0,89. \end{cases}$$

Приступим к вычислению реакций опор  $N_1, N_2, N_3$ . Для этого нужно определить положение соответствующих моментных точек.

1. Моментная точка для вычисления реакции  $N_2$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_1$  и  $N_3$ . Этой точкой является точка  $B$ .

Запишем уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B = 0$$

$$m + N_2 \cdot 1,6 - Q \cdot (0,4 + 1,6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 44 + N_2 \cdot 1,6 - 33,6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{1}{1,6}(-44 + 67,2) = 14,5 \text{ kH};$$

2. Моментная точка для вычисления реакции  $N_3$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_1$  и  $N_2$ . Этой точкой является точка  $K$ :

$$\sum M_K = 0$$

$$m + N_3 \cdot 0,8 \cdot \cos \beta + N_3 \cdot 1,6 \cdot \sin \beta - Q \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 44 + N_3 \cdot (0,8 \cdot 0,89 + 1,6 \cdot 0,45) - 33,6 \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow$$

$$N_3 = \frac{-44 + 13,4}{0,71 + 0,72} = -\frac{30,6}{1,43} \approx -21,4 \text{ kH}.$$

Меняем на расчетной схеме направление этой реакции.

3. Моментная точка для вычисления внутреннего усилия  $N_1$  будет лежать на пересечении линий действия двух сил:  $N_2$  и  $N_3$ . Этой точкой является точка  $L$ .

Запишем уравнение моментов относительно точки  $L$ :

$$\sum M_L = 0$$

$$m - N_1 \cdot 0,8 \cdot \cos \beta - N_1 \cdot 1,6 \cdot \sin \beta - Q \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 44 - N_1 \cdot (0,8 \cdot 0,89 + 1,6 \cdot 0,45) - 33,6 \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{44 - 13,4}{0,71 + 0,72} = \frac{30,6}{1,43} \approx 21,4 \text{ kH}.$$

Проверка (рис. 1.14):

$$\sum F_x = \cos \beta \cdot (-N_3 + N_2) = \cos \beta (-21,4 + 21,4) = 0;$$

$$\sum F_y = (N_1 + N_3) \sin \beta + N_2 - qa =$$

$$= 21,4 \cdot 0,45 + 21,4 \cdot 0,45 + 14,5 - 42 \cdot 0,8 \approx 19,26 + 14,5 - 33,6 = 0,1 \approx 0.$$

Ответ:

$$N_1 = 21,4 \text{ kH};$$

$$N_2 = 14,5 \text{ kH};$$

$$N_3 = 21,4 \text{ kH}.$$

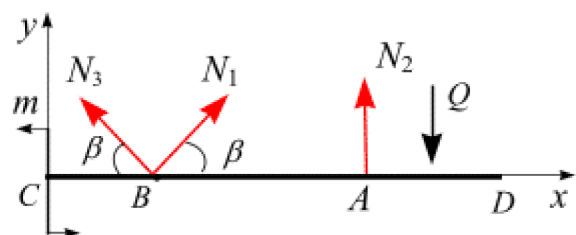


Рис. 1.14



## II. Шарнирные опоры

**Шарнирно-подвижная опора и стержень (невесомый)** – опоры с одной связью (рис. 1.15, а, б, в, г). Схематически шарнирно-подвижная опора изображается коротким стержнем с шарнирами по концам (рис. 1.15, а); в этой схеме линия действия реакции опор проходит через ось шарнира в направлении стержня. Шарнирно-подвижная опора накладывает на брус одну связь – запрещает движение в направлении стержня и не препятствует повороту бруса относительно шарнира. Встречается схема шарнирно-подвижной опоры в виде треугольника на шарнирах (рис. 1.15, б, г).

Стержень невесомый, как связь, схематически изображается удлиненным стержнем, с шарнирным закреплением по концам (рис. 1.15, в); в этой схеме направление реакции определяется направлением стержня.

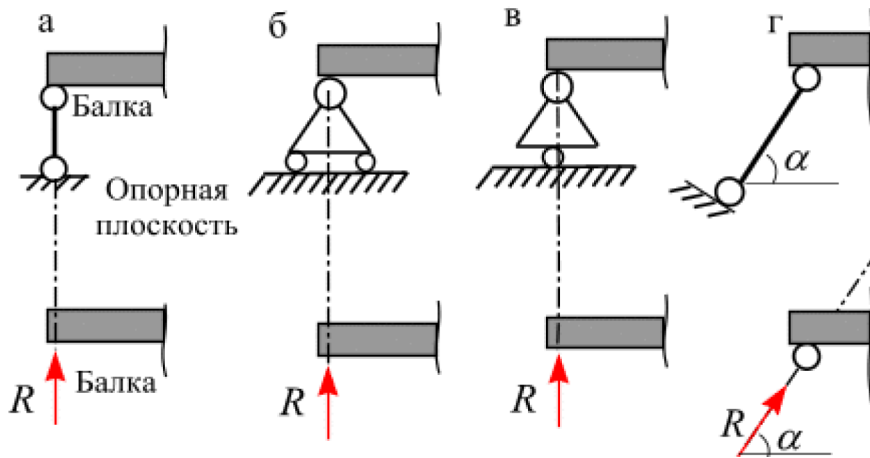


Рис. 1.15

**Шарнирно-неподвижная опора** – опора с двумя связями (рис. 1.16, а), у бруса, который опирается на нее, есть одна степень свободы – допускается поворот бруса относительно шарнира, и устраняется поступательное движение бруса в любом направлении. Шарнирно-неподвижная опора обозначается двумя опорными стержнями с шарнирами на концах – носителями двух связей.

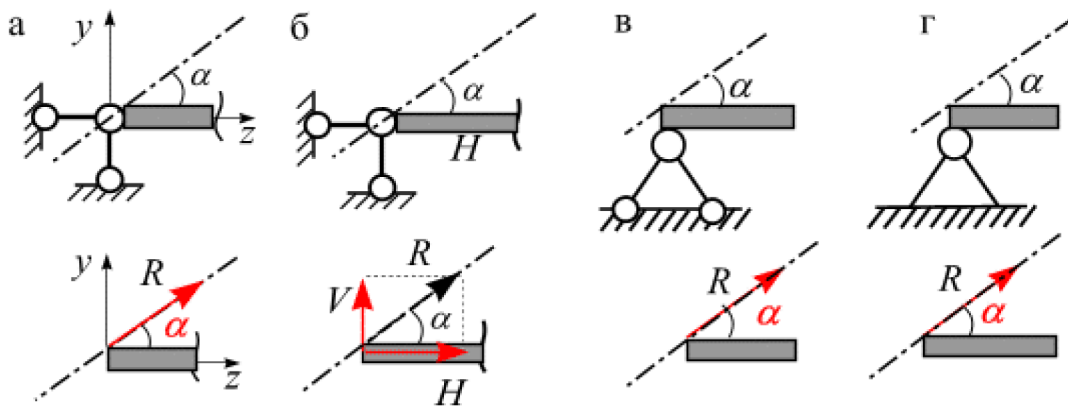


Рис. 1.16

Отбрасывая опору, заменяем ее действие реакцией  $R$ , линия действия которой проходит через ось шарнира под произвольным углом  $\alpha$ .



Реакция этой опоры содержит две неизвестные – модуль  $R$  и угол  $\alpha$ . На практике, как правило, принято раскладывать  $\bar{R}$  на два ортогональных направления: горизонтальное  $H$  и вертикальное  $V$  (рис. 1.16, б). Тогда:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2}, \quad \cos \alpha = \frac{H}{R}.$$

Встречаются шарнирные опоры в виде треугольников, соединенных шарнирами (рис. 1.17, а, б).

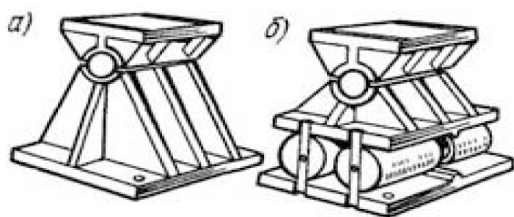


Рис. 1.17

Примерами шарнирно-неподвижных и подвижных опор могут служить балансирные опорные части из стального литья, применяемые в мостах и других сооружениях больших пролетов. Пролетные строения опираются на опоры через опорные части, которые позволяют ему поворачиваться и продольно перемещаться при температурных воздействиях и изгибе под нагрузкой.

При этом для однопролетных балок с одной стороны пролета устанавливают неподвижные, а с противоположной – подвижные опорные части (рис. 1.18):  $A$  – шарнирно-подвижная опора,  $B$  – шарнирно-неподвижная опора.

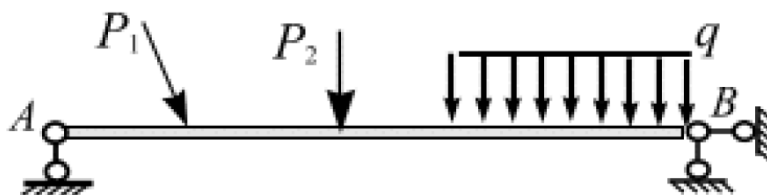


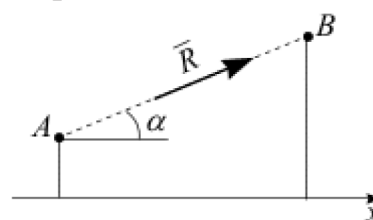
Рис. 1.18

**Вычисление реакций опор шарнирно-опертых балок.** Удобно применять уравнения равновесия в виде основной формы:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_A(F_i) = 0, \\ \sum M_B(F_i) = 0, \\ \sum F_x = 0. \end{cases}$$

Здесь суммы моментов сил системы относительно двух моментных точек  $A$  и  $B$  равны нулю и сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через моментные эти точки, была равна нулю.

За моментные точки « $A$ » и « $B$ » часто выбирают точки пересечения линий действия неизвестных реакций опор или шарниры.



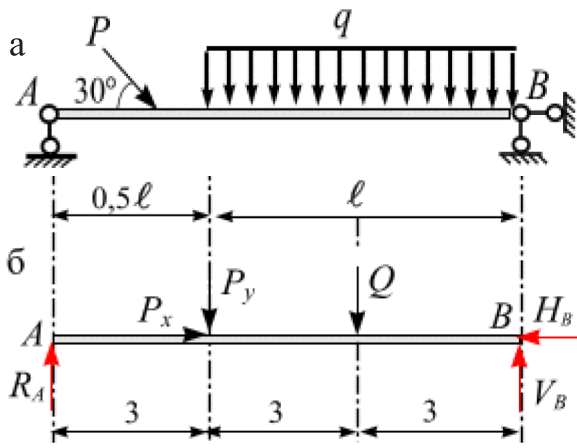


Рис. 1.19

**Пример 1.4.** Вычислить реакции опор балки  $AB$ , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры и нагруженной, как показано на рис. 1.19, а.

Дано:  $P = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $\ell = 6 \text{ м}$ .

**Решение.** Сформируем расчетную схему. Для этого, используя метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 1.19, б). Разложим силу  $P$  на составляющие  $P_x$  и  $P_y$ :

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,87 \approx 8,7 \text{ кН}.$$

За точки приведения примем точки на шарнирах балки, т. е. точку  $A$  (точка пересечения линий действий реакции опор  $R_A$  и  $H_B$ ) и точку  $B$  (точка пересечения линий действий реакции опор  $V_B$  и  $H_B$ ). Запишем уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0, \\ \sum F_{ix} = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_B(3+3+3) - Q(3+3) - P_y \cdot 3 = 0, \\ -R_A(3+3+3) + P_y(3+3) + Q \cdot 3 = 0, \\ P_x - H_B = 0. \end{array} \right. \quad (\text{a})$$

Здесь  $Q = q \cdot \ell = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН}$ .

Подставляя числовые значения и решая систему уравнений (а), получим:

$$R_A = \frac{1}{9}(Q \cdot 3 + P_y \cdot 6) = \frac{1}{9}(12 \cdot 3 + 5 \cdot 6) \approx 7,3 \text{ кН};$$

$$V_B = \frac{1}{9}(Q \cdot 6 + P_y \cdot 3) = \frac{1}{9}(12 \cdot 6 + 5 \cdot 3) \approx 9,7 \text{ кН};$$

$$H_B = P_x = 8,7 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = R_A - P_y - Q + V_B = 7,3 - 5 - 12 + 9,7 = 0.$$

**Пример 1.5.** Для шарнирно-опертой консольной балки (рис. 1.20, а) требуется вычислить опорные реакции, если  $q = 1 \text{ кН/м}$ ,  $F = 2 \text{ кН}$ .

**Решение.** Мысленно выделим балку  $AB$ , отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 1.20, б).

Заменим равномерно распределенную нагрузку  $q$  сосредоточенной силой  $Q = q \cdot 6 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ кН}$ . Начертим расчетную схему (рис. 1.20, б).

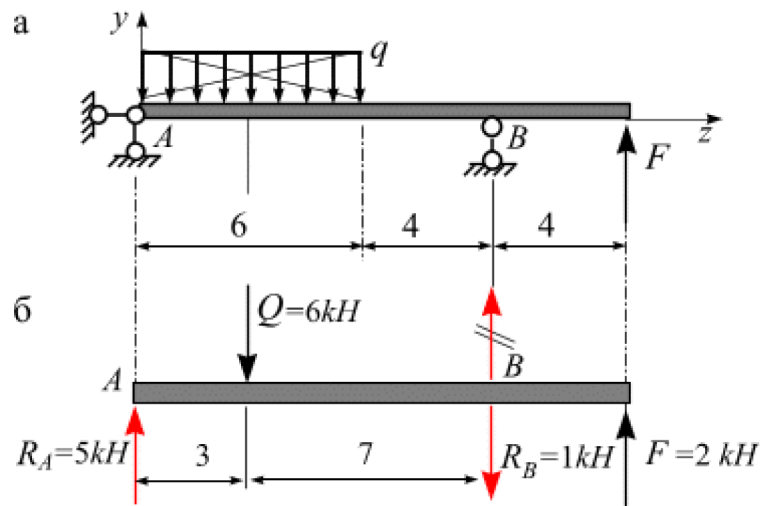


Рис. 1.20

Реакция шарнирно-подвижной опоры  $B$  направлена вдоль связи оси балки, направим ее первоначально вверх и обозначим  $R_B$ . Реакция шарнирно-неподвижной опоры  $A$  –  $R_A$  будет направлена параллельно заданным силам и реакции  $R_B$ , т. к. на балку приложена система параллельных сил.

Для вычисления реакций опор запишем уравнения равновесия. За моментные точки выбираем точки опор, т. е. точки  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A = 0, -Q \cdot 3 + R_B \cdot 10 + F \cdot 14 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{Q \cdot 3 - F \cdot 14}{10} = \frac{6 \cdot 3 - 2 \cdot 14}{10} = |-1| = 1 \text{ кН.}$$

Знак «минус» означает, что выбранное первоначально направление реакции  $R_B$  вверх является ошибочным.

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 10 + Q \cdot 7 + F \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{Q \cdot 7 + F \cdot 4}{10} = \frac{6 \cdot 7 + 2 \cdot 4}{10} = \frac{50}{10} = 5 \text{ кН.}$$

На схеме указываем численное значение реакций опор.

$$\text{Проверка. } \sum F_y = R_A - Q - R_B + F = 5 - 6 - 1 + 2 = 0.$$

$$\text{Ответ: } R_A = 5 \text{ кН, } R_B = 1 \text{ кН.}$$

**Пример 1.6.** Шарнирно-опертая двутавровая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , силой  $F=1,2 qa$  и моментом  $m=2,4 qa^2$  (рис. 1.21, а). Требуется вычислить реакции опор в долях  $qa$  и проверить их.

**Решение.** Вычерчиваем расчетную схему (рис. 1.21, б).

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 10a - F \cdot 7a - \underline{q \cdot 7a \cdot 3,5a} - m = 0;$$

$$R_B \cdot 10a - 1,2qa \cdot 7a - \underline{q \cdot 7a \cdot 3,5a} - 2,4qa^2 = 0;$$

$$R_B = \frac{8,4qa^2 + 24qa^2 + 2,4qa^2}{10a} = 3,5qa.$$

Здесь  $Q = q \cdot 7a$

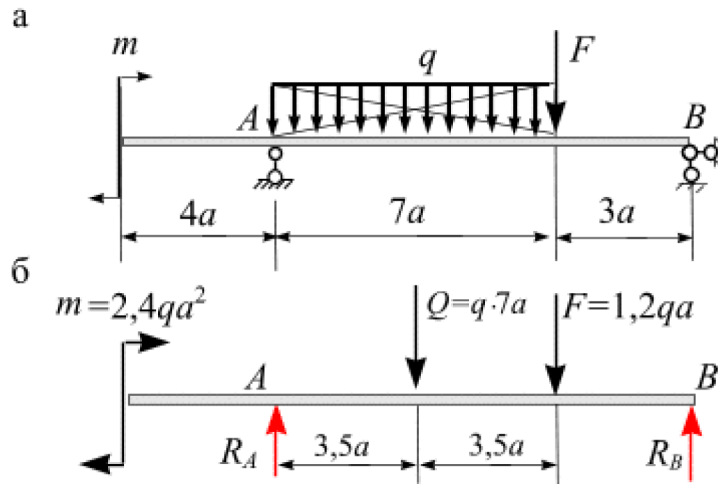


Рис. 1.21

$$\sum M_B = 0, -m - R_A \cdot 10a + q \cdot 7a \cdot 6,5a + F \cdot 3a = 0;$$

$$-2,4qa^2 - R_A \cdot 10a + q \cdot 7a \cdot 6,5a + 1,2qa \cdot 3a = 0;$$

$$R_A = \frac{-2,4 \cdot qa^2 + 45,5 \cdot qa^2 + 3,6 \cdot qa^2}{10a} = 4,67 \cdot qa.$$

Проверка:

$$\sum F_y = R_A - 7qa - 1,2qa + R_B = 3,5qa - 7qa - 1,2qa + 4,67qa = 0.$$

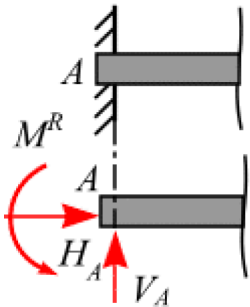


Рис. 1.22

**III. Жесткое закрепление (заделка).** В балках с заделанным концом (например, в подпорных стенках) может быть только неподвижно-плоское закрепление – жесткое закрепление (рис. 1.22).

Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре возникает реакция  $\bar{R}$ , которую раскладывают на два ортогональных направления: вертикальное ( $V_A$ ), горизонтальное ( $H_A$ ) составляющие опорной реакции

( $R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}$ ) и реактивный момент  $M_R$ .

### Вычисление реакций опор в жесткой заделке

Так, для вычисления реакций опор в жесткой заделке принят следующий порядок записи уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{yi} = 0; \\ \sum F_{xi} = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_i) = 0. \end{cases}$$

За моментную точку «А» выбирают точку закрепления.

Проверка вычисленных реакций опор, как по величине, так и по направлению, является обязательной.

**Пример 1.7.** Вычислить реакции опор в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис. 1.23, а.

Дано:  $m = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $P_1 = 12 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 20 \text{ кН}$ ,  $\ell = 2 \text{ м}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

**Решение.** Мысленно выделим балку  $AB$ , отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями. Разложим силу  $P_1$  на составляющие  $P_{1y}$  и  $P_{1x}$ :

$$P_{1y} = P_1 \sin \alpha = 12 \sin 60^\circ = 12 \cdot 0,87 = 10,44 \text{ кН};$$

$$P_{1x} = P_1 \cos \alpha = 12 \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН}.$$

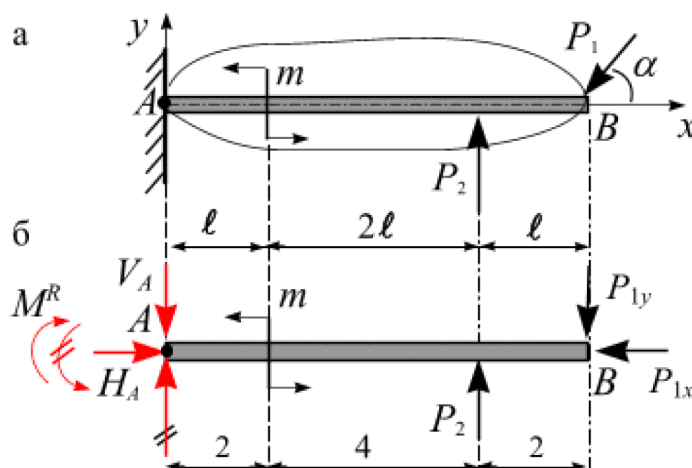


Рис. 1.23

Отбросим жесткую заделку, заменим ее действие реакциями связи, начертим расчетную схему (рис. 1.23, б).

Для вычисления реакций опор запишем следующие уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, H_A - P_{1x} = 0 \Rightarrow H_A = P_{1x} = 6 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iy} = 0, V_A - P_{1y} + P_2 = 0 \Rightarrow V_A = P_{1y} - P_2 = 10,44 - 20 = -9,6 \text{ кН};$$

Знак «минус» означает, что выбранное первоначально направление реакции  $V_A$  вверх является ошибочным.

$$\sum M_A = 0, M_R + m + P_2 \cdot 3\ell - P_y \cdot 4\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_R = -m - P_2 \cdot 3\ell + P_{1y} \cdot 4\ell = -6 - 20 \cdot 3 \cdot 2 + 10,44 \cdot 4 \cdot 2 = -42,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знаки «минусы» означают, что выбранные первоначально направления реактивного момента  $M_R$  и  $V_A$  являются ошибочными. Следует изменить на расчетной схеме направление реакции опоры  $V_A$  и реактивного момента  $M_R$  и знаки «минус» в дальнейших расчетах не учитывать!

*Проверка:*

$$\sum M_B = M_R + V_A \cdot 4\ell + m - P_2 \cdot \ell = -42,5 + 9,6 \cdot 4 \cdot 2 + 6 - 20 \cdot 2 = 0.$$

*Ответ:*  $H_A = 6 \text{ кН}$ ;  $V_A = 10,44 \text{ кН}$ ;  $M_R = 42,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

### 1.3. Метод сечений. Виды сопротивлений бруса. Построение эпюр

Под действием внешних сил происходит изменение взаимного расположения частиц, т. е. тело деформируется. При этом возникают дополнительные *внутренние силы*, которые *отражают сопротивление материала деформированию и разрушению*. Внутренние силы представляют собой результат взаимодействия структурных частиц тела, обеспечивающих его целостность. В учебном курсе «сопротивления материалов» принимают во внимание и определяют внутренние силы, которые возникают при нагружении тела внешними силами. Для определения внутренних сил применяется *метод сечений*. Для вычисления внутренних усилий, возникающих в бруске от действия внешних сил, применяется **метод сечений**.

Рассмотрим брусок, находящийся в равновесии под действием системы внешних сил  $F_1, F_2 \dots F_n$  (рис. 1.24, а). Свяжем с центром тяжести сечения  $O$  систему координат  $Oxyz$ . Ось  $z$  направим по нормали к сечению, а оси  $x$  и  $y$  расположим в его плоскости. Для определения внутренних сил производят последовательно четыре операции.

1. **Рассекают** брусок в определенном сечении воображаемой плоскостью на две части (1.24, б);

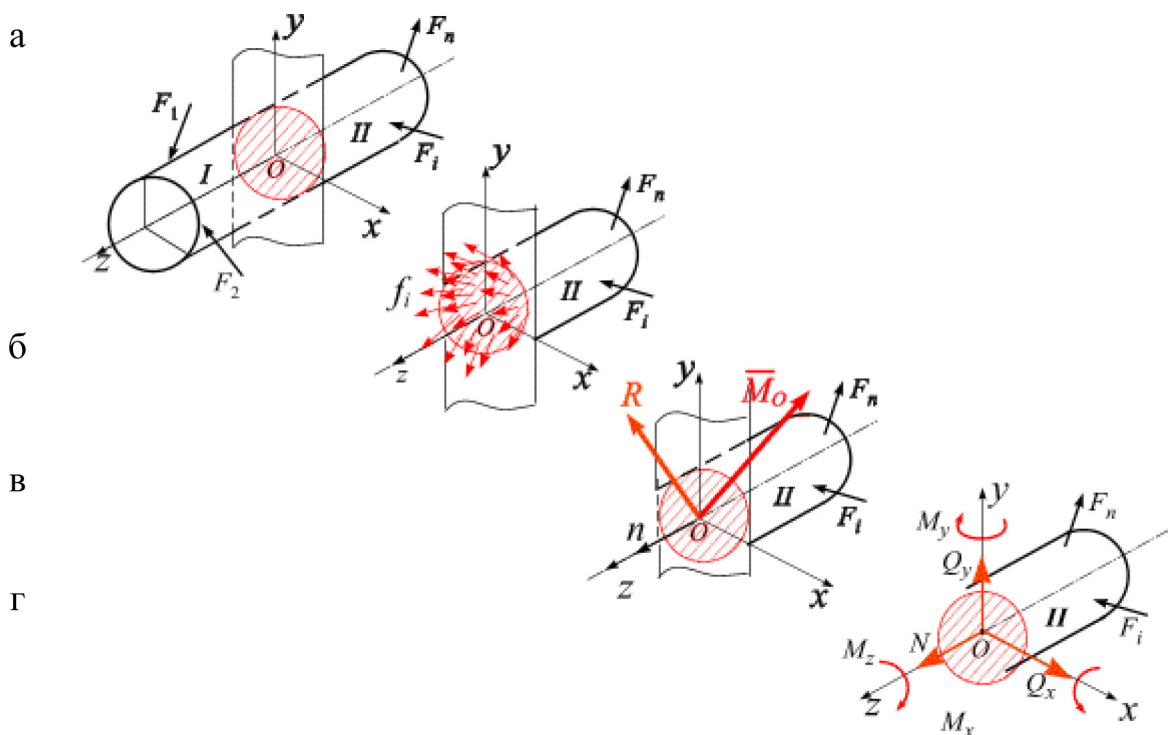


Рис. 1.24

2. **Отбрасывают** мысленно одну из образовавшихся частей (например, I).

3. **Заменяют** действие отброшенной части на оставшуюся II внутренними силами  $f_i$  (рис. 1.24, б). При этом имеют в виду, что внутренние силы приводятся к центру тяжести сечения и таким образом заменяются главным вектором  $\bar{R}$  и главным моментом  $\bar{M}$  (рис. 1.24, в). Каждый из этих двух эквивалентов внутренних сил можно представить в виде трех проекций на оси  $Oxyz$ ,

которые определяют шесть проекций внутренних усилий (или шесть силовых факторов), действующих на отсеченную часть бруса:

$N$  – продольная сила (усилие вдоль оси  $z$ );

$Q_x, Q_y$  – поперечные силы (усилия вдоль осей  $x, y$  соответственно);

$M_z$  – крутящий момент (момент относительно оси  $z$ );

$M_x, M_y$  – изгибающие моменты (моменты относительно осей  $x, y$ ).

Эти компоненты главного вектора и главного момента называются **внутренними силовыми факторами**, или **усилиями**.

**4. Уравновешивают.** Для определения внутренних усилий составляют шесть уравнений равновесия всех сил, приложенных к оставшейся части II (табл. 1).

Таблица 1

Уравнение равновесия	Внутренний силовой фактор	Вид сопротивления бруса
$\sum F_{zi} = 0$	$N = \sum_{i=1}^n F_{z \text{ отс.ч.}}$	Растяжение или сжатие
$\sum F_{xi} = 0$	$Q_x = \sum_{i=1}^n F_{x \text{ отс.ч.}}$	Сдвиг
$\sum F_{yi} = 0$	$Q_y = \sum_{i=1}^n F_{y \text{ отс.ч.}}$	Сдвиг
$\sum m_{zi} = 0$	$M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i)_{\text{отс.ч.}}$	Кручение
$\sum m_{xi} = 0$	$M_x = \sum_{i=1}^n m_x(F_i)_{\text{отс.ч.}}$	Изгиб в плоскости $Oyz$
$\sum m_{yi} = 0$	$M_y = \sum_{i=1}^n m_y(F_i)_{\text{отс.ч.}}$	Изгиб в плоскости $Oxz$

Вычисляя внутренние усилия, следует иметь в виду, что:

– продольная сила  $N$  численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось  $z$  всех внешних сил, действующих на отсеченную часть;

– поперечная силы  $Q_x$  численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось  $x$  всех внешних сил, действующих на отсеченную часть;

– поперечная силы  $Q_y$  численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось  $y$  всех внешних сил, действующих на отсеченную часть;

– крутящий момент  $M_z$  численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил относительно продольной оси  $z$ , действующих на отсеченную часть;  $M_x$  – относительно оси  $x$ ;  $M_y$  – относительно оси  $y$ .

Эти шесть усилий совместно с внешними силами, действующими на отсеченную часть бруса, должны обеспечить равновесие этой части (II). Таким образом, для каждой части бруса должны быть выполнены шесть условий равновесия для вычисления внутренних силовых факторов. Каждому из внутренних усилий соответствует простой вид сопротивления (нагружения) бруса (табл. 1).



Таким образом, **метод сечений** позволяет вычислить все внутренние усилия и моменты в любом сечении бруса при действии любой нагрузки.

При различных комбинациях простых видов нагружений (сжатие с изгибом, изгиб с кручением и др.) возникает **сложное сопротивление (нагружение)** бруса.

*Метод сечений* является основным методом СМ. Чтобы лучше запомнить порядок действий, можно пользоваться *правилом РОЗУ* (аббревиатура из первых букв выделенных слов):

**Р** – разрезают; **О** – отбрасывают; **З** – заменяют; **У** – уравнивают.

**Примечание.** Согласно третьему закону Ньютона совершенно безразлично, равновесие какой отсеченной части рассматривать, т. к. внутренние силовые факторы (внутренние усилия), приложенные к обеим отсеченным частям, равны по модулю и противоположны по знаку, т. е. *взаимны*.

#### 1.4. Общий порядок построения эпюр

Графики, показывающие изменение внутренних усилий по длине бруса при постоянном положении нагрузок, называются *эпюрами*.

Внутренние силовые факторы в разных сечениях одного и того же бруса в общем случае различны.

При переходе от реальной схемы к расчетной в большинстве случаев можно не вычерчивать брус полностью, а ограничиться изображением только его оси. Поперечное сечение получается при рассечении бруса плоскостью, в общем случае, перпендикулярное к плоскости бруса (рис. 1.25, а, б).

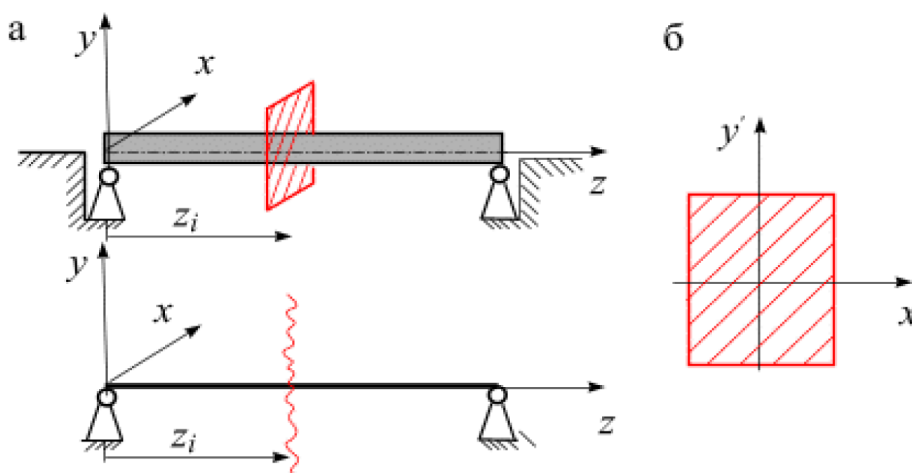


Рис. 1.25

При построении эпюр рекомендуется придерживаться следующего порядка.

1. *Находят все внешние силы, действующие на брус (внешние силы и реакции опор).* Для этого рассматривают условия равновесия бруса в целом, определяют неизвестные реакции опор (отметим, что для консоли реакции в заделке можно и не находить, если рассматривать брус со свободного конца).

2. *Разбивают брус на участки, принимая за границы участков точки приложения сил, точки изменения формы или размеров бруса, точки закрепления бруса.*



*Примечание.* Участком называется часть бруса между сосредоточенными нагрузками  $M$ ,  $F$  или часть бруса, в пределах которого распределенная нагрузка  $q$  меняется по одному закону.

3. На каждом участке проводят произвольное сечение и фиксируют его абсциссой  $z_i$  и стрелкой, которую направляют от начала участка до его конца.

4. Применяя метод сечений, для каждого участка составляют выражения для внутренних усилий (1.2).

5. Меняя значение  $z_i$ , вычисляют внутренние усилия на границах участков и в характерных сечениях.

6. Параллельно оси бруса проводят базу (ось), на которой строят эпюру.

7. Ординаты эпюры в определенном масштабе откладывают от базы (оси) по перпендикуляру и проставляют значения характерных ординат.

8. В поле эпюры ставят знак усилия и наносят штриховку линиями, перпендикулярными к базе.

Эпюры внутренних усилий, как правило, строят для того, чтобы выявить **опасные сечения**, т. е. сечения, в которых существует большая вероятность разрушения из-за того, что там внутренние усилия достигают наибольших значений.

### Свойства эпюр

1. Если внутренний силовой фактор на каком-либо участке остается *постоянным* (не зависит от координаты  $z$ ), то на данном участке *эпюра параллельна базе эпюры*.

2. Если внутренний силовой фактор является *линейной функцией* (наклонная линия), то для построения эпюры достаточно вычислить два значения – в начале и в конце данного участка и соединить полученные значения прямой.

3. Если внутреннее усилие на данном участке определяется *квадратичной функцией*, то для построения эпюры достаточно вычислить значения на границах участка, для выявления  $M_{max}$  на эпюре вычисляют координаты вершины параболы. При построении эпюры на данном участке вычисленные ординаты соединяют кривой второго порядка, т. е. квадратичной параболой, причем выпуклость параболы должна быть обращена в сторону действия распределенной нагрузки. Это правило паруса.

*Примечание.* Произвольные сечения бруса на схемах изображают волнистыми линиями.

## 1.5. Построение эпюр продольных сил $N$ при растяжении (сжатии) бруса

Рассмотрим в этом параграфе примеры построения эпюр продольной силы  $N$ . При этом все внешние силы действуют вдоль оси бруса  $z$ . В этом случае в поперечных сечениях бруса возникает только одно внутреннее усилие – продольная сила  $N(z)$ . Рассмотрим случай, когда на участок бруса  $z_i$  приложена сосредоточенная сила  $F$  (рис. 1.26, а или б).

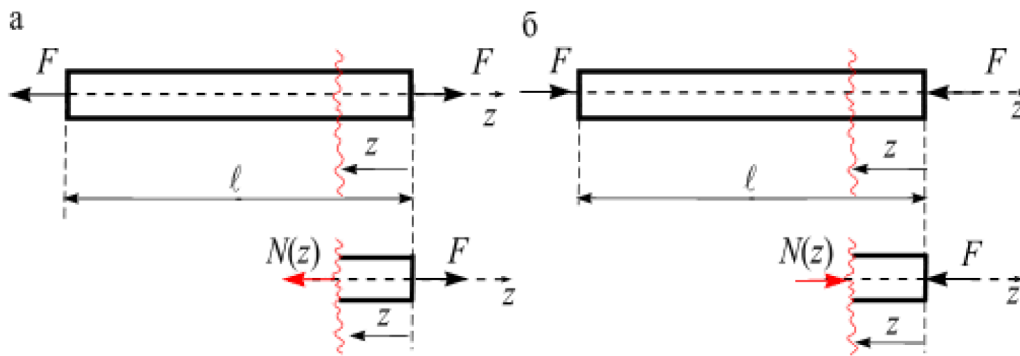


Рис. 1.26

Общая формула, по которой можно вычислить величину продольной силы  $N(z_i)$ , когда на рассматриваемый участок бруса  $z_i$  приложены несколько сосредоточенных сил  $F_{zi}$ , имеет вид:

$$N(z_i) = \sum F_{zi}.$$

Рассмотрим случай, когда на участок  $z_i$  приложены сосредоточенные внешние силы, где  $F_{zi}$  и распределенные силы  $q_z$  (рис. 1.27, а).

### Правило знаков для $N$

Продольная сила считается *положительной*, если она вызывает *деформацию растяжения* отсеченной части (внутреннее усилие направлено от сечения (рис. 1.26, а), и *отрицательной*, если она вызывает *деформацию сжатия* (внутреннее усилие направлено к сечению (рис. 1.26, б). Рассмотрим общий случай нагрузки (рис. 1.27).

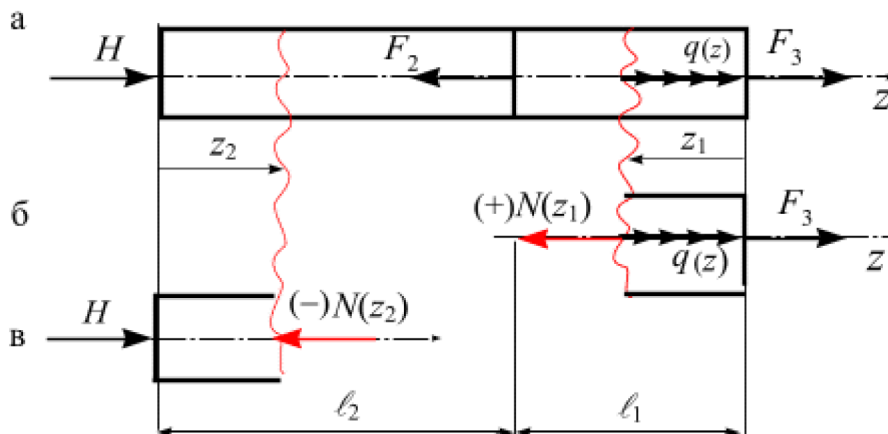


Рис. 1.27

Общая формула, по которой можно вычислить величину продольной силы  $N(z_i)$  в произвольном поперечном сечении бруса (рис. 1.27, б), имеет вид:

$$N(z_1) = F_3 + \int_0^{z_1} q \cdot dz = F_3 + q \cdot z_1,$$

где  $F_3$  – внешние сосредоточенные силы,  $q$  – постоянная интенсивность внешних распределенных сил, приложенные на рассматриваемом участке  $z_1$ .

Величина *продольного усилия*  $N(z_i)$  в  $i$ -том сечении численно равна *алгебраической сумме* проекций на ось  $z$  всех *внешних сил*, действующих на отсеченную часть бруса ( $F_z$  и  $q(z)$ ), взятых со знаком «плюс», если они направлены от сечения, или «минус», если направлены к сечению.

### Правила контроля построения эпюры $N$

1. Эпюру рекомендуют проверять (читать) от свободного конца стержня, тогда можно четко проследить нагружение бруса.
2. В сечении, где приложена *внешняя сила*, на эпюре продольных сил  $N$  возникает *скачок*, высота которого равна величине этой силы.
3. На участках, не нагруженных *распределенной нагрузкой*, эпюра  $N$  ограничена *прямыми, параллельными базисной линии*.
4. На участке, где действует *линейно-распределенная нагрузка*  $q(z)$ , усилие  $N$  изменяется по *линейному закону* и ограничено *наклонной прямой*.

**Пример 1.8.** Для бруса (рис. 1.28) построить эпюру продольных сил:

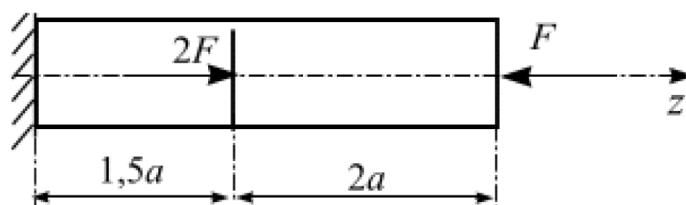


Рис. 1.28

**Решение.** Вычислять реакции опор в заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы  $N(z_i)$  учитываем внешние силы со стороны свободного конца консоли.

Разделим брус на 2 участка (рис.1.29, а) согласно заданному нагружению. Проведем произвольное поперечное сечение на каждом из участков и вычислим значения продольной силы  $N_i(z_i)$ :

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 2a$  (рис. 1.29, б):

$$N_1(z_1) = -F.$$

Продольная сила  $N_1$  *постоянна* на всем участке и вызывает сжатие всего I участка ( $N_1(z_1) < 0$ ).

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 1,5a$  (рис. 1.29, в):

$$N_2(z_2) = -F + 2F = F.$$

Продольная сила *постоянна* на всем участке и вызывает растяжение всего II участка ( $N_2(z_2) > 0$ ).

Строим эпюру продольных сил. Для этого проведем параллельно оси бруса ось эпюры  $O - O$  (базис) и перпендикулярно к ней в выбранном масштабе отложим вычисленные значения  $N(z_i)$  (рис. 1.29, д): положительные значения откладываем вверх, отрицательные – вниз. Соединяем полученные точки прямыми линиями и, проставив знаки в поле эпюры, заштриховываем линиями, перпендикулярными базисной линии.

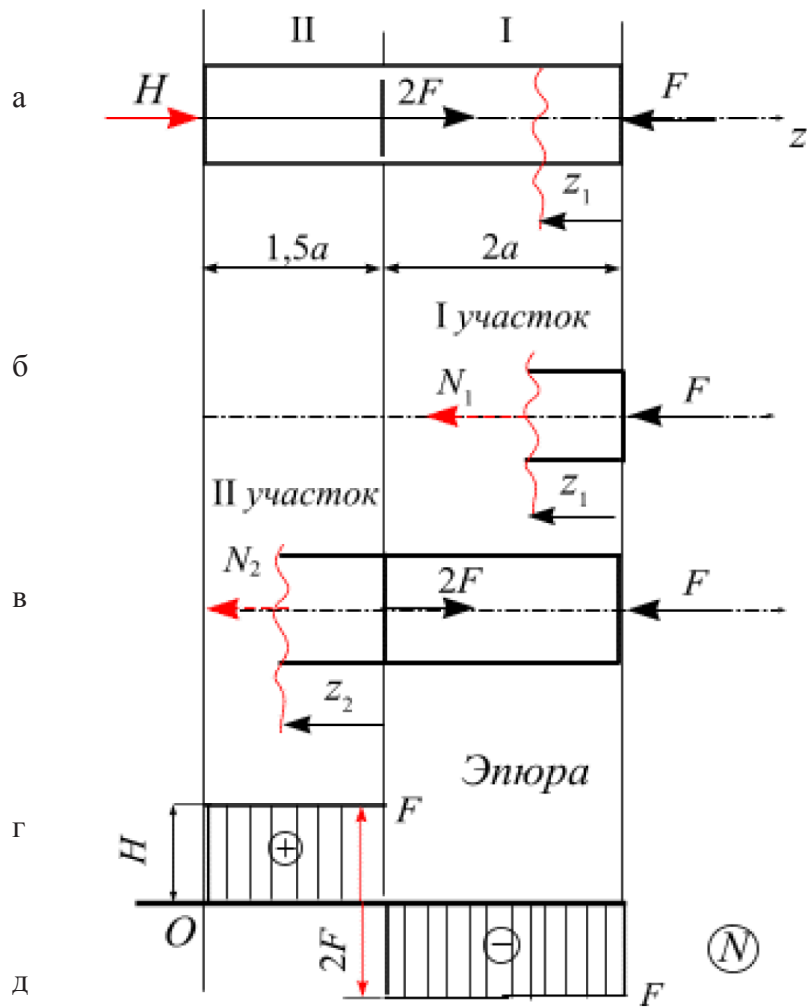


Рис. 1.29

**Пример 1.9.** Для бруса (рис. 1.30) построить эпюру продольных сил.

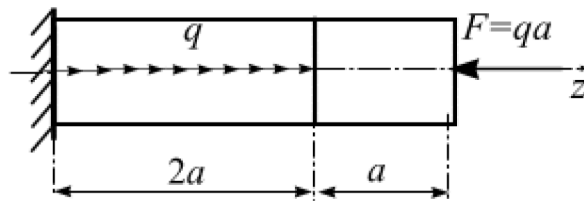


Рис. 1.30

**Решение.** Вычислять реакции опор в заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы  $N(z_i)$  учитываем внешние силы со стороны свободного конца консоли.

Разделим брус на 2 участка (рис.1.31, а) согласно заданному нагружению. Проведем произвольное поперечное сечение на каждом из участков и вычислим значения продольной силы  $N_i(z_i)$ :

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$  (рис. 1.31, б):

$$N_1(z_1) = -F = -qa.$$

Продольная сила  $N_1$  постоянна на всем участке и вызывает сжатие I-го участка ( $N_1(z_1) < 0$ ).

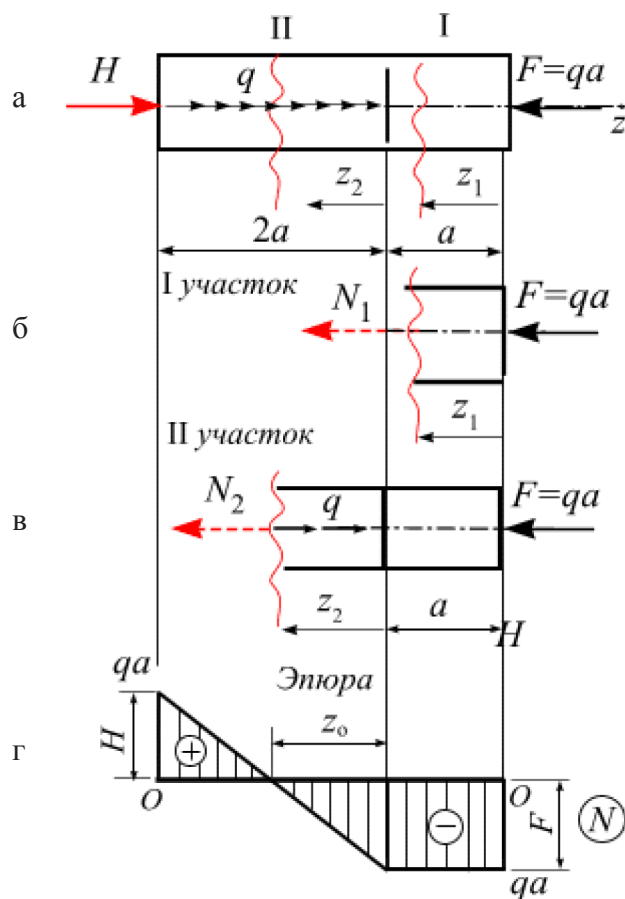


Рис. 1.31

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$  (рис. 1.31, в):

$$N_2(z_2) = -F + qz_2 \Rightarrow \begin{cases} N_2|_{z_2=0} = -F = -qa; \\ N_2|_{z_2=2a} = -F + q \cdot 2a = -qa + 2qa = qa; \\ N_2(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{F}{q}. \end{cases}$$

Продольная сила  $N_2$  изменяется *линейно* на этом участке:

- при  $0 \leq z_0 \leq \frac{F}{q}$  участок длиной  $z_0 + a = \frac{F}{q} + a$  сжат ( $N_2(z_2) < 0$ );
- при  $\frac{F}{q} \leq z_2 \leq 2a$  участок длиной  $2a - z_0 = 2a - \frac{F}{q}$  растянут ( $N_2(z_2) > 0$ ).

Вычислив значения продольной силы  $N(z)$  на каждом участке, строим эпюру продольных сил. Для этого проведем параллельно оси бруса ось эпюры  $O - O$  (базис) и перпендикулярно к ней в выбранном масштабе отложим вычисленные значения  $N(z_i)$  (рис. 1.31, г): положительные значения откладываем вверх, отрицательные – вниз. Соединяем полученные точки прямыми линиями и, проставив знаки в поле эпюры, заштриховываем линиями, перпендикулярными базисной линии.

**Пример 1.10.** Для ступенчатого бруса (рис. 1.32) построить эпюру продольных сил  $N$ . Дано:  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 2 \text{ кН/м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ .

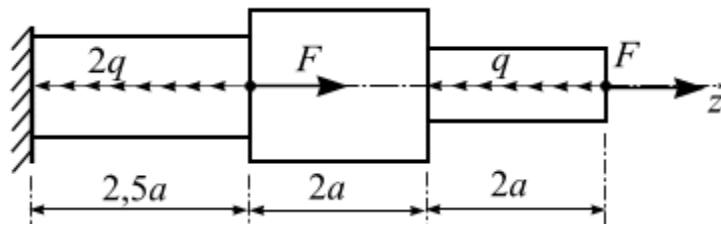


Рис. 1.32

**Решение.** Разделим брус на три участка, согласно заданному нагружению и изменению площади поперечного сечения. Проводя поперечное сечение на каждом участке бруса, вычислим значения внутренних усилий  $N(z_i)$  (рис.1.33, а):

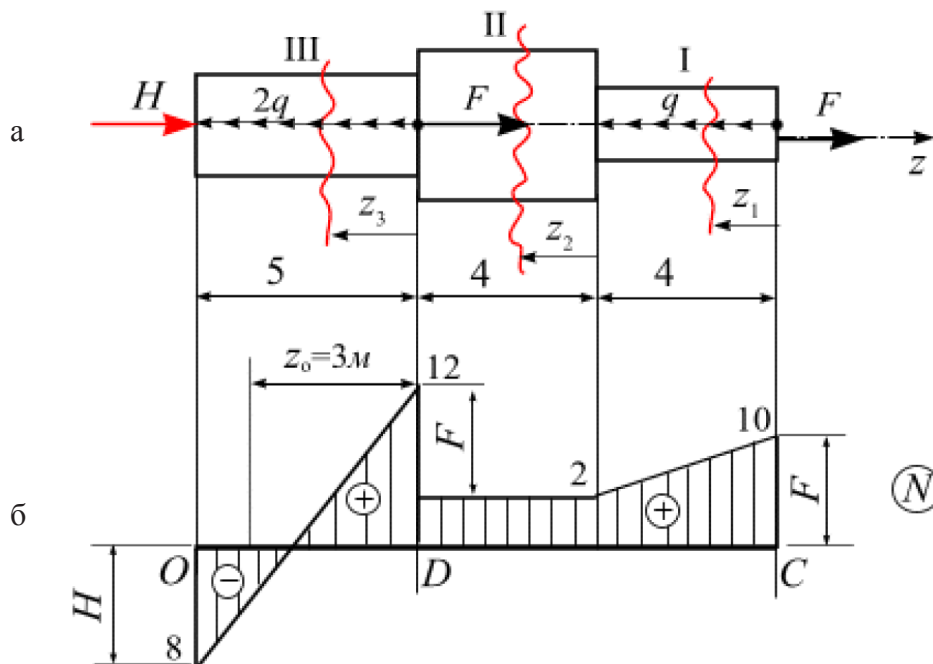


Рис. 1.33

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$ :

$$N(z_1) = F - qz_1 \Rightarrow \begin{cases} N_1|_{z_1=0} = F = 10 \text{ кН}; \\ N_1|_{z_1=4} = F - q \cdot 4 = 10 - 2 \cdot 4 = 2 \text{ кН}. \end{cases}$$

Продольная сила  $N(z_1)$  меняется линейно (функции первого порядка).

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$ :

$$N(z_2) = F - q \cdot 4 = 10 - 2 \cdot 4 = 2 \text{ кН}.$$

Продольная сила  $N_2$  постоянна на всем втором участке.

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq 5 \text{ м}$ :

$$N(z_3) = F - q \cdot 4 + F - 2q \cdot z_3 = 10 - 2 \cdot 4 + 10 - 2qz_3 = 12 - 2qz_3.$$

Продольная сила  $N(z_3)$  меняется линейно (функции первого порядка).

$$N(z_3) = 12 - 2qz_3 = 12 - 2 \cdot 2z_3 = 12 - 4z_3 \Rightarrow \begin{cases} N|_{z_3=0} = 12 \text{ кН}; \\ N|_{z_3=2,5a} = 12 - 4 \cdot 5 = -8 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$N = 0 \Rightarrow 12 - 4z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{12}{4} = 3 \text{ м}.$$

Имеем:

- при  $0 \leq z_3 \leq 3 \text{ м}$  участок растянут ( $N_3(z_3) > 0$ ),
- при  $3 \text{ м} \leq z_3 \leq 5 \text{ м}$  участок сжат ( $N_3(z_3) < 0$ ).

По вычисленным значениям строим эпюру  $N$  (рис. 1.33, б). Откладываем полученные значения на границах участков и соединяем полученные точки прямыми линиями.

Проверим эпюру, используя правила контроля:

– размер и направление скачков на эпюре в сечениях бруса  $C$  и  $D$  соответствуют приложенным растягивающим внешним силам  $F = 10 \text{ кН}$ . Скачок в жесткой заделке соответствует реакции  $H$ .

$$\text{Проверим: } \sum F_{zi} = 0, H - 2q \cdot 5 + F - q \cdot 4 + F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = 2q \cdot 5 - F + q \cdot 4 - F = 4 \cdot 5 - 10 + 2 \cdot 4 - 10 = -8 \text{ кН}.$$

**Примечание.** При переходе от одного участка к другому изменение площади сечения на величине продольной силы не сказывается.

### Учет собственного веса

а

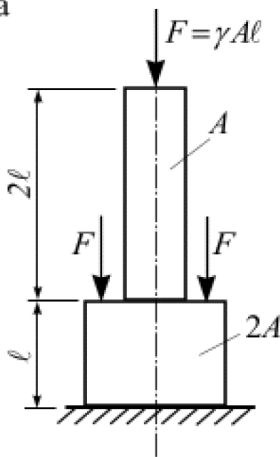


Рис. 1.34

**Пример 1.11.** Для ступенчатого бруса (рис. 1.34) построить эпюру продольных сил с учетом действия собственного веса бруса при заданных условиях: удельный вес материала бруса  $\gamma$ ,  $F = \gamma A \ell$ .

**Решение.** Собственный вес вертикального бруса можно рассматривать как продольную (осевую) внешнюю нагрузку, равномерно распределенную вдоль оси бруса, интенсивность которой будет равна:  $q = \gamma A_i$ , где  $A_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го участка.

Расчетная схема показана на рис. 1.35, б.

Выделим на брусе два участка.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 2\ell$ .

Интенсивность распределенной нагрузки на этом участке  $q_1 = \gamma A$ ;

$$N(z_1) = -F - q_1 z_1 = -\gamma A \ell - \gamma A z_1 = -\gamma A (\ell + z_1).$$

Продольная сила  $N(z_1)$  вызывает сжатие первого участка и является линейной функцией. Имеем:

$$N(z_2) = -\gamma A (5\ell + 2z_2) \Rightarrow \begin{cases} N|_{z_2=0} = -5\gamma A \ell; \\ N|_{z_2=\ell} = -\gamma A (5\ell + 2\ell) = -7\gamma A \ell. \end{cases}$$

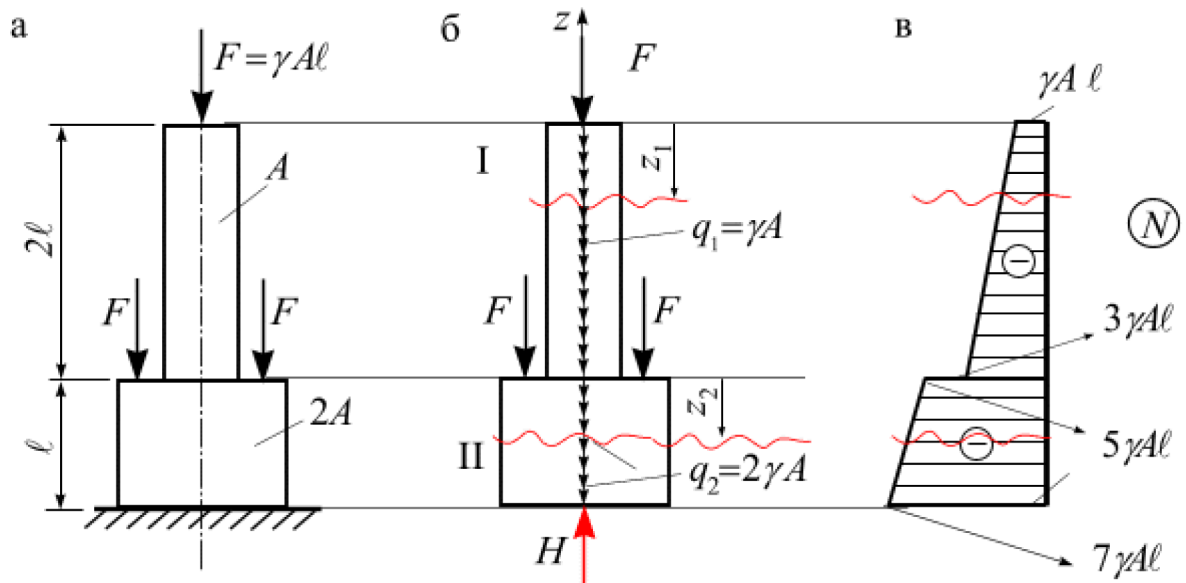


Рис. 1.35

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq l$ .

Интенсивность распределенной нагрузки на этом участке  $q_2 = \gamma \cdot 2A \cdot q_1$ ;

$$N(z_2) = F - q \cdot 2l - 2F - q \cdot z_2 = -\gamma A l - \gamma A \cdot 2l - 2\gamma A l - 2\gamma A z_2 = -\gamma A(5l + 2z_2).$$

Продольная сила  $N(z_2)$  вызывает сжатие второго участка и является *линейной* функцией. Имеем:

$$N(z_2) = -\gamma A(5l + 2z_2) \Rightarrow \begin{cases} N|_{z_2=0} = -5\gamma A l; \\ N|_{z_2=l} = -\gamma A(5l + 2l) = -7\gamma A l. \end{cases}$$

Откладываем полученные значения на границах участков и соединяем полученные точки прямыми линиями (рис. 1.35, в).

**Контроль эпюры  $N$**  (рис. 1.35, в):

1. На эпюре три скачка, величина и направление которых соответствуют трем приложенным к брусу внешним силам  $-F$ ,  $2F$  и реакции опоры  $H$ .

2. Изменение  $N$  на участках с действующей распределенной нагрузкой происходит по линейному закону.



# Глава 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

## 2.1. Упругая и пластическая деформация металлов

Деформацией называется изменение размеров и форм под действием приложенных сил (нагрузки). Наиболее простые виды деформации твердого тела: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, поперечный изгиб (рис. 2.1). При наличии деформации расстояние между двумя любыми точками  $A$  и  $B$  на твердом теле меняется после нагружения.

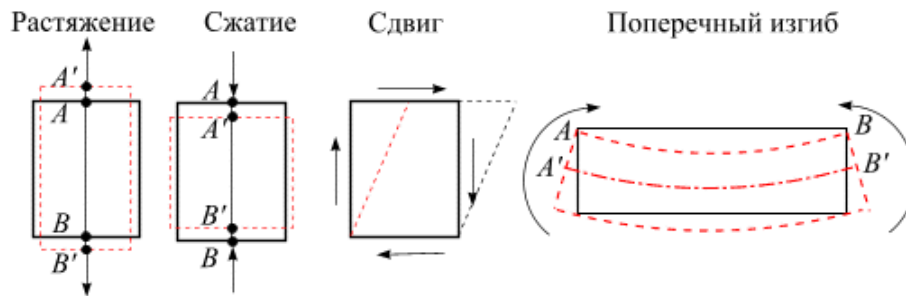


Рис. 2.1

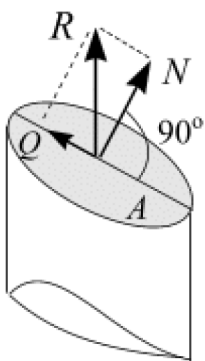


Рис. 2.2

При анализе прочности твердого тела вводится понятие *напряжения*, которое характеризует внутренние силы, приходящие на единицу площади поперечного сечения тела. Так, сила  $P$ , приложенная к некоторой площадке  $A$ , не перпендикулярной ей, а направленной под некоторым углом, возникают нормальные ( $s$ ) и касательные ( $t$ ) напряжения (рис. 2.2).

Нормальное  $s$  и касательное  $t$  напряжение в поперечном сечении  $A$ :

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Q}{A}.$$

Опытное изучение напряженного состояния проводится методом тензометрии. Наиболее наглядное представление о различных стадиях процесса деформации можно получить из диаграммы деформации тела под воздействием возрастающей внешней нагрузки, которая строится по результатам опыта в координатах «деформация – сила» (рис. 2.3).



Рис. 2.3

Для металлов и их сплавов диаграмма деформации имеет два характерных участка: в начальной стадии нагружения линейной нагрузки макроскопическая деформация возрастает по линейному закону (закон Гука), затем зависимость между силой и деформацией становится нелинейной. Кривая деформации обрывается в тот момент, когда происходит лавинное разрушение твердого тела.

Анализ процессов деформирования и разрушения твердого тела с микроскопической точки зрения основан на изучении дефектов кристаллической решетки и действием на тело внешних сил. Весь процесс деформации разделяют на три последовательно проходящие одна за другой зоны.

**I. Зона упругих деформаций** – зависимость между силой и деформацией определяется законом Гука и зависит от упругих свойств материала. Упругая деформация исчезает после снятия нагрузки за счет того, что при небольших напряжениях атомы смещаются незначительно и после снятия напряжений возвращаются в исходное положение.

**II. Зона упруго-пластических деформаций** – зависимость между силой и деформацией определяется нелинейной зависимостью, характер которой зависит от свойств твердого тела, условий нагружения.

При пластической деформации в кристаллической решетке металла под действием касательных напряжений происходит необратимое перемещение атомов. За счет этого необратимо изменяется структура твердого тела (металла) и его свойства за счет уменьшения дислокаций – вид дефектов в расположении атомов кристаллической решетки. Схемы сдвига (а) и образования дислокации в кристаллической решетке показаны на рис. 2.4.

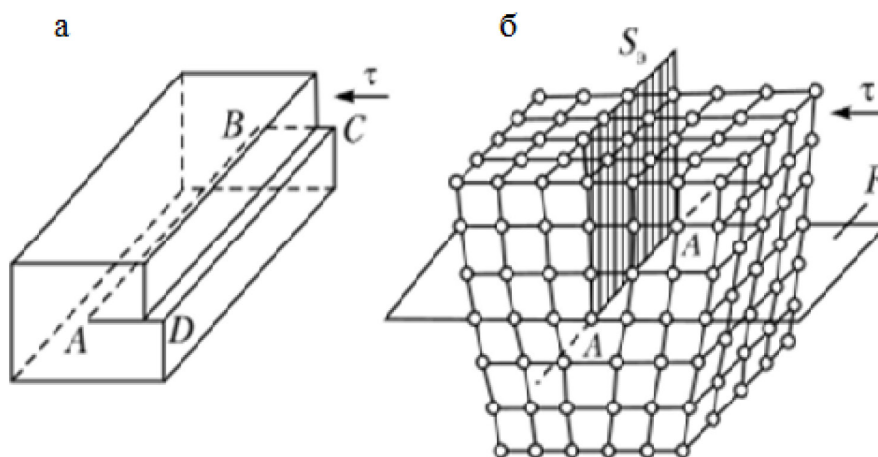


Рис. 2.4

**III. Зона разрушения.** Разрушение – процесс зарождения и развития в металле трещин, слияния рядом расположенных трещин в одну магистральную трещину, по которой происходит полное разрушение. Возникновение трещин происходит благодаря скоплению движущихся дислокаций (пластической деформации) перед препятствием (границами зерен, перед всевозможными включениями и т. д.). Для стали скорость роста трещины достигает 2500 м/с. Поэтому нередко хрупкое разрушение называют внезапным, или катастрофическим, разрушением.

Принципиальная особенность существующих моделей образования трещин заключается в необходимости осуществления предварительной пластической деформации перед разрушением. Это значит, что зарождение трещины всегда требует перемещения дислокаций.

Имеются два вида напряжений, приводящих к разрушению: растягивающие или касательные напряжения.

Разделение процесса деформации на зоны условно. Как правило, границы зон размыты и четко разграничить их сложно. Так, в зоне упругих деформаций можно обнаружить в отдельных зернах пластические деформации. Поэтому задолго до полного разрушения можно обнаружить на отдельных участках трещины.

## 2.2. Краткие сведения о некоторых конструкционных материалах

Материалы для изготовления конструкций (машин и сооружений), воспринимающих внешнюю силовую нагрузку, называются *конструкционными материалами*. Определяющими параметрами таких материалов являются механические свойства – сопротивление растяжению, сжатию, работа на изгиб (также кручению, срезу), выносливость при вибрационных нагрузках и др., что отличает их от других технических материалов (оптических, изоляционных, смазочных, лакокрасочных, абразивных и др.). Также разнообразны условия эксплуатации материалов и по температуре, окружающей среде, скорости приложения нагрузки и др.

Все конструкционные материалы в основном разделяют на металлические и неметаллические, которые, в свою очередь, можно разбить по группам с близкими свойствами и применением. Например, металлические сплавы различают по системам сплавов – на железной основе и цветные; по структурному составу – на стали, латуни, бронзы и т. д., по технологическому использованию – на деформированные (прокат, штамповки, пресованные профили и др.). Некоторые конструкционные материалы (сталь, алюминиевые сплавы, железобетон) используются и как конструкции, и как строительные материалы.

Из всех материалов, применяемых в настоящее время, только сталь позволяет получать сочетание высоких значений различных механических характеристик и хорошую технологичность при сравнительно невысокой стоимости. Поэтому сталь является основным и наиболее распространенным конструкционным материалом.

**Сталь** – сплав железа с углеродом (до 2 %). По химическому составу различают углеродистые и легированные стали. *Углеродистые* стали вместе с железом и углеродом содержат марганец (до 1 %) и кремний (до 0,4 %), а также некоторые примеси (сера, фосфор). По содержанию углерода стали делят на низкоуглеродистые, среднеуглеродистые и высокоуглеродистые. В состав *легированных сталей*, помимо указанных компонентов, входят легирующие элементы (хром, никель, молибден, вольфрам и др.), которые повышают качество стали и придают ей особые свойства. Стальные конструкции применяются в качестве *несущих*

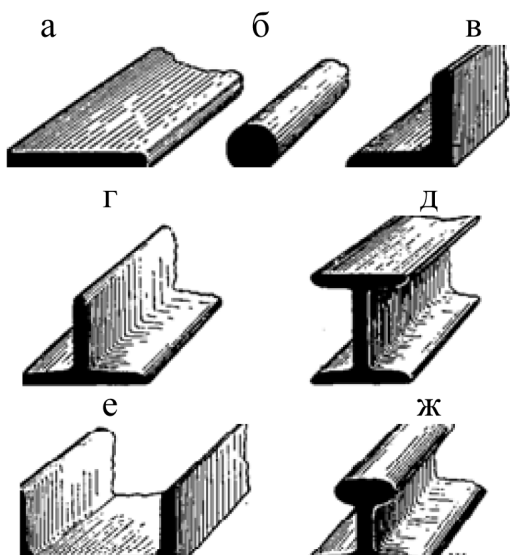


Рис. 2.5

конструкций зданий и сооружений, листовых конструкций, пролетных строений мостов, подъемных кранов и т. д. Промышленность выпускает металлические изделия, полученные прокаткой. К ним относятся прокатные профили сортовой стали, имеющие простую геометрическую форму: круг, прямоугольник, квадрат. Различают прокатные профили с постоянным и переменным поперечным сечением, так называемые прокатные фасонные профили (рис. 2.5): а – полосовой, б – круглый, в – неравнополочный уголок, г – тавр, д – двутавр, е – швеллер, ж – железнодорожный рельс и др.



Рис. 2.6

**Чугун** – сплав железа с углеродом (и другими элементами), в котором содержание углерода от 2,14 до 6,68 %, большое количество углерода делает материал твердым и плотным, при этом снижаются его пластичность и вязкость, он становится хрупким. Выплавляется чугун, как правило, в доменных печах. Температура плавления чугуна – от 1150 до 1200° С (от 2100 до 2190 F), то есть примерно на 300°С (572 F) ниже, чем у чистого железа (рис. 2.6).

Чугунные изделия используются в машиностроении. Из чугуна изготавливают блоки для двигателей внутреннего сгорания, тормозные колодки и др.

**Алюминиевые сплавы** (*силумины, дюралюмины*) – сплавы на основе алюминия с добавлением меди, магния, цинка, марганца и других элементов. Обладают высокими механическими свойствами, малой плотностью, высокой электро- и теплопроводностью, хорошей коррозионной стойкостью.

**Медные сплавы** (*латуни, бронзы*) – сплавы на основе меди с добавлением олова, цинка, свинца, никеля, железа и других элементов. В зависимости от легирующих компонентов могут обладать высокой пластичностью и прочностью, электропроводностью, антифрикционными и коррозионно-стойкими свойствами.

**Древесина** – древнейший строительный материал. В строительстве широко используют хвойную древесину (сосна, лиственница), различные древесноволокнистые и древесностружечные плиты и т. д.

**Композиционные материалы** – как правило, имеют армирующие элементы в виде нитей, волокон, металлической арматуры. Например, пластик, армированный борными, стеклянными или углеродными волокнами; алюминий, армированный борными или стальными нитями; железобетонные изделия и т. д. Комбинируя объемное содержание компонентов, можно получить композиционные материалы с требуемыми физико-механическими свойствами.

## 2.3. Испытание на растяжение пластичных материалов

*Механические свойства материалов* – совокупность показателей, характеризующих сопротивление материала воздействию на него внешней нагрузке, его способность деформироваться при этом, а также особенности его поведения в процессе разрушения. Эти показатели определяются при механических испытаниях образцов различной формы по специальным методикам.

При проектировании и расчетах на прочность и жесткость необходимо знать свойства материалов, сведения о которых можно получить путем механических испытаний на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

Наглядное представление о различных стадиях деформации можно получить из диаграммы деформации тела под действием возрастающей нагрузки, которая строится по результатам испытаний. Наиболее распространенный вид испытания, позволяющий определить характеристики *прочности* и *пластичности* по экспериментальной кривой, – растяжение образцов специальной формы – *цилиндрических или плоских* (рис. 2.7, а, б).

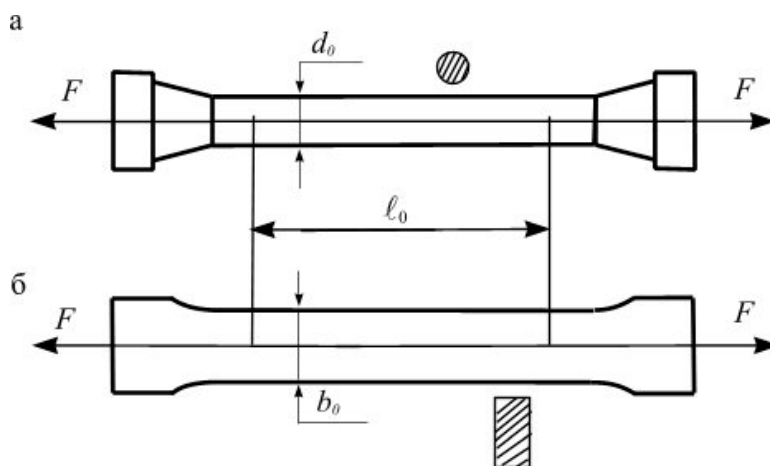


Рис. 2.7

Различают *длинные* образцы с отношением  $l_0/d_0 = 10$  и *короткие* с  $l_0/d_0 = 5$ , где  $l_0$  – рабочая часть образца. Согласно принципу Сен-Венана напряженное состояние на этом участке не зависит от способа приложения нагрузки к образцу и может считаться однородным. Испытание на растяжение проводят на специальных разрывных или универсальных машинах, создающих постепенно возрастающую нагрузку на образец. Машины снабжены устройством для автоматической записи **диаграммы растяжений**, т. е. *графика зависимости между растягивающей силой  $F$  и удлинением образца  $\Delta l$* .

## 2.4. Определение характеристик прочности

На рис. 2.8 изображена *диаграмма растяжения* строительной стали марки Ст 3 с содержанием углерода не более 0,22 %. Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы, а также соответствующие им стадии деформирования образца.



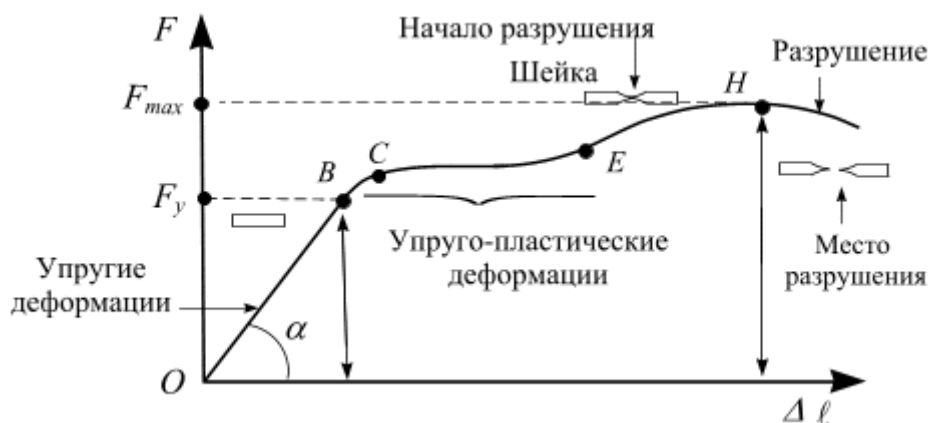


Рис. 2.8

Для оценки свойств материала эту диаграмму перестраивают в координатах «напряжение –  $\sigma = \frac{F}{A_0}$ , продольная деформация –  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ ». Величину  $\varepsilon$  также принято называть *относительным удлинением*.

Типичные диаграммы растяжения для пластичных материалов в координатах  $(\sigma, \varepsilon)$ , например, строительная сталь марки Ст 3 (рис. 2.9).

Участок *OB* – зона пропорциональности. Зависимость между удлинением образца и силой носит линейный характер, что подтверждает справедливость закона Гука. Эта зависимость сохраняется до  $\sigma_y$  (точка *B* на диаграмме), которая используется для определения предела пропорциональности:

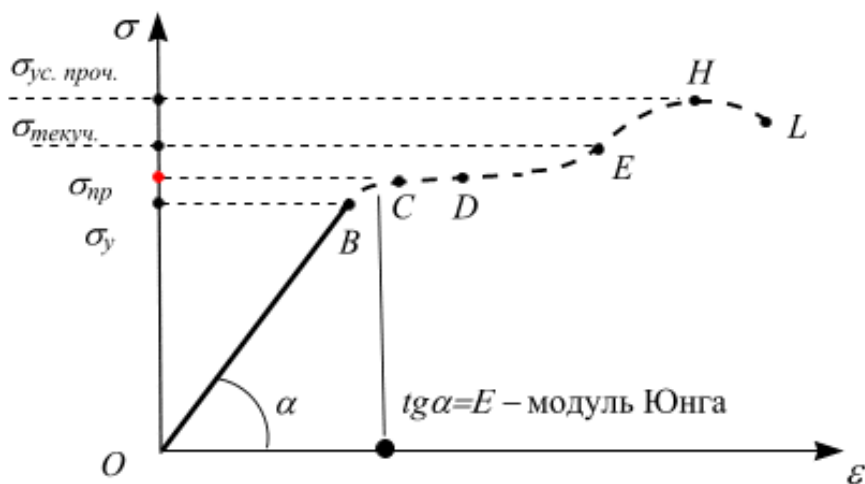


Рис. 2.9

**Пределом пропорциональности** называется наибольшее напряжение, до которого сохраняется закон Гука.

Если по достижении точки *B* сбросить нагрузку до нуля, то график разгрузки совпадет с графиком нагружения. Это говорит о том, что при напряжениях  $\sigma \leq \sigma_{пр}$  возникают только упругие деформации.

Участок *OC* – зона упругости. Выше точки *B* диаграмма искривляется, закон Гука нарушается, деформации начинают расти быстрее роста напряжений.

На этом участке в непосредственной близости от точки  $B$  находится точка  $C$ , соответствующая пределу упругости  $\sigma_{np}$ :

$$\sigma_{np} \approx \sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad (2.1)$$

где  $A_0$  – начальная площадь сечения образца.

Для Ст. 3  $\sigma_y = 195 - 200$  МПа.

Зависимость между удлинением образца  $\Delta l$  и силой  $F$  носит линейный характер и при упругих деформациях определяется *законом Гука*:

$$\sigma = tg\alpha \cdot \varepsilon \Rightarrow \left[ \sigma = \frac{F}{A}; tg\alpha = E; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \right] \Rightarrow \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{F l}{AE},$$

где  $E = tg\alpha$  – модуль продольной упругости материала, физическая константа, характеризующая *жесткость материала* при линейной деформации, т. е. в пределах закона Гука (табл. 1),  $\Delta l$  – удлинение образца,  $AE$  – жесткость образца при растяжении.

Таблица 2.1

Материал	$E \cdot 10^5$ , МПа	Материал	$E \cdot 10^5$ , МПа
Чугун серый, белый	1,5–1,6	Гранит	0,49
Углеродистые стали	1,962–2,1	Лед	0,1
Медь прокатная	1,1	Дерево вдоль волокон	0,1–0,12
Алюминий катаный	0,69	Дерево поперек волокон	0,005–0,01
Мрамор	0,56	Кладка из кирпича	0,026 –0,029
Известняк	0,42	Стекло	0,55
Бетон при сжатии и растяжении			$19 - 9 \cdot 10^{-3}$ , МПа

**Пределом упругости** называется наибольшее напряжение, до которого остаточная деформация при разгрузке не обнаруживается.

Как указывалось ранее, остаточная деформация не исчезает после удаления нагрузки.

Для Ст 3  $\sigma_{ост.} = 205 - 210$  МПа, т. е.  $\sigma_{проп.}$  и  $\sigma_{ост.}$  незначительно отличаются, и обычно считают, что они практически совпадают.

*Участок DE – площадка текучести.* После точки  $C$  диаграмма искривляется и переходит в почти горизонтальный участок. Здесь материал как бы уподобляется жидкости и течет. Стрелка силоизмерительного механизма на время останавливается, т. е. образец удлиняется при фактически постоянной нагрузке, равной  $F_{текуч.}$

**Пределом текучести** называется напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения нагрузки.

Для Ст 3  $\sigma_{текуч.} = 220 - 250$  МПа.

На полированном образце появляется сетка полос, наклоненных к оси образца под углом  $45^\circ$ , называемых линиями Людерса-Чернова (рис. 2.9).



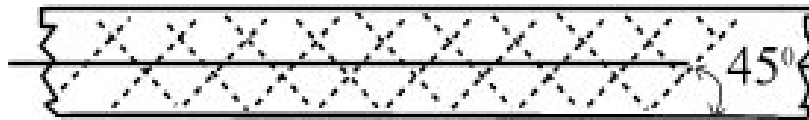


Рис. 2.9

Эти полосы представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием наибольших касательных напряжений. Описанные явления вызывают изменение внутренней структуры металла, что приводит к его упрочнению.

Участок  $EH$  – зона упрочнения. Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной. Образец приобретает способность воспринимать возрастающие усилия до значения  $F_{max}$  (точка  $H$  на диаграмме), которое используется для определения *временного сопротивления* или *условного предела прочности*  $\sigma_{ус.проч.}$ :

$$\sigma_{ус.проч.} = \frac{F_{max}}{A_0} \quad (2.2)$$

**Временным сопротивлением (условным пределом прочности)** называется напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

Для Ст 3  $\sigma_u = 370 - 470$  МПа.

Участок  $HL$  – зона местной текучести.

После достижения усилия  $F_{max}$  удлинение образца происходит на небольшом участке. Это ведет к образованию местного сужения в виде *шейки* (рис. 2.10) и падению силы до значения  $F$ , при котором происходит разрушение.

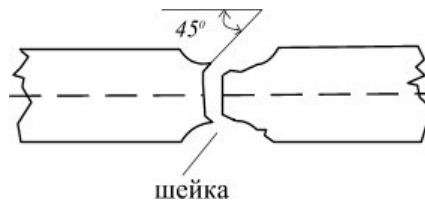


Рис. 2.10

Образец разрушается с образованием *чашечки* на одной его части и *выступа* на другой (рис. 2.10). На дне чашечки, которое образовано поперечной трещиной, разрушение имеет характер отрыва в результате действия нормальных напряжений. Края же разрушаются вследствие сдвига в направлении наибольших касательных напряжений под углом около  $45^\circ$ . Такое разрушение называют *вязким (пластичным)*. Длина образца  $\ell_1$  после разрыва будет равна:  $\ell_1 = \ell_0 + \Delta\ell$ , где  $\Delta\ell$  – удлинение,  $\ell_0$  – первоначальная длина (рабочая).

**Явление наклепа.** На стадии упрочнения (участок  $EH$  на рис. 2.11) материал деформируется упруго-пластически. Если из некоторой точки  $K$ , лежащей за пределом текучести, произвести разгрузку, то график пойдет по прямой  $KK_1$ , параллельной участку  $OB$ . Если вновь нагружать образец, то диаграмма совпадет с линией разгрузки  $KK_1$ , а дальше пойдет по кривой  $KHL$ .

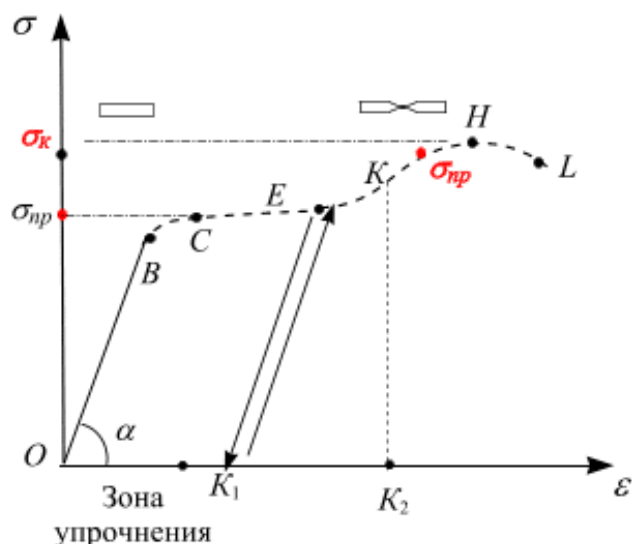


Рис. 2.11

Изучая диаграмму повторного нагружения  $K_1KHL$ , можно сделать вывод, что свойства металла изменились:

- исчезла площадка текучести;
- предел пропорциональности повысился и стал равным напряжению, до которого первоначально был растянут образец (точка К);
- часть диаграммы, левее  $KK_1$ , оказалась отсеченной, и остаточное удлинение после разрыва будет меньше, т. е. материал стал менее пластичным.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительной пластической деформации называется **наклепом**.

Наклеп широко используют в технике (предварительной вытяжке подвергают цепи и канаты подъемных машин, некоторые виды арматуры железобетонных конструкций). В некоторых случаях он нежелателен, и его устраняют отжигом или удалением наклепанного материала.

Относительным удлинением  $\varepsilon_r$  называют отношение в процентах приращения длины образца после разрыва к его первоначальной длине:

$$\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100 \% \text{ или } \varepsilon_r = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100 \%. \quad (2.3)$$

Относительное поперечное сужение образца  $\psi_r$  определяется путем деления абсолютного уменьшения площади поперечного сечения в шейке на первоначальную площадь и выражается в процентах:

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100 \%, \quad (2.4)$$

где  $A_1$  – площадь поперечного сечения образца в месте разрыва. Для рассматриваемой стали  $\varepsilon_r = 23 - 27 \%$ ;  $\psi_r = 60 - 70 \%$ .

**Характеристики материала.** При нагружении материалы условно делят на *пластичные* и *хрупкие*, для первых  $\varepsilon_r > 5 \%$ . К *пластичным* относят низкоуглеродистую сталь, медь, свинец, сплавы алюминия, а к *хрупким* – чугун, высокоуглеродистую сталь, стекло, камень, бетон, кирпич.

**Пластичность** – свойство материала накапливать значительные остаточные деформации до разрушения. Это положительное свойство, оно играет большую роль в обеспечении безопасности и надежности строительных конструкций.

**Хрупкость** – свойство материала разрушаться без образования заметных пластических деформаций.

Относительное удлинение  $\varepsilon_r$  и относительное поперечное сужение образца после разрыва  $\psi_r$  называют характеристиками пластичности материала.

## 2.5. Диаграмма растяжения хрупких материалов

Диаграмма растяжения хрупкого материала, например, чугуна, типична для хрупких материалов (рис. 2.12, а). Отклонение от закона Гука наблюдается уже в начальной стадии нагружения, и модуль  $E$  не является постоянной величиной. Принято кривую заменять секущей  $OB$  и считать  $E = const$ .

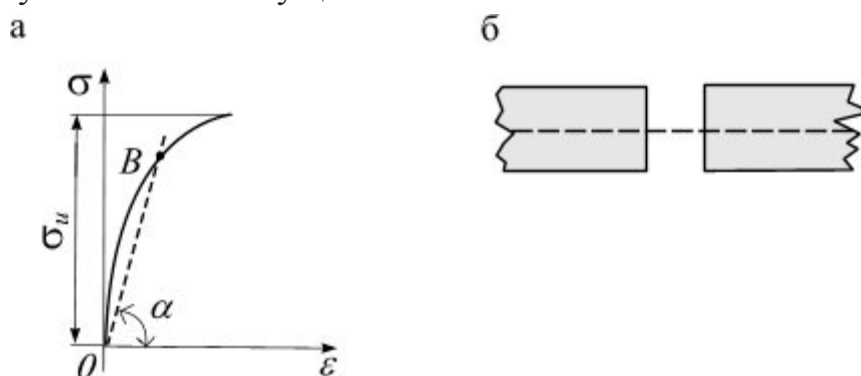


Рис. 2.12

Процесс разрушения образца при растяжении происходит почти внезапно, при незначительных остаточных деформациях.

Хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению. Для различных сортов чугуна предел прочности на растяжение:  $\sigma_{проч.} = 120 - 380 \text{ МПа}$ .

## 2.6. Испытание материалов на сжатие

Испытание материалов на сжатие проходит на образцах, имеющих вид цилиндров, высота которых равна их диаметру (обычно  $d = h = 20 \text{ мм}$ ). Результаты испытаний носят некоторый условный характер из-за наличия сил трения в опорных поверхностях образца. Для бетона, дерева применяют образцы в виде кубиков.

Диаграмма сжатия почти полностью повторяет диаграмму растяжения (рис. 2.13, а).

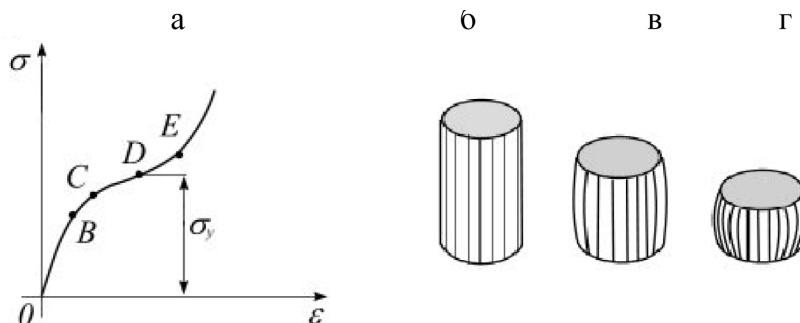


Рис. 2.13

Пределы пропорциональности, упругости и текучести имеют те же значения, что и при растяжении. Углы наклона прямолинейных участков на обеих диаграммах одинаковы, значит, равны и модули  $E$ . Площадка текучести здесь выражена слабо. При дальнейшем нагружении развиваются значительные пластические деформации, образец принимает бочкообразную форму, а затем, не претерпевая разрушения, расплющивается (рис. 2.13, в, г). Поэтому получить предел прочности не представляется возможным и его условно принимают таким же, как при растяжении:  $\sigma_{ит} = \sigma_{ис}$  ( $t$  – растяжение от англ. *tension*;  $c$  – сжатие от англ. *compression*).

Пластичные материалы одинаково сопротивляются растяжению и сжатию.

Образцы из других пластичных металлов (медь, алюминий) при сжатии деформируются так же, как стальные, и имеют аналогичную диаграмму.

**Диаграмма сжатия чугуна.** Диаграмма сжатия по виду напоминает диаграмму растяжения, однако ординаты ее в несколько раз больше, чем при растяжении (рис. 2.14, а).

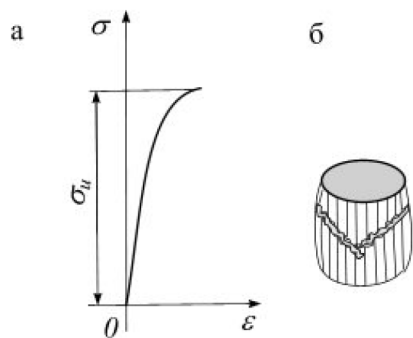


Рис. 2.14

Образец принимает слегка бочкообразную форму (рис. 2.14, б). Когда нагрузка достигает наибольшего значения, на поверхности образца появляются трещины под углом примерно  $45^\circ$  к оси. Нагрузка резко падает, и диаграмма обрывается. Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушаются при сжатии так же, как чугун, и имеют подобную диаграмму.

*Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению.*

Для серого чугуна предел прочности на сжатие  $\sigma_{сж.} = 560 - 900 \text{ МПа}$ , а на растяжение –  $\sigma_{раст.} = 120 - 190 \text{ МПа}$ , т. е. в 4–5 раз меньше.

Прочностные характеристики для пластичных и хрупких материалов приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Материал	Расчетные сопротивления, $\sigma_{пр}$ , МПа		Углеродистые стали	Расчетные сопротивления, $\sigma_{пр}$ , МПа
	на растяжение	на сжатие		на растяжение
Стеклопластик	220–320	250–350	Сталь 10	340
Латунь, бронза	220–500	–	Сталь 20	400
Бетон	1,15–315	10–60	Сталь 35	590
Текстолит	80–100	80–350	Сталь 45	600
Бетон	0,1–0,7	1–9	Малоуглеродистая сталь	160–240
Керамика	–	7–15		
Чугун	120	500		

Пределы прочности для некоторых пластмасс приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Материал	Предел прочности, МПа		Материал	Предел прочности, МПа	
	на растяжение	на сжатие		на растяжение	на сжатие
Винипласт	50	–	Текстолит	85–100	130–250
Полиэтилен	60	–	Бакелизированная фанера	130	115
Целлулоид	50	60	Гетинакс	150–170	150–180

**Диаграмма сжатия древесины.** При испытании дерева на сжатие приходится учитывать, что дерево является *анизотропным* материалом и по-разному сопротивляется деформированию вдоль и поперек волокон. Диаграммы сжатия вдоль волокон (кривая 1) и поперек (кривая 2) показаны на рис. 2.15, а.

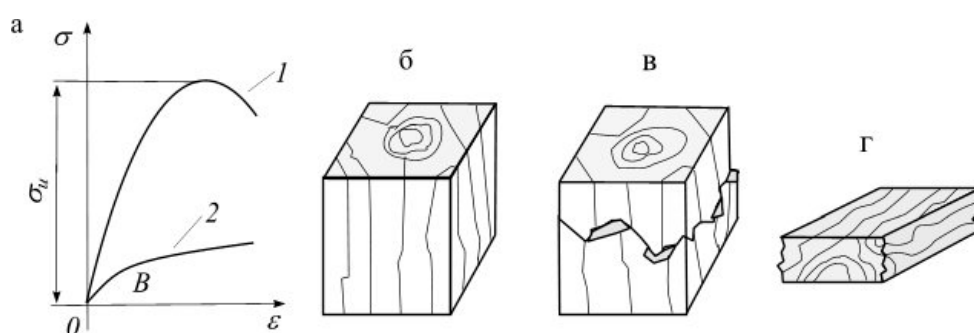


Рис. 2.15

При сжатии вдоль волокон древесина работает сначала упруго, затем упруго-пластически. Разрушение происходит с образованием характерной складки (рис. 2.15 в) в результате потери местной устойчивости рядом волокон.

При сжатии поперек волокон до небольшой нагрузки (точка В) существует линейная зависимость между силой и деформацией. Затем деформации сильно увеличиваются, а нагрузка растет незначительно. В результате образец спрессовывается – уплотняется (рис. 2.15, г). Разрушающая нагрузка определяется условно и соответствует сжатию образца на 1/3 высоты.

*Сопротивление древесины сжатию вдоль волокон в 8–10 раз больше, чем поперек.*

Прочностные характеристики для различных пород древесины приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Порода древесины	Предел прочности на сжатие вдоль волокон, МПа	Порода древесины	Предел прочности на сжатие вдоль волокон, МПа
Сосна	25–62	Тополь	38–54
Сосна сибирская	16,2–50	Акация	46,5–71,5
Ель	31,8–56,5	Бук кавказский	43,2–82
Кедр сибирский	25–40	Ясень украинский	37,5–72,5
Лиственница	41–67	Дуб	42,5–65
Береза	31–62	Липа	25,9–46

## 2.7. Влияние различных факторов на механические характеристики материалов

Диаграммы растяжения низкоуглеродистой стали Ст 3 при *статическом* нагружении (кривая 1) и *повышенной скорости* нагружения (кривая 2) показаны на рис. 2.16.

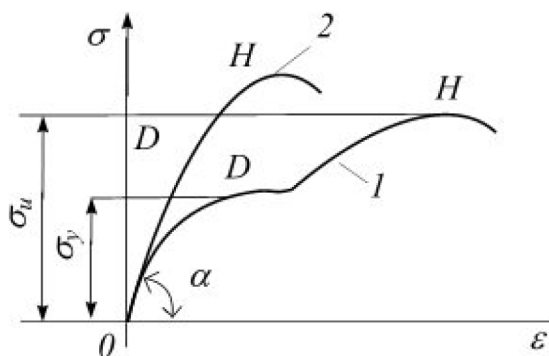


Рис. 2.16

Сравнение этих диаграмм показывает, что при быстром нагружении предел текучести  $\sigma_y$  и временное сопротивление стали  $\sigma_u$  выше, а модуль  $E$  практически не изменился.

При нагружении с повышенными скоростями пластические деформации не успевают полностью развиться, и *пластичный материал по своим свойствам приближается к хрупкому*.

**Влияние температуры.** При повышении температуры у большинства материалов механические характеристики прочности уменьшаются, а при понижении температуры увеличиваются. При отрицательных температурах у сталей увеличивается их хрупкость (хладноломкость).

Характеристики пластичности с повышением температуры увеличиваются, а с понижением – уменьшаются. При повышении температуры модуль упругости  $E$  существенно уменьшается, а коэффициент Пуассона  $\nu$  незначительно увеличивается.

В настоящее время созданы специальные сплавы и металлокерамические материалы, которые могут надежно работать при повышенных температурах (до  $1000^\circ\text{C}$ ).

**Влияние термической обработки.** Для изменения характеристик прочности и пластичности материалов их подвергают термообработке, которая состоит из определенных режимов нагревания и охлаждения, при которых меняется структура металлов.

**Отжиг** применяют для *снятия начальных внутренних напряжений*, вызванных холодной обработкой. Сталь нагревают до определенной температуры, длительное время выдерживают, затем медленно охлаждают.

**Закалка** – нагрев до определенной температуры и быстрое охлаждение в воде или масле. При этом *характеристики прочности повышаются, пластичность падает*.

**Отпуск** стали применяют для *увеличения ее пластичности после закалки*. Для этого сталь нагревают с некоторой скоростью и выдерживают при определенной температуре.

### Влияние технологических факторов

**Литье** способствует образованию различных дефектов (пустоты, раковины, включения), что приводит к снижению прочности металла.



**Прокатка** меняет структуру металла и делает ее анизотропной: в направлении прокатки прочность значительно выше.

**Волочение** представляет собой вытяжку с обжатием. Изделия, полученные таким способом, – стальная проволока, стальные листы – обладают *высокой прочностью*.

Другие способы механической обработки – токарная обработка, обдувка дробью, обкатка роликами и др. – *увеличивают прочностные* свойства металлов.

**Влияние радиоактивного облучения.** Влияние этого фактора на материал конструкции приводит к увеличению прочности и уменьшению характеристик их пластичности.

**Ползучесть материалов и релаксация напряжений.** *Способность материалов деформироваться во времени при действии постоянных нагрузок называется ползучестью.*

Явление ползучести присуще таким материалам, как бетон, кирпич, полимеры и т. п. Металлы также обнаруживают это свойство, которое становится особенно заметным при высокой температуре, а в цветных металлах (свинце, меди и т. п.) – даже при комнатной.

Фактор ползучести имеет существенное значение для работы конструкций. Например, напряжения в арматуре железобетонных изделий могут в процессе ползучести увеличиться в 2–2,5 раза, а перемещения – в 3–4. Известны случаи, когда стальные котельные трубы разрушались под действием внутреннего давления вследствие ползучести материала.

*Явление медленного уменьшения напряжений в результате постепенного нарастания пластической деформации за счет упругой называется релаксацией напряжений.*

Благодаря релаксации плотность соединения деталей, скрепленных при помощи упругого натяга, постепенно ослабевает, что вызывает нарушение нормальной работы. Ослабление плотности болтового соединения фланцев газопровода или цилиндра высокого давления паровой турбины может привести к утечке газа или пара, если периодически не возобновлять затяжку болтового соединения.



## Глава 3. МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

---

### Определения

**Расчеты на прочность** заключаются в определении оптимальных размеров элементов конструкции, исключающих возможность разрушения под действием заданных нагрузок.

**Расчеты на жесткость** связаны с определением деформаций, исключающих быстрое разрушение материала, при условии, что под нагрузкой они не превышают заданных величин. Под устойчивостью подразумевается способность элементов конструкции сохранять первоначальную форму равновесия при действии нагрузок.

Изменение размеров и формы тела под действием силовых факторов называется **деформацией**. Деформации связаны с перемещениями точек, линий и плоскостей твердого тела. Различают упругие деформации, исчезающие после снятия внешнего воздействия, и пластические (или остаточные) деформации, остающиеся после снятия нагрузок.

В сопротивлении материалов изучают основные виды деформаций твердого тела: растяжение или сжатие, поперечный изгиб, кручение, сдвиг (или срез).

### 3.1. Основные задачи расчетов на прочность

- Определение оптимальных геометрических размеров элементов конструкций, обеспечивающих их прочность.
- Определение несущей способности, т. е. установление допустимых или предельных нагрузок, которые может выдержать конструкция, не разрушаясь.
- Обеспечение способности конструкции удовлетворять заданным эксплуатационным требованиям.

Для решения этих задач разработано три метода расчетов:

- расчет по допускаемым напряжениям;
- расчет по разрушающим (предельным) нагрузкам;
- расчет по предельным состояниям.

### 3.2. Расчет по допускаемым напряжениям

Долгое время, начиная с учения Галилея, господствовало представление о предельной несущей способности конструкции, согласно которому расчет производился по нагрузкам, соответствующим моменту разрушения. В 1826 г. Навье предложил метод расчета по нагрузкам, реально действующим в элементах конструкции.

*Метод основан на определении напряжений от действующих нагрузок и сопоставлении их с допускаемыми.*

**Допускаемыми  $[\sigma]$  называются максимальные напряжения, безопасные для работы конструкции, детали.** Действующие в деталях машин и элементов конструкций напряжения  $\sigma$  называют *эксплуатационными*, в *опасных поперечных сечениях они достигают максимальных значений  $\sigma_{max}$* .

Условие прочности по допускаемым напряжениям предполагает, что напряжение в опасном сечении бруса не должно превышать допускаемое:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (3.1)$$

Допускаемые напряжения равны опасным (предельным) напряжениям  $\sigma_{lim}$ , деленным на коэффициент запаса прочности  $k$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{lim}}{k}. \quad (3.2)$$

Для хрупких материалов (бетон, чугун) за опасные напряжения принимают предел прочности  $\sigma_{lim} = \sigma_u$ . Тогда допускаемые напряжения:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{При растяжении} \quad [\sigma]_t = \frac{\sigma_{раст.}}{k}; \\ \text{При сжатии} \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{сжат.}}{k}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Для пластичных материалов (низкоуглеродистые, низколегированные стали) за опасные напряжения принимают предел текучести  $\sigma_{lim} = \sigma_y$ . Допускаемое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{k}. \quad (3.4)$$

Для строительной стали Ст3 коэффициент запаса по текучести  $k = 1,5$ . Для бетона и железобетона коэффициент запаса по пределу прочности  $k = 2 \div 3,5$ ; для древесины  $k_u = 3,5 \div 6$ .

Коэффициент запаса прочности является обобщенным коэффициентом. Необходимость введения коэффициента запаса прочности и его уровни значения определяются:

- статистическим разбросом экспериментального определения допускаемых напряжений;
- невозможностью точно установить действующие нагрузки;
- неточностью принятых методов расчета;
- неточностью изготовления;
- качеством металла;
- долговечностью эксплуатации и ответственностью конструкции.

Учет динамического и переменного характера нагрузок для машиностроительных деталей, неопределенность самих нагрузок и неясность их влияния на материал конструкций приводят к необходимости применения повышенных коэффициентов запаса прочности.

### 3.3. Расчет по разрушающим (предельным) нагрузкам

Метод основан на вычислении не напряжений, а нагрузки, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь.

**Условие прочности** предполагает, что *максимальная действующая нагрузка  $F_{max}$  не должна превышать допускаемой нагрузки, полученной путем деления разрушающей нагрузки на коэффициент запаса прочности:*

$$F_{max} < [F] = \frac{F_{разр.}}{k}. \quad (3.4)$$

Значения  $k$  принимаются, как и при расчете по допускаемым напряжениям для хрупкого материала.

В случае *пластичного материала критерием предельного состояния является потеря несущей способности в результате превращения конструкции в кинематически изменяемую за счет неограниченного роста пластических деформаций.*

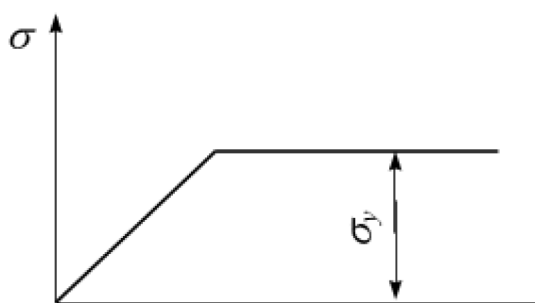


Рис. 3.1

Расчет ведется за пределом упругости с учетом пластических деформаций, где закон Гука не соблюдается. Принимается схематизированная диаграмма напряжений — *диаграмма Прандтля с безграничной площадкой текучести* (рис. 3.1).

Расчет на прочность основан на вычислении предельной нагрузки  $F_{lim}$ , которую находят с использованием уравнений предельного

равновесия, поэтому он называется **методом предельного равновесия**.

Условие прочности по предельным нагрузкам имеет вид:

$$F_{max} < [F] = \frac{F_{lim}}{k}. \quad (3.5)$$

### 3.4. Расчет по предельным состояниям

Один коэффициент запаса не может учесть многообразие факторов, влияющих на работоспособность конструкции.

Цель метода предельных состояний — *не допустить наступления предельных состояний при эксплуатации конструкции.*

**Предельным состоянием** называется такое, при котором конструкция *перестает удовлетворять заданным требованиям*. Строительные нормы и правила (СНиП) разделяют предельные состояния на две группы:

**1) по потере несущей способности вследствие разрушения** или непригодности к эксплуатации:

- общая потеря устойчивости;
- хрупкое, вязкое, усталостное разрушение;

**2) по непригодности к нормальной эксплуатации** из-за больших деформаций, осадок, трещин, колебаний и т. п.

В строительных нормах все исходные величины представлены *нормативными значениями*, а влияние их изменчивости на надежность конструкции учитывается соответствующими *коэффициентами*. Причем каждый коэффициент учитывает изменчивость только *одной исходной величины*, т. е. носит *частный характер*.

Наибольшие нагрузки, действующие на конструкцию и установленные СНиП, называются **нормативными**:  $q_n, F_n$  ( $n$  – нормативное значение, от англ. *norm*).

**Расчетные нагрузки** определяются путем умножения нормативных значений на коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f$  (коэффициент перегрузки), учитывающий возможные отклонения нагрузок от нормативных:

$$\begin{cases} F = \gamma_f \cdot F_n; \\ q = \gamma_f \cdot q_n; \\ M = \gamma_f \cdot M_n. \end{cases}$$

Для постоянных нагрузок  $\gamma_f = 1,05, 1,2$  (вес конструкции, давление грунта); для временных (вес людей, оборудования, снега)  $\gamma_f = 1,1, 1,4$  ( $f$  – внешняя сила, от англ. *force*).

Первая группа предельных состояний связана с расчетом на **прочность**, который проводится по максимальным, т. е. **расчетным нагрузкам**.

Вторая группа связана с расчетами на **жесткость** для упругой стадии работы материала и производится по **нормативным нагрузкам**.

Основным параметром, характеризующим свойства материала, является **нормативное сопротивление материала  $R_n$** :

$$R_n \text{ – по пределу текучести} \Rightarrow \begin{cases} \text{Определяется по результатам} \\ \text{испытаний и регламентируется СНиП} \end{cases}$$

СНиП – строительные нормы и правила.

**Расчетные сопротивления материалов** получают по нормативным, путем деления на коэффициент безопасности по материалу  $\gamma_m = 1,05, 1,15$  ( $m$ -материал, от англ. *material*):

$$R = R_n / \gamma_m. \quad (4.6)$$

Наступление предельного состояния зависит не только от нагрузок (учитывается  $\gamma_f$ ) и материала (учитывается  $\gamma_m$ ), но и от условий работы конструкции. Отклонения от нормальных условий эксплуатации учитываются с помощью **коэффициента условий работы  $\gamma_c$**  ( $c$  – условия работы, от англ. *condition*). Для стальных конструкций  $\gamma_c = 0,75, 0,9$ .

Условие прочности по предельным состояниям:

$$\sigma_{max} \leq R \gamma_c, \quad (3.7)$$

где  $\sigma_{max}$  – наибольшие по абсолютному значению напряжения в опасном сечении;  $R$  – расчетное сопротивление материала.

Условие (4.7) позволяет проводить *три вида расчетов на прочность* (проверочный, проектный расчет и определение несущей способности).

По методу *предельных состояний* рассчитываются все конструкции промышленных и гражданских зданий и сооружений, мостов и т. п. При расчете строительных конструкций величины нагрузок могут быть подсчитаны достаточно точно, причем наибольшее значение имеет воздействие статических нагрузок. Постоянная нагрузка учитывается обычно с коэффициентом 1,1, а некоторые временные с коэффициентами перегрузки 1,2 и 1,3.

Поэтому обычно *расчет по предельным состояниям* дает значительную экономию по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям (с обобщенным коэффициентом запаса).

## Глава 4. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

### Определения

**Упругость.** Под действием внешних сил частицы тела перемещаются, и перемещение продолжается до тех пор, пока не установится равновесие между внешними и внутренними силами – тело находится в деформированном состоянии. Работа, которую совершают внешние силы, переходит в потенциальную энергию деформации. Если внешние силы постепенно уменьшать, тело возвращается к своей первоначальной форме.

Свойство тел возвращаться к своей первоначальной форме после удаления нагрузки называется *упругостью*.

**Осевым (центральным) растяжением** или **сжатием** называют такой вид нагружения бруса, при котором внутренние силы в поперечном сечении приводятся только к продольной силе  $N$ .

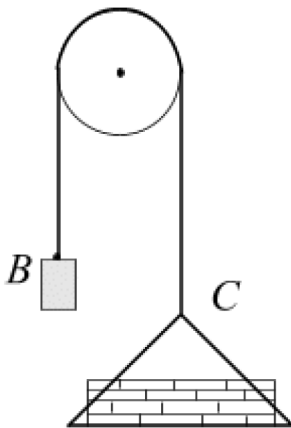


Рис. 4.1

На растяжение работают тросы, линии высоковольтных передач, винты и болты. Сжатие возникает в колоннах, поддерживающих перекрытия, в фабричной трубе, в кирпичной кладке от собственного веса. Например, растяжение возникает в тросе ВС подъемника (рис. 4.1). Элементы фермы (жесткой конструкции из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами) могут быть растянутыми и сжатыми.

Условимся представлять брус в виде совокупности *продольных элементов*, параллельных оси бруса, имеющих бесконечно малые поперечные сечения. Эти элементы будем называть «**волокнами**».

### 4.1. Напряжения в поперечных сечениях в балках и стержнях

При осевом растяжении все волокна имеют одинаковое удлинение, распределение сил по поперечному сечению – равномерно. В поперечном сечении, перпендикулярном к оси бруса, внутренние усилия в любом сечении  $z_i$  приводятся только к *продольной силе*  $N$ :

$$N(z_i) = \sum F_{iz}.$$

Условимся представлять брус в виде совокупности *продольных элементов*, параллельных оси бруса, имеющих бесконечно малые поперечные сечения. Эти элементы будем называть «**волокнами**».

Обычно по известным внутренним усилиям  $N(z)$  в сечениях нетрудно вычислить их во всех остальных точках этого стержня (из условий равновесия других отсеченных частей) и построить эпюру. Эпюры принято строить под изображением расчетной схемы, подписывая характерные значения (*max*, *min* и др.), чтобы при анализе конструкции (расчетной схемы) иметь перед глазами



всю необходимую информацию о свойствах конструкции при данных параметрах. Вывод формул для напряжений в брус будем проводить по такой схеме:

- *статическая сторона* задачи – запись уравнений равновесия;
- *геометрическая сторона* задачи – изучение деформаций на основе опыта и гипотез;
- *геометрическая сторона* задачи;
- *физическая сторона* задачи определяется законом Гука;
- *синтез* – совместное решение полученных уравнений.

**1. Статическая сторона задачи.** При осевом растяжении все волокна имеют одинаковое удлинение, распределение сил по поперечному сечению – равномерно. В поперечном сечении, перпендикулярном к оси бруса, внутренние усилия в любом сечении  $z_i$  приводятся только к *продольной силе*  $N$ :  $N = \sum F_{iz}$ .

Условимся представлять брус в виде совокупности *продольных элементов*, параллельных оси бруса, имеющих бесконечно малые поперечные сечения. Эти элементы будем называть «**волокнами**».

Рассмотрим брус, нагруженный силами  $F$   $F'$  (рис. 4.2, а). Для произвольного сечения  $z$  (рис. 4.2, б) запишем уравнение равновесия:

$$\sum F_{iz} = 0, F = N;$$

здесь

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \sigma_i = \frac{N_i}{dA} \Rightarrow N_i = \sigma_i dA; \\ \sum_{i=1}^{\infty} N_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i dA; \end{array} \right] \Rightarrow N = \int_A \sigma dA, \quad (4.1)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения бруса,  $\sigma_i$  – напряжение, создаваемое продольной силой  $i$ -го волокна. При осевом (центральном) растяжении продольные силы волокон равны между собой (рис. 4.2, в).

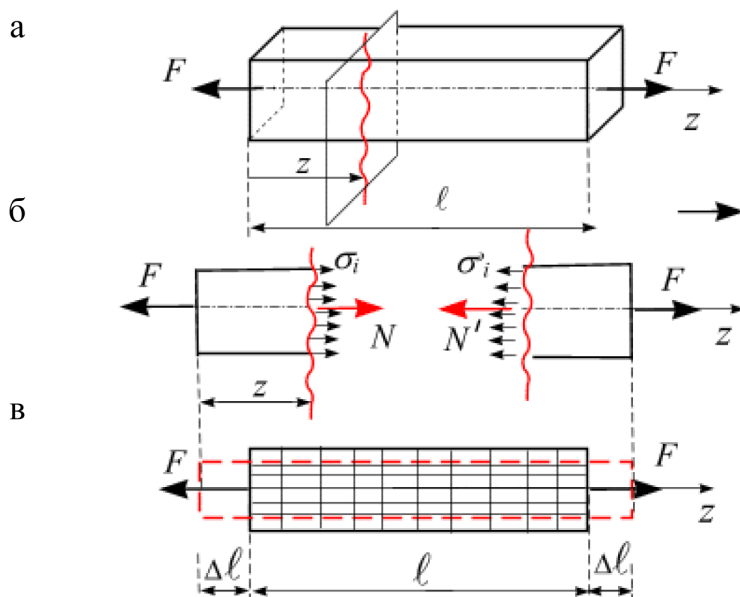


Рис. 4.2



В поперечном сечении бруса при растяжении возникают **равномерно распределенные нормальные напряжения**, равные отношению продольной силы к площади сечения.

**2. Геометрическая сторона задачи** – изучение деформаций на основе опыта и гипотез.

Рассмотрим модель стержня (рис. 4.3, в), на боковой поверхности которого нанесена ортогональная сетка из продольных и поперечных линий.

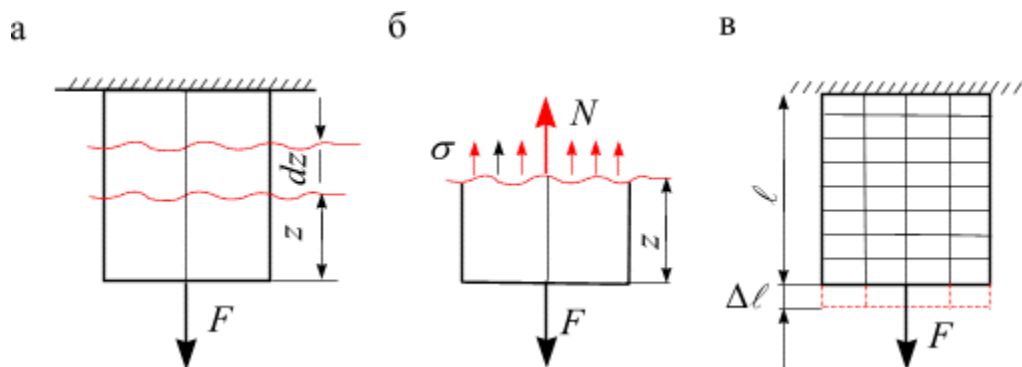


Рис. 4.3

После нагружения можно заметить, что поперечные линии смещаются вдоль продольной оси, оставаясь прямолинейными и перпендикулярными ей. Это подтверждает **гипотезу плоских сечений Я. Бернулли**: сечения бруса, плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси в процессе деформации.

Продольные линии (волокна) *удлиняются* на одну и ту же величину  $\Delta \ell$  (рис. 4.3, в), и их относительное удлинение одинаково.

Геометрическая сторона задачи выражается уравнением:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \text{const}. \quad (4.2)$$

**3. Физическая сторона задачи.** При расчетах на прочность и жесткость необходимо знать свойства материалов, сведения о которых можно получить путем механических испытаний на растяжение.

Установим зависимость деформаций от напряжений. При упругих деформациях эта зависимость линейна и определяется *законом Гука*:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ или } \sigma = \varepsilon E, \quad (4.3)$$

где  $E = \text{const}$  (модуль Юнга) для однородных и изотропных материалов, следовательно,  $\sigma = \text{const}$ .

**4. Синтез** – совместное решение полученных уравнений.

Из уравнений (4.1 – 4.3) получим:

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \varepsilon E dA = \varepsilon E \int_A dA = \varepsilon EA = \sigma A. \quad (4.4)$$

Окончательно:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (4.5)$$

В поперечном сечении бруса при растяжении (сжатии) возникают **равномерно распределенные нормальные напряжения**, равные отношению продольной силы к площади сечения.

Формула (4.5) справедлива лишь для сечений, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки. При расчетах руководствуются **принципом Сен-Венана**, который можно изложить так: *способ приложения внешних сил влияет на распределение напряжений только в области их приложения*.

Исследования показали, что равномерное распределение напряжений по площади сечения, которое дает формула (4.5), будет только в тех случаях, когда по длине стержня поперечные сечения постоянны. Резкие изменения поперечного сечения (отверстия, канавки) приводят к неравномерному распределению напряжений, вызывают *концентрацию* напряжений (подробно об этом в других главах). При наличии *ослабления* в пластине (например, заклепочными отверстиями, рис. 4.4) следует вводить площадь нетто  $A_{net} = A - A_{ослаблен.}$ :

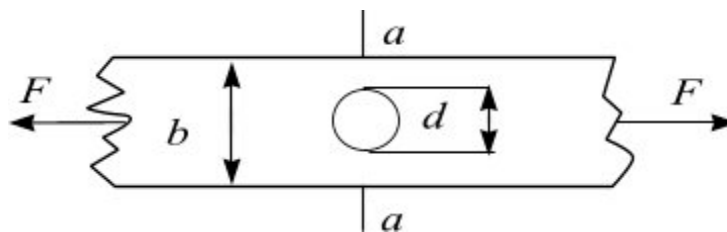


Рис. 4.4

На основе предположения об отсутствии концентрации напряжений по формуле (4.5) вычисляется среднее напряжение в ослабленном сечении пластины:

$$\sigma = \frac{N}{A_{net}}. \quad (4.6)$$

Например, для сечения  $a-a$  пластины (рис. 4.3):  $A_{net} = (b - d) \times \delta$ , где  $\delta$  – размер пластины в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

## 4.2. Перемещения. Условие жесткости

Английский ученый Роберт Гук в 1678 г. на основе экспериментов с проволокой и пружинами сформулировал закон “*Ut tensio, sic vis*”, т. е. «*Каково удлинение, такова и сила*».

В 1822 г. французский математик Луи Коши ввел понятия «напряжение» и «деформация». В современном виде **закон Гука** формулируется так: «*Относительная продольная деформация прямо пропорциональна соответствующему нормальному напряжению*»:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Перейдем к вычислению деформаций (удлинения) стержня.

Имеем:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{N}{A}; \\ \varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}; \end{cases} \Rightarrow \frac{N}{A} = E \frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{AE}.$$

Абсолютное удлинение участка  $\Delta l$  стержня длиной  $l$  при  $A = const$  и  $E = const$  будет равно:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (4.7)$$

где  $EA$  – жесткость стержня при растяжении (сжатии). Формула (4.7) выражает закон Гука для абсолютной продольной деформации, ее называют формулой жесткости при растяжении и сжатии.

Для бруса, имеющего несколько участков:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i. \quad (4.8)$$

Удлинение, связанное с температурным воздействием:

$$\Delta l_t^\circ = l \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (4.9)$$

где  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала;  $\Delta t$  – изменение температуры.

При растяжении (сжатии) поперечные сечения стержня перемещаются в продольном направлении; *перемещения поперечных сечений – это следствие деформации*. При осевом нагружении бруса из однородного материала длиной  $l$  и постоянной площадью поперечного сечения  $A$  перемещение  $\delta(z_i)$  любого  $i$ -го сечения:

$$\delta(z_i) = \frac{N(z_i) \cdot z_i}{EA}. \quad (4.10)$$

Эпюру перемещений  $\delta(z)$  начинают строить от защемленного конца бруса, вычисляя перемещения в характерных сечениях (как правило, это границы участков).

Абсолютная деформация стержня при одинаковой по длине силе  $N$  и постоянной площади поперечного сечения  $A$  равна:

$$\Delta l_i = \int_0^{\ell_i} \delta(z_i) dz = \frac{N}{EA} \int_0^{\ell_i} N(z) dz. \quad (4.11)$$

В том случае, когда продольная сила и поперечное сечение не постоянные, то абсолютное удлинение участка длиной  $\ell_i$  вычисляется по формуле:

$$\Delta l_i = \int_0^{\ell_i} \delta(z_i) dz = \int_0^{\ell_i} \frac{N(z) dz}{EA(z)}. \quad (4.12)$$

Если стержень имеет  $k$  участков нагружения, то полное (абсолютное) удлинение всего стержня вычисляют как алгебраическую сумму удлинений отдельных участков по формуле:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \Delta l_i = \sum_{i=1}^k \int_0^{\ell_i} \frac{N(z_i) dz_i}{E_i A}. \quad (4.13)$$

Растяжение (сжатие) сопровождается изменением поперечных размеров (рис. 4.5).

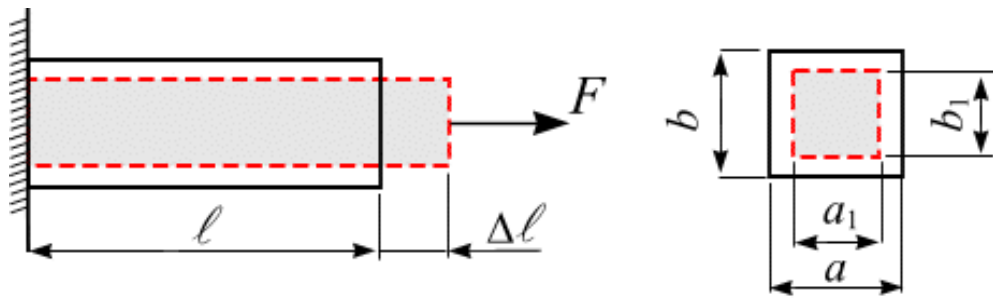


Рис. 4.5

Абсолютная поперечная деформация определяется как разность размеров после деформации и до нее:

$$\Delta a = a_1 - a; \Delta b = b_1 - b.$$

Относительная поперечная деформация для изотропных материалов по всем направлениям одинакова:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Между поперечной и продольной относительными деформациями, которые всегда противоположны по знаку, в пределах закона Гука существует постоянное отношение:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \text{ или } \varepsilon' = -\nu \varepsilon, \quad (4.14)$$

где  $\nu$  – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) – упругая постоянная материала, определяемая экспериментально. Для всех изотропных материалов  $\nu = 0 \div 0,5$ . Для пробки  $\nu \approx 0$ ; для каучука  $\nu \approx 0,5$ ; для стали  $\nu \approx 0,3$ .

### 4.3. Расчеты на прочность и жесткость

Диаграмма растяжения содержит сведения о механических свойствах материала. Зная предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности, можно установить для каждой инженерной задачи величину напряжения, которое можно рассматривать как безопасное напряжение. Это напряжение называют допусковым или предельным напряжением.

**I. Расчет на прочность** ведется по предельному состоянию конструкции (объекта), т. е. расчетным нагрузкам.

**Предельное состояние конструкции (объекта)** – состояние конструкции (объекта), при превышении характеристик которого его эксплуатация недопустима, затруднена или нецелесообразна.

Условие прочности по предельным состояниям для бруса, работающего на растяжение (сжатие) – имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq R, \quad (4.15)$$

где  $\sigma_{max}$  (Па) – наибольшее по абсолютному значению напряжение в опасном сечении;  $N_{расч.}$  (Н) – продольная сила в опасном сечении от расчетных нагрузок;  $A$  (м<sup>2</sup>) – площадь опасного сечения с учетом ослаблений;  $R$  (Па) – расчетное сопротивление материала бруса.

Расчетное сопротивление материала  $R$  получают путем деления нормативного сопротивления  $R_n$  на коэффициент надежности по материалу для металла  $\gamma_m = 1,025 \div 1,15$ , для бетона  $\gamma_m = 1,3 \div 1,5$  (табл. 4.1):

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m}$$

Таблица 4.1

Материал	Расчетные сопротивления, $R$ , МПа		Материал	Расчетные сопротивления, $R$ , МПа	
	на растяжение	на сжатие		на растяжение	на сжатие
Чугун серый, белый, в отливках СЧ12–28 СЧ15–32	20–30 25–40	70–110 90–150	Углеродистые стали Ст0 и Ст2	140	140
			Ст3	160	160
			Ст3 в мостах	140	140
Кладка из кирпича	до 0,2	0,6–2,5	Бетон	0,1–0,7	1–9

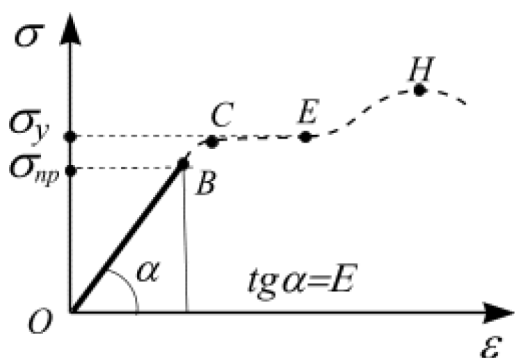


Рис. 4.6

Обычно при расчетах за нормативное сопротивление  $R_n$  принимают предел текучести  $\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}$  – на диаграмме растяжения точка С, или предел прочности материала  $\sigma_u = \frac{F_{max}}{A}$  – на диаграмме растяжения точка H (рис. 4.6).

Условие (4.15) позволяет решать три типа задач на прочность.

### 1. Проверка прочности (проверочный расчет).

Известны: внешняя нагрузка, материал, геометрические размеры; вычислению подлежит  $\sigma_{max}$ , которое сравнивается с расчетным сопротивлением материала – величиной  $R$ . При расчетах возможны ситуации:

- $\sigma_{max} = R$  : прочность обеспечена, и конструкция рациональна;
- $\sigma_{max} \ll R$  : конструкция обладает большим запасом прочности, что означает перерасход материала;
- $\sigma_{max} > R$  : допустимо в пределах 5 %;
- $\sigma_{max} > R$  : прочность конструкции не обеспечена.

**Пример 4.1.** Чугунная колонна кольцевого поперечного сечения нагружена сжимающей силой (рис. 4.7, а).

1. Вычислить напряжение в поперечном сечении, сравнить полученный результат с расчетным сопротивлением материала.

2. Вычислить абсолютное и относительное укорочение колонны.

Задан наружный и внутренний диаметры:  $D = 20$  см,  $d = 16$  см;  $F = 50$  кН;  $R = 90$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Решение.** Вычислим площадь поперечного сечения колонны:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(20^2 - 16^2) = 113 \text{ см}^2 = 113 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

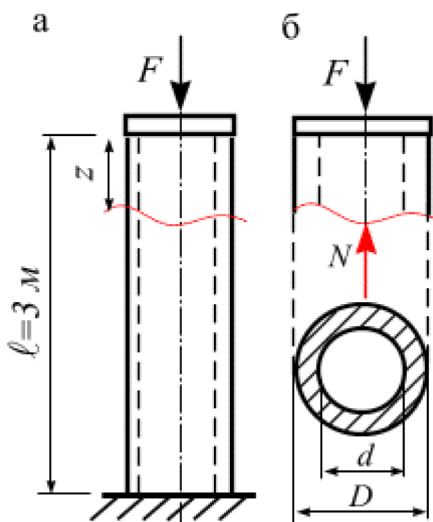


Рис. 4.7

Продольная сжимающая сила в любом поперечном сечении постоянна (рис. 4.7, б) и равна:  $N = |-F| = 50 \text{ кН}$  – колонна сжата.

Вычислим нормальное напряжение в поперечном сечении:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{113 \cdot 10^{-4}} = 4,42 \cdot 10^7 \text{ Па} = 44,2 \text{ Мпа}.$$

Получили, что  $\sigma \ll R$ . Чугунная колонна обладает большим запасом прочности, что означает перерасход материала.

Вычислим абсолютное укорочение колонны:

$$\Delta l = -\frac{N l}{EA} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 113 \cdot 10^{-4}} = -0,664 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,066 \text{ мм}.$$

Относительное укорочение колонны:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,664 \cdot 10^{-4}}{3} = 0,221 \cdot 10^{-4}.$$

*Ответ.* Чугунная колонна обладает большим запасом прочности, что означает перерасход материала; абсолютное укорочение колонны  $\Delta l = 0,066 \text{ мм}$ ; относительное укорочение колонны  $\varepsilon = 0,221 \cdot 10^{-4}$ .

**2. Проектный расчет (подбор сечения).** Известны: внешняя нагрузка, материал; вычисляется требуемая (необходимая) площадь сечения  $A$  из условия прочности – формулы (4.15):

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq R \Rightarrow A \geq \frac{N_{max}}{R}. \quad (4.16)$$

**Пример 4.2.** Жесткий брус  $CD$ , деформацией которого можно пренебречь, поддерживается тремя стальными стержнями и нагружен сосредоточенной силой (рис. 4.8, а).

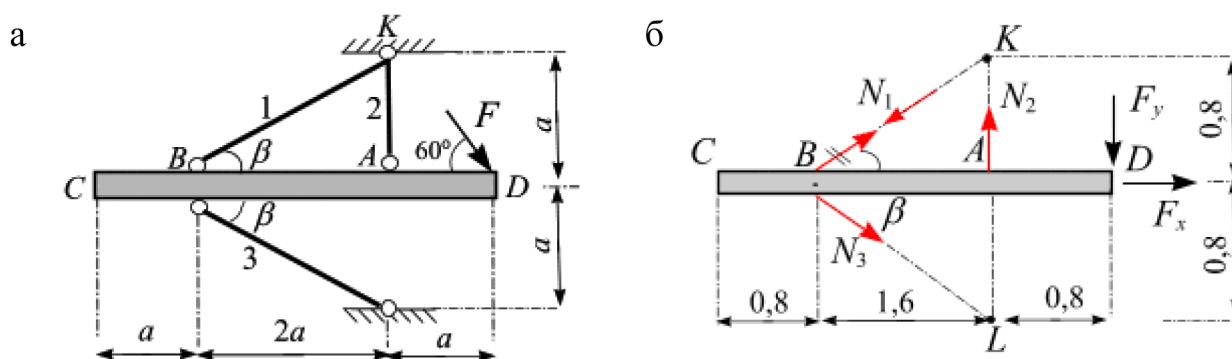


Рис. 4.8



1. Подобрать размеры поперечных сечений: для первого стержня – из равнополочного уголка; для второго – кольцевого; для третьего – квадратного (рис. 4.9)

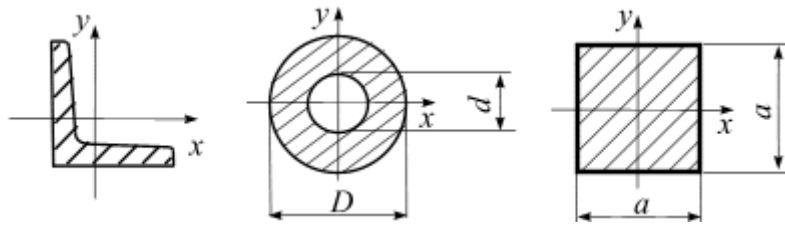


Рис. 4.9

2. Вычисление удлинения каждого стержня.

Дано:  $F = 50$  кН/м, расчетное сопротивление материала стержней  $R = 240$  МПа;  $a = 0,8$  м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\frac{d}{D} = 0,6$ . Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Решение**

1. Выделим жесткий брус  $CD$ , заменим рассеченные стержни внутренними усилиями  $N_1, N_2, N_3$  соответственно, разложим силу  $F$  на проекции  $F_x$  и  $F_y$ :

$$F_x = F \cos 60^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ Н}; \quad F_y = F \sin 60^\circ = 50 \cdot 0,87 = 43,5 \text{ Н}.$$

Начертим расчетную схему конструкции и укажем на ней размеры и нагрузку в числах (рис. 4.8, б).

1. Вычислим внутренние усилия в стержнях от заданной нагрузки.

Из геометрии задачи (рис. 4.10) вычислим тригонометрические функции угла  $\beta$ :

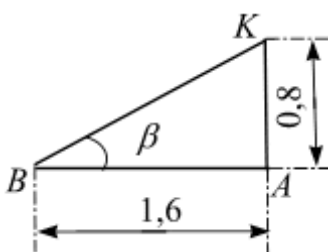


Рис. 4.10

$$\Delta ABK \Rightarrow BK = \sqrt{(1,6)^2 + (0,8)^2} = 0,8\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447; \\ \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894. \end{cases}$$

Запишем уравнения равновесия и вычислим усилия в стержнях.

1. Моментной точкой для вычисления  $N_2$  (усилия в стержне (2)) является точка  $B$ . Тогда:

$$\sum M_B = 0, -F_y(0,8 + 1,6) + N_2 \cdot 1,6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{F_y \cdot (0,8 + 1,6)}{1,6} = \frac{43,5 \cdot 2,4}{1,6} \approx 65,25 \text{ (кН)} - \text{стержень (2) растянут.}$$

2. Моментной точкой для вычисления  $N_3$  является точка  $K$ . Имеем:

$$\sum M_K = 0, N_3 \cdot 0,8 \cdot \cos \beta + N_3 \cdot 1,6 \cdot \sin \beta - F_y \cdot 0,8 + F_x \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 (\cos \beta + 2 \sin \beta) - F_y + F_x = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow N_3 = \frac{F_y - F_x}{(\cos\beta + 2\sin\beta)} = \frac{43,5 - 25}{(0,894 + 2 \cdot 0,447)} = \frac{18,5}{1,79} \approx 10,34 \text{ кН} - \text{стержень (3) растянут.}$$

3. Моментной точкой для вычисления  $N_1$  является точка  $L$ . Тогда

$$\sum M_L = 0, \quad -N_1 \cdot 0,8 \cdot \cos\beta - N_1 \cdot 1,6 \cdot \sin\beta - F_y \cdot 0,8 - F_x \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 (\cos\beta + 2\sin\beta) + F_y + F_x = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = -\frac{F_y + F_x}{(\cos\beta + 2\sin\beta)} = -\frac{43,5 + 25}{1,79} \approx -38,3 \text{ (кН)} - \text{стержень (1) сжат.}$$

Проверка:

$$\sum F_x = \cos\beta \cdot (-N_1 + N_3) + F_x = 0,894(-38,3 + 10,34) + 25 \approx 0;$$

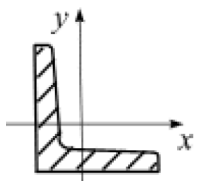
$$\sum F_y = -N_1 \cdot \sin\beta - N_3 \cdot \sin\beta + N_2 - F_y = \sin\beta(-N_1 + N_3)N_2 - F_y =$$

$$= -0,446(38,3 + 10,3) + 62,25 - 43,5 \approx 0.$$

4. Производим проектировочный расчет. Для этого запишем условие прочности при растяжении и сжатии для пластичных материалов:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq R \Rightarrow A \geq \frac{N}{R}.$$

Из условия прочности подбираем размеры поперечного сечения каждого стержня:



I. Для стержня из равнополочного уголка:

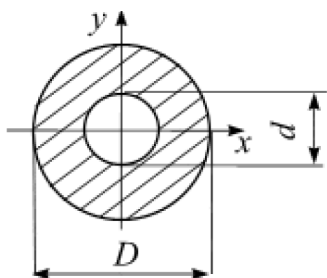
$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{38,3 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,6 \text{ см}^2.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8509-86) выбираем равнополочный уголок № 2,8 с площадью сечения  $A = 1,62 \text{ см}^2$ .

Проверим прочность:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{38,3}{0,16 \cdot 10^{-3}} \approx 240 \text{ МПа.}$$

$\sigma_{max} = R$  : прочность обеспечена, подобранный размер стержня рационален.



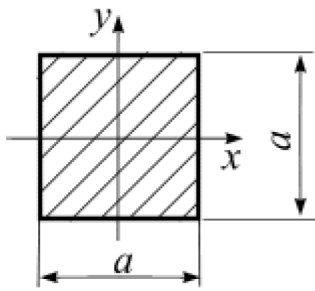
II. Для стержня из кольцевого сечения  $\left(\alpha = \frac{d}{D} = 0,6\right)$ :

$$A_2 \geq \frac{N_2}{R} = \frac{65,25 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 0,27 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)} = 2,7 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) = \frac{\pi D^2}{4}(1 - 0,36) = \frac{3,14 D^2}{4} \cdot 0,64 \approx 0,5 D^2 \Rightarrow A_2 = 0,5 D^2,$$

отсюда:

$$D \geq \sqrt{\frac{A_2}{0,5}} = \sqrt{\frac{2,7}{0,5}} = 2,32 \text{ см}, \quad d = 0,6D = 0,6 \cdot 2,32 = 1,4 \text{ см}.$$



III. Для стержня из квадратного сечения (рис. 2.15, в):

$$A_3 \geq \frac{N_3}{R} = \frac{10,34 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 0,4 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = a^2, \quad a \geq \sqrt{A_3} = \sqrt{0,4} = 0,63 \text{ см}.$$

IV. Вычисление удлинения стержней

Удлинение стержней  $D \ell$  вычислим, используя закон Гука:  $\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{EA}$ , здесь  $EA$  – жесткость стержня.

Имеем:

$$\ell_1 = \ell_2 = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} = 0,8 \cdot 2,24 \approx 1,8 \text{ м}; \quad \ell_3 = 0,8 \text{ м}.$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = -\frac{38,3 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,16 \cdot 10^{-3}} \approx -0,002 \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = \frac{65,25 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,27 \cdot 10^{-3}} \approx 0,002 \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EA_3} = \frac{10,34 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,04 \cdot 10^{-3}} \approx 0,001 \text{ м} = 1 \text{ мм}.$$

*Ответ.* Равнополочный уголок № 2,8; диаметры кольцевого сечения  $D = 2,32 \text{ см}$  и  $d = 1,4 \text{ см}$ ; сторона квадратного сечения  $b = 0,63 \text{ см}$ .

**3. Определение несущей способности** (предельно допускаемой нагрузки).

По вычисленному значению  $N_{max}$  вычисляют величину расчетной нагрузки:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq R \Rightarrow N_{max} \geq R \cdot A. \quad (4.17)$$

**Пример 4.3.** Чугунный брус прямоугольного поперечного сечения ( $b \times h$ ), один конец которого жестко заделан, нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ ,  $2q$  и силой  $F = 2q$  (рис. 4.11).

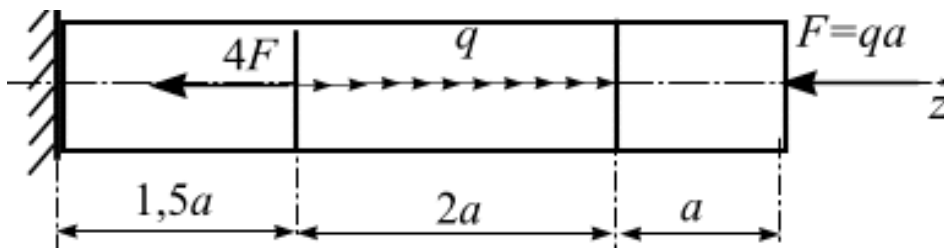


Рис. 4.11

Т р е б у е т с я:

- 1) построить эпюру продольных сил  $N$ ;
- 2) определить несущую способность бруса  $q$ .

Д а н о:  $\ell = 0,5 \text{ м}$ ;  $b = 10 \text{ см}$ ;  $h = 15 \text{ см}$ ; расчетное сопротивление материала растяжению  $R_t = 80 \text{ МПа}$ , сжатию –  $R_c = 120 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

### 1. Построение эпюры продольной силы $N(z_i)$

Вычислять реакции опор в заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы  $N_i(z_i)$  учитываем внешние силы со стороны свободного конца консоли.

Для данной схемы нагружения брус имеет три участка. Проведем произвольные сечения  $z_i$  на каждом участке (рис. 4.12, а). Рассматривая отсеченные части в равновесии, запишем аналитические выражения для продольной силы  $N_i(z_i)$ .

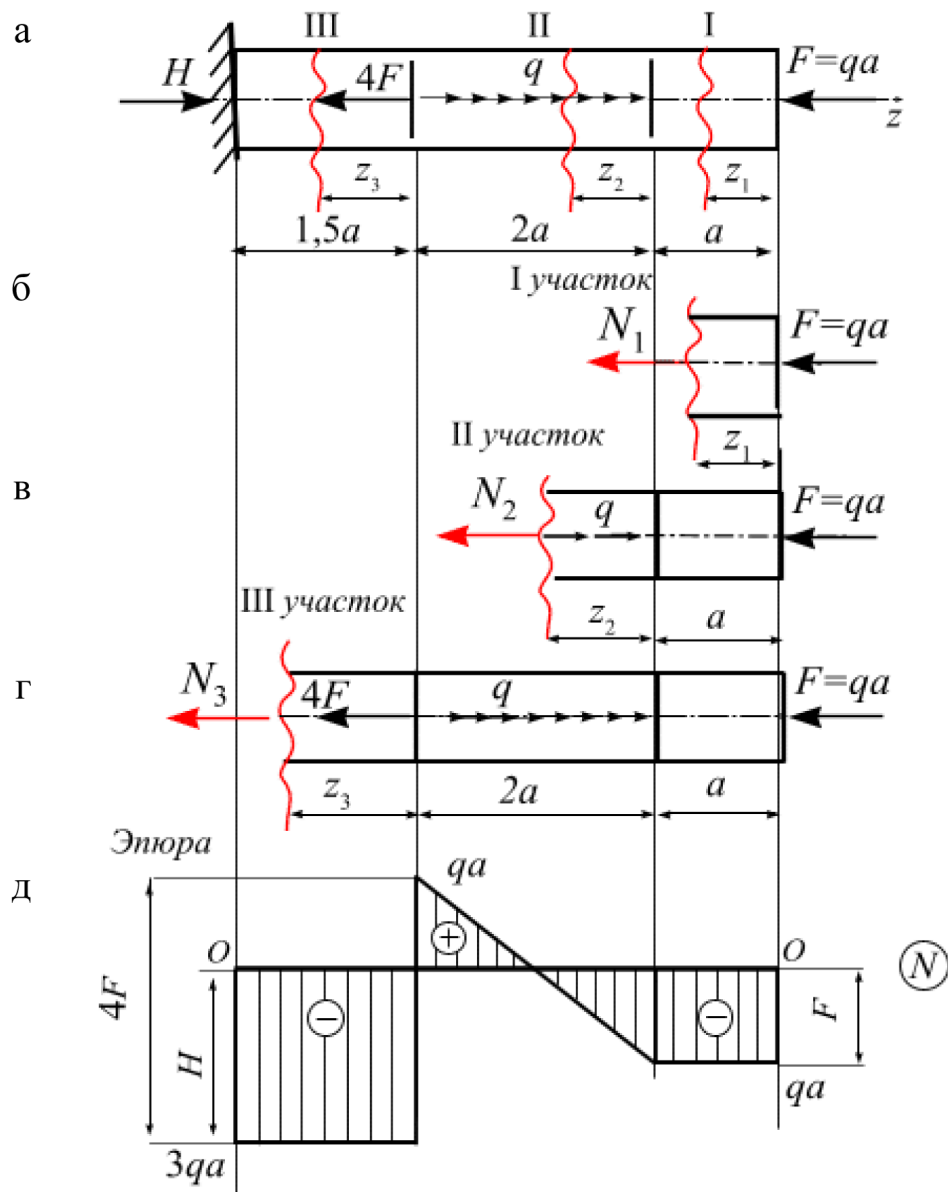


Рис. 4.12

**I участок**  $0 \leq z_1 \leq a$  (рис. 4.12, б):

$$N_1(z_1) = -F = -qa.$$

Продольная сила  $N_1$  *постоянна* на всем участке и вызывает сжатие I-го участка ( $N_1(z_1) < 0$ ).

**II участок**  $0 \leq z_2 \leq 2a$  (рис. 4.12, в):

$$N_2(z_2) = qz_2 - F \Rightarrow \begin{cases} N_2(0) = -F = -qa, \\ N_2(2a) = +q \cdot 2a - F = +2qa - qa = qa. \end{cases}$$

Продольная сила  $N_2$  *изменяется линейно на этом участке*, при  $0 \leq z_2 \leq \frac{F}{q}$  участок сжат:  $N_2(z_2) < 0$ , при  $\frac{F}{q} \leq z_2 \leq 2a$  участок растянут:  $N_2(z_2) > 0$ .

**III участок**  $0 \leq z_3 \leq 1,5a$  (рис. 4.12, г):

$$N_3(z_3) = -4F + q \cdot 2a - F = -4qa + 2qa - qa = -3qa.$$

Продольная сила  $N_3$  *постоянна* на всем участке и вызывает сжатие III-го участка ( $N_3(z_3) < 0$ ). Значение реакции в заделке  $H$  соответствует значению продольной силы на III участке при  $z_3 = 1,5a$ , т. е.  $H = N_3(z_3 = 1,5a) = 3qa$  и направлена к сечению.

Вычислив значения продольной силы  $N(z)$  на каждом участке, строим эпюру продольных сил. Для этого проведем параллельно оси бруса ось эпюры  $O - O$  (базис) и перпендикулярно к ней в выбранном масштабе отложим вычисленные значения  $N(z_i)$  (рис. 1.2, д): положительные значения откладываем вверх, отрицательные – вниз. Соединяем полученные точки прямыми линиями и, проставив знаки в поле эпюры, заштриховываем линиями, перпендикулярными базисной линии.

### Правила контроля построения эпюры $N$

1. Эпюру рекомендуют проверять (читать) от свободного конца стержня, тогда можно четко проследить нагружение бруса.

2. В сечении, где приложена *внешняя сила*, на эпюре продольных сил  $N$  возникает *скачок*, высота которого равна величине этой силы.

3. На участках, не нагруженных распределенной нагрузкой, эпюра  $N$  ограничена прямыми, параллельными базисной линии.

4. На участке, где действует линейно-распределенная нагрузка  $q(z)$ , усилие  $N$  *изменяется по линейному закону* и ограничено наклонной прямой.

Положительные значения продольных сил отложим вверх от базисной линии, отрицательные – вниз.

**2. Определение несущей способности бруса.** Опасное сечение установим по эпюре  $N$ : в сжатой части бруса – это любое сечение на третьем участке, в растянутой – сечение на втором участке.

Найдем нагрузку из условия прочности на *сжатие*:

$$\left| \frac{3q_c \ell}{A} \right| \leq R_c \Rightarrow q_c = \frac{A \cdot R_c}{3\ell} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6}{1,5} = 1200 \cdot 10^3 \frac{H}{м} = 1200 \frac{kH}{м}.$$

Вычислим нагрузку из условия прочности на *растяжение*:

$$\frac{q_t \ell}{A} \leq R_t \Rightarrow q_t \leq \frac{A \cdot R_t}{\ell} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6}{0,5} = 2400 \cdot 10^3 \frac{H}{m} = 2400 \cdot 10^3 \frac{kH}{m}.$$

Из двух значений  $q_c$  и  $q_t$  в качестве *несущей способности* бруса выбираем наименьшее, т. е.  $q = 1200 \text{ кН/м}$ .

**Пример 4.4.** Для бруса из хрупкого материала постоянного поперечного сечения, жестко закрепленного одним концом, нагруженного, как показано на (рис. 4.13), требуется вычислить несущую способность из расчета на прочность.

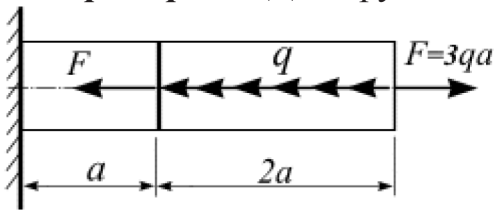


Рис. 4.13

Вычислить напряжения в опасных сечениях бруса.

*Дано:* площадь поперечного сечения бруса  $A = 6 \text{ см}^2$   $a = 1 \text{ м}$ ; расчетное сопротивление материала растяжению –  $R_t = R_{\text{раст.}} = 80 \text{ МПа}$ , сжатию –  $R_c = R_{\text{сжат.}} = 120 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

**Построим эпюру  $N$ .** Разделим брус на два участка (рис. 4.14, а).

**Участок I:** ( $0 \leq z_1 \leq 2a$ ):

$$N_1(z_1) = F - qz_1 \Rightarrow \begin{cases} N_1(z_1 = 0) = F = 3qa, \\ N_1(z_1 = 2a) = 3qa - 2qa = qa. \end{cases}$$

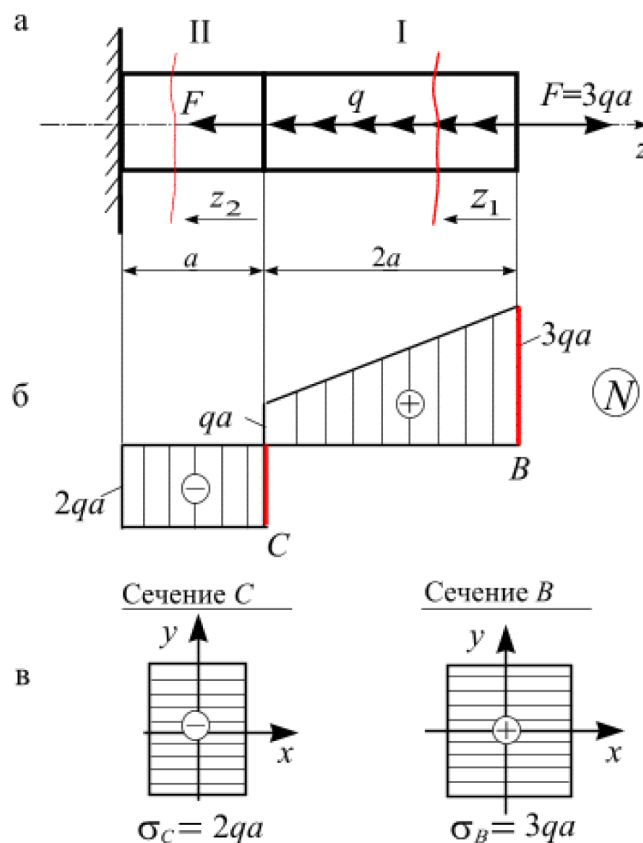


Рис. 4.14

**Участок II:** ( $0 \leq z_2 \leq a$ ),  $N_2 = -2qa$  (*const*).

Строим эпюру продольных сил  $N$  (рис. 4.14, б). Сечения, в которых  $N$  достигнет максимальных значений, будут являться опасными (рис. 4.14, в).

1. Так как материал бруса по-разному сопротивляется сжатию и растяжению ( $R_c \neq R_t$ ), рассмотрим отдельно две зоны (рис. 4.14, в):

– зона (область) растяжения – опасное сечение  $B$ :  $N_{max}^t = 3qa$ ;

– зона (область) сжатия – опасное сечение  $C$ :  $N_{max}^c = |-2qa|$ .

Для каждой зоны составим условие прочности и вычислим нагрузку, допускаемую в зоне сжатия –  $q_c$  и в зоне растяжения –  $q_t$ .

**Участок  $BD$**  ( $0 \leq z_2 \leq a$ ),  $N_2 = -2qa$  (*const*).

Зона сжатия

Зона растяжения

$$\sigma_{cmax} = \left| -\frac{2q_c a}{A} \right| \leq R_c;$$

$$\sigma_{tmax} = \frac{3q_t a}{A} \leq R_t;$$

$$q_c \leq \frac{A \cdot R_c}{2a} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6}{2 \cdot 1} =$$

$$= 360 \cdot 10^2 \text{ Н/м} = 36 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$q_t \leq \frac{A \cdot R_t}{3a} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6}{3 \cdot 1} =$$

$$= 160 \cdot 10^2 \text{ Н/м} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Из двух вычисленных значений нагрузки  $q_c$  и  $q_t$  в качестве *несущей способности* выбираем меньшую:  $q \leq 16$  (кН/м).

2. В опасных сечениях каждой зоны вычислим напряжение:

$$\text{сечение } C: \sigma_{max}^c = \left| -\frac{2qa}{A} \right| = \frac{2 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{6 \cdot 10^{-4}} = 53 \text{ МПа}, R_c = 120 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{max}^c < R_c.$$

Брус в зоне сжатия имеет большой запас прочности:

$$\text{сечение } B: \sigma_{max}^t = \frac{3qa}{A} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{6 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа}, R_t = 80 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{max}^t = R_t.$$

В зоне растяжения прочность бруса обеспечена.

**II. Расчет на жесткость** ограничивает величину деформации перемещений.

Для обеспечения нормальной работы конструкции дополнительно ставится условие – упругое перемещение  $\delta_z$  какого-либо сечения бруса не должно превосходить заданной допускаемой величины  $[\delta]$ .

**Условие жесткости:**  $\delta_z \leq [\delta]$ , или  $\Delta \ell \leq [\delta]$ , (4.18)

где  $\delta_z$  – перемещение заданного сечения (либо наибольшее перемещение);  $[\delta]$  – допускаемое перемещение, которое регламентируется СНиП.



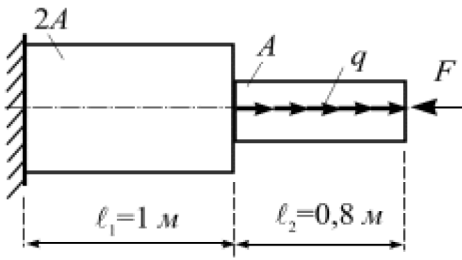


Рис. 4.15

**Пример 4.5.** Для ступенчатого бруса (рис. 4.15), жестко заделанного одним концом, построить эпюру продольных сил и эпюру продольных перемещений.

Дано:  $q = 200 \text{ кН/м}$ ;  $F = 100 \text{ кН}$ ;  $A = 5 \text{ см}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

**Решение**

**I. Построение эпюры продольной силы  $N$ .** Для построения эпюры разделим брус на два участка. Строить эпюру начинаем от свободного конца бруса (рис. 4.16, а).

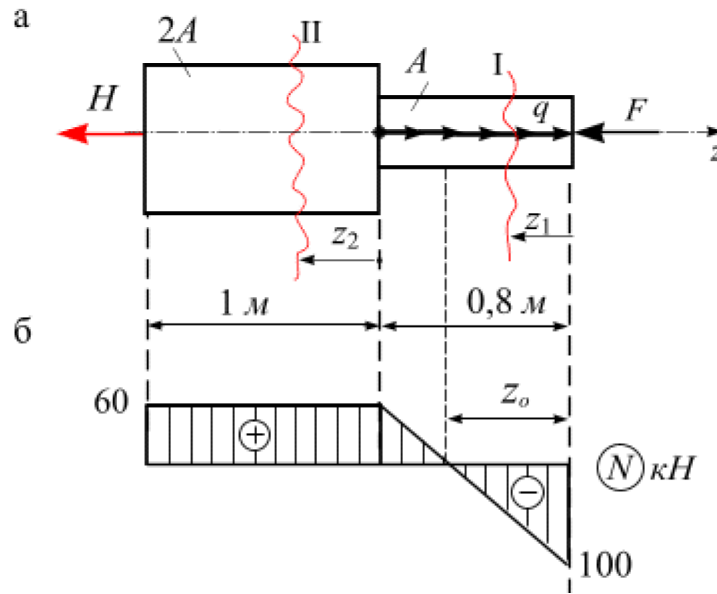


Рис. 4.16

**I участок,  $0 \leq z_1 \leq 0,8 \text{ м}$ ;**

$$N(z_1) = -F + qz_1 \Rightarrow \begin{cases} N(z_1 = 0) = -F = |-100| \text{ кН}; \\ N(z_1 = 0,8) = -F + ql_1 = -100 + 200 \cdot 0,8 = 60 \text{ кН}; \\ N(z_o) = 0 \Rightarrow z_o = \frac{F}{q} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ м}. \end{cases}$$

**II участок,  $0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м}$ :**

$$N(z_2) = -F + ql_1 = -100 + 200 \cdot 0,8 = 60 \text{ кН}.$$

Эпюра продольных сил показана на (рис. 4.16, б).

Для проверки численного значения  $N$  в заделке вычислим реакцию заделки  $H$  из уравнения равновесия:

$$\sum F_z = 0, -H + q \cdot l_2 - F = 0 \Rightarrow H = ql_2 - F = 200 \cdot 0,8 - 100 = 60 \text{ кН}.$$

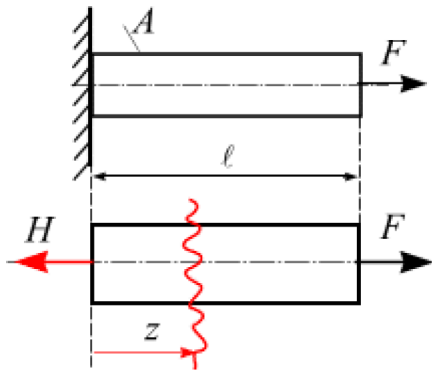


Рис. 4.17

Справка. При осевом нагружении бруса длиной  $\ell$  и постоянной площадью поперечного сечения  $A$ , зашцеplенного одним концом, перемещение  $\delta_z$  любого сечения  $z$  будет соответствовать удлинению участка между зашцеplением бруса и сечением  $z$  (рис. 4.17).

II. Построение эпюры продольных перемещений. Эпюру перемещений начинаем строить от зашцеplенного конца. Перемещение любого сечения, находящегося на расстоянии  $z$  от зашцеplенного конца стержня, вычислим по формуле:  $\delta_{zi} = \int_{\ell} \frac{N_{zi} dz_i}{EA_i}$ .

I участок. Сечение  $z'_2$  перемещается на  $d_2$  в результате деформации части стержня, заключенной между данным сечением и заделкой (рис. 4.18, а), здесь:  $N(z'_2) = H = 60 \text{ kH}$ .

Перемещение сечения  $c - c$  будет равно:

$$\Delta \ell_{c-c} = \int_0^1 \frac{N(z'_2) dz_2}{E \cdot 2A} = \frac{H}{2EA} \int_0^1 dz_2 = \frac{H}{2EA} \cdot z_2 \Big|_0^1 = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

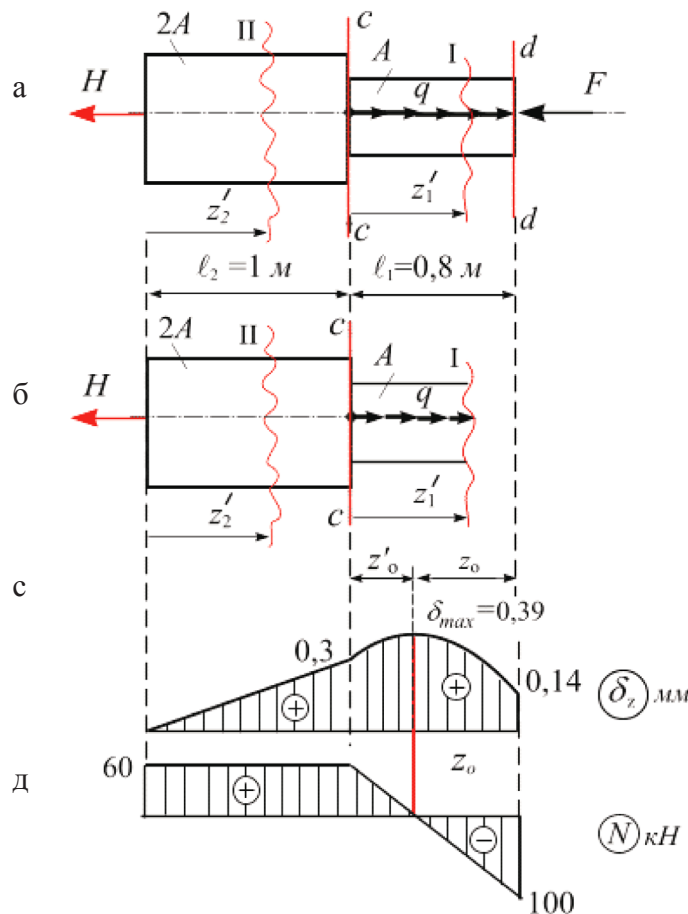


Рис. 4.18

**II участок.** В результате деформации второго участка первый участок как твердое тело перемещается на величину  $\Delta_{c-c} = 0,3$  мм. Перемещение сечения  $d-d$  складывается из перемещения  $\delta_{c-c}$  и деформации части стержня, заключенной между сечением  $c-c$  и  $d-d$  (рис. 4.18, б).

Вычислим перемещение сечения  $\delta_{d-d}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} N(z'_1) &= H - qz_1 \\ \delta_{d-d} &= \delta_{c-c} + \int_0^{0,8} \frac{N(z'_1) dz_1}{EA} = \delta_{c-c} \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \delta_{c-c} + \int_0^{0,8} \frac{(H - qz_1) dz_1}{EA} = \delta_{c-c} + \frac{H}{EA} \int_0^{0,8} dz_1 - \frac{q}{EA} \int_0^{0,8} z_1 dz_1 = \\ & = \delta_{c-c} + \frac{H}{EA} \cdot z_1 \Big|_0^{0,8} - \frac{q}{2EA} \cdot z_1^2 \Big|_0^{0,8} = 3 \cdot 10^{-4} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} - \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,8^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \\ & = (3 + 4,8 - 6,4) \cdot 10^{-4} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,14 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Перемещение произвольного сечения  $\delta(z'_1)$  изменяется по квадратичному закону. Вычислим координату  $z'_o$ , при которой  $\delta(z'_1)$  принимает экстремальное значение:

$$\frac{d\delta(z)}{dz} = N_z \cdot \frac{1}{EA} = (H - qz'_o) \cdot \frac{1}{EA} = 0 \Rightarrow z'_o = \frac{H}{q} = \frac{60}{200} = 0,3 \text{ м}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{max}(z'_o = 0,3) &= \delta_{c-c} + \int_0^{0,3} \frac{(H - qz_2) dz_2}{EA} = \delta_{c-c} + \frac{H}{EA} \cdot z_2 \Big|_0^{0,3} - \frac{q}{2EA} \cdot z_2^2 \Big|_0^{0,3} = \\ & = 3 \cdot 10^{-4} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} - \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,3^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \\ & = 3 \cdot 10^{-4} + 1,8 \cdot 10^{-4} - 0,9 \cdot 10^{-4} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,39 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Эпюра перемещений  $\delta(z_i)$  показана на рис. 4.18, с. Полная абсолютная деформация стержня равна перемещению  $d-d$ :  $\Delta l = 14$  мм (удлинение).

Эпюра продольных сил  $N$  показана на рис. 4.18, d.

# Глава 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

## 5.1. Статические моменты плоского сечения. Центр тяжести

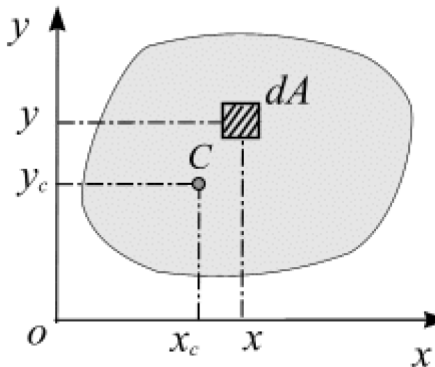


Рис. 5.1

Рассмотрим произвольное плоское сечение, связанное с координатными осями  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 5.1). Выделим элемент площади  $dA$  с координатами  $x, y$ . Площадь плоского сечения равна сумме элементарных площадок:

$$A = \sum_{i=1}^N \Delta A [N \rightarrow \infty] A = \int_A dA. \quad (5.1)$$

**Статическим моментом** плоского сечения относительно данной оси называется взятая по всей его площади  $A$  сумма (интеграл) произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояние до этой оси:

$$S_y = \int_A x dA, \quad S_x = \int_A y dA.$$

Размерность статического момента – единица длины в кубе ( $см^3, м^3$ ). В зависимости от знаков координат они могут принимать положительные, отрицательные и равные нулю значения.

Пусть  $x_c, y_c$  – координаты центра тяжести сечения. Тогда:

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{S_x}{A}. \quad (5.2)$$

Откуда:

$$S_x = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot x_c, \quad (5.3)$$

где  $A$  – площадь сечения.

Оси координат, начало которых совпадает с центром тяжести сечения, называют **центрными осями**. Статические моменты относительно центральных осей равны нулю ( $x_c = 0, y_c = 0$ ).

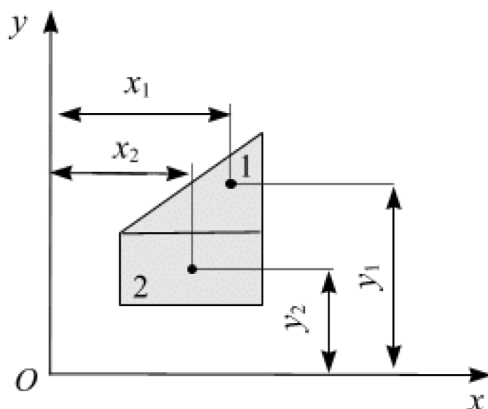


Рис. 5.2

Например, для вычисления статического момента сложного сечения (рис. 5.2) разобьем его на два простейших сечения: 1 – треугольник и 2 – прямоугольник. Для каждого сечения известны площадь поперечного сечения и положение центра тяжести  $(x_i, y_i)$ . Статические моменты сложного сечения относительно осей  $x, y$  равны:

$$\begin{cases} S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots A_n y_n = \sum S_{xi}; \\ S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots A_n x_n = \sum S_{yi}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Тогда:

$$\begin{cases} x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i}; \\ y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i}. \end{cases}$$

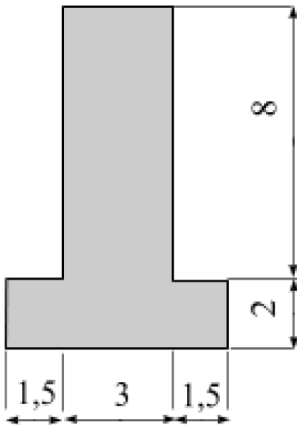


Рис. 5.3

**Использование симметрии.** Если сечение имеет две и более оси симметрии (прямоугольник, двутавр, круг и т. д.), то центр тяжести сечения будет совпадать с точкой пересечения осей симметрии. Если сечение имеет одну ось симметрии (швеллер, равнополочный уголок и т. д.), то центр тяжести сечения будет находиться на оси симметрии.

**Пример 5.1.** Вычислить положение центра тяжести заданного таврового сечения (рис. 5.3). Все размеры указаны на рисунке в см.

**Решение.** Тавровое сечение имеет ось симметрии, обозначим ее  $Oy$ . Тогда координаты центра тяжести этого сечения относительно осей  $Oxy$  лежат на оси симметрии, т. е. на оси  $Oy$ .

Разделим тавровое сечение на два прямоугольника, один из которых расположен горизонтально, другой – вертикально (рис. 5.4).

Выберем вспомогательные оси  $C_i x_i y_i$ ,  $i = 1, 2$ , начало координат которых  $C_i$  совпадает с центром тяжести  $i$ -го прямоугольника. Вычислим площадь и координаты центра тяжести первого и второго прямоугольников и запишем результат в табл. 5.1.

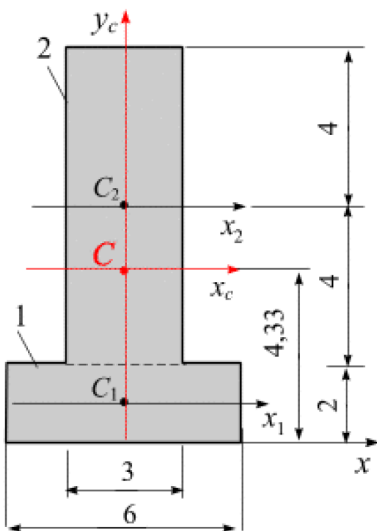


Рис. 5.4

Таблица 5.1

Первый прямоугольник	$C_1(0, 1)$	$A_1 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2$ ,	$x_1 = 0 \text{ см}$	$y_1 = 1 \text{ см}$
Второй прямоугольник	$C_2(0, 6)$	$A_2 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2$	$x_2 = 0 \text{ см}$	$y_2 = 6 \text{ см}$

Статический момент таврового сечения вычислим по формуле (5.4):

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1 \cdot 12 + 6 \cdot 24}{12 + 24} = \frac{156}{36} = 4,33 \text{ см.}$$

Откладываем вычисленную координату от оси  $x$  на схеме (рис. 5.4), проводим центральные оси  $Sx_c y_c$ .

*Примечание.* При правильном вычислении центр тяжести всего сечения (точка  $C$ ) должен лежать на прямой  $C_1C_2$ , соединяющей центры тяжести простых сечений (прямоугольников), и делить прямую  $C_1C_2$  на отрезки, обратно пропорциональные площадям соответствующих сечений (прямоугольников). Проверим:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1C}{C_2C} \Rightarrow \frac{24}{12} = \frac{3,33}{1,67} = 2.$$

## 5.2. Осевые моменты инерции сечений

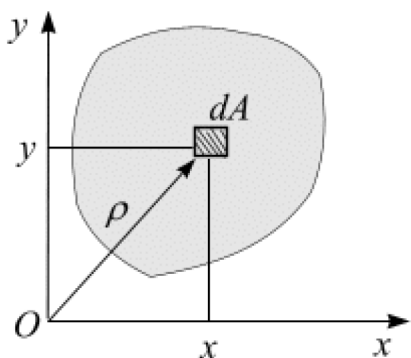


Рис. 5.5

**Осевым** моментом инерции сечения относительно данной оси называется сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояний до этой оси (рис. 5.5).

$$J_x = \sum_{i=1}^N y_i^2 A_i \quad J_y = \sum_{i=1}^N x_i^2 A_i. \quad (5.5)$$

Здесь  $N$  – число элементарных площадок.

При  $N \rightarrow \infty$  имеем:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (5.5')$$

Пусть  $\rho$  – расстояние элементарной площади до центра координат  $Oxy$  (рис. 5.5).

**Полярным** моментом инерции сечения относительно центра  $O$  (полюса) называется взятая по всей его площади  $A$  сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояний  $r$  до этой точки:

$$J_\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i^2 A_i. \quad (5.6)$$

При  $N \rightarrow \infty$

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (5.6')$$

Учитывая, что  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , имеем:

$$J_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_\delta + J_\delta;$$

$$J_\rho = J_x + J_y.$$

Отметим, что осевые и полярные моменты инерции всегда положительны.

**Центробежным** моментом инерции сечения относительно осей координат  $Ox$  и  $Oy$  называется взятая по всей его площади  $A$  сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояния до этих осей:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i A_i. \quad (5.7)$$



При  $N \rightarrow \infty$  имеем:

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (5.7')$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, когда  $x \cdot y > 0$  (рис. 5.6, а), или отрицательным, когда  $x < 0$  и  $y > 0$ , следовательно  $x \cdot y < 0$  (рис. 5.6, б). Для сечения, симметричного относительно оси  $y$  (рис. 5.6, в) центробежный момент равен нулю, т. к. в первом квадранте  $x \cdot y > 0$ , а во втором —  $x \cdot y < 0$ , следовательно:  $\int (x \cdot y) dA = 0$ .

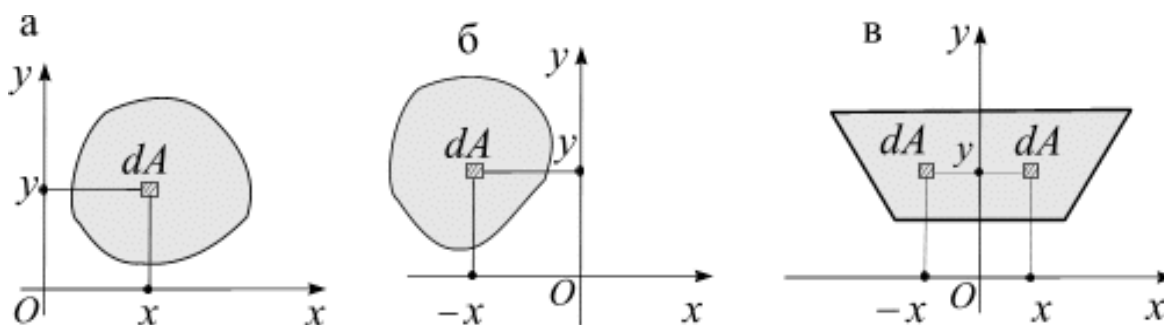


Рис. 5.6

Таким образом, *центробежный момент инерции сечения относительно осей симметрии равен нулю.*

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют *главными центральными осями*.

Единицы измерения моментов инерции:  $см^4$ ,  $м^4$ .

### 5.3. Радиусы инерции

*Момент инерции сечения относительно оси можно представить в виде произведения площади сечения на квадрат величины, называемой радиусом инерции:*

$$J_x = i_x^2 \cdot A, \quad J_y = i_y^2 \cdot A. \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует, что:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Единицы измерения радиусов инерции:  $см$ ,  $м$ .

### 5.4. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции относительно центральных осей  $Oxy$ :  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  (рис. 5.7). Координаты центра тяжести в новой системе координат  $O_1x_1y_1$ :

$$y_1 = y_c + a, \quad x_1 = x_c + b,$$

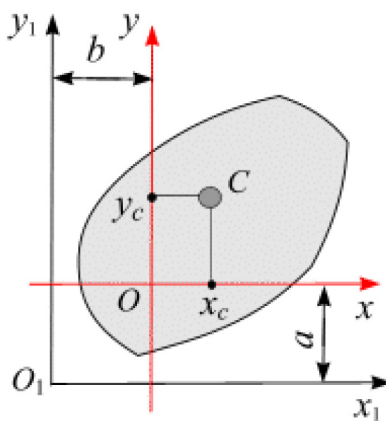


Рис. 5.7

где  $a$  и  $b$  – расстояния между исходными и новыми осями. Пользуясь общими выражениями моментов инерции, получим:

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y_c + a)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 \int_A dA.$$

Аналогично для момента инерции  $J_{y_1}$ :

$$J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x_c + b)^2 dA = \int_A x_c^2 dA + 2b \int_A x_c dA + b^2 \int_A dA.$$

Зависимость для центробежного момента относительно осей  $O_1x_1y_1$  примет вид:

$$J_{x_1y_1} = \int_A x_1y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + a \int_A x dA + b \int_A y dA + ab \int_A dA.$$

Тогда формулы моментов инерции относительно осей  $O_1x_1y_1$ :

$$J_{x_1} = J_x + 2aS_x + a^2 A,$$

$$J_{y_1} = J_y + 2bS_y + b^2 A, \tag{5.9}$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} + bS_x + aS_y + abA.$$

Напомним, что в формулах (5.12) геометрические характеристики  $S_x, S_y, J_x, J_y$  и  $J_{xy}$  известны и определены относительно исходных осей  $Oxy$ : Если эти оси *центральные*, то  $S_x = S_y = 0$ , тогда формулы (5.12) упрощаются:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A,$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 A, \tag{5.10}$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} + abA.$$

Формулы (5.13) называют *формулами перехода от центральных осей к осям, параллельным им*. Из этих формул следуют определения:

– Момент инерции относительно любой оси, параллельной данной, равен моменту инерции относительно **центральной оси**, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями.

– Центробежный момент инерции относительно произвольных осей, параллельных заданным, равен центробежному моменту относительно **центральных осей** плюс произведение площади сечения на расстояние между осями.

Отметим, что при вычислении моментов инерции по формулам (5.9) расстояния  $a$  и  $b$  следует брать с учетом знака в системе координат  $O_1x_1y_1$ . Из формул (5.10) следует: *из семейства параллельных осей минимальный момент инерции будет относительно центральной оси*. Эти формулы часто применяют для вычисления моментов инерции сложных фигур.

Моменты инерции относительно осей  $O_1x_1y_1$ , параллельных центральным осям  $Oxy$ , вычисляются по формулам Шредера-Гюйгенса:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 A; \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 A; \\ J_{x_1y_1} &= J_{xy} + abA, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $a, b$  – расстояние между осями  $Ox_1$  и  $Ox$ ,  $Oy_1$  и  $Oy$  соответственно;  $A$  – площадь сечения.

Значения моментов инерции относительно центральных осей и других геометрических характеристик для прокатных профилей (двутавры, швеллеры, равнополочные уголки и т. д.) находят в сортаменте (таблицы прокатных профилей, поставляемых металлургическими заводами в соответствии с требованиями ГОСТов).

### 5.5. Моменты инерции простых фигур

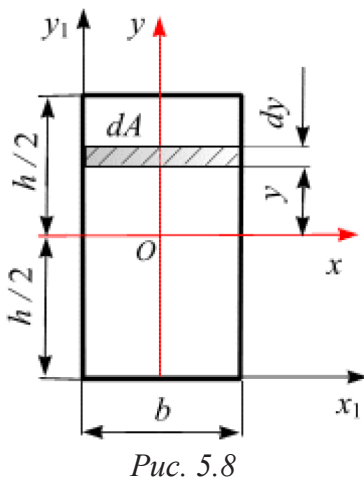


Рис. 5.8

**Прямоугольник.** Вычислим моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $Oxy$ , параллельных его сторонам (рис. 5.8).

Выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника  $dA = b dy$ . Подставляя значение  $dA$  в формулу (6.6) и интегрируя, получим:

$$J_{x_1} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} (y^2 b) dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = 2b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h/2} = 2b \frac{h^3}{24} = \frac{bh^3}{12}.$$

По аналогии можно вычислить  $J_y$ , и окончательно формулы для осевых моментов инерции относительно центральных осей имеют вид:

$$J_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (5.12)$$

Вычислим моменты инерции для осей  $O_1x_1y_1$  по формулам параллельного переноса. Имеем:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A \Rightarrow J_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3};$$

$$J_{y_1} = J_y + a^2 A \Rightarrow J_{y_1} = \frac{h \cdot b^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{h \cdot b^3}{3}.$$

Центробежный момент инерции  $J_{xy} = 0$ , т. к. оси  $Ox$  и  $Oy$  являются осями симметрии.

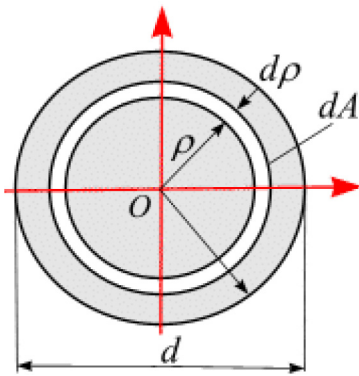


Рис. 5.9

**Диск.** Вычислим полярный момент инерции диска относительно его центра (рис. 5.9). Выделим бесконечно тонкое кольцо, площадь которого равна  $dA = 2\pi \cdot \rho d\rho$ .

Подставляя значение  $dA$  в выражение (5.6') и интегрируя, получим:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (5.13)$$

На основании выражения  $J_{\rho} = J_x + J_y$  и в силу симметрии получим осевые моменты инерции круга:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_{\rho} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (5.14)$$

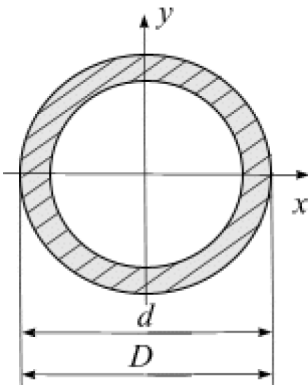


Рис. 5.10

**Кольцо.** Полярный момент инерции кольца вычислим как разность моментов инерции большого круга диаметром  $D$  и малого круга диаметром  $d$  (рис. 5.10):

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4). \quad (5.15)$$

Здесь  $\alpha = \frac{d}{D}$ .

Осевые моменты инерции кольца:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (5.16)$$

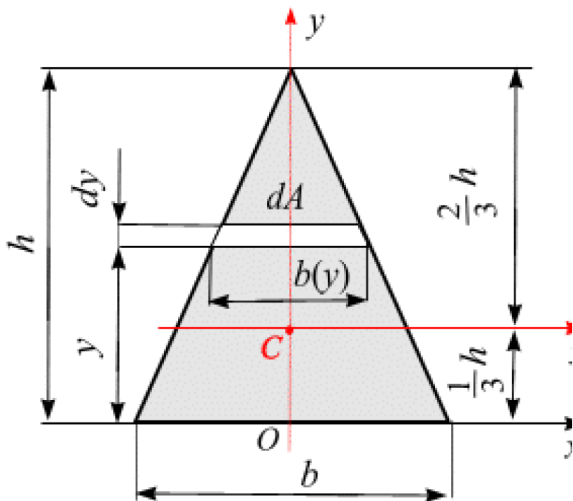


Рис. 5.11

**Треугольник.** Вычислим момент инерции треугольника относительно оси  $Ox$ , проходящей через его основание (рис. 5.11).

Разбиваем площадь фигуры на элементарные полоски, параллельные данной оси. Ширина полоски  $b(y)$ , находящейся на расстоянии  $y$  от оси  $Ox$ :

$$\begin{aligned} \frac{b(y)}{b} &= \frac{h-y}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow b(y) &= b \frac{(h-y)}{h} = b \left(1 - \frac{y}{h}\right). \end{aligned}$$

Тогда площадь полоски:  $dA = b(y) dy = b \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot dy$ .  
Получим:

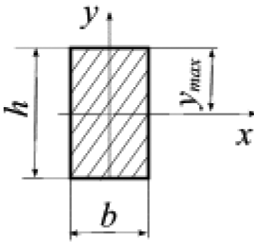
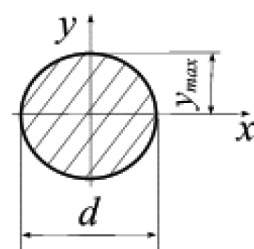
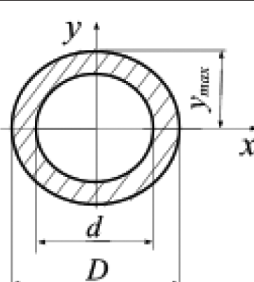
$$J_{x_1} = \int_A y^2 dA = \int_0^h b \left(1 - \frac{y}{h}\right) y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Относительно *центральной оси*  $S_x$ , используя формулу параллельного переноса), имеем:

$$J_x = J_{x_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{36}.$$

В табл. 5.2 приведены значения геометрических характеристик характерных сечений.

Таблица 5.2

Поперечное сечение	Центр тяжести	Осевой момент инерции, $J_x$	Радиус инерции
	$x_c = 0; y_c = 0.$	$J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12}.$	$i_x = 0,289h;$ $i_y \approx 0,289b.$
	$x_c = 0; y_c = 0.$ $d = 2r.$	$J_\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32};$ $J_y = J_x = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$	$i_x = i_y = \frac{d}{4}.$
	$x_c = 0; y_c = 0.$	$J_y = J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4);$ $\alpha = \frac{d}{D}.$	$i_x = i_y =$ $= \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}.$

## 5.6. Примеры вычисления центральных моментов инерции

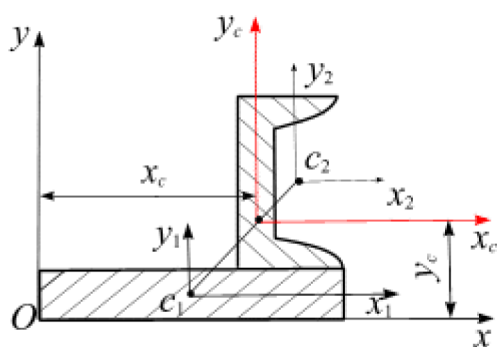


Рис. 5.12

Последовательность вычислений главных моментов инерции (рис. 5.12)

1. Проводят произвольную систему координат  $Ox_1y_1$ .

2. Разбивают сечение на простые фигуры и по формулам определяют положение центра тяжести  $C_i$  каждой фигуры.

3. Вычисляют моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей  $C_i x_i y_i$ , используя сортамент или по формулам.

1. Вычисляют центр тяжести составной фигуры.

1. Вычисляют центр тяжести составной фигуры.

2. Через точку  $C$  проводят центральные оси  $Cx_{\tilde{n}}y_{\tilde{n}}$ , параллельно осям простых фигур.

3. Вычисляют моменты инерции простых фигур относительно центральных осей сечения, используя формулы параллельного переноса.

4. Определяют центральные моменты инерции всего сечения как сумму соответствующих моментов простых фигур.

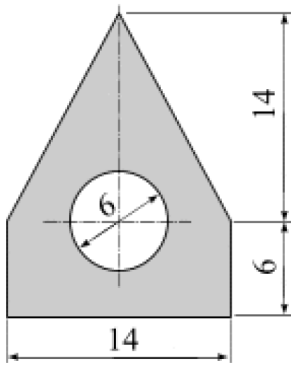


Рис. 5.13

**Пример 5.2.** Для заданного поперечного сечения вычислить максимальный момент инерции заданного сечения, относительно центральных осей (рис. 5.13). Размеры на схеме заданы в см.

**Решение.** Заданное сечение имеет ось симметрии, обозначим ее  $Oy$  (рис. 5.14). Тогда координаты центра тяжести этого сечения будут лежать на этой оси.

Разобьем заданное сечение на простые: прямоугольник (1), треугольник (2), круг (3). За вспомогательную систему выберем центральные оси прямоугольника  $C_1x_1y_1$ .

Вычислим площадь и координаты центра тяжести простых сечений, запишем результат в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Прямоугольник	$A_1 = 14 \cdot 6 = 84 \text{ см}^2$	$x_1 = 0 \text{ см}$	$y_1 = 0 \text{ см}$
Треугольник	$A_2 = \frac{1}{2} 14 \cdot 14 = 98 \text{ см}^2$	$x_2 = 0 \text{ см}$	$y_2 = 7,7 \text{ см}$
Круг	$A_3 = -\pi \cdot R^2 =$ $= -3,14 \cdot 3^2 = -28,3 \text{ см}^2$	$x_2 = 0 \text{ см}$	$y_2 = 3 \text{ см}$

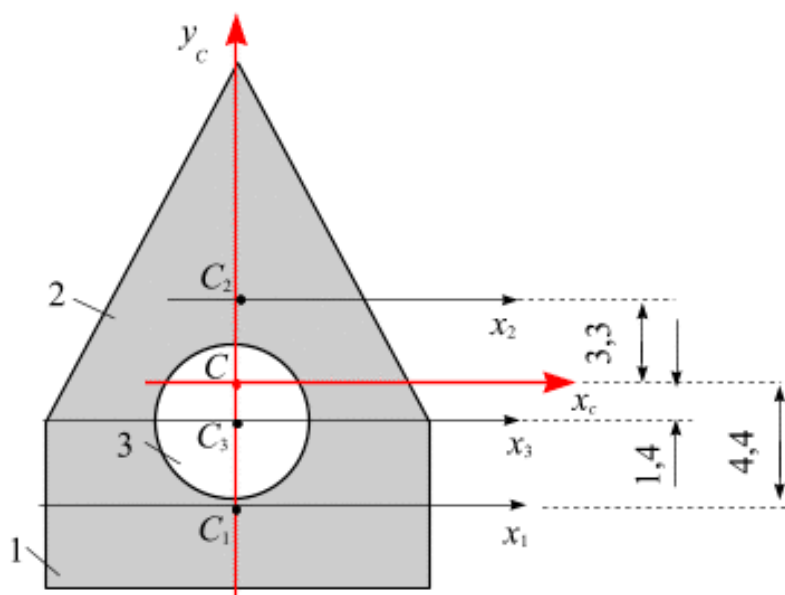


Рис. 5.14



Для вычисления координаты центра тяжести сечения воспользуемся методом отрицательных площадей – заданное сечение имеет круглый вырез.

Имеем:

$$y_c = \frac{\sum S x_i}{\sum A_i} = \frac{S_{1x_1} + S_{2x_1} - S_{3x_1}}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{A_1 \cdot y_{c_1} + A_2 \cdot y_{c_2} - A_3 \cdot y_{c_3}}{A_1 + A_2 - A_3} =$$

$$= \frac{0 + 98 \cdot 7,7 - 28,3 \cdot 3}{84 + 98 - 28,3} = 4,4 \text{ см.}$$

Отмечаем точку с координатами центра тяжести  $C(x_c, y_c)$  на схеме и проводим центральные оси сечения  $Sx_c y_c$  (рис. 5.14).

Вычислим центральные моменты инерции.

Имеем:

прямоугольник:  $J_{1x} = \frac{14 \cdot 6^2}{12} = 252 \text{ см}^4, J_{1y} = \frac{6 \cdot 14^2}{12} = 1372 \text{ см}^4;$

треугольник:  $J_{2x} = \frac{14 \cdot 14^2}{36} = 1067,1 \text{ см}^4, J_{2y} = \frac{14 \cdot 14^2}{48} = 800,3 \text{ см}^4;$

круг:  $J_{3y} = J_{3x} = \frac{\pi \cdot d^2}{64} = \frac{3,14 \cdot 6^2}{64} = 63,6 \text{ см}^4.$

Вычисляем главные моменты инерции заданного сечения:

$$J_{yc} = J_{1y} + J_{2y} - J_{3y} = 1372 + 800,3 - 63,6 = 2108,749 \text{ см}^4;$$

$$J_{xc} = (J_{1x} + a_1^2 \cdot A_1) + (J_{2x} + a_2^2 \cdot A_2) - (J_{3x} + a_3^2 \cdot A_3) =$$

$$= (252 + 4,4^2 \cdot 84) + (1067,1 + 3,3^2 \cdot 98) - (63,6 + 1,4^2 \cdot 28,3) =$$

$$= 1878,24 + 2134,32 - 119,07 = 3893,49 \text{ см}^4,$$

где  $a_1 = 4,4 \text{ см}$  – расстояние между осями  $x_c$  и  $x_1$ ;  $a_2 = 3,3 \text{ см}$  – расстояние между осями  $x_c$  и  $x_2$ ;  $a_3 = 1,4 \text{ см}$  – расстояние между осями  $x_c$  и  $x_3$ .

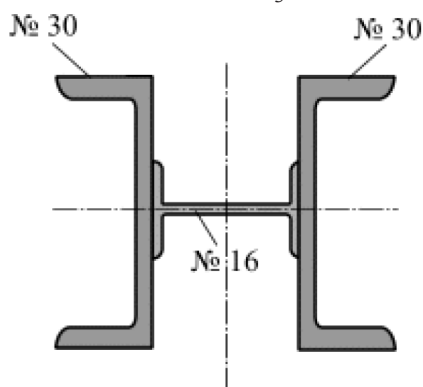


Рис. 5.15

**Пример 5.3.** Вычислить главные моменты инерции для заданного симметричного сварного сечения, составленного из прокатных профилей (рис. 5.15): двутавр № 16, швеллер с параллельными гранями полок № 30.

**Решение.** Из сортамента выберем геометрические характеристики швеллера № 30 и двутавра № 16 (табл. 5.4, 5.5).

## Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240-89)

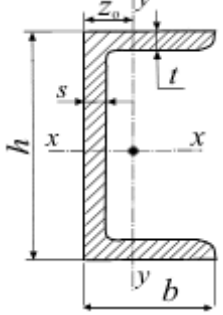
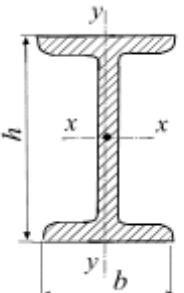
	<p> <math>h</math> – высота швеллера  <math>b</math> – ширина полки  <math>I</math> – момент инерции  <math>z_0</math> – расстояние от оси <math>y</math> до наружной грани стенки  <math>A</math> – площадь поперечного сечения         </p>						
	Номер швеллера	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
	$h$	$b$					
30	300	100	40,5	5830	393	2,83	

Таблица 5.5

## Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. Сортамент (ГОСТ 8239-89)

	<p> <math>B</math> – ширина большей полки  <math>b</math> – ширина меньшей полки  <math>I_x</math> – момент инерции  <math>A</math> – площадь поперечного сечения         </p>						
	Номер двутавра	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$I_{xy}, \text{см}^4$
	$h$	$b$					
16	160	81	20,2	873	58,6	51,18	

**Центральные моменты инерции.** Заданное сечение имеет две оси симметрии, следовательно, центр тяжести сечения находится на пересечении этих осей (рис. 5.16). Размеры на схеме показаны в см. Эти оси будут являться главными центральными осями данного сечения  $Sx_c y_c$ .

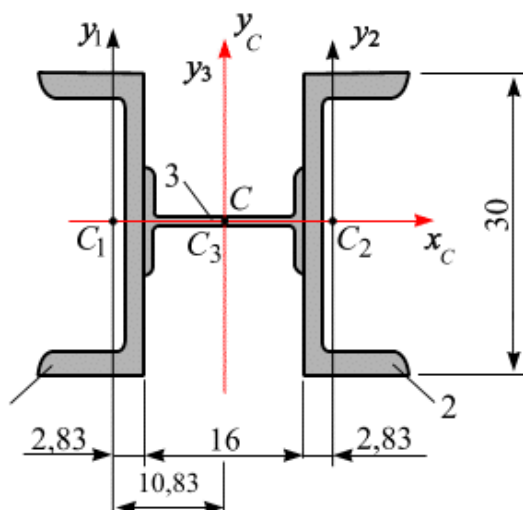


Рис. 5.16

Заданное сечение составлено из прокатных профилей (двутавра и двух швеллеров) таким образом, что собственные оси швеллеров (ось  $x-x$ , табл. 1), а для двутавра – собственная ось (ось  $y-y$ , табл. 1), совпадают с главной центральной осью составленного сечения  $x_c$  (рис. 5.16). Следовательно, для вычисления главного момента инерции всего сечения относительно оси  $x_c - J_{xc}$  достаточно просуммировать моменты инерции швеллеров и двутавра (для двутавра нужно взять  $J_y$ , т. к. в схеме двутавр развернут в сечении на  $90^\circ$ ):

$$J_{xc} = J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} = 5830 + 5830 + 58,6 = 11718,6 \text{ см}^4.$$

Вычислим момент инерции швеллеров относительно оси  $y_c$ . Ввиду симметричного расположения швеллеров в сечении имеем:

$$J_{1yc} = J_{2yc} = J_{1y} + a_1 \cdot A_1 = 393 + 10,83^2 \cdot 40,5 = 5143,2 \text{ см}^4.$$

Вычислим главный момент инерции составленного сечения относительно главной центральной оси  $y_c - J_{yc}$ . Для двутавра, т. к. он ориентирован в плоскости иначе, чем показано в сортаменте, используем  $J_x$ . Момент инерции составного сечения:

$$J_{yc} = J_{1yc} \cdot 2 + J_{3yc} = 5143,2 \cdot 2 + 873 = 11159,4 \text{ см}^4.$$

Ответ:  $J_{xc} = 11718,6 \text{ см}^4$ ;  $J_{yc} = 11159,4 \text{ см}^4$ .

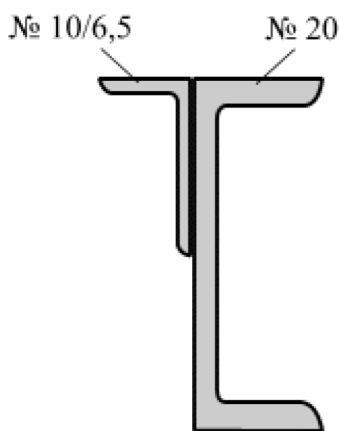


Рис. 5.17

**Пример 5.4.** Для заданного несимметричного поперечного сечения (рис. 5.17), состоящего из двух профилей, требуется найти положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции.

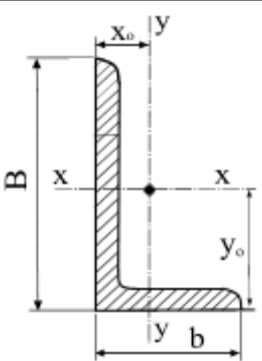
**Решение.** Из сортамента выберем геометрические характеристики швеллера № 20 и неравнополочного уголка № 10/6,5 (табл. 5.6, 5.7).

Таблица 5.6

**Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240-89)**

Номер швеллера	Размеры, мм		A, см <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см
	h	b				
20	200	76	23,4	1530	134	2,3

## Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент (ГОСТ 8510-86)

	<p> <i>B</i> – ширина большей полки  <i>b</i> – ширина меньшей полки  <i>I</i> – момент инерции  <i>z</i><sub>0</sub> – расстояние от оси <i>y</i> до наружной грани стенки  <i>A</i> – площадь поперечного сечения         </p>						
	Номер уголка	Размеры, мм		<i>A</i> , см <sup>2</sup>	<i>I</i> <sub><i>x</i></sub> , см <sup>4</sup>	<i>I</i> <sub><i>y</i></sub> , см <sup>4</sup>	<i>I</i> <sub><i>xy</i></sub> , см <sup>4</sup>
	<i>B</i>	<i>b</i>					
10/6,5	200	65	15,67	155,52	51,68	51,18	2,3

Для вычисления положения центра тяжести заданного сечения за вспомогательные оси примем центральные оси швеллера  $C_1x_1y_1$  (рис. 5.18).

$$y_c = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i} = \frac{S_{1x_1} + S_{2x_1}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot y_{C_1} + A_2 \cdot y_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 15,67 \cdot 6,63}{23,4 + 15,67} = 2,66 \text{ см.}$$

$$x_c = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i} = \frac{S_{1y_1} + S_{2y_1}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot x_{C_1} + A_2 \cdot x_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 15,67 \cdot (-3,94)}{23,4 + 15,67} = -1,58 \text{ см.}$$

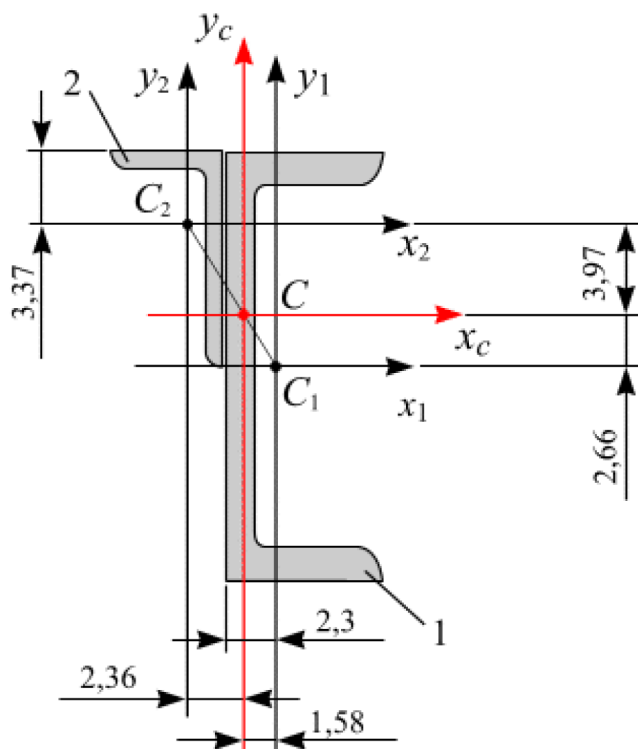


Рис. 5.18

Откладываем на схеме координаты точки центра тяжести сечения  $C(x_c, y_c)$ . Координаты центра тяжести сечения «легли» на отрезок  $C_1C_2$ , соединяющий центры тяжести частей (профилей), составляющих заданное сечение. Измеряем отрезки  $C_1C$  и  $C_2C$ , уточняем правильность соотношения:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1C}{C_2C} \Rightarrow \frac{15,67}{23,4} = \frac{C_1C}{C_2C} = 0,67.$$

Таким образом, проверяем правильность расчета.

Проводим центральные оси:  $Cx_c y_c$ .

**Вычислим осевые моменты инерции относительно центральных осей.** Заданное сечение не является симметричным. Поэтому для вычисления моментов инерции необходимо использовать формулы параллельного переноса. Имеем:

$$\begin{aligned} J_{xc} &= (J_{1x} + a_1^2 \cdot A_1) + (J_{2x} + a_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (1530 + 2,26^2 \cdot 23,4) + (1555,52 + 3,97^2 \cdot 15,67) = \\ &= 1695,57 + 402,49 = 2098,06 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yc} &= (J_{1y} + b_1^2 \cdot A_1) + (J_{2y} + b_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (134 + 1,58^2 \cdot 23,4) + (51,68 + 2,36^2 \cdot 15,67) = \\ &= 192,42 + 138,96 = 331,38 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Здесь  $a_1 = 2,66 \text{ см}$  – расстояние между осями  $x_c$  и  $x_1$ ;  $a_2 = 3,97 \text{ см}$  – расстояние между осями  $x_c$  и  $x_2$ ;  $b_1 = 1,58 \text{ см}$  – расстояние между осями  $y_c$  и  $y_1$ ;  $b_2 = 2,36 \text{ см}$  – расстояние между осями  $y_c$  и  $y_2$ .

*Ответ:*  $J_{xc} = 2098 \text{ см}^4$ .  $J_{yc} = 331,38 \text{ см}^4$ .

# Глава 6. ПЛОСКИЙ (ПОПЕРЕЧНЫЙ) ИЗГИБ БРУСА

## 6.1. Построение эпюр внутренних усилий при изгибе

*Изгиб* – это такой вид деформирования бруса, при котором в поперечном сечении возникают изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ . Плоскость, в которой располагается нагрузка, называется *силовой*, а изгиб является *плоским* (рис. 6.1, а). Брус, работающий на изгиб, называют *балкой*.

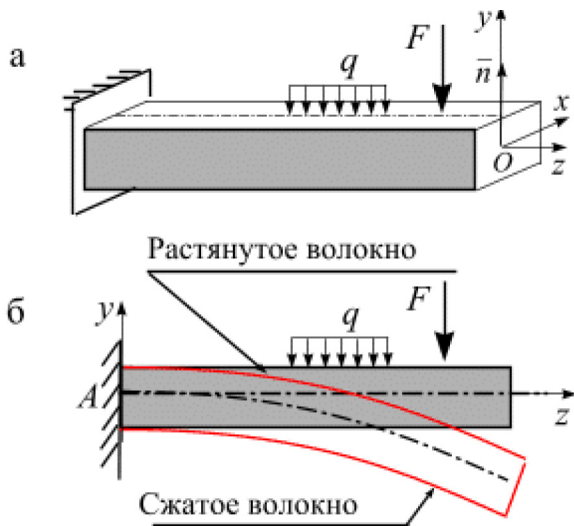


Рис. 6.1

Таким образом, из шести внутренних силовых факторов при плоском изгибе в сечении балки остаются два – изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ .

Деформацию плоского *изгиба* вызывают силы  $F_i$  и пары сил  $F', F''$  (образующих сосредоточенный момент  $M$ ), лежащие в одной силовой плоскости  $Oyz$ , которая проходит через центральную ось поперечного сечения (рис. 6.1, б).

Величина внутренней поперечной силы  $Q_y(z)$  в сечении балки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (сосредоточенных и распределенных), действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$Q_y(z) = \sum F_{yi} \text{ (отс.ч.)}$$

**Правило знаков для поперечной силы  $Q_y$ .** Рассмотрим шарнирно-опертую балку  $AB$  (рис. 6.2, а).

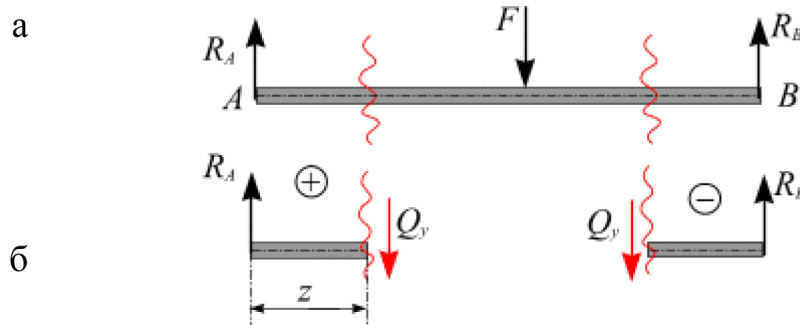


Рис. 6.2

Поперечная сила  $Q_y$  в сечении  $z$  считается *положительной*, если она направлена так, что стремится повернуть отсеченную часть *по часовой стрелке* (рис. 6.2, в).

Величина внутреннего изгибающего момента  $M_x(z)$  в сечении балки равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$M_x(z) = \sum M_c(F_i)_{\text{отс.ч.}} \tag{1.8}$$



**Правило знаков для изгибающего момента  $M_x$ .** Рассмотрим шарнирно-опертую балку  $AB$  (рис. 6.3, а).

Изгибающий момент считается *положительным в сечении  $z$* , если он направлен так, что вызывает *растяжение нижних волокон* бруса, и *отрицательным* – если *растянуты верхние волокна* бруса (рис. 6.3, б).

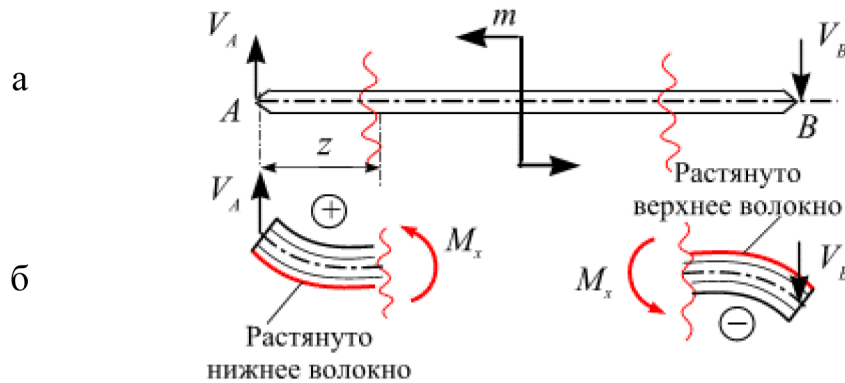


Рис. 1.42

Отметим, что во избежание ошибки рекомендуется *неизвестные* внутренние усилия  $Q_y$  и  $M_x$  принимать *положительными*.

Рассмотрим шарнирно-опертую балку  $AB$  (рис. 6.4, а). Вычислим для сечения с координатой  $z$  внутренние усилия  $Q_y$  и  $M_x$ . Выделим левую отсеченную часть балки и в сечении покажем искомые внутренние усилия (рис. 6.4, б):

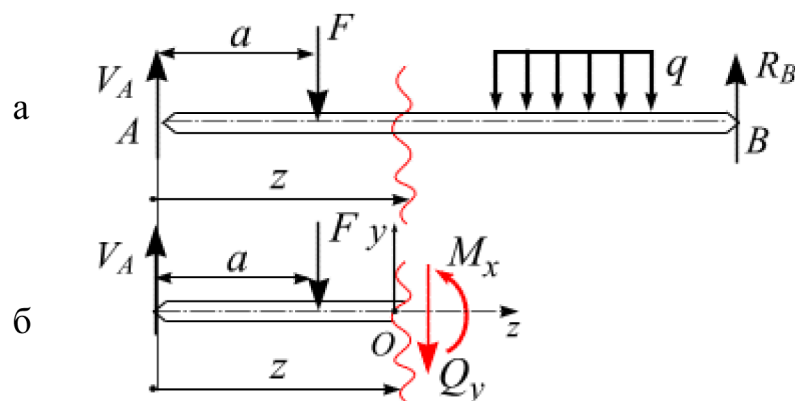


Рис. 6.4

$$Q_y(z) = \sum F_{y\text{отс.ч.}} = V_A - F;$$

$$M_x(z) = \sum M_o(F_i)_{\text{отс.ч.}} = V_A \cdot z - F \cdot (z - a).$$

### Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского при изгибе (дифференциальные зависимости между $q(z)$ , $Q_y$ и $M_x$ )

Условимся считать  $q(z)$  положительной, если ее направление совпадает с направлением оси ординат  $Oy$ . Между интенсивностью распределенной нагрузки  $q(z)$ , поперечной силой  $Q_y$  и изгибающим моментом  $M_x$  в сечении  $n - n$  при изгибе существуют дифференциальные зависимости.

Вырежем из балки (рис. 6.5) бесконечно малый элемент  $dz$ . Действие левой и правой отброшенных частей балки заменим внутренними усилиями  $Q_y$  и  $M_x$ , причем справа они имеют бесконечно малые приращения  $dQ$  и  $dM$ .

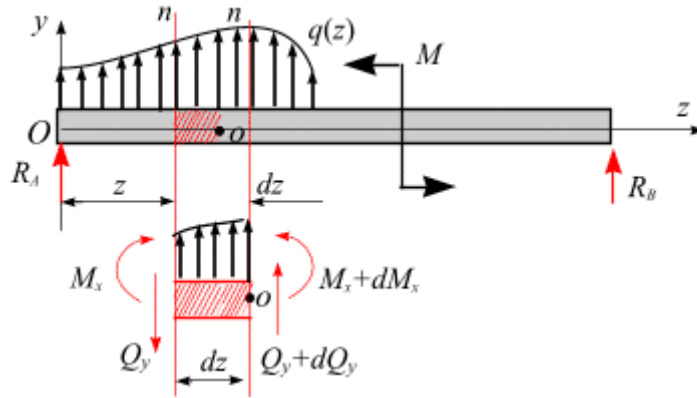


Рис. 6.5

Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{yi} = 0, Q_y - (Q_y + dQ_y) + q \cdot dz \Rightarrow -dQ_y - q \cdot dz = 0 \Rightarrow \frac{dQ_y}{dz} = q; \quad (1.9)$$

$$\sum m_o = 0; \quad M_x + Q_y dz + q dz \cdot \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_y dz + \underline{q dz \cdot \frac{dz}{2}} - dM_x = 0 \Rightarrow$$

$$\left[ q \frac{dz^2}{2} \rightarrow 0 \text{ как величина второго порядка малости} \right] \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow Q_y dz - dM_x = 0 \Rightarrow \frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Дифференциальные зависимости между  $q(z)$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  имеют вид

$\frac{dQ_y}{dz} = q$  – производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$  – производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе.

### I. Эпюры в шарнирно-опертых балках

При построении эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  принято:

– положительные значения  $Q_y$  откладывать от оси балки вверх, а отрицательные – вниз;

– эпюры  $M_x$  строят на растянутых волокнах: положительные значения откладывают от оси балки вниз, а отрицательные – вверх.

**Пример 6.1.** Построить эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  для нагруженной, как показано на рис. 6.6, если  $F = 20 \text{ кН}$ .

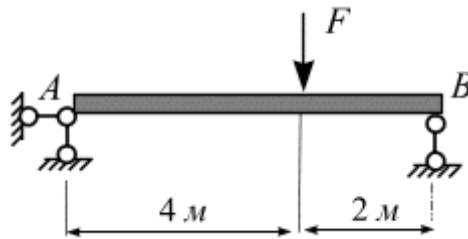


Рис. 6.6

**Решение.** Вычисление опорных реакций. Мысленно отбросим опоры A и B, заменим их действие реакциями.

Направим реакции опор вертикально вверх (рис. 6.7, а).

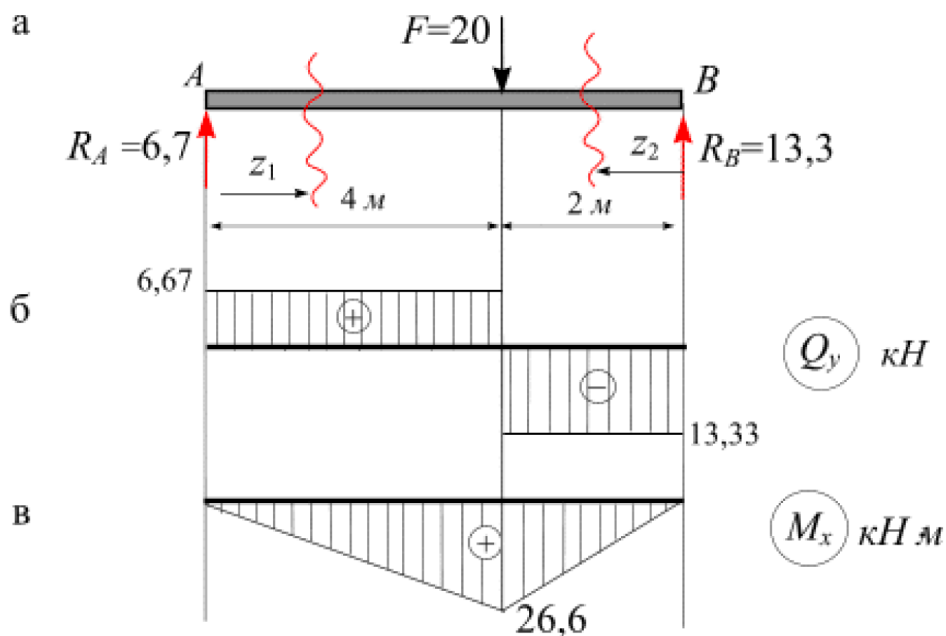


Рис. 6.7

Запишем уравнения равновесия для системы параллельных сил:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 6 - F \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F \cdot 4}{6} = \frac{20 \cdot 4}{6} \approx 13,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 6 - F \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F \cdot 2}{6} = \frac{20 \cdot 2}{6} \approx 6,67 \text{ (кН)}.$$

Проверка:  $\sum F_y = 0, R_A - F + R_B = 13,33 - 20 + 6,67 = 0$ .

Построение эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ .

Разделим балку на 2 участка и покажем начало и направление отсчета на каждом участке координатой  $z_i$  (рис. 6.7, а). Составим выражения  $Q_y(z_i)$  и  $M_x(z_i)$

на каждом участке, мысленно представляя отсеченную часть под действием внешней нагрузки, используя выражения и правило знаков, выведенные ранее:

$$\begin{cases} Q_y(z_i) = \sum F_{iy} \text{ отс.ч.}; \\ M_x(z_i) = \sum m_C(F_i)_{\text{отс.ч.}} \end{cases}$$

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 4$  (м);

$$Q_y(z_1) = R_A = 6,67 \text{ кН};$$

$$M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 = 6,67 \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0; \\ M_x(z_1 = 4) = 6,67 \cdot 4 = 26,7 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Реакция  $R_A$  вызывает положительную поперечную силу (стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке) и положительный изгибающий момент (изгибает балку выпуклостью вниз, растягивая нижнее волокно).

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2$  м;

$$Q_y(z_2) = -R_B = |-13,33| \text{ кН};$$

$$M_x(z_2) = R_B \cdot z_2 = 13,3 \cdot z_2 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = 0; \\ M_x(z_2 = 2) = 13,3 \cdot 2 = 26,6 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Реакция  $R_A$  вызывает отрицательную поперечную силу (стремится повернуть отсеченную часть против часовой стрелки) и положительный изгибающий момент (изгибает балку выпуклостью вниз, растягивая нижнее волокно).

По вычисленным значениям  $Q_y$  и  $M_x$  эпюры (рис. 6.7, б, в).

На участках I и II откладываем вычисленные значения  $Q_y(z_1)$  и  $Q_y(z_2)$  с учетом знаков (положительные значения  $Q_y$  откладывать от базы эпюры вверх, а отрицательные – вниз) и соединяем полученные точки прямыми линиями. Эпюра  $Q_y$  на этих участках – прямая, параллельная базисной линии.

Для построения эпюры  $M_x$  на участках I и II откладываем вычисленные значения  $M_x(z_1)$  и  $M_x(z_2)$  со стороны растянутых волокон: положительные значения откладываем от базы эпюры вниз, отрицательные – вверх и соединяем полученные точки прямыми линиями.

**Пример 6.2.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для нагруженной балки как показано на рис. 6.8, если  $m = 20$  кНм.

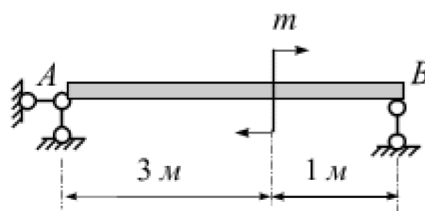


Рис. 6.8

**Решение.** Вычисление опорных реакций. Мысленно отбросим опоры  $A$  и  $B$ , заменим их действие реакциями.

Направим реакции опор вертикально вверх (рис. 6.9, а). Запишем уравнения равновесия для системы параллельных сил:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 6 - m = 0 \Rightarrow R_B = \frac{m}{6} = \frac{20}{6} \approx 3,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 6 - m = 0 \Rightarrow R_A = \frac{m}{6} = \frac{20}{6} \approx 3,3 \text{ кН};$$

Проверка:  $\sum F_y = 0, -R_A + R_B = 3,3 - 3,3 = 0$ .

Построение эюр  $Q_y$  и  $M_x$ . Разделим балку на 2 участка и покажем начало и направление отсчета на каждом участке координатой  $z_i$  (рис. 6.9, а).

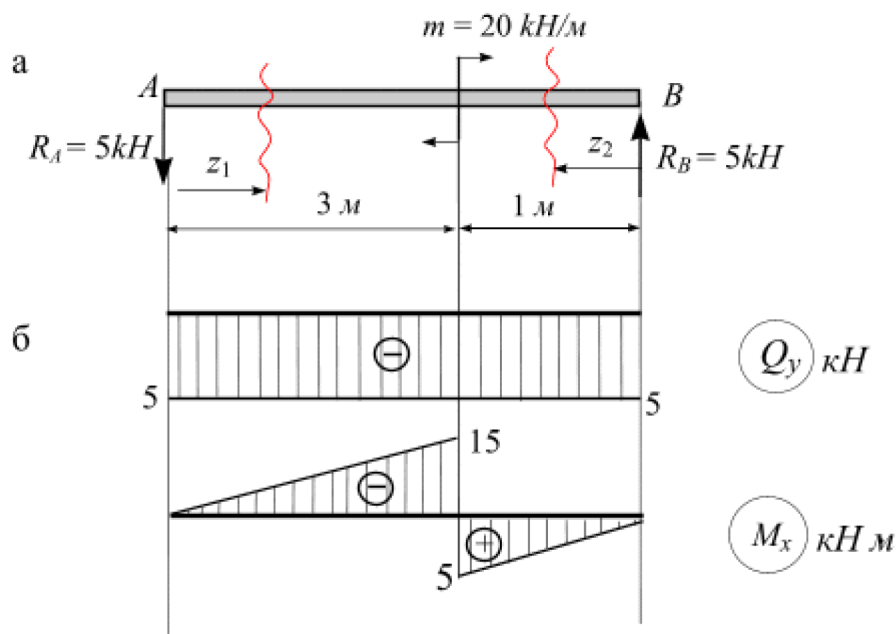


Рис. 6.9

Составим выражения  $Q_y(z_i)$  и  $M_x(z_i)$  на каждом участке, мысленно представляя отсеченную часть под действием внешней нагрузки, используя выражения и правило знаков, выведенные ранее.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ (м)}$ ;

$$Q_y(z_1) = -R_A = |-5| \text{ кН};$$

$$M_x(z_1) = -R_A \cdot z_1 = -5 \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0; \\ M_x(z_1 = 3) = -5 \cdot 3 = |-15| \text{ кНм}. \end{cases}$$

Реакция  $R_A$  вызывает отрицательную поперечную силу (стремится повернуть отсеченную часть против часовой стрелки) и отрицательный изгибающий момент (изгибает балку выпуклостью вверх, растягивая верхнее волокно).

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 1(\text{м})$ ;

$$Q_y(z_2) = -R_B = |-5| \text{ кН};$$

$$M_x(z_2) = R_B \cdot z_2 = 5 \cdot z_2 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = 0; \\ M_x(z_2 = 1) = 5 \cdot 1 = 5 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Реакция  $R_A$  вызывает отрицательную поперечную силу (стремится повернуть отсеченную часть против часовой стрелки) и положительный изгибающий момент, растягивая нижнее волокно.

Строим эпюры продольной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  (рис. 6.9, б).

На границах I и II участков откладываем вычисленные значения  $Q_y$  с учетом знаков и соединяем полученные точки прямой линией.

На границах I и II участков откладываем вычисленные значения  $M_x$  с учетом знаков и соединяем полученные точки прямыми линиями.

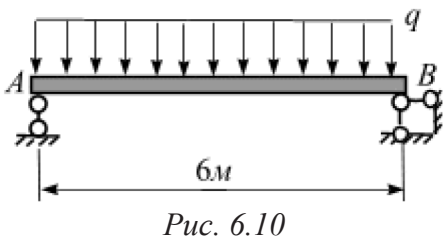


Рис. 6.10

**Пример 6.3.** Шарнирно-опертая двутавровая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 12 \text{ кН/м}$ , длина пролета балки 6 м (рис. 6.10). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

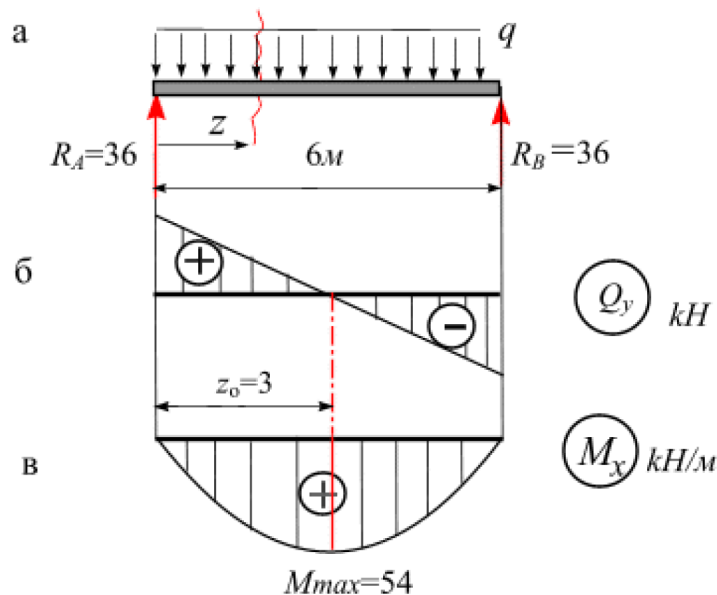
*Вычисление опорных реакций.* Мысленно отбросим опоры A и B, заменим их действие реакциями.

Направим реакции опор вертикально вверх (рис. 6.11, а). Запишем уравнения равновесия для системы параллельных сил:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{q \cdot 18}{6} = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36 \text{ кН}.$$

Из симметрии нагрузки имеем:

$$R_A = R_B = 36 \text{ кН}.$$



$$M_{\max} = 54$$

Рис. 6.11

Строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ . Балка имеет один участок. Составим аналитические выражения для поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  на этом участке:

$$Q_y(z) = R_A - q \cdot z = 36 - 12 \cdot z \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z=0) = 36 \text{ кН}; \\ Q_y(z=6) = 36 - 12 \cdot 6 = |-36| \text{ кН}; \\ Q_y(z_o) = 0 \Rightarrow 0,36 - 12 \cdot z_o = 0 \Rightarrow z_o = \frac{36}{12} = 3 \text{ м}. \end{cases}$$

$$M_x(z) = R_A \cdot z - q \cdot z \frac{z}{2} = 36z - 6z^2 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z=0) = 0; \\ M_x(z=6) = 36 \cdot 6 - 6 \cdot 6^2 = 216 - 216 = 0; \\ M_x(z_o = 3) = 36 \cdot 3 - 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ кН / м}. \end{cases}$$

На границах I участка откладываем вычисленные значения  $Q_y(z)$   $Q_y(z_3)$  с учетом знаков и соединяем полученные точки прямой линией (рис. 6.11, б).

Для построения эпюры  $M_x$  откладываем вычисленные значения на границах участка I и в точке  $z_o = 3 \text{ м} - M_{max}$ . Соединяем точки на границах участка параболой по правилу паруса: выпуклость параболы должна совпасть с направлением линий действия  $q(z)$  (рис. 6.11, б).

**Пример 6.4.** Балка  $AB$  загружена распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 6.12, а). Построить эпюры изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$ . Дано:  $q = 4 \text{ кН/м}$ .

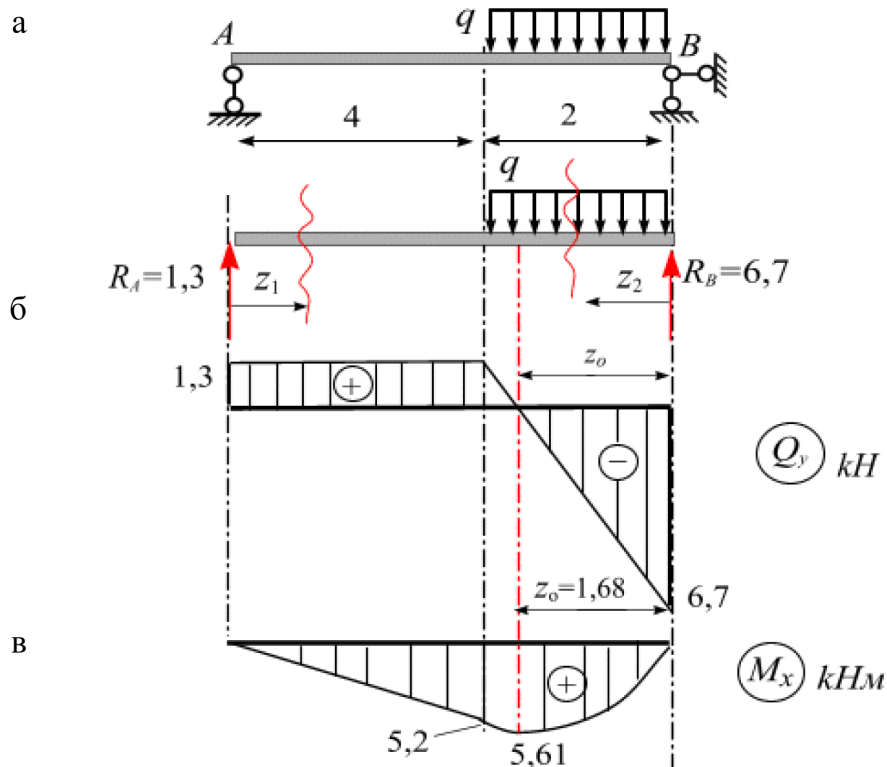


Рис. 6.12



**Решение.** Вычислим реакции опор:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 5 = 0,$$

$$R_B \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$-R_A \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1,3 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = R_A - q \cdot 2 + R_B = 6,7 - 8 + 1,3 = 0.$$

Разбиваем балку на два участка.

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м};$

$$Q_y(z_1) = R_A = 1,3 \text{ кН};$$

$$M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 = 1,3 \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0; \\ M_x(z_1 = 4) = 1,3 \cdot 4 = 5,2 \text{ кНм}. \end{cases}$$

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_y(z_2) = -R_B + q \cdot z_2 = -6,7 + 4z_2 \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z_2 = 0) = -6,7 \text{ кН}; \\ Q_y(z_2 = 2) = -6,7 + 4 \cdot 2 = 1,3 \text{ кН}; \\ Q_y(z_o) = 0, -6,7 + 4z_o = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z_o = \frac{6,7}{4} \approx 1,68 \text{ м}. \end{cases}$$

Поперечная сила на втором участке меняет знак с «минуса» на «плюс».

$$M_x(z_2) = R_B \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} =$$

$$= 6,7 \cdot z_2 - 4 \cdot \frac{z_2^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = 0; \\ M_x(z_2 = 2) = 6,7 \cdot 2 - 4 \frac{2^2}{2} = 5,2 \text{ кНм}; \\ M_x(z_o = 1,68) = 6,7 \cdot 1,67 - 4 \frac{1,67^2}{2} = 5,61 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Эпюры  $M_x$  и  $Q_y$  представлены на рис. 6.12, б, в.

## Сформулируем правила контроля эюр $Q_y$ и $M_x$

Анализ приведенных выше примеров и дифференциальных зависимостей при изгибе позволяет установить некоторые особенности (правила) построения эюр изгибающих моментов  $M_x$  и поперечных сил  $Q_y$ :

- на участках, где нет распределенной нагрузки  $q$ , эюры  $Q_y$  ограничены прямыми, параллельными базе, а эюры  $M_x$  – наклонными прямыми (рис. 6.13, а);
- в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенная сила на эюре  $Q_y$ , будут скачки на величину и в направлении данной силы, а на эюре  $M_x$  – перегибы, острием направленные в направлении действия этой силы (рис. 6.13, а);

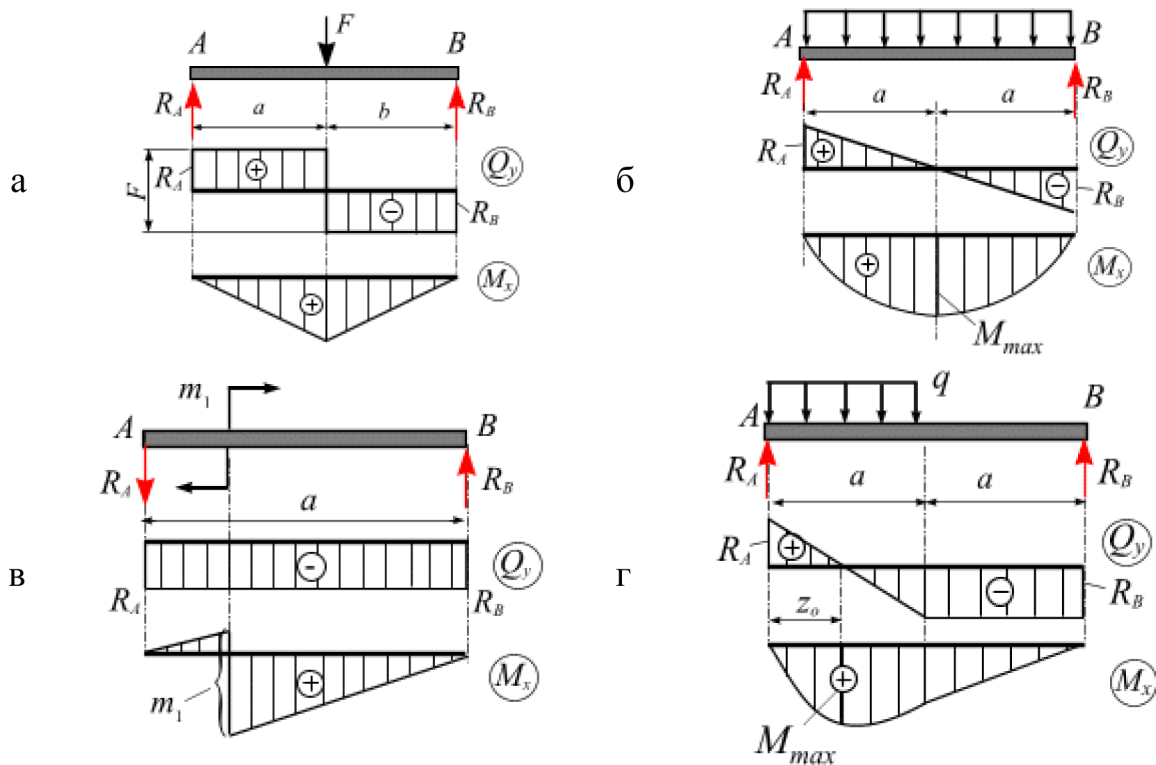


Рис. 6.13

- на участках, где к балке приложена распределенная нагрузка  $q$ , эюры  $Q_y$  ограничены наклонными прямыми, а эюры  $M_x$  – квадратичными параболой. При этом, если эюру  $M_x$  строим «на растянутом волокне», то выпуклость параболы будет направлена по направлению действия  $q$  (правило паруса) (рис. 6.12, б, г);

– если в сечении  $z_0$  поперечная сила  $Q_y(z_0) = 0$ , где эюра  $Q_y$  пересекает базовую линию  $\left( Q_y = 0 \Rightarrow \frac{dM_x}{dz} = Q_y = 0 \right)$ , то изгибающий момент в этом сечении принимает экстремальное значение:  $M_{max}(z_0)$  или  $M_{min}(z_0)$  (рис. 6.13, б г);

- в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенный момент, на эюре  $Q_y$  изменений не будет, а на эюре  $M_x$  – скачки на величину этого момента (рис. 6.13, в);

– на участках, где нет распределенной нагрузки, эюра  $Q_y$  ограничена прямой, параллельной оси бруса; эюра  $M_x$  ограничена наклонными прямыми (рис. 6.13, г).

**Пример 6.5.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной, как показано на рис. 6.14, если  $F = 20 \text{ кН}$ ;  $q = 10 \text{ кН/м}$ .

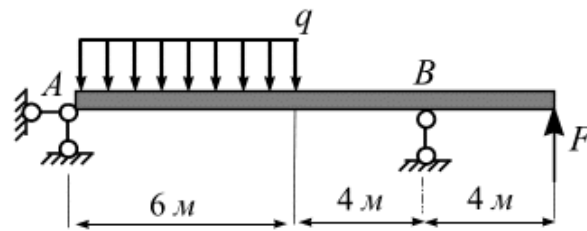


Рис. 6.14

**Решение.**

**Вычисление опорных реакций.** Мысленно отбросим опоры  $A$  и  $B$ , заменим их действие реакциями.

Направим реакции опор вертикально вверх (рис. 6.14, а). Запишем уравнения равновесия для системы параллельных сил:

$$\sum M_A = 0, -q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 10 + F \cdot 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{q \cdot 18 - F \cdot 14}{10} = \frac{10 \cdot 18 - 20 \cdot 14}{10} = |-10| = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 10 + q \cdot 6 \cdot 7 + F \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{q \cdot 42 + F \cdot 4}{10} = \frac{10 \cdot 42 + 20 \cdot 4}{10} = 50 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum F_y = 0, R_A - q \cdot 6 + R_B - F = 50 - 10 \cdot 6 - 10 + 20 = 0.$

**Построение эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ .**

Разделим балку на 3 участка и покажем начало и направление отсчета на каждом участке координатой  $z_i$  (рис. 6.15, а).

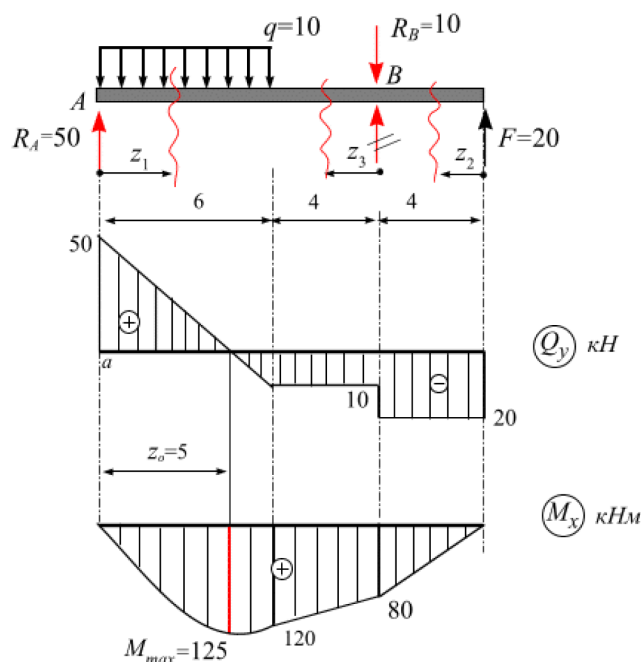


Рис. 6.15

Составим выражения  $Q_y(z_i)$  и  $M_x(z_i)$  на каждом участке, мысленно представляя отсеченную часть под действием внешней нагрузки, используя выражения и правило знаков, выведенные ранее.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 2$  м:

$$Q_y(z_1) = R_A - q \cdot z_1 = 50 - 10z_1 \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z_1 = 0) = 50 \text{ кН}; \\ Q_y(z_1 = 2) = 50 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ кН}; \\ Q_y(z_o) = 0, 50 - 10z_o = 0 \Rightarrow z_o = \frac{50}{10} = 5 \text{ м}. \end{cases}$$

Поперечная сила на этом участке является линейной функцией.

$$M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 50z_1 - 5z_1^2 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0; \\ M_x(z_1 = 6) = 50 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = \\ = 300 - 180 = 120 \text{ кНм}; \\ M_x(z_o = 5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = \\ = 250 - 125 = 125 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является квадратичной функцией, и на нем растянуто нижнее волокно. Изгибающий момент  $M_x$  достигает экстремального значения при  $z_o = 5$  м и равен  $M_{max} = 125$  кНм, при этом поперечная сила  $Q_y(z_o) = 0$  (рис. 6.15, в).

Реакция  $R_A$  вызывает положительную поперечную силу (стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке) и положительный изгибающий момент (изгибает балку выпуклостью вниз, растягивая нижнее волокно). Распределенной нагрузке  $q$  соответствует отрицательная поперечная сила (поворот против часовой стрелки) и отрицательный изгибающий момент (выпуклость балки вверх, растянуто нижнее волокно).

**II участок:**  $0 \leq z_3 \leq 4$  м.

На II участке для оптимальности расчета отсчет ведем от свободного конца:

$Q_y(z_2) = -F = -20$  кН (постоянное значение на всем участке).

Поперечная сила на этом участке является постоянной.

$$M_x(z_3) = -F \cdot z_2 = -20z_2 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = -20 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; \\ M_x(z_3 = 4) = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является линейной функцией. При этом на участке растянуто верхнее волокно.

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq 4$  (м);

$$Q_y(z_2) = -F + R_B = -20 + 10 = |-10| \text{ кН}.$$

Поперечная сила на этом участке – постоянная величина.

$$M_x(z_3) = F(4 + z_3) - R_B \cdot z_2 = 20(4 + z_3) - 10 \cdot z_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x(z_3 = 0) = 20 \cdot 4 = 80 \text{ кНм}; \\ M_x(z_3 = 4) = 20(4 + 4) - 10 \cdot 4 = 120 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке изменяется линейно.

### Построение эпюр

Построим эпюру  $Q_y$  (рис. 6.15, б). На границах I и III участков откладываем вычисленные значения  $Q_y(z_1)$  и  $Q_y(z_3)$  с учетом знаков и соединяем полученные точки прямой линией. На III и II участках поперечная сила постоянна (не зависит от  $z$ ), поэтому эпюра  $Q_y$  на этих участках – прямая, параллельная базисной линии.

Построим эпюру  $M_x$  (рис. 6.15, в). На I участке изгибающий момент меняется по квадратичной зависимости, имеет экстремум, т. к. на эпюре поперечной силы базис пересекается эпюрой  $Q_y$ . Поэтому для построения эпюры  $M_x$  откладываем вычисленные значения на границах участка и в точке с  $M_{max}$  при  $z_0 = 5$  м. Соединяем параболой по правилу паруса: выпуклость параболы должна совпасть с направлением линий действия  $q(z)$ .

На II и III участках изгибающий момент также изменяется по линейной зависимости. Вычисленные значения моментов  $M_x(z_2)$  и  $M_x(z_3)$  в начале и в конце соответствующих участков соединяем прямыми линиями.

**Контроль** правильности построения эпюр (рис. 6.15, б, в).

Эпюра  $Q_y$  имеет скачки в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $F$ . Величины этих скачков численно равны соответствующим значениям приложенных в этих сечениях сил и направлены в сторону их действия (при чтении эпюры слева направо).

На участках эпюры, где  $Q_y$  имеет положительные значения, изгибающий момент  $M_x$  алгебраически возрастает; где  $Q_y$  имеет отрицательные значения (см. рис. 6.15, в, г) –  $M_x$  убывает.

Эпюры построены верно.

### II. Эпюры в консольных балках

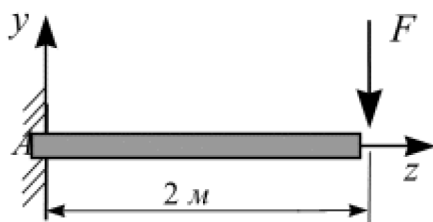


Рис. 6.16

**Пример 6.6.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для данной консольной балки (рис. 6.16).

Дано:  $F = 12 \text{ кН}$ .

**Решение.** Для консоли выражения  $Q_y$  и  $M_x$  могут быть составлены без учета реакций защемления, если построение эпюр вести от свободного конца.

Однако, если реакции будут вычислены, то они послужат дополнительной проверкой правильности построения эпюр.

1. Вычислим реакции в жесткой заделке (рис. 6.17, а):

$$\sum M_A = 0, -F \cdot 2 + M^R = 0 \Rightarrow M^R = F \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum F_y = 0, F - R_A = 0 \Rightarrow R_A = F = 12 \text{ кН}.$$

2. Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ . Данная балка имеет один участок (рис. 6.17, а).

Имеем:

$$0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$Q_y(z_1) = F = 12 \text{ кН};$$

$$M_x(z_1) = 12 \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0, \\ M_x(z_1 = 2) = 12 \cdot 2 = 24 \frac{\text{кН}}{\text{м}}. \end{cases}$$

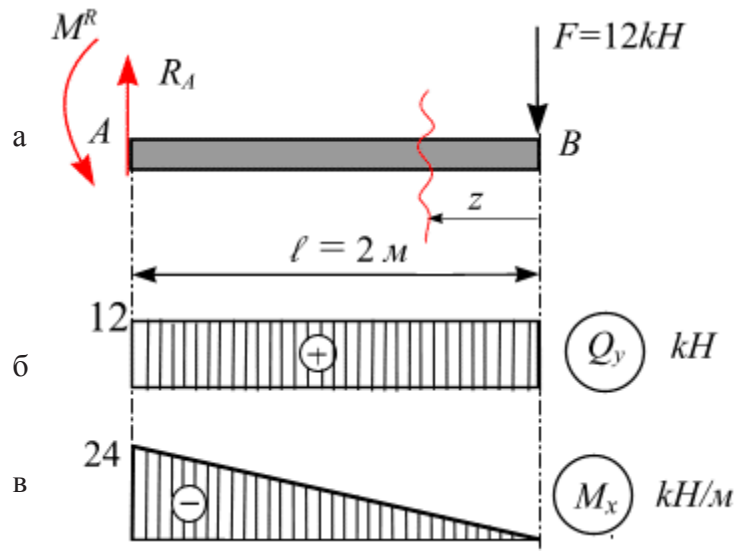


Рис. 6.17

Поперечная сила на этом участке является постоянной (рис. 6.17, б). Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является линейной функцией (рис. 6.17, в).

Проверка:  $\sum M_A = 0, -R_A \cdot 2 + M^R = -12 \cdot 2 + 24 = 0.$

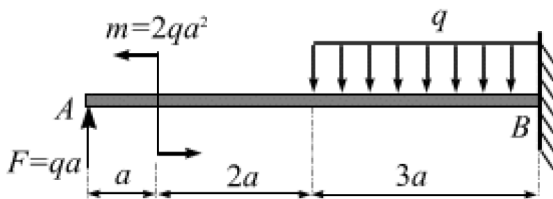


Рис. 6.18

**Пример 6.7.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для заданной балки (рис. 6.18).

**Решение.** Для консоли выражения  $Q_y$  и  $M_x$  могут быть составлены без учета реакций заземления, если построение эпюр вести от свободного конца.

Однако, если реакции будут вычислены, то они послужат дополнительной проверкой правильности построения эпюр.

1. Вычислим реакции в жесткой заделке (рис. 6.19, а):

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0, \quad -F \cdot 6a + m + q \cdot 3a \cdot 1,5a - m_B = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_B = -qa \cdot 6a + 2qa^2 + q \cdot 3a \cdot 1,5a = 0,5qa^2; \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F - q \cdot 3a + R_B = 0 \Rightarrow V_B = -F + q \cdot 3a = -qa + q \cdot 3a = 2qa.$$

Проверка:

$$\sum M_A = m - 3qa \cdot 4,5a + V_B \cdot 6a - m_B = 2qa^2 - 3qa \cdot 4,5a + 2qa \cdot 6a - 0,5qa^2 = 0.$$

2. Построим эюры  $Q_y$  и  $M_x$ . Данная балка имеет три участка. Для составления выражения изгибающего момента применим метод сечений, а поперечную силу на каждом участке вычислим как производную от изгибающего момента.

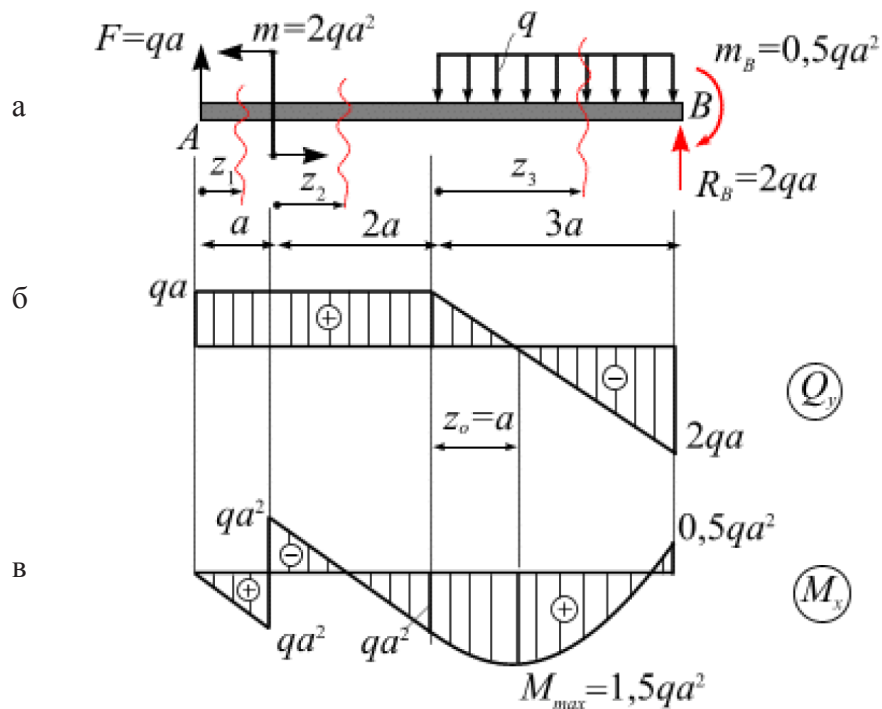


Рис. 6.19

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$ ;

$$Q_{y1} = F = qa;$$

$$M_{x1}(z_1) = F \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_{x1}(z_1 = 0) = 0; \\ M_{x1}(z_1 = a) = qa^2. \end{cases}$$

Поперечная сила на этом участке является постоянной (рис. 6.19, б). Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является линейной функцией (рис. 6.19, в).

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ ;

$$Q_{y2} = F = qa;$$



$$M_{x2}(z_1) = F \cdot (a + z_1) - m \Rightarrow \begin{cases} M_{x2}(z_1 = 0) = F \cdot a - m = qa^2 - 2qa^2 = -qa^2, \\ M_{x2}(z_1 = 2a) = F \cdot 3a - m = qa^2. \end{cases}$$

Поперечная сила на этом участке является постоянной. Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является линейной функцией.

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq 3a$ ;

$$Q_{y3}(z_3) = F - q \cdot z_3 \Rightarrow \begin{cases} Q_{y3}(z_3 = 0) = F - q \cdot 0 = qa; \\ Q_{y3}(z_3 = 3a) = F - q \cdot 3a = qa - 3qa = -2qa; \\ Q_y = F - q \cdot z_o = 0 \Rightarrow z_o = \frac{F}{q} = \frac{q \cdot a}{q} = a. \end{cases}$$

Поперечная сила на III участке меняет знак с плюса на минус, следовательно, изгибающий момент в точке пересечения базиса достигнет экстремума.

$$M_{x2}(z_3) = F \cdot (3a + z_3) - m - \frac{qz_3^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_{x3}(z_3 = 0) = F \cdot 3a - m = -qa^2; \\ M_{x3}(z_3 = 3a) = F \cdot 6a - m - \frac{q(3a)^2}{2} = \\ = qa \cdot 6a - 2qa^2 - \frac{q(3a)^2}{2} = -0,5qa^2; \\ M_{max}(z_o = a) = F(3a + a) - m - \frac{qa^2}{2} = \\ = qa \cdot 4a - 2qa^2 - \frac{qa^2}{2} = 1,5qa^2. \end{cases}$$

Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является квадратичной функцией.

По вычисленным значениям изгибающих моментов и поперечных сил построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 6.19, б, в).

Также необходимо провести контроль правильности построения эпюр.

## 6.2. Основные понятия

*Изгиб* – это такой вид деформирования бруса, при котором в поперечном сечении возникают изгибающий момент и поперечная сила. Плоскость, в которой располагается нагрузка, называется *силовой*, а изгиб является *плоским* (рис. 6.20). Брус, работающий на изгиб, называют *балкой*.

Центральными плоскостями инерции балки называют плоскости, проходящие через центральные оси поперечных сечений балки (оси  $x$ ,  $y$ ).

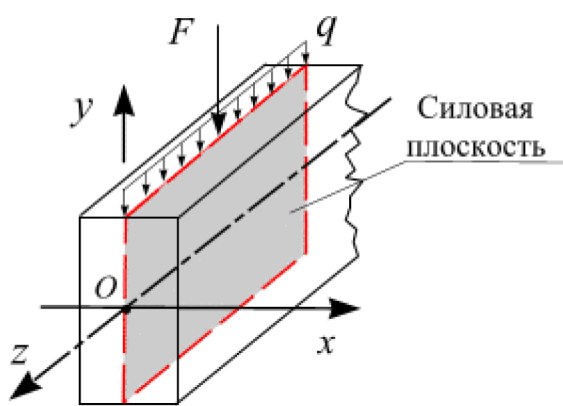


Рис. 6.20

*Плоский изгиб* – изгиб, при котором все усилия, изгибающие балку, лежат в одной из плоскостей симметрии балки (в одной из центральных плоскостей). Таким образом, в общем случае плоского изгиба в сечении балки из шести внутренних усилий возникает два – изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$  (или при изгибе относительно другой центральной оси – изгибающий момент  $M_y$  и поперечная сила  $Q_x$ ).

*Косой изгиб* – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с центральными плоскостями инерции.

*Сложный изгиб* – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях.

Далее будем рассматривать плоский изгиб, то есть все силы будем прилагать в плоскости симметрии балки.

*Чистый изгиб* имеет место, если в сечении возникает только изгибающий момент  $M_x$ . Поперечный изгиб имеет место, если в сечении возникает изгибающий момент  $M_x$  и  $Q_y$ .

Рассмотрим балку (рис. 6.21, а), для которой построены эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 6.21, б, в). В средней части балки возникает чистый изгиб ( $Q_y=0$ ,  $M_x=const$ ).

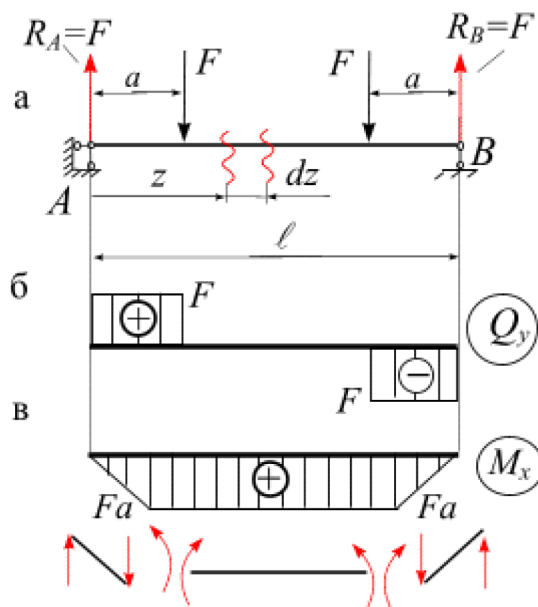


Рис. 6.21

Ограничимся рассмотрением балок, поперечные сечения которых имеют *вертикальную ось симметрии*. Для того чтобы балка воспринимала нагрузку и передавала ее на другие части конструкции или на основание, она должна иметь опорные устройства. В зависимости от способа крепления различают три основных типа балок (рис. 6.22, а, б, в):

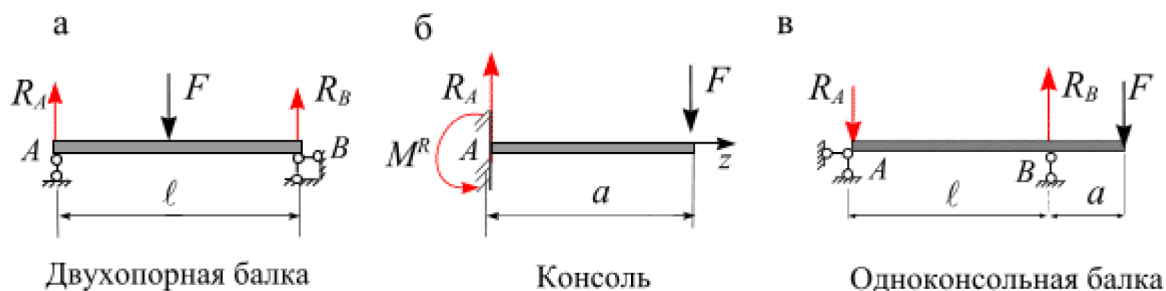


Рис. 6.22

1. *Двухопорная балка* (одна опора – шарнирно-неподвижная, другая – шарнирно-подвижная; расстояние между опорами  $l$  – пролет балки).
2. *Консоль* (один конец жестко зашцеилен; длина балки  $a$  – вылет консоли).
3. *Консольная балка* (балка, свободно лежащая на двух опорах со свешивающимся концом – консолью).

Балки составляют большую долю элементов конструкций – это балки перекрытий, пролетные строения кранов, валы и оси механизмов, крыло самолета и т. д.

**Основные допущения.** Нанесем на боковой поверхности балки сетку ортогональных линий и изогнем балку (рис. 6.23, а, б).

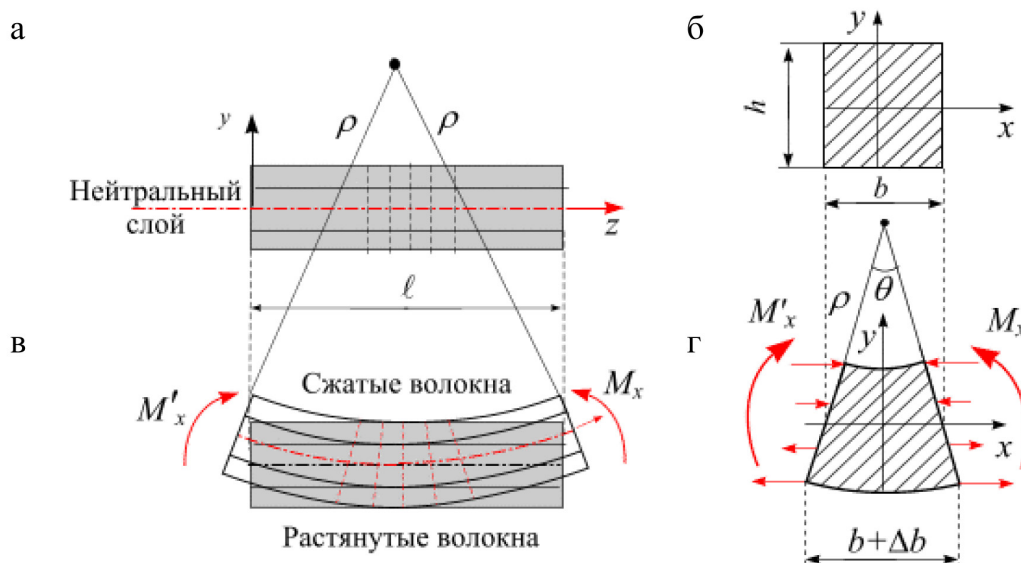


Рис. 6.23

В результате деформирования балки (рис. 6.23, в) можно видеть:

- продольные волокна искривляются по дуге окружности: одни – укорачиваются, другие – удлиняются; между ними есть слой волокон, которые не меняют своей длины – *нейтральный слой*, линию его пересечения с плоскостью поперечного сечения называют *нейтральной осью*;
- расстояние между продольными волокнами не меняется;
- поперечные сечения, оставаясь прямыми, поворачиваются на некоторый угол.

Если мы возьмем любое поперечное сечение (рис. 6.23, г), то действующие на него внутренние силы направлены в одну сторону выше нейтрального слоя и в другую – ниже ее. Получается пара сил, которая и создает изгибающий момент  $M_x$ , под которым мы понимаем момент силы относительно нейтрального слоя.

Относительное удлинение слоя  $A'B'$ , удаленного на расстояние  $y$  от нейтрального слоя  $AB$  (рис. 6.24), равно:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y}{\rho} = y \cdot K,$$

где  $\theta \ll 1$ ,  $K = \frac{1}{\rho}$  – кривизна кривой,  $\rho$  – радиус кривизны.

**Справка.** Напомним, что длина дуги  $S$ , радиус  $R$  и центральный угол  $q$  в радианах связаны между собой выражением:  $S = R \cdot \theta$

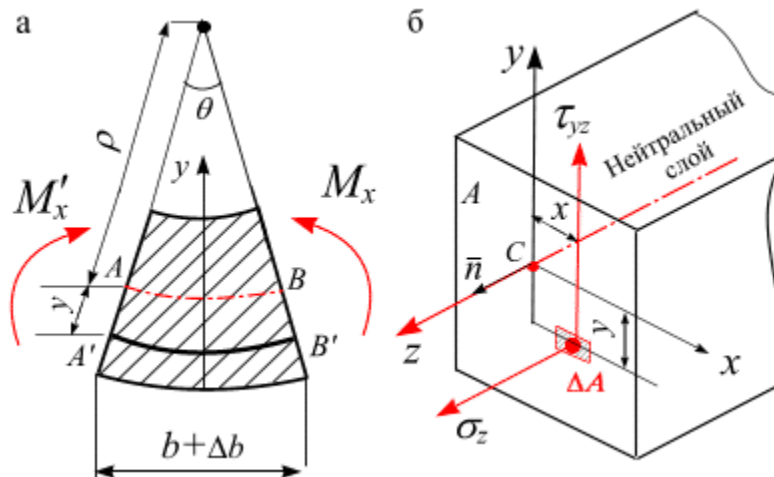
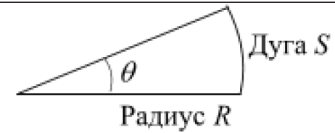


Рис. 6.24

Получили, что деформация некоторого слоя линейно зависит от его координаты  $y$ , отсчитываемой от нейтральной линии.

Записывая закон Гука, имеем:

$$\sigma_z = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E. \quad (6.1)$$

Для вычисления величины  $\sigma_z$  нужно знать положение нейтрального слоя (или центр тяжести сечения) и радиус кривизны  $\rho$ .

### 6.3. Нормальное напряжение в сечении при плоском (поперечном) изгибе

Рассмотрим статическую часть задачи применительно к рассматриваемому сечению (рис. 6.24, б). Запишем уравнения равновесия относительно центральных осей  $Cxyz$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum F_z = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_z dA = 0; \\ \sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_z x dA = 0; \\ \sum M_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_z y dA = 0. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Из первого уравнения системы (6.2):

$$\int_A \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \left[ \begin{array}{l} \text{относительно} \\ \text{нейтральной линии} \end{array} S_x = \int_A y dA = 0 \right] = 0.$$

Из второго уравнения системы (6.2) имеем:

$$\int_A \sigma_z x dA = \frac{E}{\rho} \int_A zx dA = \left[ J_{zx} = \int_A zx dA = 0 \right] = 0.$$

Полученный интеграл  $J_{yx}$  есть центробежный момент поперечного сечения  $A$ . Относительно нейтральной линии, проходящей через центр тяжести сечения,  $J_{yx} = 0$ .

Из последнего уравнения системы (6.2) имеем:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} J_x, \quad (6.3)$$

где  $J_x = \int_A y^2 dA$  – осевой момент инерции.

Решая совместно (6.1) и (6.3), получим формулу для нормальных напряжений:

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_z = \varepsilon E = \frac{E}{\rho} y \\ M_x = \frac{E}{\rho} J_x \end{array} \right] \Rightarrow \sigma_z = \left[ \frac{E}{\rho} = \frac{M}{J_x} \right] = \frac{M}{J_x} y.$$

Получили выражение для вычисления нормального напряжения в произвольном сечении:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) позволяет вычислять *нормальные напряжения в любой точке* поперечного сечения балки, при этом  $M_x$  и  $y$  удобнее брать по абсолютному значению, а знак  $\sigma$  устанавливать из характера деформирования.

Из анализа формулы (6.4) следует:

- 1) напряжения  $\sigma_z$  изменяются по *высоте* сечения линейно;
- 2) по ширине сечения  $\sigma_z$  распределены *равномерно* (не зависят от координаты  $x$ );
- 3) напряжения  $\sigma_z = 0$  при  $y = 0$ , т. е. на нейтральной оси.

Числовые значения для  $J_x$  и  $W_x$  для различных сечений выбирают из таблиц в справочниках или «Сортаменте».

Напряжения *максимальны* там, где  $y_{max}$ , т. е. в *точках, наиболее удаленных от нейтральной оси*, – *опасных точках*:

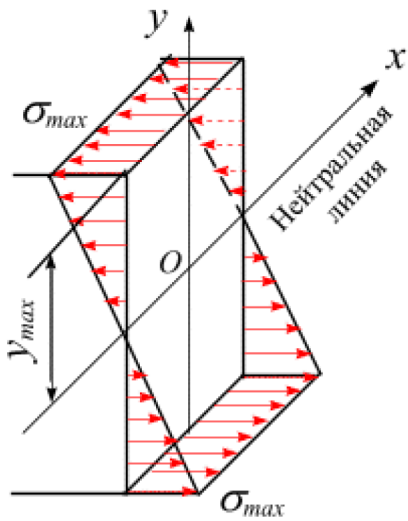


Рис. 6.25

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y_{max}. \quad (6.5)$$

Пространственная эпюра  $\sigma_z$  изображена на рис. 6.25. Для симметричных сечений вводят величину

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} - \text{осевой момент сопротивления сечения,}$$

который характеризует сопротивляемость балки изгибу, измеряется в  $см^3$ , зависит от формы и размеров поперечного сечения. Формула (6.5) переписется:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y_{max} = \frac{M_x}{J_x / y_{max}} \Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{W_x}.$$

Таблица 6.1

Поперечное сечение	Момент сопротивления, $W_x$	Осевой момент инерции, $J_x$
	$W_x = \frac{bh^2}{6},$ $W_y = \frac{hb^2}{6}.$	$J_x = \frac{bh^3}{12},$ $J_y = \frac{hb^3}{12}.$
	$J_y = J_x = \frac{\pi d^3}{32}$	$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ $J_y = J_x = \frac{\pi d^4}{64}$
	$W_y = W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}.$	$J_y = J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}.$

## 6.4. Касательное напряжение в сечении при поперечном изгибе бруса. Формула Журавского

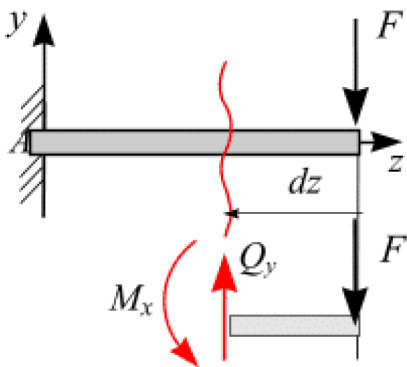


Рис. 6.26

При плоском поперечном изгибе, когда в сечениях балки действуют изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$  (рис. 6.26), возникают не только нормальные  $\sigma$ , но и касательные напряжения  $\tau$ . Нормальные напряжения при поперечном изгибе рассчитываются по тем же формулам, что и при чистом изгибе:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Далее получим зависимости для определения касательных напряжений  $\tau$  в случае поперечного изгиба балки. При выводе формулы примем некоторые гипотезы, которые сделают данную задачу статически определимой:

- 1) касательные напряжения  $\tau$  всюду параллельны  $Q$ ;
- 2) касательные напряжения  $\tau$  равномерно распределены по ширине сечения (на уровне  $y$ ).

### Отличие поперечного изгиба от чистого

1. В поперечном сечении балки одновременно с изгибающим моментом возникает поперечная сила  $Q_y$  (рис. 6.27, а, б).

2. В поперечном сечении наряду с нормальными напряжениями возникают касательные напряжения  $\tau$  (рис. 6.27, в):

$$Q_y = \int_A \tau_{yz} dA. \quad (6.6)$$

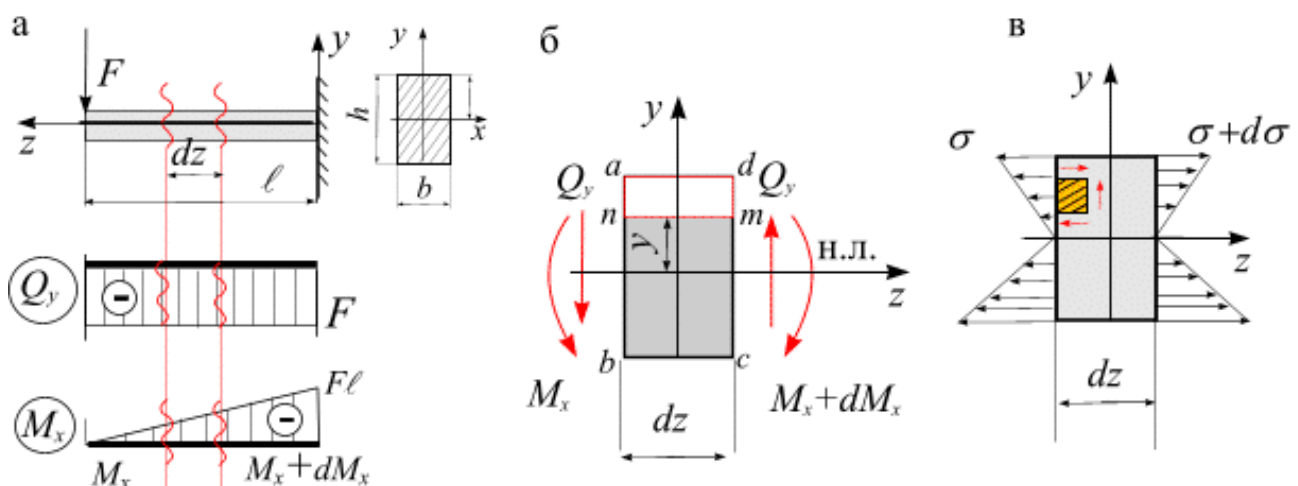


Рис. 6.27

Рассмотрим консольную балку, находящуюся в условиях поперечного изгиба под действием силы  $F$ . Построим эпюры внутренних усилий  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 6.27, а).



На расстоянии  $z$  от свободного конца балки выделим элементарный участок балки  $abcd$  длиной  $dz$  (рис. 6.27, б). Покажем внутренние усилия, действующие по граням элемента: на грани  $ab$  – возникают поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ , а на грани  $cd$  возникают также поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x + dM_x$  (так как  $Q_y$  у остается постоянной по длине балки, а момент  $M_x$  линейно изменяется, см. эпюру).

На расстоянии  $y$  от нейтральной оси отсечем часть элемента  $abcd$ , покажем напряжения, действующие по граням полученного элемента  $anmb$ , и рассмотрим его равновесие. На гранях, являющихся частью наружной поверхности балки, нет напряжений. На боковых гранях элемента от действия изгибающего момента  $M_x$  возникают нормальные напряжения  $\sigma^{**}$  и  $\sigma^{**}$  (рис. 6.27, в), причем:

$$\sigma^* = \frac{M_x \cdot y}{J_x}; \quad \sigma^{**} = \frac{(M_x + dM_x) \cdot y}{J_x}.$$

Кроме того, на этих гранях от действия поперечной силы  $Q_y$  возникают касательные напряжения  $\tau$ , такие же напряжения возникают по закону парности касательных напряжений и на верхней грани элемента (рис. 6.29).

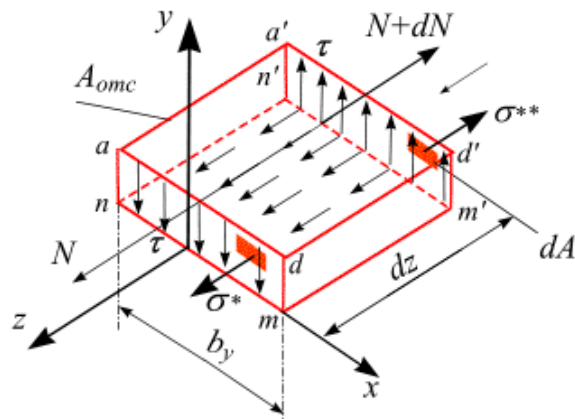


Рис. 6.29

Составим уравнение равновесия элемента  $anmba'n'm'd'$ , проецируя равнодействующие рассмотренных напряжений на ось  $z$ :

$$\int_{A_{omc.}} \sigma^* dA - \int_{A_{omc.}} \sigma^{**} dA + (\tau \cdot b_y) dz = 0;$$

$$\int_{A_{omc.}} \frac{M_x \cdot y}{J_x} dA - \int_{A_{omc.}} \frac{M_x \cdot y}{J_x} dA - \int_{A_{omc.}} \frac{dM_x \cdot y}{J_x} dA + (\tau \cdot b_y) dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau (dz \cdot b_y) - \frac{dM_x}{J_x} \int_{A_{omc.}} y dA = 0 \Rightarrow \tau (dz \cdot b_y) - \frac{dM_x}{J_x} \cdot S_x^{omc.} = 0,$$

где  $\int_{A_{omc.}} y dA = S_x^{omc.}$  статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси  $x$ .

Тогда:

$$(\tau \cdot b) dz - \frac{dM_x}{J_x} \cdot S_x^{омс.} \Rightarrow \tau = \frac{dM_x \cdot S_x^{омс.}}{(b \cdot dz) J_x} \quad (6.7)$$

или

$$\tau = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^{омс.}}{b_y J_x}. \quad (6.8)$$

Поскольку окончательно имеем:

$$\tau = \frac{Q_y}{b_y} \cdot \frac{S_x^{омс.}}{J_x}. \quad (6.9)$$

Формулу (6.9) называют **формулой Журавского**, который впервые установил наличие касательных напряжений при изгибе и показал, что в некоторых случаях разрушение балок происходит не от разрыва волокон, а от нарушения сопротивления сдвигу.

*Примечание.* Принципиально безразлично, брать ли  $S_x^{омс.}$  отсеченной части или всей остальной части сечения, т. к. по абсолютному значению они равны: их сумма дает статический момент всего сечения относительно оси  $x$ , который равен нулю.

**Анализ формулы Журавского.** Из формулы (6.9) видно, что распределение касательных напряжений по высоте сечения зависит от его формы, т. е. величины  $S_x^{омс.}/b_y$ .

**Прямоугольное сечение.** Момент инерции сечения  $J_x = bh^3/12$ . Через произвольную точку  $k$  (рис. 6.30, а), отстоящую от нейтральной оси на расстоянии  $y$ , проведем сечение, параллельное оси  $x$ . Ширина сечения  $b_y = b$ . Площадь отсеченной части, расположенной выше сечения:

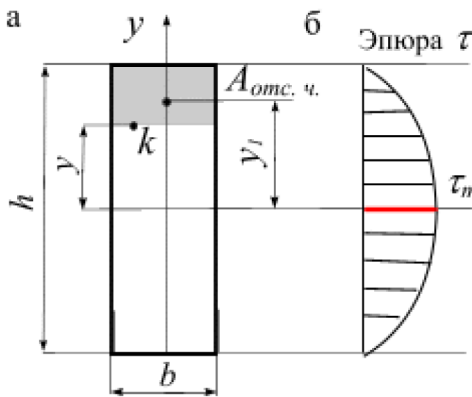


Рис. 6.30

$$A_{омс.ч.} = b \left( \frac{h}{2} - y \right);$$

координата ее центра тяжести:

$$y_1 = y + \frac{\left( \frac{h}{2} - y \right)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right);$$

статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси:

$$S_x^{омс.} = y_1 A_{омс.ч.} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.10)$$

Получим:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^{омс.}}{b_y J_x} = \frac{Q_y}{b} \frac{b/2 \left( h^2/4 - y^2 \right)}{bh^3/12} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( h^2/4 - y^2 \right). \quad (6.11)$$

Формула (6.11) показывает, что касательные напряжения по высоте сечения изменяются по закону квадратичной параболы (переменная  $y$  второго порядка). При  $y = \pm \frac{h}{2}$  в крайних волокнах  $\tau = 0$ , а при  $y = 0$  на уровне нейтральной оси  $\tau = \tau_{max}$ :

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}.$$

На рис. 6.10, б дан общий вид эпюры  $\tau$ , знак напряжения  $\tau$  не имеет принципиального значения, и его обычно не указывают.

**Двутавровое сечение.** Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки к его полке. В основном поперечную силу воспринимает стенка. Максимальные касательные напряжения (в точках нейтральной оси) найдем из выражения:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y \cdot S_x}{b_y \cdot J_x}, \quad (6.12)$$

где  $S_x$  – статический момент полусечения относительно нейтральной оси (для прокатных двутавров берется в таблице сортамента, где обозначен  $S_x$ ):

$$b_y = \delta_o.$$

В полках двутавра в каждой точке возникает два касательных напряжения:  $\tau_y$  и  $\tau_x$  (рис. 6.31).

Для вычисления  $\tau_y$  нельзя пользоваться формулой (6.12), т. к. принятые гипотезы здесь оказываются неправильными. Это напряжение вычисляется по формулам теории упругости.

Практически  $\tau_y$  не влияют на прочность, т. к.  $\tau_y \ll \tau_x$ . Для определения  $\tau_x$  можно воспользоваться общей формулой (6.12); при этом  $A_{омс.}$  и  $y_1$  берутся так, как показано на рис. 6.31, тогда статический момент:

$$S_x^{омс.} = y_1 A_{омс.}$$

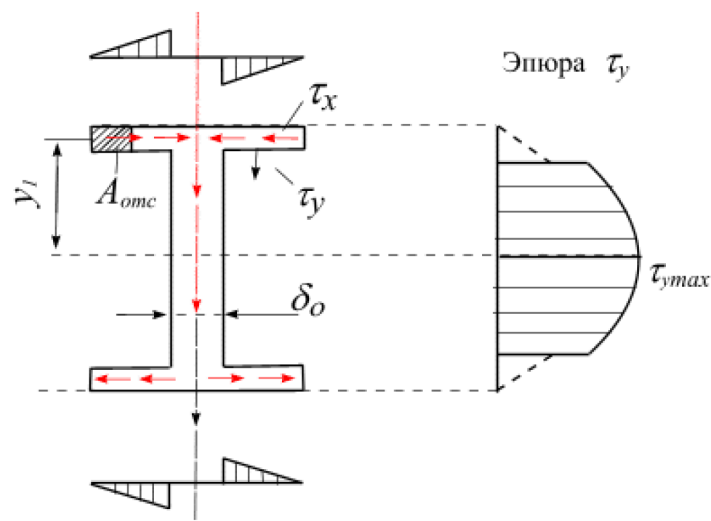


Рис. 6.31

Вид эпюр  $\tau_x$  в полках и  $\tau_y$  в стенке показан на рис. 6.31.

**Сопоставление наибольших нормальных и касательных напряжений при изгибе.** На рис. 6.32 изображены эпюры  $\tau$  и  $\sigma$  для прямоугольного сечения, из которых видно: касательное напряжение  $\tau_{max}$  возникает в тех точках, где  $\sigma = 0$  (на нейтральной оси); касательное напряжение  $\tau = 0$  в крайних точках сечения, где  $\sigma_{max}$ .

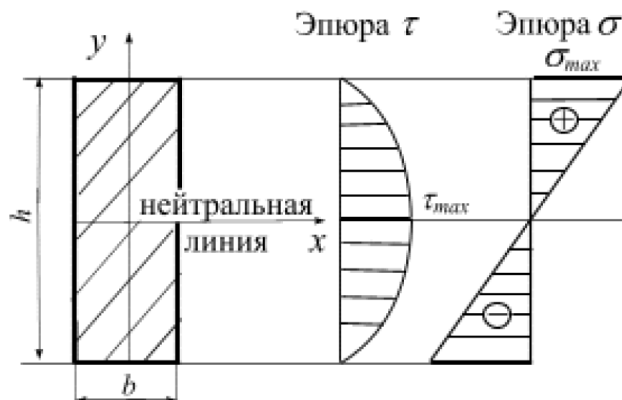


Рис. 6.32

Рассмотрим балку, нагруженную силой  $F$ . Пусть длина балки много больше высоты прямоугольного сечения, т. е.  $\ell \gg h$  (рис. 6.33).

Вычислим отношение  $\sigma_{max}$  и, имея в виду, что  $\tau_{max}$ , учитывая  $M_{max} = F\ell$ ,  $Q_y = F$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{F\ell}{b \cdot h^2/6}; \\ \tau_{max} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3F}{2b \cdot h}; \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{6F\ell}{b \cdot h^2} \cdot \frac{2b \cdot h}{3F} = \frac{4\ell}{h} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{4\ell}{h} \tau_{max}.$$

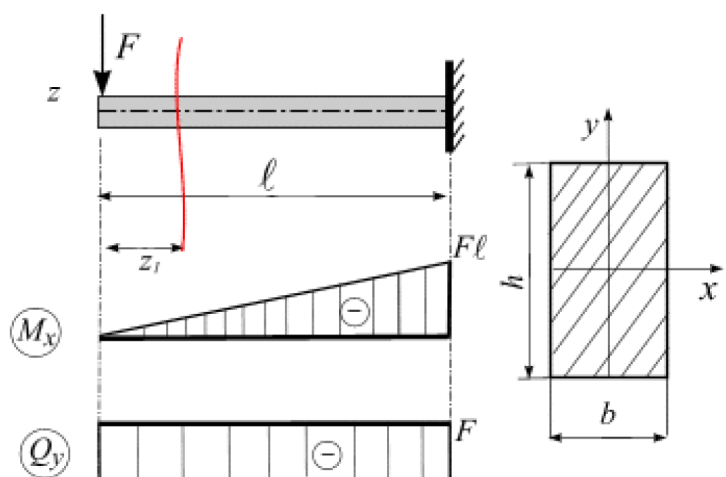


Рис. 6.33

Следовательно,  $\sigma_{max} > \tau_{max}$  при  $\frac{4\ell}{h} \gg 1$ , т. е. нормальные напряжения значительно больше касательных.

## 6.5. Расчеты на прочность при плоском изгибе

**Опасные сечения и опасные точки.** Для проверки на прочность при изгибе по действующим на балку внешним нагрузкам строят эпюры изменения внутренних усилий ( $M_x, Q_y$ ) по ее длине и определяют опасные сечения балки, для каждого из которых необходимо провести расчеты на прочность.

**Опасное сечение** – сечение, в котором изгибающий момент  $M_x$  достигает своего максимального по модулю значения, – именно по этому сечению подбирают сечение всей балки; в каждом из опасных сечений необходимо, построив эпюры нормалей, найти опасные точки сечения, то есть точки, в которых нормальные напряжения  $\sigma_z$  достигают своего максимального значения.

**Рациональные сечения балок.** Балки из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (сталь, древесина), проектируются *симметричными* относительно оси  $x$ .

### Условие прочности по нормальным напряжениям

по допускаемым напряжениям $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma],$ где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение	по предельным состояниям $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c,$ где $R$ – расчетное сопротивление материала балки растяжению (сжатию) при изгибе
--	--

Здесь  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы балки.

Условия прочности позволяют производить три вида расчета:

**I. Проверочный** (непосредственно по указанному неравенству).

**II. Проектный** (подбор сечения):

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} \text{ и } W_x = \frac{M_{max}}{R \cdot \gamma_c}.$$

**III. Определение несущей способности** (допускаемого изгибающего момента)

$$M_{xmax} \leq W_x \cdot [\sigma] \text{ и } M_{xmax} \leq W_x \cdot R \cdot \gamma_c.$$

В дальнейших расчетах будем брать  $\gamma_c = 0,9 \div 1$ .

Характер распределения  $\sigma$  для симметричных сечений представлен на рис. 6.34.

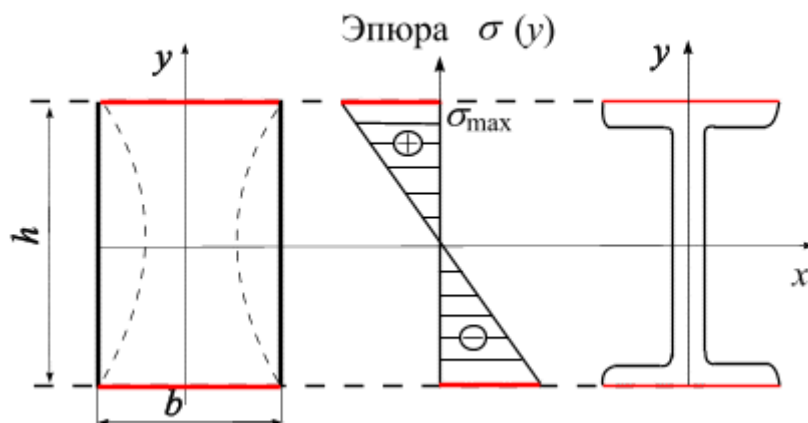


Рис. 6.34

Из эпюры  $\sigma(y)$  видно, что материал, расположенный у нейтральной оси, нагружен очень мало. В целях экономии и снижения веса балок следует выбирать такие формы сечения, чтобы большая часть материала была удалена от нейтральной оси (рациональные формы). Наилучшим является двутавровое сечение (рис. 6.34).

Возьмем две одинаковые прямоугольные балки, закрепленные одним концом в неподвижной опоре с разной геометрией (рис. 6.35), и приложим к свободным концам силу  $F$ .

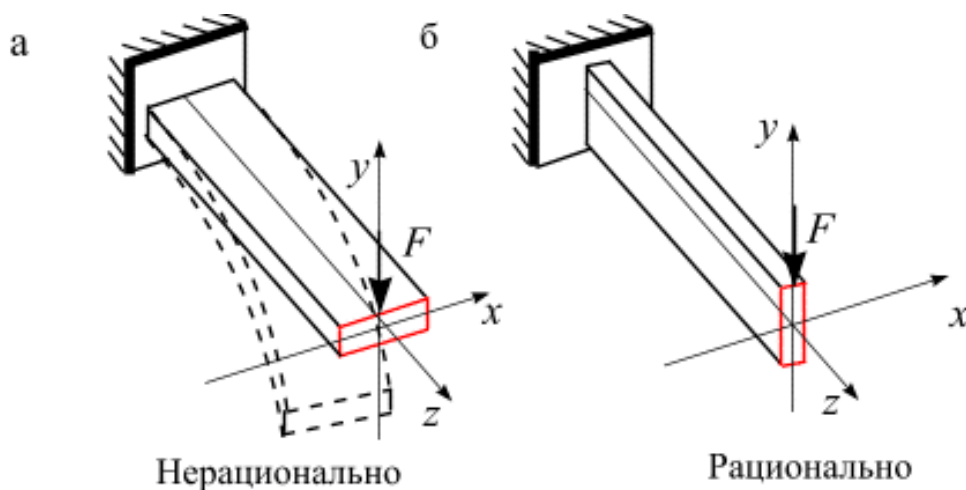


Рис. 6.35

Возможные разрушения могут произойти в опасном сечении, совпадающем с заделкой; изгибающий момент  $M_x$ , создаваемый силой  $F$  в обеих балках, равен  $M_{\max} = F \cdot \ell$ .

В первом варианте (рис. 6.35, а) балка изогнется при сравнительно небольшой величине силы  $F$ . Во втором варианте (для достижения того же результата понадобится значительно большая сила. В первом случае деформируемые слои материала балки в сечении ближе расположены к нейтральной оси  $x$ , а во втором – дальше. Из предыдущего материала известно, что нейтральная ось (нулевая линия) – это геометрическое место точек поперечного сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Поскольку основное сопротивление изгибу оказывают наиболее удаленные от нейтральной линии слои материала, целесообразно при изгибе ориентировать сечения балки так, чтобы в плоскости изгиба лежали точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси. Следовательно, сечение на рис. 6.35, б расположено рационально.

Способность поперечного сечения сопротивляться деформации изгиба характеризуется осевым моментом сопротивления изгибу  $W_x$ . Величина  $W_x$  зависит от формы и размеров поперечного сечения и от его ориентации по отношению к изгибающей силе. На рис. 6.35\* приведена диаграмма соотношения моментов сопротивления  $W_x$  и  $W_y$  для некоторых профилей проката, широко применяющихся в практике.

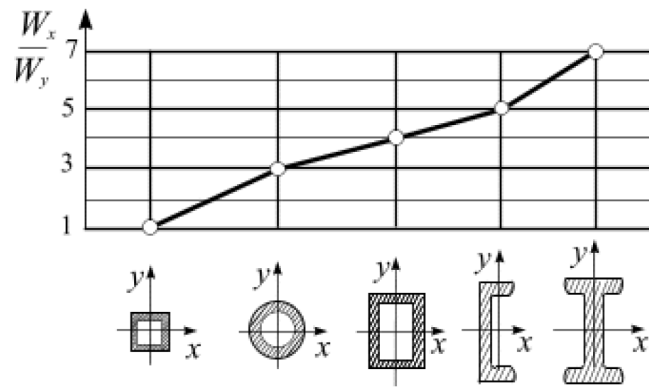


Рис. 6.35\*

Из диаграммы видно, что отношение  $W_x / W_y$  колеблется в пределах от 1 до 7. В связи с этим для рационального использования материала в строительных конструкциях с нагрузками в плоскости  $zy$  профиль проката следует располагать рационально, так, чтобы момент сопротивления относительно плоскости изгиба  $yz$  был максимальным ( $W_x^{\max}$ ), а плоскости  $xu$  – минимальным ( $W_y^{\min}$ ). Для стандартных профилей типа двутавров и швеллеров величины осевых моментов сопротивления изгибу приведены в справочниках.

Рациональное расположение сечения имеет место, если силовая плоскость совпадает с плоскостью наибольшей жесткости (след ее совпадает с осью  $J_{\min}$ ).

Для бруса (рис. 6.35, а) допускаемая нагрузка в три раза больше, чем для аналогичного бруса (рис. 6.35, б).

Для балок из **хрупких** материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, следует применять сечения **несимметричные** относительно нейтральной оси (тавровое, несимметричное двутавровое, П-образное). При этом целесообразно располагать сечение так, чтобы его большая часть находилась в растянутой зоне (рис. 6.36).

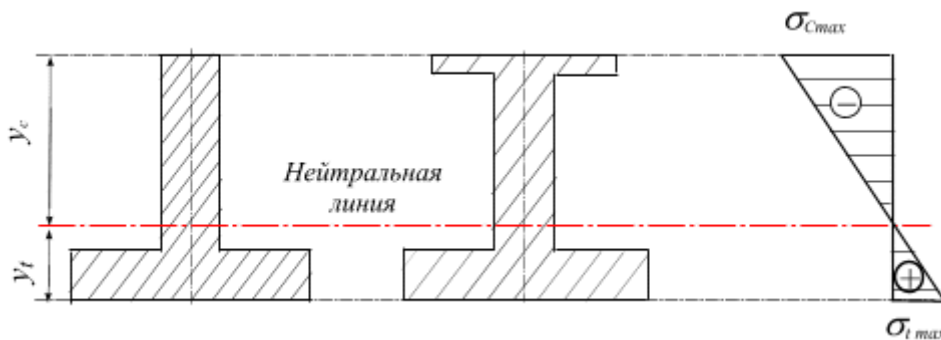


Рис. 6.36

При этом приходится отдельно проверять наибольшие напряжения в растянутой и сжатой зоне. Условие прочности (6.6) распадается на два:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p\max} &= \frac{M_{x\max}}{J_x} y_k \leq [\sigma_p] & \sigma_{t\text{расч.}} &= \frac{M_{x\max}}{J_x} y_t \leq R_t \cdot \gamma_c \\
 \sigma_{c\max} &= \frac{M_{x\max}}{J_x} y_L \leq [\sigma_c] & \sigma_{c\text{расч.}} &= \frac{M_{x\max}}{J_x} y_c \leq R_c \cdot \gamma_c
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$



где  $y_t$  и  $y_c$  – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек растянутой и сжатой зон;  $R_t$  и  $R_c$  – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие;  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

**Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид:**

По допускаемым напряжениям $\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x_{max}}}{b_y J_x} \leq [\tau],$ где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение	По предельным состояниям $\tau_{расч.} = \frac{Q_{расч.} S_{x_{max}}}{b_y J_x} \leq R_s \cdot \gamma_c,$ где $R_s$ – расчетное сопротивление материала балки сдвигу
---	--

Неравенства (6.7) позволяют производить три вида расчета:

1. *Проверка прочности* (производится непосредственно по указанному неравенству).

2. *Подбор ширины прямоугольного сечения балки (проектный расчет)* осуществляется по формуле:

$$b \geq \frac{Q_{max} S_{x_{max}}}{J_x [\tau]} \quad \text{и} \quad b \geq \frac{Q_{расч.} S_{x_{max}}}{J_x R_s \cdot \gamma_c} = \frac{3/2 Q_{расч.}}{R_s \cdot \gamma_c \cdot h}. \quad (6.13)$$

3. *Предельная поперечная сила (несущая способность)* определяется из неравенства:

$$Q \leq \frac{J_x [\tau] b_y}{S_{x_{max}}} \quad \text{и} \quad Q \leq \frac{J_x R_s \cdot \gamma_c \cdot b_y}{S_{x_{max}}}. \quad (6.14)$$

Для балок *сплошного* сечения основным является расчет по **нормальным напряжениям  $\sigma$** , расчет по *касательным напряжениям  $\tau$*  носит *вспомогательный* характер.

Для *тонкостенных* профилей, *деревянных* и *клееных* балок обязательно делается *проверка по  $\tau$* .

## Примеры решения задач

### 1. Проверка прочности балки

**Пример 6.8.** Проверить прочность стальной балки (рис. 6.37, а), если расчетное сопротивление материала  $R = 180 \text{ МПа}$ ,  $F = 12 \text{ кН}$ ,  $h = 18 \text{ см}$ ,  $b = 12 \text{ см}$ .

**Решение.**

1. Вычислим геометрические характеристики поперечного сечения (рис. 6.37, б):

1) осевой момент инерции:  $J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4;$

2) осевой момент сопротивления:  $W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{2J_x}{\frac{1}{2}h} = \frac{5832}{9} = 648 \text{ см}^3.$

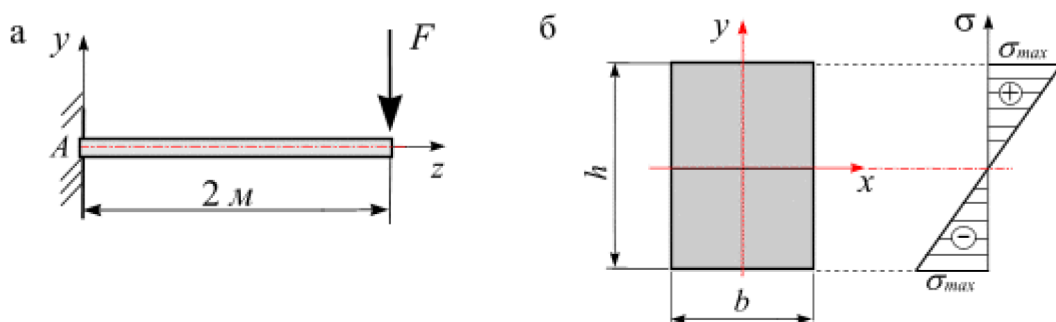


Рис. 6.37

2. Строим эпюру изгибающего момента (рис. 6.18).

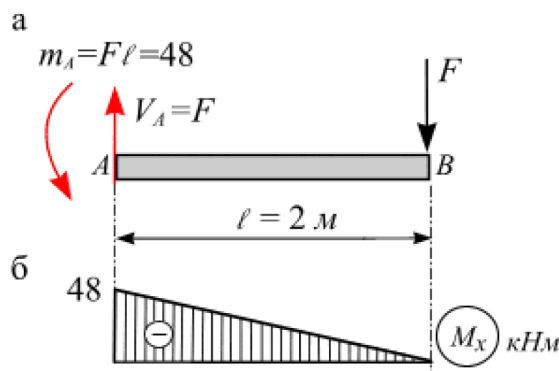


Рис. 6.38

Опасное сечение консольной балки находится в заделке, где изгибающий момент равен:

$$M_x = F \ell = 12 \cdot 2 = 24 \cdot \text{кНм}.$$

Вычислим напряжение в опасных точках поперечного сечения (рис. 6.38, б):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{24 \cdot 10^3}{648 \cdot 10^{-6}} = 0,037 \cdot 10^9 \text{ Па} = 37 \text{ МПа}.$$

Сравниваем:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = 37 \text{ МПа} \\ R = 180 \text{ МПа} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{max} < R.$$

Прочность балки обеспечена с большим запасом прочности.

## II. Подбор площади поперечного сечения балки (проектный расчет)

**Пример 6.9.** Консольная балка нагружена постоянной нагрузкой  $F$ , сосредоточенным моментом  $m$ , равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , (рис. 6.39).

Задано:  $a = 1,2 \text{ м}$ ,  $F = 22 \text{ кН}$ ;  $q = 25,2 \text{ кН/м}$ ;  $m = 26,4 \text{ кН/м}$ . Расчетное значение сопротивления материала  $R = 228 \text{ МПа}$ .

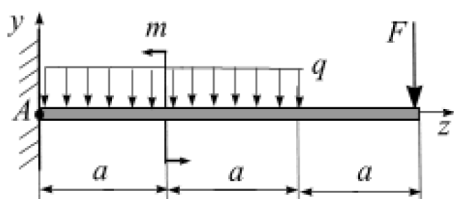


Рис. 6.39

Варианты поперечных сечений балки показаны на рис. 6.40:

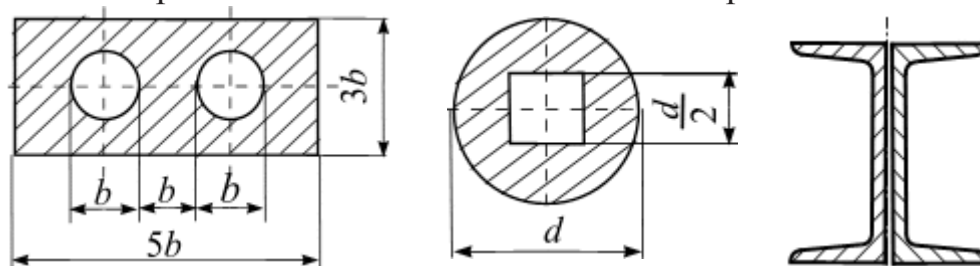


Рис. 6.40

Требуется:

- 1) вычислить реакции жесткой заделки;
- 2) построить эпюры внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_x$ ;
- 3) вычислить размеры поперечных сечений для трех вариантов (рис. 6.40);
- 4) вычислить удельный момент сопротивления  $W_{y0} = W_x / A$  полученных сечений и выбрать из них наиболее рациональное.

**Решение.**

1. Вычислим реакции жесткой заделки от нагрузок (рис. 6.41):

$$\sum M_A = 0, \quad m_A - m - 2qa^2 - F \cdot 3a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_A = m + 2qa^2 + 3Fa = 26,4 + 2 \cdot 25,2 \cdot 1,2^2 + 3 \cdot 22 \cdot 1,2 = 178,2 \text{ кНм.}$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_A - 2qa - F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = 2qa + F = 2 \cdot 25,2 \cdot 1,2 + 22 = 82,48 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum M_B = m_A - R_A \cdot 3a - m + q \cdot 2a \cdot 2a = 178,2 - 82,48 \cdot 3,6 - 26,4 + 25,2 \cdot 5,76 = 0.$$

Построим эпюры изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$  от заданных нагрузок.

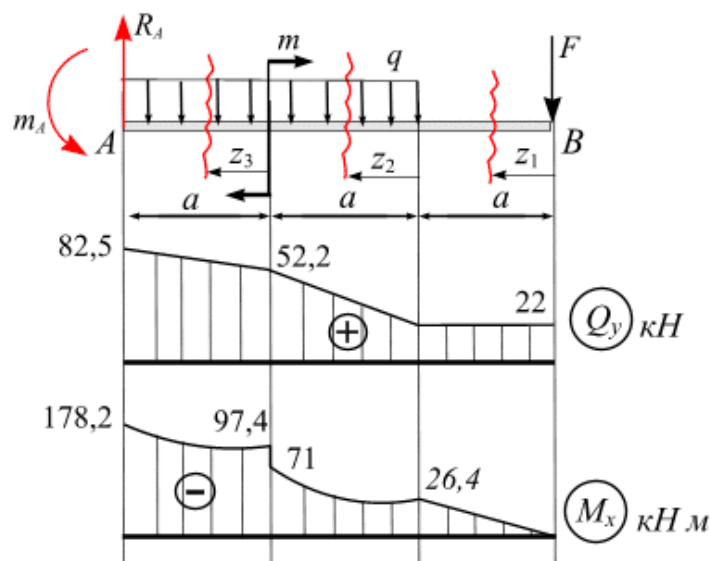


Рис. 6.41

Разобьем балку на три участка. Запишем аналитические выражения внутренних силовых факторов  $M_x$  и  $Q_y$  для каждого участка и вычислим их значения в характерных точках (рис. 6.41).

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$ :

$$M_x(z_1) = -F \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_1 = 0) = 0; \\ M_x(z_1 = a) = -F \cdot a = -22 \cdot 1,2 = -26,4 \text{ кНм}. \end{cases}$$

$$Q_y(z_1) = -\frac{dM_x(z_1)}{dz_1} = F = 22 \text{ кН}.$$

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq a$ :

$$M_x(z_2) = -F(a + z_2) - \frac{qz_2^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = -F \cdot a = -22 \cdot 1,2 = -26,4 \text{ кНм}; \\ M_x(z_2 = a) = -2F \cdot a - \frac{qa^2}{2} = \\ = -2 \cdot 22 \cdot 1,2 - \frac{25,2 \cdot 1,2^2}{2} = -71 \text{ кНм}. \end{cases}$$

$$Q_y(z_2) = -\frac{dM_x(z_2)}{dz_2} = F + qz_2 \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z_2 = 0) = F = 22 \text{ кН}; \\ Q_y(z_2 = a) = F + qa = \\ = 22 + 25,2 \cdot 1,2 = 52,2 \text{ кН} \end{cases}$$

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq a$ :

$$M_x(z_3) = -F(2a + z_3) - \frac{q(a + z_3)^2}{2} - m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x(z_3 = 0) = -F(2a) - \frac{qa^2}{2} - m = -97,4 \text{ кНм}; \\ M_x(z_3 = a) = 3F \cdot a - \frac{q(2a)^2}{2} = -178,2 \text{ кНм}. \end{cases}$$

$$Q_y(z_3) = -\frac{dM_3}{dz_3} = F + q(a + z_3) \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z_3 = 0) = F + qa = 52,2 \text{ кН}; \\ Q_y(z_3 = a) = F + 2qa = 82,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

По вычисленным значениям  $M_x$  и  $Q_y$  на каждом участке строим эпюры (рис. 6.41). Опасным сечением балки будет являться сечение возле заделки, где  $M_{max} = |178,2| \text{ кНм}$ .

Запишем условие прочности для опасного сечения по предельному состоянию:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq R \Rightarrow W_x = \frac{M_{max}}{R} = \frac{178,2 \cdot 10^3}{228 \cdot 10^6} = 0,7816 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 781,6 \text{ см}^3.$$

Вычислим размеры рассматриваемых сечений для трех вариантов.

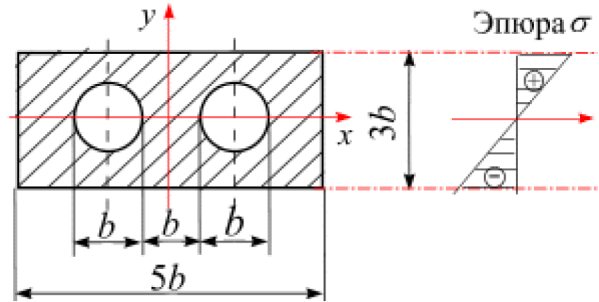
I. Вычислим осевой момент инерции и момент сопротивления первого сечения.

1. Момент инерции прямоугольника:

$$J_{x1} = \frac{5b(3b)^3}{12} = \frac{135 \cdot b^4}{12} = 11,25b^4.$$

2. Момент инерции круга:

$$J_{x2} = 2 \cdot \frac{\pi r^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{2}\right)^4 = \frac{\pi b^4}{32} = 0,1b^4.$$



3. Вычислим момент сопротивления данного сечения:

$$W_{Ix} = \frac{J_{x1} - 2 \cdot J_{x2}}{y_{max}} = \frac{(11,25 - 2 \cdot 0,1)b^4}{1,5b} \approx 7,37b^3.$$

Приравняв момент сопротивления данного сечения *расчетному моменту сопротивления сечения*, получим:

$$7,37b^3 = 781,6 \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{781,6}{7,37}} \approx 4,73 \text{ см}.$$

Тогда площадь сечения:

$$A_1 = A_1 - A_2 = 5b \cdot 3b - 2 \cdot \frac{\pi(b/2)^2}{2} = (15 - 0,785)b^2 \approx 14,22(4,73)^2 \approx 318,1 \text{ см}^2.$$

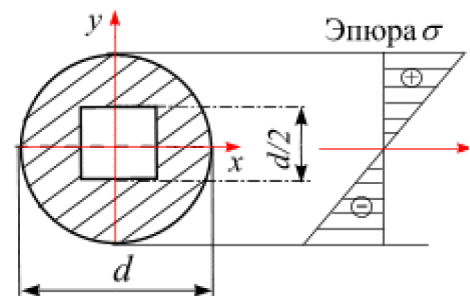
II. Осевой момент инерции и момент сопротивления данного сечения вычисляются по формулам:

1) момент инерции круга:

$$J_{x1} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi b^4}{64} = 0,05b^4;$$

2) момент инерции квадрата:

$$J_{x2} = \frac{(d/2)^4}{12} = \frac{d^4}{192} = 0,0052d^4;$$



3) вычислим момент сопротивления данного сечения:

$$W_{IIx} = \frac{J_{x1} - J_{x2}}{y_{max}} = \frac{(0,05 - 0,005)d^4}{0,5d} = 0,09d^3.$$

Приравняв момент сопротивления данного сечения *расчетному моменту сопротивления сечения*, получим:

$$0,09d^3 = 781,6 \text{ см}^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{781,6}{0,09}} = 20,55 \text{ см}.$$

Тогда момент сопротивления:

$$W_{\text{IIx}} = 0,09d^3 = 0,09 \cdot (20,55)^3 \approx 781,05 \text{ см}^3.$$

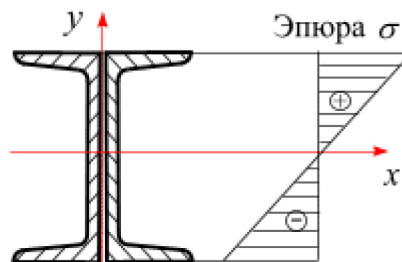
Площадь сечения:

$$\begin{aligned} A_{\text{II}} = A_1 - A_2 &= \frac{\pi d^2}{4} - (0,25d)^2 = \frac{3,14 \cdot (20,55)^2}{4} - (0,25 \cdot 20,5)^2 = \\ &= 331,5 - 26,27 = 305,2 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

III. Расчетный (требуемый) момент сопротивления сечения для двух швеллеров:

$$W_x = 781,6 \text{ см}^3.$$

Требуемый момент сопротивления одного швеллера вычисляют путем деления *расчетного момента сопротивления* на количество профилей, составляющих поперечное сечение. Таким образом, требуемый момент сопротивления одного швеллера составляет:



$$W_x = \frac{781,6}{2} = 390,8 \approx 391 \text{ см}^3.$$

Из сортамента (ГОСТ 8240 – 89) выбираем швеллер № 30, для которого

$$W_x = 387 \text{ см}^3, A_3 = 40,5 \text{ см}^2, J_x = 5810 \text{ см}^4.$$

Имеем

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Расчетное } W_x \approx 391 \text{ см}^3 \\ \text{Табличное } W_x^* = 387 \text{ см}^3 \end{array} \Rightarrow \text{расчетное} > \text{табличного};$$

Вычислим возникшее перенапряжение. Имеем:

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{\text{max}}^* = \frac{M_{\text{max}}}{W_x^*} = \frac{178,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 387 \cdot 10^{-6}} = 230,2 \text{ МПа}; \\ R = 288 \text{ МПа}; \end{array} \Rightarrow \sigma_{\text{max}}^* < R.$$

Выбираем два швеллера № 30:

$$W_{\text{IIIx}} = 2 \cdot 387 = 486 \text{ см}^3, A_{\text{III}} = 2 \cdot 40,5 = 81 \text{ см}^2, J_x = 2 \cdot 5810 = 11620 \text{ см}^4.$$

Заданные поперечные сечения с вычисленными размерами оцениваются с точки зрения рационального использования сечения. Для этого вычислим *удельный момент сопротивления полученных сечений*:

$$\text{а) } (W_I)_{y\partial} = \frac{(W_I)_x}{A_I} = \frac{737}{318,1} = 2,33 \text{ см}^3;$$

$$\text{б) } (W_{II})_{y\partial} = \frac{(W_{II})_x}{A_{II}} = \frac{781,5}{305,2} = 2,56 \text{ см}^3;$$

$$\text{в) } (W_{III})_{y\partial} = \frac{(W_{III})_x}{A_{III}} = \frac{486}{81} = 6 \text{ см}^3.$$

Наиболее рациональным является сечение балки из двух швеллеров (вариант в), у которой при наименьшей площади осевой момент сопротивления имеет наибольшее значение.

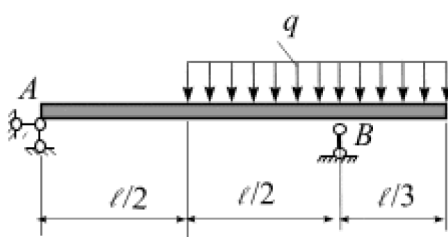


Рис. 6.42

**Пример 6.10.** Подобрать сечение консольной двутавровой балки (рис. 6.42), если длина пролета  $\ell = 3 \text{ м}$ , нагрузка  $q = 30 \text{ кН/м}$ , расчетное сопротивление материала изгибу  $R = 240 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Вычислим реакции опор  $R_A$  и  $R_B$  и проверим правильность их вычислений (рис. 6.43):

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 3 - q \cdot 2,5 \cdot 2,75 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{30 \cdot 2,5 \cdot 2,75}{3} = 68,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 3 + 30 \cdot 2,5 \cdot 0,125 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{30 \cdot 2,5 \cdot 0,125}{3} = 6,25 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum F_y = 6,25 - 30 \cdot 2,5 + 68,75 = 0$ .

Построим эпюру  $M_x$  (рис. 6.43, б). Эпюру  $Q_y$  построим для контроля эпюры  $M_x$ .

**Эпюры.** Данная балка имеет три участка (рис. 6.43, б, в). Для составления выражения изгибающего момента применим метод сечений, а поперечную силу на каждом участке вычислим как производную от изгибающего момента.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 1,5$

$$Q_{v1} = R_A = 6,25 \text{ кН};$$

$$M_{x1}(z_1) = R_A \cdot z_1 \Rightarrow \begin{cases} M_{x1}(z_1 = 0) = 0; \\ M_{x1}(z_1 = 1,5) = R_A \cdot 1,5 = 6,25 \cdot 1,5 = 9,375 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Поперечная сила на этом участке является постоянной. Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является линейной функцией.



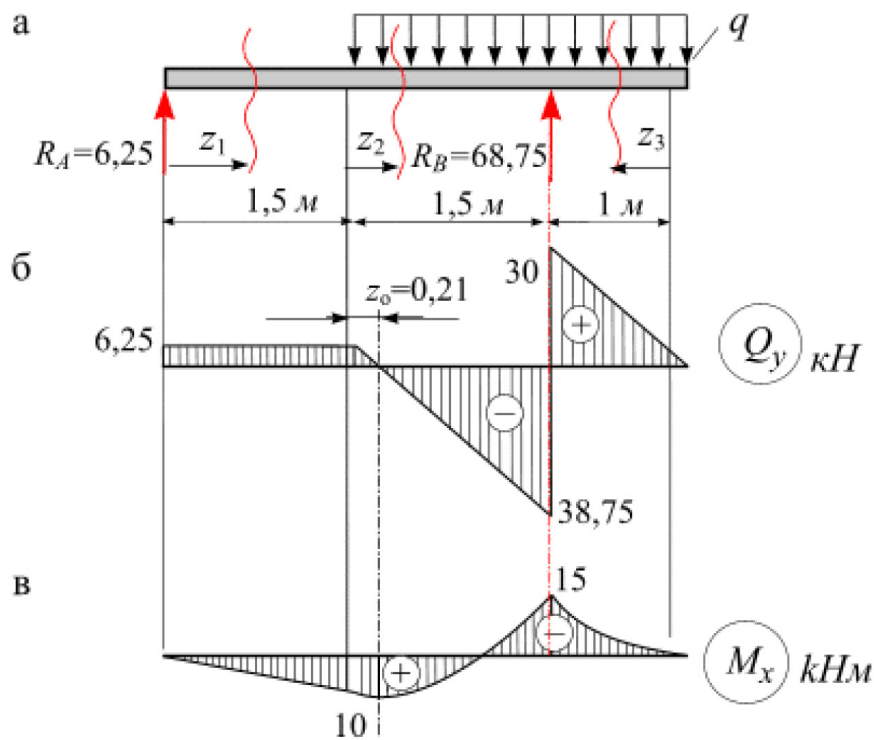


Рис. 6.43

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 1,5$ .

$$Q_y = R_A - qz_2 \Rightarrow \begin{cases} Q_y(z_2 = 0) = R_A = 6,25 \text{ кН}; \\ Q_y(z_2 = 1,5) = R_A - q \cdot 1,5 = 6,25 - 30 \cdot 1,5 = -38,75 \text{ кН}; \\ Q_y(z_o) = 0 \Rightarrow z_o = \frac{R_A}{q} = \frac{6,25}{30} \approx 0,21 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$M_{x2}(z_2) = R_A(1,5 + z_2) - qz_2 \frac{z_2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = R_A \cdot 1,5 = 6,25 \cdot 1,5 = 9,36; \\ M_x(z_2 = 1,5) = \\ = 6,25(1,5 + 1,5) - 30 \frac{(1,5)^2}{2} = 15 \text{ кНм}; \\ M_x(z_o = 0,21) = \\ = 6,25(1,5 + 0,21) - 30 \frac{(0,21)^2}{2} \approx 10 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Поперечная сила на этом участке является линейной функцией. Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является квадратичной функцией. Поперечная сила на II участке меняет знак с плюса на минус, следовательно, изгибающий момент в точке пересечения базиса достигнет экстремума.

**III участок:**  $0 \leq z_1 \leq 1,5$ .

$$Q_{y3}(z_3) = q \cdot z_3 \Rightarrow \begin{cases} Q_{y3}(z_3 = 0) = 30 \cdot 0 = 0; \\ Q_{y3}(z_3 = 1) = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кН}. \end{cases}$$

Поперечная сила на III участке меняет знак с плюса на минус, следовательно, изгибающий момент в точке пересечения базиса достигнет экстремума.

$$M_x(z_3) = \frac{qz_3^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_{x3}(z_3 = 0) = 0; \\ M_{x3}(z_3 = 1) = \frac{q(1)^2}{2} = 15 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Изгибающий момент  $M_x$  на этом участке является квадратичной функцией.

По вычисленным значениям изгибающих моментов и поперечных сил построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис. 6.43, б, в).

Из эпюры изгибающего момента  $M_x$  видно, что опасное сечение балки находится в сечении B:  $M_x^{max} = 15 \text{ кНм}$ .

**Проектный расчет.** Подберем поперечное двутавровое сечение балки. Запишем условие прочности для выявленного опасного сечения и вычислим требуемый момент сопротивления балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^D}{W_x} \leq R,$$

$$W_x \geq \frac{M_x^{max}}{R} = \frac{15 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 0,0625 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 62,5 \text{ см}^3.$$

Из сортамента находим геометрические характеристики для двутавра № 14:  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$ .

Проверим его прочность:

$$\sigma_{\text{№14}} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 184 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа}.$$

Если выбрать двутавр № 14, прочность балки будет обеспечена с большим запасом.

Проверим двутавр № 12:  $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ ;

$$\sigma_{\text{№12}} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 260 \text{ МПа} > 240 \text{ МПа}.$$

Вычислим возникшее перенапряжение:

$$\frac{\sigma_{\text{№12}} - R}{\sigma_{\text{№12}}} \cdot 100 \% = \frac{260 - 240}{260} \cdot 100 \% = 7,7 \% > 5 \%, \text{ что недопустимо.}$$

**Ответ:** Выбираем двутавр № 14.

### III. Определение несущей способности балки

**Пример 6.11.** Шарнирно-опертая консольная двутавровая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , силой  $F = 1,2 qa$  и моментом  $m = 2,4 qa^2$  (рис. 6.44).

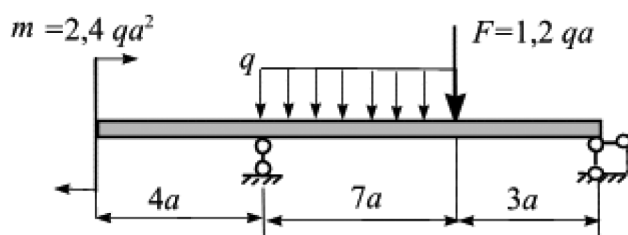


Рис. 6.44

Длина пролета балки  $a = 0,6$  м. Расчетное сопротивление материала на изгиб  $R = 210$  МПа, срез  $R_s = 130$  МПа балки двутавр № 30, а.

Требуется:

1. Вычислить реакции опор в долях  $qa$  и проверить их.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ , вычислить их расчетные (наибольшие) значения.
3. Определить несущую способность балки  $q$  из условия прочности по нормальным напряжениям.
4. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при вычисленной нагрузке  $q$ .

**Решение.**

**1. Реакции опор** (рис. 6.45, а).

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 10a - F \cdot 7a - q \cdot 7a \cdot 3,5a - m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1,2qa \cdot 7a + 24qa^2 + 2,4qa^2}{10a} = 3,5qa.$$

$$\sum M_B = 0, -m - R_A \cdot 10a + q \cdot 7a \cdot 6,5a + F \cdot 3a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{-2,4qa^2 + 45,5qa^2 + 3,6qa^2}{10a} = 4,7qa.$$

*Проверка:*

$$\begin{aligned} \sum F_y = R_A - 7qa - 1,2qa + R_B &= 3,5qa - 7qa - 1,2qa + 4,7qa = \\ &= 8,2qa + 8,2qa = 0. \end{aligned}$$

**2. Эпюры.** Разобьем балку на три участка и составим аналитические выражения изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$  на этих участках.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 4a$ :

$$M(z_1) = m = 2,4 qa^2 \Rightarrow (const),$$

$$Q(z_1) = 0.$$

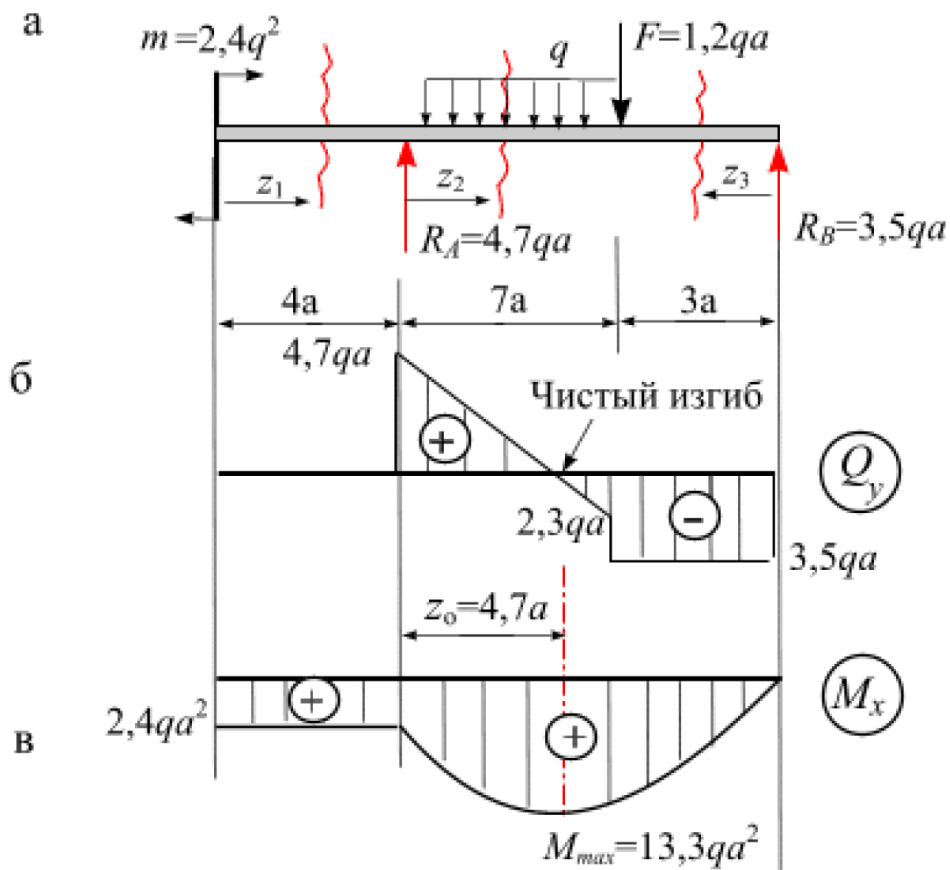


Рис. 6.45

II участок,  $0 \leq z_2 \leq 7a$ :

$$Q(z_2) = R_A - qz_2 \Rightarrow \begin{cases} Q(z_2 = 0) = R_A = 4,7qa; \\ Q(z_2 = 7a) = R_A - q \cdot 7a = 4,7qa - 7qa = -2,3qa; \\ Q(z_0) = 0 \Rightarrow R_A - q \cdot z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{4,7qa}{q} = 4,7a. \end{cases}$$

$$M_x(z_2) = m + R_A \cdot z - \frac{qz_2^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_x(z_2 = 0) = m; \\ M_x(z_2 = 7a) = m + R_A \cdot 7a - \frac{q(7a)^2}{2} = \\ = 2,4qa^2 + 4,67qa \cdot 7a - \frac{q(7a)^2}{2} = 10,6qa^2; \\ M_{xmax}(z_0) = m + R_A \cdot z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = \\ = 2,4qa^2 + 4,7qa \cdot 4,7a - \frac{q(4,7a)^2}{2} = 13,3qa^2. \end{cases}$$

**III участок,  $0 \leq z_3 \leq 3a$ :**

$$Q(z_3) = -R_B = -3,5qa;$$

$$M_x(z_3) = R_B \cdot z_3 \Rightarrow \begin{cases} M(z_3 = 0) = 0; \\ M(z_3 = 3a) = R_B \cdot 3a = 3,5qa \cdot 3a = 10,5qa^2. \end{cases}$$

По вычисленным значениям  $M_x$  и  $Q_y$  строим эпюры (рис. 6.45, б, в). По эпюрам находим:

$$M_{max} = 13,3qa^2, \quad Q_{max} = 4,67qa.$$

**Несущая способность балки.** Из сортамента (ГОСТ 8239-89) для двутавра № 30а находим:  $W_x = 518 \text{ см}^3$ .

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} = \frac{M_{расч.}}{W_x} \leq R &\Rightarrow \frac{13,3qa^2}{W_x} \leq R \Rightarrow \\ \Rightarrow q \leq \frac{W_x \cdot R}{13,3a^2} = \frac{518 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^6}{13,3 \cdot 0,6^2} &\approx 20447 \frac{H}{м} \approx 20,4 \frac{kH}{м}. \end{aligned}$$

1. Проверка прочности балки по касательным напряжениям.

Условие прочности:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y \cdot S_{xmax}}{I_x \cdot \delta_y} \leq R_S, \quad Q_{max} = 4,67qa.$$

Из сортамента (ГОСТ 8240-89) для двутавра № 30а находим:  $W_x = 518 \text{ см}^3$ ,  $I_x = 7780 \text{ см}^4$ , статический момент полусечения  $S_x = 292 \text{ см}^3$ , толщина стенки  $s = 6,5 \text{ мм}$ .

$$\tau_{max} = \frac{4,67 \cdot 20447 \cdot 0,6 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 33 \text{ МПа}$$

Сравниваем:

$$\tau_{max} = 33 \text{ МПа} \leq R_S = 130 \text{ МПа},$$

т. е. прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

*Ответ:* несущая способность балки  $q = 20,44 \frac{kH}{м}$ .

## 6.6. Расчет балок на жесткость

**Перемещения при изгибе.** Во многих случаях стержни (особенно балки), подверженные изгибу, удовлетворяя условиям прочности, не обладают достаточной жесткостью, вследствие чего их изогнутая ось имеет значительную кривизну

и ее прогибы получаются недопустимо большими. Такие прогибы во многих случаях могут нарушать нормальную эксплуатацию здания или быть неприемлемыми с эстетической точки зрения, поэтому при проектировании сооружений большое значение придается соблюдению допускаемых значений прогибов для широкого класса изгибаемых элементов конструкций.

В случае прямого изгиба ось балки искривляется в плоскости действия сил, центры тяжести сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются (рис. 6.46).

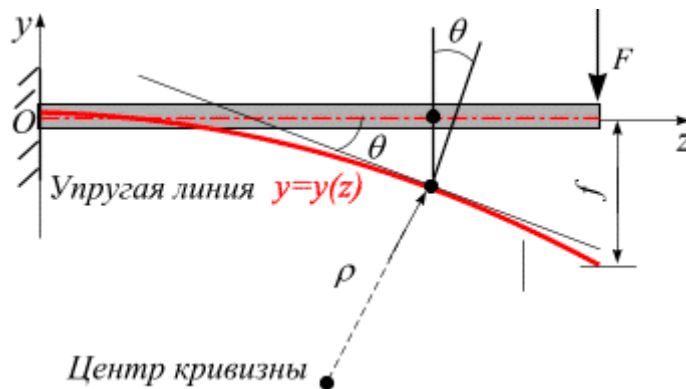


Рис. 6.46

Искривленная ось балки называется *изогнутой осью*, или *упругой линией*. Допущение о малости перемещений позволяет считать, что линейные перемещения – **прогибы** « $y$ » – направлены перпендикулярно продольной оси  $z$  недеформированной балки. Наибольший прогиб называется **стрелой прогиба** и обозначается  $f$  ( $f_{max}$ ).

Согласно принятому направлению осей координат, *положительным* будем считать прогиб вверх, *отрицательным* – вниз.

Угол  $\theta$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется **углом поворота сечения**. Он определяется как угол между касательной к упругой линии и осью  $z$ .

В целях обеспечения нормальной эксплуатации строительных конструкций расчет изгибаемых элементов проводят не только по первой группе предельных состояний, но и по второй – на *жесткость*.

Величина, равная  $EJ_x$ , называется жесткостью балки при изгибе.

Во избежание появления чрезмерных перемещений наибольший прогиб  $y_{max} = f$  не должен превышать предельно допустимого, устанавливаемого строительными нормами, т. е. должно выполняться **условие жесткости**:

$$f \leq [f]. \tag{6.15}$$

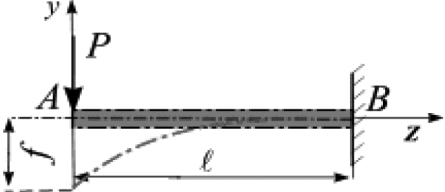
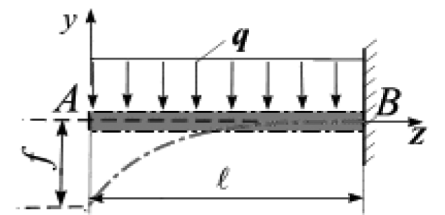
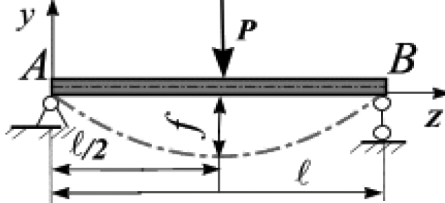
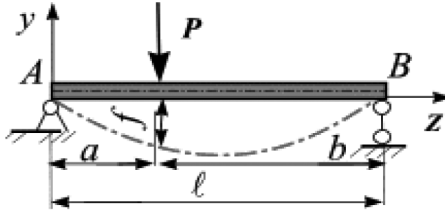
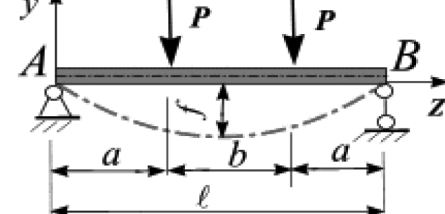
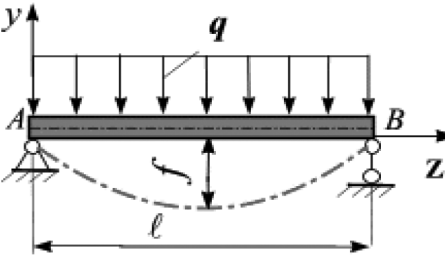
Если жесткость недостаточна, то необходимо подобрать другое сечение из условия (6.15).

**Справка (СНиП 2.01.07-85 (с изм. 1 1993), пункт 10):** Вертикальный предельный прогиб в балке, предъявляемый различными технологическими требованиями к конструкции при пролетах  $1 < \ell < 24(12)$  м соответствует:

$$[f] = \left( \frac{\ell}{200} \div \frac{\ell}{750} \right).$$

В справочниках по сопротивлению материалов приводятся таблицы максимальных прогибов в статически определимых балках постоянного поперечного сечения (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Схема балки	Максимальный прогиб $y = y(z)$ .
	$f = -\frac{Pl^3}{3EJ_x}$
	$f = -\frac{ql^4}{8EJ_x}$
	$f = -\frac{Pl^3}{48EJ_x}$
	$f = -\frac{Pbl^3\sqrt{3}}{27EJ_x} \sqrt{\left(1 - \frac{b^3}{l^3}\right)}; z = \sqrt{\frac{\ell^2 - b^2}{3}}$
	$f = -\frac{Pl^3}{24EJ_x} \left( \frac{3a}{l} - \frac{a^3}{l^3} \right)$
	$f = -\frac{5ql^4}{384 \cdot EJ_x}$



**Пример 6.11.** Консоль  $AB$  нагружена, как показано на рис. 6.47. Вычислить величину прогиба свободного конца балки  $A$ , состоящей из двух швеллеров № 33.

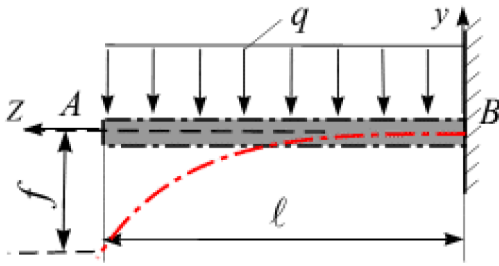


Рис. 6.47

Дано:  $q = 120 \text{ кН / м}$ ;  $l = 5 \text{ м}$ ;  $E = 0,12 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

Из сортамента (швеллер № 33, ГОСТ 8240 – 89) –  $J_x = 7980 \text{ см}^4$ .

Имеем:

$$f_A = -\frac{q\ell^4}{8EJ_x} = -\frac{12 \cdot 10^3 \cdot (1,5)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 7980 \cdot 10^{-8}} = \frac{60,75 \cdot 10^3}{255360 \cdot 10^3} \approx$$

$$= 2,34 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,2 \text{ мм}.$$

Знак минус означает, что точка  $A$  переместится вниз.

**Пример 6.12.** Шарнирно-опертая балка  $AB$  нагружена, как показано на рис. 6.48.

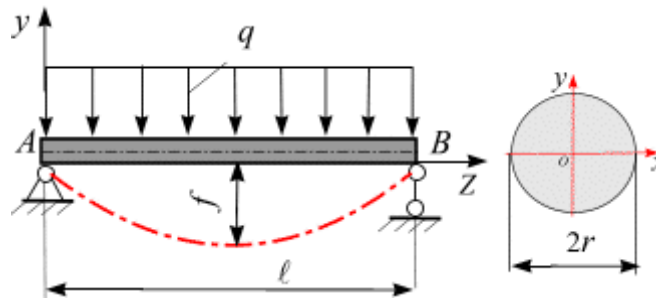


Рис. 6.48

1. Вычислить величину максимального прогиба балки  $A$ , состоящей из круглого бруса лиственницы, радиус которого:  $r = 0,2 \text{ м}$ .

Дано:  $q = 120 \text{ кН / м}$ ;  $l = 5 \text{ м}$ ;  $E = 0,12 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

2. Проверить прочность балки, если расчетное сопротивление  $R = 67 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Вычислим момент инерции круглого сечения относительно оси центральной оси  $x$ .

Имеем:

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,2)^4}{4} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4.$$

Имеем:

$$f = \left| -\frac{5q\ell^4}{384EJ_x} \right| =$$

$$= \frac{5 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot (5)^4}{384 \cdot 0,12 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3}} = \frac{375 \cdot 10^6}{59,9 \cdot 10^8} \approx 6,26 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 6,26 \text{ см}.$$

Проверим прочность балки.

Построим эпюры от заданной нагрузки (рис. 6.49):

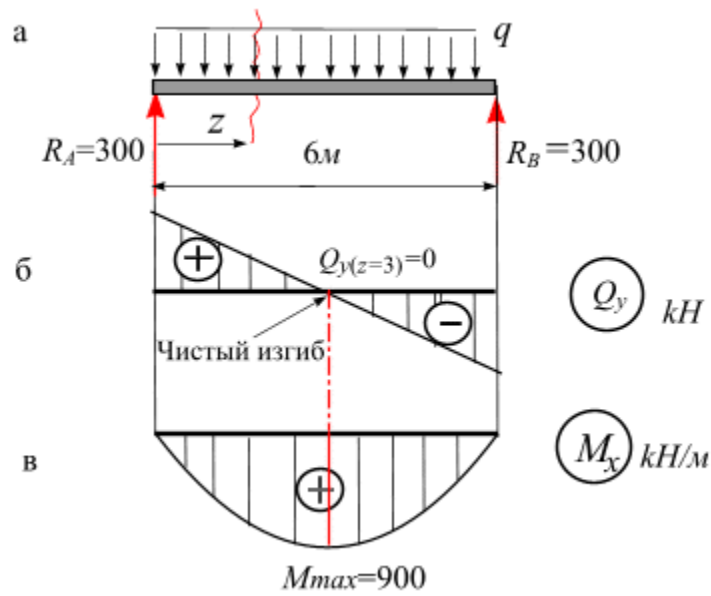


Рис. 6.49

Здесь

$$W_x = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,2)^3}{4} = 628 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$$

$$M_x^{max} = 900 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Имеем:

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{900 \cdot 10^3}{628 \cdot 10^{-5}} = 1,43 \cdot 10^8 = 143 \text{ МПа}; \\ R = 67 \text{ МПа}; \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{max} > R.$$

Прочность балки не обеспечена.

# Глава 7. СДВИГ. РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ

## 7.1. Чистый сдвиг

Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге. Сдвиг – это такой случай нагружения, когда в поперечном сечении возникает только поперечная сила  $Q$ :

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (7.1)$$

Однородный чистый сдвиг можно получить нагружением пластины, захваченной в жесткие контурные шарнирно-соединенные накладки (рис. 7.1, а).

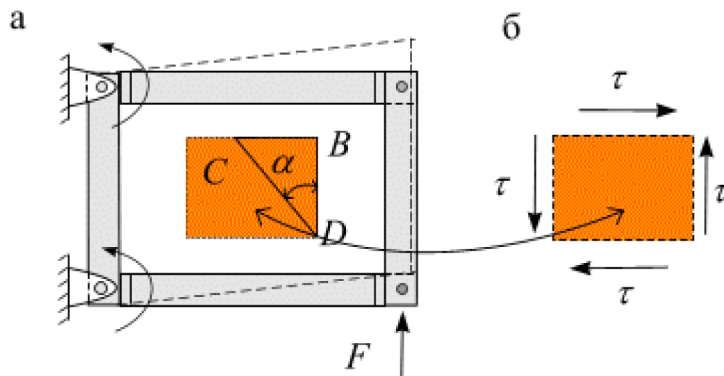


Рис. 7.1

Для всех точек пластины касательные напряжения  $\tau$  будут равны:

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (7.2)$$

где  $Q$  – сдвигающая сила;  $A$  – площадь сечения пластины; а касательные напряжения  $\tau$  принимаем равномерно распределенными по сечению. На гранях выделенного прямоугольного элемента возникают только касательные напряжения (рис. 7.1, б).

Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

Посмотрим, как при чистом сдвиге изменяются напряжения в зависимости от ориентации секущих площадок.

Выделим трехгранную призму  $DCB$  (рис. 7.1) и рассмотрим ее в равновесии (рис. 7.2).

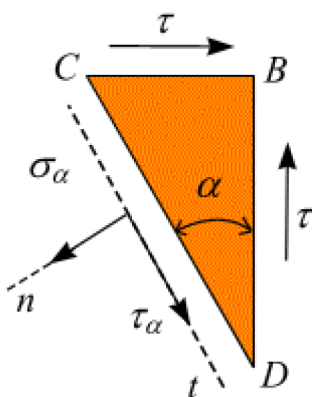


Рис. 7.2

На грани  $DC$  возникают как касательные, так и нормальные напряжения. Проецируем все силы, действующие на элемент, на оси  $n$  и  $t$ :

$$\sigma_\alpha \cdot DC = \tau \cdot DB \cdot \sin \alpha + \tau \cdot BC \cdot \cos \alpha,$$

$$\tau_\alpha \cdot DC = \tau \cdot DB \cdot \cos \alpha - \tau \cdot BC \cdot \sin \alpha,$$

где  $DB = DC \cdot \cos \alpha$  и  $BC = DC \cdot \sin \alpha$ , получаем:

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha. \quad (7.3)$$

При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$  напряжения  $\sigma_\alpha = 0$ ,  $\tau_\alpha = t$ . При  $\alpha = \pm 45^\circ$  напряжения  $\tau_\alpha = 0$ ,  $\sigma_\alpha = \pm t$ . Следовательно, на гранях элемента, повернутого на  $45^\circ$ , будут обнаружены *только нормальные напряжения*, причем на одной паре граней они *растягивающие*, на другой – *сжимающие* (рис. 7.3).

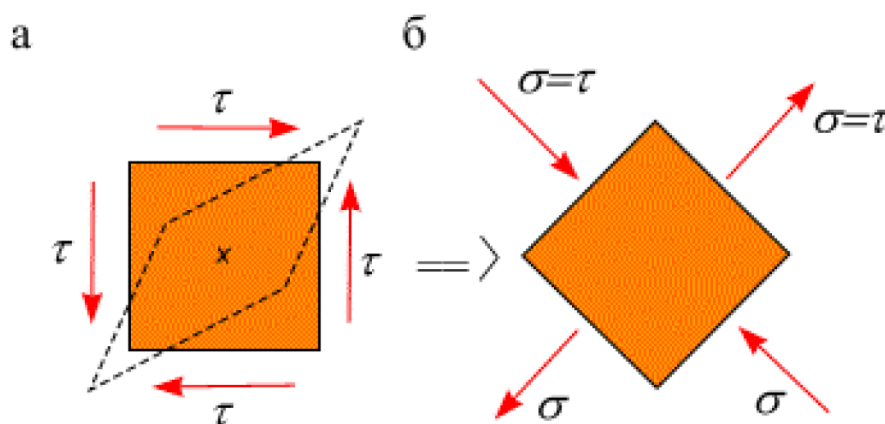


Рис. 7.3

Чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно-перпендикулярным направлениям.

**Закон Гука при чистом сдвиге.** Рассмотрим деформацию элемента со стороной  $a$ , закрепив одну грань (рис. 7.4).

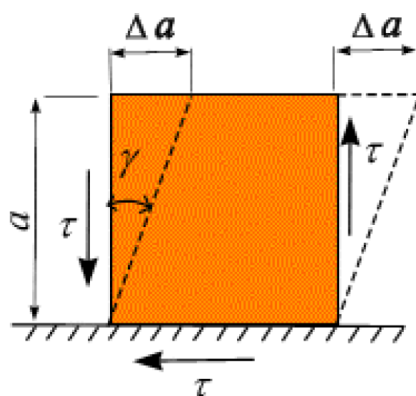


Рис. 7.4

Малый угол  $\gamma$ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется *углом сдвига*, или *относительным сдвигом*. Величину абсолютного смещения грани  $\Delta a$  называют *абсолютным сдвигом*.

Учитывая малость  $\gamma$ , можно записать:

$$\Delta a = \gamma \cdot a \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta a}{a}. \quad (7.4)$$

**Деформация сдвига** характеризуется изменением *углов элемента*, длина ребер не меняется (рис. 7.3, а).

Из опытов на кручение трубчатых образцов из пластичной стали получают *диаграмму сдвига* в координатах  $\tau - \gamma$  (рис. 7.5).

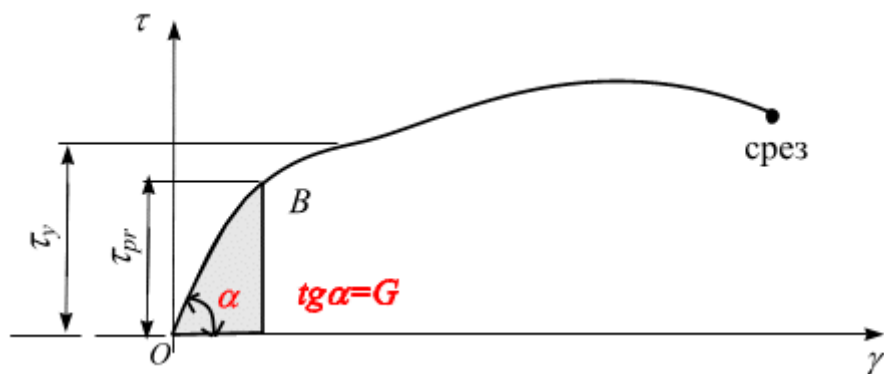


Рис. 7.5

В пределах упругих деформаций справедлива линейная зависимость: **закон Гука при сдвиге:**

$$\tau = \gamma \cdot G \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (7.5)$$

где  $G$  – модуль упругости материала при сдвиге (Па). Для стали  $G = 8 \times 10^4$  МПа.

Для изотропного материала между  $E$ ,  $G$  и  $\nu$ , характеризующими упругие свойства, существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.6)$$

Перепишем (7.4) с учетом (7.5) и (7.2), получим закон Гука для абсолютно-го сдвига:

$$\Delta a = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}, \quad (7.7)$$

где  $G \cdot A$  – жесткость бруса при сдвиге.

## 7.2. Понятие о срезе и смятии

Срезом называют такой вид нагружения бруса, при котором в поперечном сечении возникает только поперечная сила  $Q$ .

Деформация среза имеет место при действии на брус с противоположных сторон двух равных сил на близком расстоянии друг от друга (рис. 7.6, а).

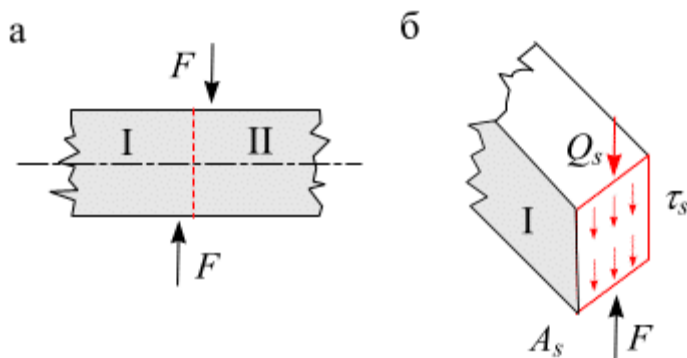


Рис. 7.6

Примером такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, полосы и т. п.

Рассмотрим отсеченную часть I в равновесии (рис. 7.6, б), очевидно

$$Q_s = \int_A \tau_s dA. \quad (7.8)$$

Принимая  $\tau_s$  равномерно распределенными по площади сечения  $A$ , будем иметь:

$$Q_s = F = \tau_s \cdot A_s \Rightarrow \tau_s = \frac{Q_s}{A_s} = \frac{F}{A_s}, \quad (7.9)$$

где  $Q_s$  – срезающая сила;  $A_s$  – площадь среза.

Детали, служащие для соединения отдельных элементов машин или строительных конструкций – заклепки, штифты, болты и т. п., во многих случаях воспринимают нагрузки, перпендикулярные их продольной оси. В этом случае их рассчитывают на срез. На срез проверяют сварные швы (угловые), шпонки и деревянные врубки.

Подробное изучение этих деталей и соединений производится в специальных курсах (детали машин, сварные, деревянные конструкции). В курсе СМ дается лишь самое элементарное представление о них, необходимое для выяснения методов расчета их на прочность.

Расчеты носят условный характер и базируются на следующих *допущениях*:

1. В поперечном сечении возникает только поперечная сила  $Q$ .
2. Касательные напряжения  $\tau$  распределены по площади сечения *равномерно*.
3. Если соединение реализовано несколькими одинаковыми деталями (болтами и т. п.), то предполагается, что все они нагружены одинаково.

**Расчет заклепочных соединений.** Рассмотрим простейшие заклепочные соединения растянутых полос: в нахлестку (рис. 7.7, а) и стыковое с помощью накладок (рис. 7.7, в).

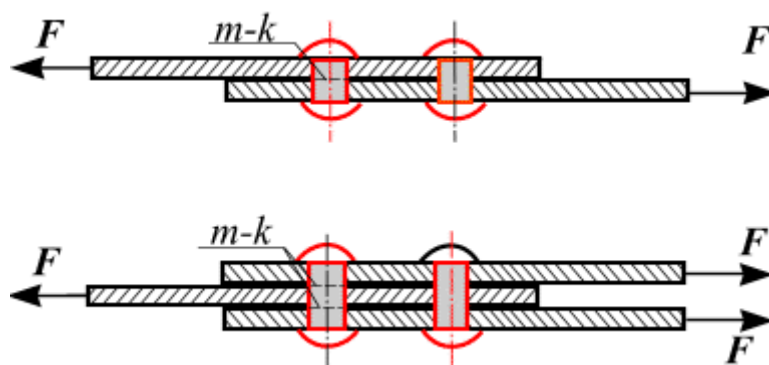


Рис. 7.7

Чтобы проверить прочность этих соединений, надо представить все возможные случаи разрушения и для каждого записать условие прочности:

- I. Срез заклепок.
- II. Смятие заклепок.
- III. Разрыв полос.
- IV. Срез полосы (выкалывание).

**I. Срез заклепок** может происходить по сечениям  $m - k$  при взаимном сдвиге соединяемых полос под действием сил  $F$  (рис. 7.7). Заклепки могут срезаться по одной плоскости – это *односрезные* заклепки (рис. 7.7, а) или по двум и более плоскостям – это *многосрезные* заклепки (рис. 7.7, б).

Примерами такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, полосы, а также соединительные элементы, такие как штифт, заклепка, болт и шпонка (рис. 7.8). Эти элементы работают *на срез*, а возникающие в их поперечном сечении касательные напряжения называют *напряжениями среза*  $\tau_s$ .

**Справка.** Между склепываемыми элементами развиваются значительные силы трения, и работа заклепок, болтов и т. д. на срез начинается лишь после того, как внешние силы станут больше сил трения и начнется сдвиг склепанных полос. При расчетах это обстоятельство не учитывают.

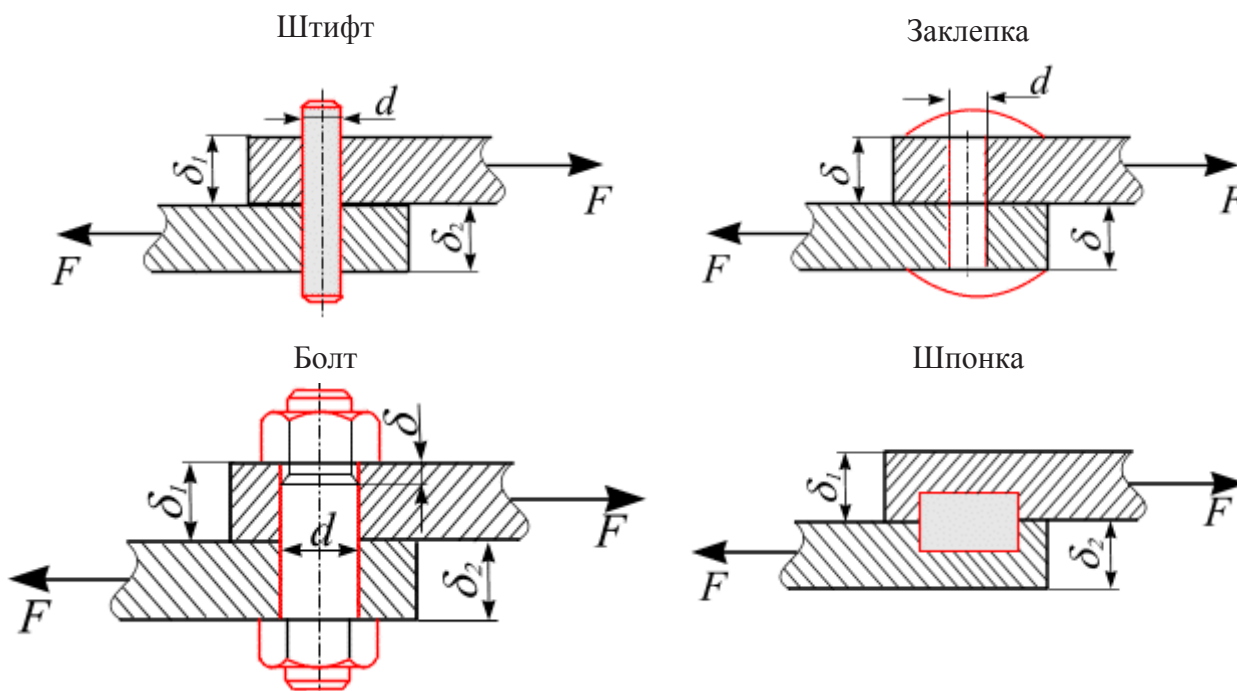


Рис. 7.8

Условие прочности на срез имеет вид:

$$\tau_s = \frac{Q_s}{\sum A_s} = \frac{F}{n \cdot n_s \cdot \pi d^2 / 4} \leq R_s \cdot \gamma_c, \quad (7.10)$$

где  $Q_s = F/n$  – поперечная сила, приходящаяся на одну заклепку;  $\sum A_s$  – суммарная площадь сечений, по которым срезается одна заклепка;  $n$  – число заклепок в нахлесточном соединении (рис. 7.8, а) или число заклепок, расположенных по одну сторону стыка с накладками (рис. 7.8, б);  $n_s$  – число плоскостей среза одной заклепки;  $\pi d^2 / 4$  – площадь среза одной заклепки;  $R_s$  – расчетное сопротивление материала заклепок срезу.

Из условия (7.10) можно определить необходимый диаметр  $d$  заклепок, если задаться их числом:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{n \cdot n_s \cdot \pi \cdot R_c \cdot \gamma_c}} \quad (7.11)$$



или, задавшись диаметром заклепок, определить число заклепок:

$$n \geq \frac{4F}{n_s \cdot \pi \cdot R_c \cdot \gamma_c \cdot d^2} \quad (7.12)$$

Расчет на срез во многих случаях сопровождается расчетом на смятие.

**Справка.** Для скрепления между собой различных деревянных частей используются виды изделий из железа (рис. 7.9).



Рис. 7.9

**II. Смятие заклепок.** Смятие – это пластическая деформация, возникающая на поверхностях контакта.

Фактическое распределение напряжений по поверхности при смятии контакта весьма сложно (рис. 7,10, а). Поэтому ее условно заменяют проекцией поверхности контакта на диаметральную плоскость  $A_p = t \cdot d$  (рис. 7.10, б) и называют *условной площадью смятия*.

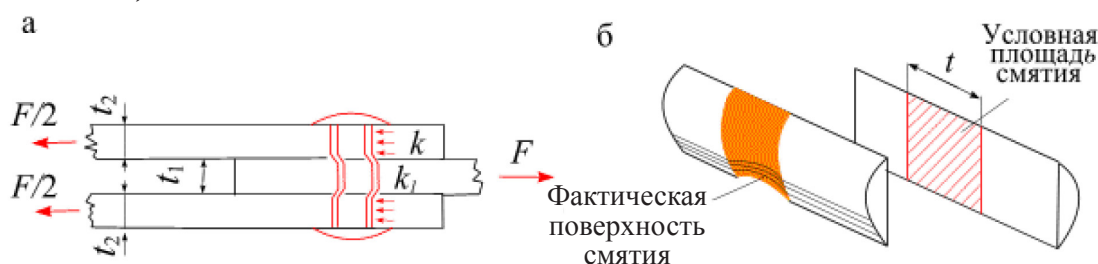


Рис. 7.10

Площадь смятия под средним листом  $A_{1p} = t_1 \cdot d$ , а под крайними листами  $A_{2p} = t_2 \cdot d$  (рис. 7.10, а).

Смятие по этим площадям происходит в разных направлениях, но на каждую приходится одна и та же сила  $F$ . Поэтому за *расчетную площадь* надо принимать минимальную из указанных:

$$A_{pmin} = d \cdot \sum t_{min} \quad (7.13)$$

где  $\sum t_{min}$  – наименьшая суммарная толщина листов, сминаемых в одном направлении.

Условие прочности на смятие заклепок имеет вид:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{A_{pmin}} = \frac{F}{n \cdot d \cdot \sum t_{min}} \leq R_s \quad (7.14)$$

где  $N_p = F/n$  – расчетная продольная сила, приходящаяся на одну заклепку;  $R_p$  – расчетное сопротивление материала соединяемых элементов смятию.

На основании (7.14) получим:

$$d \geq \frac{F}{n \cdot \sum t_{min} R_s}. \quad (7.15)$$

Чтобы были удовлетворены условия прочности на срез и смятие, из двух найденных диаметров (7.14) и (7.18) следует взять больший, округлив его до стандартного значения.

### Примечание

1. Подобно заклепкам, на срез и смятие работают шарнирные болты в проушинах и болтовых соединениях обычного типа. Их расчет не отличается от расчета заклепочных соединений.

2. Иначе ведут себя высокопрочные болтовые соединения (применяемые в мостостроении). Их затягивают с помощью динамометрических ключей до очень высоких растягивающих усилий, обеспечивающих очень плотное обжатие соединяемых частей, и силы трения между ними полностью воспринимают усилие, передающееся через соединение. *Высокопрочные болты ни на срез, ни на смятие не работают.*

Сведем основные формулы расчетов на срез и смятие для различных типов задач в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Тип задачи	Расчет на срез	Расчет на смятие
Проверочный расчет	<p>1. Для односрезного соединения</p> $\tau_s = \frac{F}{A} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot F}{n \cdot \pi d^2} \leq [\tau]$ <p>2. Для многосрезного соединения</p> $\tau_s = \frac{F_n}{\sum A_n} = \frac{F}{n \cdot n_s \cdot \pi d^2 / 4} \leq [\tau_s]$	$\sigma_{см} = \frac{N_p}{A_{см.min}} =$ $= \frac{F}{n \cdot d \cdot \sum t_{min}} \leq [\sigma_{см}]$
Проектный расчет	<p>1. Определение числа заклепок (болтов) в соединении:</p> $n \geq \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot [\tau]} = \frac{4 \cdot F}{\pi d^2 \cdot [\tau]}$ $n \geq \frac{4F}{n_s \cdot \pi \cdot [\tau_s] \cdot d^2}$	$n \geq \frac{F}{[\sigma_t] d \sum t_{min}}$
	<p>2. Определение диаметра заклепок (болтов) соединения</p> $d \geq \sqrt{\frac{4F}{n \cdot n_s \cdot \pi \cdot [\tau_s]}}$	$d \geq \frac{F}{n \cdot \sum t_{min} \cdot [\sigma_{см}]}$
Определение несущей способности	$F \leq \frac{[\tau_s] n n_s \pi d^2}{4}$	$F \leq [\sigma_t] n d \sum t_{min}$

Здесь  $F_n = \frac{F}{n}$  – поперечная сила, приходящаяся на одну заклепку;  $\sum A_n$  – суммарная площадь сечений, по которым срезается одна заклепка;  $n$  – число заклепок в нахлесточном соединении или число заклепок, расположенных по одну сторону стыкового соединения;  $n_s$  – число плоскостей среза одной заклепки;  $\frac{\pi d^2}{4}$  – площадь среза одной заклепки;  $d$  – диаметр стержня;  $[\tau_s]$  – допускаемое напряжение на срез.

**III. Разрыв полос** может произойти от растягивающих усилий по сечениям C-C, ослабленным заклепочными отверстиями (рис. 7.11).

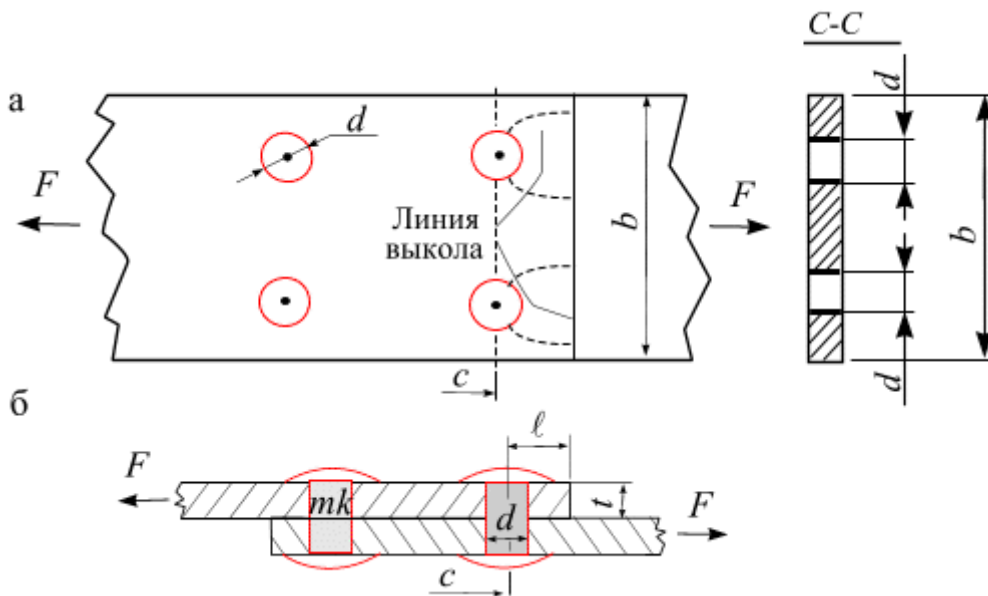


Рис. 7.11

Условие прочности на разрыв имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A_{net}} = \frac{F}{(b - kd) \cdot t} \leq R, \quad (7.16)$$

где  $A_{net} = A - kdt$  – площадь опасного сечения полосы нетто;  $A = bt$  – площадь сечения брутто;  $k$  – количество отверстий в рассматриваемом сечении;  $t$  – толщина полосы;  $R$  – расчетное сопротивление материала полосы растяжению (сжатию).

**IV. Срез полосы** (выкалывание) от центра отверстия до ее края (рис. 7.11, а). Расстояние  $\ell$  от центра первой заклепки до края полосы (рис. 7.11, б) принимают обычно равным удвоенному диаметру заклепки. При таком расстоянии прочность края полосы обеспечена, и специальный расчет не нужен.

**V. Соединения на врубках.** Сопряжения различных деревянных частей называются врубками. Иначе, *врубкой* называется соединение элементов деревянных конструкций, в которых передача усилия от одного элемента к другому осуществляется путем плотного соприкосновения примыкающих плоскостей. На рис. 7.12 показан пример лобовой врубки с одним зубом.

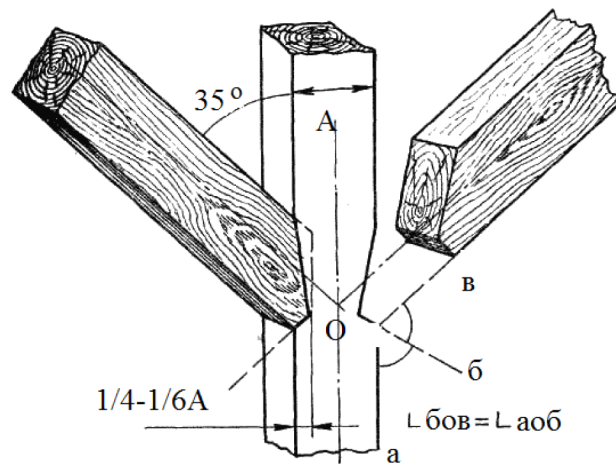


Рис. 7.12

Для надежности сооружений необходимо, чтобы все части его имели известный запас прочности, т. е. чтобы материал не только не подвергался усилиям, близким к таким, которые его могут разрушить, но и имелся достаточный запас.

Принятые на практике нормы допускаемых в постройках напряжений для дерева в килограммах на 1 кв. см сечения ( $кг / см^2$ ), причем имеется ввиду сухая древесина (10–17 % влажности), представлены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Вид деформации	Дуб ( $кг / см^2$ )	Сосна ( $кг / см^2$ )
Растяжение	145	120
Сжатие вдоль волокон	130	100
Растяжение и сжатие при изгибе	140	110
Стесывание (скалывание):	15–30	10–20
– вдоль волокон	40	20
– перпендикулярно волокнам		
Смятие параллельно волокнам	100	75–85

**Справка.** Для строительных работ идет так называемый строевой лес, включающий следующие породы: сосну, ель, пихту, кедр, лиственницу. Наибольшим применением пользуется *сосна* благодаря ее распространению, достаточной прочности и удобству обработки.

*Ель* – похожа строением и качеством своей древесины на сосну, но слабее последней, беднее смолой и потому скорее загнивает. Используется ель для внутренних частей сооружения и временных построек.

*Пихта* – похожа древесиной на ель и близка к ней по качеству.

*Кедр* – по строению древесины и ее качествам весьма близок к сосне и местами, как, например, в Амурском крае, вполне ее заменяет.

*Лиственница* – также похожа древесиной на рудовую сосну. Большое достоинство ее – хорошее сопротивление загниванию, поэтому она весьма выгодна в сырых местах (сваи, стойки, нижние венцы, лежни и т. п.). По твердости несколько превосходит сосну.

Кроме этих пород дерева, главным образом идущих на плотничные работы, плотнику приходится иногда иметь дело с дубом, грабом, буком и березой, а также с некоторыми другими породами – вяз, ясень, ольха, липа, осина и тополь – сообразно местным условиям по недостатку строевого леса или для некоторых специальных поделок.

*Дуб* – имеет большую твердость, поэтому очень хорош для подкладок и подушек в местах, где сосредоточено большое давление. Кроме того, он не скоро загнивает, поэтому хорош на сваи, стулья, шпалы, телеграфные столбы и т. п. Ближе к дубу по качествам и строению подходит ясень, но он слабее. Благодаря прочности и значительному сопротивлению истиранию дуб используется для изготовления паркетных полов.

*Граб* и *бук* по твердости близки к дубу, но имеют большую упругость – хороши для изготовления колодок инструмента, спиц колес, гнутой мебели и т. п.

Расчетная схема лобовой врубки с одним зубом показана на рис. 7.13. Верхний сжатый элемент упирается в специально устроенное гнездо в нижнем растянутом. Скалывание дерева происходит вдоль волокон по площадке  $A_s$ .

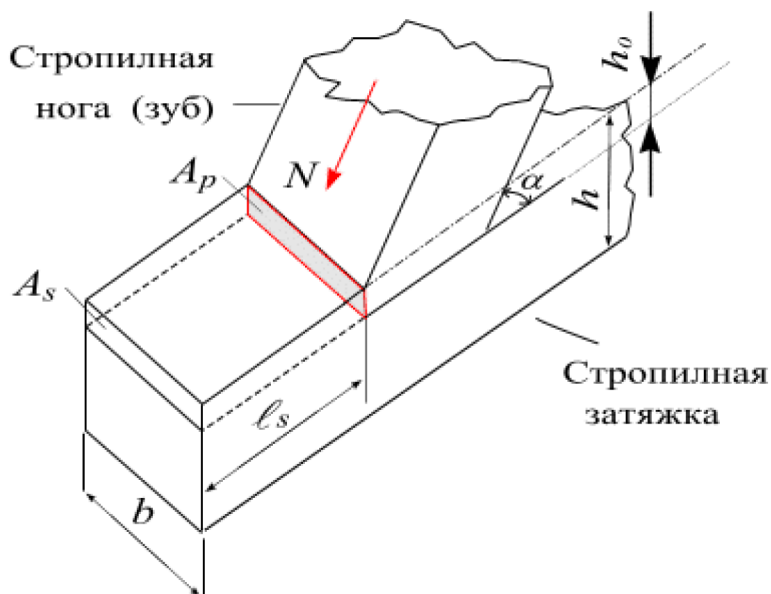


Рис. 7.13

Условие прочности на скалывание:

$$\tau_s = \frac{Q_s}{A_s} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{l_s \cdot b} \leq R, \quad (7.18)$$

где  $l_s$  – длина площадки скалывания. Требуемую длину  $l_s$  находят из условия (7.18).

Смятие древесины происходит по площадке  $A_p$ .

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{A_p} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{h_0 \cdot b} \leq R, \quad (7.19)$$

где  $h_0$  – глубина врубки, которую находят из условия (7.19).

При расчетах надо иметь в виду, что древесина, будучи анизотропным материалом, по-разному сопротивляется одним и тем же силовым воздействиям в зависимости от их направления по отношению к волокнам.

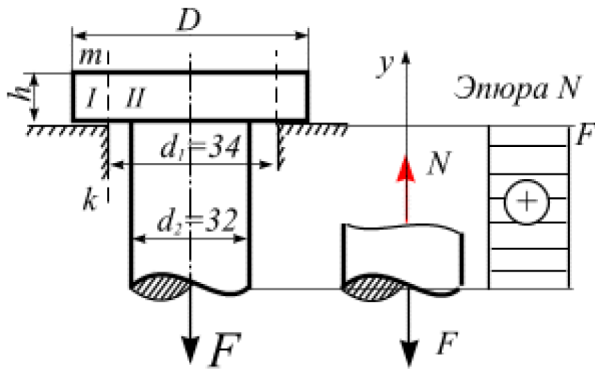


Рис. 7.14

**Пример 7.1.** Болт установлен с зазором и затянут. Соединение нагружено внешней продольной силой. Вся внешняя нагрузка воспринимается болтом. Вычислить диаметр  $D$  и высоту  $h$  головки болта, нагруженного растягивающей силой  $F$  (рис. 7.14).

Расчет выполнить, исходя из условия равнопрочности стержня на растяжение, головки на срез, ее опорной поверхности на смятие. Допускаемые напряжения: на растяжение  $[\sigma] = 140 \text{ Н/мм}^2$ ; на срез  $[\tau_s] = 100 \text{ Н/мм}^2$ , на смятие  $[\sigma_{см}] = 250 \text{ Н/мм}^2$ .

### Решение

1. Вычислим допускаемую нагрузку из условия прочности стержня на растяжение.

В наименьшем сечении стержня болта по внутреннему диаметру резьбы будут действовать растягивающие напряжения:

$$[\sigma] = \frac{N}{A_{d_1}}$$

Имеем:

$$\sum F_y = 0, N - F = 0 \Rightarrow N = F;$$

$$[\sigma] = \frac{N}{A_{d_2}} \Rightarrow N = A_{d_2} [\sigma] = \frac{\pi d_2^2}{4} [\sigma] = \frac{3,14 \cdot 32^2}{4} \cdot 140 = 112,6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2. Вычислим диаметр опорной поверхности головки из условия ее прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{Q_{см}}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}].$$

При  $Q_{см} = F$  получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_p = \frac{F}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d_1^2)} \leq [\sigma_{см}] &\Rightarrow D \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_{см}]} + d_1^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot 112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 250} + 34^2} = 41,7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Принимаем  $D = 42 \text{ мм}$ .

3. Вычислим высоту головки болта из условия прочности на срез:

$$\tau_s = \frac{F}{A_s} \leq [\tau_s].$$

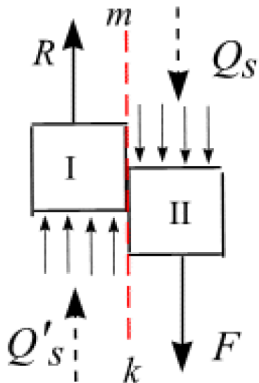


Рис. 7.15

Здесь  $F$  – максимально возможная сила, действующая вдоль оси,  $A_s$  – площадь среза, в данном примере  $A_s$  равна боковой поверхности головки болта высотой  $h$  и диаметром  $d_1$  (место возможного среза условно показано пунктирными линиями на рис. 7.15).

Получаем:

$$\tau_s = \frac{F}{A_s} = \frac{F}{\pi d_1 \cdot h} \leq [\tau_s] \Rightarrow h \geq \frac{F}{\pi d_1 \cdot [\tau_s]} = \frac{112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 34 \cdot 100} = 10,55 \text{ мм.}$$

Принимаем  $h = 6 \text{ мм}$ .

**Пример 7.2.** Проверить прочность заклепочного соединения, изображенного на рис. 7.16. Допускаемые напряжения:  $[\sigma_p] = 160 \text{ Н / мм}^2$ ,  $[\tau_{cp}] = 140 \text{ Н / мм}^2$ ,  $[\sigma_{см}] = 320 \text{ Н / мм}^2$ .

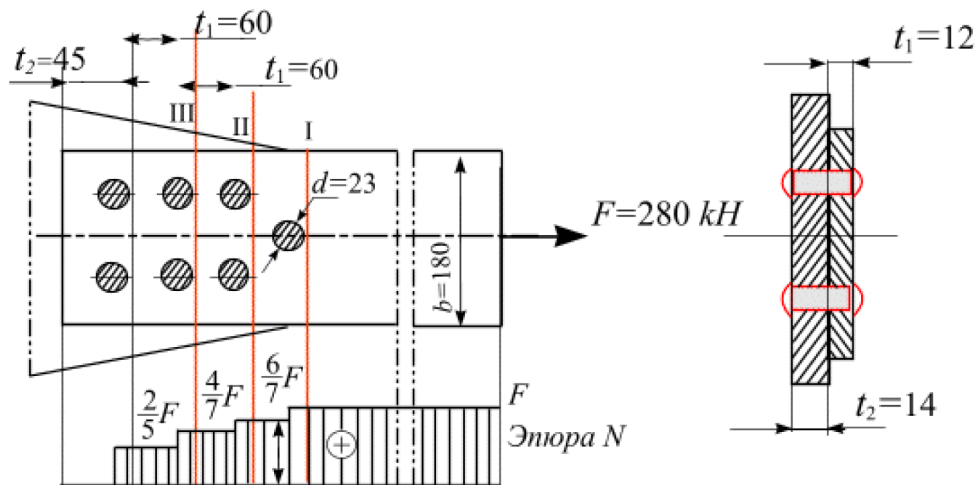


Рис. 7.16

**Решение.** При действии симметричной нагрузки принимают, что нагрузка равномерно распределяется между всеми заклепками.

**1. Расчет стержня заклепки на срез.** На каждую заклепку передаются по две равные и прямо противоположные силы  $F_n$ . Эти силы передаются путем нажима соответствующего листа на боковую полуцилиндрическую поверхность стержня. Силы  $F_n$  стремятся перерезать заклепку по плоскости, совпадающей с поверхностью соприкосновения соединяемых деталей. Касательные напряжения (напряжения среза) будут одинаковыми во всех точках сечения стержня, и условие прочности стержня по допускаемым напряжениям примет вид:

$$\tau_s = \frac{F_n}{\sum A_n} \Rightarrow \tau_s = \frac{F_n}{A_s} = \frac{F}{7 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \tau_s < [\tau_s].$$



Имеем:

$$\left[ \begin{aligned} \tau_s &= \frac{4 \cdot 280 \cdot 10^3}{5 \cdot (3,14 \cdot 23^2 / 4)} = 135 \frac{H}{i i^2}; \\ [\tau_s] &= 140 \frac{H}{i i^2}; \end{aligned} \Rightarrow \tau_s < [\tau_s].$$

**2. Проверим полосу на растяжение.** Разрушение деталей проходит по сечениям, ослабленным отверстиями под действием больших статических нагрузок. На рис. 7.17 показана эпюра продольных сил для полосы, построенная на основе допущения, что каждая заклепка принимает усилие  $F/n$  ( $n = 7$  – число заклепок).

Растягивающее напряжение в этих сечениях должно удовлетворять условиям прочности по допускаемым напряжениям при растяжении для материала деталей:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_{i \text{ net}}} = \frac{N_i}{t(b - kd)} < [\sigma_p].$$

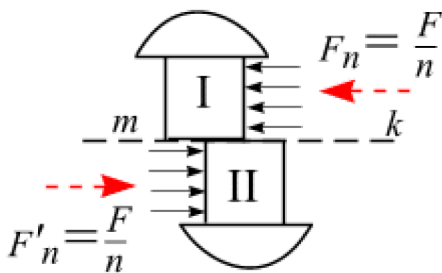


Рис. 7.17

Здесь  $A_{i \text{ net}}$  – площадь детали в  $i$ -м сечении,  $t_i, b_i$  – толщина и ширина листа,  $d$  – диаметр отверстия под заклепку, равный диаметру стержня заклепки;  $k$  – число заклепок в одном ряду.

Расчет выполняется для двух сечений – I и II, в которых  $N_2 < N_1$ , однако  $A_2 < A_1$ .

Для сечения I:

$$\left[ \begin{aligned} N_I &= F; \\ \sigma_I &= \frac{N_I}{A_{I \text{ net}}} = \frac{F}{t_1(b - d)} < [\sigma_p] \Rightarrow \sigma_I = \frac{280 \cdot 10^3}{12(180 - 23)} = 148,6 \frac{H}{\text{мм}^2} < [\sigma_p]. \end{aligned} \right.$$

Для сечения II:

$$\left[ \begin{aligned} N_{II} &= F - (1/7)F = (6/7)F; \\ \sigma_{II} &= \frac{N_{II}}{A_{II \text{ net}}} = \frac{(6/7)F}{t_1 \cdot (b - 2d)} = \frac{6 \cdot 280 \cdot 10^3}{7 \cdot 12(180 - 46)} = 149,3 \frac{H}{\text{мм}^2}; \end{aligned} \Rightarrow \sigma_I < \sigma_{II} < [\sigma_p].$$

Для сечения III и т.д.  $N_{III} = F - \frac{3}{7}F = \frac{4}{7}F$ ,  $A_{II \text{ net}} = A_{III \text{ net}}$ .

Расчет показывает, что прочность соединения обеспечена.

**Пример 7.3.** Рассчитать соединение стропильной ноги со стропильной затяжкой (рис. 7.18). Угол между осями стропильной ноги и затяжки  $\alpha = 30^\circ$ .

Сила, действующая вдоль ноги,  $N = 50 \text{ кН}$ . Материал – сосна, допускаемое напряжение на смятие вдоль волокон  $[\sigma_{см}] = 8 \text{ МПа}$  (табл. 7.3).

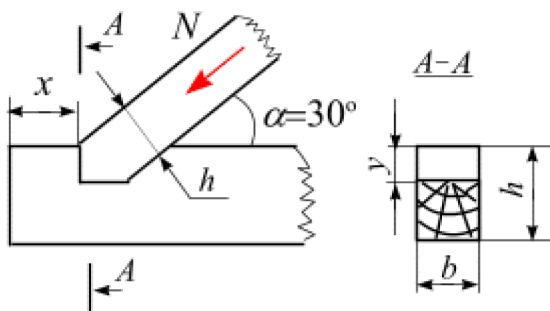


Рис. 7.18

Допускаемое напряжение на скалывание вдоль волокон  $[\tau_s] = 0,8 \text{ МПа}$ .

Сечение стропильной ноги  $h \times b = 20 \times 20 \text{ см}$ .

**Решение.** Концы затяжки испытывают скалывание вдоль волокон под действием горизонтальной проекции:

$$N_x = N \cos \alpha = 50 \cdot 10^3 \cdot 0,87 = 43,3 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Таблица 7.3

Вид деформации	Дуб, кг / см <sup>2</sup>	Сосна, кг / см <sup>2</sup>
Растяжение $[\sigma_+]$	145	120
Сжатие вдоль волокон $[\sigma_-]$	130	100
Растяжение и сжатие при изгибе $[\sigma_u]$	140	110
Стесывание (скалывание) $[\tau_s]$ :	15–30	10–20
	– вдоль волокон – перпендикулярно волокнам	40 20
Смятие параллельно волокнам $[\sigma_{см}]_{\pi/2}$	100	75–85

Длину затяжки  $x$ , выступающей за вырубку, определим из условия:

$$\tau_s = \frac{N_1}{A_{ск}} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{x \cdot b} \leq [\tau_s].$$

Здесь  $A_{ск}$  – площадь скалывания.

Откуда площадь скола:

$$A_{ск} = b \cdot x \geq \frac{N_1}{[\tau_s]} \Rightarrow x = \frac{N_1}{b[\tau_s]} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,8 \cdot 10^6} = 0,27 \text{ м} = 27 \text{ см.}$$

Из условия смятия определяется необходимая площадь смятия врубки:

$$\sigma_{см} = \frac{N_1}{A_{см}} \Rightarrow A_{см} \geq \frac{N_1}{[\sigma_{см}]} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 5,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 54,1 \text{ см}^2.$$

Тогда глубина вырубki:

$$y = \frac{A_{см}}{b} = \frac{54,1}{20} = 2,71 \text{ см.}$$

Примем  $y = 3 \text{ см}$ .

## Глава 8. КРУЧЕНИЕ

### 8.1. Основные понятия

Кручение – вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент, обозначаемый  $M_z$  или  $M_k$ .

Деформация кручения возникает при нагружении бруса парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны его продольной оси. Моменты этих пар будем называть *скручивающими моментами* и обозначать  $m$  (рис. 8.1).

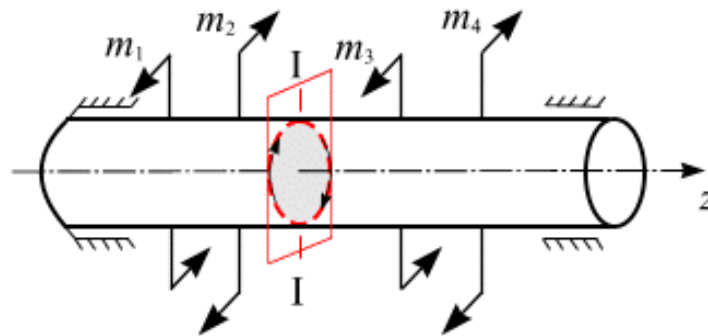


Рис. 8.1

Брус, работающий на кручение, называется **валом**.

Кручению подвергаются валы двигателей, станков и машин, оси моторных вагонов и локомотивов, элементы пространственных конструкций.

При расчете вала внешние скручивающие моменты могут быть выражены через мощность и угловую скорость (из курса ТМ) по формулам:

$$m = \frac{P}{\omega} \text{ или } m = 9,55 \frac{P}{n}, \quad (8.1)$$

где  $m$  [Н.м] – внешний скручивающий момент;  $P$  [Вт] – мощность;  $\omega$  [рад/с] – угловая скорость;  $n$  – число об/мин.

Если вал находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех скручивающих моментов равна нулю (рис. 8.1):

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 0. \quad (8.2)$$

Задачи определения напряжений и деформаций при кручении методами СМ могут быть решены только для брусьев с круглыми сечениями, для брусьев с некруглыми сечениями такие задачи решаются методами теории упругости.

### 8.2. Вычисление крутящих моментов

Если вал нагружен только двумя моментами, то из условия равновесия эти моменты всегда равны по величине и направлены в противоположные стороны (рис. 8.2, а). В других случаях крутящий момент определяют методом сечений. Вал рассекают плоскостью, мысленно отбрасывают одну часть, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестным крутящим моментом  $M_k$  (рис. 8.2, б).

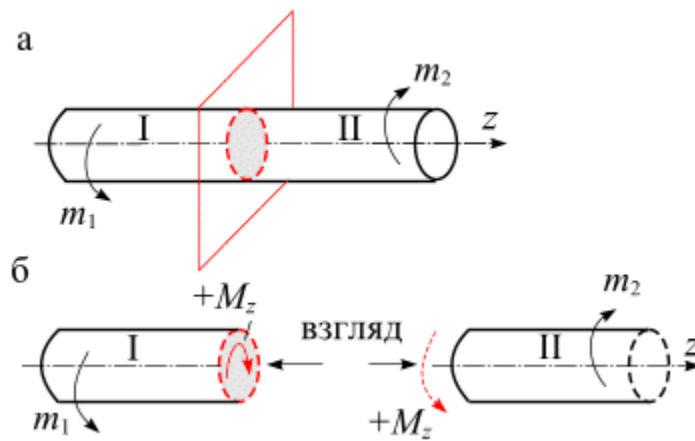


Рис. 8.2

Составляют уравнение равновесия для оставшейся левой части:

$$\sum m_z = 0, \quad \sum m_{iz} + M_K = 0,$$

из которого и определяют значение момента:

$$M_K = \sum_{\text{отс.ч.}} m_{iz}. \quad (8.3)$$

*Крутящий момент*, возникающий в произвольном сечении вала, численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к оставленной части. Правило знаков:

Условимся считать крутящий момент **положительным**, если внешний момент направлен против часовой стрелки при взгляде от сечения к любому концу вала. Тогда положительный крутящий момент  $M_z$  изображается по часовой стрелке (рис. 8.2, б).

Например, для вала (рис. 8.1) крутящий момент в сечении I–I из равновесия:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{левая часть: } M_{z1} = m_1 - m_2 \\ \text{правая часть: } M_{z2} = m_4 - m_3 \end{array} \right. \Rightarrow M_{z1} = M_{z2} \Rightarrow m_1 - m_2 = m_4 - m_3.$$

Здесь значения  $M_{z1}$  и  $M_{z2}$  равны между собой. Это видно из равенства (8.2).

Заметим, что принятое правило знаков не имеет физического смысла. Оно необходимо при построении эпюр. Положительные значения  $M_z$  будем откладывать вверх от базиса, отрицательные – вниз.

Иногда на вал действует распределенная моментная нагрузка интенсивности  $m_z$  (рис. 8.3, а).

Вырежем малый элемент  $dz$  (рис. 8.3, б).

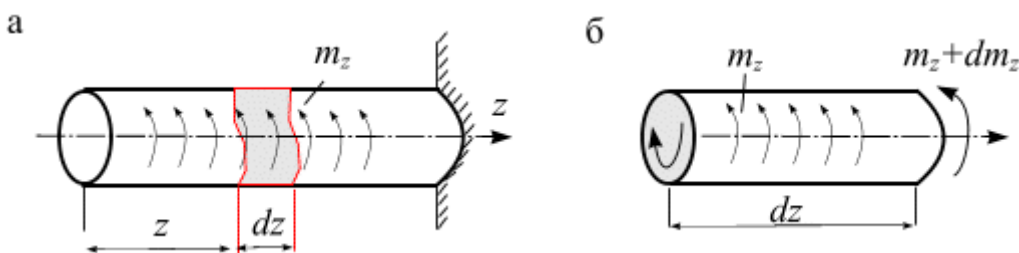


Рис. 8.3

Действие левой и правой отброшенной части вала заменим крутящим моментом, причем справа он имеет приращение  $dM_z$ . Составим уравнение равновесия:

$$\sum m_z = 0, \quad M_z - m_z dz - (M_z + dM_z) = 0 \Rightarrow \frac{dM_z}{dz} = m_z. \quad (8.4)$$

Производная крутящего момента по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной моментной нагрузки.

### 8.3. Построение эпюры крутящего момента $M_z$

Рассмотрим брус, нагруженный парой сил  $F - F'$ , плоскость действия которой перпендикулярна продольной оси бруса. Пара сил образует крутящий момент  $M_k = F \cdot h$  (рис. 8.4, а).

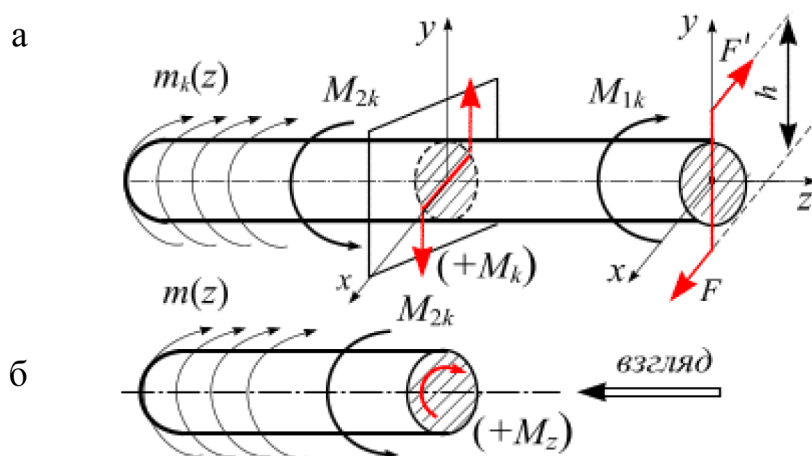


Рис. 8.4

При равновесии бруса алгебраическая сумма всех внешних крутящих моментов, приложенных к брусу, равна нулю, т. е.  $\sum M_{ki} = 0$ . Внешний крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде на рассматриваемую часть вала со стороны проведенного сечения (сечение справа, рис. 8.4, б) он скручивает вал по часовой стрелке. Внутренний крутящий момент  $M_k$  в произвольном сечении определяется алгебраической суммой всех внешних моментов с любой стороны сечения:

$$M_k = \sum_{\text{отс.ч.}} M_{ki}. \quad (8.5)$$

Знак внутреннего крутящего момента определяется знаком суммы. Общая формула, с помощью которой вычисляют величину  $M_k$  в произвольном поперечном сечении бруса, имеет вид:

$$M_k = \sum M_{ki} + m \int_0^{z_i} dz = \sum M_{ki} + m \cdot z_i,$$

где  $m_k(z) = m$  – постоянная интенсивность распределенного по длине бруса крутящего момента. Интегрирование производится по длине каждого  $i$ -ого участка,

а суммирование – по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения.

**Пример 8.1.** Для ступенчатого бруса (рис. 8.5) построить эпюру крутящего момента  $M_k$ . Дано:  $M_k = 8 \text{ кНм}$ ;  $m_k = 4 \text{ кНм/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

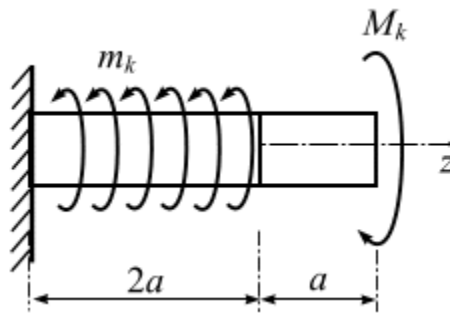


Рис. 8.5

**Решение.** Разделим брус на три участка (рис.8.6, а). Запишем выражения крутящего момента на каждом участке.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$ :  $M_k(z_1) = -M_k = |-8| \text{ кНм}$ .

Крутящий момент  $M_k(z_1)$  является постоянным на всем первом участке.

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ :

$$M_k(z_2) = -M_k + m_z \cdot z_2 \Rightarrow \begin{cases} M_k|_{z_2=0} = -M_k = |-8| \text{ кНм}, \\ M_k|_{z_2=2a} = -M_k + m \cdot 2a = -8 + 4 \cdot 1 = |-4| \text{ кНм}. \end{cases}$$

Крутящий момент  $M(z_2)$  является *линейной функцией* на всем втором участке. По вычисленным значениям строим эпюру крутящего момента  $M_k$  (рис. 8.6, б).

Откладываем полученные значения на границах участков и соединяем полученные точки прямыми линиями.

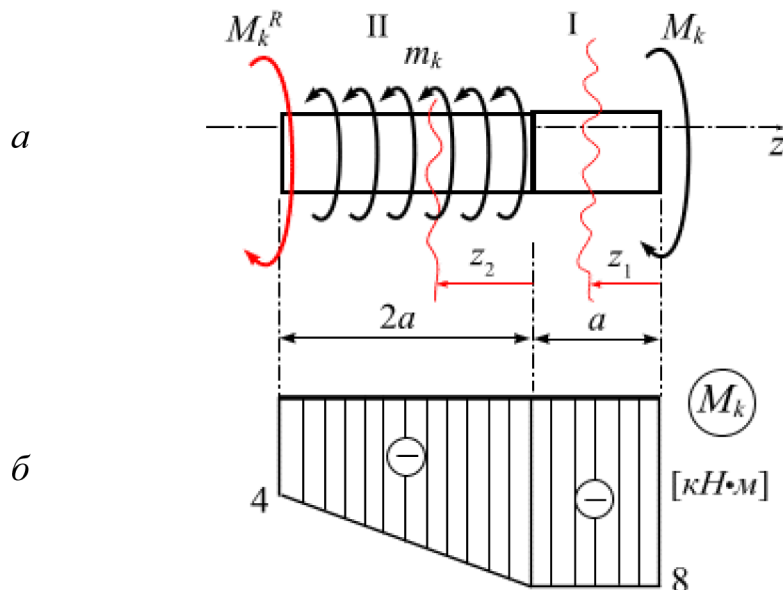


Рис. 8.6

### Правила контроля

1. В сечениях, где приложен скручивающий момент  $M_k$  на эпюре крутящего момента  $M_k$ , наблюдается *скачок*, равный величине этого момента.

2. На участке II, где действует распределенный момент  $m_k(z)$ , эпюра крутящего момента  $M_k$  меняется по *линейному закону*.

**Пример 8.2.** Для ступенчатого бруса (рис. 8.7) построить эпюру крутящего момента  $M_k$ . Дано:  $M_{k1} = 8 \text{ кНм}$ ;  $M_{k2} = 6 \text{ кНм}$ ,  $m_k = 4 \text{ кНм/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

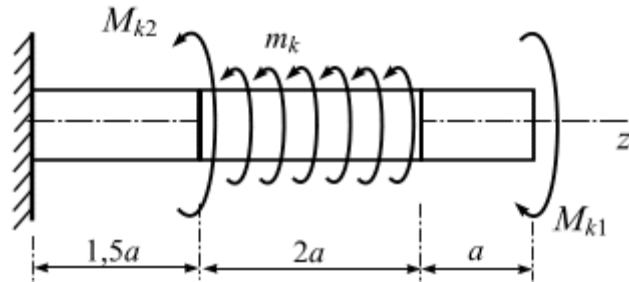


Рис. 8.7

**Решение.** Разделим брус на три участка (рис. 8.8, а). Запишем выражения крутящего момента на каждом участке.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$

$$M_k(z_1) = -M_{k1} = -8 \text{ (кНм)}.$$

Крутящий момент  $M(z_1)$  является постоянным на всем первом участке.

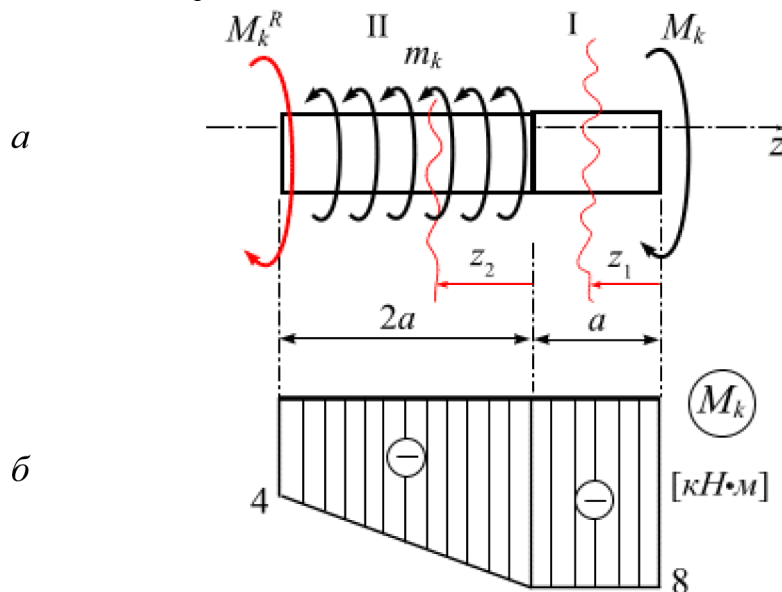


Рис. 8.8

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ :

$$M_k(z_2) = -M_{k1} + m \cdot z_2 \Rightarrow \begin{cases} M_k|_{z_2=0} = -M_{k1} = |-8| \text{ кНм}, \\ M_k|_{z_2=2a} = -M_{k1} + m_k \cdot 2a = -8 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Крутящий момент  $M_k(z_2)$  является *линейной функцией* на всем втором участке.



**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq 1,5a$ .

$$M_k(z_3) = -M_{k1} + m_k \cdot 2a + M_{k2} = -8 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 6 = 6 \text{ кНм}.$$

Крутящий момент  $M(z_3)$  является постоянным на всем третьем участке.

Повычисленным значениям строим эпюру крутящего момента  $M_k$  (рис. 8.5, б). Откладываем полученные значения на границах участков и соединяем полученные точки прямыми линиями.

**Правила контроля.** В сечениях, где приложены скручивающие моменты  $M_{z1}$  и  $M_{z2}$ , на эпюре  $M_z$  наблюдаются скачки, равные величинам этих моментов.

1. На участке II, где действует распределенный момент  $m_k(z)$ , эпюра  $M_z$  меняется по *линейному* закону.

2. На участках I и III, свободных от распределенной нагрузки  $m$ , крутящий момент  $M_z$  имеет постоянные значения.

## 8.4. Напряжения при кручении круглого бруса

Представление о характере деформации кручения можно получить, подвергая скручиванию модели бруса с нанесенной на его поверхность сеткой продольных и поперечных линий.

После закручивания продольные линии вала превращаются в винтовые (рис. 8. 9). Поперечные линии не искривляются, и расстояние между ними не меняется. Прямоугольники, образованные сеткой, перекашиваются за счет изменения первоначально прямого угла на малый угол  $\gamma$ .

Вал радиусом  $r$  (рис. 8. 10) скручивается моментом  $m$ . Образующая  $DL$  после кручения перейдет в положение  $DL'$ . Сечение I–I повернется на угол  $\varphi$ , а сечение II–II на угол  $\varphi + d\varphi$ . Следовательно, сечение II–II по отношению к I–I повернется на угол  $d\varphi$ .

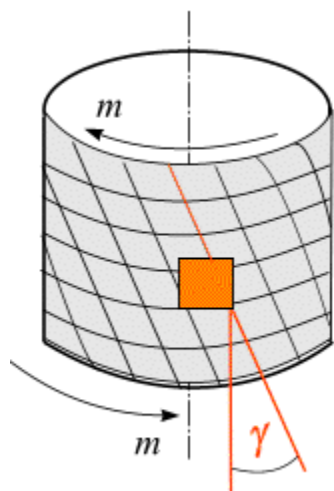


Рис. 8.9

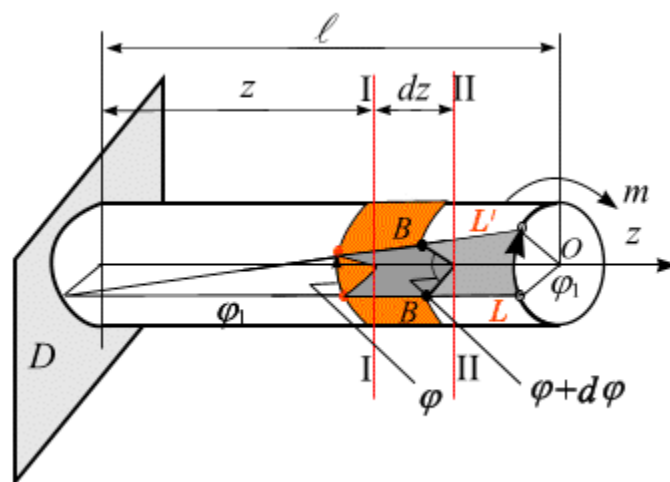


Рис. 8.10

В результате наблюдений приходим к следующим **гипотезам**, на которых основана теория круглых валов.

1. Сечения, плоские до закручивания, остаются **плоскими** и после закручивания (гипотеза Бернулли).

2. Все радиусы данного сечения остаются прямыми и **поворачиваются** на один и тот же угол  $\varphi_1$  (рис. 8. 10), т. е. каждое сечение поворачивается вокруг оси  $z$  как жесткий тонкий диск.

3. Расстояния между сечениями не меняются, значит, продольные волокна не удлиняются и не укорачиваются, т. е.  $\ell = const$ .

На основании принятых гипотез кручение круглого бруса можно представить как результат *сдвигов*, вызванных взаимным поворотом сечений друг относительно друга. Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только **касательные напряжения**. Для их определения рассмотрим три стороны задачи.

**Статическая** сторона задачи выражается интегральным уравнением равновесия:

$$M_{z0} = \int_A \tau \rho dA, \quad (8.6)$$

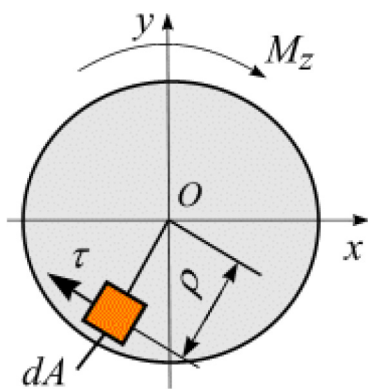


Рис. 8.11

т. е. крутящий момент  $M_{z0}$  представляет собой результирующий момент внутренних касательных сил  $\tau \cdot dA$ , действующих на бесконечно малых площадках сечения (рис. 8.11):  $\rho$  – плечо элементарной силы относительно продольной оси точки  $O$ .

Рассмотрим **геометрическую** сторону задачи. Выделим из бруса элемент  $dz$  (рис. 8.12) и рассмотрим картину деформирования, приняв левое сечение условно неподвижным (рис. 8.12).

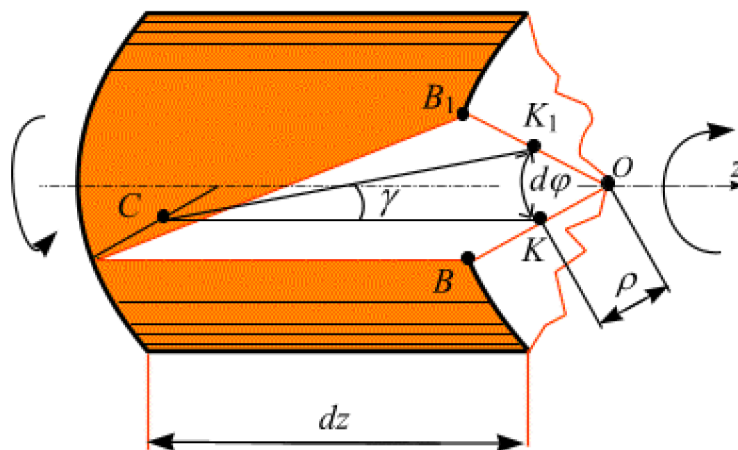


Рис. 8.12

Радиус  $OB$  вместе с сечением поворачивается на угол  $d\varphi$ , а образующая  $CK$  произвольной точки  $K$  переходит в положение  $CK_1$ , поворачиваясь на угол  $\gamma$ .

Дуга  $KK_1 = \rho \cdot d\varphi$ , а из треугольника  $CKK_1$  отрезок  $KK_1 = \gamma \cdot dz$ . Из равенства  $\rho \cdot d\varphi = \gamma \cdot dz$  получим выражение угла сдвига на поверхности скручивания элемента, т. е. **геометрическое уравнение**:

$$\rho \cdot d\varphi = \gamma \cdot dz \Rightarrow \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (8.7)$$

Физическая сторона задачи определится законом Гука при сдвиге:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \tau = \gamma \cdot G. \quad (8.8)$$

Проведем синтез трех сторон задачи.

Формула (8.7) с учетом (8.8) принимает вид:

$$\tau = \gamma \cdot G = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (8.9)$$

Подставляя (8.9) в (8.6), имеем:

$$M_{zo} = \left[ M_z = \int_A \tau \rho dA \right] = \int_A G \rho \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA, \quad (8.10)$$

здесь интеграл  $\int_A \rho^2 dA = J_\rho$  – полярный момент инерции сечения.

Тогда из (8.10) следует:

$$M_{zo} = G \frac{d\varphi}{dz} \cdot J_\rho \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{zo}}{GJ_\rho}. \quad (8.11)$$

С учетом (8.11) формула (8.9) принимает окончательный вид:

$$\tau = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dz} = \left[ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \right] = \frac{M_z}{J_\rho} \cdot \rho. \quad (8.12)$$

По формуле (8.12) определяются касательные напряжения в любой точке поперечного сечения вала.

По закону парности такие же касательные напряжения возникают в продольных сечениях (рис. 8.13, а), и прямоугольный элемент испытывает состояние чистого сдвига (рис. 8.13, б).

Анализ формулы (8.12) показывает:

- 1)  $\tau$  распределены вдоль радиуса по линейному закону (рис. 8.13);
- 2) в каждой точке  $\tau$  перпендикулярны текущему радиусу;
- 3)  $\tau = 0$  в центре круга ( $\rho = 0$ );

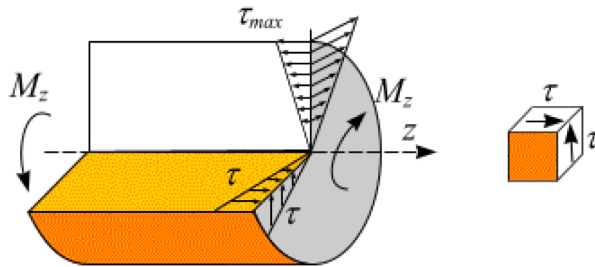


Рис. 8.13

- 4) максимальные напряжения возникают в крайних точках сечения:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{J_\rho} \cdot \rho_{max} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho}, \quad (8.13)$$

где  $W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}$  – геометрическая характеристика сечения, называемая полярным моментом сопротивления ( $см^3$  или  $м^3$ ).

## 8.5. Расчеты на прочность при кручении

**Расчет на прочность.** Вычислим полярный момент сопротивления

$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}$  для круга и кольца (рис. 8.14). Имеем соответственно:

для круга  $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ ; для кольца  $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}(1 - \alpha^4)$ , где  $\alpha = \frac{d}{D}$ .

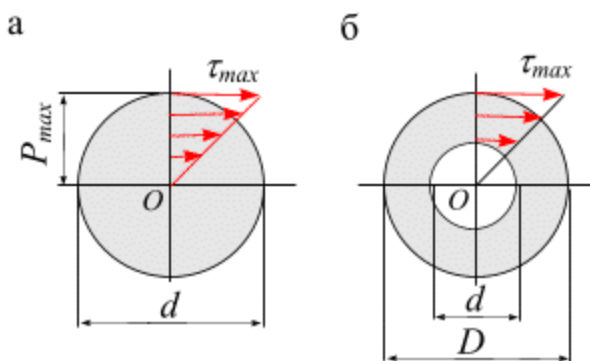


Рис. 8.14

Тогда моменты сопротивления для сплошного сечения (рис. 8.14, а):

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (8.14)$$

для кольцевого сечения (рис. 8.14, б):

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{d/2} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4). \quad (8.15)$$

При проектировании валов машин и механизмов расчет ведется по *допускаемым напряжениям*:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (8.16)$$

где  $M_z$  – нормативный крутящий момент без учета перегрузок;  $[\tau]$  – допускаемое напряжение материала.

При подборе сечения вала из (8.16) выражают требуемый момент сопротивления:

$$W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]},$$

затем в соответствии с (8.14) или (8.15) находят требуемый диаметр, например, сплошного вала:

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{16M_z}{\pi[\tau]}}.$$

Условие (8.16) позволяет решать три основные задачи прочности: проверка прочности, проектный расчет и определение несущей способности. Остановимся на сравнительной оценке валов сплошного и кольцевого (полого) сечения. Из эпюры  $\tau$  для сплошного сечения (рис. 8.14, а) видно, что материал вблизи оси мало нагружен и удаление его снижает затраты материала, облегчает вес вала, при этом  $\tau_{max}$  возрастает незначительно.

Если валы равнопрочны, то вес полого вала почти в два раза ниже веса сплошного. Это свидетельствует о рациональности применения полых валов, что широко используется в моторостроении.

## 8.6. Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении

При кручении касательные напряжения  $\tau$  возникают как в поперечных, так и в продольных сечениях, а элемент бруса испытывает **чистый сдвиг** (рис. 8.16). При чистом сдвиге по площадкам, наклоненным под  $45^\circ$  к оси бруса, действуют растягивающие и сжимающие **нормальные напряжения  $\sigma$**  (рис. 8.16).

Поэтому характер разрушения вала будет зависеть от способности материала сопротивляться действию  $\tau$  и  $\sigma$ .

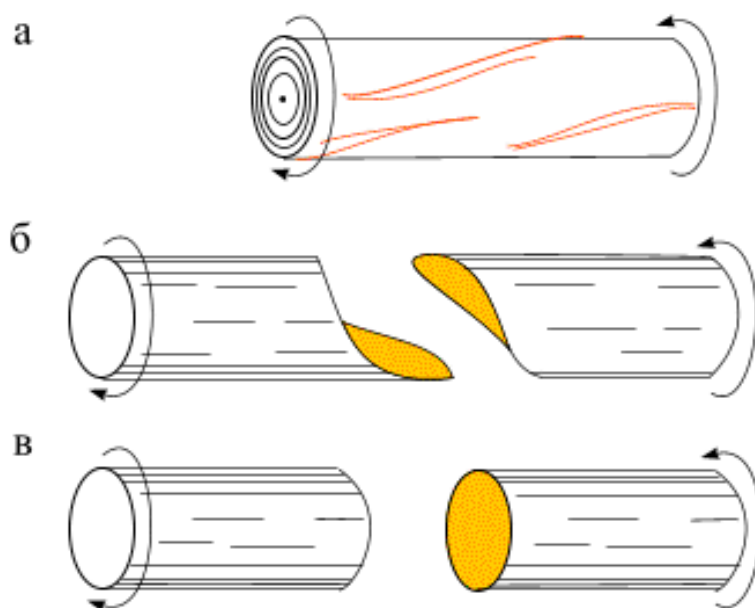


Рис. 8.16

Трещины разрушения деревянного вала ориентированы вдоль образующей, т. к. древесина плохо сопротивляется  $\tau$  вдоль волокон (рис. 8.16, а).

Если материал плохо сопротивляется растяжению (например, чугун), то трещины разрушения пойдут по винтовым линиям, касательные к которым образуют угол  $45^\circ$  с осью бруса (рис. 8.16, б).

Стальные валы разрушаются по поперечному сечению от касательных напряжений (рис. 8.16, в).

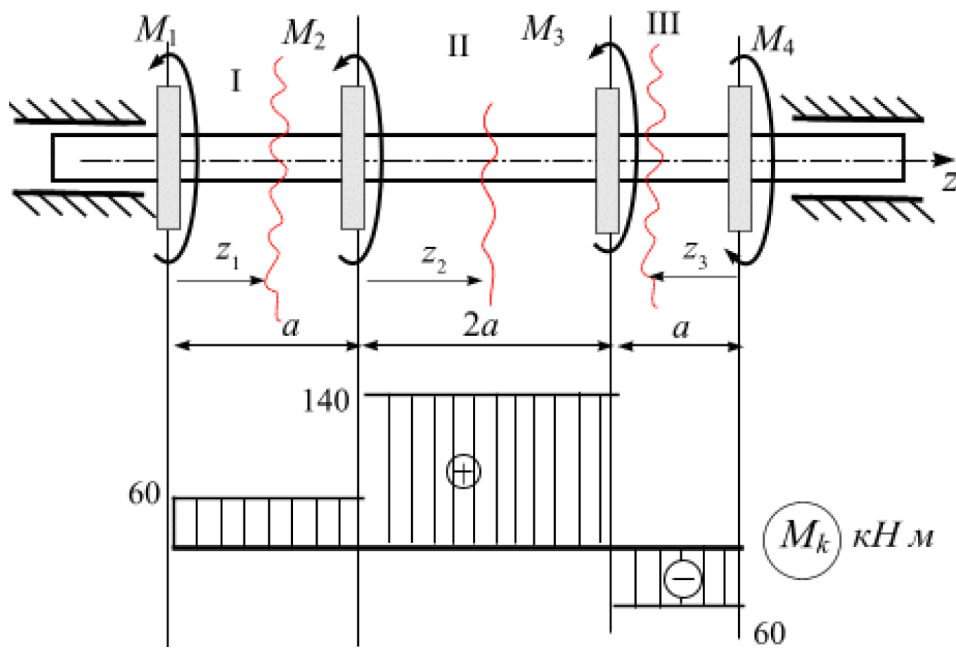


Рис. 8.17

**Пример 8.3.** Из условий прочности вычислить диаметр сплошного вала (рис. 8.12, а) при следующих значениях передаваемых шкивами моментов:  $M_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_3 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $M_4 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Допускаемое напряжение  $[\tau] = 200 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Разделим брус на три участка (рис. 8.17, б).

Запишем выражения крутящего момента на каждом участке.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq a$ :  $M_{z_1} = M_1 = 60 \text{ кНм}$ .

Крутящий момент  $M(z_1)$  является постоянным на всем первом участке.

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ :  $M_z(z_2) = M_1 + M_2 = 60 + 80 = 140 \text{ кНм}$ .

Крутящий момент  $M(z_2)$  является постоянным на всем втором участке.

**III участок:**  $0 \leq z_3 \leq a$ :  $M(z_3) = |-M_3| = |-60| \text{ кНм}$ .

Крутящий момент  $M(z_3)$  является постоянным на всем третьем участке.

По полученным значениям строим эпюру  $M_z$  (рис. 8.17, б).

Имеем  $M_{z \max} = 140 \text{ кНм}$ .

Подберем диаметр вала сначала из условия прочности. Имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau] \Rightarrow W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]}, \text{ где } W_\rho = \frac{J_\rho}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16},$$

тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^3}{16} &= \frac{M_z}{[\tau]} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_z}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 140 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 200 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{\frac{2240}{628}} 10^{-3} \\ &= \sqrt[3]{3,57 \cdot 10^{-3}} \approx 0,153 \text{ м} \approx 15,3 \text{ см}. \end{aligned}$$

Принимаем диаметр сплошного вала  $d = 15,3 \text{ см}$ .

# Глава 9. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БРУСА

## 9.1. Основные понятия

В главах первой части были рассмотрены простейшие виды нагружения бруса: осевое растяжение и сжатие, сдвиг, кручение и прямой изгиб. В реальных условиях элементы конструкций часто подвергаются воздействию *различных комбинаций простых нагружений*. Такие случаи называют *сложным сопротивлением*.

Под *сложным сопротивлением* бруса деформированию понимают такие сочетания простых нагружений, когда в его сечениях *одновременно возникают несколько внутренних силовых факторов*.

В основе расчетов на сложное сопротивление лежит *принцип независимости действия сил*, согласно которому напряжения и деформации, вызванные комбинацией силовых факторов, определяются как сумма (алгебраическая или геометрическая) напряжений и деформаций от каждого фактора в отдельности. Данный принцип применим во всех случаях, когда рассматриваются малые деформации в пределах справедливости закона Гука.

Рассмотрим основные виды сложного сопротивления: *косой изгиб, внецентренное сжатие (растяжение), изгиб с кручением*.

## 9.2. Плоский и пространственный косой изгиб

В случае *прямого изгиба* силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции, например,  $yoz$  (рис. 9.1, а). При этом силовая линия (с.л.) и нейтральная линия (н.л.) взаимно перпендикулярны, а изогнутая ось балки лежит в силовой плоскости.

Нормальные напряжения в случае прямого изгиба вычисляются по формулам:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \text{ и } \sigma = \frac{M_x}{W_x}. \quad (9.1)$$

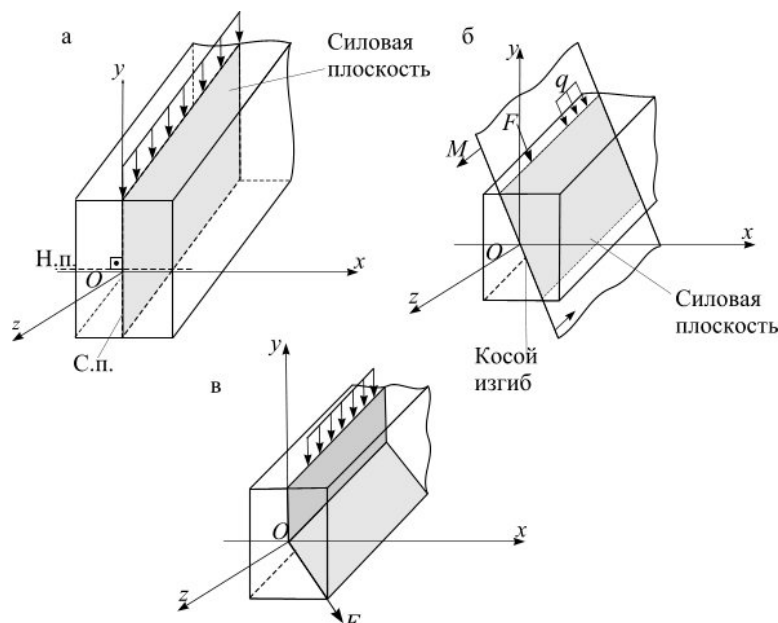


Рис. 9.1



**Косой изгиб** – вид нагружения бруса, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей сечения. При этом изогнутая ось балки – плоская кривая, не совпадающая с силовой плоскостью.

Если косой изгиб вызван нагрузками, действующими в одной плоскости (силовой), то изгиб называют **плоским** (рис. 9.1, б). Если нагрузки действуют в разных продольных плоскостях, то это **сложный**, или **пространственный, изгиб** (рис. 9.1, в). Изогнутая ось балки – неплоская кривая.

**Плоский и сложный косой изгиб рассматривают как совокупность двух прямых изгибов**, для чего нагрузки, лежащие в продольных плоскостях, раскладывают на составляющие, расположенные в главных плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ . В поперечных сечениях бруса в общем случае возникают 4 внутренних силовых фактора:  $Q_x, Q_y, M_x, M_y$ . Проводя расчет на прочность при косом изгибе, обычно пренебрегают влиянием касательных напряжений.

**Примеры из инженерной практики.** Брус обрешетки кровли (рис. 9.2, а) нагружен по схеме косоугольного изгиба. Вертикальная нагрузка  $F$  от веса кровли и собственного веса обрешетки наклонена к главной оси  $y$  под некоторым углом  $\alpha$ .

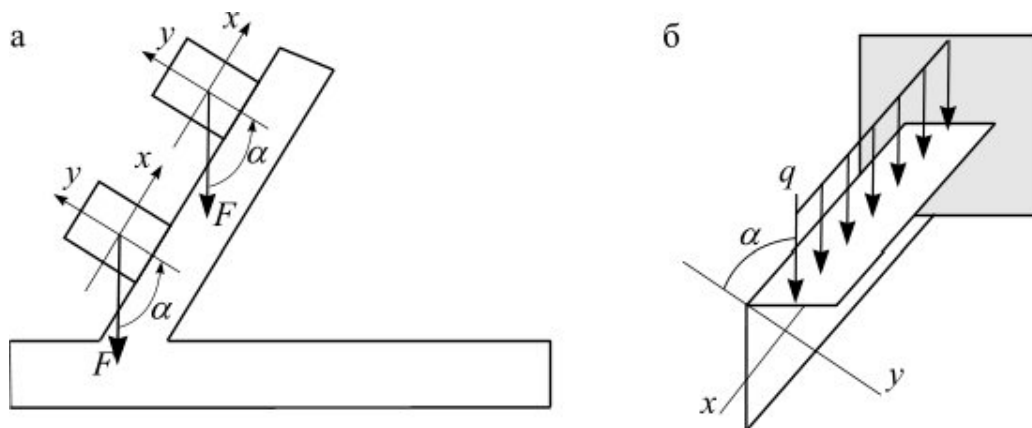


Рис. 9.2

Уголок, заделанный одним концом в стену (рис. 9.2, б), также нагружен по схеме косоугольного изгиба, так как главные оси сечения –  $x$  и  $y$  – наклонены под некоторым углом  $\alpha$  к погонной нагрузке  $q$  (это вес 1-го метра уголка).

Подкрановая балка мостового крана (рис. 9.3) при торможении тележки с грузом испытывает косой изгиб вследствие отклонения груза  $G$  от вертикали на угол  $\alpha$ .

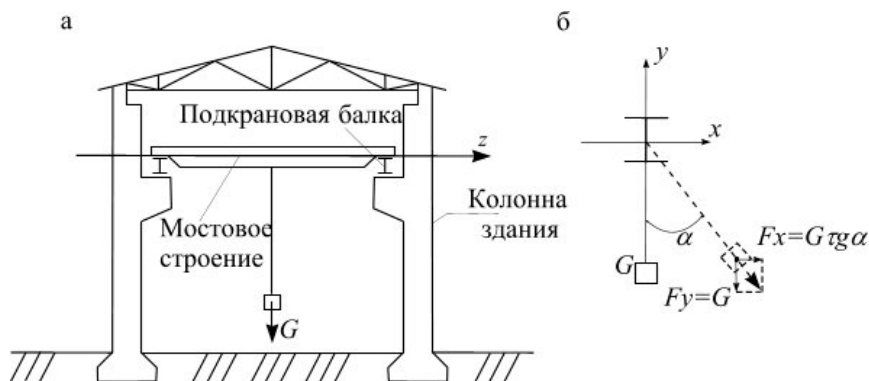


Рис. 9.3

### 9.2.1. Нормальные напряжения при косом изгибе

Рассмотрим консольный брус, нагруженный силой  $F$ , направленной под углом  $\alpha$  к главной оси  $Oy$  (рис. 9.4, а).

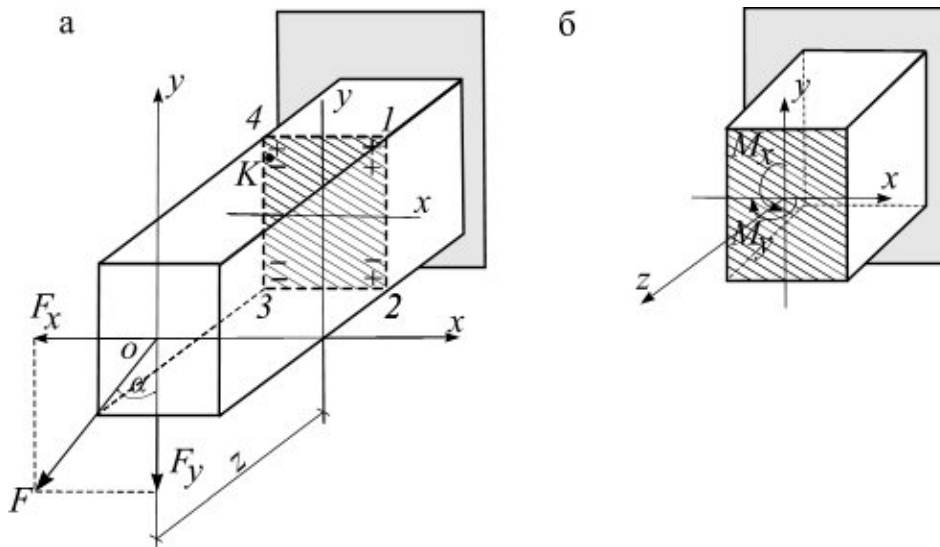


Рис. 9.4

Разложим эту силу на составляющие  $F_x$  и  $F_y$  по главным осям поперечного сечения:

$$F_x = F \cdot \sin \alpha; \quad F_y = F \cdot \cos \alpha.$$

Каждая из этих составляющих вызывает прямой изгиб бруса:  $F_y$  – в плоскости  $zOy$ ,  $F_x$  – в плоскости  $zOx$ . Изгибающие моменты в произвольном сечении бруса (рис. 9.4, б) находятся так:

$$M_x = F_y \cdot z = F \cdot z \cdot \cos \alpha = M \cdot \cos \alpha;$$

$$M_y = F_x \cdot z = F \cdot z \cdot \sin \alpha = M \cdot \sin \alpha,$$

где  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  – полный изгибающий момент в плоскости действия силы  $F$ .

Нормальные напряжения в сечении согласно принципу независимости действия сил определяются как сумма:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}.$$

С учетом (1.1):

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (9.2)$$

По формуле (9.2) определяются нормальные напряжения в любой точке сечения при косом изгибе. Причем моменты  $M_x$  и  $M_y$ , а также координаты  $x$  и  $y$  исследуемой точки подставляют по абсолютному значению, а знаки слагаемых напряжений устанавливают исходя из характера деформирования бруса.

Так,  $F_y$  вызывает изгиб, при котором верхние волокна растянуты, нижние – сжаты, а действие  $F_x$  вызывает растяжение волокон правой части и сжатие левой

части сечения. Соответствующие знаки напряжений  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$  проставлены в координатных четвертях сечения (рис. 9.4, а). Например, для точки  $K$  первое слагаемое в формуле (9.2) следует взять со знаком (+), а второе – со знаком (–).

В угловых точках сечения модули координат  $x$  и  $y$  имеют наибольшие значения, поэтому в них возникают максимальные напряжения:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (9.3)$$

Наибольшее растягивающее напряжение будет в точке 1, наибольшее сжимающее – в точке 3 (рис. 9.4, а), т. к. слагаемые в формуле (9.3) для этих точек имеют одинаковые знаки.

Преобразуем формулу (9.3):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1}{W_x} \left( M_x + M_y \cdot \frac{W_x}{W_y} \right) = \frac{M_{np}}{W_x},$$

где  $M_{np}$  – приведенный момент:

$$M_{np} = M_x + M_y \cdot \frac{W_x}{W_y} \quad (9.4)$$

### 9.2.2. Нейтральная линия при косом изгибе

*Нейтральная линия* является геометрическим местом точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Пусть текущие координаты одной из точек нейтральной линии (н. л.) будут  $x_0$  и  $y_0$ . Тогда, применяя формулу (9.2), получим уравнение нейтральной линии:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0 \Rightarrow -\frac{y_0}{x_0} = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}. \quad (9.5)$$

Данное уравнение является уравнением прямой, проходящей *через начало координат*. Равенство (9.5) удовлетворяется тогда, когда знаки  $x_0$  и  $y_0$  различны. Следовательно, нейтральная линия пройдет через II и IV четверти (рис. 9.5, а).

Обозначим через  $\beta$  угол наклона нейтральной линии к оси  $Ox$ ; учитывая, что  $x_0$  и  $y_0$  имеют разные знаки (рис. 9.5, а), имеем:

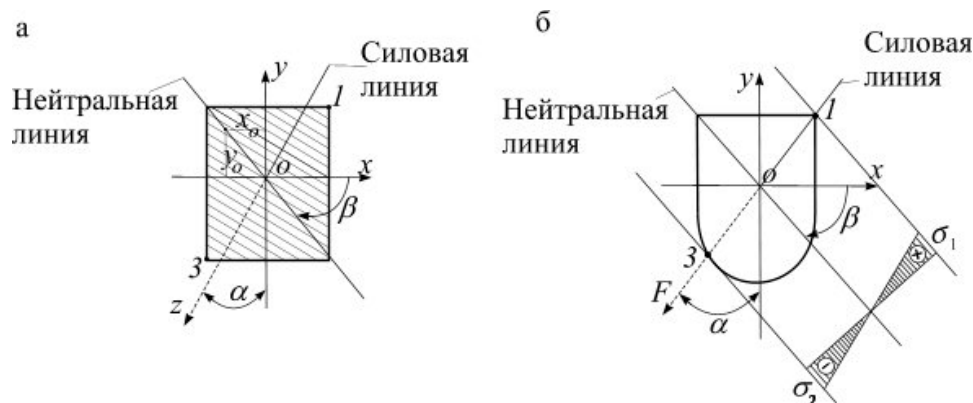


Рис. 9.5

С учетом этого перепишем выражение (9.5):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}. \quad (9.6)$$

Подставив в формулу (9.6) значения моментов из равенств (9.1), получим формулу для угла наклона нейтральной линии к оси  $Ox$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.7)$$

Анализ формулы (9.7) позволяет сделать следующие выводы.

1. Если  $J_x \neq J_y$ , то  $\beta \neq \alpha$ , следовательно, в отличие от прямого изгиба, нейтральная линия при косом изгибе *не перпендикулярна силовой линии*.

Для сечений, у которых все центральные оси являются главными и моменты инерции равны  $J_x = J_y$  (круг, квадрат, правильный многоугольник и т. п.), изгиб всегда будет прямой. Расчет ведется по полному моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

2. Силовая и нейтральная линии при косом изгибе проходят через разные четверти сечения (рис. 9.5).

3. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  отсчитываются в одном направлении от осей  $Oy$  и  $Ox$  (в данном примере – по ходу часовой стрелки).

### 9.2.3. Расчеты на прочность при косом изгибе

Для расчета на прочность необходимо определить *опасное сечение*, а в нем – *опасную точку*, для которой записывается условие прочности.

**Определение опасного сечения.** При плоском косом изгибе (рис. 9.6, а) строят эпюру полного изгибающего момента  $M_x$ .

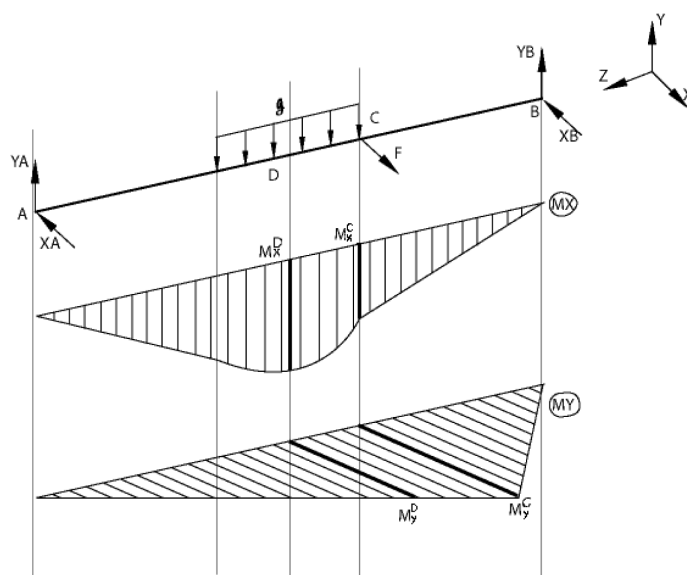


Рис. 9.6

По максимальному значению момента определяется положение опасного сечения. Для бруса (рис. 9.4 а, б) положение опасного сечения очевидно без построения эпюры (в заделке  $M_{max} = F \times L$ ).

В случае *пространственного изгиба* эпюры моментов строят в двух главных плоскостях (рис. 9.6). Обычно это сечения с наибольшими значениями  $M_x$ .

**Нахождение опасных точек.** Для сечения произвольной формы определяют положение нейтральной линии по формуле (9.7). Затем проводят касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии (рис. 9.5, б). *Опасными* являются точки 1 и 3, наиболее *удаленные* от нейтральной линии.

Для бруса из *хрупких* материалов, имеющих различное сопротивление растяжению и сжатию, составляют два условия прочности.

*По методу допускаемых напряжений:*

$$\begin{aligned} \sigma_{p \max} &= \frac{M_x}{J_x} y_1 + \frac{M_y}{J_y} x_1 \leq [\sigma_p]; \\ |\sigma_{c \max}| &= \left| \frac{M_x}{J_x} y_3 + \frac{M_y}{J_y} x_3 \right| \leq [\sigma_c], \end{aligned} \quad (9.8)$$

где  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_c]$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

*По методу предельных состояний:*

$$\begin{aligned} \sigma_{t \text{ расч}} &= \frac{M_x}{J_x} y_1 + \frac{M_y}{J_y} x_1 \leq R_t \cdot \gamma_c; \\ |\sigma_{c \text{ расч}}| &= \left| \frac{M_x}{J_x} y_3 + \frac{M_y}{J_y} x_3 \right| \leq R_c \cdot \gamma_c, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – расчетные изгибающие моменты в опасном сечении;  $R_t$  и  $R_c$  – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие (согласно СНиП II-23-81\*) имеют обозначения  $R_{ut}$  и  $R_{uc}$  и устанавливаются по пределу прочности материала;  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы.

При расчете бруса из *пластичного* материала ( $R_t = R_c = R$ ) используется одно из условий (9.8) и (9.9), которое соответствует большему по абсолютному значению напряжению.

Для сечений с двумя осями симметрии и с выступающими углами (прямоугольник, двутавр, коробчатое сечение и т. п.) *опасными* будут угловые точки (рис. 9.5, а). Условия прочности согласно (9.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{расч}} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R \cdot \gamma_c, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение;  $R$  – расчетное сопротивление материала на растяжение и сжатие при изгибе (устанавливается согласно СНиП II-23-81\* по величине предела текучести и имеет обозначение  $R_y$ ).

Для хрупкого материала опасной будет точка 1 (рис. 9.5, а), в которой возникает напряжение растяжения.

**Расчеты на прочность.** Проверочный расчет проводится по формулам (9.8 – 9.10). Допускаемое значение нагрузки при известных размерах поперечного сечения находят из условий прочности (9.8 – 9.10).

Проектный расчет (подбор поперечного сечения) осуществить сложнее, т. к. в формулы входят две неизвестные характеристики  $J_x$  и  $J_y$  или  $W_x$  и  $W_y$ . В общем случае задаются размерами сечения и осуществляют проверку условий прочности. Если условие (9.9 или 9.10) не удовлетворяется, то размеры корректируют и проверяют снова.

Для простых сечений (прямоугольник, двутавр), задавшись отношением

$n = \frac{W_x}{W_y}$ , пользуются формулой:

$$\sigma_{max} = \frac{I}{W_x} (M_x + n \cdot M_y) \leq R \cdot \gamma_c, \quad (9.11)$$

откуда с учетом (9.4) находят расчетное значение момента сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_x + n \cdot M_y}{R \cdot \gamma_c} = \frac{M_{np}}{R \cdot \gamma_c}. \quad (9.12)$$

Для прямоугольного сечения  $n = \frac{h}{b}$ , где  $h$  и  $b$  – высота и ширина сечения. Для прокатных двутавров  $n = 6,14$  (см. сортамент).

По найденному моменту сопротивления  $W_x$  с использованием сортамента выбирают номер профиля и осуществляют проверку прочности по формуле (9.10).

### 9.3. Внецентренное сжатие бруса

#### 9.3.1. Основные понятия и допущения

**Внецентренное сжатие (растяжение)** – случай сложного нагружения бруса, когда линия действия сжимающей (растягивающей) силы  $F$  не совпадает с осью бруса, а имеет смещение – эксцентриситет (рис. 9.7).

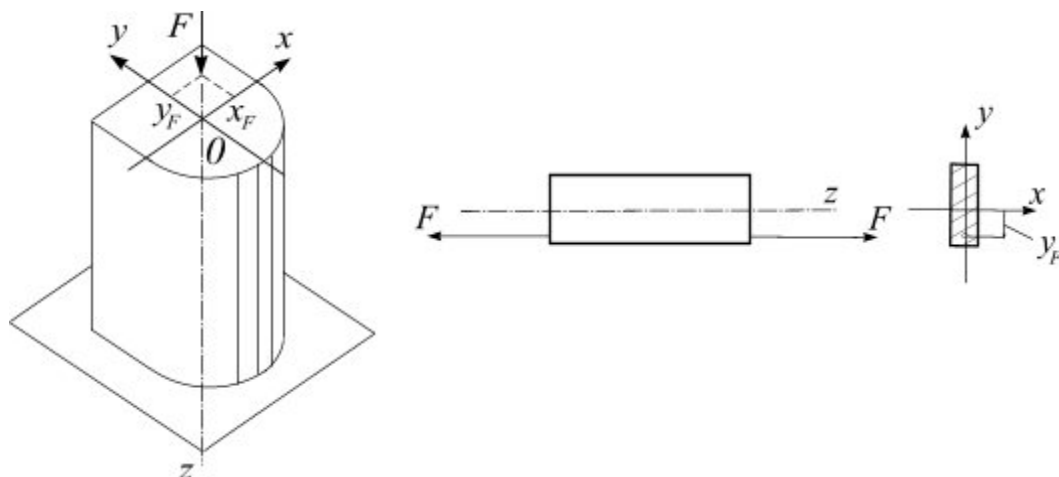


Рис. 9.7



Такая задача часто встречается при расчете опор мостов и колонн зданий. Внецентренное сжатие испытывает колонна промышленного здания (рис. 9.3) от веса подкрановой балки  $F$  (рис. 9.8, а), башня передвижного рельсового крана (рис. 9.8, б) – от веса крана  $G$ , находящегося в точке  $C$ .

Выводы данного подпункта базируются на следующих допущениях:

- брус имеет большую жесткость, т. е. соблюдается принцип начальных размеров;
- длина бруса невелика по сравнению с поперечными размерами, а потому при действии сжимающей силы потеря устойчивости невозможна.

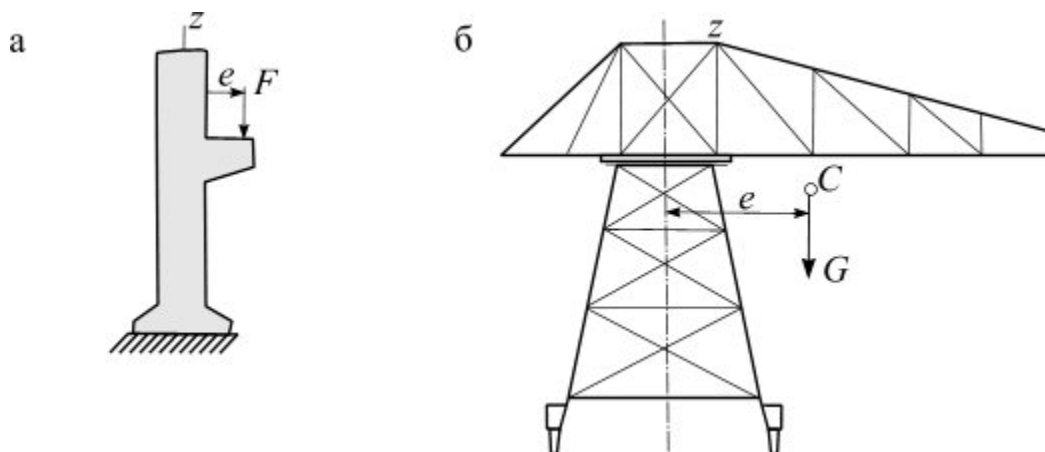


Рис. 9.8

### 9.3.2. Нормальные напряжения при внецентренном сжатии

Пусть точка приложения силы  $F$  (силовая точка) имеет координаты  $x_F$  и  $y_F$ , отсчитанные относительно главных центральных осей инерции (рис. 9.9, а). Представим этот случай в виде простых нагружений, для чего в точке  $O$  приложим две равные и противоположные силы  $F' = F'' = F$  (рис. 9.9, б). Сила  $F'$  вызывает осевое сжатие, а силы  $F$  и  $F''$  – чистый изгиб с моментом  $M_0 = F \times e$ , который можно разложить на составляющие  $M_x$  и  $M_y$ .

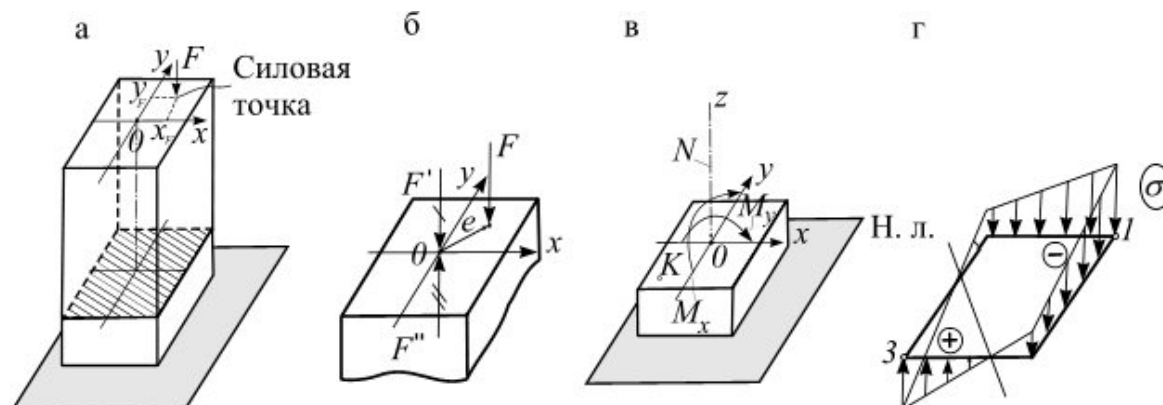


Рис. 9.9

В произвольном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора (рис. 9.9, в):

$$N = -F; \quad M_x = \pm F \cdot y_F; \quad M_y = \pm F \cdot x_F. \quad (9.13)$$



Таким образом, *внецентренное сжатие* можно представить как сочетание *центрального сжатия и чистого косоого изгиба*.

Из выражений (1.15) видно, что значение внутренних силовых факторов не зависит от положения сечения по длине бруса. Следовательно, для бруса *постоянного* поперечного сечения *все сечения равноопасны*.

Нормальные напряжения в поперечном сечении согласно принципу независимости действия сил находят так:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}$$

С учетом выражения (9.13) имеем формулу

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (9.14)$$

где  $x$  и  $y$  – координаты исследуемой точки.

По формуле (1.16) можно установить *напряжения* в любой точке сечения, причем каждое слагаемое должно быть подставлено со своим знаком, определяемым по характеру *деформирования* бруса (рис. 9.9, в). Например, для точки  $K$  первое слагаемое в формуле (9.14) следует взять с «минусом», два других – с «плюсом».

Иногда строят пространственную эпюру напряжений, при этом вычисляют напряжения в угловых точках (рис. 9.9, г). Очевидно, что линия, проведенная через нулевые точки, является нейтральной. Опасными будут точки 1 и 3, наиболее удаленные от нее.

Преобразуем выражение (9.14), используя понятие радиусов инерции сечения:

$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \\ i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_x = A \cdot i_x^2; \\ J_y = A \cdot i_y^2. \end{cases} \quad (9.15)$$

Подставляя формулы (9.15) в формулу (9.14), получаем:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot y_F}{A \cdot i_x^2} \cdot y \pm \frac{F \cdot x_F}{A \cdot i_y^2} \cdot x.$$

Окончательно имеем:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right). \quad (9.16)$$

По формуле (9.16) можно определять *напряжения в любой точке сечения при внецентренном растяжении и сжатии*. Знак «минус» перед формулой используется в том случае, если нагрузка  $F$  – сжимающая, а знак «плюс» – в том случае, если сила  $F$  – растягивающая. Координаты силовой точки  $M(x_F; y_F)$  и исследуемой точки  $M_1(x; y)$  следует подставлять с учетом знаков в системе координат.

### 9.3.3. Нейтральная линия при внецентренном сжатии

Для нахождения опасных точек сечения необходимо определить положение нейтральной линии (н. л.). Приравняем к нулю правую часть выражения (9.16).

Поскольку  $\frac{F}{A} \neq 0$ , получим уравнение нейтральной линии:

$$1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} = 0. \quad (9.16)$$

Приведем его к виду:

$$\frac{x}{\left( -\frac{i_y^2}{x_F} \right)} + \frac{y}{\left( -\frac{i_x^2}{y_F} \right)} = 1.$$

Это известно из курса аналитической геометрии уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1.$$

Сопоставляя два последних уравнения, найдем координаты *отрезков*, отсекаемых нейтральной линией на осях координат (или уравнение нейтральной линии в отрезках):

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (9.17)$$

В рассматриваемом случае  $x_F > 0$  и  $y_F > 0$ , тогда из формул (9.17) следует, что координаты отрезков  $a_x < 0$  и  $a_y < 0$  (рис. 9.10 а, б).

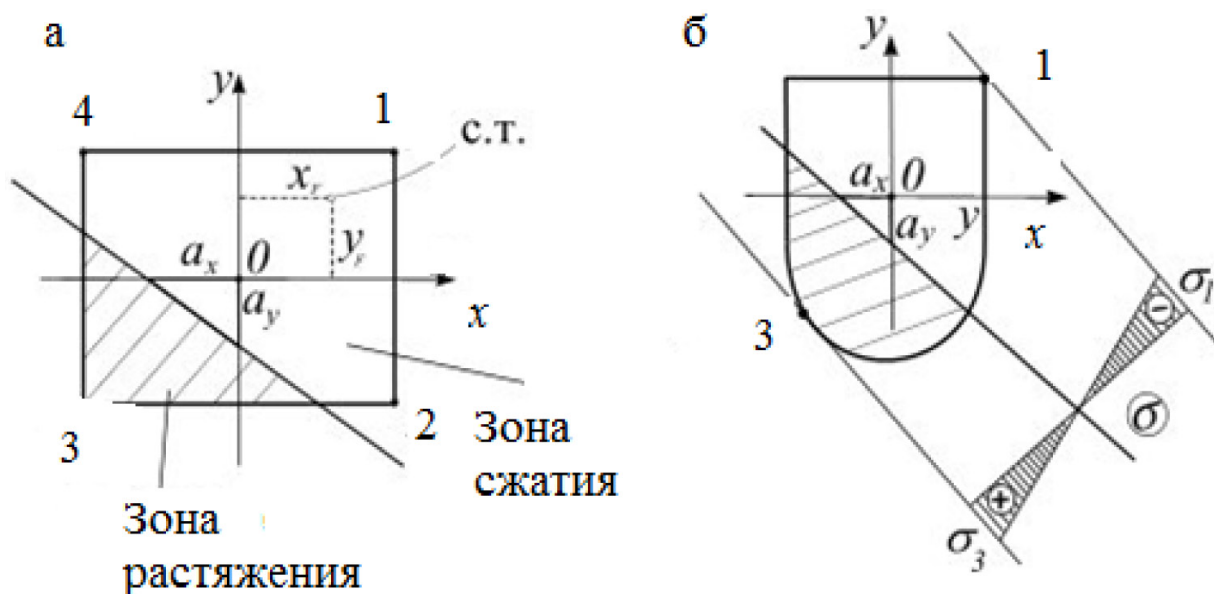


Рис. 9.10

Анализ формул (9.16) и (9.17) приводит к следующим выводам:

- 1) нейтральная линия *не проходит* через центр тяжести сечения точку  $O$ ;
- 2) нейтральная линия и силовая точка расположены *по разные стороны* от центра  $O$ ;

3) нейтральная линия, пересекая сечение, делит его на *две области*: в одной возникают деформации *сжатия*, в другой – *растяжения*. Опасными являются точки 1 и 3, наиболее удаленные от нейтральной оси: наибольшее сжимающее напряжение будет в точке 1, наибольшее растягивающее – в точке 3 (рис. 9.5);

4) если сила  $F$  удаляется от центра тяжести (координаты  $x_F$  и  $y_F$  возрастают), то нейтральная линия *приближается* к нему, оставаясь параллельной первоначальному своему положению (и наоборот);

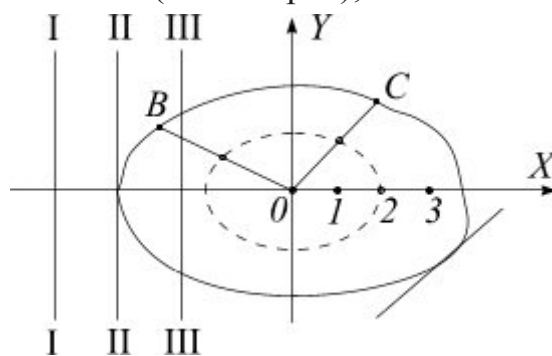


Рис. 9.11

5) если сила  $F$  приложена в точке на оси  $Ox$  ( $y_F = 0$ ), то *нейтральная линия не пересекает ось  $Oy$ , а параллельна ей*, т. к. координата отрезка  $a_y = \infty$  (рис. 9.11):

$$a_y = -\frac{i^2}{y_F} = -\frac{i^2}{0} = \infty;$$

6) если сила приложена в центре (координаты силы  $x_F = 0$  и  $y_F = 0$ ), то по формулам (9.17) получаем, что  $a_x = \infty$  и  $a_y = \infty$ .

В этом случае имеем центральное сжатие с равномерным распределением сжимающих напряжений  $\sigma = -\frac{F}{A}$  по всему сечению.

### 9.3.4. Ядро сечения

**Ядро сечения** – часть сечения вокруг центра тяжести, при расположении внутри которой продольной нагрузки в поперечных сечениях возникают напряжения одного знака.

Пусть сжимающая сила  $F$  проходит точки 1, 2, 3 (рис. 9.11), тогда нейтральная линия занимает положения I-I, II-II, III-III и т. д. Наступит момент, когда *нейтральная линия коснется контура сечения* и займет, например, положение II-II, которому соответствует силовая точка 2. При этом в сечении *во всех точках будут сжимающие напряжения*. Если силу передвинуть за точку 2, то нейтральная линия пройдет внутри контура сечения и разделит его на 2 части: сжатую и растянутую. Таким образом, точка 2 является *граничной точкой*, за которой нельзя располагать продольную силу, если необходимо исключить возникновение в поперечном сечении *растягивающих напряжений*. Точно так же на прямых  $OB$  и

ОС можно определить точки, которые обладают теми же свойствами, что и точка 2 (рис. 9.11). Соединив данные точки, получим контур ядра сечения.

При проектировании колонн из материалов, имеющих низкое сопротивление растяжению (например, из чугуна, бетона, камня, кирпичной кладки), важно заранее знать размеры ядра сечения и его форму.

Для построения ядра сечения проводят несколько нейтральных линий, касательных к контуру сечения. По чертежу находят соответствующие координаты отрезков  $a_x$  и  $a_y$ , отсекаемых от осей координат, и по формулам, которые следуют из (9.17), определяют координаты граничных точек ядра сечения:

$$\boxed{x_F = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y}} \quad (1.21)$$

**Примеры построения ядра сечения.** Прямоугольное сечение со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 9.12). Рассмотрим четыре положения касательной, совмещенной со сторонами прямоугольника.

Для касательной I-I отрезки, отсекаемые на осях координат, равны  $a_x = \infty$  и  $a_y = h/2$ . По формулам (1.21) имеем:

$$x_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\frac{2J_x}{h \cdot A} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}.$$

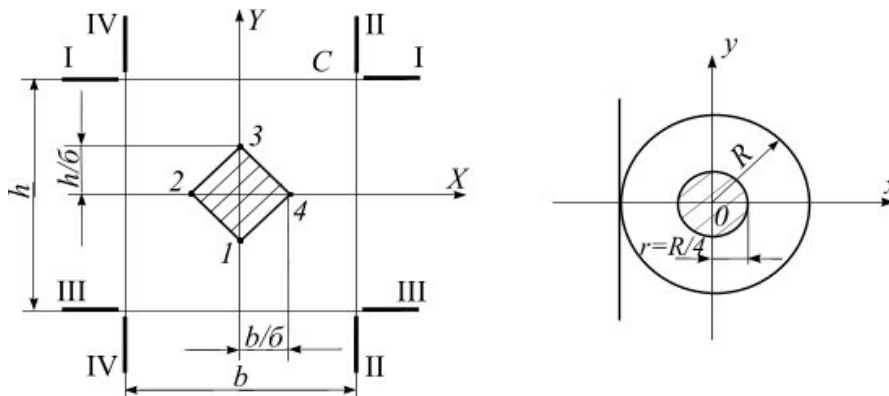


Рис. 9.12

Откладываем на оси Оу отрезок  $\left(-\frac{h}{6}\right)$ ; получаем точку 1 ядра сечения. Аналогично находится точка 3. Повторяя рассуждения по отношению к касательным II-II и IV-IV, находим для точек 2 и 4 координаты:  $y_F = 0$ ;  $x_F = \pm\frac{b}{6}$ . Соединив найденные точки прямыми линиями, получим ядро сечения в виде ромба (рис. 9.12, а).

Для сечения в виде круга радиусом  $R$  ядро сечения очерчено по окружности радиусом  $r$  (рис. 9.12, б). Ввиду того, что круг симметричен относительно центра, достаточно рассмотреть одно положение касательной:  $a_x = -R$ . Тогда:

$$x_F = r = \frac{J_y}{A \cdot R} = \frac{\pi R^4}{4 \pi R^2 R} = \frac{R}{4}.$$

Для сечения, имеющего форму многоугольника, ядро сечения также будет многоугольником.

### 9.3.5. Порядок расчета на прочность при внецентренном сжатии

1. Определяют положение центра тяжести сечения и положение главных центральных осей.
2. Вычисляют моменты  $J_x, J_y$  и радиусы  $i_x^2, i_y^2$  инерции.
3. Определяют координаты силовой точки ( $x_F$  и  $y_F$ ) относительно главных осей.
4. Находят положение нейтральной линии.
5. Находят опасные точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.
6. Записывают условие прочности для опасных точек.
7. Проводят расчет на прочность для рассматриваемого бруса.

Для бруса из хрупкого материала расчет на прочность ведется для точек 1 и 3 (рис. 9.12).

При расчете на прочность используются два метода: *по допускаемым напряжениям* и *по предельным состояниям*.

#### 1. По методу допускаемых напряжений:

$$\sigma_{c \max} = \sigma_1 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_1}{i_y^2} + \frac{y_F y_1}{i_x^2} \right) \leq [\sigma_c];$$

$$\sigma_{p \max} = \sigma_3 = -\frac{F}{A} \left( 1 - \frac{x_F x_3}{i_y^2} - \frac{y_F y_3}{i_x^2} \right) \leq [\sigma_p].$$

#### 2. По методу предельных состояний:

$$\sigma_{c \text{ расч}} = \sigma_1 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_1}{i_y^2} + \frac{y_F y_1}{i_x^2} \right) \leq R_c \gamma_c;$$

$$\sigma_{t \text{ расч}} = \sigma_3 = -\frac{F}{A} \left( 1 - \frac{x_F x_3}{i_y^2} - \frac{y_F y_3}{i_x^2} \right) \leq R_t \gamma_c.$$

Для расчета бруса из *пластичного* материала используется одно из условий, которое соответствует наиболее удаленной точке. В случае внецентренного *растяжения* перед формулами следует взять знак «плюс».

**Пример 9.1.** Чугунный короткий стержень заданного поперечного сечения (рис. 9.13) сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $D$ .

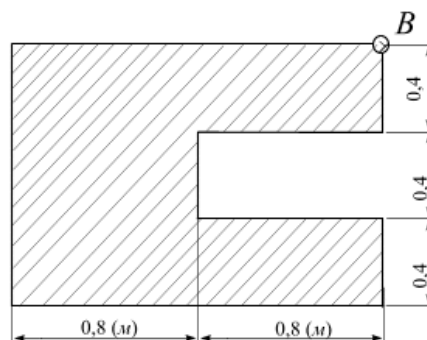


Рис. 9.13

Т р е б у е т с я:

1. Определить геометрические характеристики поперечного сечения (положение центра тяжести, осевые моменты инерции и радиусы инерции).
2. Найти положение нейтральной линии и положение опасных точек сечения.
3. Вычислить напряжения в опасных точках, выразив их через силу  $F$ .
4. Из условий прочности на сжатие и растяжение найти значения сил  $F_c$  и  $F_t$ .

Определить несущую способность стержня.

5. Построить ядро сечения.

Д а н о:  $a = 0,8 \text{ м}$ ,  $b = 0,4 \text{ м}$ ; расчетное сопротивление материала сжатию  $R_c = 120 \text{ МПа}$ , растяжению  $R_t = 18 \text{ МПа}$ . Коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

**Решение**

1. *Определим геометрические характеристики поперечного сечения.*

Определим положение центра тяжести сечения. Данное сечение имеет ось симметрии (ось  $Sx$ ), поэтому центр тяжести находится на этой оси и она является одной из центральных осей (рис. 9.14).

Положение второй оси  $Sy_c$  найдем, вычислив координату центра тяжести  $C$  относительно осей  $Ox_c y_c$ , используя метод отрицательных площадей рис. 9.14.

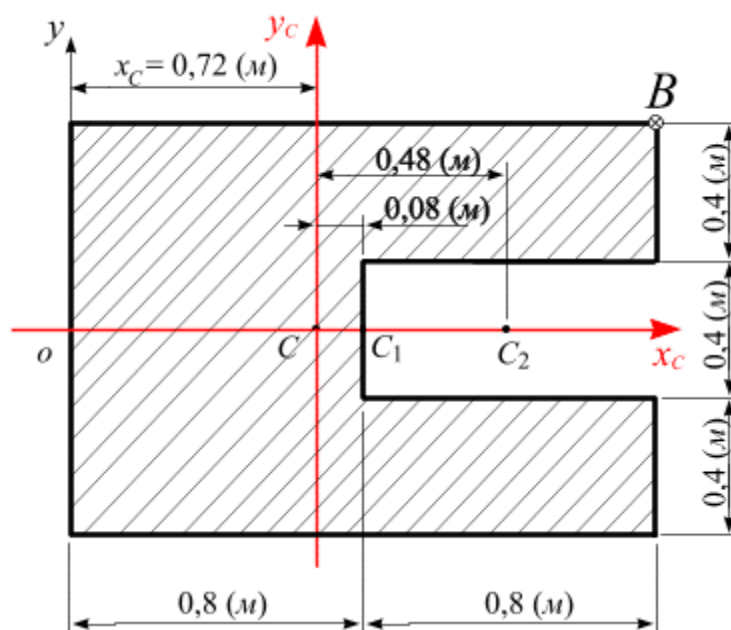


Рис. 9.14

Занесем данные в табл. 9.1.

Таблица 9.1

№ сечения	$A_1 \text{ (м}^2\text{)}$	$x_1 \text{ (м)}$	$y_1 \text{ (м)}$	$A = A_1 - A_2 \text{ (м}^2\text{)}$
1	1,92	0,8	0,6	1,6
2	-0,32	1,2	0,6	

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2}}{A} = \frac{1,92 \cdot 0,8 - 0,32 \cdot 1,2}{1,6} = 0,72 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Проводим через точку  $C(x_c; y_c)$  центральные оси  $Sx_c y_c$ .

Осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей равны:

$$J_x = \frac{1,6 \cdot 1,2^3}{12} - \frac{0,8 \cdot 0,4^3}{12} = 0,226 (\text{м}^4).$$

$$J_y = \left( \frac{1,2 \cdot 1,6^3}{12} + 0,08^2 \cdot 1,92 \right) - \left( \frac{0,4 \cdot 0,8^3}{12} + 0,48^2 \cdot 0,32 \right) = 0,331 (\text{м}^4).$$

Квадраты радиусов инерции равны:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{0,226}{1,6} = 0,141 (\text{м}^2).$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{0,331}{1,6} = 0,206 (\text{м}^2).$$

2. Вычислим положение нейтральной линии. Для этого вычислим координаты отрезков, отсекаемых нейтральной линией на осях координат  $Sx_c y_c$ . Координаты полюса  $B$ :  $x_F = 0,88 (\text{м})$ ;  $y_F = 0,6 (\text{м})$ :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{0,206}{0,88} = -0,234 (\text{м}).$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{0,141}{0,6} = -0,235 (\text{м}).$$

Построим нейтральную линию, отложив вычисленные отрезки на соответствующих координатных осях с учетом знака (рис. 9.15).

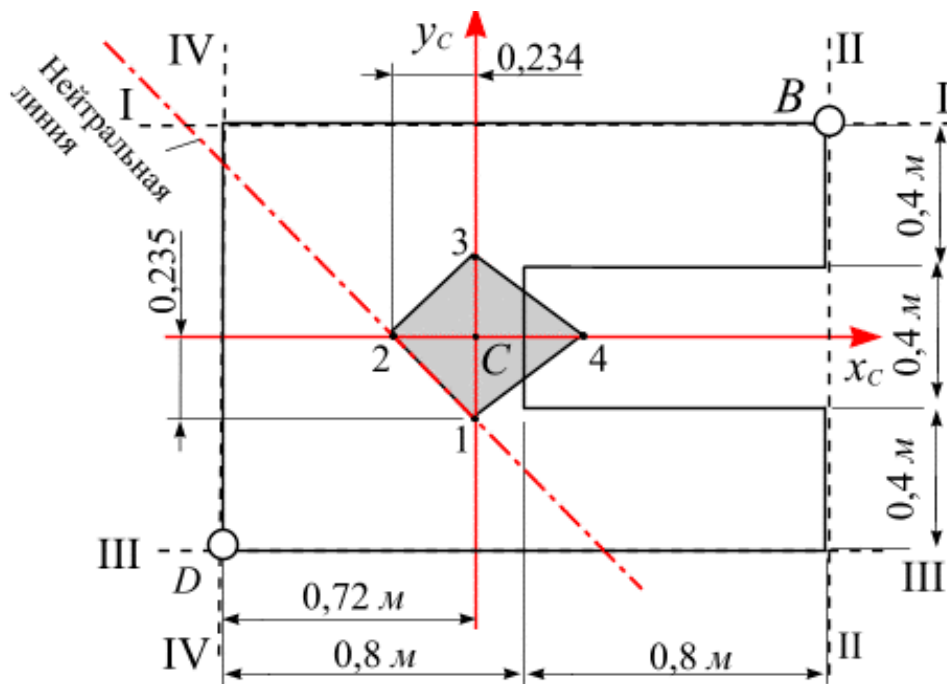


Рис. 9.15



**Ядро сечения.** Для построения ядра сечения проводим несколько нейтральных линий, касательных к контуру сечения. По чертежу находят соответствующие координаты отрезков  $a_x$  и  $a_y$ , отсекаемых от осей координат, и по выражениям

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y}$$

определяют координаты граничных точек ядра сечения:

1. Для касательной (I):  $a_x = \infty$ ,  $a_y = 0,6$  м.

Координаты точки (I) ядра сечения:

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y} = -\frac{0,141}{0,6} = -0,235(\text{м}).$$

2. Для касательной II-II:  $a_x = 0,88$  (м),  $a_y = \infty$ .

$$\text{Координаты точки (2): } x_F = -\frac{0,206}{0,88} = -0,234(\text{м}), \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

3. Для касательной III-III:  $a_x = \infty$ ,  $a_y = -0,6$  (м).

$$\text{Координаты точки (3) } x_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0, \quad y_F = -\frac{0,141}{-0,6} = 0,235(\text{м}).$$

4. Для касательной IV-IV:  $a_x = -0,72$  (м),  $a_y = \infty$ .

$$\text{Координаты точки (4): } x_F = -\frac{0,206}{-0,72} = 0,286(\text{м}), \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

Так как контуры данного сечения прямолинейны, то, соединяя точки (1), (2), (3), (4) прямыми линиями, получим ядро сечения (рис. 9.15).

3. Вычислим напряжения в опасных точках  $B$  и  $D$ , выразив их через силу  $F$  и площадь сечения. Запишем необходимые данные в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Точки	$x_F, \text{ м}$	$y_F, \text{ м}$	$x_B, \text{ м}$	$y_B, \text{ м}$	$x_D, \text{ м}$	$y_D, \text{ м}$	$i_x^2, \text{ м}^2$	$i_y^2, \text{ м}^2$
Точка $B$	0,88	0,6	0,88	0,6			0,141	0,206
Точка $D$					-0,72	-0,6		

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} \right) = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{0,88 \cdot 0,88}{0,206} + \frac{0,6 \cdot 0,6}{0,141} \right) =$$

$$= -\frac{F}{A} (1 + 3,76 + 2,55) = -\frac{F}{A} \cdot 7,31;$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} \right) = -\frac{F}{A} \left( 1 - \frac{0,88 \cdot 0,72}{0,206} - \frac{0,6 \cdot 0,6}{0,141} \right) =$$

$$= -\frac{F}{A} (1 - 3,08 - 2,55) = +\frac{F}{A} \cdot 4,63.$$

Перед формулами взять знак «минус», так как заданная сила  $F$  является сжимающей.

4. *Определение несущей способности стержня.*

Запишем условия прочности для опасных точек, имея в виду, что точка  $D$  работает на растяжение, а точка  $B$  на сжатие (рис. 9.16),

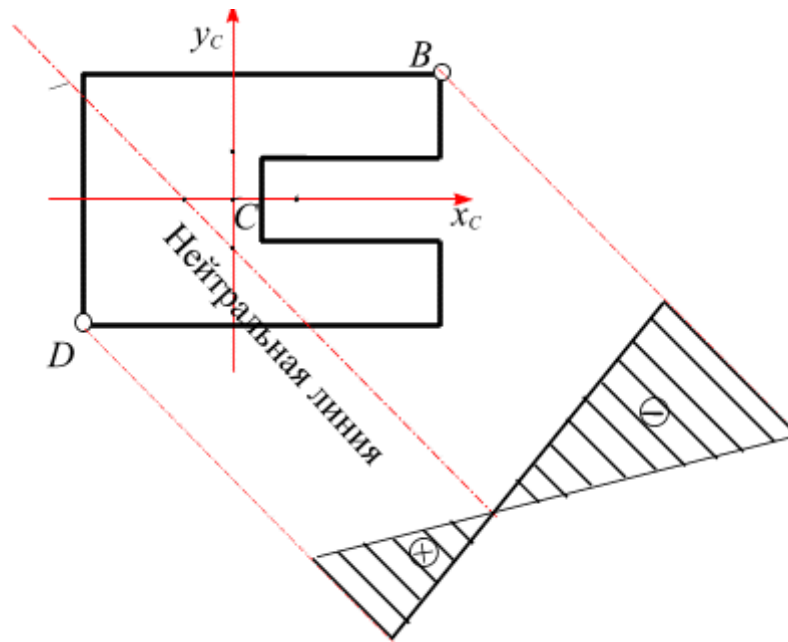


Рис. 9.16

Из условия прочности на растяжение найдем значение силы  $F_t$ , на сжатие –  $F_c$ :

$$\sigma_D = 4,63 \frac{F_t}{A} \leq R_t \cdot \gamma_c \Rightarrow F_t \leq \frac{A \cdot R_t \cdot \gamma_c}{4,607} = \frac{1,6 \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{4,607} = 5,62 \text{ кН}.$$

$$\sigma_B = 7,31 \frac{F_c}{A} \leq R_c \cdot \gamma_c \Rightarrow F_c = \frac{A \cdot R_c \cdot \gamma_c}{7,31} = \frac{1,6 \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{7,31} = 23,6 \text{ кН}.$$

Из двух вычисленных значений  $F_t$  и  $F_c$  в качестве несущей способности выбираем меньшую, т. е.:

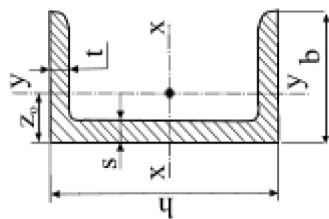
$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot 7,31 = -\frac{5,52 \cdot 10^3}{1,6} \cdot 7,31 = 25,22 \text{ кН};$$

$$\sigma_D = +\frac{F}{A} \cdot 4,63 = +\frac{5,52 \cdot 10^3}{1,6} \cdot 4,63 = 15,97 \text{ кН}.$$

## Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1995. 560 с.
2. Богомаз И.В. Теоретическая механика, Статика. Кинематика: учеб. пособие. 2-е изд., исп. и доп. М.: Ассоциация строительных вузов, 2015. Т. 1. 190 с.
3. Богомаз И.В., Мартынова Т.П., Москвичев В.В. Сопротивление материалов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Ассоциация строительных вузов, 2008. 191 с.
4. Богомаз И.В., Мартынова Т.П., Москвичев В.В. Сопротивление материалов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Ассоциация строительных вузов, 2008. 187 с.
5. Богомаз И.В. Механика: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Инфра-М, 2018. 345 с.
6. Варданян Г.С., Андреев В.И. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Ассоциация строительных вузов, 1995. 572 с.
7. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1989. 624 с.
8. Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С. Прикладная механика. М.: Машиностроение, 1985. 574 с.
9. Миролюбов С.А., Енгальчев С.Е., Сергиевский Н.Д. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1974. 391 с.
10. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. 3-е изд., перераб. и доп. Киев: Дельта, 2008. 816 с.
11. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.В. Александрова. М.: Стройиздат, 1977. 429 с.

**Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)**

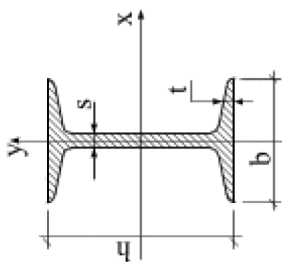


h – высота швеллера;  
 b – ширина полки;  
 s – толщина стенки;  
 t – средняя толщина полки;  
 A – площадь поперечного сечения;

I – момент инерции;  
 W – момент сопротивления;  
 S – статический момент полусечения;  
 i – радиус инерции;  
 z<sub>0</sub> – расстояние от оси y до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,5	5,61	0,95	1,16	
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	1,08	1,24	
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	1,19	1,31	
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	1,37	1,44	
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	1,53	1,54	
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	1,7	1,67	
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,00	545	77,8	5,66	45,1	57,5	1,84	1,87	
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	1,87	1,8	
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	10	6,49	59,4	78,8	2,01	2	
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	2,04	1,94	
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	2,18	2,13	
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	2,2	2,07	
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	2,35	2,28	
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	2,37	2,21	
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	2,6	2,42	
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	2,6	2,42	
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	2,78	2,67	
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	2,73	2,47	
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	2,84	2,52	
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	2,97	2,59	
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	3,1	2,68	
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	3,23	2,75	

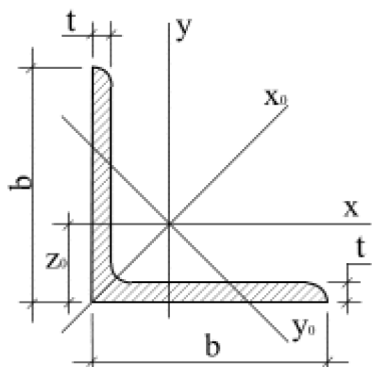
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)



- $h$  – высота двутавра;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции.

Номер двутавра	Масса $I$ м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)



b – ширина полки;  
 t – толщина полки;  
 A – площадь поперечного сечения;  
 I – момент инерции;

i – радиус инерции;  
 $I_{xy}$  – центробежный момент инерции;  
 $z_0$  – расстояние от оси y до наружной грани полки.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры		A, см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$I_{x_0(max)}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0(max)}$ , см	$I_{y_0(min)}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0(min)}$ , см	$ I_{xy} $ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
	1,15		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
	1,78		5	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
	2,18		5	2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	2,10		4	2,17	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05
4	1,85	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17
	3,52		6	4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30
	3,90		6	5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34
5	2,32	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
	5,15		7	6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50
	5,82		8	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6	3,71	60	4	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62
	4,58		5	5,33	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66
	5,43		6	6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70
	7,10		8	9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78
	8,70		10	11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6,3	3,9	63	4	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74
6,3	5,72	63	6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78
6,5	5,91	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83
	7,73		8	9,84	38,13	1,97	60,42	2,48	15,85	2,48	22,29	1,90
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88
	5,38		5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02
	10,29		10	13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10
7,5	5,8	75	5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	2,36	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,48	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	2,27	107,72	2,86	27,48	1,46	38,00	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,63	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27
	11,88		10	15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35
	14,05		12	17,90	102,74	2,40	162,39	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42
9	8,33	90	6	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51
	12,20		9	15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55
	13,48		10	17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59
	15,96		12	20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122	2,91
	20,63		14	26,28	237,15	2,99	374,98	3,78	99,32	1,94	138	2,99
	21,97		15	27,99	250,68	2,98	395,87	3,76	105,48	1,94	145	3,03
	23,30		16	29,68	263,82	3,40	416,04	3,74	111,61	1,94	152	3,06
11	11,89	110	7	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116	3,00
12	14,76	120	8	18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153	3,25
	18,24		10	23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187	3,33
	21,67		12	27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218	3,44
	26,68		15	33,99	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	2,34	262	3,53
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172	3,36
	17,30		9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282	3,61
	29,55		16	37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315	3,68



Окончание табл.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	19,41	140	9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274	3,78
	21,45		10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354	3,90
15	23,02	150	10	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374	4,07
	27,39		12	34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440	4,15
	33,82		15	43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534	4,27
	40,11		18	51,09	1060,1	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621	4,38
16	24,67	160	10	31,43	774,2	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455	4,30
	27,02		11	34,42	844,2	4,95	1340,66	6,24	317,77	3,18	496	4,35
	29,35		12	37,39	912,9	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537	4,39
16	33,97	160	14	43,57	1046,5	4,92	1662,13	6,2	430,81	3,16	615	4,47
	38,52		16	49,07	1175,2	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690	4,55
	43,01		18	54,79	1290,2	4,87	2061,03	3,16	537,46	3,13	771	4,63
	47,44		20	60,40	1418,8	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830	4,70
18	30,47	180	11	38,80	1216,4	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716	4,85
	33,12		12	42,19	1316,6	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776	4,89
	40,96		15	52,18	1607,4	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948	5,01
	48,66		18	61,99	1884,1	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108	5,13
	53,72		20	68,43	2061,1	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210	5,20
20	36,97	200	12	47,10	1822,8	6,22	2806,16	7,84	749,40	3,99	1073	5,37
	39,92		13	50,85	1960,8	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156	5,42
	42,80		14	54,60	2097,0	6,20	3333,00	7,81	861,60	3,97	1236	5,46
	48,65		16	61,98	2362,6	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393	5,54
	54,40		18	69,30	2620,6	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544	5,62
	60,08		20	76,54	2871,5	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	1689	5,70
	71,26		24	90,78	3350,7	6,08	5313,59	7,65	1387,73	3,91	1963	5,85
	74,20		25	94,29	3466,2	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028	5,89
	87,56		30	111,5	4019,6	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	2332	6,07
22	47,40	220	14	60,38	2814,4	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655	5,91
	53,83		16	68,58	3175,4	6,80	5045,37	8,58	1305,02	4,36	1862	6,02
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775	6,75
	68,56		18	87,72	5247,2	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089	6,83
	76,11		20	96,96	5764,9	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	33,95	6,91
	83,31		22	106,1	6270,3	7,69	9961,60	6,69	2579,04	4,93	3691	7,00
	93,97		25	119,7	7006,4	7,65	11125,5	9,64	2887,26	4,91	4119	7,11
	104,5		28	133,1	7716,9	7,61	12243,8	9,59	3189,89	4,90	4527	7,23
	111,4		30	142,0	8176,5	7,59	12964,7	9,56	3388,98	4,89	4788	7,31
	128,5		35	163,7	9281,0	7,53	14682,7	9,47	3879,37	4,87	5402	7,49

*Учебное издание*

Ирина Владимировна Богомаз  
Евгений Александрович Степанов

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Учебно-методическое пособие

*Электронное издание*

Редактор *Ж.В. Козуница*  
Корректор *М.А. Исакова*  
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.  
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,  
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 18.03.22.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 22,5