МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт Математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

Кобычева Валерия Сергеевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ К ПРОДОЛЖЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина
16.05.2022 ______________________

Научный руководитель
канд. пед. наук, доцент М.Б. Шашкина
____

Дата защиты
17.06.22 ______________________

Обучающийся
В.С. Кобычева
____

Оценка______________________
Прописью

Красноярск 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В век высоких технологий возрастает значение и роль качественного математического образования. Однако необходимость повышения его уровня обусловлена не только стремительным техническим прогрессом, но и несоответствием современной математической подготовки выпускников обязательным требованиям, утвержденным правительством Российской Федерации (РФ). К наиболее существенным проблемам качества математического образования можно отнести: низкий уровень школьного математического образования; отсутствие преемственности между ступенями образования, в частности на уровнях средней и высшей школы; разрыв между требованиями вузов к математической подготовке абитуриентов и реальными знаниями последних; снижение фундаментальности математического образования; нехватку и некомпетентность педагогических кадров, а также слабую систему повышения их квалификации и профессиональной переподготовки.

Перечисленные проблемы тесно связаны между собой. Формирование математической культуры школьников зависит от профессиональной подготовки учителей математики и профессионализма преподавателей вузов, от глубины подачи материала и содержания математического образования на каждом образовательном уровне. Отсутствие необходимой школьной математической базы влечет низкое качество усвоения математических и естественнонаучных дисциплин в учебных заведениях среднего и высшего профессионального образования, что, в свою очередь, напрямую способствует появлению некомпетентных специалистов физико-математического профиля, в том числе будущих учителей математики. Кроме того, в настоящее время не так много специалистов, получающих профессию осознанно, часто на студенческой скамье педагогических (и не только) вузов оказывается молодежь, самоцелью которой становится получение диплома о высшем образовании, а не образование по данной специальности или направлению подготовки. В результате вузы получают студентов, имеющих формальные математические знания, у большинства из которых не сформированы ни навыки самообучения, ни культура доказательства утверждений, а также имеются большие пробелы в различных разделах математики.

Проблемы разрыва между уровнем математических знаний выпускников школы и требованиями вузов, не готовности абитуриентов продолжать математическое образование на уровне высшего образования рассмотрены в работах А.А. Волковой, О.В. Жигаловой, О.А. Табиновой, Е.С. Трефиловой, С.А. Туманиной, Л.В. Ференчук, М.Б. Шашкиной, З.В. Шиловой и др. Авторы признают, что подход к решению данных проблем должен быть комплексным, затрагивающим все уровни образования, однако совокупность мер, необходимая для повышения качества математической культуры обучающихся, предлагается разная. Одни видят наиболее результативным шагом корректировку программ в общеобразовательной и высшей школах и предлагают сделать первый курс вузовской математики «адаптационным», позволяющим восполнить пробелы, закрепить, углубить знания и отследить неразрывную связь между школьной и вузовской математикой. Призывают улучшить программное, методическое обеспечения образовательных организаций и их финансирование (Л.Д. Кудрявцев, А.И. Кириллов, М.А. Бурковская). Другие считают нужным увеличить число часов, отводимых на точные науки в технических учебных заведениях, ввести обязательные дополнительные занятия для студентов первых курсов с целью повышения уровня математической подготовки и повысить минимальный порог по профильному уровню математики для увеличения мотивации обучающихся (А.В. Дягилева, Н.Т. Журавская, А.В. Каплун). Третьи уверены в необходимости открытия массовых школ, сотрудничающих с вузами, которые станут связующим звеном в цепочке «Школа – вуз – технопарк» (Л.А. Сухарев, П.Н. Кочугаев). Их принципиальное отличие от физико-математических школ и центров для одаренных детей заключается в том, что они «не изымают лучших учащихся из образовательных учреждений, тем самым понижая уровень этих учебных заведений» [41, с. 68]. Оплата обучения в таких школах должна производиться родителями, а не финансироваться государством, что, по мнению авторов, будет дополнительным стимулом для улучшения качества работы школы (платить имеет смысл только за действительно ценную услугу). Четвертые считают, что существующие в школах факультативные занятия необходимо заменить элективными, так как элективные курсы обязательны для старшеклассников и направлены в первую очередь на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов каждого ученика (М.А. Тузикова, А.М. Еремин).

Все предложенные идеи определенно заслуживают внимания. Корректировка программ школьной и вузовской математики должна производиться крайне аккуратно, поскольку радикальные изменения внесут еще больший диссонанс в учебный процесс. Увеличение финансирования образовательных организаций необходимо, но среднестатистический учитель вряд ли сможет каким-то образом повлиять на решение данного вопроса, а потому обсуждать его в рамках этой работы бессмысленно. Открытие массовых школ, выступающих «связующим звеном» между общим и высшим уровнями образования и производящих обучение за деньги родителей вполне возможно является действенным методом, но довольно трудно реализуемым с точки зрения практики. Проведение обязательных дополнительных занятий в университетах не менее важно, но лучше пусть они будут направлены на углубление знаний по вузовским дисциплинам, подготовку к олимпиадам, вовлечение обучающихся в научно-исследовательскую деятельность и т.п., чем на устранение пробелов по элементарной математике. Замена в общеобразовательных организациях факультативных курсов элективными имеет место быть, но для начала стоило бы изменить концепцию курсов по выбору. Большинство современных довузовских курсов не приносят желаемых результатов по причине того, что они по большей части нацелены на подготовку к экзаменам, а не на изучение математики как таковой, решение сложных задач, активизирующих мыслительные способности обучающихся. Таким образом, проведение факультативных занятий, ориентированных на углубление математических знаний будущих студентов, а не на «нарешивание» однотипных заданий для подготовки к ЕГЭ, видится первой необходимой мерой для улучшения качества математического образования.

В соответствии с вышеизложенными фактами можно заключить, что **проблема** поиска эффективных способов организации подготовки обучающихся 10-11 классов к продолжению математического образования в вузе является актуальной проблемой современного математического образования. Возможно ли решить ее на уровне школы с помощью внедрения курса по выбору, предполагающего работу с нестандартными задачами, предстоит выяснить в рамках данной работы.

Объект исследования: процесс обучения математике в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика организации подготовки обучающихся 10-11 классов к продолжению математического образования в вузе.

Цель исследования: разработка и реализация предметно-ориентированного курса по выбору, направленного на систематизацию и углубление знаний, умений и способов деятельности обучающихся 10-11 классов по школьному курсу математики.

Гипотеза исследования: организация подготовки выпускников школ к дальнейшему продолжению математического образования в вузе будет результативной, если разработать и реализовать в образовательной практике курс по выбору «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики» для обучающихся 10-11 классов.

Для реализации цели были поставлены следующие **задачи:**

1. Выявить основные дефициты математической подготовки выпускников общеобразовательных школ и студентов первых курсов.
2. Охарактеризовать требования к качеству математической подготовки выпускников школ в контексте продолжения образования в вузе.

3. Разработать программу и содержание курса по выбору для обучающихся 10-11 классов, направленного на повышение уровня математической подготовки.
4. Провести частичную апробацию курса по выбору и сделать выводы о результативности выбранной методики.

Методы исследования. При написании выпускной квалификационной работы были использованы следующие методы: анализ литературы и научных источников по теме исследования, изучение и обобщение опыта, метод сравнения, эксперимент.

Практическая значимость работы. Разработанный материал может быть использован учителями математики при проведении дополнительных занятий, направленных на подготовку к ЕГЭ и систематизацию знаний, умений и способов деятельности школьного курса математики.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений. Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, ставится проблема исследования, определяются объект, предмет, цель и задачи, выдвигается гипотеза. Отражаются научная новизна и практическая значимость. В первой главе рассматривается анализ научной литературы по проблеме преемственности в обучении математике между школой и вузом, анализируется уровень подготовленности студентов первого курса к продолжению получения математического образования в вузе. Выявляются дефициты математической подготовки обучающихся по результатам ГИА-9 и ГИА-11 (профильный уровень), разрыв между реальным уровнем математических знаний выпускников школы и требованиями вузов. Во второй главе приводится содержание, программа, методические идеи курса, его цели, задачи и планируемые результаты, пояснительная записка и учебно-тематический план. Даны методические рекомендации по проведению занятий, фрагменты конспектов по некоторым темам. Описана возможность перехода на дистанционный формат обучения. Представлены результаты апробации.

ГЛАВА 1. Теоретические аспекты подготовки обучающихся 10-11 классов к продолжению математического образования в вузе

В сфере образования неоднократно принимались попытки по устранению разрыва между школьным и вузовским образованием. Большинство исследований, посвященных этой проблеме, приходится на вторую половину прошлого века, сейчас же этому вопросу уделяется незаслуженно мало внимания. Между тем разрыв между средним общим и высшим уровнями образования (математического, в частности) по-прежнему существует, более того, с каждым годом он лишь усугубляется, так как происходит модернизация образования (как в школах, так и в вузах), и ранее установленные взаимосвязи между этими уровнями образования утрачиваются [45].

На протяжении последних лет уровень математической подготовки выпускников массовых общеобразовательных школ стремительно ухудшается. Различные инновации в образовании, призванные исправить ситуацию, изменение содержания и структуры ЕГЭ по математике не только не дают положительного результата, но и усугубляют положение. Сокращение числа часов, отведенных на изучение математики в школе, отмена устного экзамена по геометрии и упразднение практики доказательств «у доски» геометрических теорем, прием экзаменов в преимущественно тестовой форме, переоценка значимости ОГЭ и ЕГЭ и нацеленность обучения главным образом на прохождение итоговой аттестации привели к потере фундаментальности математического образования [23]. А впоследствии стали причиной появления некомпетентных специалистов физико-математического, инженерного экономического и педагогического профилей. Назревает вопрос: можно ли в современных условиях говорить хотя бы о минимальной готовности будущих абитуриентов к изучению различных разделов высшей математики?

В данной главе описываются реалии современного математического образования. Оценивается наличие преемственности математического образования на этапе школа-вуз, на основе анализа результатов ГИА 9-11 классов делаются выводы о сформированности у выпускников необходимого перечня образовательных результатов, а также о соответствии предметных умений и навыков обучающихся требованиям вузов. Приводятся возможные причины падения качества математического образования.

1.1. Проблема преемственности математического образования в школе и вузе

Обучение математике в школе и вузе – сложный, многоуровневый процесс, состоящий из целого ряда этапов. Причем от целостности и органичной внутренней связи между этими этапами, непрерывности образовательного процесса будет зависеть эффективность усвоения системы математических знаний, умений и навыков, необходимых в повседневной жизни и профессиональной деятельности [12]. В зависимости от подхода к анализу понятия «преемственность», «преемственность в обучении» также понимается по-разному[27]. В рамках данной работы под ***преемственностью в обучении*** будем понимать принцип целостности педагогического процесса, систематичность и последовательность обучения, между различными этапами и формами которого существует тесная связь. Проблема преемственности математического образования в школе и вузе является одной из наиболее значимых в современном образовании, поскольку на сегодняшний день наблюдается значительный разрыв между общим и высшим математическим образованием «в содержании, в формах и методах обучения, характере учебно-познавательной деятельности школьников и студентов» [28, с. 77].

Преподаватели физико-математических дисциплин отмечают крайне низкий уровень математической культуры студентов первых курсов, у многих из них слабо сформированы вычислительные навыки, отсутствуют базовые знания по геометрии, не сформировано умение проводить доказательные рассуждения, обосновывать свои действия и т.п. [51]. Разумеется, слабый уровень качества школьного математического образования, несистематизированные и обрывистые знания студентов не дадут обеспечить достаточный (не говоря уже высокой), уровень усвоения различных разделов высшей математики [14]. По справедливому замечанию В.А. Тестова, сегодня в образовании «на первый план выдвигается именно оценка качества образования, а не само качество» [43, с. 31]. Кроме того, часто наблюдается несоответствие балла ЕГЭ и реального уровня математической подготовки абитуриентов. Для более детального анализа готовности студентов-первокурсников к изучению математических дисциплин высшей школы приведем итоги сравнительных анализов результатов ЕГЭ и входного тестирования по математике первокурсников, проводимых в некоторых вузах нашей страны.

В приложении А приведен вариант письменного теста, предлагаемого студентам первых курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2016 и 2017 годах для оценки остаточного уровня знаний. Многие студенты получили за тест отметки “2” и “3”, имея при этом более 80 баллов за экзамен, что объясняется узконаправленностью заданий ЕГЭ и говорит о необходимости расширять спектр задач по каждой теме школьного курса математики. Связь между оценками за экзамены по математическим дисциплинам в первую сессию, суммой баллов за тест и результатами ЕГЭ разнится в зависимости от года набора студентов. В 2016 г. отмечена значимая статистическая связь оценки по аналитической геометрии с суммой баллов за тест, заданием на нахождение решений дробно-рационального неравенства, тригонометрическим уравнением и стереометрической задачей. Оценка по математическому анализу не связана с результатами, показываемыми по отдельным задачам теста, более того, неудовлетворительные отметки по данной дисциплине получили студенты, успешно справившееся с тестом и имеющие хорошие баллы за ЕГЭ [4].

Нужно понимать, что хороший уровень математической культуры абитуриента *необходим* для дальнейшего освоения курса математики в вузе, однако он *не гарантирует* достаточный уровень усвоения различных разделов высшей математики, поскольку у выпускников должны быть сформированы не только предметные, но и личностные, регулятивные, познавательные и коммуникативные универсальные учебные действия (УУД) [36]. Отсутствие метапредметных результатов обучения негативно скажется на дальнейшей успеваемости. Кроме того, важную роль в обучении играют правильная организация учебного процесса в вузе, социально-бытовые условия студента и прочие факторы, которые будут перечислены ниже.

В 2017 г., напротив, более существенная статистически значимая связь отмечается между оценками за экзамены и результатами ЕГЭ, чем с баллами за тест. Особое влияние на результаты обеих дисциплин оказали баллы, полученные за задание на нахождение области определения функции и стереометрическую задачу. Отличные и хорошие оценки по математическому анализу и аналитической геометрии преимущественно получают студенты, успешно написавшие тестовую работу. По результатам первого семестра выявлен достаточно большой процент неудовлетворительных оценок по обеим дисциплинам в 2016 и 2017 годах [4].

Анализ входного тестирования, проведенного в 2015 г. в Астраханском государственном университете на экономических направлениях подготовки, показал, что 41% студентов первого курса (общее количество обучающихся 83 человека) продемонстрировали «чрезвычайно низкий уровень знаний», на «удовлетворительно» справились 40% и, соответственно, только 19% получили оценки «хорошо» и «отлично». Задания из разделов «Функции» и «Неравенства и системы неравенств» оказались наиболее трудными для обучающихся, верно выполнить их смогли менее трети студентов, писавших тест. Задача по геометрии для большинства также оказалась нерешаемой (не справились 63%). В результате исследования значимой связи между баллами ЕГЭ и остаточными знаниями студентов обнаружено не было, а уровень их математической подготовки признан недостаточным для продолжения математического образования вузе [39]. Авторы статьи предлагают решить проблему путем реализации практикума по элементарной математике для студентов первых курсов, однако лучше начинать ликвидировать пробелы в знаниях обучающихся еще на школьной скамье путем введения дополнительных занятий.

Крайне низкий уровень освоения школьной программы по математике был выявлен у студентов первого курса, поступивших в ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева на направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, направленность (профиль) образовательной программы «Математика и Информатика» в 2021 г. Неудовлетворительную отметку за входное тестирование, проверяющее остаточные знания по алгебре и началам анализа, получили 85,7% будущих учителей (выполнили менее половины работы), из них 20,8% не смогли решить ни одного задания. Оставшиеся 14,3% студентов справились с работой на “удовлетворительно”. При этом средний балл тестируемых по результатам ЕГЭ (математика, профильный уровень) составил 60,6. Самый высокий и низкий баллы 86 и 39 соответственно. Контрольно-измерительный материал входного тестирования первокурсников *(приложение Б)* состоял заданий, проверяющих усвоение на базовом уровне основных умений школьного курса математики. Результаты исследования показали, что обучающиеся не владеют основными методами решений уравнений и неравенств, не понимают, чем отличается система от совокупности, не соблюдают правила равносильных преобразований, не умеют определять область допустимых значений (ОДЗ) переменной уравнения или неравенства. Корреляционный анализ выявил недостаточно тесную связь между выборками (X – результаты ЕГЭ по профильной математике, Y – баллы за входное тестирование), что объясняется различным набором заданий ЕГЭ и входного теста и свидетельствует о формальности математических знаний у большинства обучающихся и больших пробелах в математической подготовке [16].

Возможные причины трудностей, возникающих у студентов в процессе изучения ряда учебных математических дисциплин (математический анализ, аналитическая геометрия, алгебра и пр.) по материалам диссертации М.А. Степкиной:

— Отсутствие мотивации, обусловленное тем, что первокурсники недооценивают значимость математики для успешного овладения будущей профессией. Авторы, занимающиеся разработкой данного вопроса: Л.И. Божович, Н.А. Макарова, Г.И. Щукина и др.

— Несоответствие между требованиями вузов к уровню математических знаний абитуриентов и фактическим уровнем математических знаний выпускников школ как нарушение преемственности в обучении математики. Исследования по данному направлению есть у следующих авторов: Р.М. Зайниев, О. А. Табинова, М.Б. Шашкина и др.
— Разрозненность и неполнота школьных математических знаний у студентов первых курсов, привыкших к выполнению типовых заданий по алгоритмам. Авторы: Н.А. Березович, Н.А. Сапожникова, А.П. Сманцер и др.
— Психологические трудности, связанные с запоминанием, пониманием, наглядным представлением учебного материала, при адаптации первокурсников к обучению в вузе. Авторы: А.А. Виноградова, П.Д. Рабинович, А.М. Сергеева и др [39, 40].

Также к причинам недостаточной успеваемости в вузе можно отнести: отсутствие навыков самостоятельной работы и недостаточный контроль со стороны преподавателей, неумение (нежелание) студентов рационально использовать свое время [31], слабо развитое у них умение логической переработки информации и отсутствие необходимых умений познавательной деятельности [27]. Вопросы социальной адаптации и социализации студентов не менее важны и актуальны [48].

Эффективность обучения в системе непрерывного образования подразумевает обеспечение целевой, содержательной, технологической и психологической преемственностей [12]. Переход «школа-вуз» должен осуществляться плавно, с учетом возрастных особенностей учащихся, их ведущего типа деятельности, обеспечивая неразрывную связь между знаниями, полученными на каждом уровне математического образования. Соблюдение «научности, последовательности, систематичности, взаимосвязанности и согласованности» в содержании, формах и методах обучения позволит добиться успешного освоения математических дисциплин в вузе [24].

Как было отмечено, в настоящий момент наблюдается стремительное ухудшение качества довузовской математической подготовки студентов первого курса. Несистематизированные и обрывистые знания студентов не способны служить прочной базой для дальнейшего освоения курса математики в вузе, что нарушает целевую преемственность. С целью ликвидации пробелов школьной математической подготовки в вузах для студентов первых курсов вводятся адаптационные (коррекционные) курсы по элементарной математике [39]. На практических занятиях выделяется время для повторения некоторых вопросов школьной программы, а также проводится организация самостоятельной работы студентов - индивидуальные домашние и контрольные работы по наиболее трудным для студентов темам из школьного курса математики (ШКМ) [51]. Предложенные меры являются достаточно эффективным и необходимым средством повышения уровня математических знаний студентов первых курсов, однако они «не снимают всех факторов» существования проблемы преемственности математики между школой и вузом [39].

Возможным вариантом решения проблемы является введение факультативных занятий и элективных курсов по математике для старшеклассников, цель которого: дополнение и углубление содержания базового и профильного курсов математики, удовлетворение познавательных интересов школьников, развитие аналитического мышления, формирование мировоззрения и воспитание личностных качеств средствами углубленного изучения математики [2]. При разработке содержания, выборе форм и методов работы с обучающимися необходимо учитывать «психолого-педагогические особенности, типы мышления, склонности и способности школьников» [44].

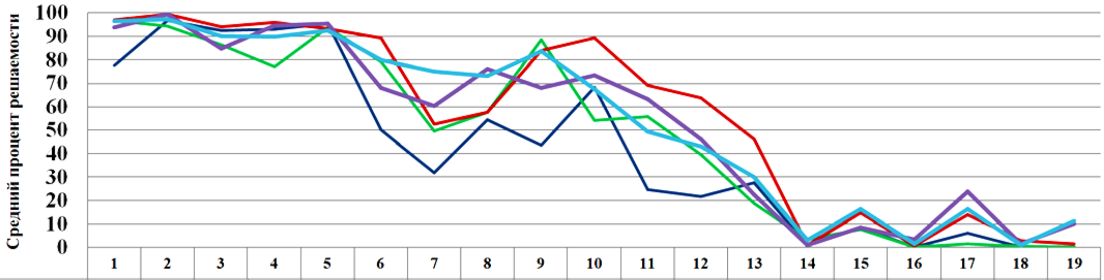
Таким образом, анализ работ, посвященных исследованию результатов входного тестирования первокурсников, проводимого в МГТУ им. Н. Э. Баумана (авторы исследования – Е.А. Власова, М.Н. Меженная, В.С. Попов), Астраханском государственном университете (М.А. Степкина, И.А. Байгушева), ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева (М.А. Кейв, В.С. Кобычева, М.Б. Шашкина) на техническом, экономическом, педагогическом направлениях подготовки, показал, что знания большинства студентов поверхностны и имеются значительные пробелы в математической подготовке. Кроме того, многие «вчерашние» выпускники не владеют в достаточной мере методами познавательной деятельности, не приучены работать самостоятельно и плохо мотивированы на учебу. Между тем преемственность в обучении математике является необходимым условием прочного усвоения материала, а ее отсутствие говорит о невозможности качественного освоения дисциплин математического цикла в вузе.

1.2. Дефициты математической подготовки обучающихся по результатам итоговой государственной аттестации

Государственная итоговая аттестация (ГИА) — обязательный экзамен, завершающий освоение основных образовательных программ основного и среднего общего образования в РФ. ГИА проводится в нескольких формах: в форме основного государственного экзамена (ОГЭ) и в форме единого государственного экзамена (ЕГЭ) для обучающихся 9 и 11 классов соответственно, в форме государственного выпускного экзамена (ГВЭ) и в форме, устанавливаемой органами исполнительной власти субъектов РФ, осуществляющими государственное управление в сфере образования (ОИВ) [34, 35]. Дефициты математической подготовки обучающихся будем выявлять по результатам ГИА, проводимой в формах ОГЭ и ЕГЭ, так как они являются наиболее распространенными.

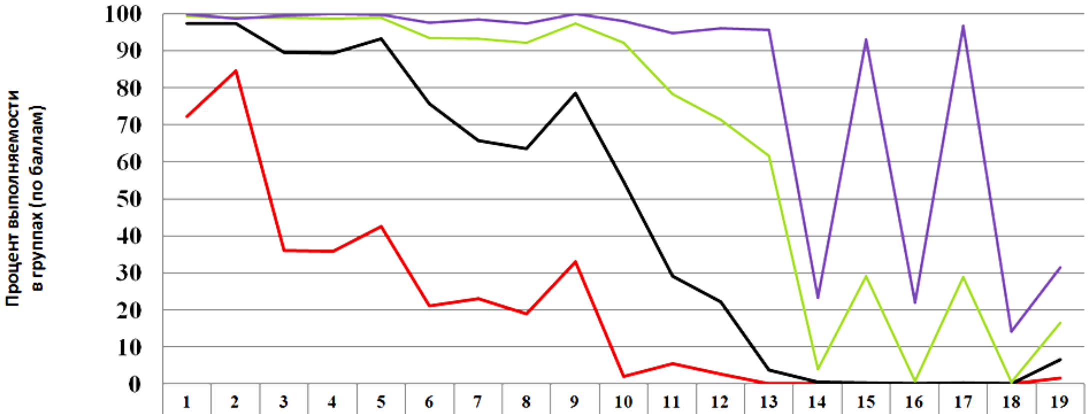
Первая апробация ЕГЭ как новой формы сдачи экзаменов, прошла в 2001 г. в некоторых регионах Р.Ф. по математике и другим учебным дисциплинам. В 2009 г. ЕГЭ по математике становится обязательным выпускным экзаменом за среднюю школу, а также вступительным экзаменом в вузы, что отразилось на структуре и содержании контрольно-измерительных материалов (КИМ). Как и ранее, проверялись основные знания и умения обучающихся по основным аспектам математической подготовки, регламентированных обязательным стандартом, однако теперь выпускной экзамен за среднюю школу стал проводиться не по курсу алгебры и началам анализа, а по курсу математики основной и средней школы. В 2015 г. экзамен разделили на базовый и профильный уровни с возможностью выбора одного или двух уровней, а с 2019 г. обучающимся разрешили выбор только одного из них [39]. В 2022 г. экзаменационные модели профильного и базового ЕГЭ претерпели некоторые изменения в связи с переходом «на проведение ГИА в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС)», изменением «качественного состава участников ЕГЭ» обоих уровней, а также смещением «акцентов в требованиях вузах к математической подготовке абитуриентов» [51]. Однако оценить результативность этих изменений можно будет только после проведения экзаменов.

На рис. 1 представлены результаты ЕГЭ по математике профильного уровня за последние 5 лет в Красноярском крае, они сопоставимы с результатами ЕГЭ по России. Традиционно низкую решаемость имеют задания (по версии ЕГЭ 2021 г.): 12 (базовые навыки исследования функции с помощью производной), 11 (умение составлять и исследовать простейшие математические модели – решать текстовые задачи), 10 (использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни), 8 (основы стереометрии), 7 (базовые представления о геометрическом смысле производной) из части с кратким ответом. Несколько улучшились показатели решения заданий 13, 14, 15, требующие развернутого ответа – 29,93%, 3,07% и 16,28% соответственно, однако все еще остаются на очень низком уровне (особенно это касается стереометрической задачи). С заданием 19 справилось на 1,52% выпускников больше, чем в прошлом году (однако в группе выпускников, выполнивших работу на 81-100 баллов, решаемость составила 31,44%, а в 2020 г. была на 9,48% больше). Отмечается ярко выраженная отрицательная динамика в выполнении экономической задачи – ее решаемость ухудшилась на 7,35 %, Также снизилась (и без того катастрофически низкая) решаемость заданий 16, 18 [26].



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2017	77,7	96,69	92,47	92,98	95,27	50,17	31,83	54,47	43,66	68,37	24,64	21,78	27,47	0,98	8,48	0,1	6,05	0,06	0,05
2018	96,77	94,3	86,44	77,16	93,74	79,24	49,72	57,72	88,47	54,14	55,87	39,42	18,78	3,29	7,53	0,18	1,49	0,32	0,12
2019	97,04	99,34	94,08	95,89	93,26	89,31	52,47	57,67	83,88	89,31	69,14	63,82	46,22	1,07	14,72	0,66	14,14	2,92	1,48
2020	93,79	99,51	84,69	94,57	95,47	68,02	60,3	75,85	67,87	73,24	63,11	46,29	22,58	0,92	8,39	3,25	23,79	1,45	9,9
2021	96,58	97,21	90,08	89,92	92,42	79,89	74,87	73,07	83,71	67,39	49,29	43,12	29,93	3,07	16,28	1,6	16,44	1,06	11,42

***Рисунок 1** – Динамика результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) за последние 5 лет*



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
до 26	72,2	84,6	36,1	35,9	42,5	21,1	22,9	18,9	32,9	2	5,59	2,79	0,1	0	0	0	0	0	1,55
от 27 до 60	97,3	97,3	89,5	89,3	93,2	75,6	65,6	63,6	78,5	54,6	29,0	22,1	3,72	0,43	0,33	0	0,32	0	6,68
от 61 до 80	99,3	98,9	98,8	98,6	98,8	93,4	93,3	92,1	97,3	92,1	78,3	71,3	61,6	4	29,0	0,75	28,9	0,58	16,5
от 81 до 100	100	98,7	99,5	100	99,7	97,6	98,5	97,4	100	98,0	94,6	95,9	95,5	23,3	93,0	22,0	96,6	14,1	31,4

***Рисунок 2** – Процент решаемости заданий среди учащихся, имеющих различный уровень математической подготовки*

Примечательно, что участники экзамена из группы со слабой подготовкой получают 1 балл чаще за 19 задание, чем за решение тригонометрического уравнения (задание 13), это свидетельствует о неосвоении основной программы по математике у выпускников, обладающих достаточными для этого математическими способностями. По-прежнему даже в самой подготовленной по группе обучающихся «требуется повышение качества геометрической подготовки» (рис. 2) [52].

В 2004–2013 годах на добровольной основе проводилась апробация ГИА для выпускников 9-х классов. В 2014 г. она стала обязательной и появилось понятие «ОГЭ». С тех пор структура КИМ ОГЭ по математике и характер проведения экзамена существенно изменились. Начиная с 2014 года к модулю «Алгебра», добавились модули «Геометрия» и «Реальная математика». Увеличилось количество заданий. Значительно возрос объем повторяемого материала, включающего математику 5–6 классов, алгебру и геометрию, изменились требования к сдаче экзамена [32].

В экзаменационной работе 2021 г. был изменен порядок заданий в соответствии с тематикой и сложностью, убрано выделение блоков «Алгебра» и «Геометрия», включен блок практико-ориентированных задач. Объединены задания на преобразования алгебраических (ранее – задание 13) и числовых выражений (ранее – задание 8) объединены в одно задание на преобразование выражений на позиции 8 в КИМ, что связано с смещением приоритетов в пользу задач, проверяющих умение применять математические знания в различных ситуациях. По этой же причине задание на работу с последовательностями и прогрессиями (ранее – задание 12, в настоящий момент задание 14 в КИМ) приобрело практическую направленность [25]. На рис. 3 представлены результаты выполнения отдельных заданий ОГЭ 2021 г. по математике (Красноярский край).

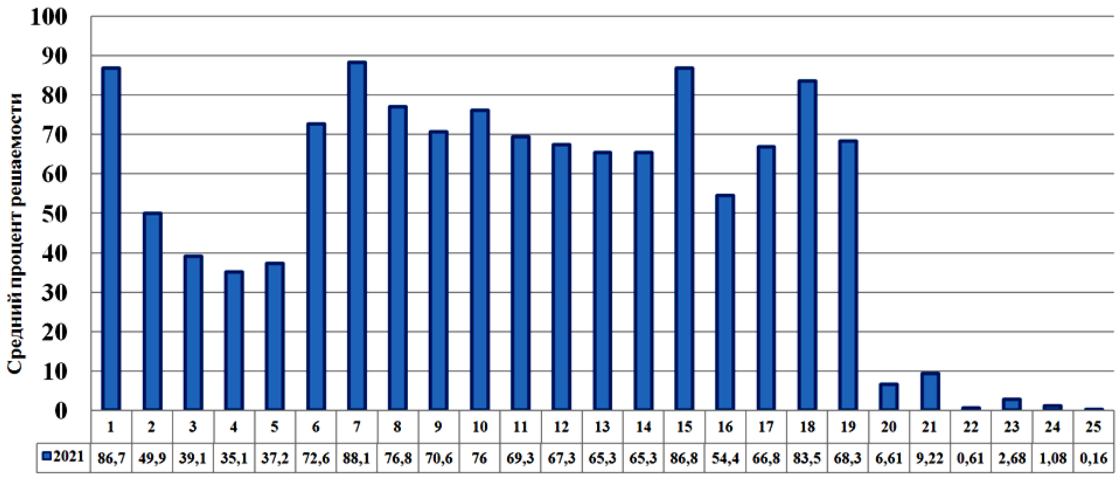


***Рисунок 3** – Выполняемость отдельных заданий ОГЭ по математике 2021 г*

Хороший показатель успешности решения (80% и выше) наблюдается у заданий 7, 15, 18 базового уровня, проверяющих умение работать с числовыми неравенствами; находить различные элементы выпуклых многоугольников;

длины отрезков (медиан, биссектрис и пр.), тригонометрические функции от острого угла и вычислять площади геометрических фигур, изображенных на клетчатой решетке. При этом значительно ниже уровень выполнения 16, 17 и 19 задач, включающих работу с элементами окружности (54,4%), площадями фигур (66,8%) и оценкой геометрических высказываний (68,3%). Большие затруднения у обучающихся вызвали 2-4 задачи практического содержания, решаемые метематическими средствами, их средняя выполняемость колеблется от 35 до 50 %. Ошибки, допущенные при выполнении данных заданий, говорят о слабых вычислительных навыках и неумении работать с текстом, неверном прочтении условия задачи, причем списать их на дистанционное обучение вряд ли получится, так как «данные умения формируются не в последние один-два года обучения» [25 , с. 10]. Решаемость первого задания на работу с текстом составила 86,78%, что также свидетельствует о слабых навыках смыслового чтения. Низкий процент выполнения и у заданий 13 и 14 – неравенства и задачи на прогрессии соответственно, 11 (графики функций) и 12 (расчеты по формулам).

Обратим внимание, что не так много участников экзамена приступают к решению заданий второй части, еще меньше экзаменуемых получают за них максимальный балл. На сегодняшний обучающиеся ставят в приоритет получение оценки (или баллов, если речь о профильном ЕГЭ) за экзамен, но никак не приобретение знаний по предмету и его успешное освоение. Для получения отметки «отлично» на ОГЭ по математике достаточно 22 баллов (из которых не менее 2-х получены за простейшие задачи по геометрии), в результате к решению заданий высокого уровня сложности (22 по алгебре и 25 по геометрии) мало кто готовится, поэтому выполняемость этих заданий составляет 17,3% и 5,93% соответственно в категории хорошо подготовленных(!) выпускников [25]. Решаемость задач повышенного уровня сложности также объективно оставляет желать лучшего. С ЕГЭ ситуация та же. Для поступления в среднестатистический бюджетный технический вуз вполне хватит 70 баллов по математике, а это верно выполненные задания с кратким ответом и одно, например, 13 (по версии 2021 г.) – с развернутым. Обучающиеся не мотивированы на решение сложных заданий второй части, и тем более не настроены решать задания, не имеющие прямой связи с ЕГЭ (ОГЭ) [18].

Как показывает практика, наиболее трудными сюжетными линиями из школьного курса математики для выпускников являются «построение, чтение и осуществления действий с функциями и их графиками», а также «выполнение действий с геометрическими фигурами, координатами и векторами» [49, 323]. На базовом уровне работать с функциями и читать графики научились 69,34% сдающих ОГЭ по математике, при этом с заданием высокого уровня сложности, предусматривающим построение графика функции, содержащей переменную под знаком модуля, и нахождение значения параметра, удовлетворяющего описанным условиям, справились менее 1% процента сдающих экзамен. Решаемость заданий на физический и геометрический смысл производной, на применение производной к исследованию функций на ЕГЭ по профильной математике ежегодно находится в диапазоне 30-75% (см. рис. 1). Традиционно труднее всего выпускникам дается задание на нахождения минимума (максимума) некоторой функции на отрезке, его выполняемость за последние 5 лет выросла с 21% до 43%, но все еще остается очень низкой. Задачу высокого уровня сложности с параметром решили всего 1,06% выпускников (см. рис. 1). Ее решаемость за последние 5 лет не превысила 3%.

Снижение учебной нагрузки по математике в основной и старшей школе, введение ФГОС и отмена устного экзамена по геометрии внесли немалые изменения в процесс геометрической подготовки школьников. Объединение алгебры и геометрии в один предмет повлекло поверхностное изучение геометрических разделов. Обучающиеся перестали доказывать теоремы, не получили прочных навыков по построению качественного чертежа, без которых нельзя научиться решать достаточно содержательные геометрические задачи [13]. В результате решаемость стереометрической и планиметрической задач (повышенного уровня сложности) на ЕГЭ по математике ежегодно колеблются в диапазоне 0 до 3,1 %. Примерно такая ситуация наблюдается с геометрическими задачами второй части ОГЭ. Их решаемость не превышает 3%.

Линия неравенств является не менее важной и занимает одну из ведущих позиций в школьном курсе математики (ШКМ), но также вызывает немалые сложности у обучающихся, как в курсе основной, так и старшей школы. Выпускники не владеют основными методами решения неравенств, не умеют выполнять равносильные преобразования, не учитывают область определения функции, входящей в неравенство, формально расставляют знаки на промежутках при использовании метода интервалов, что свидетельствует о несформированности у обучающихся четкого понимание взаимосвязи методов решений неравенств с функциональной линией.

Резюмируя, можно заключить, что наиболее трудными (как и в случае написания входного тестирования) для выпускников оказываются геометрическая и функциональная содержательные линии школьного курса математики, а также линия неравенств. Многие обучающиеся не владеют базовыми геометрическими понятиями и формулами, основными методами решения неравенств, не видят разницы между системой и совокупностью, не соблюдают правила равносильных преобразований, не умеют работать с функциями, находить их области определения и значений, читать графики, пользоваться свойствами.

1.3. Требования к качеству математической подготовки выпускников школ в контексте продолжения образования в вузе

В настоящий момент вузы сталкиваются с трудностями, связанными с низким уровнем математической подготовки абитуриентов, не развитостью у них метапредметных навыков, отсутствием мотивации к учебе. Поверхностные знания по ШКМ, не сформированность культуры доказательства математических утверждений, логического мышления, работы со специальной литературой, не умение работать самостоятельно свидетельствуют о крайне низком уровне математической культуры выпускников. Обеспечить в таких условиях качественное усвоение высшей математики крайне сложно, в большинстве случаев и вовсе невозможно.

Готовность выпускников школ к продолжению образования в вузе определим интегративное личностное образование, включающее в себя мотивационный, деятельностный и когнитивный компоненты. Под *мотивационным компонентом* будем подразумевать систему побуждений, стимулирующих умственную активность обучающегося и определяющих направленность и характер учебной деятельности. Когнитивный компонент определим как совокупность знаний по программе математике школьного курса и истории математики, а *деятельностный* – как способность личности осуществлять деятельность на основе полученных знаний, иначе говоря, уметь использовать полученную теоретическую базу на практике. Более полная структура готовности выпускников школ к продолжению математического образования в вузе приведена в диссертационном исследовании О.А. Табиновой, где выделены пять необходимых компонентов [42].

На основе выше упомянутого диссертационного исследования, анализа программ вступительных испытаний по математике, проводимых в техническом (МГТУ им. Н.Э. Баумана), технологическом (СибГУ им. М.Ф. Решетнева), педагогическом (КГПУ им. В.П. Астафьева) университетах, в Астраханском государственном университете (АГУ), и анализа рабочих образовательных программ вышеперечисленных университетов для студентов 1 курса – бакалавров, направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (профиль – Математическое и компьютерное моделирование), 01.03.04 Прикладная математика (профиль — Математическое моделирование в экономике и технике), 44.03.01 Педагогическое образование (профиль Математика), 38.03.01 Экономика (профиль Финансы и кредит) соответственно, были выделены основные требования, предъявляемые к уровню математической подготовки абитуриентов. Результаты представлены в таблице (табл. 1).

Таблица 1

Требования университетов к математической подготовке абитуриентов

Компонент	Критерии	Показатели
Мотивационный	Наличие у обучающихся мотивации и эмоционального отношения к учению	➢ Имеет потребность продолжать математическое образование ➢ Осознает важность выбранной профессии и получает ее осознано ➢ Владеет самодисциплиной и навыками самообразования ➢ Понимает роль математики в науке и в повседневной жизни ➢ Получает удовлетворение от учебы, получения новых знаний ➢ Видит значимость результата своего труда
Когнитивный	Математические знания и знания в области методов, способов и приёмов учебного предмета «Математика», необходимые для обучения в вузе	Абитуриент должен **знать**: ➢ Значение математической науки для решения различных задач, возникающих в теории и практике ➢ Историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии ➢ Универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности ➢ Основные математические понятия и факты *Арифметика, алгебра и начала анализа* (числа, числовые множества, числовые выражения; выражения с переменными, ФСУ, степень с натуральным, рациональным и действительным показателем, корень *n-й* степени и его свойства, одночлены и многочлены; уравнения, корни уравнений, неравенства, множество решений неравенства, равносильные уравнения/неравенства; арифметическая и геометрическая прогрессии; понятие функции, способы задания, свойства, определение производной, ее геометрический смысл, экстремум функции, первообразная и т.д.) *Геометрия* (прямая, луч, отрезок, ломанная; угол, величина угла, центральные и вписанные углы; окружность, круг и их элементы; векторы, операции над векторами; треугольник, элементы треугольника, виды; четырехугольники и их элементы; подобие, подобные фигуры, отношение площадей подобных фигур; плоскость, параллельные и пересекающиеся плоскости; параллельность прямой и плоскости; угол прямой с плоскостью, перпендикуляр к плоскости; двугранные углы; многогранники; фигуры вращения и т.д.) ➢ Основные формулы и теоремы *Алгебра и начала анализа* (формулы корней квадратного уравнения; разложение квадратного трехчлена на линейные множители; основные теоремы о равносильности уравнений и неравенств; формулы приведения, основные тригонометрические тождества, формулы суммы и разности аргументов, двойного угла, понижения степени суммы и разности тригонометрических функций; логарифм произведения, степени, частного; теорема Безу, схема Горнера и т.д.). *Геометрия* (свойства точек, равноудаленных от концов отрезка; признаки параллельности прямых; сумма углов треугольника, сумма внешних углов выпуклого многоугольника; признаки параллелограмма; вписанные и

		описанные окружности, касательная к окружности и ее свойство; формулы площадей треугольника, параллелограмма, трапеции, ромба, круга, кругового сектора, длины окружности; формулы расстояния между точками, уравнение окружности; признаки параллельности прямой и плоскости, плоскостей, теорема о перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярность двух плоскостей; теорема о трех перпендикулярах; формулы площади поверхности и объема призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и т.д.) ➢ Основные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений, неравенств и их систем ➢ Система функциональных понятий, функциональный язык и символику ➢ Вероятностный характер различных процессов окружающего мира
Деятельностный	Умения и навыки, регулятивные и познавательные УУД, необходимые для обучения в вузе	Абитуриент должен **уметь:** ➢ Логически мыслить, правильно и последовательно выстраивать аргументацию, ясно и отчѐтливо выражать свои мысли ➢ Использовать приобретѐнные знания и умения в практической деятельности, повседневной жизни и при решении задач из смежных дисциплин ➢ Выполнять вычисления и преобразования ➢ Решать уравнения, неравенства, их системы ➢ Выполнять действия с функциями ➢ Выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами ➢ Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости ➢ Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии - при решении геометрических задач ➢ Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение на число) и пользоваться свойствами этих операций ➢ Строить и исследовать математические модели ➢ Понимать математические средства наглядности: графики, диаграммы и т.п. для интерпретации и аргументации ➢ Работать с информацией (поиск, анализ, синтез, аналогия и пр.), пользоваться справочной литературой Абитуриент должен **владеть:** ➢ навыками решения математических задач, базирующимися на знании программы средней школы по разделам: алгебра, уравнения и неравенства, функции, начала математического анализа, геометрия, элементы комбинаторики и теории вероятности ➢ навыками использования математических методов в практической деятельности; математической терминологией и культурой, функциональным языком и символикой

Однако фактический уровень знаний студентов первых курсов этим требованиям не соответствует, что явно видно из анализа результатов ЕГЭ и входного теста первокурсников. К причинам, способствующим углублению разрыва между уровнем подготовки выпускников школ и потребностями вузов, можно отнести: смещение приоритетов в пользу сдачи экзамена, а не полноценного изучения различных разделов школьной программы; недостаточность и неоднородность математической подготовки абитуриентов; формальный характер приобретенных знаний и навыков; неразвитость абстрактного и логического мышления; отсутствие навыков графического представления физических процессов; взаимную несогласованность школьной и вузовской программ; недостаточную квалификацию учителей и их перегруженность; нежелание некоторых университетов составлять план занятий в соответствии с реальным уровнем математической подготовки абитуриентов и ликвидировать имеющиеся пробелы [22, 42]. В результате студенты оказываются не готовы к продуктивной деятельности, им трудно дается поиск нетривиальных решений, они не умеют искать информацию по нужной теме и самостоятельно формулировать выводы, плохо владеют математической символикой и не ориентируются в терминологии, не могут устанавливать причинно-следственные связи, что сильно тормозит процесс обучения [9].

Нельзя сказать, что преемственность в учебно-познавательной деятельности студентов и школьников не реализуется совершенно. Но связь между средним общим и высшим уровнями образования недостаточно тесная. Помимо результатов ЕГЭ и входных диагностических работ об этом свидетельствует показатель отчислений, который особенно высок в технических университетах. На рис. 4 приведена статистика отчислений из Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) по дорожной и автомеханической специальностям, где сравниваются показатели поступивших на первый курс и отчисленных со всех курсов этих факультетов за учебный год [37].

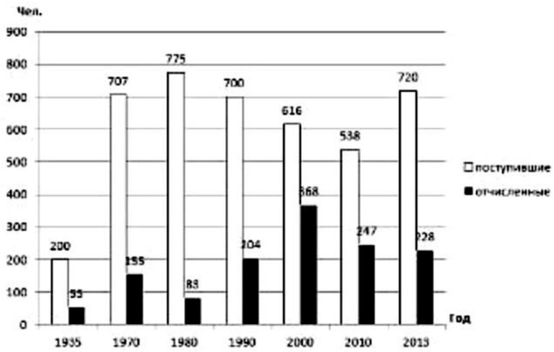


Рисунок 4 *– Количество поступивших на первый курс (ДСФ и АТФ) и отчисленных со всех курсов на этих факультетах за учебный год*

До 2000-х годов рекордный уровень отчислений наблюдался в 1935 г., отчислено было 27,5% от поступивших на первый курс. В 2000 г. отчисления со всех курсов по отношению к поступившим на первый курс составили почти 60%, в 2019г. – приблизительно 32%. При этом все показатели отчислений в 21 веке значительно превышают показатели 20 века. Заметим, что Федеральный закон защищает права обучающихся и дает возможность ликвидировать образовавшиеся задолженности в течение года, более того, в связи с «подушевым» бюджетным финансированием университетам и вовсе не выгодно отчислять отстающих студентов. Но, как правило, это лишь усугубляет положение, так как с каждым семестром количество академических задолженностей накапливается. Проведенное в этом же университете анкетирование среди студентов первого курса (2018г. набора) после первой сессии показало, что большинство обучающихся выбрали данное учебное заведение осознанно. При этом к причинам сложностей наибольшее число опрошенных относят «слабую школьную подготовку» и «неумение учиться самостоятельно» (!) [37, с. 58].

Обобщая сказанное в данном параграфе, отметим, что традиционная полная средняя школа, в недавнем прошлом обеспечивающая качественную подготовку обучающихся к поступлению в университет, фактически утратила эту важнейшую функцию. А значит для сокращения большой дистанции, находящейся между требованиями вузов и реальным уровнем знаний «вчерашних» выпускников, необходимо прибегнуть к дополнительным формам обучения.

Выводы по первой главе

Материал главы 1, где оценивались входное тестирование первокурсников и результаты ГИА за 9-11 класс, и анализ требований университетов к математической подготовке абитуриентов, позволяет сделать вывод, что преемственность в содержании математического образования находится на очень низком уровне. Из необходимого перечня образовательных результатов у выпускников в подавляющем большинстве сформированы лишь навыки осуществлять вычисления и преобразования рациональных (реже – иррациональных) выражений, решать несложные алгебраические уравнения и простейшие неравенства. Крайне плохо усвоены функциональная и геометрическая линии ШКМ, линия неравенств также находится у выпускников на низком уровне освоения. Применение математического аппарата для решения заданий практической направленности все еще остается непосильной задачей для многих обучающихся.

Основные причины падения качества школьного математического образования и разрыва требований между школой и вузом обусловлены: шаблонностью мышления обучающихся, привычкой выполнять действия по алгоритму, неправильно расставленными приоритетами (сдача экзамена является лишь формой оценивания знаний выпускников, а потому априори не может быть целью изучения математики), приводящими к поверхностному усвоению школьной программы, большим объемом учебного материала и нехваткой академических часов для его изучения.

Все перечисленное свидетельствует о необходимости принятия дополнительных мер. Введение курса по выбору видится оптимальным решением, позволяющим ликвидировать пробелы по элементарной математике, улучшить мыслительные способности, развить творческое и логическое мышления, а также навыки самостоятельной, учебно-познавательной и исследовательской деятельности, открыть новые грани математики, не производя при этом радикальных изменений.

ГЛАВА 2. Курс по выбору «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики» для подготовки обучающихся к продолжению математического образования в вузе

Как было отмечено ранее, большинство выпускников общеобразовательных учреждений не готово к дальнейшему изучению математических дисциплин в вузах. Для решения этой проблемы необходимо, во-первых, ликвидировать пробелы по ШКМ (особенно это касается функциональной и геометрической содержательных линий школьной программы, а также линии неравенств). Во-вторых, сделать акцент на задачах нестандартного плана различного уровня сложности, не подразумевающих применения определенных алгоритмов, для решения которых придется максимально активизировать мыслительные способности. В-третьих, способствовать развитию у обучающихся не только предметных, но и личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД. Организация подготовки обучающихся 10-11 классов к продолжению математического образования в вузе реализуется в процессе прохождения курса по выбору, при разработке программы и содержания которого были учтены вышеперечисленные требования.

2.1. Программа, содержание и методические идеи курса

В настоящее время в большинстве общеобразовательных учреждений РФ реализуется система специализированной подготовки (профильного обучения) старшеклассников, ориентированная (как указано в этой же концепции), на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся [33]. Ведется немало споров о нужности и уместности данного направления модернизации образования, как в научных кругах, так и в обществе, среди людей, имеющих прямое или косвенное отношение к образовательному процессу. Говорить о преимуществах и недостатках концепции можно долго, но факт остается фактом: традиционный принцип «учить всех всему» сменился другим, задача которого «учить всех по запросам». Поэтому проектирование и реализация элективных курсов и курсов по выбору в системе профильной подготовки школьников является актуальной темой для современной школы и важнейшей частью обеспечения введения профильного обучения [20].

В литературе встречается несколько типологий элективных курсов и курсов по выбору. По разрешаемым задачам (они подразделяются на следующие виды: пробные, ориентационные, общекультурные и углубляющие), по связи с предметом, по содержанию [15]. Надо отметить, что с введением ФГОС помимо развития предметных результатов у математического образования появились новые задачи: развитие метапредметных и личностных результатов. В действительности же массовая образовательная практика не справляется даже с формированием предметного результата, о чем говорят результаты ГИА и тестирования, проводимого на первом курсе в разных университетах нашей страны [49, 323]. Количества часов, отводимого на изучение математики в обычной общеобразовательной школе, хватает лишь на *поверхностное* изучение школьной программы, о более тщательном изучении ШКМ и выходе за рамки программы не идет и речи. Поэтому было принято решение разработать предметно-ориентированный курс по выбору «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики». При составлении программы и содержания использовались справочник С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко и учебное пособие З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева по теме «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств», книга для учителя Генкин Г.З «Геометрические решения негеометрических задач», книга Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С и учебное пособие Далингер В.А. «Задачи с параметрами» [21, 29, 7, 8, 10].

Пояснительная записка

Данный курс дополняет и углубляет и систематизирует знания, полученные по программе базового уровня. Его практическим результатом является подготовка обучающихся к продолжению математического образования в вузе и сдаче ЕГЭ. Уравнения и неравенства, решаемые необычными для школьника методами, а также задачи с параметрами развивают логическое и творческое мышление, позволяют научиться видеть наиболее рациональный ход решения задачи, рассуждать в процессе решения, использовать различные комбинации известных методов и приемов, а не заученные алгоритмы. Поэтому можно утверждать, что использование таких заданий в процессе обучения математике способствует формированию и развитию логических, знаково-символьных и исследовательских универсальных учебных действий УУД.

Рабочая программа курса рассчитана на два года обучения (68 академических часа, из них 15 отводятся на зачеты, промежуточные контрольные работы, входное тестирование и итоговый контроль) в 10 и 11 классах, форма обучения занятий — очная. В конце каждого из модулей проходит зачет в устной форме и контрольная работа. К изучению следующего модуля допускаются обучающиеся, успешно сдавшие промежуточный контроль. Отметка за прохождение курса определяется как среднее арифметическое результатов сдачи шести зачетов, контрольных работ, итогового контроля, индивидуальных домашних работ и оценок, выставленных за активность на занятии. Округление среднего арифметического текущих отметок осуществляется по правилам математического округления. Итоговый контроль проводится в два этапа, на первом этапе обучающимся необходимо выполнить творческое задание (по материалам модулей №2-5 составить и решить две задачи с параметром и одну — на решение неравенства или системы неравенств). На втором этапе нужно будет обменяться заданиями в парах и решить их. Если у учеников имеются сложности с темами: «Абсолютная величина, ее алгебраическое определение и геометрический смысл, свойства», «Основные тригонометрические тождества, формулы приведения. Формулы сложения, двойного угла и т.д.», «Свойства корня n-й степени, преобразование иррациональных выражений», «Логарифмы. Понятие, свойства» то настоятельно рекомендуется провести по ним обзорные лекции.

При необходимости возможен переход на очно-заочную форму обучения с применением дистанционных образовательных технологий. Наиболее известные в настоящий момент бесплатные системы для организации дистанционного обучения: Moodle, MoodleCloud (облачный хостинг), Edmodo, Google Classroom. Если учитель не имеет необходимых технических компетенций в области веб-разработки, то можно сделать выбор, например, в пользу последней платформы. Ее функционал во многом уступает Moodle, но в целом для создания качественного онлайн-курса предложенных разработчиками опций достаточно. Имеется возможность проводить видеовстречи, публиковать различный материал (текстовые документы, презентации, опросы и т.д.), планировать занятия и отслеживать успеваемость, организовывать групповою работу обучающихся [1].

Цели курса. *Предметные:* повышение у обучающихся уровня математической культуры, необходимой для сдачи экзаменов, поступления в вуз, продолжения математического образования и дальнейшей профессиональной деятельности. *Метапредметные:* развитие у школьников познавательного интереса, умения выполнять мыслительные операции: анализ, синтез, сравнение, обобщение. *Личностные:* развитие у старшеклассников таких личностных свойств и качеств, как настойчивость и самостоятельность.

Задачи курса. *Образовательные:* систематизировать, обобщить и расширить математическое представление обучающихся о приемах и методах решения уравнений, неравенств, их систем и совокупностей, а также углубить эти знания с помощью решения задач с параметрами; повысить уровень развития математического и логического мышления. *Воспитательные:* сформировать опыт познавательной и творческой деятельности старшеклассников с помощью исследовательской деятельности при решении нестандартных задач. *Развивающие:* развить у обучающихся навыки самостоятельной работы, умение четко и ясно излагать мысли, аргументировать ответы.

Требования к подготовке обучающихся

Должны уметь решать задачи обязательного и повышенного уровня сложности, правильно использовать математическую символику и терминологию, не иметь глобальных пробелов по школьной программе. Приветствуются заинтересованность и любовь к предмету, желание узнать больше, чем дается в ШКМ, наличие исследовательских умений и навыков.

Планируемые результаты освоения учебного курса

Предметные результаты обучения включают в себя: умение решать уравнения, неравенства, их системы и совокупности методами, входящими в программу курса математики основной и средней школы; знание основных элементарные функций, их свойств, графиков; успешное владение различными методами решения уравнений и неравенств; знание основных методов и приемов решения задач с параметрами, умение их комбинировать и успешно применять на практике; развитое логическое мышление, позволяющее видеть несколько вариантов решения задачи и выбирать наиболее рациональный; владение научной терминологией, ключевыми понятиями функциональной линии, линии уравнений и неравенств.

Личностные результаты обучения включают в себя: сформированность ответственного отношения к учебе, способности и готовности к саморазвитию, научно-техническому творчеству, заинтересованность в научных знаниях; сформированость культуры устной и письменной речи.

Метапредметные результаты обучения представлены тремя группами УУД.

Регулятивные УУД включают в себя: умение применять уже известные формы и методы решения математической проблемы и формулировать собственные; определять пути достижения цели, выбирать оптимальный из них; планировать время, составлять индивидуальный образовательный маршрут и корректировать его при необходимости; отбирать соответствующие средства реализации решения математических задач и объективно оценивать результативность и качество своей работы.

Познавательные УУД включают в себя: умение критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций; искать и находить обобщенные способы решения задач; строить умозаключения в процессе работы с математическими задачами и предоставлять связные, логические цепи доказательств; приводить причинно-следственный анализ понятий, суждений и математических законов; находить выход из проблемно-противоречивых ситуаций.

Коммуникативные УУД включают в себя: умение формулировать и отстаивать свою позицию; приводить контраргументы; развернуто логично и точно излагать свою точку зрения.

Результат обучения: сформированность у выпускников знаний, умений и навыков, необходимых для решения сложных, нестандартных задач и продолжения математического образования в вузе.

Программа курса структурирована в самостоятельные организационно-методические блоки (модули), в конце каждого из которых предусмотрен контроль в виде зачета и контрольной работы (табл. 2). Модули можно комбинировать или при необходимости менять местами.

Таблица 2

Учебно-методический план

№ урока	Тема	Часы
1	Входное тестирование	1
Модуль 1. Общие сведения об уравнениях, неравенствах и элементарных функциях (6ч)		
1	Основные элементарные функции, их свойства, графики	2
2	Линия уравнений, неравенств и их систем в ШКМ	3
3	Диагностика типичных ошибок при решении уравнений и неравенств	1
Зачет №1		
Модуль 2. Исследование функций (7ч)		
1	Исследование функции без помощи производной	2

2	Применение производной к исследованию функций	3
3	Использование производной для решения уравнений, неравенств и их систем	2
Зачет №2		
Модуль 3. Функциональные методы решения уравнений и неравенств (10ч)		
1	Использование области определения функции	1
2	Использование свойства ограниченности функции	2
3	Использование свойства монотонности функции	2
4	Использование свойств четности функции	2
5	Использование свойства периодичности функции	2
6	Решение некоторых уравнений и неравенств сведением их к решению систем уравнений или неравенств относительно той же неизвестной	1
Зачет №3		
Модуль 4. Интеграция алгебраических и геометрических методов в решении задач (10ч)		
1	Основные сведения по геометрии	2,5
2	Координаты и векторы	2,5
3	Уравнения фигур на плоскости и в пространстве	1
4	Геометрические методы решения негеометрических задач	4
Зачет №4		
Модуль 5. Некоторые методы решения задач с параметрами (14ч)		
1	Теоретическая часть	1
2	Аналитические методы	4
3	Графические методы решения задач с параметрами	3
4	Функциональные методы решения задач с параметрами	3
5	Примеры использования комбинации методов	2
6	Решение одной задачи с параметром различными способами	1
Зачет №5		
Модуль 6. Дополнительная информация (6ч)		
1	Нестандартные методы решения уравнений	2

2	Симметрические и возвратные уравнения	2
3	Метод рационализации (замены множителей)	2
Зачет №6		
Итоговый контроль		

Итого часов: 68, из них 15 отводятся: на зачеты (6 ч), промежуточные контрольные работы (6 ч), входное тестирование (1 ч) и итоговый контроль (2 ч).

Содержание курса

Входное тестирование. Цель: ознакомить обучающихся с программой курса и оценить уровень их знаний для внесения соответствующих корректировок в тематический план.

Модуль 1 (6 ч)

Основные элементарные функции, их свойства, графики (2ч). Сведения об основных элементарных функциях и правилах преобразований их графиков

Линия уравнений, неравенств и их систем в ШКМ (3ч). Повторение основных понятий: «уравнение», «неравенство», «корень уравнения», «решение неравенства», «тождественные преобразования», «равносильные преобразования», «система», «совокупность» и др.

Стандартные методы решения уравнений: введение новой переменной, использование суперпозиции функций, разложение на множители (вынесение общего множителя за скобки, использование ФСУ, метода группировки, разложение квадратного трехчлена на множители, свойства его коэффициентов, схема Горнера, деление «уголком»), выделение полного квадрата, использование обратной теоремы Виета, графиков функций, потенцирования и логарифмирования, понижение степени тригонометрических функций. Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Основные методы решения неравенств: графический, функционально-графический, алгебраический (обобщенный метод интервалов, метод равносильных переходов, замена переменной). Аналитическое и графическое решение систем и совокупностей уравнений и неравенств.

Типичные ошибки при решении уравнений и неравенств (1ч). Рассмотрение реальных экзаменационных работ выпускников прошлых лет с ЕГЭ по профильной математике.

Модуль 2 (7 ч)

Исследование функций без помощи производной (2ч). Свойства монотонных функций. Нахождение экстремумов функции, ее наименьшего и наибольшего значений без нахождения производной. Построение графика дробно-рациональной функции элементарными методами по материалам пособия Шахмейстера А.Х., статьи Кобычевой В.С., Шашкиной М.Б. «Построение графика дробно-рациональной функции и асимптотические кривые» (на усмотрение учителя) [48, 17].

Применение производной к исследованию функций (3ч). Понятие производной. Некоторые теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях. Исследование функций с помощью производной и построение схематичного графика.

Использование производной для решения уравнений, неравенств и их систем (2ч). Примеры решения уравнений, неравенств и их систем с применением исследования функции.

Модуль 3 (10 ч)

Использование области определения функции (1ч). Учет области допустимых значений переменной решении уравнений и неравенств.

Использование свойства ограниченности функции (2ч). Учет областей значения функций при решении уравнений и неравенств. Использование неотрицательности функции. Метод мажорант (оценки).

Использование свойства монотонности функции (2ч). Определение монотонной функции. Использование возрастания и убывания функций при решении уравнений и неравенств (основные теоремы).

Использование свойств четности функции (2ч). Определение четности и нечетности функции. Примеры использования при решении уравнений и неравенств.

Использование свойства периодичности функции (2ч). Определение периодичности функций. Примеры использования при решении уравнений и неравенств.

Решение некоторых уравнений и неравенств сведением их к решению систем уравнений или неравенств относительно той же неизвестной (1ч). Рассмотрение уравнений и неравенств вида: $f_1^2(x)+f_2^2(x)+\ldots+f_n^2(x)=0$, $f_1^2(x)+f_2^2(x)+\ldots+f_n^2(x)>0$, $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=0$, $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|>0$, $\sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta x)=\pm1$, $A[\sin(\alpha x)]^m+B[\cos(\beta x)]^n=\pm(|A|+|B|)$.

Модуль 4 (10 ч)

Основные сведения по геометрии (2,5 ч). Планиметрия: треугольник, параллелограмм, прямоугольник ромб, квадрат, трапеция; окружности, их свойства, вписанная и описанная окружности, выпуклые многоугольники. Стереометрия: многогранники и тела вращения. Доказательства некоторых фактов (на усмотрение учителя)

Координаты и векторы (2,5 ч). Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Координаты середины отрезка. Формулы для нахождения расстояния между точками, расстояния от точки до прямой. Примеры применения. Вектор, модуль вектора, сложение и умножение векторов на число. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам. Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Уравнения фигур на плоскости и в пространстве(1 ч). Уравнения окружности, прямой, ромба, плоскости, сферы. Пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, пересечение двух сфер.

Геометрическое решение негеометрических задач (4 ч). Нахождение решения иррациональных уравнений, систем уравнений, отыскание наименьшего/наибольшего значения функции, вычисление значений тригонометрических выражений и выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, доказательство тригонометрических тождеств геометрическим способом. Решение задач с параметрами с применением знаний геометрии.

Модуль 5 (14 ч)

Теоретическая часть (1 ч). Вводное занятие. Типы задач с параметрами. Примеры.

Аналитические методы (4 ч). Способы применения стандартных операций при решении уравнений (неравенств) без параметра. Метод изменения ролей переменных.

Графические приемы решения при решении задач с параметрами (3 ч). Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами. Метод областей. Построение графиков в системе координат *AOX* (метод изменения ролей переменных). + понадобятся некоторые сведения из модуля 4.

Функциональные методы решения задач с параметрами (3 ч). Использование свойств функций (монотонность, ограниченность, четность и пр.) при решении задач с параметрами. Данные задания будут идентичны заданиям из модуля №3, но задача осложнится наличием параметра.

Примеры использования комбинации методов (2 ч). Рассмотреть задачу, решать которую удобнее всего с использованием комбинации методов. Например, используя аналитический подход с применением функционально-графической наглядности.

Решение одной задачи с параметрами различными способами (1 ч). На примере одной задачи показать возможность решения разными способами (желательно, рассмотреть 3-5 вариантов).

Модуль 6 (6 ч)

Нестандартные методы решения уравнений (2 ч). Методы нахождения корней квадратного уравнения. Метод введения параметра (или метод параметризации). Метод неопределенных коэффициентов.

Симметрические и возвратные уравнения (2 ч). Симметрические уравнения 3-й и 4-й степеней, возвратные уравнения. Общий вид таких уравнений и примеры решений.

Метод рационализации (2 ч). Доказательство метода рационализации. Формулы и примеры использования.

Методические идеи курса

Данный курс ориентирован в первую очередь на углубление и расширение школьных знаний, умений и способов деятельности, а также систематизацию и обобщение основных методов и приемов решения математических задач. Смещение фокуса с подготовки к ЕГЭ на полноценное изучение математики позволит не только улучшить результаты на ГИА-11, но и значительно облегчит дальнейшее обучение в университете. Перечислим основные методические идеи:

— Реализация дифференцированного подхода в обучении за счет использования разноуровневых заданий.

— Организация поисково-исследовательской деятельности обучающихся с помощью мотивационных задач, в основе решения которых лежит индуктивный, дедуктивный методы, их сочетание, аналитико-синтетический метод или же комбинация различных методов.

— Использование наиболее эффективных приемов обучения математике: решение одной задачи различными способами, составление задач обучающимися на этапе закрепления материала, включение задач на поиск ошибок с заведомо неверными рассуждениями или противоречивыми данным, решение задач на скорость

— Использование компьютерных программ (таких как Desmos, GeoGebra и аналогичных по функционалу) для улучшения визуализации задач

— Включение элементов истории математики в процессе обучения для расширения кругозора и повышения концентрации внимания обучающихся. Проведение зачетов предусмотрено в устной и в письменной формах, что положительно влияет на развитие математической речи школьников

— Методические рекомендации по реализации курса в электронной образовательной среде с применением дистанционных технологий.

Таким образом, предложенный предметно-ориентированный курс позволит систематизировать, расширить и углубить полученные ранее знания о методах решения уравнений, неравенств и задач с параметрами. Будет способствовать развитию интеллекта, логического мышления, творческих навыков и аналитических способностей — чрезвычайно важных аспектов для успешного продолжения математического образования в вузе.

2.2. Описание модулей курса и фрагменты занятий

Изучить и понять математику можно только при решении трудных, нестандартных, интересных задач и большого количества практики. Однако чтобы решать такие задачи, нужно владеть хорошей математической базой, которую имеет далеко не каждый ученик общеобразовательной школы (даже при наличие склонностей к данному предмету). Поэтому сначала необходимо ликвидировать пробелы по программе ШКМ и постепенно увеличивать сложность заданий.

Модуль 1 рассчитан на повторение графиков основных элементарных функций (большинство из которых обучающиеся узнали еще на этапе получения основного общего образования) и методов решения уравнений, неравенств и их систем, представленных в ШКМ. Уделено внимание критериям оценивания заданий №12, 14 ЕГЭ по профильной математике.

Модуль 2 посвящен исследованию поведения функций. Прочное его усвоение необходимо для работы со следующим модулем. Обучающиеся должны научиться выполнять схематичное построение графиков сложных функций элементарными методами (в случаях, когда это возможно) и с использованием аппарата дифференциального исчисления. Видеть наиболее оптимальный и быстрый способ исследования функции. Например, чтобы определить поведение функции $y = x^5 + x^3 + x + \sqrt[5]{2x-1}$ нет необходимости находить производную. Достаточно вспомнить, что функция, являющаяся суммой возрастающих функций, есть функция возрастающая.

В этом блоке следует начать рассматривать примеры решения уравнений, неравенств и их систем с применением исследования функций, а также (если позволяет уровень обучающихся) некоторые задачи с параметрами.

Модуль 3 (как и модули 1, 2) позволяет ученикам отследить тесную двустороннюю связь линии неравенств с функциональной линией. Знание свойств элементарных функций, их графиков, владение аппаратом исследования функций зачастую значительно облегчают процесс решения уравнений, неравенств и их систем, а владение содержанием линии уравнений и неравенств необходимо для исследования функций.

Модуль 4 подразумевает работу с геометрическими понятиями и методами. Его главная задача: показать обучающимся тесную взаимосвязь между алгеброй, математическим анализом и геометрией, важность изучения данных дисциплин. Интеграция алгебраического и геометрического методов предполагает решение одной задачи с помощью геометрического и алгебраического подхода, решение алгебраической задачи геометрическим методом (и наоборот).

В модуле 5 обучающиеся знакомятся с различными методами решения задач с параметрами, учатся их комбинировать. Как известно, такого рода задания не имеют конкретного алгоритма, поэтому успешное их решение требует хорошей математической подготовки. Конечно, иногда по формулировке условия задачи можно догадаться, каким способом ее решать. К примеру, если нужно «найти такое значение параметра a, при котором уравнение (неравенство, система) выполняется для всех значений x», то выбрав «выгодную точку» и подставив ее в уравнение (неравенство, систему), можно найти значения параметра a. Останется лишь выполнить проверку и убедится, что при найденных значении действительно выполняется требование задания. Аналогично, если требуется найти единственное решение, и видно, что уравнение/неравенство (возможно входящие в систему) являются симметричными, то логично, что $x=0$ должен быть единственным корнем, и после подстановки получивших при этом условии значений параметра a можно ответить на вопрос задачи и т.д. Бывает, что сама задача «указывает» на метод решения. Так уравнение/неравенство, содержащее большое количество модулей или разнородные функции вероятнее всего будет решаться функциональным методом с использованием свойств монотонности и ограниченности соответственно. Но в подавляющем большинстве в задачах с параметрами необходимо осуществлять исследование, и именно поэтому они являются мощнейшим инструментом для формирования мышления и математической культуры обучающихся. При проведении занятий настоятельно рекомендуем как можно чаще обращаться к методическому приему, заключающемуся в решении задачи различными способами. Он поможет развить интеллект, углубить знания в области математики, научиться видеть различные варианты решения проблемы и выбирать оптимальный. Этот прием хорошо известен своей эффективностью, но на практике применяется не так часто, что, как правило, связано с нехваткой учебного времени. Не лишним будет предоставить участникам курса задания с заведомо ошибочными рассуждениями в решении и дать возможность пересмотреть ход решения, увидеть ошибки и предоставить свое.

Модуль 6 содержит информацию, которую, как правило, не дают в курсе математики основной школы. Речь здесь идет о нестандартных методах решения уравнений и неравенств, симметрических и возвратных уравнениях, методе рационализации.

Фрагменты некоторых занятий

Пример проведения заключительного занятия модуля 1 по теме «Диагностика типичных ошибок при решении уравнений и неравенств», рассчитанного на два часа. Цель занятия: закрепление изученного ранее материала по линии уравнений и неравенств ШКМ и изучение критериев оценивания заданий № 12, 14 ЕГЭ по математике профильного уровня.

Предусмотрена работа в группах/парах (зависимости от количества). Предлагается проводить в три этапа.

На первом этапе обучающимся необходимо решить задания № 13, 15 (по версии 2021г.) из ЕГЭ по математике и сверить ответы в группе. На втором этапе ученикам выдаются работы выпускников прошлых лет с этими же уравнениями и неравенствами, к которым прилагаются критерии оценивая. Найти их можно в сборнике «Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2021 года» [5]. В пособии представлены работы участников ГИА-11 за 2016-2019 гг. Обучающимся предлагается оценить полученные работы согласно критериям и заполнить таблицу (табл. 3). Таблица заполняется на отдельном листе, где должен быть написан номер группы и перечислены фамилии участников.

Таблица 3

Проверка выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ

№ задания	Оценка	Комментарий (если баллы снижены)	Оценка эксперта

На третьем этапе ученики сравнивают свои оценки с оценками экспертов, также проверявших эти работы, заполняется четвертая колонка таблицы. Обучающиеся оценивают работу всех участников группы. Листы с оценками и таблицей сдаются учителю.

Ранее отмечалось, что данный курс нацелен главным образом не на подготовку обучающихся к ЕГЭ, а на повышение их математической культуры. Тем не менее, на заключительном занятии к первому блоку обучающимся было бы полезно ознакомиться с критериями оценивания данных заданий на ГИА-11 и самим побыть в роли экспертов.

Рассмотрим один из вариантов проведения этапов актуализации знаний, применения знаний в новой ситуации и рефлексии на семинарском занятии, предполагающем систематизацию и обобщение знаний и умений учеников по теме «Использование производной для решения уравнений, неравенств и их систем» модуля 2. Цель занятия: расширение и углубление знаний обучающихся по заявленной теме.

В основе ФГОС полного (как и среднего) общего образования находится системно-деятельностный подход, призванный обеспечить преемственность в обучении математике на различных этапах образования. В его реализации, несомненно, поможет использование «поисково-исследовательских», «проблемных» задач, которым в настоящий момент в общеобразовательных школах не отводится должного внимания. Между тем в вузах преобладает исследовательский метод обучения, поэтому для организации преемственности обучения «школа-вуз» в школьный курс математики необходимо включать такие задачи как можно чаще [15].

Приведем пример поисково-исследовательской задачи, в основе которой лежит индуктивный подход. Обучающимся необходимо выполнить действия последовательно:

а). Найти производную функции: $y = x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

б). Выяснить, при каких значениях x функция y будет убывать (добавлено еще одно действие).

в). Выяснить, при каких значениях параметра a функция $y = x^3 - 5x^2 + ax + 1$ будет возрастать при любом действительном значении x? (введен параметр a).

г). Доказать, что функция $y = -x\sqrt{x^4 + a^2}$ убывает при любом значении параметра a (введен параметр a, изменены условие и тип задачи: требуется доказать, а не выяснить).

Затем ученики объединяются в группы и выполняют два задания:

1. Сколько решений имеет уравнение: $5x + \sin x = 4$?

Одно, так как функция $y = 5x + \sin x - 4$ монотонна (возрастает) $\forall x \in R$.

2. Установить число корней уравнения $\frac{4}{3}x^3 = ax + 1$ в зависимости от параметра.

Решать данную задачу можно по-разному. Можно рассмотреть параметр a как функцию от x, предварительно убедившись, что $x \neq 0 \quad \forall x \in R$. Найти точки минимума / максимума и построить график функции и дать ответ на вопрос. Другой способ решения аналогичен решению рассмотренной ранее задачи, и, скорее всего, школьники выберут его. Обучающиеся рассматривают функцию $f(x)=\frac{4}{3}x^3-ax-1$, находят производную, считая параметр константой, и далее делают выводы, что если $a \leq 0$, то $f(x)$ является строго возрастающей функцией и, соответственно, имеет единственный корень. При $a>0$ рассматриваемая функция перестает быть монотонной, и требуется более тщательное исследование. Здесь может потребоваться помощь учителя. Решая уравнение $f'(x)=0$, получим, что точка максимума $x=-\frac{\sqrt{a}}{2}$, а точка минимума $x=\frac{\sqrt{a}}{2}$, тогда $f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=-\frac{1}{3}\sqrt{a^3}-1$ (причем заметим, что $f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)<0$, так как $a>0$), $f\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{a^3}-1$. Если $\frac{1}{3}\sqrt{a^3}-1<0$ (т.е. $a<\sqrt[3]{9}$), то исходное уравнение имеет единственный корень. При $\frac{1}{3}\sqrt{a^3}-1=0$, (т.е. $a=\sqrt[3]{9}$) - два корня. При $\frac{1}{3}\sqrt{a^3}-1>0$ (т.е. $a>\sqrt[3]{9}$) - три корня. На рисунке 5 приведена графическая интерпретация, выполненная в программе desmos.

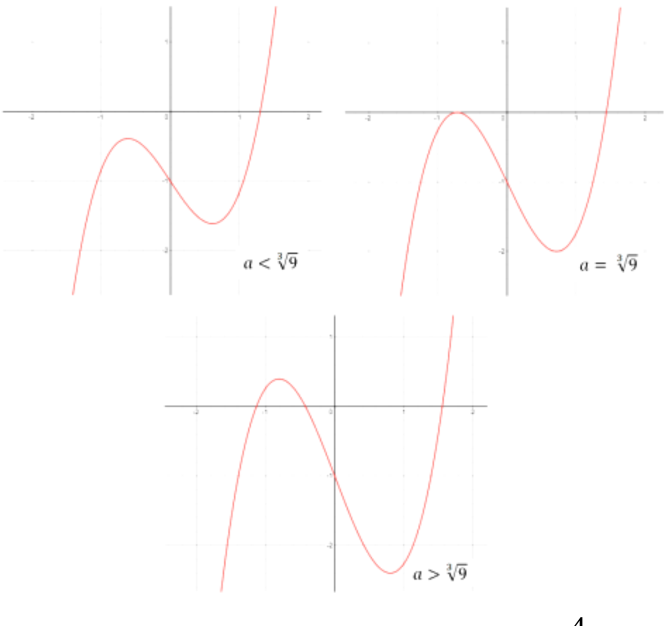


Рисунок 5 *– Вид функции* $f(x)=\frac{4}{3}x^3-ax-1$ *в зависимости от параметра*

Затем каждой команде нужно составить задачу, соответствующую следующим требованиям:

а) условие задачи должно быть корректным

б) для решения данной задачи нужно будет ввести некоторую функцию и исследовать ее поведение

в) в условии задачи фигурирует параметр t.

г) задача решается в несколько действий.

Задачу необходимо выписать на отдельный лист разборчивым почерком и подписать фамилии участников.

Далее группы обмениваются заданиями, решают их, решение выписывается на отдельный лист и отдается составителям на проверку. По результатам проверки каждая команда получает отметку. Если группа не смогла решить задание, то команде составителей присуждается дополнительный балл (в случае корректности условия) за сложность задумки. В конце занятия листы с задачами, решением и выставленными отметками отдаются учителю. Учитель выставляет отметку каждому ученику согласно трем пунктам: оценивает соответствие придуманной задачи требованиям, правильность группового решения и учитывает дополнительные баллы.

На этапе рефлексии можно воспользоваться приемом «Три М». Обучающиеся должны будут перечислить 1) три наиболее интересных и запомнившихся на занятии момента; 2) три наиболее трудных момента; 3) три непонравившихся момента (если таковые были).

Предпочтительно, чтобы задачи с параметрами как можно чаще использовались при изучении различных тем (особенно в качестве обобщения и систематизации ранее изученного материала), а не шли отдельным разделом. В таком случае, во-первых, усвоение изучаемых тем будет на более высоком уровне, во-вторых, у обучающихся улучшатся навыки логического и творческого мышления, в-третьих, они перестанут бояться такого рода задач.

Пример проведения занятия по теме «Использование свойства ограниченности функций при решении уравнений и неравенств (в частности, метод оценки или мажорант)» модуля 3, основная дидактическая цель которого – освоение обучающимися новых методов решения уравнений и неравенств. Рассмотрим этапы актуализации и первичного усвоения новых знаний.

Ученикам необходимо найти области значения следующих функций:

1. $y = \dfrac{1-2\sin^2(5x)}{4}$

$[-1.25;1.25]$

2. $y = \dfrac{1}{8\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{8\sqrt{2}}\cos x + 2$

$[1.875;2.125]$

3. $y = 5^{\sqrt{x^4+|x|+1}} - 1$

$[4;+\infty)$

4. $y = 1 + tg^2 x$

$[1;+\infty)$

5. $y = \ln\left(2^{x^2+1} - \dfrac{1}{5}\right)$

$[1.8;+\infty)$

6. $y = 3\sin x + 4\cos x$

$[-5;5]$

Далее (после обсуждения предыдущего задания) обучающимся нужно решить графически уравнение:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1$$

- Как выполнить это задание? (Рассмотреть функции $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ и $g(x) = \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + 1$, построить их графики, найти абсциссу точки пересечения).

- Что вы можете сказать про область значений этих функций? (Первая функция ограничена и $E(f) = [-1;1]$, вторая ограничена снизу и $E(g) = [1;+\infty)$).

- Можно ли было решить данное уравнение аналитически? (да, оценив область значений каждой из функций)

Решить уравнение, не выполняя графических построений:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2^{1-(x-4)^2}$$

Пусть $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$, $g(x)=2^{1-(x-4)^2}$; $D(f)=[4;+\infty)$ и $E(f)=[2;+\infty)$; $E(g)=(0;2]$. Если решение уравнения существует, то найти его можно из системы уравнений

$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2\\ 2^{1-(x-4)^2}=2\end{cases}$ Отсюда получаем, что $x=4$.

- Сформулируйте основную идею данного метода и запишите ее в общем виде. Что у вас получилось?

Пусть дано уравнение $f(x)=g(x)$. Если существует такое M, что для любого x из области определения имеем $f(x)\geq(\leq)M$ и $g(x)\leq(\geq)M$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}f(x)=M,\\ g(x)=M.\end{cases}$$

- Такое число M называют мажорантной, отсюда и название метода - метод мажорант. Упрощенное название, которые вы также можете встретить - метод мини-максов.

На этапе записи математических утверждений и теорем можно начинать знакомить обучающихся с основными кванторами, использующимися в математическом анализе, логике и других разделах высшей математики. Это, во-первых, может сократить записи формулировок, во-вторых, позволит будущим студентам привыкнуть к математической символике, а значит, поможет быстрее адаптироваться в вузе.

Объединившись в пары, решите неравенства:

1. $5\sin x-12\cos x\geq 3^{|4x-1|}+15$

Ответ: $x\in\varnothing$, т.к. $E(f)=[-13;13]$, где $f(x)=5\sin x-12\cos x$, и $E(g)=[16;+\infty)$, где $g(x)=3^{|4x-1|}+15$.

2. $\arcsin x \le \left| x + \dfrac{1}{x} \right|$

Ответ: $[-1;1]$. Пусть $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \left| x + \dfrac{1}{x} \right|$. Заметим, что $D(f) = [-1;1]$ и $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right]$. Оценим область значений функции g. В данном случае удобнее всего воспользоваться неравенством о средних, получим $\left| x + \dfrac{1}{x} \right| \ge 2$. Значит, множество решений неравенства соответствует области определения первой функции.

Для учеников, имеющих более высокий уровень подготовки, можно дать задачи с параметрами уже на первом занятии, не дожидаясь урока обобщения: 1*. Найти все целые k, при которых уравнение: $\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} \right) = 1$ имеет решения. Найдите эти решения. Ответ: решения есть только при $k = 4n$, где $n \in Z$. Корень уравнения в таком случае: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. Решение задачи сводится к рассмотрению системы: $\begin{cases} \cos kx = 1, \\ 1 + 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} \right) = 1. \end{cases}$

2*. Найдите все a, при которых множество значений функции $f(x) = \left(\dfrac{1}{3} \right)^{x^2 + 2x + a^2 - 3a}$ не пересекается с промежутком $[3;+\infty)$. Ответ: $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$. Идея решения заключается в оценке области значений функции $f(x)$, для ее нахождения удобно воспользоваться свойством степеней и представить $\left(\dfrac{1}{3} \right)^{x^2 + 2x + a^2 - 3a}$ виде $\left(\dfrac{1}{3} \right)^{(x+1)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{3} \right)^{a^2 - 3a - 1}$, где $0 < \left(\dfrac{1}{3} \right)^{(x+1)^2} \le 1$, тогда задача сводится к решению неравенства $\left(\dfrac{1}{3} \right)^{a^2 - 3a - 1} < 3$. Область значений также можно оценить с помощью производной.

Два последних задания взяты из сборника В.А. Далингера «Задачи с параметрами» [10].

- Как определить, что решать предложенное уравнение или неравенство необходимо с использованием оценки областей значений функции? Есть ли какой-то признак, помогающий выбрать данный метод? (В составе уравнения или неравенства присутствуют разнородные функции).

Рассмотрим возможный вариант проведения занятия по теме «Нестандартные методы решения квадратных уравнений» модуля 5. Данный урок не предполагает трудоемких вычислений и сложных математических выкладок. Его основная цель: повышение у учеников интереса к новым методам. Задача учителя помочь обучающимся увидеть, что мир математики не ограничивается несколькими стандартными формулами (о выведении которых многие и не задумывались), и практически любая задача может быть решена по-разному. Данное занятие, в отличие от предыдущих, будет понятно даже восьмикласснику. Также его можно использовать как вводный урок к курсу.

- С помощью применения каких способов можно решить данное квадратное уравнение $0,5x^2 - 5x + 4,5 = 0$?

Вариантов решения, естественно, много. Можно воспользоваться формулами корней квадратного трехчлена, обратной теоремой Виета (умножив левую и правую части уравнения на 2), методом коэффициентов (сумма старшего коэффициента и свободного члена равна по модулю коэффициенту при x и отличается от него знаком, следовательно, корни: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4,5}{0,5} = 9$), разложением на множители (представить данное уравнение в виде $0,5x^2 - 0,5x - 4,5x + 4,5 = 0$ и воспользоваться методом группировки). Также решить это уравнение можно выделив полный квадрат (предварительно умножив левую и правую части уравнения на 2) или воспользовавшись графическим методом (построить графики $f(x) = 0,5x^2$ и $g(x) = 5x - 4,5$ и найти абсциссы пересечения).

- Однако есть и другие способы нахождения корней квадратного уравнения. Некоторые из них очень старые и хорошо забытые. Попробуем решить предложенное уравнение с применением менее распространенных методов.

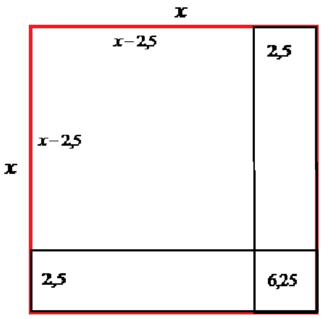
Способ 1. Геометрический.

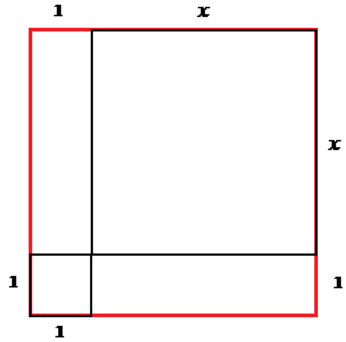
Вы знаете, что геометрия возникла значительно раньше алгебры. Основателем последней является Аль-Хорезми – ученый, совершавший открытия IXв. н.э, в то время как необходимость решения линейных и квадратных уравнений возникла еще до н.э., т.е. до появления алгебраических методов, и в большинстве была связана с нахождением площади земельных участков [45]. В Древнем Вавилоне квадратные уравнения решались геометрически, например, Вавилонские математики использовали метод дополнения квадрата для решения уравнений с положительными корнями [6].

Попробуем этим методом решить уравнение $x^2-5x+4=0$.
Какую формулу вам напоминает x^2 с точки зрения геометрии? (Площадь квадрата со стороной x). А $5x$? (Площадь прямоугольника со сторонами 5 и x или, например, двух прямоугольников со сторонами $2{,}5$ и x). Остановимся на последнем варианте. Что означает выражение x^2-5x? (из площади квадрата со стороной x вычли площади двух прямоугольников). Чему тогда равна площадь квадрата со стороной $x-2{,}5$? ($x^2-5x+6{,}25$, так как площадь квадрата со стороной $2{,}5$ отняли дважды) см. рис. 6. Чему равно значение этого выражения? (Мы знаем, что $x^2-5x=-4$, а значит, $x^2-5x+6{,}25=-4+6{,}25$). Найдите его корни (выделив полный квадрат, получим $(x-2{,}5)^2=2{,}25$. Тогда $x_1=4,\ \ x_2=-1$. С точки зрения геометрического смысла подходит лишь $x=4$).

Объединившись в пары, геометрически найдите корни уравнения: $4x^2+8x-5=0$

Возможный вариант решения рис. 7. Сделаем данное уравнение приведенным, получим $x^2+2x-\frac{5}{4}=0$. Рассуждая аналогично, приходим к тому, что выражение x^2+2x равно площади квадрата со стороной $(x+1)^2$, если прибавить к ней площадь квадрата со стороной 1. Т.е. $(x+1)^2=\frac{5}{4}+1$.Таким образом, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2{,}5$. По смыслу подходит только первый корень.





Рисунки 6 и 7: *Графическая интерпретация уравнений* $x^2-5x+4=0$ *и* $4x^2+8x-5=0$ *соответственно*

Способ 2. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Положим, что некоторая пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1;0)$, $D(x_2;0)$ ось ординат – $A(0;1)$, $C\left(0;\frac{c}{a}\right)$ см. рис 8. Найдите координаты центра этой окружности. (Центр окружности будет расположен на пересечении отрезков SK и SF, являющихся серединными перпендикулярами хорд BD и AC. Тогда абсцисса центра будет находиться по формуле $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, а ордината по формуле $\frac{1+\frac{c}{a}}{2}=\frac{a+c}{2a}$).

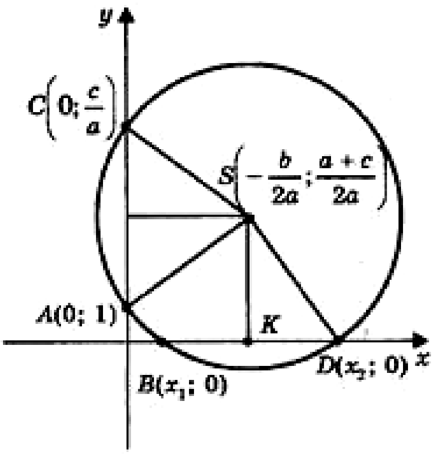


Рисунок 8 – *Способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки*

Определите центр окружности для уравнения $0{,}5x^2-5x+4{,}5=0$. $O(5;5)$. Проведите окружность в с центров в точке O и радиусом OA (см.рис. 9). Какие корни будет иметь уравнение? Ответ: $x_1=1$, $x_2=9$

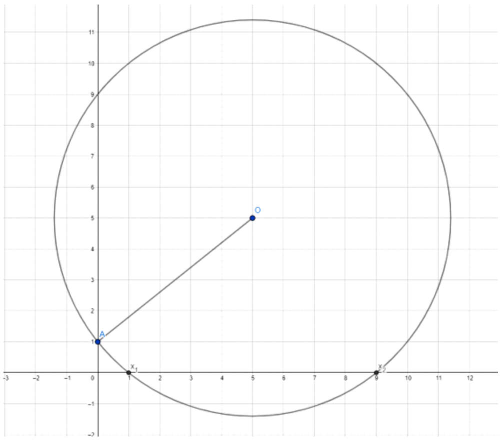


Рисунок 9 *– Графическая интерпретация уравнения* $0{,}5x^2 - 5x + 4{,}5 = 0$

Далее обучающие решают самостоятельно этим же способом находят корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$

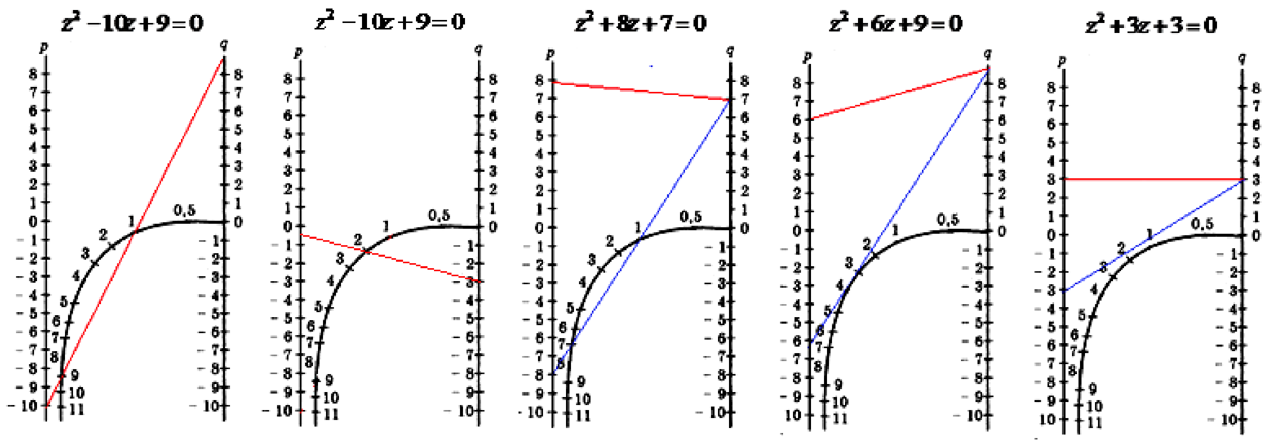
Способ 3. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

- Встречались ли вы когда-нибудь с данным понятием? Что оно означает?

Номограмму можно охарактеризовать как чертеж, изображающий функциональную зависимость между несколькими переменными величинами, позволяющее с помощью простых геометрических операций (в нашем случае – прикладывания линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений.

- Перед вами на столах находится скан номограммы, предназначенной для нахождения корней квадратного уравнения, из книги В.М. Брадиса «Четырехзначные математические таблицы» 2010 года переиздания $z^2 + pz + q = 0$ (см. *приложение В*) [3]. Обучающиеся в парах пробуют решить уравнение $0{,}5z^2 - 5z + 4{,}5 = 0$, ориентируясь на предложенный пример. Обратите внимание, что номограмма дает значения положительных корней уравнения.

Решение. Преобразуем предложенное уравнение к виду $z^2 - 10z + 9 = 0$, т.е. $p = -10$ и $q = 9$. Соединяем прямой соответствующие значения для p и q (см.рис 10), получаем корни данного уравнения: $z_1 = 1$, и $z_2 = 9$.



Рисунки 10–14*: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы*

- А что делать, если коэффициенты выходят за пределы шкалы? (Выслушать предположения обучающихся).

- Выйти из положения можно с использованием подстановки $z = kt$. Каким должно быть k? (Берется с расчетом, чтобы выполнялись неравенства $-12{,}6 \le \frac{p}{k} \le 12{,}6,\ \ -12{,}6 \le \frac{q}{k^2} \le 12{,}6$ в связи с ограниченной размерностью шкалы).

- Какой вид примет исходное уравнение? ($t^2 + \frac{p}{k}t + \frac{q}{k^2} = 0$). Например, в уравнении $z^2 - 4z - 192 = 0$ выполним замену $z = 8t$ и сделаем получившееся уравнение приведенным: $t^2 - 0{,}5t - 3 = 0$. Аналогичным соединяем прямой точки $p = -0.5$ и $q = -3$. Номограмма дает положительный корень $t_1 = 2$ (см. рис. 11) Отрицательный находим, вычитая известный корень из $-p$, получим $t_2 = -p - 2 = -1.5$. Тогда $z_1 = 16,\ z_2 = -12$.

- Рассмотрим еще три уравнения: а) $z^2 + 8z + 7 = 0$, б) $z^2 + 6z + 9 = 0$ и в) $z^2 + 3z + 3 = 0$

а). Соединив p и q, пресечения с кривой мы не получаем (см.рис 12). О чем это может говорить? (Положительных корней уравнение не имеет). Чтобы проверить уравнение на наличие отрицательных корней, сделаем замену $z = -t$ и попробуем найти корни уравнения $t^2 - pt + q = 0$. Что можно сказать про него? (Последнее уравнение имеет два положительных корня $t_1 = 1$ и $t_2 = 7$, а значит, исходное имеет два отрицательных $z_1 = -1$ и $z_2 = -7$)

б). Что можете сказать про это уравнение? (нет положительных корней, уравнение имеет два совпадающих отрицательных корня $z_1 = z_2 = -3$ см. рис 13) в). Имеет ли корни последнее уравнение? (Нет, см. рис 14).

Примеры для закрепления:

1. $4z^2 + 3z - 1 = 0$

2. $z^2 - 25z + 66$. Удобно сделать замену $z = 5t$

- Давайте разберемся, как была получена номограмма. Посмотрите на вспомогательный чертеж (см. рис. 15), AB и OB выражают некоторую зависимость от переменной z и параметра a: $AB = -\frac{z^2}{1+z}$, $OB = \frac{a}{1+z}$. $OE \perp OC \perp ED,\ Df \parallel OE \parallel AH$. Положим, что $OC = p,\ OE = a,\ ED = q$. Что вы можете сказать про треугольники CAH и CDF? (Они подобны по двум углам). Составьте отношения сходственных сторон этих треугольников с использованием введенных ранее обозначений и функций AB и OB. (Возможный вариант $\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}$. Подставляя, получим $\frac{(p-q)(1+z)}{p+pz+z^2} = 1+z$). Упростите, что получается? (Уравнение $z^2 + pz + q = 0$).

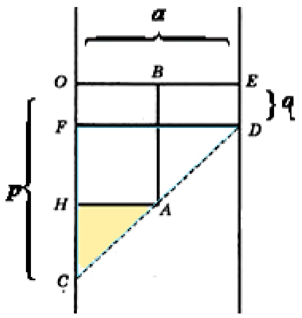


***Рисунок 15** – Построение номограммы*

- В чем недостаток рассмотренных на занятии методов?

Они рассчитаны в основном на нахождение целых корней, с рациональными корнями ситуация будет обстоять труднее. Найти иррациональные будет и вовсе невозможно.

Рефлексия:

1. Напишите, что нового вы узнали за урок.

2. Чем, на ваш взгляд, полезен материал?

3. Как вы думаете, для чего нужно изучать другие методы решения (подчас сильно уступающие традиционным)? Что это дает?

Рассмотрим один из вариантов проведения этапов первичного усвоения новых знаний и первичной проверки понимания по теме «Геометрические методы решения негеометрических задач» Модуля 4. Цель занятия: формирование у обучающихся представления о тесной связи между алгебраическими и геометрическими методами решения задач.

- Ранее, рассматривая возможные варианты решения квадратных уравнений, мы уже обращались к геометрическим методам. Продолжим это делать и сегодня. Рассмотрим задание 1: при каких значения параметра a уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений? (задача взята из учебного пособия В.А. Далингера) [10]. Попробуйте решить ее известными вам методами.

Скорее всего, на ум придет сначала метод интервалов. Так же ученики, вероятно, вспомнят о существовании графическо-функционального подхода, заключающегося в рассмотрении функций $f(x)=|x+3|$, $g(x)=a-|x-1|$ и исследовании их взаимного расположения, или построят график функции $a=|x+3|+|x-1|$ в системе координат AOX. Однако есть и геометрический подход.

- Как вы думаете, что может означать уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ с точки зрения геометрии? (Что есть некоторая точка $M(x)$ сумма расстояний от которой до точек $A(-3)$ и $B(1)$ равна a). Сделайте схематичный чертеж (рис. 16). Чему равна длина отрезка AB? (4).

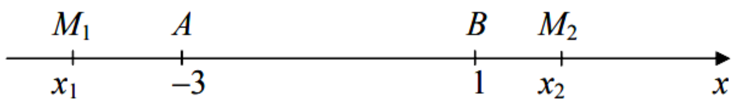


***Рисунок 16** – Геометрическая интерпретация к заданию 1*

- Подумайте, сколько решений может иметь данное уравнение в зависимости от параметра. Озвучьте свои предположения.

Ответ. При $a<4$ решений нет, так как не существует такой точки $M(x)$, расстояние от которой до точек A и B было бы меньше 4. Если точка находится внутри отрезка $M(x)$ или на его границах, то расстояние от нее до A

и B равно 4. Следовательно, при $a=4$ уравнение имеет бесконечного много решений. Если $a>4$, то всегда существуют две точки $M_1(x)$ и $M_2(x)$, лежащие вне отрезка и симметричные относительно его середины, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна a. Значит, в этом случае уравнение имеет два решения. Более того, одно решение уравнение иметь не может, так как если есть точка $M(x)$, сумма расстояний от которой до точек A и B равна a, то обязательно найдется и симметричная ей относительно середины отрезка AB.

- Какой из рассмотренных вариантов решения показался вам наиболее быстрым? Понятным? Наглядным?

- Определите, при каких значениях x функция $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$ принимает свое наименьшее значение (задание 2) [7].

Обучающиеся берут производную и получают очень громоздкое выражение.

- Можно ли решить задачу иначе? Посмотрите внимательно на первое слагаемое функции, что это может означать? (Нахождение гипотенузы по двум известным катетам в прямоугольном треугольнике). Второе слагаемое? (Нахождение неизвестной стороны по теореме косинусов в треугольнике со сторонами x, 3 и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\alpha=30^\circ$). Постройте графическое изображение к полученным результатам (один из вариантов см. рис. 17). Как найти $f_{наим}$? (На изображении наименьшему значению функции соответствует сторона AB, $f_{наим}=\min(AD+DB)=AB$). Вычислите ее длину (по теореме косинусов $AB=\sqrt{2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos120^\circ}=\sqrt{19}$).

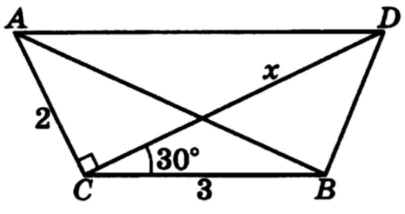


Рисунок 17 *– Геометрическая интерпретация к заданию 2*

- Попробуйте самостоятельно найти наименьшее значение функции $f(x,y,z)$, если $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$ и $x+y+z=8$ (задание 3) [7]. Ответ: 10. Решение представлено на рис. 18.

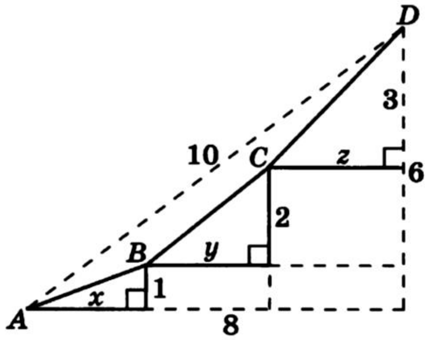


***Рисунок 18** – Геометрическая интерпретация к заданию 3*

- Следующая задача: зная, что $x^2+y^2=9$, $y^2+z^2=16$ и $y^2=xz$ для положительных значений, не вычисляя их, укажите значение выражения $xy+yz$ (задание 4) [7]. Есть ли возможность решить ее алгебраически?

Можно, решив систему и найдя конкретные значения x,y,z, подставить их в выражение. Однако этот метод не соответствует требованиям задачи.

- Условие $x>0, y>0, z>0$ позволяет интерпретировать задачу геометрически. Что напоминает уравнение $x^2+y^2=9$? Чем являются числа x, y и 3? (Обратную теорему Пифагора, катетами и гипотенузой соответственно в некотором треугольнике, назовем его ABD. Тоже можно сказать и про числа y, z и 4 в треугольнике CBD). Что разрешает утверждать третье уравнение системы? (Что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z, следовательно, по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC прямой). Выполните геометрическою интерпретацию (рис. 19) Как опираясь на эти факты найти значение выражения $xy+yz$?

$xy+yz=(x+z)y=2S_{ABC}=3\cdot 4=12$.

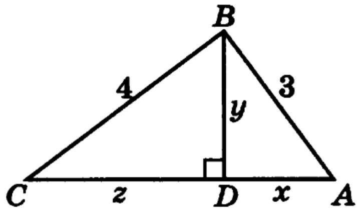


***Рисунок 19** – Геометрическая интерпретация к заданию 4*

- Объединитесь в группы, придумайте другие вопросы для данной системы (например, в каком отношении находятся числа x и y, z и y и т.д.).

Решите геометрически системы уравнений:

5. $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24 \end{cases}$

Ответ: $(10;6)$, $(10;8)$.

6. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5 \end{cases}$

Ответ: $(2;3)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$, $(2;-3)$.

7*. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

Ответ: $x=y=z=1$. Задача, в отличие от предыдущих, сводится к рассмотрению фигур в пространстве. Можно воспользоваться координатным или векторным методами.

8*. Решите систему уравнений с применением векторного метода:

$$\begin{cases} x\log_z y=2 \\ x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$.

9.Геометрически определите наибольшее значение данной функции $f(x)=\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$?

Ответ: $\sqrt{7}$.

Решение к предложенным заданиям приведено в книге для учителя Генкина Г.З. «Геометрические решения негеометрических задач» [7].

В данном случае оценивание обучающихся можно не производить, поскольку речь идет о групповой работе при изучении нового материала.

Пример обобщающего занятия «Урок одной задачи» по модулю 5 «Некоторые методы решения задач с параметрами». Цель: обобщение и систематизация знаний обучающихся по различным методам решения задач с параметрами.

За несколько дней до его проведения ученикам предлагается разделиться на 4/5 команд и решить задачу (возможный вариант будет указан ниже), причем необходимо, чтобы способы решения не повторялись. Группе нужно будет подготовить презентацию выбранного метода. На занятии случайным образом (с помощью жеребьевки) в каждой команде выбирается «эксперт», который объяснит все ходы решения. Соответственно, разбираться в деталях решения и быть готовым к его представлению придется каждому участнику группы. Команде присуждаются баллы: 1) за верное решение, 2) за устное выступление, 3) нахождение ошибок у команды соперников и их исправление.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Приведем один из возможных вариантов решения данной задачи, в основе которого заложена идея четности:

Заметим, что если $(x; y)$ является решением данной системы, то и $(y; x)$ также является решением. Более того, $(-x; -y)$ как и $(-y; -x)$ также будут являться решениями. Но по условию задачи необходимо, чтобы решений было всего два. Значит, надо, чтобы некоторые из перечисленных пар совпадали. Случай, когда $\begin{cases} x = -x = 0 \\ y = -y = 0 \end{cases}$, не подходит, так как первое уравнение системы будет иметь не более одного решения в зависимости от параметра a. Рассмотрим второй случай, когда $x = y$. $\begin{cases} 2x^2 = a^2 \\ x^2 = a^2 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 6 \end{array} \right.$ Выполнив проверку для обоих значений, получим, что подходит только $a = 6$. Третий случай. $x = -y$. $\begin{cases} 2x^2 = a^2 \\ -x^2 = a^2 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array} \right.$ Выполнив проверку при $a = 2$ убеждаемся, что исходная система имеет два решения. Ответ: $\{2; 6\}$.

На следующем этапе группам необходимо будет решить на скорость (выбрав наиболее удобный для себя метод) следующую задачу:

При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет два корня?

Один из вариантов решения. Обратим внимание, что x может принимать значения из промежутка $[0;2a]$, где a положительно, так как если $a<0$, то исходное уравнение не имеет смысла. А при $a=0$ уравнение имеет единственное решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}$ и исследуем ее с помощью производной.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{2a-x}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2a-x}}$$

Прировняв производную к нулю и расставив знаки для производной на числовой прямой, получим, что на промежутке $[0;a]$ f возрастает, а на $[a;2a]$ – убывает, $x=a$ является точкой максимума (см. рис. 20).

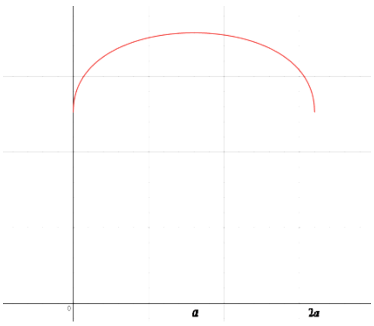


***Рисунок 20** – График функции* $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}$

Наименьшее значение функции $f(0)=f(a)=\sqrt{2a}$. Наибольшее $f(a)=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$. Тогда, чтобы функция f имела два пересечения с функцией $g=a$, где $a-const$, необходимо, чтобы $\sqrt{2a}\le a<2\sqrt{a}$. Т.е. $\begin{cases} a\ge 2 \\ a<4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2\le a<4$. Ответ $[2;4)$.

Команда, которая решит первая, получает дополнительные баллы. В конце занятия подсчитывается рейтинг, победителям выставляется отметка «5».

Пример проведения этапов актуализации, первичного усвоения знаний и рефлексии модуля 6 по теме «Нестандартные методы решения уравнений». Рассмотрим, например, метод введения параметра (или параметризации). Цель занятия: расширение представлений обучающихся о методах решения уравнений/неравенств.

- Как вы думаете, для чего нужны задачи с параметрами? В чем их прикладной смысл?

Задачи с параметрами позволяют решать задания не в частном, а в общем виде. Например, представьте, что учитель преподает в 5-и классах в одной параллели и ему нужно составить по четыре различных варианта контрольной работы для каждого класса. Как вы думаете, он будет составлять 20 разных вариантов, а затем решать их для получения ответов или сделает один вариант в общем виде, решит его, а после подставит конкретные значения параметра и получит разные варианты и ответы к ним? Ответ очевиден.

- Объединитесь в пары и попробуйте решить следующее задание: $\sqrt{5-x}=x^2-5$. (Мотивационная задача).

Обучающимся предлагается для решения поисково-исследовательская задача, в основе которой лежит дедуктивный подход.

На первый взгляд задание кажется очень простым. Однако вполне вероятно, что ученики не смогут его выполнить, так как оно не решается ни с помощью методов ШКМ, ни с использованием функционального подхода. Равносильные преобразования не приведут к успеху, так как уравнение системы $\begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ x^4-10x^2+x+20=0 \end{cases}$ не имеет целых корней среди делителей сводного члена, а значит, воспользоваться схемой Горнера или делением «уголком» не получится. Оценка областей значений функций $f(x)=\sqrt{5-x}$, $g(x)=x^2-5$ и построение их графиков позволят определить лишь примерный интервал местонахождения корней и их количество, но не конкретное значение.

- Попробуйте рассмотреть данное уравнение в общем виде, т.е. замените числа параметром. Что это дает?

$$\sqrt{a-x}=x^2-a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-a\ge 0 \\ a-x=x^4-2ax^2+a^2 \end{cases}$$

Облегчает процесс решения. Уравнение системы можно решить с помощью аналитического подхода методом изменения ролей переменных.

- Решите данное уравнение.

$$\begin{cases} a\le x^2 \\ a^2-(1+2x^2)a+x^4+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le x^2 \\ a_{1,2}=\dfrac{1+2x^2\pm(2x-1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le x^2 \\ \left[\begin{array}{l} a_1=x^2+x \\ a_2=x^2-x+1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x\le x^2 \\ x^2+x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x+1\le x^2 \\ x^2-x+1=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

- Найдите корни уравнения: $x^3-(\sqrt{3}+1)x^2+3$. Ответ: $x_1=\sqrt{3}$, $x_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$.

Решение к этому заданию приведено в справочнике С.Н. Олехник, М.К Потапов, П.И. Пасиченко «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы»[29].

- Придумайте неравенство, решаемое с помощью введения параметра, найдите множество его решений. Обменяйтесь заданиями с соседом по парте, найдите решение его неравенства. Проверьте друг друга и оцените согласно таблице (см. табл. 4):

Таблица 4

Критерии оценивания работы

Сложность придуманной задачи	Правильность выполнения своей задачи	Правильность выполнения задачи соседа	Культура решения и полнота рассуждений
Оцените по шкале от 1 до 5			

- Закончите предложения:

1). На уроке я узнал(а)…

2). Было трудно/легко (верное подчеркнуть)…

3). Материал показался мне полезным/ненужным (верное подчеркнуть)…

4). Меня удивило…

5). Мне захотелось…

В *приложении Г* приведены возможные разноуровневые задания к уроку «Комбинации различных методов в решении задач с параметрами» модуля 5.

Резюмируя вышеизложенное, обобщим: после ликвидации у учеников пробелов по линии уравнений и неравенств из ШКМ необходимо перейти к рассмотрению более интересных и нестандартных математических задач. Они помогут отойти от привычных алгоритмов и активизировать мыслительные процессы обучающихся. Обязательны к рассмотрению Модули 1, 2, 3 и 5. Как было отмечено ранее, темы в них можно совмещать или переставлять местами. Задания к урокам обязательно составляются с учетом уровня умственных способностей учеников и их индивидуальных особенностей. Время, отводимое на изучение каждого раздела, также может варьироваться.

2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Педагогический эксперимент проводился на базе МБОУ СШ № 63 Кировского района г. Красноярска с целью подтверждения сформулированной ранее гипотезы и проверки эффективности выбранной методики преподавания в период педагогической практики интерна и педагогической практики. В нем приняли участие 19 учеников 10 класса, проявляющих интерес к математике. Многие из них планируют дальнейшее обучение в высшем учебном заведении на технических, математических, экономических направлениях. Соответственно, обучающиеся мотивированы и заинтересованы в углубленном изучении данного предмета.

Задачи частичной апробации:

1. Определить первоначальный уровень знаний участников курса.
2. Выяснить предпочтения обучающихся (форма обучения, интересующие темы и т.д.).

3. Выбрать тематические блоки для изучения.

4. Оценить результаты проделанной работы.

Для оценки уровня первичных знаний обучающихся была проведена контрольная работа *(приложение Д)*, содержание контрольно-измерительного материала которой состояло из заданий, проверяющих усвоение на базовом уровне основных умений школьного курса математики за 5-10 классы. Данные задания идентичны тем, что предлагают вузы на входном тестировании при проверке оставшихся знаний студентов первых курсов. Результаты проверки представлены на диаграмме (см. рис. 21).

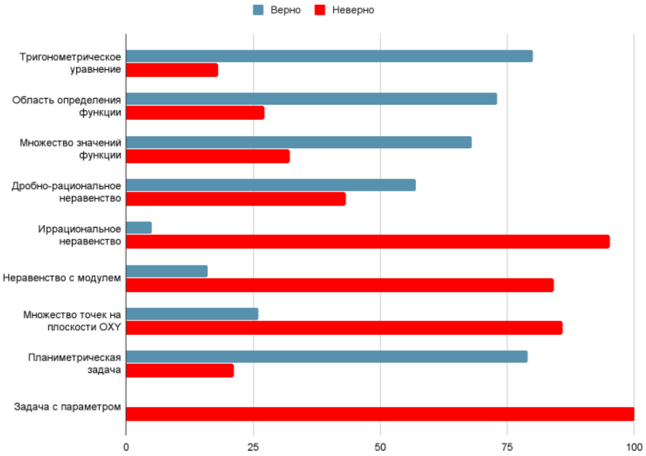


Рисунок 21 *– Распределение ответов обучающихся по типу правильно решенных заданий, входной контроль, %*

Наиболее трудными для учеников оказались иррациональное неравенство, неравенство с модулем и задача с параметром. Их решаемость составляет 0-16%. Сравнительно неплохо (показатели выше 65%) обучающиеся справились с нахождением корней тригонометрического уравнения, области определения функции, множества значений тригонометрической функции и планиметрической задачей. Количество верных ответов по решению дробно-рационального неравенства оказалось неожиданно низким. Многие обучающиеся забыли включить в ответ одноэлементное множество.

Помимо проверочной работы проводилось анкетирование *(приложение Е)*, с целью выяснения, какую форму обучения ученики считают наиболее продуктивной, какими методами решения уравнений и неравенств они владеют и каким хотели бы научиться, как оценивают свои метапредметные навыки и т.д. Диаграммы по результатам анкетирования представлены в *приложении Ж*. Анализ результатов анкетирования и проверочной работы выявил, что к *обязательным* для рассмотрения темам можно отнести метод равносильных переходов, обобщенный метод интервалов, нахождение свойств функции по формуле и графику (это понадобится для изучения функционального метода решения уравнений и неравенств), функциональный и графический подходы при решении задач с параметрами. Кроме того, для рассмотрения были выбраны темы: разложение многочлена на множители с помощью схемы Горнера и деления «уголком», а также геометрический подход к решению систем уравнений (чтобы не было потери связи с геометрией).

В связи с ограниченным количеством времени программу курса пришлось сильно сократить. С учетом начального уровня знаний учеников и их пожеланий для дальнейшего изучения были выбраны следующие блоки: стандартные методы решения уравнений, неравенств и их систем (3 ч), исследование функций без помощи производной (2 ч), геометрический метод решения систем уравнений (1 ч, в ознакомительных целях), функциональные методы решения уравнений и неравенств, в том числе задач, содержащих параметр (3 ч), теоретическая часть по задачам с параметрами (0,5 ч), графические методы задач с параметрами (2,5 ч), функционально-графические (3 ч). Занятия проходили очно два раза в неделю. Во время двухмесячного перерыва между практиками обучающимся было выдано индивидуальное задание на базе бесплатного веб-сервиса Google Classroom и проведено 3 конференции на платформе zoom с целью контроля самостоятельной деятельности учеников и ответов на накопившиеся у них вопросы. В общей сложности получилось 9 недель очного обучения (18ч с учетом написания трех контрольных работ) и 3ч дистанционных занятий.

Период самостоятельной работы обучающихся еще раз дал понять, что даже хорошо мотивированным и заинтересованным детям обязательно нужен контроль, помощь преподавателя и живое общение. Поэтому если, например, учитель собирается сделать курс исключительно дистанционным, записать уроки, выложить их на платформу вместе с разработанными к ним заданиями, то надо в обязательном порядке хотя бы несколько раз в месяц проводить видеоконференции, которые позволят выявить основные трудности в работе обучающихся и не потерять связь с учениками.

За это время обучающимся необходимо было сделать следующие задания: выполнить ИДЗ (индивидуальное домашнее задание) по функциональным методам решения уравнений и неравенств, посмотреть два видео-урока по темам «Построение графиков в системе AOX», «Метод областей» и решить относящиеся к ним задачи. До двухмесячного перерыва в обучении участники курса уже были ознакомлены с задачами с параметрами, поэтому сложностей с изучением материала не возникло. Также с целью упрощения работы с платформой обучающимся был предоставлен «скринкаст» – видео запись с экрана компьютера с инструкцией по работе в Google Classroom, где подробно показано, какие задания необходимо сделать, куда отправлять выполненные, как задать вопрос в режиме «онлайн» и т.д. (см. рис 22).

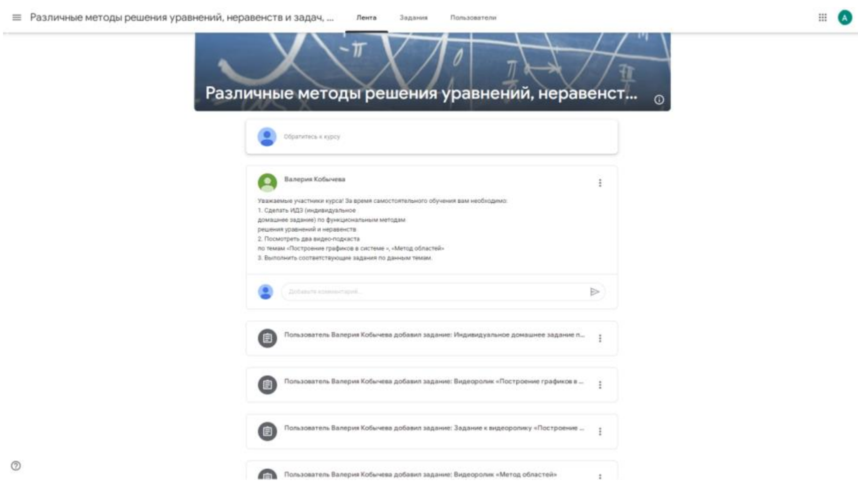


***Рисунок 22** – Инструкция по работе с Google Classroom*

Условно содержание курса можно разделить на два этапа. На первом этапе ликвидируются пробелы по ранее пройденным темам, изучаются функциональные методы неравенств, а на этапах обобщения и систематизации начинают появляться задачи с параметрами. Второй этап полностью посвящен задачам с параметрами. На каждом из этих этапов проводились контрольные работы, с содержанием которых можно ознакомиться *в приложении Д*. По результатам проверки, представленным на диаграмме (рис. 22), видно, что прогресс есть. Вторая работа была сложнее предыдущей, но написали ее лучше первой. Решаемость задания на нахождение множества решений неравенства с модулем увеличилась с 16% до 63%, иррационального неравенства – с 5% до 57%, правильно найти области определения и значения функции сумели на 11% и 5% человек больше соответственно. Метод мажорант освоили 78% обучающихся, ситуация с использованием свойства монотонности хуже – решаемость составила 57%, но справедливости ради отметим, что первая из задач была значительно проще.

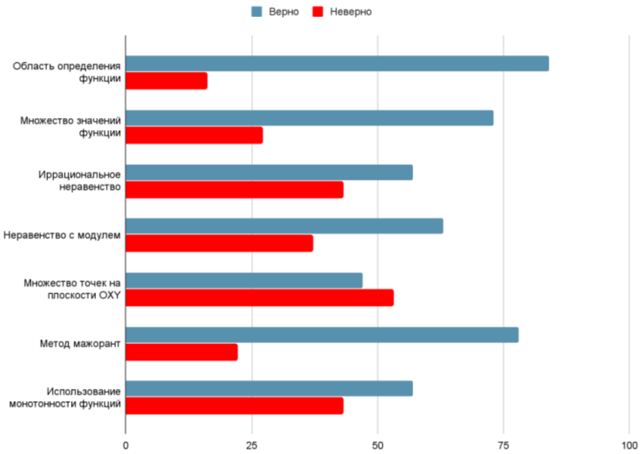


Рисунок 22 *– Распределение ответов обучающихся по типу правильно решенных заданий, промежуточный контроль, %*

Не все, но многие ученики осознали принцип решения задач с параметрами (см. рис 23). На входном контроле с этим заданием справилось 0% обучающихся, сейчас же решаемость таких заданий находится в рамках от 26% до 68% (в зависимости от способа решения). Наиболее легким для участников курса оказался метод построения графика в системе *AOX* (на диаграмме именуется графическим методом решения). Он действительно является одним из самых простых, но не будем забывать, что обучающиеся изучали его самостоятельно (!), поэтому данная статистика очень радует и вселяет надежду, что в конечном итоге ученики смогут освоить различные типы решения задач с параметрами и научатся их комбинировать. На последнем заняти обучающимся были даны рекомендации по дальнейшему изучению таких задач.

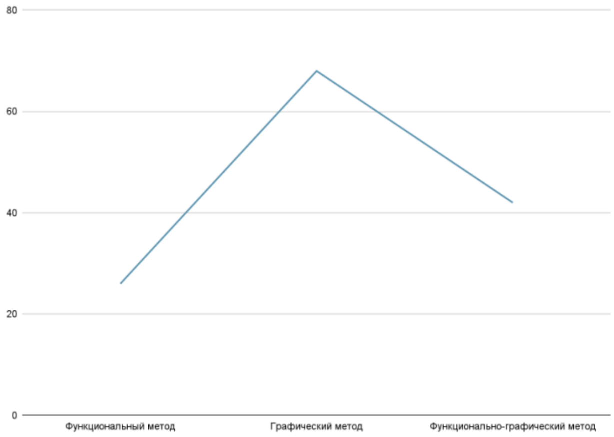


Рисунок 23 *– Распределение ответов обучающихся по типу правильно решенных заданий, контрольная работа по задачам с параметрами, %*

По окончании занятий ученикам была проведена рефлексия, построенная по принципу аргументированных ответов на поставленные вопросы *(приложение 3).* В целом обучающиеся дали положительную оценку курсу и своей работе. 89% (17 из 19) учеников выразили желание продолжать изучать задачи с параметрами. Вот некоторые отрывки их ответов на вопросы из анкеты: «открыла для себя много нового, но теперь хочется изучить еще больше», «курс хороший, понравился, но считаю, что необходимо больше часов на изучение данных тем», «вдохновился на изучение задач с параметрами», «начал чувствовать себя увереннее в таких задачах, раньше не решал их вообще», «поняла принцип решения уравнений и неравенств функциональными методами, освоила графический и функциональный методы решения задач с параметрами, буду совершенствовать полученные навыки». 11% посчитали, что все, что они планировали узнать, узнали, а потому продолжать работать самостоятельно смысла не видят.

Разумеется, курс, рассчитанный на два года обучения нельзя провести за несколько недель. Хотя бы потому, что для осмысления, усвоения и закрепления информации необходимо время. Однако положительная динамика, явно прослеживающаяся из анализа результатов трех написанных учениками контрольных работ, свидетельствует о полезности, важности курса и правильности выбранной методики.

Отсутствие пробелов по элементарной математике, хорошо развитые логическое, стратегическое и абстрактное мышления, а также умение находить закономерности и устанавливать причинно-следственные связи есть фундамент, необходимый для успешного обучения в вузе. Именно поэтому одна из главных идей и задач данного курса состоит в том, чтобы показать обучающимся многовариантность методов решения практически любой задачи и научить их видеть тесную взаимосвязь различных разделов математики.

Таким образом, результаты апробации отчасти подтверждают поставленную гипотезу и позволяют сделать вывод, что выбранная методика является результативной.

Выводы по второй главе

В настоящий момент наблюдается большой разрыв между школьной математикой и математикой как наукой. Именно поэтому многие выпускники, оказавшись на университетской скамье, с трудом осваивают математические дисциплины. Они не научились думать, привыкли решать задачи по шаблону, не приобрели необходимых навыков позновательно-исследовательской деятельности, не развили самодисциплину. Данный курс ориентирован на повышение уровня математической подготовки обучающихся. Развитие у них представления о математике как единой, цельной науки.

Частичная апробация разработанного курса, проводимая на базе 63 школы г. Красноярска, показала, что данный курс действительно повышает у будущих выпускников уровень математической культуры, формирует необходимые метапредметные умения и навыки: развивает познавательный интерес к науке, учит синтезу и анализу. Тренирует немаловажные личностные качества: любознательность, сосредоточенность и целеустремленность. Из чего можно заключить, что поставленные во второй главе дипломной работы задачи, связанные с обобщением, систематизацией и углублением математических знаний учеников, а также с развитием у них познавательной и творческой деятельности, самостоятельности, выполнены. Цель экспериментальной части достигнута.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящий момент в связи с большим количеством задач (как образовательного, так и воспитательного, развивающего характера), поставленных перед образовательными организациями, и нехваткой времени на их реализацию, введение курсов по выбору видится одним из наиболее удачных способов решения проблемы низкого качества школьного математического образования и обеспечения преемственности в обучении математике между школой и вузом. Рассмотрим результаты исследования, *целью* которого являлись разработка и реализация предметно-ориентированного курса по выбору, направленного на систематизацию и углубление знаний, умений и способов деятельности обучающихся 10-11 классов по школьному курсу математики.

В ходе решения первой задачи, заключающейся *в выявлении основных дефицитов математической подготовки выпускников общеобразовательных школ и студентов первых курсов,* проанализированы результаты ГИА-9/11 и результаты входных диагностических работ студентов первых курсов. Выявлено, что наиболее трудными для обучающихся оказываются геометрическая и функциональные содержательные ШКМ, а также линия неравенств. У выпускников и первокурсников отмечаются:

— Низкий уровень владения базовыми геометрическими понятиями и формулами, основными методами решения неравенств, правилами равносильных преобразований

— Слабые навыки работы с функциями, неумение находить их области определения и значений, читать графики, пользоваться свойствами

— Отсутствие необходимых умений познавательной деятельности, навыков самостоятельной работы и мотивации к учебе.

В результате работы над второй задачей *охарактеризованы требования к качеству математической подготовки выпускников школ в контексте продолжения образования в вузе* на основе диссертационного исследования О.А. Табиновой, анализа образовательных программ и программ вступительных испытаний некоторых вузов России. Требования классифицированы в соответствии с тремя обязательными структурными компонентами готовности выпускников к продолжению математического образования в вузе: мотивационным, когнитивным и деятельностным. С учетом описанных требований и итогов работы над первой задачей сделаны выводы о нарушении преемственности в обучении математике между средним общим и высшим уровнями образования и невозможности обеспечения в таких условиях качественного усвоения дисциплин высшей математики.

В рамках третей задачи *разработаны программа и содержание курса по выбору для обучающихся 10-11 классов, направленного повышение уровня математической подготовки*. Курс «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики» позволяет:

— Ликвидировать пробелы по функциональной и геометрической содержательным линиям школьной программы и линии неравенств

— Углубить и расширить школьные знания за счет задач нестандартного плана различного уровня сложности

— Развить у обучающихся не только предметные, но и личностные, регулятивные, познавательных и коммуникативных УУД.

При проектировании содержания курса учитывались выделенные требования к качеству математической подготовки будущих абитуриентов и предметные дефициты выпускников, ежегодно выявляемые на экзаменах. Данный курс отличается от большинства современных довузовских курсов тем, что ориентирован главным образом не на подготовку к ЕГЭ, а на решение разноплановых интересных задач, позволяющих оценить всю мощь и красоту математики.

Для реализации четвертой задачи на базе 63 школы г. Красноярска *проведена частичная апробация курса по выбору и сделаны выводы о результативности выбранной методики*. Сроки эксперимента не позволили оценить, насколько успешно обучающиеся продолжили образование в вузе, но по результатам контрольных срезов наблюдается значительное улучшение уровня предметной подготовки. Положительная динамика, явно прослеживающаяся из анализа результатов трех написанных учениками контрольных работ, а также высокая оценка курса обучающимися их желание продолжать изучать задачи с параметрами свидетельствуют о полезности и важности курса.

В ходе проведения эксперимента отчасти подтвердилась *гипотеза* о результативности организации подготовки выпускников школ к дальнейшему продолжению математического образования в вузе при реализации в образовательной практике курса по выбору «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики» для обучающихся 10-11 классов.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, а цель достигнута.

Подводя итог, не лишним будет добавить, что в разработанном курсе предусмотрены разные формы обучения (очная, очно-дистанционная, дистанционная), что позволяет быстро адаптировать его под современные реалии, а также дает возможность при необходимости неограниченно увеличить аудиторию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абдрахманова Ж.Е. Методические рекомендации для работы в Google Classroom. Управление образования города Астаны [Электронный ресурс]. URL: https://pedcollege.kz/images/2020/doc/prilojenia_b.pdf (дата обращения: 25.11.2021)

2. Балаян Э.Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы: учебное пособие. Ростов н/Д: Издательство Феникс. 2016. 743 с.

3. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. 13-е изд., стереотип. М. :Дрофа, 2010. 93с.

4. Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С. Сравнительный анализ результатов теста по проверке остаточных знаний и успеваемости первокурсников по математике. Мир науки. Педагогика и психология [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz.. (дата обращения: 15.11.2021).

5. Высоцкий И.Р., Косухин О.Н., Семенов А.В., Трепалин А.С., Черняева М.А. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2021 года. М.: ФИПИ, 2021. URL: https://ege.sdamgia.ru/doc/expert/2021/mr_math_ege_2021.pdf (дата обращения 15.04.22).

6. Гасанов А.Р., Курамшин А.А., Ельков А.А. [и др.]. Способы решения квадратных уравнений. Юный ученый [Электронный ресурс]. URL: https://moluch.ru/young/archive/9/636/ (дата обращения: 11.05.2022).

7. Генкин Г.З. Геометрические решения негеометрических задач: кн. для учителя. М: Просвящение, 2007. 79с.

8. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005. 328с.

9. Гребенев И.В., Ермолаева Е.И., Круглова С.С. Математическая подготовка абитуриентов - основа получения профессионального образования

в университете. Наука и школа [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-podgotovka-abiturientov-osnova-polucheniya-professionalnogo-obrazovaniya-v-universitete (дата обращения: 14.02.2022).

10. Далингер В.А. Задачи с параметрами: учебное пособие. Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2012. 961 с.

11. Дягилева А. В., Журавская Н. Т., Каплун А. В. Современные проблемы математического образованияв техническом вузе и способы их решения // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2021. № 2. С. 167-171.

12. Евдокимович В.Е., Курносенко Н.М. Проблема преемственности в образовании // Актуальные вопросы научно-методической и учебно-организационной работы: практико-ориентированная и фундаментальная подготовка на первой и второй ступенях высшего образования: материалы республиканской научно-методической конференции (Гомель, 15-16 марта 2018 года). В 3 ч. Ч.3.; отв.ред., И.В. Семченко [и др.]; Министерство образования Республики Беларусь, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. С. 60-64.

13. Журавлева Н. А., Шашкина М. Б. Стереометрия в школе: что изменилось за два года? (по результатам профильного ЕГЭ по математике 2020-2021 гг.) // Математика в школе. 2022. № 2. С. 8-16.

14. Зайниев Р.М. Проблемы качества математического образования в общем и профессиональном образовательном пространстве // Гуманизация образования. 2016. №5. С. 40-45.

15. Капкаева Л.С, Тагаева Е.А. Поисково-исследовательские задачи по математике как средство реализации преемственности обучения в школе и вузе. Мир науки. Педагогика и психология [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/poiskovo-issledovatelskie-zadachi-po-matematike-kak-sredstvo-realizatsii-preemstvennosti-obucheniya-v-shkole-i-vuze (дата обращения: 18.02.2022).

16. Кейв М.А., Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Анализ уровня предметной подготовки студентов первого курса ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 26-27 ноября 2021г.; отв. ред. М.Б. Шашкина; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 22–26.

17. Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Построение графика дробно-рациональной функции и асимптотические кривые // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 29 апреля 2019 г.; отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2019. С. 16-20.

18. Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Проблемы качества математической подготовки обучающихся по результатам профильного ЕГЭ 2019 г. // VIII Международный научно-образовательный форум ИНФОРМАЦИОННЫЕ технологии в математике и математическом образовании: Материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича. г.Красноярск, 13–14 ноября 2019 г / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. С. 13–19.

19. Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Реалии современного математического образования: готовы ли абитуриенты к изучению математики в вузе? // Проблемы и перспективы современного естественно-математического образования: материалы XI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 8 – 9 апреля 2022 года. СГПИ (филиал) ФГАОУ ВО «ПГНИУ»; Т. В. Рихтер, составление. Соликамск: СГПИ, 2022. С. 36-43.

20. Коновалова Е.И. Элективный курс как фактор реализации индивидуальной образовательной траектории школьников. Вестник БГУ [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elektivnyy-kurs-kak-faktor-realizatsii-individualnoy-obrazovatelnoy-traektoriishkolnikov (дата обращения: 15.12.2021).
21. Коропец З.Л. , Коропец А.А., Алексеева Т.А. Нестандартные методы решения неравенств и их систем. Учебное пособие [Электронный ресурс]. URL: file:///C:/Users/%D0%94%D0%BE%D0%BC/Downloads/1554-matematika_-nestand_-metod_-resh_-neravenstv_koropec-alekseeva_2012-125s.pdf (дата обращения: 19.12.2021).
22. Кудрявцев Л.Д., Кириллов А.И., Бурковская М.А., Зимина О.В. Математическое образование: тенденции и перспективы // Высшее образование сегодня. 2002. № 4. С. 20—29.
23. Малаховский В.С. О необходимости сохранения в России фундаментального математического образования в XXI в. // Теория и практика общественного развития. 2014. № 13. С. 75-78.
24. Мамаева Н.А. О преемственности математического образования при переходе из школы в технический вуз // Вестник АГТУ [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-preemstvennosti-matematicheskogo-obrazovaniya-pri-perehode-iz-shkoly-v-tehnicheskiy-vuz (дата обращения: 20.11.2021).
25. Методический анализ результатов ГИА-9 по математике (профильный уровень) за 2021 год. Аналитический отчет Центра оценки качества образования по результатам ОГЭ 2021 г. [Электронный ресурс]. URL: https://coko24.ru/результаты-огэ-2021/ (дата обращения 15.11.2021)
26. Методический анализ результатов ГИА-11 по математике (профильный уровень) за 2021 год // Аналитический отчет Центра оценки качества образования по результатам ЕГЭ 2021 г. [Электронный ресурс]. URL: https://coko24.ru/результаты-егэ-2021/ (дата обращения 15.11.2021)

27. Овчаренко Е.Н. Преемственность как методологический принцип сохранения целостности процесса обучения. Научная мысль [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preemstvennost-kak-metodologicheskiy-printsip-sohraneniya-tselostnosti-protsessa-obucheniya (дата обращения: 10.05.2022).

28. Одоевцева И.Г., Маркова Н.В., Эйрих Н.В. Обеспечение преемственности среднего общего и высшего образования в обучении математике // наука и школа [Электронный ресурс] URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obespechenie-preemstvennosti-srednego-obschego-i-vysshego-obrazovaniya-v-obuchenii-matematike (дата обращения: 28.11.2021).

29. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: справочник. 1991.

30. Орлов В.А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения // Профильное обучение в условиях модернизации школьного образования. М.: ИОСО РАО, 2003. С. 93-96.

31. Палий Н.Ю., Халявка М.А. Анализ причин невысокого уровня успеваемости среди студентов младших курсов. Альманах мировой науки. 2016. № 4. С. 104-105.

32. Побегуца С В. Анализ причин затруднений учащихся при сдаче экзамена по математике в формате ОГЭ . Аспекты и тенденции педагогической науки: материалы III Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, декабрь 2017 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/273/13426/ (дата обращения: 25.11.2021).

33. Приказ Министерства образования Российской Федерации от 18.07.2002 №2783 «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» [Электронный ресурс]. URL: https://docs.cntd.ru/document/901837067 (дата обращения: 26.09.2021)

34. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации, Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 07.11.2018 № 189/1513 Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по

образовательным программам основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: http://xn--32--8cd3cgu2f.xn--p1ai/sites/default/files/documents/poryadok_gia-9_ot_07.11.2018_no_189-1513.pdf (дата обращения: 25.09.2021).

35. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации, Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 07.11.2018 № 190/1512 Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/ad4be1e461ac05b06446a3a2afe4eb70/download/613/ (дата обращения: 25.09.2021)

36. Семененко Н.М. Развитие метапредметности средствами ТРИЗ на уроках физики в соответствии с ФГОС общего образования. Научно-методический электронный журнал «Концепт» [Электронный ресурс]. URL: http://e-koncept.ru/2015/85607.htm. (дата обращения: 15.09.2021)

37. Смык А.Ф., Прусова В.И., Зиманов Л.Л, Солнцев А.А. Анализ масштаба и причин отсева студентов в техническом университете. Высшее образование в России [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-masshtaba-i-prichin-otseva-studentov-v-tehnicheskom-universitete (дата обращения: 25.05.2022).

38. Сон Э Сен. ЕГЭ по математике как показатель качества знаний и уровень образования выпускников [Электронный ресурс]. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22434596 (дата обращения 22.09.2021).

39. Степкина М.А. Методика формирования готовности студентов первого курса к изучению математики в вузе / Байгушева И.А.: дис. …канд. пед. наук. 2019.

40. Степкина М.А., Байгушева И.А. О готовности первокурсников к изучению математики вузе // Преподаватель XXI век [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-gotovnosti-pervok.. (дата обращения: 18.11.2021).

41. Сухарев Л.А., Кочугаев П.Н. Интеграция школьного и вузовского математического образования как средство подготовки школьников к обучению в вузе [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-gotovnosti-pervokursnikov-k-izucheniyu-matematiki-v-vuze (дата обращения: 12.02.2022).
42. Табинова О.А. Формирование готовности выпускников школ к продолжению математического образования в вузе: дис. …канд. пед. наук. 2019.
43. Тестов В.А. Проблема качества подготовки учителя математики // Проблемы современного математического образования в вузах и школах России: Оценка качества математических знаний студентов и школьников: Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2009. С.30-36.
44. Тузикова М.А. Содержание и организация элективного курса «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств» для учащихся 11 класса: ВКР. 83 с.
45. Федотова Л.Е. Преемственность уровней образования в условиях фгос // Здоровье – основа человеческого потенциала: проблемы и пути их решения. 2020 [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preemstvennost-urovney-obrazovaniya-v-usloviyah-fgos (дата обращения: 08.05.2022).
46. Ходжаев, Ш. А. Вклад ученого аль-Хорезми в развитии математической науки / Ш. А. Ходжаев, И. Е. Шемякина // Актуальные вопросы науки и хозяйства: новые вызовы и решения: Сборник материалов LI Международной студенческой научно-практической конференции, Тюмень, 17 марта 2017 года. Тюмень: Государственный аграрный университет Северного Зауралья, 2017. С. 208-210.
47. Черноскутов В.Е. Актуальные проблемы социализации студенческой молодежи в процессе обучения в вузе. Профессиональное образование в современном мире [Электронный ресурс]. URL: https://doi.org/10.20913/2618-7515-2021-1-2 10.12.2021)

48. Шахмейстер А.Х. Построение графиков функций элементарными методами. 3-е изд., исправленное и дополненное. СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦНМО, 2011. 184с.
49. Шашкина М.Б. Дефициты математической подготовки обучающихся общеобразовательной школы. Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов [Электронный ресурс]. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_46634048_11349618.pdf
50. Шашкина М.Б., Табинова О.А. О качестве математической подготовки в школе и вузе // Математика в школе. 2014. №1. С. 1-11.
51. Швалева А. В. Об итогах проверки остаточных знаний по математике. Диагностика и ликвидация пробелов школьного математического образования в вузе // Проблемы и перспективы развития образования в России [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ob-itogah-proverki-ostatochnyh-znaniy-po-matematike-diagnostika-i-likvidatsiya-probelov-shkolnogo-matematicheskogo-obrazovaniya-v-vuze (дата обращения: 20.11.2021).
52. Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года [Электронный ресурс]. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2020/Matematika_mr_2020.pdf (дата обращения 01.12.2021)

Приложение А. Вариант письменного теста, предлагаемого студентам для оценки остаточного уровня знаний в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Источник: Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С. Сравнительный анализ результатов ЕГЭ, теста по проверке остаточных знаний и успеваемости первокурсников по математике // Интернет-журнал «Мир науки», 2018 №5, [*https://mir-nauki.com/PDF/71PDMN518.pdf*](https://mir-nauki.com/PDF/71PDMN518.pdf)

Номер задачи	*Условие*
Z1	Решить уравнение $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}$.
Z2	Вычислить $\left(3^{2+\frac{1}{\log_2 3}} + 7 \cdot 16^{\frac{1}{2\log_3 4}} + 10\right)^{1/2}$.
Z3	Упростить выражение $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\frac{a-\sqrt{2}}{a+2}$.
Z4	Решить неравенство $\lvert 2x-1\rvert < x+2$.
Z5	Решить уравнение $3x + \sqrt{2x+3} = 6$.
Z6	Найти область определения функции $f(x) = \sqrt[8]{2-\log_4 x} + \sqrt{x^2-6x+5}$.
Z7	Изобразить на плоскости множество точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию $7y-5<4x$.
Z8	Решить неравенство $\frac{1}{7x-3} \geq \frac{1}{2x-1}$.
Z9	Боковая грань правильной треугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 45°, площадь боковой поверхности равна $12\sqrt{6}$. Найти объем пирамиды.

Приложение Б. Вариант письменного теста, предлагаемого студентам для оценки остаточного уровня знаний в ИМФИ КГПУ им. В. П. Астафьева.

Источник: Кейв М.А., Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Анализ уровня предметной подготовки студентов первого курса ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно- методической конференции. Красноярск, 26-27 ноября 2021г. отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 22–26.

Входное тестирование

Фамилия, Имя

Вариант № 1

1. Сумма корней уравнения $(4x^2+6x-11)(8x^2+12x-19)+1=0$ равна

1) 0; 2) 3; 3) -3

2. Все решения неравенства $\frac{(x-2)(x+3)^2}{x+5} \geq 0$ образуют множество

1) $(-\infty;-5] \cup [2;+\infty)$; 2) $(-5;2]$; 3) $(-\infty;-5) \cup \{-3\} \cup [2;+\infty)$

3. Решением неравенства $|2x+3| \geq 5$ является промежуток

1) $[1;+\infty)$; 2) $(-\infty;-4] \cup [1;+\infty)$; 3) $(-\infty;-4]$

4. Значение выражения $\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+2}$ равно

1) $\sqrt{5}+2$; 2) $\sqrt{5}-2$; 3) 1

5. Произведение всех значений x, при которых функция $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ принимает значение ноль равно

1) 6; 2) -6; 3) -1

6. Все решения неравенства $\sqrt{x^2-4x} > x-3$ образуют множество

1) $(4,5;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) $(-\infty;0] \cup (4,5;+\infty)$.

7. Значение выражения $\lg 0,1в^3$, при $\lg в = 2$ равно

1) 5; 2) 7; 3) –6.

8. Целый корень уравнения $(x+5)^{\log_7 (x+5)} = 7$ равен

1) – 2; 2) 2; 3) – 1

9. Решением неравенства $\log_{\frac{5}{11}}(5x-2) \leq -1$ является промежуток

1) $[0,84;+\infty)$; 2) $(-\infty;0,84]$; 3) $(0,4;\ 0,84]$

10. Область определения функции $y=\log_x (x-3)^2$ имеет вид

1) $(0;1) \cup (1;+\infty)$; 2) $(0;+\infty)$; 3) $(0;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$

11. При выпаривании из 8 кг рассола получили 2кг пищевой соли, содержащей 10% воды. Каков процент содержания воды в рассоле?

1) 40; 2) 22,5; 3) 77,5

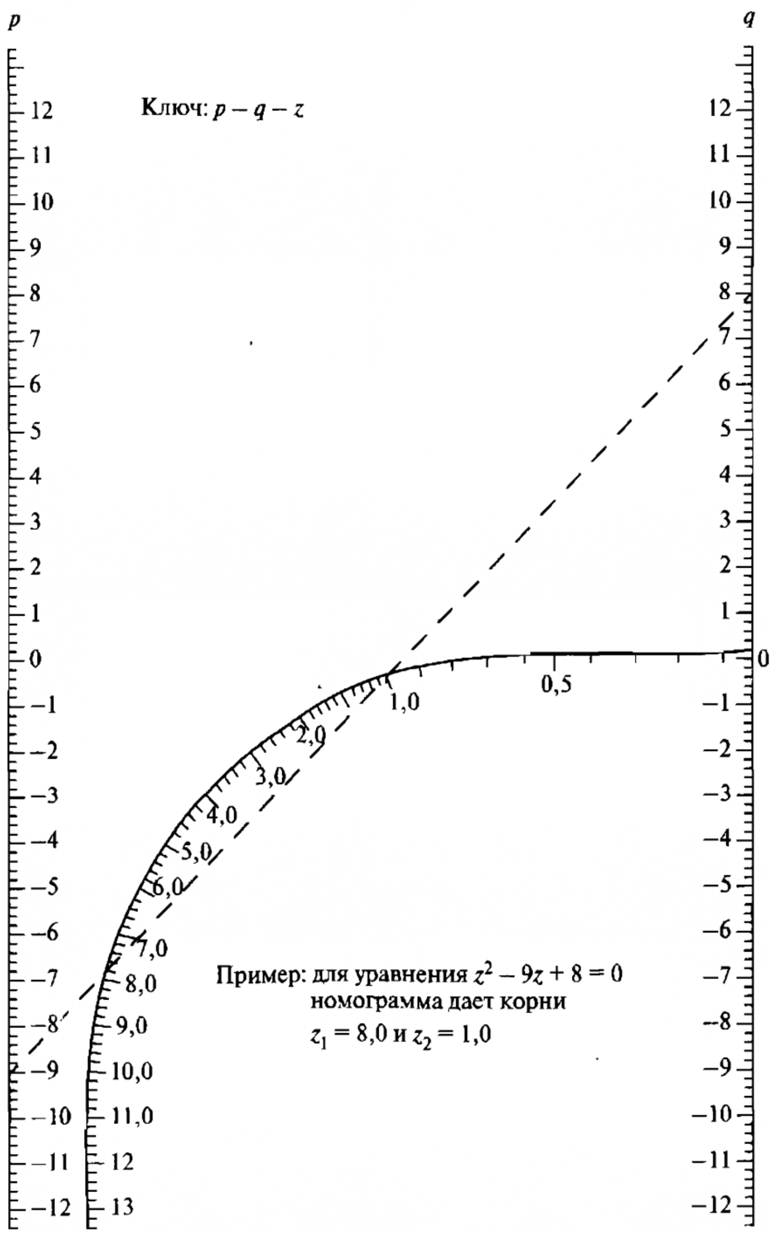
12. Сумма вклада в банке после первого года хранения равнялась 48 уе, а после третьего года хранения – 108 уе. На сколько уе увеличился вклад за второй год хранения, если процентная ставка не менялась, доход начисляется в конце каждого года и прибавляется к сумме вклада?

1) 50; 2) 24; 3) 72

Приложение В. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы Брадиса

Таблица XXII. НОМОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$z^2 + pz + q = 0$$



83

Приложение Г. Реализация дифференцированного подхода в обучении на примере разноуровневых заданий к уроку «Комбинации различных методов в решении задач с параметрами»

Под «комбинацией различных методов» решения задачи с параметром будем понимать использование различных методов: аналитического, функционального, графического и их подвидов – на разных этапах решения задачи. Предложенные задания разделены на три группы (A, B, C) по возрастанию сложности (см. табл. 5). Следует отменить, что задания на комбинацию методов, как правило, несколько труднее остальных. Они требуют обширных знаний, поэтому деление их на уровни несколько условно.

Таблица 5

Задания с параметром разных уровней сложности на комбинацию методов

Уровень	Задание
A	Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert-5)^2+\lvert(x-5)^2+y^2-a^2\rvert=0$ ровно два различных решения
B	№1. При каких значениях параметра a уравнение $2(2\cdot 5^{-x^2}-1)^3-(a+2)\cdot(2\cdot 5^{-x^2}-1)^2-a\cdot(2\cdot 5^{-x^2}-1)+a^2=0$ имеет шесть различных действительных корней?
	№2. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\sqrt[5]{5\lvert x+4\rvert+2\lvert x-a\rvert-2}\le\sqrt[5]{2+\sqrt{36-y^2}}+\ln\dfrac{5+\sqrt{36-y^2}}{5\lvert x+4\rvert+2\lvert x-a\rvert+1}$ имеет хотя бы одно решение
C	Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\lvert x-a\rvert+\lvert y-a\rvert+\lvert a+1-x\rvert+\lvert a+1-y\rvert=2,\\ y+2\lvert x-5\rvert=6\end{cases}$ имеет ровно одно решение

Решение задания уровня A. Проанализируем условие и сведем исходное уравнение к системе уравнений. Несложно заметить, что оба слагаемых $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert-5)^2$ и $\lvert(x-5)^2+y^2-a^2\rvert$ неотрицательны. А значит, уравнение $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert-5)^2+\lvert(x-5)^2+y^2-a^2\rvert=0$ равносильно системе $\begin{cases}\lvert x\rvert+\lvert y\rvert-5=0\\(x-5)^2+y^2-a^2=0\end{cases}$.

Решим ее графически. Первое из уравнений образует ромб с центром вначале координат, второе – окружность с центром в точке $(5;0)$ радиуса $\lvert a\rvert$ (см. рис.

24). Заметим, что прямые $y = x + 5$ и $y = -x - 5$ образуют угол 90°, поэтому данный ромб – квадрат, а значит, окружность касается данных прямых в точках $(0;5)$ и $(0;-5)$ соответственно при $a = \pm 5\sqrt{2}$, что легко находится из геометрических соображений. Очевидно, что при этих значениях параметра дополнительных точек пересечения с ромбом окружность не имеет. Соответственно, два решения исходная система будет иметь в случае, если радиус окружности будет принимать значения от крайней правой до крайней левой абсциссы ромба, т.е. $0 < |a| < 10$. $0 < |a| < 10 \Leftrightarrow a \in (-10;0) \cup (0;10)$.

Ответ: $(-10;0) \cup (0;10)$.

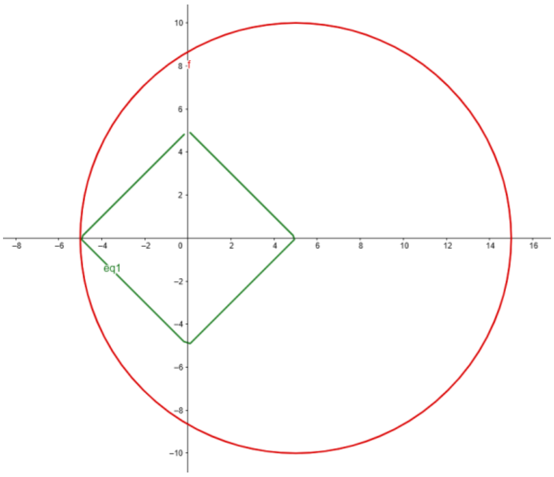


Рисунок 24 *– Графическая интерпретация к заданию уровня А*

Решение задания №1 уровня В. Заметим, что относительно параметра a данное уравнение является квадратным. Для удобства введем замену $2 \cdot 5^{-x^2} - 1 = t$, где $-1 < t \leq 1$. Сразу заметим, что при $-1 < t < 1$ уравнение $2 \cdot 5^{-x^2} - 1 = t$ имеет два различных действительных корня, если $t = 1$ – один различный корень. Перепишем исходное уравнение в виде $a^2 - (t^2 + t)a + 2t^3 - 2t^2 = 0$, т.е. воспользуемся методом изменения ролей переменных. Применим теорему, обратную теореме Виета, найдем корни: $\begin{cases} a_1 + a_2 = t^2 + t = 2t + (t^2 - t) \\ a_1 \cdot a_2 = 2t^3 - 2t^2 = 2t \cdot (t^2 - t) \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = 2t$, $a_2 = t^2 - t$. Далее удобнее всего воспользоваться графическим методом. Построим в системе координат AOX графики функций $a_1 = 2t$ и $a_2 = t^2 - t$, учитывая, что $-1 < t \leq 1$ (см. рис. 25). Найдем координаты вершины параболы, выделив полный квадрат: $t^2 - t = t^2 - 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Получается, что при $-\frac{1}{4} < a < 0$ уравнение $a^2 - (t^2 + t)a + 2t^3 - 2t^2 = 0$ имеет три различных решения, а исходное – шесть.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

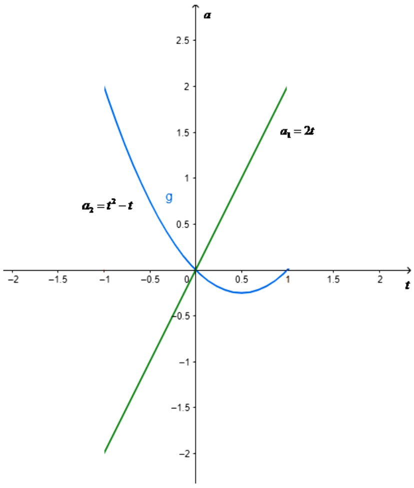


Рисунок 25 *– Графическая интерпретация к уравнению* $a^2 - (t^2 + t)a + 2t^3 - 2t^2 = 0$,
где $-1 < t \le 1$

Решение задания №2 уровня В. ОДЗ переменной y неравенства: $-6 \le y \le 6$. Обратим внимание, что числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком логарифма, принимают только положительные значения. Представим логарифм частного в виде разности логарифмов, при этом модули в подлагорифмических выражениях по упомянутой выше причине ставить не нужно. Получится следующее неравенство: $\sqrt[5]{5|x+4|+2|x-a|-2} \le \sqrt[5]{2+\sqrt{36-y^2}} + \ln(5+\sqrt{36-y^2}) - \ln(5|x+4|+2|x-a|+1)$. Введем замену. Пусть $u = 5|x+4|+2|x-a|-2$, $v = \sqrt{36-y^2}+2$. Тогда неравенство приобретет вид $\sqrt[5]{u} \le \sqrt[5]{v} + \ln(v+3) - \ln(u+3)$. Приведем неравенство к виду $\sqrt[5]{u} + \ln(u+3) \le \sqrt[5]{v} + \ln(v+3)$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = \sqrt[5]{t} + \ln(t+3)$. Она монотонно возрастает как сумма возрастающих функций. А значит, $\varphi(u) \le \varphi(v) \Leftrightarrow u \le v$. Но тогда $5|x+4|+2|x-a|-2 \le \sqrt{36-y^2}+2$. Преобразуем, получим $5|x+4|+2|x-a|\le\sqrt{36-y^2}+4$. Оценим значения функции, стоящей в правой части неравенства. Так как $-6\le y\le 6$, то $4\le\sqrt{36-y^2}+4\le 10$. Функция, находящаяся в левой части неравенства принимает свое наименьшее значение или в точке $x=-4$, или в точке $x=a$. Но тогда, чтобы неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно $\left[\begin{array}{l} f(-4)\le 10 \\ f(a)\le 10 \end{array}\right.$, где

$f(x)=5|x+4|+2|x-a|$. Получается $\left[\begin{array}{l} 2|4+a|\le 10 \\ 5|a+4|\le 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4+a\le 5 \\ 4+a\ge -5 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+a\le 2 \\ 4+a\ge -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -9\le a\le 1$.

Ответ: $[-9;1]$.

Решение задания уровня С. В данном задании (в отличие от предыдущих) несколько сложнее догадаться, какие методы решения использовать. Решается оно аналитически, с применением графической интерпретации. Вспомним свойства модуля и заметим, что $|x-a|+|a+1-x|\ge|x-a+a+1-x|$ $=x-a+a+1-x=1$ и $|y-a|+|a+1-y|\ge|y-a+a+1-y|=y-a+a+1-y=1$. А значит, чтобы первое уравнение системы равнялось двум, необходимо, чтобы каждое подмодульное выражение было неотрицательно, т.е.

$|x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a\ge 0 \\ y-a\ge 0 \\ a+1-x\ge 0 \\ a+1-y\ge 0 \end{cases}$ Эти четыре неравенства образуют квадрат, координаты центра которого $\left(\frac{2a+1}{2};\frac{2a+1}{2}\right)$. Следовательно, при различных значениях параметра a он двигается по прямой $y=x$, являющейся биссектрисой первой и третей координатных четвертей. График функции $y=6-2|x-5|$, составляющей второе уравнение системы, легко строится с помощью геометрических преобразований. На первый взгляд кажется, что исходная система может иметь единственное решение в 4 случаях (см. рис. 26).

В первом случае, при подстановке нижней правой координаты вершины квадрата $(a+1;a)$ в уравнение прямой $y=2x-4$, получаем, что $a=2$ (рис. 27) Второй и третий случаи оказываются невозможны. При подстановке координаты левой верхней вершины квадрата $(a;a+1)$ в уравнение прямой $y=2x-4$ выясняется, что $a=5$. Но тогда получается, что левая верхняя вершина квадрата совпадает с максимальным значением функции $y=6-2|x-5|$, которое последняя принимает при $x=5$. А прямая, заданная уравнением $y=16-2x$, находится внутри квадрата при $5 \le x \le \frac{11}{2}$. Следовательно, исходная система имеет бесконечно много решений (см. рис. 29), что не подходит по условию. Рассмотрим ситуацию 3. При подстановке правой верхней координаты квадрата $(a+1;a+1)$ в уравнение $y=16-2x$, получаем, что $a=\frac{13}{3}$. Проверим, будет ли в таком случае левая верхняя вершина квадрата $\left(\frac{13}{3};\frac{16}{3}\right)$ находиться ниже, чем ордината прямой $y=2x-4$ при $x=\frac{13}{3}$. Так как $y\left(\frac{13}{3}\right)=\frac{14}{3}$, предположение не подтвердилось, значит, исходная система снова имеет бесконечно много решений (см. рис. 30). В последнем случае (рис. 28), подставив $(a;a)$ в $y=16-2x$, находим, что $a=\frac{16}{3}$. Ответ: $\left\{2;\frac{16}{3}\right\}$.

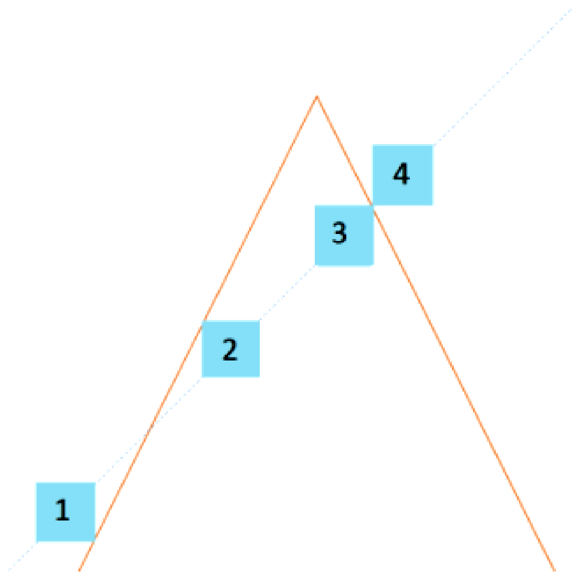
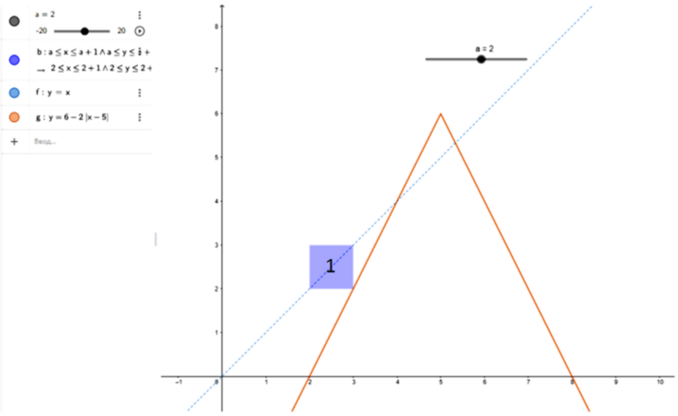
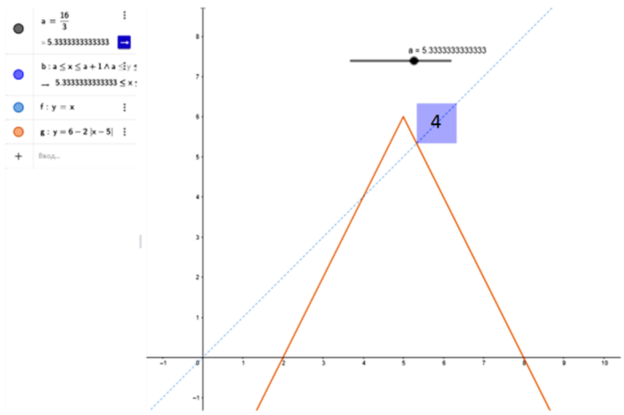
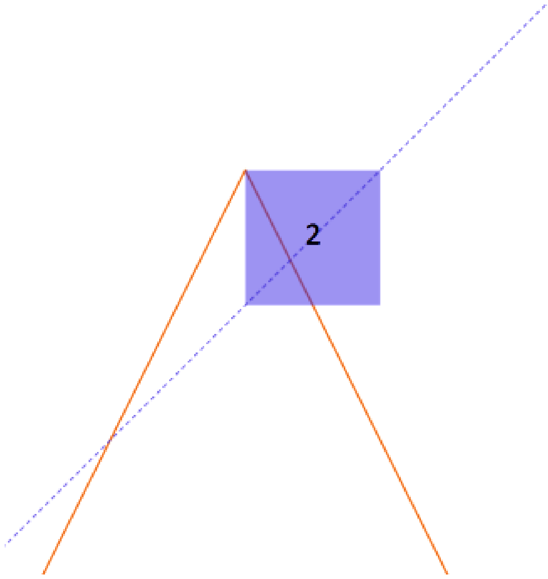


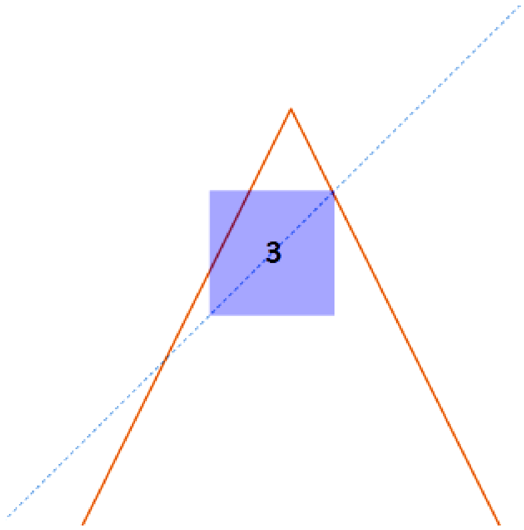
***Рисунок 26** – Возможные подходящие ситуации решения задания уровня С*





Рисунки 27, *28: Случаи, при которых задание уровня С имеет единственное решение, выполнено в программе GeoGebra*





Рисунки 29, *30: Неподтвердившиеся предположения*

Приложение Д. Диагностические работы, проведенные за период педагогического эксперимента

Вариант контрольной работы, предлагающейся обучающимся 10 класса МБОУ СШ 63 для оценки *первичного уровня знаний*.

1. Решить уравнение $\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 3 = 0$

2. Найти сумму целых значений, принадлежащих области определения функции $y = \dfrac{1}{4x^4 - 5x^2 + 1} + \sqrt[6]{4x - x^2}$

3. Определить множество значений функции $y = 5\sin x\cos x - \dfrac{1}{3}$

4. Найти множество решений неравенства $\dfrac{(x-1)^2(x^2-4)}{(3-x)(x+2,5)} \ge 0$

5. Решить неравенство $\sqrt{3-x} > x-1$

6. Найти множество решений неравенства $3x < \dfrac{4x-2}{|x-3|}$

7. Изобразить на плоскости множество точек $P(x,y)$, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 \le 5$

8. В правильный треугольник со стороной 4 см вписана окружность и около него описана другая окружность. Найдите площадь кольца, заключенного между этими окружностями

9. При каком значении параметра a уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет 4 различных решения?

Вариант контрольной работы, предлагающейся обучающимся 10 класса МБОУ СШ 63 в качестве *промежуточной оценки знаний*.

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{x+1}}}$

2. Определить множество значений функции $y = \sin x + \cos x$

3. Решить неравенство: $\sqrt{\sqrt{16x+36} + 6} \ge x$

4. Найти множество решений неравенства: $\dfrac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \le 0$

5. Изобразить на плоскости множество точек $P(x,y)$, удовлетворяющих условию $|x-1|+|x+2|-y\le 0$

6. Решить неравенство: $-\cos(5\pi x)=x^2-6x+10$

7. Найти множество решений неравенства: $\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}<4$

Вариант контрольной работы, предлагающейся обучающимся 10 класса МБОУ СШ 63 на *заключительном этапе работы*.

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}\le 16$ выполняется для всех значений $x\in[-2;1]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a+3x\le 12 \\ a+4x\ge x^2 \\ a\le x \end{cases}$ имеет хотя бы 1 решение.

3. Найдите все значения $a\ge 0$, при каждом из которых уравнение $1+\sqrt{1-x^2}=|x-a|$ имеет единственный корень

Приложение Е. Анкета для участников курса «Различные методы решения уравнений, неравенств и задач, содержащих параметр, в углубленном курсе математики»

1. Какую форму обучения вы считаете наиболее продуктивной?

а) очную, б) дистанционную, в) комбинированную

2. Какими из предложенных методов решения уравнений и неравенств, по-вашему, вы владеете хорошо?

а) метод интервалов, б) графический метод, в) функциональный метод, г) метод равносильных переходов, д) метод замены переменной

3. Каким из вышеперечисленных методов вы бы хотели научиться или улучшить навыки?

а), б), в), г), д)

4. Хотели ли бы вы научиться решать задачи с параметрами?

а) да, это интересно, б) да, но нет уверенности, что смогу осилить данный материал, в) такого желания нет

5. С каких из перечисленных основных подходов вы бы хотели начать знакомство с задачами с параметром (в случае положительного ответа на предыдущий вопрос)?

а) аналитический подход, б) графический подход,

в) функционально-графический

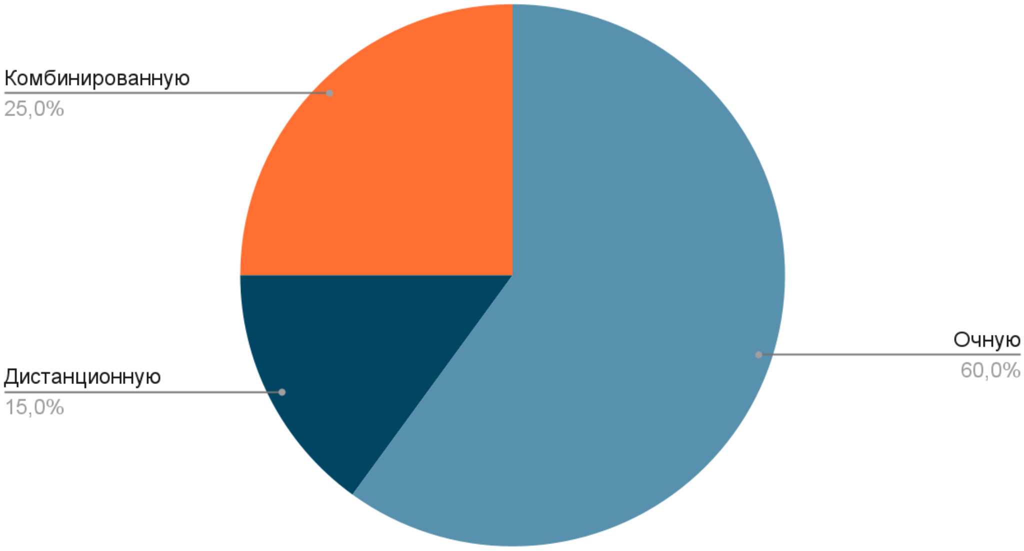
6. Готовы ли вы к большому количеству самостоятельной работы?

а) да, понимаю необходимость этого, б) нет, считаю, что работы на занятии достаточно

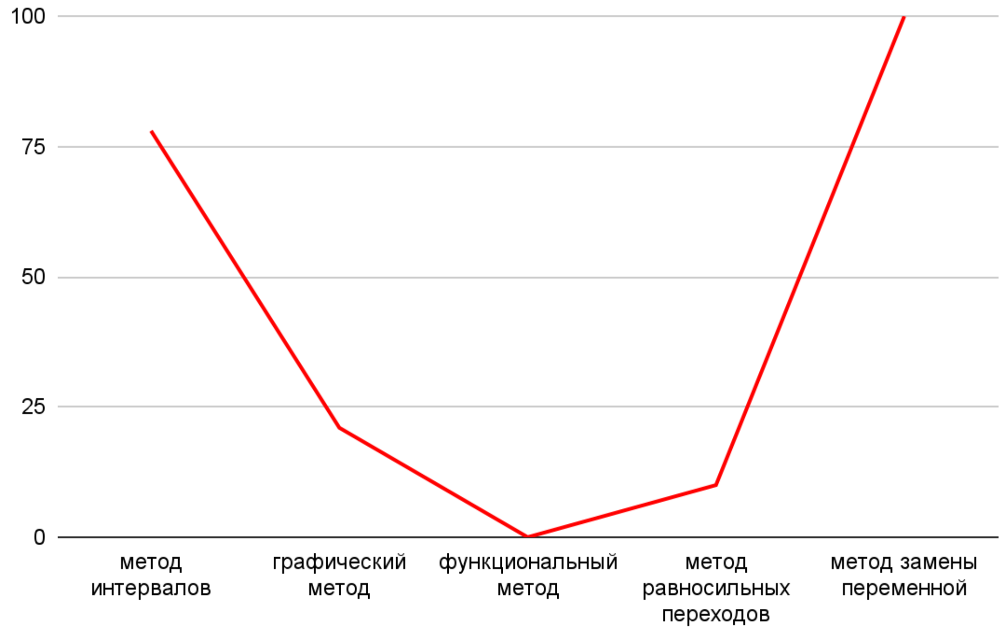
7. Оцените свои метапредметные навыки по шкале от 1 до 10

Приложение Ж. Результаты анкетирования

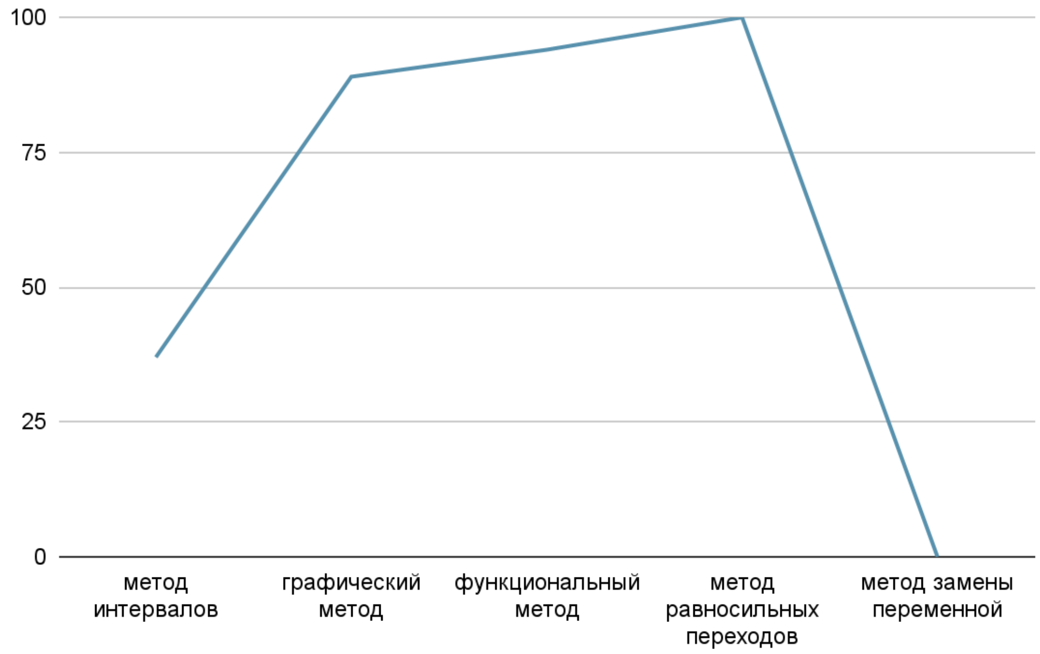
1. Какую форму обучения вы считаете наиболее продуктивной?



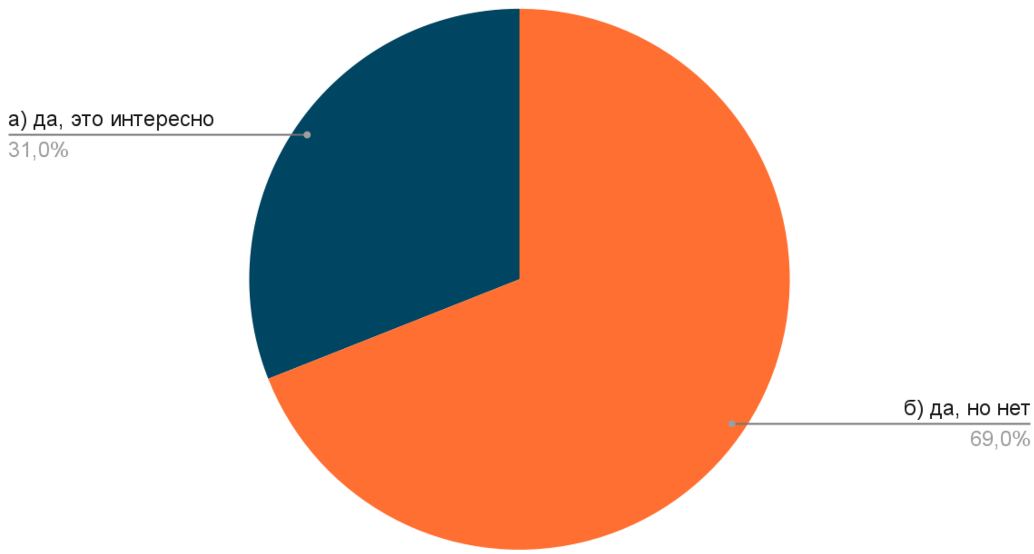
2. Какими из предложенных методов решения уравнений и неравенств, по-вашему, вы владеете хорошо?



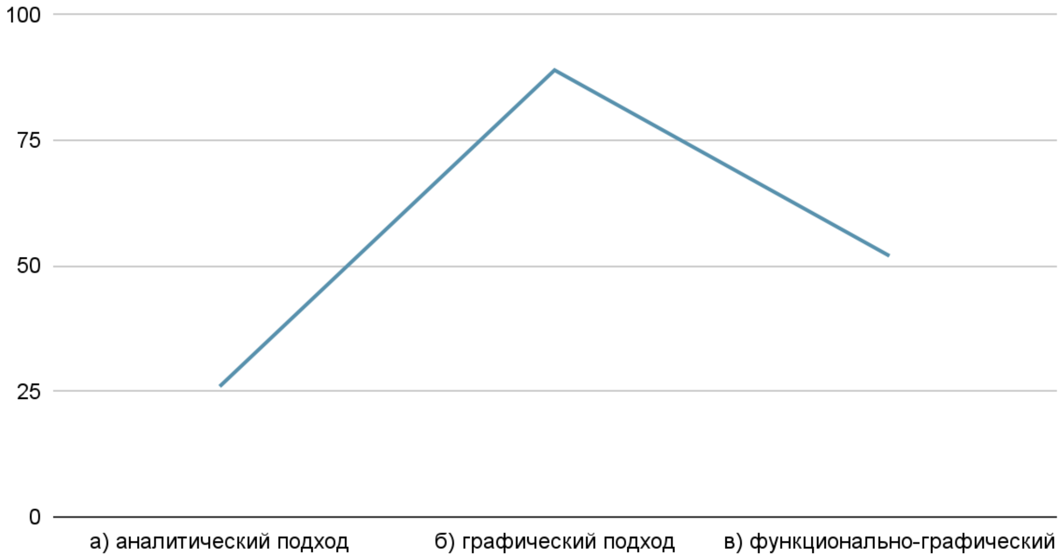
3. Каким из вышеперечисленных методов вы бы хотели научиться или улучшить навыки?



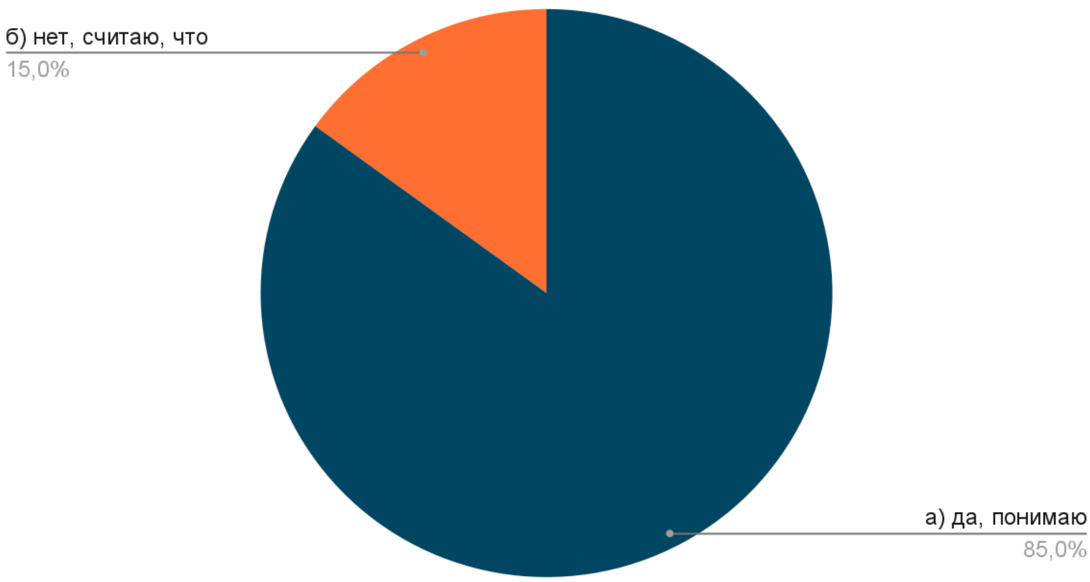
4. Хотели ли бы вы научиться решать задачи с параметрами?



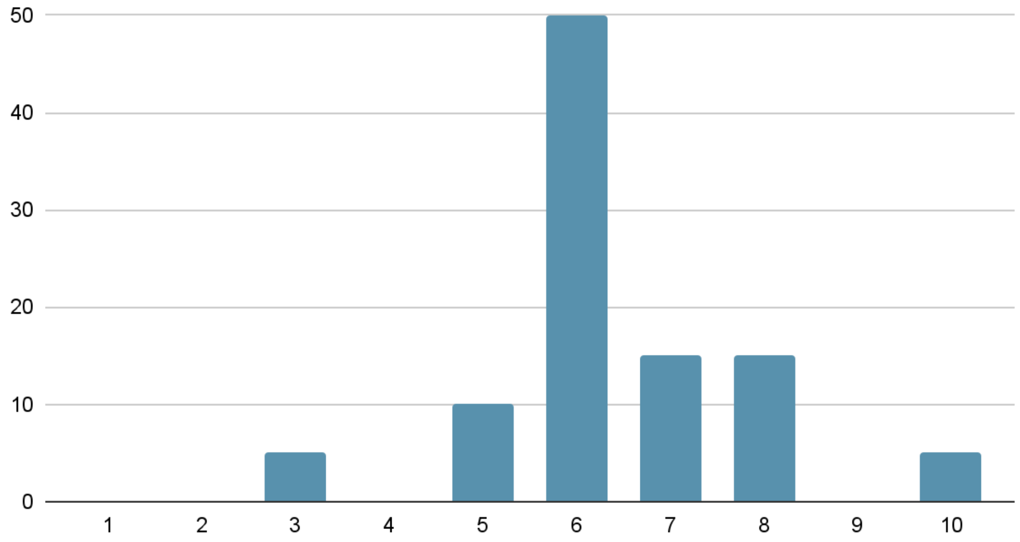
5. С каких из перечисленных основных подходов вы бы хотели начать знакомство с задачами с параметром (в случае положительного ответа на предыдущий вопрос)?



6. Готовы ли вы к большому количеству самостоятельной работы?



7. Оцените свои метапредметные навыки по шкале от 1 до 10



Приложение 3. Лист с рефлексией для участников курса

Оцени себя

Уважаемые участники курса! Просьба давать ответ развернуто.

1. Что нового вы узнали при прохождении курса?

____

____

____

2. Чему научились?

____

____

____

3. Отметьте положительные и отрицательные моменты курса: что вам понравилось и что не понравилось (в формах работы, заданиях и т.д.)?

____

____

____

4. Достаточно ли вы трудились и достигли ли поставленных целей? Дайте оценку своей работе.

____

____

____

5. Планируете ли продолжать изучение тем, рассмотренных на курсе? И если да, то каких?

____

____

____