МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. АСТАФЬЕВА»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича

Конференция включена в план научно-образовательных мероприятий, приуроченных к проведению 29-го Международного конгресса математиков в Санкт-Петербурге

Красноярск, 11–12 ноября 2021 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2021

ББК 22.1
И 471

Редакционная коллегия:
В.Р. Майер (отв. ред.)
С.В. Ларин
В.В. Абдулкин
А.К. Цих

И 471 **Информационные технологии в математике и математическом образовании:** материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. Конференция включена в план научно-образовательных мероприятий, приуроченных к проведению 29-го Международного конгресса математиков в Санкт-Петербурге. Красноярск, 11–12 ноября 2021 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2021. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-525-2

Представлены статьи секций «Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений в фундаментальных исследованиях по математике», «Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке школьников и студентов», «Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике».

Предназначены специалистам в области математики и математического образования, а также всем интересующимся данными проблемами.

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-525-2

© Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике

ПАМЯТИ РОБЕРТА АДОЛЬФОВИЧА МАЙЕРА

IN MEMORY OF ROBERT ADOLFOVICH MAYER

Л.В. Шкерина **L.V. Shkerina**

Профессор Р.А. Майер, ученый, педагог, архивы кафедры математики и методики обучения математике, документы, публикации.

Статья посвящена столетию со дня рождения профессора Майера Роберта Адольфовича, известного ученого и педагога, организатора педагогической науки в Красноярском крае, специалиста по теории и методике обучения математике, автора многочисленных работ по проблемам развития математического мышления и познавательной активности обучающихся в процессе изучения математики.

Professor R.A. Mayer, scientist, teacher, archives of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, documents, publications.

The article is devoted to the centenary of the birth of Professor Robert Adolfovich Mayer, a well-known scientist and teacher, organizer of pedagogical science in the Krasnoyarsk Territory, a specialist in the theory and methodology of teaching mathematics, author of numerous works on the problems of the development of mathematical thinking and cognitive activity of students in the process of studying mathematics.

21декабря 2021 г. исполняется 100 лет со дня рождения профессора Роберта Адольфовича Майера.

Отдавая дань памяти Роберту Адольфовичу, готовясь к этой дате, мы обращаемся к документам, публикациям и другим источникам, чтобы через время еще раз осознать величину личности, ученого, педагога и коллеги Роберта Адольфовича Майера.

Характеристика

В архивах кафедры математики и методики обучения математике есть характеристика, которая была составлена в 2001 г. в связи с представлением Роберта Адольфовича Майера, профессора кафедры математического анализа и методики его преподавания, к награждению Почетной грамотой Законодательного собрания Красноярского края.

В характеристике говорится: «Р.А. Майер в 1952 г. с отличием окончил физико-математический факультет Тамбовского педагогического института.

Педагогическую деятельность начал с октября 1954.

В январе 1973 г. при МГПИ им. В.И. Ленина защитил диссертацию на степень кандидата педагогических наук, тема диссертации „Система задач с функциональным содержанием в курсе алгебры 8-й школы"».

С 1974 г. работал в Красноярском педагогическом университете.

Лекции читает на высоком научно-методическом уровне, большое внимание уделяет связи наглядно-образного и логического мышления. Много работает со студентами индивидуально.

Ведет научные исследования по темам: „Развитие математического мышления и познавательной активности учащихся в процессе изучения математики в школе"; „Профессионально-педагогическая направленность процесса обучения математике в педвузе". По результатам исследований им написано и издано в центральных издательствах и в РИО института 76 научно-методических работ, в том числе более 20 книг.

Р.А. Майер является хорошим организатором науки. За последние годы под его руководством преподаватели математического факультета КГПУ и других вузов города разрабатывают весьма актуальные направления в вузовской дидактике „Профессионализация индивидуальной работы со студентами в процессе их специальной подготовки", „Подготовка выпускников математических отделений педагогических институтов к реализации в будущей педагогической деятельности принципов политехнизма и связи обучения с жизнью".

Р.А. Майер ведет большую организационно-методическую работу. Являясь членом факультетской и институтской методических комиссий, он возглавил работу по созданию учебных планов и программ. Под его руководством разработан учебный план специальности № 2104 (учитель математики и информатики, 5 лет) и программа по курсу математического анализа, по которым ведется обучение на математическом факультете.

За работу по подготовке учительских кадров Р.А. Майер награжден знаком „Отличник народного образования".

В последние годы сосредоточил свои усилия на создании учебных и методических пособий по математическим дисциплинам. Активно работает в социологической лаборатории университета в области социальных проблем образования.

Был награжден знаком Законодательного собрания Красноярского края „Признание"».

Вернемся в 1974 год

Как все начиналось в нашем институте на физмате? Написать лучше, чем об этом написал сам Роберт Адольфович, невозможно. В своей широко известной книге «Судьба российского немца» он посвятил этому целую главу. Приведем некоторые выдержки из нее.

«Глава 27. Красноярский педагогический

Красноярск встретил предзакатным солнцем и влажным, пахнущим бензином и гарью воздухом. Наш АН-24, долго колесивший по дорожкам взлетного поля, остановился, наконец, у самого его края. Рядом, за невысокой оградой, серые пятиэтажные дома, гудящие машины, спешащие куда-то люди. А здесь, всего в нескольких сотнях метров от жилых кварталов города, яростно ревя моторами, взлетали и садились самолеты.

Беспокоила и предстоящая работа в деканате. Смутно ощущал, что вхождение в коллектив будет для меня трудным. Ведь для большинства преподавателей факультета был я чужим человеком, „темной лошадкой". У них же свои устоявшиеся взгляды, привычки, традиции, свои авторитетные лидеры. Мне оставалось только приспосабливаться. И это было самым трудным. Меня всегда обуревали идеи и желание воплотить их в жизнь. Смогу ли я обуздать себя, подчиниться чужой воле. Заснул в тот вечер с большим трудом и утром проснулся с головной болью.

Выборы проходили в середине марта на заседании Совета факультета. Присутствовала ректор Ольга Гавриловна Пелымская. Сначала декан факультета, Черкашин Владимир Сергеевич, сделал доклад об итогах зимней сессии, потом долгое и эмоциональное обсуждение причин низкой успеваемости и большого отсева. И, наконец, выборы. Представляла меня Пелымская. Поддержал Черкашин. Потом мое выступление. Говорил о своем видении проблем и планах на ближайшее будущее. Конечно, некоторые из моих идей не всем пришлись по душе, но проголосовали, насколько мне помнится, единогласно или почти единогласно.

Двадцатого марта 1974 г. вступил в должность. Сколько раз потом, вспоминая прошлое, ругал себя за этот шаг, за согласие возглавить факультет. Сколько потерял времени, физических и духовных сил. Принятый мною факультет был самым большим учебным подразделением института. Два отделения (математики и физики), пять специальных кафедр, более шестидесяти преподавателей, не считая преподавателей общественных кафедр и, наконец, около тысячи студентов дневного отделения и более трехсот заочников.

С первых дней работы пришлось столкнуться с массой новых для меня проблем: более двухсот задолжников за зимнюю сессию, плохая посещаемость занятий, обилие опаздывающих, холод в аудиториях, классные доски, обтянутые пузырящимся обшарпанным линолеумом, переполненное общежитие, отсутствие условий для самостоятельной работы студентов. Однако заниматься этими проблемами некогда. Уже в апреле началась подготовка к распределению студентов на работу в школы края, в основном сельские. Просьбы, слезы, звонки, справки, уйма справок. Справки о беременности, болезнях, престарелых родителях. Все хотят остаться в городе, работать в городских школах. Потом „Ленинские дни", митинги, научная студенческая конференция. Потом сами майские праздники. Кому-то они были в радость, но не нам с Валерием Петровичем, моим заместителем. Портреты вождей, флаги, знамена, лозунги, плакаты, стремящиеся домой студенты. Их жаль, они хотят в деревню, к родителям, но мы должны обеспечить явку. Вечером дежурство в общежитии.

В августе начались приемные экзамены и сразу после их окончания розыск выпускников, не явившихся на работу по распределению. Письма, телеграммы, звонки, посещение родителей. Хорошо, если принимали. А однажды спустили собаку. В самый разгар розыскных работ началась сельскохозяйственная кампания. Все первокурсники факультета на месяц-полтора направлялись на уборочные работы в Назаровский район. С каждой учебной группой должен был ехать преподаватель, желательно мужчина. Но мужчин не хватало. Приходилось посылать женщин, многие из которых имели детей. А в деревнях постоянные ЧП. То плохо кормят, то не предоставляют нужного жилья, то травмы, то забастовки. Весь сентябрь и часть октября проходили в поездках по деревням и селам, в разборе жалоб руководителей и студентов. В конце сентября – копка картофеля и турнепса, в которой принимали участие все оставшиеся в городе студенты и преподаватели. Как правило, сельскохозяйственная эпопея продолжалась до снега.

В конце октября вновь подготовка к праздникам. Оформление праздничной колонны. Знамена, флаги, транспаранты, и извечная проблема с явкой студентов на демонстрацию.

Это было трудно, это выматывало, но не в этом была главная трудность. Как и предчувствовал, наиболее болезненным для меня оказался процесс вхождения в новый коллектив, спаянный давними традициями, личной дружбой, авторитетными и уважаемыми лидерами.

По мнению ректора, я должен был посещать заседания кафедр, участвовать в подборе кадров и обеспечивать трудовую дисциплину не только студентов, но и сотрудников факультета.

Однако сотрудники факультета и, прежде всего, заведующие кафедрами не хотели мириться с такой новой и необычной для них ролью декана. Первая буря возникла, когда Пелымская потребовала, чтобы направляемые кафедрами документы были завизированы мною. Возмутила заведующих и моя попытка посетить заседания кафедр. С подозрением отнеслись они и к моему намерению вести расчет штатов централизованно, по факультету в целом. Глухое сопротивление вызывали все попытки привлечь преподавателей к более активной воспитательной работе через посещение общежитий, комсомольских и партийных собраний, через участие в воскресниках, дежурствах добровольной народной дружины, и главное, через систему кураторства, на которую я по опыту, приобретенному в Енисейском пединституте, возлагал большие надежды.

Много споров и взаимного непонимания возникало из-за неуспевающих студентов. Преподавательский коллектив требовал немедленного отчисления нерадивых студентов. Мой призыв к более внимательному к ним отношению воспринимался как нажим на преподавателей, как желание таким способом снизить отсев студентов. Много нареканий вызвало и мое стремление составлять расписание по правилам, а не под отдельных, как мне казалось, чрезмерно напористых преподавателей.

Неожиданной оказалась реакция некоторых членов коллектива на заведенный мною журнал, в который, боясь забыть о данном кому-либо обещании или поручении, записывал вопросы, требующие решения. Почему-то некоторые из противостоящих мне преподавателей решили, что я завел на них „черную книгу”, и даже ходили жаловаться к первому секретарю горкома КПСС.

Жестко контролировалась посещаемость. Не реже двух раз в неделю на второй ленте лично обходил все аудитории, записывая отсутствующих. Потом, по мере их появления в институте, требовал отчета. По инициативе Валерия Петровича мы писали письма родителям.

По вечерам, уже лежа в постели, обдумывал я свои действия, пытаясь разобраться в допущенных ошибках. Вспоминая те, давно ушедшие в прошлое годы, тешу себя надеждой, что не все преподаватели факультета так уж негативно относились к моей деятельности».

Роберт Адольфович Майер, доцент кафедры математического анализа

Роберт Адольфович – это ярчайший пример ученого-педагога, который теорию и практику образования рассматривал как две неразделимые области, всегда подвергал многоаспектному теоретическому анализу и обосновывал любые новации, появляющиеся в практике образования и, в частности в процессе обучения математике.

В 80–90-е гг. прошлого века Р.А. Майер был организатором педагогической науки в Красноярском крае. Вокруг Роберта Адольфовича всегда собирались люди, серьезно интересующиеся проблемами математического образования. Он являлся основателем межвузовского научно-методического семинара по вопросам преподавания математики в вузе и школе, активными участниками которого были как вузовские преподаватели, так и школьные учителя.

Многие годы Р.А. Майер исследовал проблемы развития математического мышления и познавательной активности учащихся в процессе изучения математики в школе и «Современные образовательные технологии в преподавании математики». По результатам исследований им написано и издано в центральных и местных издательствах более ста научно-методических работ. Он консультировал учителей и руководителей школ г. Красноярска по вопросам статистической обработки экспериментальных данных педагогических исследований. Под его руководством подготовлен и успешно защищен ряд кандидатских диссертаций.

В 1992 г. Роберту Адольфовичу Майеру было присвоено ученое звание профессора по кафедре математического анализа и методики его преподавания.

В 1986 г. кафедра под руководством Р.А. Майера активно включилась в разработку всероссийской темы «Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя математики». При кафедре создается лаборатория по дидактике математики, одним из руководителей которой стал Р.А. Майер. В рамках лаборатории разрабатывалась концепция многоступенчатой подготовки учителя математики и методической системы ее реализации. Была издана серия сборников научных трудов «Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя в педвузе», где он был не только автором статей, но и членом редколлегии. Роберт Адольфович стоял у истоков создания Всероссийского семинара преподавателей математики педагогических вузов. Он стал соратником А.Г. Мордковича по организации работы этого семинара. В 2021 г. в г. Брянске прошел юбилейный 40-й семинар.

Научные исследования профессора Р.А. Майера в 90-е гг.

Весьма обширной была область научных исследований Роберта Адольфовича, центральное место в ней всегда занимали проблемы повышения качества математического образования студентов и школьников. Сформулируем некоторые темы его исследований:

1. Многоуровневая система высшего образования и профессиональная подготовка учителя (1993).
2. Многоуровневая подготовка учителей математики на математическом факультете Красноярского педагогического института (1993).
3. Дифференцированное обучение в системе многоуровневой подготовки учителей (1994).
4. Дифференцированное обучение в школе как социально-педагогическое явление (1994).
5. К вопросу о гуманизации математического образования в школе (1995).
6. Гуманитарный потенциал математических курсов, изучаемых в педагогических вузах (1995).
7. Подготовка и повышение квалификации педагогических кадров в Красноярском крае (по материалам социологических исследований) (1996).
8. Мнение учителей математики о проблемах развивающего обучения (1997).
9. Особенности управления процессом обучения математике в школах гуманитарного профиля (1997).
10. Наука о случайном в школьном курсе математики (1999).
11. Электронный учебник как инструмент познания и педагогического исследования (2000).
12. Одна из форм компьютерной поддержки курса теории вероятностей и статистики (2000).

Учебные пособия и монографии

Перечень пособий и монографий Роберта Адольфовича говорит о системном подходе к качеству образования, в том числе математического:

1. История математики. Курс лекций. Часть 1 (2001).
2. Условия и факторы формирования здорового образа жизни будущих учителей: коллективная монография (2003).
3. Формирование здорового образа жизни студентов: коллективная монография (2004).
4. Качество подготовки педагогических кадров и актуальные проблемы повышения их квалификации (социологический анализ): коллективная монография (2005).
5. Теория и практика статистического анализа в психолого-педагогических и социологических исследованиях (2005).
6. История математики. Курс лекций. Часть 2 (2006).
7. История математики. Пособие к семинарским занятиям (2007).
8. Статистическое сопровождение педагогического эксперимента (2008).
9. История математики. Издание второе, стереотипное (2021).

План НИР профессора Р.А. Майера на 2011 год

План утвержден на заседании кафедры 03.11.10, протокол № 3.

Виды и темы НИР	Ожидаемые результаты НИР в 2011 г.
1. «Статистические методы в социально-педагогических исследованиях», научный руководитель кандидат педагогических наук, профессор Р.А. Майер. 2. «Проблемы преподавания курса истории математики в педагогическом вузе», кандидат педагогических наук, профессор Р.А. Майер. 3. Руководство научно-исследовательской работой студентов. 4. Подготовка студентов к участию в научно-методических конференциях и социологических исследованиях	1.1. Завершение и публикация статьи: «Воспитание учащихся средствами школьного курса математики». 1.2. Публикация статьи: «Формирование интереса учащихся к исследовательской деятельности средствами школьного курса математики». 1.3. Завершение и публикация статьи: «Воспитательные возможности школьного курса математики». 1.4. Продолжение работы над пособием для студентов и аспирантов, ведущих исследования в области педагогических наук: «Статистическое сопровождение педагогического эксперимента, ч. 2. Корреляционный анализ». 2.1. Продолжение исследования проблемы преподавания истории математики в условиях двухуровневой подготовки учителя математики: обсуждение на заседании кафедры и публикация тезисов. 3.1. Руководство четырьмя дипломными работами. 4.1. Подготовка к публикации студентами четырех статей

7 декабря 2010 г. Роберта Адольфовича не стало. Это единственный план НИР, который оказался им не выполненным.

Роберт Адольфович – профессор, учитель, педагог

В Красноярском крае вряд ли найдется учитель, а в педагогических вузах России – преподаватель математики, который не знал бы Р.А. Майера и его научные публикации. Талантливый педагог, он для нескольких поколений работников народного просвещения стал Учителем.

В 90-е гг. прошлого века Р.А. Майер был автором нескольких учебных планов по специальности 010101 (математика) с дополнительной специальностью 03010100 (информатика). В 2000 г. под его руководством в соответствии с новым стандартом разработан учебный план по специальности 032100.00, который лег в основу учебных планов этой специальности в ряде вузов России. Созданная профессором Р.А. Майером авторская программа по курсу истории математики также нашла признание и широко использовалась в педвузах. В педагогических вузах России широко применялась разработанная профессором Р.М. Майером авторская программа по курсу математического анализа.

Р.А. Майер разработал комплекс образовательных программ повышения квалификации учителей. Многие годы он читал лекции, проводил мастер-классы, круглые столы с учителями и руководителями школ.

Р.А. Майер был высококвалифицированным специалистом, талантливым организатором. Его лекции отличались высоким научно-методическим уровнем и пользовались большим успехом у студентов. Много внимания в них уделялось связи наглядно-образного и логического мышления, связи с жизнью. Много работал со студентами индивидуально.

Центр социологических исследований

Р.А. Майер стоял у истоков создания Центра социологических исследований в Красноярском государственном педагогическом университете, основное направление деятельности которого – исследование актуальных социологических проблем в области образования Красноярского края.

Последние годы Р.А. Майер много и плодотворно работает в области социологии образования: исследует проблемы формирования здорового образа жизни учащейся молодежи края, их духовной культуры; проблемы подготовки и формирования педагогических кадров края. Является соавтором целого ряда книг, написанных по материалам социологических исследований различных актуальных проблем в образовании края и рекомендованных к использованию в реальной образовательной практике и управлении образованием в целом.

Р.А. Майер имеет правительственные награды: «Отличник народного просвещения», медаль «За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина».

В октябре 2002 г. за выдающиеся заслуги и в связи с юбилеем университета Р.А. Майер был награжден «Золотым знаком КГПУ им. В.П. Астафьева».

Юбилей 85! Адрес

Дорогой Роберт Адольфович!

Уже 32 года Ваша жизнь связана с кафедрой математического анализа! Вы наш лидер и идеал во всем!

Человек незаурядных способностей, огромного интеллекта и феноминальной памяти, для которого всегда была по плечу любая задача! Немало задач разнообразного свойства Вам пришлось решить в разные периоды работы на кафедре.

В начале 90-х Вы были автором учебных планов двухуровневой подготовки учителя математики, разноуровневых учебных программ по математическому анализу; в конце 90-х – первым среди нас, кто обратился к созданию электронных учебных пособий; сегодня – Вы один из первых, кто использует компьютеры и программное обеспечение на учебных занятиях.

Ваши уникальные учебники признаны в России и за ее рубежами, они стали достоянием, «золотым» образовательным ресурсом кафедры.

Настольной книгой в семье каждого из нас стала Ваша семейная хроника «Судьба российского немца». В этой книге мы ищем и находим ответы на самые трудные вопросы нашей жизни.

Вы всегда для нас «первый номер», мэтр и учитель, глубокоуважаемый и горячо любимый Человек!

Сегодня особенный день, мы все пришли поздравить Вас с Юбилеем!

Жизнь прекрасна во всех ее проявлениях!

Живите долго-долго! Пишите книги, учите студентов, журите внуков и балуйте правнуков!

Прошли годы, далеко в прошлом остались недопонимание и настороженность коллектива, Роберт Адольфович стал глубокоуважаемым человеком, к его мнению прислушивались, с ним считались. Благодаря своей уникальной работоспособности, высокому профессионализму, мудрости, последовательности и системности во всем он стал реальным лидером и мэтром! Мы все советовались с ним в большом и малом. Роберт Адольфович стал нашим иммунитетом, всегда и словом, и делом помогал находить правильные решения.

Роберт Адольфович всегда был с коллективом. Отношения были во многом доверительные, строились на взаимопонимании и взаимоуважении. В редкие минуты отдыха, когда кафедра собиралась по случаю чьего-то дня рождения или праздника, Роберт Адольфович любил читать лирические стихи. Чаще других он читал это стихотворение С. Маковского.

Любить – это слушать нездешние хоры
И рокоты арф неземных,
Постигнуть, что мир – чьи-то близкие взоры
И миры, отраженные в них.

Любить – это ночи томиться беззвездные,
Грустить и не знать, что грустишь.
Стоять одиноко над бездной, над бездной
И не знать, что над бездной стоишь.

Любить – это небо похитить у Бога,
И небо за ласки отдать.
Страдать так покорно, так много, так много,
Чтоб сердце устало страдать.

Любить – это падать, и в этом падении
Другого с собою увлечь:
Любить – это бредить, сгорая в мгновенье,
И мгновенье зажечь.

Вечная память Роберту Адольфовичу Майеру.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ, СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

О СРЕЗКАХ ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ ТРИНОМИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

ON TRUNCATIONS OF THE DISCRIMINANT FOR THE SYSTEM OF TRINOMIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

И.А. Антипова, Е.А. Клешкова **I.A. Antipova, E.A. Kleshkova**

Алгебраическое уравнение, дискриминант, многогранник Ньютона, срезка, дискриминантное множество, параметризация.

Рассматривается дискриминант приведенной системы *n* триномиальных алгебраических уравнений. Исследуются срезки дискриминанта на гиперграни его многогранника Ньютона. Основой исследования являются свойства параметризации дискриминантного множества системы.

Algebraic equation, discriminant, Newton polytope, truncation of the polynomial, discriminant set, parametrization.

We deal with the discriminant of the reduced system of *n* trinomial algebraic equations. Truncations of the discriminant on facets of its Newton polytope are investigated. The research is based on the properties of the parametrization of the discriminant set of the system.

Рассмотрим *приведенную систему n* триномиальных алгебраических уравнений

$$Q_i := y^{\omega^{(i)}} + x_i y^{\sigma^{(i)}} - 1 = 0, i = 1, \dots, n \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$, переменными комплексными коэффициентами $x = (x_1, \dots, x_n)$, в которой $y^{\omega^{(i)}} := y_1^{\omega_1^{(i)}} \cdot \dots \cdot y_n^{\omega_n^{(i)}}$, $y^{\sigma^{(i)}} := y_1^{\sigma_1^{(i)}} \cdot \dots \cdot y_n^{\sigma_n^{(i)}}$ – мономы неизвестных $y_1, \dots, y_n$ с целыми показателями. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство $\mathbb{C}_x^n$. Предполагается, что матрица ω, составленная из вектор-столбцов $\omega^{(i)}$, невырожденная. Триномиальная система, в которой все мономы имеют независимые переменные коэффициенты, может быть приведена к виду (1) с помощью мономиальных преобразований коэффициентов ввиду свойства полиоднородности ее решения [1].

Обозначим через ∇° подмножество в $\mathbb{C}_x^n$ всех коэффициентов $x = (x_i)$, для которых полиномиальное отображение $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ имеет кратные нули в комплексном алгебраическом торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$, то есть

$$\nabla^{\circ} = \left\{x \in \mathbb{C}_x^n : Q_1(y^0) = \dots = Q_n(y^0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(y^0) = 0, y^0 \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n\right\},$$

где $\frac{\partial Q}{\partial y}$ – якобиан отображения Q.

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Определение 1. *Дискриминантным множеством* ∇ системы (2) называют замыкание множества ∇° в пространстве коэффициентов. Если множество ∇ есть гиперповерхность, то определяющий ее полином $\Delta(x)$ называют *дискриминантом* системы (1).

Такой подход к определению дискриминанта системы полиномов был предложен в работе [1] как продолжение концепции дискриминанта полинома нескольких переменных (*A*–дискриминанта), развитой в монографии [3].

Наша задача состоит в исследовании *срезок* дискриминанта приведенной системы (1) на гиперграни его многогранника Ньютона. Напомним, что *многогранником Ньютона* $\mathcal{N}_\Delta$ полинома $\Delta(x)$ называется выпуклая оболочка (в пространстве $\mathbb{R}^n$) носителя $\Delta(x)$. Каждый моном $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ может быть визуализирован как точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ решетки $\mathbb{Z}^n$. Под *носителем* полинома понимают множество всех показателей его мономов, имеющих ненулевые коэффициенты.

Определение 2. *Срезкой* полинома $\Delta(x)$ на грань h многогранника $\mathcal{N}_\Delta$ называют сумму всех мономов из $\Delta(x)$, показатели которых принадлежат h.

Структура многогранника Ньютона дискриминанта отражает геометрию дискриминантной гиперповерхности. В частности, асимптотическое поведение гиперповерхности «на бесконечности» контролируется «экстремальными» мономами дискриминанта, которые соответствуют вершинам многогранника Ньютона. Дискриминанты, в свою очередь, играют фундаментальную роль в теории алгебраических функций, в теории особенностей, в алгебраической геометрии и математической физике.

В случае $n = 1$, который считают классическим, известно, что многогранник Ньютона дискриминанта Δ_m алгебраического уравнения степени m комбинаторно эквивалентен $(m-1)$–мерному кубу [3]. В этом случае он детально изучен, в частности, в недавней работе [6] найден новый подход к доказательству факторизационных тождеств для срезок дискриминанта, полученных ранее в [3] с помощью сложной техники теории *A*–детерминантов. Поясним на простом примере, о каких тождествах идет речь.

Рассмотрим приведенное кубическое уравнение

$$y^3 + x_2 y^2 + x_1 y - 1 = 0.$$

Его дискриминант

$$\Delta_3(x_1, x_2) = -27 - 4x_1^3 + 4x_2^3 - 18x_1x_2 + x_1^2x_2^2.$$

Многогранник Ньютона $\mathcal{N}_{\Delta_3}$ изображен на рис. 1а. Срезки полинома $\Delta_3(x_1, x_2)$ на грани h_1, h_2 допускают представление в виде произведения монома на дискриминант полуприведенного уравнения второй степени:

$$\Delta_3|_{h_1} = x_1^2x_2^2 - 4x_1^3 = x_1^2 \cdot (x_2^2 - 4x_1) = x_1^2 \cdot \Delta_2(x_1, x_2, 1),$$

$$\Delta_3|_{h_2} = x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 = x_2^2 \cdot (x_1^2 + 4x_2) = x_2^2 \cdot \Delta_2(-1, x_1, x_2).$$

Дискриминанты полиномиальных систем менее исследованы, при этом, очевидно, имеют более сложную комбинаторную природу. Введем матрицу σ, столбцами которой являются показатели $\sigma^{(1)},\ldots,\sigma^{(n)}$ системы (1), а также матрицы

$$\Psi := \omega^*\sigma \text{ и } \widetilde{\Psi} := \Psi - |\omega|E_n,$$

где ω^*– присоединенная матрица к матрице ω, E_n – единичная матрица, $|\omega|$ – детерминант матрицы ω. Таким образом, матрицы σ и ω определяют носитель системы (1). Из результатов работы [2] следует, что строки матриц Ψ и $\widetilde{\Psi}$ (обозначим их $\psi_1,\ldots,\psi_n$ и $\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_n$ соответственно) определяют нормальные направления для гиперграней многогранника Ньютона дискриминанта системы (1).

Исследуем срезки дискриминанта $\Delta(x)$ на гиперграни h_j многогранника $\mathcal{N}_\Delta$, имеющие нормали ψ_j, $j = 1,\ldots,n$. Для каждого j введем квадратную матрицу $\sigma_{[j]}$, элементами которой являются всевозможные миноры второго порядка матрицы Ψ, содержащие элементы j-ой строки и j-го столбца, и диагональную матрицу

$$\omega_{[j]} := |\omega|\psi_j^{(j)}E_{n-1},$$

предполагая, что $\psi_j^{(j)} \neq 0$.

Теорема 1. *Срезка $\Delta|_{h_j}$ дискриминанта приведенной системы (1) на грань h_j с точностью до мономиального множителя представляет собой композицию дискриминанта приведенной системы $n-1$ триномиальных уравнений, носитель которой определен матрицами $\omega_{[j]}$ и $\sigma_{[j]}$, и мономиальных функций*

$$u_j(x) = x_i \cdot x_j^{-\psi_j^{(i)}/\psi_j^{(j)}}, i \neq j$$

коэффициентов $x = (x_1,\ldots,x_n)$ исходной системы (1).

Доказательство Теоремы 1 основано на свойствах параметризации дискриминантного множества системы (1), которая, согласно [1], определяется алгебраическим многозначным отображением из комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}_s^{n-1}$ в пространство коэффициентов системы $\mathbb{C}_x^n$, имеющим координаты

$$x_i = -\frac{|\omega|s_i}{\langle\tilde{\psi}_i,s\rangle}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\langle\tilde{\psi}_k,s\rangle}{\langle\psi_k,s\rangle}\right)^{\frac{\psi_k^{(i)}}{|\omega|}}, i = 1,\ldots,n.$$

Утверждение Теоремы 1 проиллюстрируем на следующем примере. Пусть дана система из трех уравнений

$$\begin{cases} y_1 + ay_1^2y_2y_3 - 1 = 0, \\ y_2 + by_1y_2^2y_3 - 1 = 0, \\ y_3 + cy_1y_2y_3^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

с тремя неизвестными y_1, y_2, y_3. Переменные коэффициенты системы для удобства обозначим a, b, c. Ее дискриминант есть следующий полином:

$$\Delta = 4a^5b^2 - 8a^5bc + 4a^5c^2 - 27a^4b^4 + 36a^4b^3c - 6a^4b^3 - 2a^4b^2c^2$$
$$+36a^3b^4c - 6a^3b^4 - 256a^3b^3c^3 - 52a^3b^3c^2 + 16a^3b^3c - 2a^3b^3$$

$$-52a^3b^2c^3 - 16a^3b^2c^2 + 2a^3b^2c + 36a^3bc^4 + 16a^3bc^3 + 2a^3bc^2$$
$$-6a^3c^4 - 2a^3c^3 + 4a^2b^5 - 2a^2b^4c^2 + 6a^2b^4c + a^2b^4 - 52a^2b^3c^3$$
$$-16a^2b^3c^2 + 2a^2b^3c - 2a^2b^2c^4 - 16a^2b^2c^3 - 6a^2b^2c^2 + 6a^2bc^4$$
$$+16ab^3c^3 + 2ab^3c^2 + 6ab^2c^4 + 2ab^2c^3 - 8abc^5 - 2abc^4 + 4b^5c^2$$
$$-27b^4c^4 - 6b^4c^3 + b^4c^2 - 6b^3c^4 - 2b^3c^3 + 4b^2c^5 + b^2c^4.$$

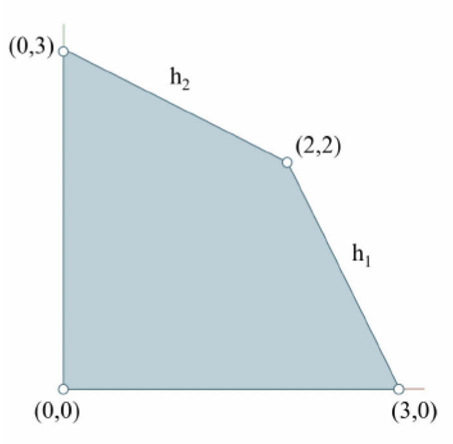


Рис. 1а

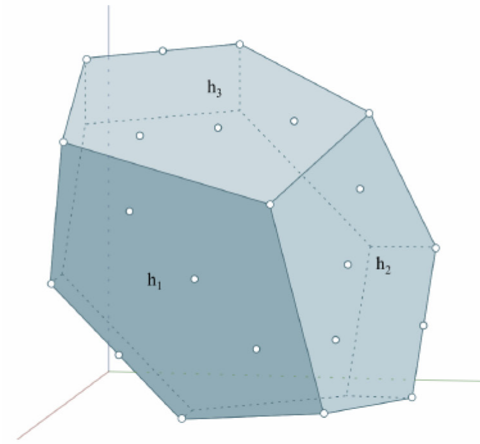


Рис. 1б

Многогранник Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$ представляет собой десятигранник (рис. 1б). Внешние нормальные направления к гиперграням задают векторы

$$n_1 = (-1,0,0), \quad n_6 = (1,1,2),$$
$$n_2 = (0,-1,0), \quad n_7 = (-1,-1,-1),$$
$$n_3 = (0,0,-1), \quad n_8 = (-1,-1,0),$$
$$n_4 = (2,1,1), \quad n_9 = (-1,0,-1),$$
$$n_5 = (1,2,1), \quad n_{10} = (0,-1,-1).$$

Заметим, что $n_4 = \psi_1, n_5 = \psi_2, n_6 = \psi_3$. Факторизованные срезки полинома Δ на грани h_1, h_2, h_3 имеют вид:

$$\Delta|_{h_1} = -a^3(256b^3c^3 + 27ab^4 - 36ab^3c + 2ab^2c^2 - 36abc^3 + 27ac^4$$
$$-4a^2b^2 + 8a^2bc - 4c^2),$$
$$\Delta|_{h_2} = -b^3(256a^3c^3 + 27a^4b - 36a^3bc + 2a^2bc^2 - 36abc^3 + 27bc^4$$
$$-4a^2b^2 + 8ab^2c - 4b^2c^2),$$
$$\Delta|_{h_3} = -c^3(256a^3b^3 + 27a^4c - 36a^3bc + 2a^2b^2c - 36ab^3c + 27b^4c$$
$$-4a^2c^2 + 8abc^2 - 4b^2c^2).$$

В данном примере

$$\omega_{[1]} = \omega_{[2]} = \omega_{[3]} = 2E_2, \text{ а } \sigma_{[1]} = \sigma_{[2]} = \sigma_{[3]} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

поэтому рассмотрим систему из двух триномов

$$\begin{cases} y_1^2 + uy_1^3 y_2 - 1 = 0, \\ y_2^2 + vy_1 y_2^3 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

с переменными коэффициентами u и v. Ее дискриминант имеет вид:

$$\Delta' = 256u^3v^3 + 27u^4 - 36u^3v + 2u^2v^2 - 36uv^3 + 27v^4 - 4u^2 + 8uv - 4v^2.$$

Сделаем замену в коэффициентах системы (3): $u \to ba^{-1/2}$, $v \to ca^{-1/2}$. Тогда Δ' преобразуется к виду:

$$\Delta_1' = a^{-3}(256b^3c^3 + 27ab^4 - 36ab^3c + 2ab^2c^2 - 36abc^3 + 27ac^4 - 4a^2b^2 + $$
$$+ 8a^2bc - 4a^2c^2).$$

Таким образом, мы видим, что срезка $\Delta|_{h_1}$ с точностью до мономиального множителя совпадает с Δ_1'.

Замена $u \to ab^{-1/2}$, $v \to cb^{-1/2}$ преобразует Δ' к виду:

$$\Delta_2' = b^{-3}\,(256\,a^3c^3 + 27a^4b - 36a^3bc + 2a^2bc^2 - 36abc^3 + 27bc^4 - 4a^2b^2 + $$
$$+ 8a^2bc - 4a^2c^2).$$

что соответствует срезке $\Delta|_{h_2}$.

Замена $u \to ac^{-1/2}u \to ac^{-1/2}$, $v \to bc^{-1/2}$ преобразует Δ' к виду:

$$\Delta_3' = c^{-3}\,(256a^3b^3 + 27a^4c - 36a^3bc + 2a^2b^2c - 36ab^3c + 27b^4c - 4a^2c^2 + $$
$$+ 8a^2bc - 4a^2c^2).$$

что соответствует срезке $\Delta|_{h_3}$.

Дискриминанты в примере вычислены с помощью системы компьютерной алгебры для полиномиальных вычислений Singular [4].

Библиографический список

1. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n неизвестных // Изв. РАН. Сер. Матем. 2012. Т. 76, № 5.С. 29–56.
2. Antipova I.A., Kleshkova E.A. On facets of the Newton polytope for the discriminant of the polynomial system // Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1180–1188.
3. Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. Discriminants, Resultants, and Miltidimensional Determinants // Birkhauser, 1994.
4. Decker W., Greuel G.-M., Pfister G., Schonemann H. Singular 4-1-2 – A computer algebra system for polynomial computations. URL: http://www.singular.uni-kl.de 2019.
5. Dickenstein A., Feichtner E. M., Sturmfels B. Tropical discriminants // J. Amer. Math. Soc. 2007. 20. P. 1111–1133.
6. Mikhalkin E., Stepanenko V., Tsikh A. Blow-ups for the Horn-Kapranov parametrization of the classical discriminant, In: P. Exner etal. (eds.), Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume // EMS Series of Congress Reports, V. 18, EMS Publishing House. 2021. P. 315–329.

ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ТОМОГРАФА

PRINCIPLE OF OPERATION OF A COMPUTED TOMOGRAPHY SCAN

И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих

I.A. Antipova, E.N. Mikhalkin, A.K. Tsikh

Посвящается 100-летию со дня рождения профессора Роберта Адольфовича Майера

Компьютерная томография, преобразование Радона, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, преобразование Меллина.

Описывается принцип действия компьютерного томографа с математической точки зрения. Приводится краткая история интегральных преобразований.

Computed tomography, Radon transform, Fourier transform, Laplace transform, Mellin transform.

In the paper, we deal with the mathematical background of the operation of a computed tomography scan. Moreover, a brief history of the theory of integral transforms is given.

Пролог

Компьютерная томография − это одно из наиболее впечатляющих научных достижений XX в. Оно оказало революционное воздействие на всю современную медицину. За разработку компьютерной томографии А. Кормак и Г. Хаунсфилд были удостоены Нобелевской премии 1979 г. в области медицины и физиологии.

Математическим аппаратом в описании принципа действия компьютерного томографа служит теорема Радона из интегральной геометрии [3]. Сама интегральная геометрия зародилась в рамках теории интегральных преобразований [2]. Сначала появились преобразования Фурье и Лапласа. Затем важный шаг сделал Меллин [7]: в 1896 г. он получил формулу обращения для преобразования Лапласа и попутно ввел новое преобразование, названное его именем. Указанная формула обращения послужила источником появления теоремы Радона, на которой базируется принцип действия компьютерного томографа. Поэтому в статье мы приводим краткую историю теории интегральных преобразований.

1. Компьютерная томография

При снятии томограммы изучаемую часть тела человека микросдвигами перемещают сквозь кольцо сканирующего устройства. Сканер, состоящий из источника рентгеновского излучения и ряда детекторов, находится в корпусе, имеющем форму тора («бублика»), и может вращаться в нем по кругу (см. рис.) [6].

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

В фиксированном относительно томографа положении тела происходит следующее. При каждом повороте сканера из источника излучения веером выходят лучи, а данные детекторов характеризуют ослабление излучения вдоль соответствующих направлений. Коэффициент поглощения в каждой точке зависит от плотности тканей организма, а интеграл от функции «коэффициент поглощения» $f(x_1, x_2)$ по отрезку движения луча от источника до детектора определит суммарное поглощение луча.

Если по значениям таких интегралов удастся восстановить значения интегрируемой функции, то в рассматриваемом сечении человеческий организм будет представлен картой плотности тканей. Набор изображений, полученных в серии параллельных сечений, дает трехмерное представление. Расположение и размеры участков с «неправильно» измененной плотностью позволяют врачу поставить диагноз.

С математической точки зрения восстановление функции на плоскости по ее интегралам вдоль всевозможных прямых − классическая задача, решенная Иоганном Радоном в 1917 г.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x_1, x_2) рассмотрим прямую h, заданную уравнением

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = s.$$

Если $\xi_1 \neq 0$, то на прямой h в качестве координаты возьмем x_2. Другая координата восстанавливается по ней формулой $x_1 = \frac{s - \xi_2 x_2}{\xi_1}$.

Определение 1. *Преобразованием Радона функции $f(x_1, x_2)$ называется ее интеграл по прямой h:*

$$\mathcal{R}[f](\xi, s) = |\xi_1|^{-1} \int\limits_h f(x_1, x_2)\, dx_2 = |\xi_1|^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{s - \xi_2 x_2}{\xi_1}, x_2\right) dx_2.$$

Для краткости это преобразование будем также обозначать $\tilde{f}(\xi, s)$.

Теорема (Радон, 1917). *Если $\tilde{f}(\xi, s)$ – преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ с компактным носителем, то сама функция f восстанавливается по $\tilde{f}$ следующей формулой*:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{|w|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{f}(\omega, s)}{\partial s} |_{s=(\omega,x)+p}\, p^{-1} dp d\sigma,$$

где $d\sigma$ – элемент длины окружности $|w| = 1$.

Практическая реализация томографических возможностей формулы Радона стала возможной только с приходом эры компьютеров. Задача является трудной не только из-за гигантского объема данных. Для ее решения помимо компьютеров потребовались математические методы, развивавшиеся в течение всего XX столетия. Отметим, что высокая стоимость современных компьютерных томографов больше связана не с инженерной сложностью конструкций, а с зашитыми в них нетривиальными математическими алгоритмами, представляющими основную коммерческую тайну.

2. Преобразование Фурье

В середине XVIII в. Д. Бернулли, Ж.Л. Даламбер и Л. Эйлер, изучая некоторые проблемы математической физики, оказались вовлеченными в жаркие споры по поводу возможности представить более или менее произвольную 2π-периодическую функцию f в виде суммы тригонометрического ряда. В 1822 г. Фурье выразил уверенность в возможности такого представления в своей книге по аналитической теории теплоты. В результате с именем Фурье стали связывать формулы для коэффициентов тригонометрического разложения заданной функции f в виде ее скалярного произведения с элементами ортогональной тригонометрической системы. Процедуру сопоставления периодической функции f последовательности ее коэффициентов Фурье стали называть дискретным преобразованием Фурье. Переход к непрерывному преобразованию Фурье основан на следующем наблюдении [4].

Рассмотрим T-периодическую функцию $f(t)$, абсолютно интегрируемую на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, которую будем называть *сигналом*. Разложим функцию f в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что этот ряд сходится к ней самой. Обозначив через $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ величину, называемую *частотой*, такой ряд запишется в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}. \quad (1)$$

Здесь выражения для c_k получаются из представлений Эйлера для тригонометрических функций через показательные (экспоненты).

Выясним (на эвристическом уровне), что произойдет с разложением (1) при неограниченном увеличении периода T сигнала f. Заменим ряд (1) на тождественное ему разложение

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_k}{\Omega}\right) e^{ik\Omega t} \Omega, \tag{2}$$

где вследствие ортогональности системы $\left\{\varphi_k = e^{ik\Omega t}, t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right\}$,

$$\frac{c_k}{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\Omega t} dt.$$

Введем вспомогательную функцию в виде интеграла с параметром

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{3}$$

значения которой в точках $\omega_k = k\Omega = k\frac{2\pi}{T}$ мало отличаются от величин $c_k \frac{T}{2\pi}$. В таком случае, согласно (2),

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} c(\omega_k) e^{i\omega_k t} \frac{2\pi}{T},$$

где $\omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi i}{T}$.

Последняя сумма напоминает интегральную сумму, и при $T \to \infty$ имеем:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

В итоге получаем разложение функции в «континуальную линейную комбинацию гармоник» $e^{i\omega t}$. Функцию $c(\omega)$, определенную равенством (3), считают *спектром* или *изображением сигнала* f. Периодическая функция имеет дискретный спектр, а произвольная функция − непрерывный. Таким образом, естественным становится следующее

Определение 2. *Функция*

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

называется преобразованием Фурье функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3. Преобразование Лапласа

Рассмотрим функции $f(t)$, определенные на луче $t \geq 0$ и удовлетворяющие следующим условиям:

1) на любом конечном участке луча $t \geq 0$ функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

2) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные M и a, при которых для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leq Me^{at}. \tag{4}$$

Точная нижняя грань значений a, для которых имеет место неравенство (4), называется *показателем степени роста функции* $f(t)$.

Определение 3. *Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительной переменной t называется отображение, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $\mathcal{L}[f](p)$ комплексной переменной p по правилу*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \tag{5}$$

Функция $\mathcal{L}[f](p)$), определенная интегралом (5), называется *изображением Лапласа* функции $f(t)$, а сама функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $\mathcal{L}[f](p)$).

Теорема 1. *Изображение Лапласа (5) функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области $Re\, p > a$, где a − показатель степени роста функции $f(t)$.*

В 1896 г. Меллин [7] доказал, что интегральное преобразование (5) допускает обращение, т. е. сама функция $f(t)$ восстанавливается по ее преобразованию Лапласа. Восхитившись этим фактом, он написал

«Die Theorie der reziproken Functionen und Integrale ist ein centrales Gebiet, welches manche anderen Gebiete der Analysis miteinander verbindet».

В переводе с немецкого сказанное означает, что *«интегральные преобразования служат центром пересечения многих областей анализа»*.

Точная формулировка теоремы Меллина об обращении следующая.

Теорема 2. *Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области $Re\, p > a$ является изображением кусочно гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t, которая имеет степень роста a. Тогда*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \qquad x > a. \tag{6}$$

Интеграл в (6) естественно назвать *обратным преобразованием Лапласа* для функции $F(p)$ и обозначать $\mathcal{L}^{-1}[f]$. Тем самым формула (6) утверждает равенство $f = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]]$.

4. Преобразование Меллина

Определение 4. *Преобразованием Меллина функции $f(t)$, определенной на полуоси $t \geq 0$, называется функция*

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt, \tag{7}$$

здесь $t^s = e^{s \ln t}$, причем s − комплексная переменная.

Заметим, что (7) – это просто двустороннее преобразование Лапласа в новом обличье, потому что замена $t = e^y$ отображает всю числовую ось переменного y на полуось переменного t и дает представление преобразования Меллина

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^y)e^{ys}dy$$

в виде интеграла Лапласа. А при $Re\, s = 0$ последний интеграл превращается в преобразование Фурье функции $y \longmapsto f(e^y)$.

Асимптотическое поведение функции $f(t)$ в нуле и в бесконечности определяет область, в которой преобразование Меллина $\mathcal{M}[f](s)$ будет голоморфным.

Теорема 1'. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет оценкам:*

$$|f(t)| \leq C_1 t^{-\alpha}, \;\; 0 < t \leq 1; \quad |f(t)| \leq C_2 t^{-\beta}, \;\; 1 \leq t \leq \infty, \tag{8}$$

где $\alpha < \beta$. Тогда ее преобразование Меллина является функцией, голоморфной в полосе $\alpha < Re\, s < \beta$.

Аналогом Теоремы 2 для преобразования Меллина является следующее утверждение.

Теорема 2'. *Пусть известно, что заданная функция $F(s)$ является преобразованием Меллина непрерывной при $t > 0$ функции $f(t)$ со свойством (8). Тогда*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)t^{-s}ds, \qquad \alpha < a < \beta. \tag{9}$$

Интеграл в (9) называют обратным преобразованием Меллина функции $F(s)$. Формула (9) выражает равенство $f = \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[f]]$.

Преобразование Меллина широко применяется в теории чисел и алгебраической геометрии [9]. Проблема решения алгебраических уравнений интересует математиков уже более двух тысячелетий. После того как Н. Тарталья, Д. Кардано и Л. Феррари решили уравнения третьей и четвертой степени, появились надежды решить любое алгебраическое уравнение, причем в радикалах. Эти надежды развеял Н. Абель, доказав в 1824 г. невозможность решить уравнение пятой степени в радикалах. Далее последовали работы Э. Галуа, после которых алгебра окончательно «отказалась» заниматься этим вопросом. Саму идею аналитического решения уравнения подал еще Ф. Виет. Однако она была осуществлена лишь спустя 275 лет Ш. Эрмитом и Л. Кронекером: в 1858 г. они доказали, что всякое уравнение пятой степени можно решить в модулярных эллиптических функциях. Я. Меллин в своей работе [8] 1921 г. предложил решать общее алгебраическое уравнение с помощью гипергеометрических функций. О связи гипергеометрических и алгебраических функций подробно можно прочитать в книге [5].

Рассмотрим общее приведенное алгебраическое уравнение

$$y^d + x_n y^{m_n} + \ldots + x_1 y^{m_1} - 1 = 0, 0 < m_1 < \cdots < m_n < d \tag{10}$$

с переменными коэффициентами $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Ветвь решения $y(x)$ уравнения (10), выделенную условием $y(0) = 1$, будем называют *главным решением* уравнения.

Идея Меллина состояла в том, чтобы, вычислив преобразование Меллина $\mathcal{M}[y]$ алгебраической функции $y(x)$, по формуле обращения $y = \mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[y]]$ получить интегральное представление для $y(x)$. Иными словами, пользуясь лишь фактом, что $y(x)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (10), мы хотим получить информацию об $y(x)$ в новом, интегральном обличье, и затем − степенные разложения для $y(x)$.

Преобразование Меллина главного решения определяется n-кратным интегралом

$$\mathcal{M}[y](z) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y(x) x^{z-I} dx,$$

в котором $z = (z_1, \dots z_n)$, $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \dots x_n^{z_n-1}$. Введем векторы

$$\alpha = (m_1, \dots, m_n), \beta = (d - m_1, \dots, d - m_n),$$

координаты которых выражаются через степени уравнения (10).

В терминах этих векторов преобразование Меллина главного решения уравнения (10) выражается формулой

$$\mathcal{M}[y](z) = \frac{1}{d} \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_n) \Gamma\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d}\langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d}\langle \beta, z \rangle + 1\right)}.$$

Поэтому, согласно формуле обращения для преобразования Меллина, справедлива

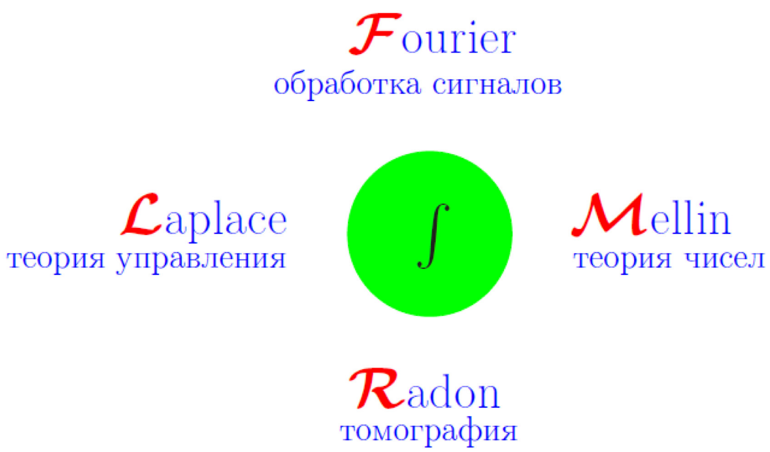
Теорема 3. *Главное решение уравнения (10) представляется интегралом следующего вида:*

$$y(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\alpha + i\mathbb{R}^n} \frac{1}{d} \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_n) \Gamma\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d}\langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d}\langle \beta, z \rangle + 1\right)} x^{-z} dz. \qquad (11)$$

Область сходимости интеграла в (11) вычислена в работе [1]. Там же построена теория многомерных преобразований Меллина.

Эпилог

Краткий очерк двухвековой истории теории интегральных преобразований, приведшей к созданию компьютерного томографа, мы завершаем следующей диаграммой:



С целью компактности в ней отражены лишь самые масштабные фундаментальные направления естественных и гуманитарных наук, в достижениях которых большую роль играли и продолжают играть интегральные преобразования. Например, преобразование Радона успешно применяется не только в медицине, но и в геологии и сейсмологии. А в заключительном параграфе была отражена важная роль преобразований Меллина в алгебраической геометрии в проблеме решений алгебраических уравнений.

Библиографический список

1. Антипова И.А. Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 4. С. 3−20.
2. Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Цих А.К. Интегральные преобразования: учебное пособие. Красноярск: СФУ, 2018.
3. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 16. С. 53−226.
4. Зорич В.А. Математический анализ, часть II. 8-е изд.: учеб. для вузов. М.: МЦНМО, 2017.
5. Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных: монография. М.: Наука, 2014.
6. Сергеев А.Г. Компьютерная томография // Математическая составляющая. М.: Фонд «Математические этюды», 2015.
7. Mellin Hj. Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy fur die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen // Acta Soc. Sci. Fennica.1896. V. 21. iss. 1. P. 1−115.
8. Mellin Hj. Résolution de l'équation algébrique générale à l«aide de la fonction gamma // C.R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math. 1921. V. 172. P. 658−661.
9. Mumford D. Tata Lectures on Theta I, II: монография. Birkhäuser. 1984 / русский перевод: Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях: монография: М.: Мир, 1988.

О РАЗМЕРНОСТИ ГРУППЫ ОДНОМЕРНЫХ ГОМОЛОГИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В ДВУМЕРНОМ ТОРИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ[1]

ON THE DIMENSION OF THE ONE-DIMENSIONAL HOMOLOGY GROUP OF AN ALGEBRAIC CURVE IN A TWO-DIMENSIONAL TORIC MANIFOLD

Н.А. Бушуева, И.В. Овчинникова **N.A. Bushueva, I.V. Ovchinnikova**

Торическое многообразие, торическая компактификация, одномерная группы гомологий, алгебраическая кривая.
В статье вычисляется размерность одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой в гладкой торической компактификации двумерного комплексного пространства.

Toric manifold, toric compactification, one-dimensional homology groups, algebraic curve.
We give a dimensional formula of the one-dimensional homology group of the closure of an algebraic curve in a smooth toric compactification of a two-dimensional complex space.

В сферической и проективной компактификациях двумерного комплексного пространства имеет место двойственность одномерных гомологий замыкания алгебраической кривой и двумерных гомологий дополнения. Для торических многообразий вопрос о существовании такой двойственности остается открытым. В связи с этим представляет интерес изучение структуры циклов и групп гомологий алгебраических поверхностей и их дополнений в торических многообразиях.

Одним из аспектов исследований в этом направлении является вычисление размерности одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой в торическом многообразии.

Выбор торической компактификации обусловлен тем, что проективное пространство является одним из простейших примеров торического многообразия, поэтому закономерно ожидать, что некоторые свойства алгебраических кривых проявляются не только в проективной, но и в торической компактификациях.

1. Формула размерности в сферической и проективной компактификациях

Рассмотрим алгебраическую кривую T в пространстве $\mathbb{C}^2$, задаваемую нулями полинома $Q(w,z)$:

$$T = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 \colon Q(w,z) = 0\},$$

пусть при этом Q раскладывается на множители: $Q(w,z) = Q_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot Q_m^{r_m}$, где $Q_1(w,z), \ldots, Q_m(w,z)$ – неприводимые полиномы.

[1] Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

В сферической компактификации $\dot{\mathbb{C}}^2 = S^4$ пространство $\mathbb{C}^2$ пополняется одной бесконечно удаленной точкой $S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$. При замыкании кривой T в пространстве $\dot{\mathbb{C}}^2$ к ней также добавляется точка на бесконечности: $\bar{T} = T \cup \{\infty\}$. Двумерное проективное пространство $\mathbb{CP}^2$ представляется как компактификация $\mathbb{C}^2$ бесконечно удаленной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. В этом случае при замыкании алгебраической кривой в проективном пространстве к ней на бесконечности могут добавиться уже не одна, а несколько точек. Таким образом, замыкания T в пространствах $\dot{\mathbb{C}}^2$ и $\mathbb{CP}^2$ имеют в общем случае разную структуру. Однако одномерные группы гомологий таких замыканий вычисляются одинаковым методом.

А.П. Южаковым [1] и А.К. Цихом [2] были вычислены размерности одномерных групп гомологий $\bar{T}$ - замыканий кривой T в сферической и проективной компактификациях соответственно. В этих случаях размерность определяется формулой:

$$\dim H_1(\bar{T}) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{s} (q_i - 1) - m + 1, \tag{1}$$

где ρ_j – род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением $Q_j = 0$; q_i – число неприводимых компонент множества $\bar{T}$ в его i-й точке самопересечения; s – число точек самопересечения множества $\bar{T}$; m – число различных неприводимых множителей $Q_1, \dots, Q_m$ полинома Q.

2. Формула размерности в торической компактификации

Напомним, что *торическим* называется многообразие, функции перехода которого мономиальны.

Существует несколько подходов к построению торического многообразия. Один из них основывается на склейке аффинных многообразий (см., например, [3], [4]), другой заключается в глобальной факторизации подмножества комплексного пространства по действию группы (см. [5]).

Гладкие компактные двумерные торические многообразия можно трактовать как компактификацию пространства $\mathbb{C}^2$ при помощи конечного числа «бесконечно удаленных» кривых L_{∞_j}, $j = \overline{1, d}$, каждая из которых гомеоморфна проективной прямой $\mathbb{CP}^1$.

Примерами гладких компактных торических многообразий являются комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_{\infty_1}$ и пространство теории функций $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2 \cup L_{\infty_1} \cup L_{\infty_2}$.

Формула (1) размерности одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой может быть обобщена на случай торического многообразия, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\bar{T}$ – замыкание алгебраической кривой T в торической компактификации пространства $\mathbb{C}^2$. Размерность группы $H_1(\bar{T})$ определяется формулой*

$$\dim H_1(\bar{T}) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{s} (q_i - 1) - m + M, \tag{2}$$

где ρ_j – род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением $Q_j = 0$; q_i – число неприводимых компонент множества $\bar{T}$ в его i-й точке самопересечения; s – число точек самопересечения множества $\bar{T}$; m – число различных неприводимых множителей Q_1, ..., Q_m полинома Q, M – число связных компонент $\bar{T}$.

Заметим, что согласно теореме Безу, любые две алгебраические кривые на проективной плоскости пересекаются, поэтому замыкание T в $\mathbb{CP}^2$ всегда связно, и формула (1) для проективной плоскости вытекает из формулы (2).

В отличие от проективного пространства, замыкание алгебраической кривой в торическом многообразии может состоять из непересекающихся компонент, хотя это скорее вырожденный случай. Примером могут служить две параллельные прямые.

Пример 1. Рассмотрим алгебраическую кривую T в $\mathbb{C}^2$, состоящую из двух неприводимых компонент:

$$T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon (z-1)(z-2) = 0\} = T_1 \cup T_2,$$

где $T_1 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon z = 1\}$, $T_2 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon z = 2\}$.

Прямые T_1 и T_2 параллельны в $\mathbb{C}^2$, их замыкания как в сферической компактификации, так и в проективном пространстве имеют общую точку на бесконечности, а в пространстве теории функций не пересекаются. Род римановых поверхностей $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Применение формул (1) и (2) для размерности одномерной группы гомологий $\bar{T}$ в $\dot{\mathbb{C}}^2$, $\mathbb{CP}^2$ и $\bar{T}$ в $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$ дает одинаковый результат для всех компактификаций: $\dim H_1(\bar{T}) = 0$.

Пример 2. В различных компактификациях пространства $\mathbb{C}^2$ рассмотрим замыкания кривой

$$T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon w(w^2 - z^3)(w^2 - z^3 - z^4) = 0\},$$

которая состоит из трех неприводимых компонент ($m = 3$) нулевого рода ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$):

$$T_1 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon w = 0\},$$

$$T_2 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon w^2 - z^3 = 0\},$$

$$T_3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon w^2 - z^3 - z^4 = 0\}.$$

В пространстве $\mathbb{C}^2$ кривая T имеет две точки пересечения:

$$(0,0) = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \ (q_1 = 3),$$

$$(0, -1) \in T_1 \cap T_3 \ \ (q_2 = 2).$$

На бесконечность у кривых T_1 и T_2 уходят по одной ветви, у T_3 – две, поэтому при замыкании T в сферической компактификации $\dot{\mathbb{C}}^2$ к кривой добавляется одна бесконечно удаленная точка, в которой пересекаются четыре компоненты ($q_3 = 4$).

Таким образом, формула (1) дает $\dim H_1(\bar{T}) = 4$.

В комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^2$ замыкание $\bar{T}$ пересекается с бесконечно удаленной прямой по двум точкам, причем к одной из них подходит только T_1, а во второй пересекаются $\bar{T}_2$ и две компоненты $\bar{T}_3$. Поэтому к точкам самопересечения в конечной части добавится лишь одна точка на бесконечности, для которой $q_3 = 3$. Таким образом, в $\mathbb{CP}^2$ согласно формуле (1), имеем $\dim H_1(\bar{T}) = 3$.

Если выбрать в качестве торической компактификации пространство теории функций $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$, то замыкание T в $\bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}}$ будет имеет ту же структуру, что и в $\mathbb{CP}^2$. Поэтому формула (2) даст результат, совпадающий с вычислениями для $\mathbb{CP}^2$ по формуле (1): $\dim H_1(\bar{T}) = 3$.

3. Достаточное условие связности алгебраической кривой

Как правило, поверхность $\bar{T}$ в торическом многообразии имеет одну компоненту связности, поскольку в невырожденной ситуации две алгебраические кривые пресекаются уже в торе $(\mathbb{C}^*)^2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ (см. [6], [7]). Достаточное условие связности кривой можно сформулировать с помощью многогранников Ньютона полиномов, определяющих T.

Пусть Δ_Q – многогранник Ньютона полинома Q двух комплексных переменных.

Определение 1. Пара многогранников Ньютона Δ_{Q_1}, Δ_{Q_2} называется *невырожденной*, если

$$\dim\left(L\left(\Delta_{Q_1}\right) + L(\Delta_{Q_2})\right) = 2,$$

где $L(\Delta_{Q_i})$ – минимальное аффинное пространство, содержащее Δ_{Q_i}, $i = 1,\ 2$.

Предложение 1. *Пусть алгебраическая кривая* $T \subset (\mathbb{C}^*)^2$ *задается полиномом* $Q = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_r$, *где* Q_i, $i = \overline{1,\ r}$ – *неприводимые множители. Если среди* Δ_{Q_i}, $i = \overline{1,\ r}$ *найдется хотя бы одна невырожденная пара, то кривая* T *связна.*

В примере 1 многогранники Ньютона линейных функций, задающих прямые T_1 и T_2, являются параллельными отрезками, поэтому параллельные прямые представляют вырожденный случай алгебраических кривых, не пересекающихся в $\mathbb{C}^2$.

Библиографический список

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
2. Цих А.К. Двумерные гомологии дополнения алгебраической кривой в $\mathbb{CP}^2$ // Изв. вузов. Математика. 1977. № 5. С. 122–124.
3. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 4. С. 56–64.
4. Fulton W. Introdiction to toric varieties. Ann. of Math. Studies: Princention Univ. Press. V. 131. 1993.
5. Batyrev V., Cox D. On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties // Duke Math. J. 1994. V. 75, № 2. P. 293–338.
6. Кушниренко А.Г. Многогранники Ньютона и теорема Безу // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 3. С. 82–83.
7. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и неприводимые компоненты полных пересечений // Изв. РАН. Сер. Матем. 2016. Т. 80, № 1. С. 281–304.

О РЕШЕНИИ ОБЩЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАММАТИК

ON A SOLUTION OF THE GENERAL ALGEBRAIC EQUATION AND POLYNOMIAL GRAMMARS

О.И. Егорушкин, И.В. Колбасина, Л.И. Лыткина, К.В. Сафонов

O.I. Egorushkin, I.V. Kolbasina, L.I. Lytkina, K.V. Safonov

Общее алгебраическое уравнение, полиномиальная грамматика, формальный степенной ряд, некоммутативные символы, коммутативный образ.

Исследуется разрешимость формальных грамматик, под которыми подразумеваются системы некоммутативных полиномиальных уравнений в случае одного уравнения. Формальные грамматики решаются в виде формальных степенных рядов (ФСР), которые выражают нетерминальные символы языка через терминальные символы; первая компонента решения и есть формальный язык. Авторы развивают метод, основанный на изучении коммутативного образа грамматики и языка, который получается, если во всяком ФСР символы алфавита считать коммутативными переменными. Получена теорема, которая дает разложение в степенной ряд решения общего алгебраического уравнения, а также позволяет исследовать разрешимость в виде ФСР полиномиальной грамматики, состоящей из одного уравнения.

General algebraic equation, polynomial grammar, formal power series, non-commutative symbols, commutative image.

We investigate the solvability of formal grammars, by which we mean systems of non-commutative polynomial equations, in the case of one equation. Formal grammars are solved in the form of formal power series (FPS), which express nonterminal symbols of the language through terminal symbols; the first component of the solution is the formal language. The authors develop a method based on the study of the commutative image of grammar and language, which is obtained if in any FPS the symbols of the alphabet are considered commutative variables. A theorem is obtained that gives a power series expansion of the solution to a general algebraic equation, and also allows us to investigate the solvability in the form of an FPS of a polynomial grammar consisting of one equation.

Теория формальных языков имеет фундаментальное значение не только для лингвистики, но и программирования. Наиболее важные для приложений классы формальных грамматик можно записать в виде системы полиномиальных уравнений с некоммутативными переменными [3; 4].

Под полиномиальной грамматикой понимается система полиномиальных уравнений

$$P_j(z,x)=0,\ \ P_j(0,0)=0,\ \ j=1,\dots,k., \tag{1}$$

которая решается относительно символов z = $(z_1,\dots,z_n)$ в виде формальных степенных рядов (ФСР), зависящих от символов $x = (x_1,\dots, x_m)$ [1; 2].

Символы x_1, ..., x_m называются терминальными и образуют словарь языка, а символы $z_1,...,z_n$ – нетерминальными, они необходимы для задания грамматических правил. Над всеми символами определена некоммутативная операция конкатенации и коммутативные операции формального сложения и умножения на числа, а значит, можно рассматривать ФСР с числовыми коэффициентами. Мономы от терминальных символов интерпретируются как предложения языка, а каждый ФСР – сумма всех «правильных» мономов, который является решением полиномиальной системы, понимается как порожденный грамматикой язык [3; 4].

Исследовать системы с некоммутативными символами очень трудно, и потому в работах [1; 2; 5] предложено рассмотреть коммутативный образ полиномиальной грамматики: для ФСР s коммутативный образ $ci(s)$ получается в предположении, что все переменные коммутативны.

Трудность исследования полиномиальных грамматик имеет место даже в случае одного уравнения:

$$P_1\left(z,x\right)=0\,.$$

Так, известно [1, 2], что одно уравнение с некоммутативными неизвестными может: не иметь решений, иметь любое конечное число решений, а также бесконечно много решений, и потому случай некоммутативных переменных принципиально отличается от уравнения над полем комплексных чисел, которое всегда разрешимо.

Понятно, что достаточно рассмотреть общее алгебраическое уравнение

$$P_1\left(z,x\right)=x_nz^n+x_{n-1}z^{n-1}+\cdots+x_1z+x_0 \tag{2}$$

относительно символа z (здесь $z = z_1$,) и исследовать разложение неявной функции $z = z(x)$, определяемой коммутативным образом уравнения (2) в степенной ряд либо ряд Лорана относительно переменных x_0, x_1,..., x_m.

С одной стороны, решение уравнения (2) представляет интерес для теории формальных языков и грамматик, с другой – конструктивное решение общего алгебраического уравнения в виде функции от коэффициентов является фундаментальной математической задачей, имеющей многовековую историю.

После открытия формул Кардано и Феррари для решения уравнений третьей и четвертой степени появилась некоторая надежда решать произвольное алгебраическое уравнение в радикалах, однако почти через триста лет, в 1826 г. Абель доказал невозможность этого для уравнения пятой и более высоких степеней. Точнее, Абель доказал, что если существует формула, выражающая в радикалах корни уравнения пятой степени через его коэффициенты, то в случае действительных коэффициентов уравнение имеет либо один действительный корень, либо пять (очевидно, такое уравнение может иметь лишь три действительных корня, а значит, формулы в радикалах не существует). С этого времени конструктивное представление решений представляет особый интерес.

Конструктивное представление решения как функции от коэффициентов возможно в виде интегралов и рядов, что часто оказывается более удобным для приближенных вычислений.

Так, в 1921 г. Меллин предложил решать общее уравнение с помощью гипергеометрических функций, причем разложение в ряд получено на основе интегрального представления Меллина-Барнса. В 1984 году Умемура доказал разрешимость уравнения произвольной степени с использованием тэта-функций.

В принципе, получить разложение в ряд неявной функции $z = z(x_1,...,x_n)$, определяемой функциональным уравнением

$$F(z, x_1, ..., x_n) = 0,$$

не очень сложно. Как правило, такие разложения содержат оператор дифференцирования возрастающего порядка, либо коэффициенты степенного разложения даются формулой с возрастающим числом слагаемых.

В связи с этим особенно интересно найти конструктивный способ разложить в ряд неявную функцию *z(x)*, заданную коммутативным образом уравнением (2), если возможно, в «замкнутом виде».

Это было сделано в работе А.Ю. Семушевой и А.К. Циха [6], где в продолжение исследований Меллина получено решение общего алгебраического уравнения (2) в виде кратного ряда от коэффициентов уравнения. Однако авторами рассмотрен случай «приведенного» уравнения (2), когда старший и младший коэффициенты «сокращены» и равны 1, что не ограничивает общности с теоретико-функциональной точки зрения, но осложняет ситуацию в теории языков и грамматик, поскольку в ней нет операции деления на терминальные и нетерминальные символы.

Кроме того, наша идея для получения решения состоит в том, что функция *z(x)* – алгебраическая, и потому ее ряд является диагональю ряда некоторой рациональной функции от переменных, число которых на единицу больше числа коэффициентов уравнения [7].

Рассмотрим произвольную ветвь $z = z(x)$ решения уравнения (2), проходящую через точку (0,0) (достаточно считать, что такая ветвь единственная).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для функции, заданной коммутативным образом уравнения (2), имеет место разложение в ряд Лорана*

$$z(x) = \sum_{k_2+...+k_n \geq 1} (-1)^k \frac{(2k_2 + ... + nk_n)!}{((n-1)k_n + ... + k_2 + 1)! k_2! ... k_n!} \times x_0^{(n-1)k_n + ... + k_2 + 1} x_1^{-nk_n - ... - 2k_2 - 1} x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{k_n} .$$

Естественно, в случае приведенного уравнения, которое упомянуто выше, данный ряд Лорана совпадает со степенным рядом, полученным в работе [6].

Заметим, что в формуле решения степени переменной x_1 отрицательные, а значит, решение исходного некоммутативного уравнения (2) в виде ФСР невозможно, таким образом, имеет место следующее следствие.

Следствие. *Полиномиальная грамматика, порожденная уравнением (2), не имеет решения (не порождает полиномиального языка).*

Библиографический список

1. Егорушкин О.И., Колбасина И.В., Сафонов К.В. О совместности систем символьных полиномиальных уравнений и их приложении // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 119–121.
2. Egorushkin O.I., Kolbasina I.V., and Safonov K.V. On solvability of systems of symbolic polynomial equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2016. Т. 9. Вып. 2. С. 166–172.
3. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1973.
4. Salomaa A. and Soitolla M. Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. N.Y.: Springer Verlag, 1978.
5. Семенов А.Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик. Доклады АН СССР. 1973. № 212. С. 50–52.
6. Семушева А.Ю., Цих А.К. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений. В кн.: “Комплексный анализ и дифференциальные операторы”. 2000. Красноярск: КрасГУ. С. 134–146.
7. Safonov K.V. On power series of algebraic and rational functions in Cn. J. Math. Analysis Appl. 2000. V. 243. P. 261–277.

НИЖНИЙ СЛОЙ И СПЕКТР В ГРУППАХ

BOTTOM LAYER AND SPECTRUM IN GROUPS

И.А. Паращук, В.И. Сенашов **I.A. Parashchuk, V.I. Senashov**

Groups, bottom layer, layer finite groups, factor groups, Sylow subgroups, complete groups, spectrum of a groups.

The results are presented in the class of layer-finite groups on recognition of information about its layers by the bottom layer of groups. A layer-finite group cannot always be recognized by the bottom layer. The report will present cases of recognizable, almost recognizable and unrecognizable groups by the bottom layer. A similar notion of recognition of groups by the bottom layer, namely, recognition of groups by spectrum, will also be touched.

Группа, нижний слой, слойно конечная группа, фактор-группа, силовская подгруппа, полная группа, спектр группы.

Приводятся результаты в классе слойно конечных групп о распознавании по нижнему слою групп информации о ее слоях. Слойно конечную группу не всегда можно распознать по нижнему слою. В докладе будут представлены случаи распознаваемых, почти распознаваемых и нераспознаваемых групп по нижнему слою. Также будет затронуто схожее понятие распознавания групп по нижнему слою, а именно распознавание группы по спектру.

The report is devoted to the problem of recognizing a group by the bottom layer when setting additional conditions on the group.

A group is called layer-finite if it has a finite number of elements of each order. This concept was first introduced by S. N. Chernikov in [1]. It appeared in connection with the study of infinite locally finite p-groups in the case when the center of the group has a finite index in it. S. N. Chernikov in 1948 described the structure of an arbitrary group in which there is an infinite number of elements of each order, and in this work the term layer-finite groups appeared. Results on layer-finite groups can be found in [2–6].

Let us give the definition of the bottom layer of a group G. The bottom layer of a group G is the set of its elements of prime orders. A group G is called recognizable by the bottom layer under additional conditions if it is uniquely reconstructed by the bottom layer under these conditions.

A group G is called almost recognizable by the bottom layer under additional conditions if there exists a finite number of pairwise of non-isomorphic groups satisfying the same conditions with the same bottom layer as the group G.

A group G is called unrecognizable with respect to the bottom layer under additional conditions if there exist an infinite number of pairwise non-isomorphic groups satisfying the same conditions with the same bottom layer as in the group G.

Among the results of groups recognized by the bottom layer with an additional condition for the coincidence of groups without an identity in the bottom layer, we can mention the following: if the bottom layer of the group consists of elements of order 2 and the group has no nonidentity elements of other orders, then G is an elementary Abelian

2-group. V. D. Mazurov proved that a group with a bottom layer consisting of elements 2, 3, 5 in which all other nonidentity elements are of order 4, is locally finite [7].

A group G is called almost recognizable by its spectrum if there are finitely many pairwise non-isomorphic groups with the same spectrum as the group G. A group G is called spectrum-unrecognizable if there is an infinite number of pairwise non-isomorphic groups with the same spectrum as the group G.

The results of group recognition by spectrum can be found in the works of A.V. Vasiliev, V.D. Mazurov, A.M. Staroletov, A.V. Zavarnitsin and others.

Also, the report considers examples of groups simultaneously recognized by the spectrum and by the bottom layer. Such an example is the simultaneous recognizability of a finite simple group $U_4(5)$ by spectrum and bottom layer. Earlier A. V. Vasiliev proved that the group $U_4(5)$ is almost recognizable by spectrum.

We will recognize the group by its bottom layer with additional conditions applied to the group.

In proving the main results of the lecture, we rely on the following well-known results:

Let G be a finite simple group $U_4(5)$ and H be a finite group with the property $\omega(H) = \omega(G)$. Then $H \sim G$ or $H \sim G\ (\gamma)$, where γ is a field automorphism of the group G of order 2. In particular, $h(G) = 2$ [8].

Definition. $h(G)$ is the number of pairwise non-isomorphic finite groups isospectral to G.

The following properties are equivalent;

a) G is a layer-finite group;

b) $Z(G)$ is layer-finite and $G\,/Z(G)$ is a periodic group containing for each prime p only a finite number of p-elements;

c) there is a subgroup S in the center of G such that S and G/S are layer-finite groups [9]. Every complete subgroup of a locally normal (in particular, layer-finite) group is contained in the center of G [1].

A nonzero complete Abelian group decomposes into a direct sum of subgroups isomorphic to the additive group of rational numbers or to quasicyclic groups, perhaps in different primes [10].

A group G is layer-finite if and only if its center contains a complete layer-finite subgroup R such that the quotient group G/R is a thin layer-finite group [11].

If a nilpotent p-group G contains only a finite set of elements of some order other than unity, then it is layer-finite [12].

A p-group G is layer-finite if and only if $Z(G)$ is layer-finite and the quotient group $G/Z(G)$ is finite [9].

A group G is layer-finite if and only if the following conditions are satisfied:

a) G is a periodic group;

b) for every prime number p there are only finitely many Sylow p-subgroups;

c) for every prime p there is at least one Sylow p-subgroup in G, which is layer-finite group [9].

This direction was investigated in the works of the authors [13–19].

Finally, we give a definition of the spectrum of a finite group *G*. The spectrum of a finite group is the set of orders of its elements. A finite group *G* is called spectrum recognizable if any finite group whose spectrum coincides with the spectrum of the group *G* is isomorphic to *G*.

The notion of recognizability of a group by the bottom layer was introduced by analogy with the recognizability of a group by its spectrum.

Results on groups recognizable by spectrum can be found in the works of A. V. Vasiliev, V. D. Mazurov, A. V. Zavarnitsin, A. M. Staroletov, A. A. Buturlakin, M. A. Grechkoseeva and others [20–29].

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388).

References

1. Chernikov S.N. Infinite layer-finite groups // Mat. sb. 1948. No. 1 (22). P. 101–133.
2. Polovitsky Ya.D. Non-primary layer-finite groups // Bulletin of Perm University. 2007. No. 7. P. 21–25.
3. Senashov V.I. Characterization of layer-finite groups // Algebra and Logic. 1989. No. 6 (28). P. 687–704.
4. Senashov V.I. Relationships of almost layer-finite groups with close classes // Vestnik SibGAU. 2014. No. 1. P. 76–79.
5. Polovitsky Ya.D. Layer extremal groups // Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 1960. No. 3 (134). P. 533–535.
6. Mukhammedzhan Kh.Kh. On a group with increasing central series // Math. Sbornik. 1951. Vol. 28 (70). P. 201–218.
7. Mazurov V.D. On groups of exponent 60 with exact orders of elements // Algebra and Logic. 2000. No. 3 (39). P. 189–198.
8. Vasil'ev A.V. On the recognition of all finite non-Abelian simple groups whose prime divisors of orders do not exceed 13 // Sibirsk. Math. Zhurn. 2005. No. 2 (46). P. 315–324.
9. Baer R. Finiteness properties of groups // Duke Math. J. 1948. No. 4 (15). P. 1021–1032.
10. Chernikov S.N. On layer-finite groups // Math. Sb. 1958. No. 3 (45). P. 415–416.
11. Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. Foundations of group theory. Ed. 3rd // Moscow: Nauka. 1982. 288 p.
12. Chernikov S.N. On special *p*-groups // Mat. sb. 1950. No. 2 (27). P. 185–200.
13. Senashov V.I., Parashchuk I.A. Recovering information about a group from the bottom layer // Siberian State University. 2018. No. 2 (19). P. 223–226.
14. Senashov V.I., Parashchuk I.A. Restoration of the group by the bottom layer // TuvGU. 2018. No. 3 (38). P. 114–118.
15. Parashchuk I.A. Restoration of the group by the bottom layer // Abstracts of the APAK. 2017. Vol. 2. P. 296–297.
16. Parashchuk I.A., Senashov V.I. Recovering information about a group by the bottom layer // Siberian Mathematical Journal of Science and Technology. 2018. No. 2 (19). P. 223–226.
17. Senashov V.I., Parashchuk I.A. Restoration of the group by the bottom layer // Bulletin of Tuva State University. 2018. No. 3. P. 114–118.
18. Parashchuk I.A., Senashov V.I. On the influence of the bottom layer of the group on the structure in different classes of groups // Actual problems of aviation and cosmonautics. 2020. Vol. 2. P. 293–295.

19. Senashov V.I., Parashchuk I.A. On a bottom layer group // Bulletin of the Karaganda University. 2020. No. 100. P. 136–142.
20. Buturlakin A.A. Isospectral finite simple groups // Sibirsk. Electron. Math. Izv. 2010. No. 7. P. 111–114.
21. Buturlakin A.A., Vasiliev A.V. On constructive recognition of finite simple groups by the orders of their elements // Algebra and Logic. 2014. Vol. 53. No. 4. P. 541–544.
22. Vasiliev A.V. On the recognition of all finite non-Abelian simple groups whose prime divisors of orders do not exceed 13 // Sibirsk. Math. Zhurn. 2005. Vol. 46. No. 2. P. 315–324.
23. Vasiliev A.V., Grechkoseeva M.A. Recognizability by spectrum for simple classical groups in characteristic 2 // Sibirsk. Math. Zhurn. 2015. Vol. 56. No. 6. P. 1264–1276.
24. Vasiliev A.V., Staroletov A.M. Almost recognizability by spectrum of simple exceptional groups of Lie type // Algebra and Logic. 2014. Vol. 53. No. 6. P. 669–692.
25. Grechkoseeva M.A., Lytkin D.V. Almost recognizability by spectrum of finite simple linear groups of prime dimension // Sibirsk. Math. Zhurn. 2012. Vol. 53. No. 4. P. 805–818.
26. Zavarnitsin A.V., Mazurov V.D. On the orders of elements in coverings of symmetric and alternating groups // Algebra and Logic. 1999. Vol. 38. No. 3. P. 296–315.
27. Zavarnitsin A.V. Recognition by the set of orders of elements of symmetric groups of degree r and r + 1 for prime r // Sibirsk. Math. Zhurn. 2002. Vol. 43. No. 5. P. 1002–1006.
28. Mazurov V.D. Characterization of finite groups by sets of orders of their elements // Algebra and Logic. 1997. Vol. 36. No. 1. P. 37–53.
29. Mazurov V.D. Unrecognizability of a finite simple group 3D4(2) by spectrum // Algebra and Logic. 2013. Vol. 52. No. 5. P. 601–605.

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА JULIA В НАУЧНЫХ ПРОЕКТАХ – НЕУЛУЧШАЕМОЕ УТОЧНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА[1]

THE USE OF THE JULIA LANGUAGE IN SCIENTIFIC PROJECTS IS AN UNIMPROVED REFINEMENT OF THE CLASSICAL MERTENS' THEOREMS

А.В. Рожков, И.В. Демонова, А.В. Светашева

A.V. Rozhkov, I.V. Demonova, A.V. Svetashova

Теория чисел, ОС Debian, язык программирования Julia, теорема Мертенса.
Проведены вычисления, занявшие более четырех лет, получены неулучшаемые результаты по теореме Мертенса о среднем значении функции Эйлера.

Number theory, Debian OS, Julia programming language, Mertens theorem.
Calculations were carried out that took more than four years, non-improved results were obtained according to Mertens's theorem on the average value of the Euler function.

Работа является продолжением и уточнением работы [2] на эту же тему.

В известной теореме Мертенса [1] о сумме значений функции Эйлера присутствует логарифм:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(\mathrm{n} \cdot \ln(\mathrm{n})) . \qquad (1)$$

Наше предположение, что его присутствие виртуально.

В работе [2] число $t = \frac{3}{\pi^2}$ было задано до 15 знака после запятой. В данном исследовании значение t взято с точностью до 78 знака после запятой.

Это не главное отличие. 2 года вычисления производились в среде GAP http://www.gap-system.org/ на процессоре Core i5 4430, 3 ГГц, и были получены результаты вычислений среднего значения функции Эйлера до 36 млрд.

В октябре 2018 г. был опубликован релиз 1.0.1 языка программирования Julia (https://julialang.org/), и мы перешли к вычислениям в этой программной среде. Компьютер, на котором производились вычисления, остался тем же.

Полученные результаты оказались очень оптимистичными:

– *программа месяцами работала без перезагрузки, а GAP приходилось перезапускать через 2–3 часа;*

– *память загружалась в пределах 300 Mb, а не 1500 Mb, как в GAP;*

– *скорость вычислений увеличилась примерно в 100 раз, и за 2 года удалось произвести вычисления до 4 трлн в 100 раз дальше, чем в GAP.*

[1] Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина.

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. (Уточнение формулы Мертенса**).**

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) + \mathrm{n}\cdot s(\mathrm{n}), \qquad (2)$$

где для всех $n < 4*10^{12}$ *выполняется неравенство* $|s(\mathrm{n})| < 0,45$.

Эта формула очень естественна. Из теоремы (1) следует, что среднее значение функции Эйлера равно $\varphi(\mathrm{n}) = \frac{6n}{\pi^2}$. Просуммировав средние значения функции Эйлера от 1 до n, получим арифметическую прогрессию (2):

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(\mathrm{n}) = \frac{6\cdot 1}{\pi^2}+\frac{6\cdot 2}{\pi^2}+\ldots+\frac{6\cdot \mathrm{n}}{\pi^2} = \frac{6}{\pi^2}(1+2+\ldots+\mathrm{n}) = \frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1).$$

Дальнейшее уточнение формулы Мертенса невозможно в силу знакопеременности остатка s(n).

Более того, формула (2) дает не просто поведение суммы функций Эйлера на бесконечности, как формула (1), но и ограничивает значения этой суммы в жестких пределах.

Теорема 2. *Свойства функции s(n) на интервале до 4 трлн.*

1. Функция s(n) знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно 1,4136 (близко к $\sqrt{2} \approx 1.4142$*).*

2. Среднее положительное значение функции s(n) примерно равно 0.1189, отрицательное – 0.1189.

3. Разброс значений функции s(n) таков: до 4 трлн в интервал (-0,44; 0,44) не попало только 16 значений.

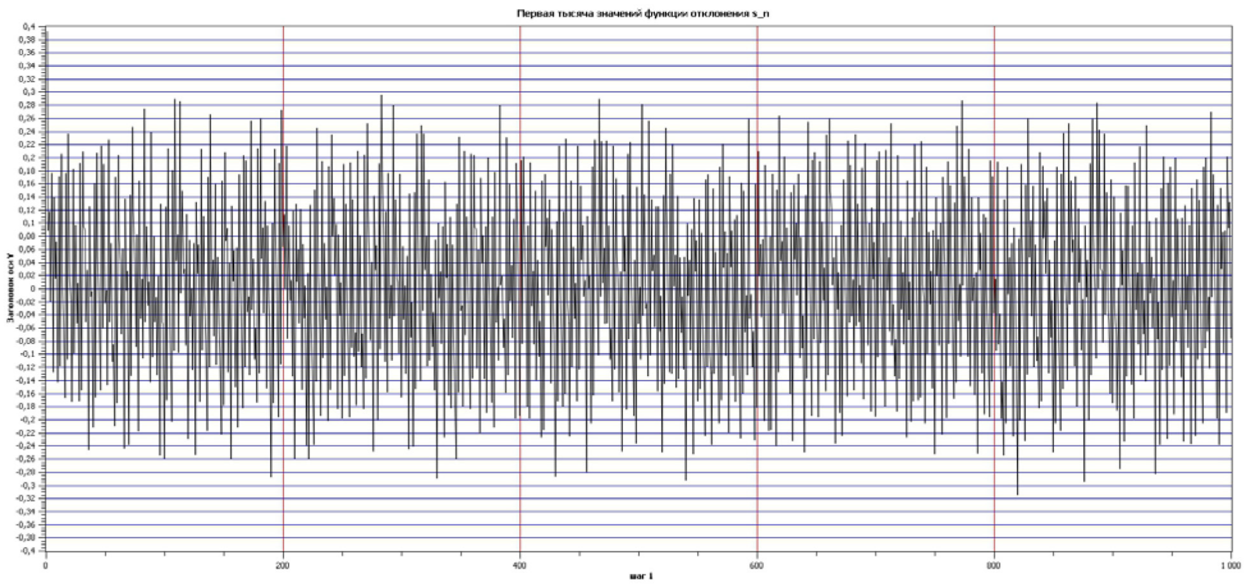


Рис. 1. Первая тысяча значений функции s(n).
По горизонтали шаг 1, по вертикали интервал (-0,4;0,4)

Теорема 3. (Вероятностные свойства функции s(n)).

1. Матожидание значения функции s(n) для $n < 4*10^{12}$ *по модулю не превосходит* 10^{-9}.

2. Дисперсия с точностью до 6 знака равна 0,01986, поэтому

$$\sigma = 0,1409; 3\sigma = 0,423.$$

Правило трех сигм выполняется с большим запасом, отклонение больше 3 сигма встречается реже, чем одно из 2 млрд, а не одно из 400 (0.28 %), как у нормального распределения.

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины с шагом 0.001 до 10 млрд $s(\mathrm{n})$ *приведена на рис. 1.*

Отметим, что в статье [2] шаг был 0.01 и вычисления были выполнены до 1 млрд.

Тут же приведен график нормального распределения для матожидания 0 и дисперсии 0,01986.

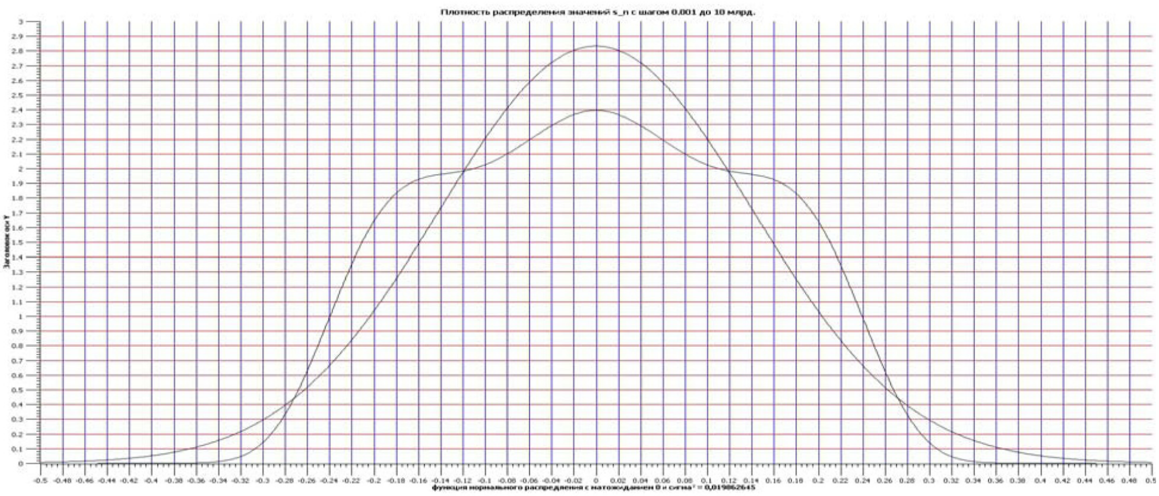


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей и нормальное распределение до 10 млрд

4. Вычислены функция суммы $S(\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{n} s(\mathrm{i})$ *(рис. 3) и матожидание суммы* $S(\mathrm{n})$ *(рис. 4).*

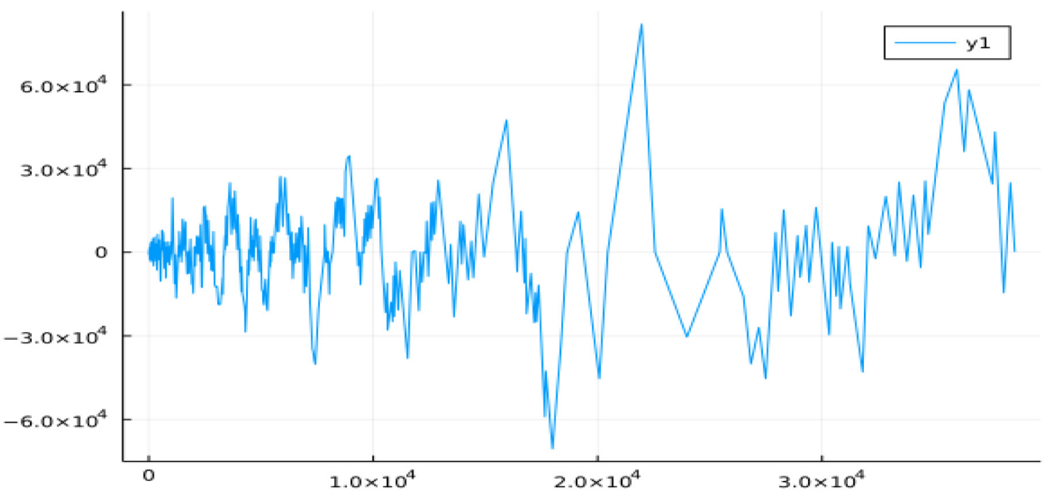


Рис. 3. Суммы S(n) на интервале до 4 трлн, шаг 100 млн

Поведение функции суммы S(n) на рис. 3 при всей ее хаотичности имеет важную качественную характеристику – она схожа с синусоидой, у которой растет не только амплитуда, но и длина периода.

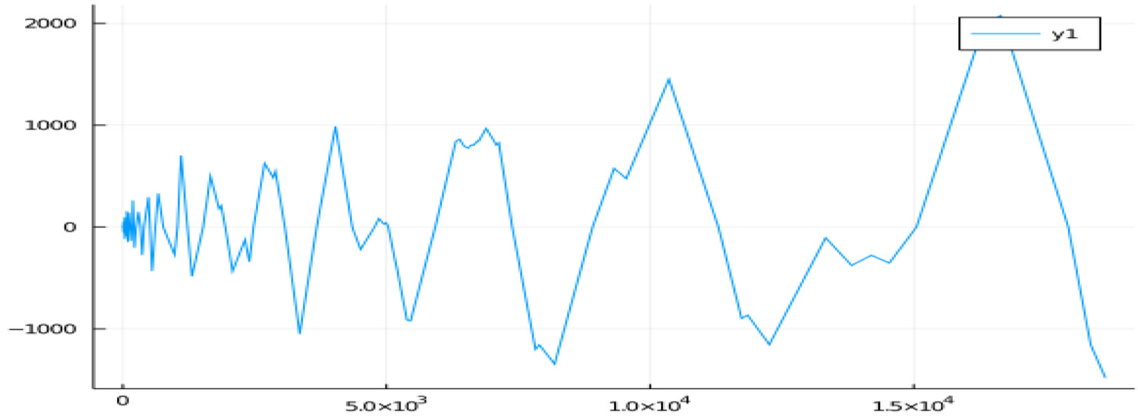


Рис. 4. Матожидание суммы S(n) на интервале до 1900 млрд. Шаг 100 млн

Матожидание суммы ведет себя так же, как и сумма, но амплитуда на два порядка, т. е. в 100 раз меньше.

Графики 3 и 4 нарисованы в самой Julia – пакет Plots, а график рис. 1, 2 нарисован программой SciDAVis (http://scidavis.sourceforge.net/).

Приведем фрагмент программы, который вычисляет значение разности s(n). Для этого подключаем пакет Nemo.

```
using Nemo
function ros(m,n)
p=BigFloat("0.3039635509270133143316383896291829167130763240167396465368270956825193628867062")
  S = BigInt(0);     t:= BigFloat(0.0);    T = 0.0
for i::BigInt = m:n
     S += euler_phi(ZZ(i));     t = BigInt(S)/i-p*(i+1)
        T += t
end
end
ros(BigInt(1),BigInt(10)^14)
```

На выходе мы получили число S – сумму значений функции Эйлера – это натуральное число, оно вычисляется точно, без погрешностей! Поэтому в процессе вычислений погрешность не накапливается.

ВЫВОДЫ

Функция Эйлера жестко связана с разложением на простые множители, поэтому и вычислять ее трудно. Рисунок 1 говорит о том, что «локально простые числа распределены случайно». Это странно звучит, ведь простые числа «уже распределены», просто мы не знаем, как. Нет инструмента, как это формализовать, вот одно из предположений, как описать эту «случайность».

Геленджикская Гипотеза. *Пусть n – натуральное число, зафиксируем его. Пусть A – некоторое множество четных чисел из отрезка [0, 2n], содержащее 0, но не содержащее полной системы вычетов ни по одному нечетному простому модулю.*

Тогда существует бесконечно много простых чисел p, таких, что:

а) все числа $\{p + a \mid a \in A\}$ *являются простыми (слабая гипотеза);*

б) все остальные числа отрезка [p, p+2n] составные (сильная гипотеза).}

Эта гипотеза вдохновлена принципом – «все, что не запрещено, все разрешено». Гипотеза обобщает много предположений на тему распределения простых чисел.

Сильная гипотеза нетривиальна даже в случае, когда множество A одноэлементно. Если множество A = {0, 2}, то слабая гипотеза утверждает, что простых чисел близнецов бесконечно много.

Название гипотезы Геленджикская по городу, где она впервые была представлена на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева, г. Геленджик, 13–20 мая 2018 г. (http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timm&paperid=1570&option_lang=rus).

О формуле Мертенса.

Гипотеза. (поведение функции s(n)).

Возможно, тенденция п. 3 теоремы 2 верна и на бесконечности. Тогда увеличение амплитуды на 0.01 происходит в 16 раз реже, чем предыдущее увеличение отклонения на такую же величину. Если за базу взять 0.43, то больше 0.44 будет 1 раз в 250 млрд, больше 0.45 – 1 раз на 4 трлн, больше 0.46, в среднем, 1 раз на 64 трлн и т.д. Возрастание отклонения логарифмическое, но для реальных вычислений влияние увеличения амплитуды абсолютно ничтожно.

Библиографический список

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 178 с.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера: материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. С. 198–203. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=25510710.
3. Рожков А.В. Экспериментальная математика в КубГУ – первые результаты // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы XIV междунар. науч.-практ. конф. Екатеринбург, 1–5 марта 2021 г. // Екатеринбург: 2021. ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». С. 163–172. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45825056

ПОЛЯ ГАЛУА – ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ JULIA[1]

GALOIS FIELDS – JULIA PLATFORM COMPUTING

А.В. Рожков, Е.О. Филонцева, Р.Л. Репин

A.V. Rozhkov, E.O. Filontseva, R.L. Repin

Поля Галуа, примитивный элемент, язык программирования Julia, криптография.

В рамках освоения магистерского курса по криптографии производятся вычисления в полях Галуа средствами нового языка программирования Julia.

Galois fields, primitive element, Julia programming language, cryptography.

As part of the master's course in cryptography, calculations are made in the Galois fields using the new Julia programming language.

В рамках реализации проекта, поддержанного грантом фонда Владимира Потанина ГСГК-0072-21, разрабатывается ряд курсов для магистерской программы «Алгебраические методы защиты информации», открытой в Кубанском государственном университете в 2013 г. В данной работе речь идет о курсе «Теоретико-числовые методы криптографии». Основа курса – теория полей Галуа.

Julia – высокопроизводительный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Синтаксис языка схож с MATLAB и Python. Julia написан на Си, C++ и Scheme. В стандартный комплект входит JIT-компилятор LLVM, благодаря чему он не уступает в производительности компилируемому языку C/C++.

Язык имеет встроенную поддержку распределенных и параллельных вычислений. Более того, в код Julia можно включать модули и библиотеки, написанные на языках C/C++, Fortran, Python, Java.

Julia включает в себя множество пакетов, с помощью которых можно производить алгебраические вычисления. Язык активно развивается, и уже имеется 6500 официально принятых расширяющих пакетов и более 10 тыс. еще не сертифицированных. Каждый день добавляется 2–3 новых пакета. Обширный функционал позволяет использовать экосистему Julia как систему компьютерной алгебры.

В области алгебры базовые пакеты Nemo v0.27.0, AbstractAlgebra v0.22.1, GaloisFields v1.1.1, Primes v0.5.0, LinearAlgebra, Hecke, SymPy v1.0.52. Для построения графиков хорош мощный пакет Plots.

Julia работает очень устойчиво, месяцами не загружая память более, чем на 400 Mb, чем очень выгодно отличается от GAP (https://www.gap-system.org/), который через 2–3 часа работы приходится перезагружать.

Julia 1.6.3 (https://julialang.org/) имеет и 32- и 64-битные версии под Windows и Linux.

[1] Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина.

Вычисления в полях Галуа

Запускаем Julia в терминале REPL (можно это сделать и различных редакторах типа VS Code), подключаем пакет Nemo

```
julia> using Nemo
Welcome to Nemo version 0.27.0
Nemo comes with absolutely no warranty whatsoever
```

У пакета Nemo есть одна методическая особенность. Полями Галуа в нем называются простые поля Галуа GF(p), которые реализуются как кольца вычетов по простому модулю.

```
julia> F=GF(7)
Galois field with characteristic 7
julia> F(3)^3
6
julia> F(3^3)
6
```

Произвольные поля Галуа называются конечными полями.

Конечное поле можно задать двумя способами.

Первый способ как абстрактное поле с неизвестным нам порождающим многочленом:

```
julia> R, x = FiniteField(5, 2, "x")
(Finite field of degree 2 over F_5, x)
```

Но мы можем легко выяснить, какой это многочлен

```
julia> x^2
x+3
```

Значит это многочлен $x^2 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = x^2 + 4x + 2$.

Второй способ. Вначале создадим кольцо T многочленов над полем вычетов, а потом зададим расширение простого поля Галуа как поля разложения U нашего многочлена:

```
julia> T, t = PolynomialRing(ResidueRing(ZZ, 5), "t")
(Univariate Polynomial Ring in t over Integers modulo 5, t)
julia> U, z = FiniteField(t^2+t + 1, "z")
(Finite field of degree 2 over F_5, z)
```

Модельные задачи

Задача № 1. *Для многочлена* $x^{17} - x + 3$ *над полем GF(199) найти корни.*

Решим задачу, не используя конечные поля.

```
julia> function f(p)
       for i in 1:p
       if (i^17-i+3)%p == 0
       print(i,",")
       end
       end
       end
```

```
f (generic function with 1 method)
julia> f(199)
25,199,
```

Получилось, что 199, т.е. 0 в поле GF(199), является корнем, что неверно. В чем причина? В разрядности целых чисел

```
julia> 199^17 - это Int64 19-значные числа
5245870108793248583
julia> BigInt(199)^BigInt(17) - допустимы миллионы знаков
120365576140143338953454431235743456339 9
```

Немного изменим нашу программку:

```
julia> function f(p)
       for i in 1:p
       if (BigInt(i)^BigInt(17)-i+3)%p == 0
       print(i,",")
       end
       end
       end
f (generic function with 1 method)
julia> f(199)
28,149,
```

Корни получились другие.

Теперь подключим поля Галуа

```
using Nemo
julia> function f(p)
       for i in GF(p)
       if i^17-i+3 == 0
       print(i,",")
       end
       end
       end
f (generic function with 1 method)
julia> f(199)
28,149,
```

Теперь корни совпали.

Задача № 2. *Найти примитивный элемент поля* $GF(5^2)$*, заданного как поле разложения многочлена* $f(\mathrm{x}) = x^2 + x + 1, GF(5)$.

Решение. Используем второй способ задания поля Галуа. Вначале создадим кольцо T многочленов над полем вычетов, а потом зададим расширение простого поля Галуа как поля разложения U нашего многочлена.

```
julia> T, t = PolynomialRing(ResidueRing(ZZ, 5), "t")
(Univariate Polynomial Ring in t over Integers modulo 5, t)
julia> U, z = FiniteField(t^2+t + 1, "z")
(Finite field of degree 2 over F_5, z)
```

Проверим, является ли элемент z примитивным. К сожалению, нет:

```
julia> z^8
4*z+4
julia> z^12
1
```

Проверим элемент y = z+1. Тоже не подходит:

```
julia> y=z+1
z+1
julia> y^8
z
julia> y^12
1
```

Проверим y = z+2. “Упорство и труд – все перетрут!” – подходит

```
julia> y=z+2
z+2
julia> y^8
4*z+4
julia> y^12
4
```

Итак, y = *z*+2 – примитивный элемент нашего поля.

Задачи 3. *Составить таблицу степеней примитивного элемента и таблицу логарифма Якоби.*

Решение. Вычислим все 24 степени элемента y:

```
julia> y=z+2
z+2
julia> for i in 1:24
       print(y^i, ",")
       end
z+2,3*z+3,z+3,4*z,4*z+1,3,3*z+1,4*z+4,3*z+4,2*z,2*z+3,4,4*z+3,2*z+2,4*z+2,z,
z+4,2,2*z+4,z+1,2*z+1,3*z,3*z+2,1
```

Составим объединенную таблицу – первая строка – показатели степеней примитивного элемента y, вторая строка – значение его степеней, третья – логарифм Якоби, который строится просто просмотром первых двух строк. Например, как найти L(10), по определению логарифма $1+y^{10}=y^{L(10)}$. Находим $y^{10}=2z \Rightarrow y^{10}+1=2z+1=y^{21}$, таким образом L(10)=21. Отметим, т.к. 0 не является степенью примитивного элемента, то в 12-столбце вместо значения логарифма стоит символ запрета или останова в машинах Тьюринга – знак #.

В итоге получаем:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
y^i	z+2	3z+3	z+3	4z	4z+1	3	3z+1	4z+4	3z+4	2z	2z+3	4
L(i)	3	9	17	5	15	12	23	4	22	21	19	#

13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
4z+3	2z+2	4z+2	z	z+4	2	2z+4	z+1	2z+1	3z	3z+2	1
8	11	13	20	16	6	10	1	14	7	2	18

Применение языка Julia при изучении разделов алгебры, требующих больших вычислений, очень естественно и продуктивно.

Библиографический список

1. Глухов М.М., Круглов И.А., Пичкур А.Б., Черемушкин А.В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии [Электронный ресурс]. СПб.: Лань, 2021. URL: https://e.lanbook.com/reader/book/153680

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ – ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ JULIA[1]

ELLIPTICAL CURVE – JULIA PLATFORM COMPUTING

А.В. Рожков, Е.О. Филонцева, Р.Л. Репин

A.V. Rozhkov, E.O. Filontseva, R.L. Repin

Поля Галуа, примитивный элемент, язык программирования Julia, криптография, эллиптическая кривая.
В рамках освоения магистерского курса по криптографии производятся вычисления в полях Галуа средствами нового языка программирования Julia.

Galois fields, primitive element, Julia programming language, cryptography, *elliptic curve.*
As part of the master's course in cryptography, calculations are made in the Galois fields using the new Julia programming language.

В рамках реализации проекта, поддержанного грантом фонда Владимира Потанина ГСГК-0072-21, разрабатывается ряд курсов для магистерской программы «Алгебраические методы защиты информации», открытой в Кубанском государственном университете в 2013 г. В данной работе речь идет о курсе «Эллиптическая кривая и электронная подпись». Основой курса является теория эллиптических кривых над полями Галуа.

Julia – высокопроизводительный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Язык имеет встроенную поддержку распределенных и параллельных вычислений. Более того, в код Julia можно включать модули и библиотеки, написанные на языках C/C++, Fortran, Python, Java.

Julia включает в себя множество пакетов, с помощью которых можно производить алгебраические вычисления. Язык активно развивается, и уже имеется 6500 официально принятых расширяющих пакетов и более 10 тыс. еще не сертифицированных. Обширный функционал позволяет использовать экосистему Julia как систему компьютерной алгебры.

Базовые математические пакеты Nemo v0.27.0, AbstractAlgebra v0.22.1, GaloisFields v1.1.1, DarkCurve v0.2.0, LinearAlgebra, Hecke, SymPy v1.0.52. Для построения графиков удобно использовать мощный пакет Plots.

В Windows Julia по умолчанию ставится по адресу C:\Users\user\AppData\Local\Programs\Julia-1.6.3, а расширяющие ее пакеты по адресу C:\Users\user\.julia. При этом, даже если вы не установили ни одного пакета, большинство пакетов уже будет на вашем компьютере – их объем больше 7 Gb. Причина в том, что многие пакеты между собой связаны перекрестными ссылками.

Работа с пакетами. Запускаем Julia в терминале REPL. Нажимаем кнопку **“]”** и попадаем в менеджер пакетов `(@v1.6) pkg>`

[1] Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина.

Для добавления, удаления, тестирования пакета, обновления и выяснения статуса пакетов выполняем следующие команды:

```
(@v1.6) pkg> add Nemo
(@v1.6) pkg> rm Nemo
(@v1.6) pkg> test Nemo
(@v1.6) pkg> up
(@v1.6) pkg> st
Status `C:\Users\rosav\.julia\environments\v1.6\Project.toml`
  [eb74ef6d] DarkCurves v0.2.0
  [8d0d7f98] GaloisFields v1.1.1
  [7073ff75] IJulia v1.23.2
  [2edaba10] Nemo v0.27.0
```

Менеджер помощи вызывается клавишей **“?”**

```
help?>
```

Чтобы работать в привычной среде браузера, нужно набрать команды

```
julia> using IJulia
julia> notebook()
```

МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача № 1. Вычислить количество точек на кривой L, заданной уравнением $y^2 = x^3 + 3x + 8$ над полем GF(199).

Теорема. (Хассе) *Если эллиптическая кривая L задана над полем, содержащим q элементов, то число точек на ней удовлетворяет неравенству*

$$|q+1-\#L| \le 2\sqrt{q}\ .$$

В нашем случае у кривой точек будет от 172 до 228.

```
julia> using Nemo
Welcome to Nemo version 0.27.0
Nemo comes with absolutely no warranty whatsoever
julia> function ros(p)
       F=GF(p)
       t=0
          for i in F
              for j in F
                  s= j^2
                  s1= i^3+3*i+8
                     if s == s1
                        t = t+1
                        print("(",i, ",",j, "),")
                     end
                end
              end
         print(t)
       end
ros(199)
```

```
(0,±40),(6,±21),(10,±21),(11,±24),(12,±58),(14,±40),(15,±29),(16,±42),(17,±14
),(18,±83),(19,±77),(21,±24),(22,±37),(29,±87),(33,±5),(35,±2),(36,±87),(38,±
95),(40,±99),(45,±46),(47,±33),(48,±10),(51,±26),(52,±26),(54,±15),(55,±69),(
57,±74),(59,±14),(64,±96),(65,±3),(68,±5),(69,±37),(71,±23),(73,0),(74,±84),(
75,±32),(79,±19),(82,±81),(88,±13),(89,±28),(91,±55),(92,±22),(94,±7),(95,±66
),(96,±26),(98,±5),(99,±9),(102,±97),(106,±39),(108,±37),(110,±25),(111,±65),
(114,±90),(115,±79),(118,±98),(119,±81),(120,±75),(121,±6),(123,±14),(125,±70
),(126,±4),(130,±55),(132,±23),(134,±87),(136,±78),(138,±36),(141,±90),(142,±
50),(143,±90),(144,±35),(146,±53),(149,±32),(150,±47),(151,±48),(152,±11),(15
4,±41),(155,±62),(159,±31),(161,±44),(162,±63),(163,±3),(165,±2),(167,±24),(1
70,±3),(171,±85),(172,±12),(173,±57),(174,±32),(177,±55),(180,±16),(181,±93),
(183,±21),(185,±40),(186,±89),(187,±45),(189,±42),(193,±42),(195,±23),(197,±8
1),(198,±2), 199
```

Получилось 199 решений и плюс бесконечно удаленная точка – всего 200 точек. Очень редкая кривая, у нее ровно q+1 точка.

Задача № 2. *Построить график эллиптической кривой.*

Используем полученные результаты. Обратим внимание, что она совсем не похожа на эллиптическую кривую над полем действительных чисел

```
     using Plots
x=[0,6,10,11,12,14,15,16,17,18,19,21,22,29,33,35,36,38,40,45,47,48,51,52,54,
55,57,59,64,65,68,69,71,73,74,75,79,82,88,89,91,92,94,95,96,98,99,102,106,
108,110,111,114,115,118,119,120,121,123,125,126,130,132,134,136,138,141,142,1
43,144,146,149,150,151,152,154,155,159,161,162,163,165,167,170,171,172,173,
174,177,180,181,183,185,186,187,189,193,195,197,198];
y=[40,21,21,24,58,40,29,42,14,83,77,24,37,87,5,2,87,95,99,46,33,10,26,26,15,6
9,74,14,96,3,5,37,23,0,84,32,19,81,13,28,55,22,7,66,26,5,9,97,39,37,25,65,90,
79,98,81,75,6,14,70,4,55,23,87,78,36,90,50,90,35,53,32,47,48,11,41,62,31,44,6
3,3,2,24,3,85,12,57,32,55,16,93,21,40,89,45,42,42,23,8,2];
     data=[y,-y]
      plot(x,data)
     --- savefig("ros.png")
```

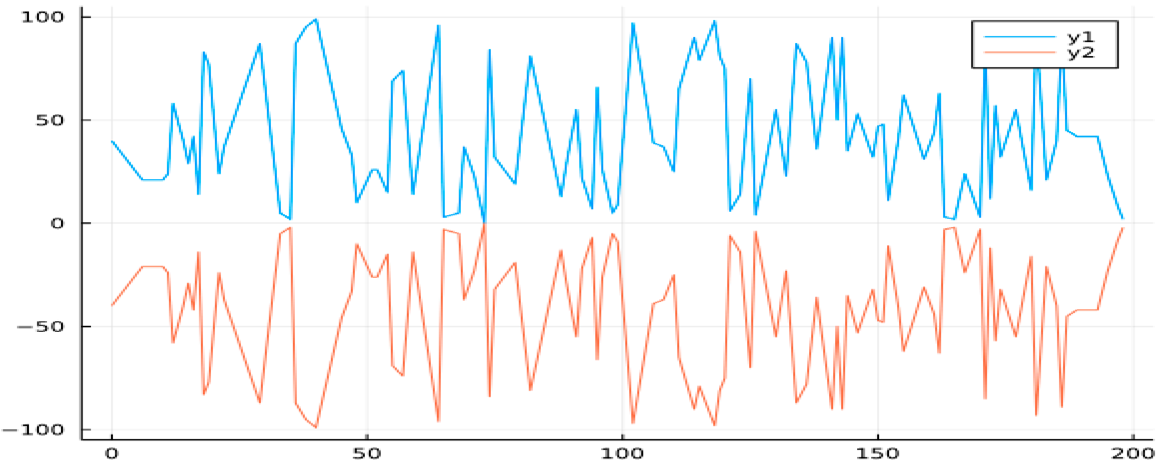


Рис. 1. График кривой L над полем GF(199)

Задача № 3. *Найти элемент максимального порядка на эллиптической кривой*. Наша кривая $y^2 = x^3 + ax + b$, $P(x_1, y_1) + Q(x_2, y_2) = R(x_3, y_3)$ – ее точки.

Тогда при P = Q $\begin{cases} x_3 = k^2 - 2x_1 \\ y_3 = k(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}, k = \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1},$

при $P \neq Q$ $\begin{cases} x_3 = k^2 - (x_1 + x_2) \\ y_3 = k(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}, k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$

Поскольку кривая имеет 200 элементов, то порядок максимального элемента может быть 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200.

Первая программа – удвоение точки s

```
using Nemo
function rosa(p::Int,s::Vector{gfp_elem})
         F=GF(p)
         a= F(s[1]); b= F(s[2])
         k= (F(3)*a^2+F(3))*(F(2)*b)^(-1)
         a1 = k^2-F(2)*a; b1 = k*(a-a1)-b
   return [a1,b1]
end
```

Вторая – сложение точек s +S

```
function rosA(p::Int,s::Vector{gfp_elem},S::Vector{gfp_elem})
         F=GF(p)
         a= F(s[1]); b= F(s[2]); A= F(S[1]); B= F(S[2])
         if s == S || s==-S
         return F(0)
         else
         k= (B-b)*(A-a)^(-1)
         A = k^2-(a+A)
         B = k*(a-A)-b;
   return [A,B]
end
end
```

Программа нахождения порядка точки s

```
function rosN(p::Int,s::Vector{gfp_elem})
         S= rosa(p,s)
          for i in 1:p
                 S= rosA(p,s,S)
                     if S[1] == s[1]
                   println("s=",s, "->","N=",i+3)
                   break
                   end
            end
          end
julia> rosN(199,[GF(199)(102),GF(199)(97)])
s=gfp_elem[102, 97]->N=100
```

Значит точка [102,97] имеет порядок 100.

Пусть M – это множество точек кривой, без нулевой – они перечислены выше.

```
julia> for m in M
       rosN(199,[GF(199)(m[1]),GF(199)(m[2])])
       end
s=gfp_elem[0, 40]->N=100
s=gfp_elem[6, 21]->N=20
s=gfp_elem[10, 21]->N=200
```

Кривая очень хороша, поскольку как группа является циклической. Точка [10,21] имеет порядок 200. Так как функция Эйлера от 200 равна 80, то точек порядка 200 ровно 80 штук.

Выводы

Никакие из вышепроведенных вычислений не могут быть проведены вручную за разумное время. Язык Julia лаконичен и ориентирован на математические вычисления. И может быть применен в любой области математики как хорошее вспомогательное иллюстрационное средство.

Библиографический список

1. Глухов М.М., Круглов И.А., Пичкур А.Б., Черемушкин А.В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии [Электронный ресурс]. СПб.: Лань, 2021. URL: https://e.lanbook.com/reader/book/153680
2. Рожков А.В. Экспериментальная математика в КубГУ: первые результаты // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы XIV междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург, 1–5 марта 2021 г. // ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». Екатеринбург, 2021. С. 163–172. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45825056

СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП ШУНКОВА

PROPERTIES OF PERIODIC SHUNKOV'S GROUPS

В.И. Сенашов **V.I. Senashov**

Periodic group, finitness condition, Shunkov group, almost layer-finite group.
The author develops the direction of characterizing well-known and well-studied classes of groups in other classes of groups with some additional finiteness conditions. In this paper, we give the properties of periodic not almost layer-finite Shunkov groups with condition: the normalizer of any finite nontrivial subgroup is almost layer-finite. Earlier, these properties were proved in various articles of the author, as necessary, sometimes under some conditions, then under others.

Периодическая группа, условие конечности, группа Шункова, почти слойно конечная группа.
Автор развивает направление характеризации известных хорошо изученных классов групп в других классах групп с некоторыми дополнительными условиями конечности. В работе приведены свойства периодических не почти слойно конечных групп Шункова с условием: нормализатор любой конечной нееденичной подгруппы почти слойно конечен. Ранее эти свойства доказывались в различных статьях автора по мере необходимости то при одних условиях, то при других.

For the first time the concept of a layer-finite group appeared in 1945 by S.N. Chernikov.

The group is called *layer-finite*, if the set of its elements of any given order is finite.

In the 70s, interest in layer-finite groups has grown noticeably due to the appearance in a number of works [1–3] characterizations of almost locally solvable groups with the condition of primary minimality in various classes of groups, where essentially some properties of layer-finite groups are used. The class of almost layer-finite groups is wider than the class of layer-finite groups; it includes all Chernikov groups, while it is easy to give examples of Chernikov groups that are not layer-finite.

Almost layer-finite groups are extensions of layer-finite by finite groups.

A group is called *Chernikov* if it is either finite or is a finite extension of the direct product of a finite number of quasicyclic groups.

Shunkov group is a group G in which for any of its finite subgroups K in the quotient group $N_G(K)/K$ any two conjugate elements of prime order generate a finite subgroup.

In this paper we give the properties of a periodic Shunkov group that is not almost layer-finite and satisfies the condition: the normalizer of any finite nontrivial subgroup is almost layer-finite.

The necessity of proving of these properties arose in connection with their use in many articles of the author [4–18], in which they were proved sometimes under some conditions, then under others (the minimality condition for not almost layer-finite subgroups, the absence of second-order elements in the group, the presence of subgroups with certain properties in the group).

At the same time, many comments had to be made that this Theorem is proved in almost the same way as in the previous work, but under different conditions. Finally, in 2020 in a review of my work it was noted that the author should have published properties of groups with the condition: the normalizer of any finite nontrivial subgroup in G is almost layer-finite, and refer to them, and not use the vague one: «The proof of the lemma is similar to the proof ... » Even in the monograph [8], we had to first prove properties 1, 2, 4 for groups without involutions and then for groups with a strongly embedded subgroup, make a note that the proof of properties for this case is similar to the proof of the properties for groups without involutions.

The paper [19] also made many references to lemmas from various articles in which the conditions imposed on the group differ from the conditions of the theorem in the paper.

On the subject of the article, works of other authors [20–25] have been recently published.

In the formulation of the theorems, it is assumed that G is a periodic Shunkov group that is not almost layer-finite, with almost layer-finite normalizers of nontrivial finite subgroups.

First, it is established that the group under study cannot be primary, and its primary subgroups are Chernikov.

Theorem 1. The group G is not a primary group and Sylow p-subgroups in G are Chernikov.

The maximal locally finite normal subgroup in the group under study is trivial.

Theorem 2. The group G does not have a nontrivial locally finite radical.

The next Theorem establishes a connection between locally finite subgroups of the group under study and its maximal almost layer-finite subgroups.

Theorem 3. Any locally finite subgroup of G can be embedded in a maximal almost layer-finite subgroup of G.

In the group under study, infinite maximal almost layer-finite subgroups do not intersect in their layer-finite radicals.

Theorem 4. Let F, M be two different infinite maximal almost layer-finite subgroups of the group G, $R(F)$ and $R(M)$ are their layer-finite radicals. Then $R(F)\cap R(M)=1$.

Any maximal almost layer-finite subgroup in the group under study is infinitely isolated, that is, it contains the centralizers of all its not almost regular elements.

Theorem 5. If for an arbitrary maximal almost layer-finite subgroup H of G its nonidentity element has an infinite centralizer in H, then this centralizer itself is contained in G.

If in the group under study the maximal almost layer-finite subgroup together with its conjugate subgroup intersects with the centralizer of some element of prime order in infinite subgroups, then it coincides with this conjugate subgroup.

Theorem 6. Let b be an element of prime order and intersections $C_G(b)\cap H$, $C_G(b)\cap H^g$ are infinite, where H is a maximal almost layer-finite subgroup of the group G. Then $H = H^g$.

The group under study does not have almost regular involutions, that is, involutions with finite centralizers.

Theorem 7. All involutions in G have infinite centralizers.

In the maximal almost layer-finite subgroup of the group under study, all non-almost regular involutions generate a finite subgroup.

Theorem 8. In a maximal almost layer-finite subgroup V of G all involutions with infinite centralizers in V generate a finite subgroup.

The maximal almost layer-finite subgroup of the group under study does not contain an elementary Abelian subgroup of the eighth order with an almost regular involution.

Theorem 9. In the maximal almost layer-finite subgroup V there is no elementary Abelian subgroup of order 8 from G with almost regular involution in V.

An arbitrary almost layer-finite group contains only a finite number of non-conjugate finite solvable subgroups of a given order.

Theorem 10. In an almost layer-finite group V there are only finitely many non-conjugate finite solvable subgroups of a given order.

An arbitrary almost layer-finite group does not contain an infinite set of non-conjugate elementary Abelian subgroups with finite centralizers.

Theorem 11. The set non-conjugate elementary Abelian subgroups from almost layer-finite group V with finite centralizers in V is finite.

In a maximal almost layer-finite subgroup with involutions of the group under study, all involutions with infinite centralizers are conjugate, and any almost regular involution induces a reversing automorphism in some Abelian normal subgroup of finite index.

Theorem 12. Let V be maximal almost layer-finite subgroup of G containing involutions. Then

1) all involutions with infinite centralizers in V conjugate in V;

2) if k is an involution from V and $C_V(k)$ is finite, then k induces an automorphism in some Abelian normal subgroup of finite index from V, which maps each element of this subgroups in reverse.

The final Theorem states that in a maximal almost layer-finite subgroup of the group under study, all almost regular involutions generate an Abelian subgroup of order at most four.

Theorem 13. In the maximal almost layer-finite group V of the group G all involutions with infinite centralizers in V generate an Abelian subgroup of order at most four.

Conclusion

In this paper we give the properties of periodic not almost layer-finite Shunkov groups with the condition: the normalizer of any finite nontrivial subgroup is almost layer-finite. This liminates the shortcomings in the proofs of many of the author's articles, in which these properties are used without proofs (with references to other works of the author, in which they are proved for groups with very different conditions).

References

1. Pavlyuk I.I., Shafiro A.A., Shunkov V.P. On locally finite groups with the primary minimality condition for subgroups // Algebra and logic. Vol. 13. P. 324–336.

2. Shafiro A.A., Shunkov V.P. The characterization of Chernikov groups in the class of binary finite groups // Sibirsk. tech. in-t, Krasnoyarsk. 1983. 59 p. Manuscript dep. in VINITI 25.08.83, No. 4624–83.
3. Shlepkin A.K. Conjugately biprimtively finite groups with the primary minimality condition // Algebra i Logica. 1983. No. 2 (22). P. 226–231.
4. Senashov V.I. Groups with the minimality condition for not almost layer-finite subgroups // Ukraine math. journal. 1991. No. 7–8 (43). P. 1002–1008.
5. Senashov V.I. A characterization of groups with certain finiteness conditions: Dis ... Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics, Krasnoyarsk, 1997. 235 p.
6. Senashov V.I. Sufficient conditions for the almost layer-finiteness of a group // Ukraine math. journal. 1999. No. 4 (51). P. 472–485.
7. Senashov V.I. Almost layer-finiteness of periodic groups without involutions // Ukraine math. journal. 1999. No. 11 (51). P. 1529–1533.
8. Senashov V.I., Shunkov V.P. Groups with finitness conditions. Novosibirsk: Publishing house of the SB RAS, 2001. 336 p.
9. Senashov V.I. The structure of an infinite Sylow subgroup in some periodic Shunkov groups // Discrete mat. 2002. Vol. 14. P. 133–152.
10. Senashov V.I., Shunkov V.P. Almost layer-finiteness of the periodic part of a group without involutions // Discrete mat. 2003. Vol. 15. P. 91–104.
11. Senashov V.I. On the Sylow subgroups of periodic Shunkov groups // Ukrainian mat. zhurn. 2005. Vol. 57. P. 1584–1556.
12. Senashov V.I. Characterizations of Shunkov groups // Ukraine math. journal. 2008. Vol. 60. P. 1110–1118.
13. Senashov V.I. On Shunkov groups with a strongly embedded subgroup // Trudy IMM UB RAS. 2009. No. 2 (15). P. 203–210.
14. Senashov V.I. Shunkov groups with a strongly embedded almost layer-finite subgroup // Trudy IMM UB RAS. 2010. No. 3 (16). P.234–239.
15. Senashov V.I. On groups with a strongly embedded subgroup having an almost layer-finite periodic part // Ukrainian math. zhurn. 2012. Vol. 64. P. 384–391.
16. Senashov V.I. Almost layer-finite groups. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 106 p.
17. Senashov V.I. On Sylow subgroups of some Shunkov groups // Ukrainian mat. zhurn. 2015. No. 3 (67). P. 397–405.
18. Senashov V.I. Characterization of groups with an almost layer-finite periodic part // Ukrainian mat. zhurn. 2017. No. 8 (69). P. 964–973.
19. Senashov V.I. On Periodic Groups of Shunkov with the Chernikov Centralizers of Involutions // Bulletin of the Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. P. 101–117.
20. Durakov E.B., Sozutov A.I. On periodic groups saturated with finite Frobenius groups // Bulletin of the Irkutsk State University. Series Mathematics. 2021. Vol. 35. P. 73–86.
21. Shlepkin A.A. On one sufficient condition for the existence of a periodic part in a Shunkov group // Izvestiya IGU. Ser. Mathematics. 2017. Vol. 22. P. 90–105.
22. Shlepkin A.A. On a periodic part of a Shunkov group saturated with wreathed groups // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2018. Vol. 24, P. 281–285.
23. Shlepkin A.A. On the periodic part of the Shunkov group saturated with linear groups of degree 2 over finite fields of even characteristic // Chebyshevskii Sbornik. 2019. Vol. 20. P. 399–407.
24. Shlepkin A.A., Sabodakh I.V. On two properties of the Shunkov group // Bulletin of the Irkutsk State University. Series Mathematics. 2021. Vol. 35. P. 103–119.
25. Shlepkin A.A. Groups with a Strongly Embedded Subgroup Saturated with Finite Simple Non-Abelian Groups // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 31. P. 132–141.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВПОЛНЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРУППАХ[1]

ABOUT PERIODIC COMPLETELY PARTITIONABLE GROUPS

А.И. Созутов **A.I. Sozutov**

Расщепляемые группы, вполне расщепляемые периодические группы, изолированные подгруппы.
Приведены основные понятия расщепляемости групп, указаны известные классы расщепляемых групп, отмечена историческая важность этой проблематики для алгебраистов Красноярска и сформулированы полученные за этот год результаты автора в данном направлении.

Partitionable groups, completely partitionable periodic groups, isolated subgroups.
The basic concepts of partitionable groups are presented, the known classes of partitionable groups are indicated, the historical importance of this problem for the algebraists of Krasnoyarsk is noted, and the author's results in this direction obtained during this year are formulated.

Группа G *расщепляема*, если она совпадает с теоретико-множественным объединением некоторой совокупности собственных подгрупп, попарно пересекающихся по единичной подгруппе. Эту совокупность подгрупп называют *расщеплением* (*базисом расщепления*) группы, а сами подгруппы – *компонентами* (*базиса*) расщепления [11; 12].

Расщепление называют *полным, абелевым, нильпотентным и т.д.* в зависимости от его базиса, состоящего из (локально) циклических, абелевых, нильпотентных подгрупп и т.д. Группы с полным расщеплением называются *вполне расщепляемыми*. Класс расщепляемых групп включает важные подклассы конечных и бесконечных групп, периодических групп и групп без кручения. По выражению Е.И. Хухро [40], расщеплямые группы встроены, вплетены в теорию групп. Среди p-групп – это элементарные абелевы группы, группы периода p и любая p-группа, в которой все элементы порядка больше p порождают собственную подгруппу. Расщепляемы конечные и бесконечные точно дважды и трижды транзитивные группы, группы Фробениуса – полупрямые произведения ядра и дополнения, в которых каждый неединичный элемент содержится либо в ядре, либо точно в одном из сопряженных дополнений. Вполне расщепляемы полная и специальная проективные линейные группы размерности два над (локально) конечными полями, простые группы Судзуки, в том числе конечные минимальные простые группы (за исключением групп $L_3(3)$ и $U_3(3)$). Вполне расщепляемы свободные группы, свободные произведения вполне расщепляемых групп, нильпотентные группы без кручения, группы Новикова-Адяна, многие из групп Ольшанского и т.д. Изучению различных свойств расщепляемых групп посвящены сотни работ известных математиков. В том числе и таких работ, в которых понятие расщепляемости не упоминается.

[1] Работа поддержана РФФИ (проект № 19-01-00566 А) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Расщепляемые группы в Красноярске

В 30–40-е гг. систематическое изучение конечных и бесконечных групп с покрытиями и расщеплениями начались в уральской алгебраической школе П.Г. Конторовичем [11; 12], и затем В.М. Бусаркиным, А.И. Старостиным и др. В Красноярской алгебраической школе проблематика конечных и бесконечных расщепляемых групп прочно обосновалась с 1964–65 гг., после приезда в Красноярск В.М. Бусаркина, Ю.М. Горчакова и В.П. Шункова [3; 9; 14]. В монографии [4] изложена схема доказательства такой классификационной теоремы:

Конечная расщепляемая группа есть группа одного из типов: 1) расщепляемая p*-группа; 2) группа Фробениуса; 3)* HT*-группа; 4)* S_4 *– симметрическая группа подстановок четырех символов; 5)* $PGL_2(q)$ *– проективная линейная группа над полем из* q *элементов,* $q \geq 5$*; 6)* $PSL_2(q) = L_2(q)$ *– специальная проективная линейная группа,* $q \geq 4$*; 7)* $Sz(q)$ *– группа Судзуки над полем из* $q = 2^{2n+1}$ *элементов.*

В монографии [4] отмечается, что доказательство этой теоремы опирается на результаты Миллера, Диксона, Фробениуса, Цассенхауза, Бэра, Конторовича, Кегеля, Хьюгеса, Томпсона, Фейта, Судзуки, Горенстейна, Уолтера, Винсента, и др. Так, например, в списке литературы из [4] приведено 16 статей М. Судзуки.

Как было установлено в работах В.М. Бусаркина, А.И. Старостина [2], Р. Бэра и О. Кегеля [43; 45], аналогичная теорема верна и в классе локально конечных групп.

Исследованиям разнообразных расщепляемых групп, групп с существенными фрагментами и признаками расщепляемости, групп с изолированными подгруппами посвящен большой ряд работ представителей Красноярской алгебраической школы. Часть из них представлена в списке литературы (см. [5–10], [16–19], [21–36], [38; 39; 41; 42]).

О периодических расщепляемых группах

В [12; 13] неоднократно отмечалось, что *вопрос о строении бесконечных групп, все истинные подгруппы которых циклические (абелевы, нильпотентны, конечны), открыт*. В диссертации [37] А.И. Старостин констатирует, что *о периодических, но не локально конечных, расщепляемых группах, кроме факта их существования, ничего не известно*. С точки зрения не специалиста по комбинаторной теории групп замечание А.И. Старостина актуально и сейчас. Однако за 50 с лишним лет стало понятно, что расщепляемость в периодических группах весьма распространенное явление [1; 20]. Вполне расщепляемы группы Новикова-Адяна $B(m,n)$ периода $n \geq 665$, периодические произведения Адяна, сомножители которых циклические (или вполне расщепляемы), разнообразный ряд групп Ольшанского [20] и его учеников. Такие группы «бернсайдова типа» задают (определяют) границы исследованиям методами *локального анализа* и *локально бинарного анализа* [37], поскольку в них каждая пара неединичных элементов, выбранных из разных компонент расщепления, порождает бесконечную подгруппу.

Ситуация меняется, когда в группе G есть инволюции. В периодической группе любая пара инволюций порождает конечную подгруппу, т.е. инволюции являются конечными элементами. Неединичный элемент a группы G мы называем *конечным*, если все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ в G конечны, и конечным *энгелевым*, если все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ нильпотентны. В [36] доказаны теоремы 1, 2.

Теорема 1. *Пусть G – бесконечная периодическая вполне расщепляемая группа 2-ранга ≥ 3. Тогда либо G – элементарная абелева 2-группа, либо $O_2(G)$ – элементарная абелева сильно изолированная в G подгруппа, либо G изоморфна проективной специальной линейной группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.*

Теорема 2. *Пусть в бесконечной периодической вполне расщепляемой группе G с инволюциями есть конечный элемент a простого порядка $p > 2$.*

– Если 2-ранг G равен 1, то $G = F \leftthreetimes C$ – группа Фробениуса с локально циклическим дополнением C и элементарным абелевым ядром F.

– Если 2-ранг G больше 2, то либо $G = F \leftthreetimes C$ – группа Фробениуса, где дополнение C – локально циклическая группа, а ядро F – элементарная абелева 2-группа, либо G изоморфна проективной специальной линейной группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.

Если G – вполне расщепляемая группа 2-ранга 1, то централизатор C инволюции в G является сильно изолированной локально циклической подгруппой. Поэтому либо G группа Фробениуса с абелевым ядром и дополнением C, либо G не локально конечна. Неизвестно, существуют ли такие не локально конечные периодические группы даже в случае, когда C – максимальная в G квазициклическая 2-группа (см. вопрос В.Д. Мазурова 15.54 из Коуровской тетради [15] и результаты из [35, 38]). Если 2-ранг группы G равен 2, то силовские 2-подгруппы в G локально диэдральны, что приводит исследования к пока не решенному вопросу В.П. Шункова 16.111 из [15] о строении простых периодических групп с диэдральной силовской 2-подгруппой.

Об изолированных подгруппах периодических групп

Согласно П.Г. Конторовичу [12], подгруппа H группы G называется *изолированной в G*, если множество всех циклических подгрупп группы G разбивается относительно H на два класса: на класс циклических подгрупп, целиком лежащих в H, и на класс циклических подгрупп, взаимно простых с H. Подгруппа H группы G называется *сильно изолированной в G*, если она разбивает множество всех абелевых подгрупп группы G относительно H на два класса: на класс абелевых подгрупп, целиком содержащихся в H, и на класс абелевых подгрупп, взаимно простых с H [12]. Другими словами, H сильно изолирована в G, если из $H \cap C_G(g) \neq 1$ следует $C_G(g) \leq H$ (здесь $g \neq 1$).

Отметим, что в [14] используется другое более сильное определение изолированной подгруппы: $H \cap H^g = 1$ для всех $g \notin N_G(H)$ и $C_G(h) \leq H$ для всех $h \in H$. В [14, теорема 2] указано, что в конечной неразрешимой группе G с несвязным графом Грюнберга-Кегеля для каждой связной компоненты $\pi_i(G)$ графа при $i > 1$ (т.е. не содержащей простого числа 2) в G есть изолированная нильпотентная холловская $\pi_i(G)$-подгруппа H_i. Если при этом G проста, то H_i либо циклическая, либо элементарная абелева [14, теорема 3]. Этот факт подчеркивает значение понятия изолированных подгрупп для (локально) конечных групп. Необходимо отметить, что изолированная подгруппа по определению из [14] будет сильно изолированной по определению из [12]. Мы будем придерживаться изначальных определений изолированности и сильной изолированности Конторовича [12].

Конечная и локально конечная группа с сильно изолированной нормальной подгруппой является группой Фробениуса [2; 11]. В связи с этим заметим, что в $B(m,p)$, где $p \geq 665$ простое число, каждая нормальная подгруппа N сильно изолирована, и если индекс N в $B(m,p)$ конечен и больше p, то N недополняема в $B(m,p)$. *Существуют ли периодические группы с недополняемой нормальной сильно изолированной абелевой подгруппой* из теоремы 1, автору неизвестно. К настоящему моменту доказаны теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть F – изолированная периодическая вполне расщепляемая подгруппа группы G, и в $N_G(F) \setminus F$ есть конечный в $N_G(F)$ элемент a простого порядка p. Тогда подгруппа $F \rtimes \langle a \rangle$ либо p-группа, либо группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.*

Группа называется *слабо бипримитивно конечной*, если в ней любая пара элементов одного и того же простого порядка порождает конечную подгруппу.

Теорема 4. *Пусть периодическая слабо бипримитивно конечная группа G обладает нормальной изолированной вполне расщепляемой подгруппой F. Тогда G расщепляема и является либо p-группой периода p, либо группой Фробениуса с ядром F простого периода.*

Библиографический список

1. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. Бусаркин В.М., Старостин А.И. О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб. 1963. Т. 62, № 3. С. 275–294.
3. Бусаркин В.М., Старостин А.И. Конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают абелевым расщеплением // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 1. С. 97–108.
4. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
5. Бусаркин В.М. О 2-изолированных подгруппах // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 5. С. 497–501.
6. Бусаркин В.М., Подуфалов Н.Д. О простых группах, содержащих сильно изолированную подгруппу // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 5. С. 487–494.
7. Бусаркин В.М., Подуфалов Н.Д. Некоторые критерии расщепляемости конечных групп // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 6. С. 717–725.
8. Бусаркин В.М., Майер В.Р. Конечные группы с нильпотентными централизаторами элементов нечетного порядка: сб. науч. трудов ИМ АН УССР. Киев, 1980.
9. Горчаков Ю.М. О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 1. С. 15–29.
10. Дураков Е.Б., Созутов А.И. О некоторых периодических группах с конечным регулярным автоморфизмом четного порядка // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 1. С. 22–34.
11. Конторович П.Г. Группы с базисом расщепления I // Матем. сб. 1943. Т. 12, № 1. С. 56–70.
12. Конторович П.Г. Группы с базисом расщепления II // 1946. Т. 19, № 2. С. 287–308.
13. Конторович П.Г., Пекелис А.С., Старостин А.И. Структурные вопросы теории групп // Матем. зап. Уральск. ун-та. 1961. Т. 3, № 1. С. 3–50.
14. Кондратьев А.С. Граф Грюнберга-Кегеля конечной группы и его приложения // Алгебра и линейная оптимизация: сб. трудов международ. сем., посв. 90-лет. со дня рожд. С.Н. Черникова. Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2002. С. 141–158.
15. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 6–17 изд. Новосибирск, 1978–2002 гг.
16. Ларин С.В., Созутов А.И. О расщепляемых группах с компонентой расщепления простого индекса // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 3. С. 377–385.
17. Левчук В.М. Об одном свойстве групп Сузуки // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 551–557.

18. Левчук В.М. Замечания к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 421–434.
19. Майер В.Р. О конечных группах с абелевыми централизаторами элементов нечетного порядка // Сиб. матем. ж. 1975. Т. XVI, № 3.
20. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
21. Подуфалов Н.Д. О простых конечных группах, содержащих сильно изолированные подгруппы // Матем. сб. 1976. Т. 100, № 3. С. 447–454.
22. Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004. 210 с.
23. Созутов А.И., Шунков В.П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. Т. 100, № 4. С. 495–506.
24. Созутов А.И. Группы с системами расщепляемых подгрупп: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1980, 12 с.
25. Созутов А.И. О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
26. Созутов А.И., Шлепкин А.К. О группах с нормальной компонентой расщепления // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38, № 4. С. 897–914.
27. Созутов А.И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 602–617.
28. Созутов А.И., Сучков Н.М. О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 272–285.
29. Созутов А.И., Сучков Н.М. О некоторых бесконечных расщепимых (B,N)-парах ранга 1: докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 21–23.
30. Созутов А.И. О группах с конечной инволюцией и локально конечной 2-изолированной подгруппой четного периода // Матем. заметки. Т. 69, выпуск 6 июнь 2001. С. 912–918.
31. Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 149 с.
32. Созутов А.И., Дураков Е.Б. О локальной конечности периодических точно трижды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 70–84.
33. Созутов А.И., Дураков Е.Б. О точно дважды транзитивных группах с обобщенно конечными элементами // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1144–1149.
34. Созутов А.И., Кравцова О.В. О KT-полях и точно трижды транзитивных группах // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 2. С. 232–242.
35. Созутов А.И. О группах с квазициклическим централизатором инволюции // Сиб. матем. ж. 2016. Т. 57, № 5. С. 1127–1130.
36. Созутов А.И. О периодических вполне расщепляемых группах: труды ИММ (отправлена в печать).
37. Старостин А.И. Расщепления и централизаторы в теории конечных групп: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Ур. гос. ун-т. Свердловск, 1968. С. 1–18.
38. Сучков Н.М. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 344–351.
39. Сучков Н.М. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 153–160.
40. Хухро Е.И. Нильпотентные группы и их автоморфизмы простого порядка. Фрайбург, 1992.
41. Шунков В.П. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 3. С. 113–124.
42. Шунков В.П. Характеризация некоторых конечных групп Фробениуса // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 6. С. 725–732.
43. Baer R., Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen, Math. Z. 1961. 77. P. 1–37.
44. Durakov E.B., Bugaeva E.V., Sheveleva I.V. On Sharply Doubly-Transitive Groups // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2013. Т. 6. С. 28–32.
45. Kegel O., Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition, Arch. Math. 1962. 13. P. 10–28.

О ГРУППАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ[1]

ABOUT GROUPS WITH MINIMALITY CONDITION

А.И. Созутов, М.В. Янченко **A.I. Sozutov, M.V. Yanchenko**

Группы с условиями минимальности, полная часть, черниковская группа, квазичерниковская группа.

Установлены признаки существования в группе полной части, в простой квазичерниковской группе исследованы пересечения максимальных подгрупп, найдены пары порождающих ее элементов.

Groups with minimality conditions, complete part, Chernikov group, quasi-Chernikov group.

Criteria for the existence of a complete part in a group are established, intersections of maximal subgroups are investigated in a simple quasi-Chernikov group, and pairs of generating elements are found.

Напомним, что группа G удовлетворяет условию *минимальности для подгрупп (абелевых подгрупп) (условия min, min-ab)*, если каждая убывающая цепочка ее подгрупп (абелевых подгрупп)

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots \quad (1)$$

обрывается на конечном номере; G удовлетворяет условию q-*min*, если в ней на конечном номере обрываются цепочки подгрупп (1), во всех разностях $G_i \setminus G_{i-1}$ которых есть q-элементы; G удовлетворяет условию *примарной минимальности (π-min, $\pi \subseteq \pi(G)$)*, если в ней для всех $q \in \pi(G)$ ($q \in \pi$) выполняются условия q-min.

Несмотря на положительные решения различных проблем минимальности в классах локально разрешимых, локально конечных, бинарно конечных и сопряженно бипримитивно конечных групп, и отрицательные решения этих проблем в классе всех групп [1, 2], минимальные контрпримеры к проблемам С.Н. Черникова остаются классическими исследовательскими обьектами «положительной теории» периодических групп. Квазиконечной (квазичерниковской) называется не конечная (не черниковская) группа, все собственные подгруппы которой конечны (черниковские).

Классическим критериям завершенности в теории групп с условиями минимальности отвечают результаты по примарным группам. В 1947 г. О.Ю. Шмидт установил [5], что в простой квазичерниковской p-группе G при $p > 2$ существуют максимальные подгруппы [5, теорема 1] и любые две максимальные локально конечные подгруппы пересекаются по единице [5, теорема 2]. Это означает, что множество всех максимальных подгрупп группы G составляет ее расщепление, и любая пара неединичных элементов из G, взятых из разных компонент расщепления, порождает всю группу G. В то же время из результатов А.Ю. Ольшанского глав 11, 12 [2] (см. лемму 31.1 и теорему 35.1) выводится существование таких групп.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-71-10017.

Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ *– конечное или счетное множество нееденичных конечных или черниковских* p*-групп* G_i *без инволюций,* $|I) \geq 2$ *и* $n_0 = p^k$ *– достаточно большое нечетное число. Тогда свободная амальгама* X *групп* G_i *вложима в квазичерниковскую простую* p*-группу* $G = G(\infty)$*, в которой всякая собственная подгруппа является или циклической группой порядка, делящего* p^k*, или содержится в подгруппе, сопряженной с некоторой из групп* G_i*. Кроме того, существует и группа* $G = G(\infty)$ *с асферичным представлением, мультипликатор Шура которой является свободной абелевой группой счетного ранга, а поэтому для любой абелевой конечной или черниковской группы* Z *существует квазичерниковская группа, являющаяся нерасщепляемым центральным расширением группы* G *с помощью центральной подгруппы* Z*.*

Возникает вопрос, насколько близка по строению к указанным выше группам произвольная не примарная квазичерниковская группа? С помощью результатов работ В.П. Шункова [6], А.И. Созутова и М.В. Янченко [3; 4] доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* G *– группа без инволюций,* P *– ее максимальная полная абелева* p*-подгруппа и для любого элемента* $t \in N_G(P)$ *подгруппа* $C_G(t)$ *обладает* p*-полной частью. Тогда справедливо хотя бы одно из следующих утверждений.*

1. Подгруппа P *нормальна в* G*.*

2. Нормальное замыкание некоторого нееденичного элемента $a \in P$ *в* G *есть группа Фробениуса с периодическим ядром* F *и дополнением* $\langle a\rangle$*, при этом* $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$*.*

3. Для каждой пары нееденичных элементов $a, b \in P$ *найдется бесконечно много элементов* $c \in b^G$ *таких, что подгруппа* $\langle a, c\rangle$ *бесконечна.*

4. Если в $P^\#$ *найдется элемент* a*, а в* G *– элемент* bb *такие, что все подгруппы вида* $L_a = \langle a, b^g\rangle$ *конечны и* $b^G \cap P = \varnothing$*, то либо* $G = N_G(P)$*, либо* $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$*,* $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ *– группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $\langle a\rangle$ *и* a *– конечный элемент группы* G*, либо нормальная подгруппа* $B = \langle b^G\rangle$ *не содержит элемент* a *и* $B \leftthreetimes \langle a\rangle$ *– группа Фробениуса.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* G *– простая квазичерниковская группа без инволюций. Тогда для любых нееденичных элементов* a, b *из полных частей различных черниковских не сопряженных подгрупп из* G *имеет место равенство* $G = \langle a, b\rangle$*.*

Библиографический список

1. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
3. Созутов А.И., Шахова С.И. Строение квазислойно конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 1. С. 118–130.
4. Созутов А.И., Янченко М.В. О существовании в группе f-локальных подгрупп // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 898–913.
5. Созутов А.И., Янченко М.В. F-локальные подгруппы в группах с обобщенно конечным элементом порядка 2 и 4 // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1150–1157.
6. Шмидт О.Ю. Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп // В сб. Избранные труды. Математика. М., 1959. С. 298–300.
7. Шунков В.П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука. 1992.

СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ, КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ

О ПРИМЕНЕНИИ AR-ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»)

ABOUT THE USING OF AR TECHNOLOGIES IN TEACHING MATHEMATICS (ON THE EXAMPLE OF THE TOPIC «SECOND ORDER SURFACES»)

Д.В. Бочкарёва **D.V. Bochkareva**

Обучение математике, AR-технологии, СДМ GeoGebra, поверхности второго порядка, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, наглядность.

В статье затрагивается тема использования технологии дополненной реальности посредством системы динамической математики GeoGebra при обучении математике студентов Новосибирского профессионально-педагогического колледжа. Внимание уделяется построению поверхностей второго порядка для соблюдения принципа наглядности при изучении данной темы.

Teaching mathematics, AR technology, GeoGebra, second order surfaces, elliptical paraboloid, hyperbolic paraboloid, visibility.

The article touches upon the topic of using augmented reality technology through the dynamic mathematics system GeoGebra in teaching mathematics to students of the Novosibirsk Professional Pedagogical College. Attention is paid to the construction of second order surfaces to comply with the principle of visibility when studying this topic.

Исходя из требований ФГОС, умение обучающихся осуществлять познавательную исследовательскую деятельность является одним из важных направлений в обучении. Поэтому необходимы методы, способствующие активизации мыслительной деятельности и развивающие самостоятельность в поиске новых знаний. Средства наглядности позволяют активизировать познавательную деятельность, сформировать заинтересованность обучающихся. Существует немало компьютерных средств наглядности. Одним из таких средств является система динамической математики GeoGebra, располагающая возможностью использования технологии дополненной реальности (AR).

Использование технологии дополненной реальности с помощью среды GeoGebra описано в работах разных авторов. Ученые-практики замечают общую тенденцию: СДМ пользуется интересом у обучающихся, помогает визуализировать математические объекты, самостоятельно исследовать их свойства. GeoGebra AR позволяет выделить математические объекты в окружающей среде, показывая связь математики с инженерией и искусством [1]. Также объединение практической и компьютерной деятельности помогает понять сложные математические концепции [2]. Применение динамической системы повышает мотивацию студентов, способствует развитию логического мышления [3].

Особое значение в обучении математическим дисциплинам имеет визуализация математических объектов. Например, кривые на плоскости достаточно легко изобразить вручную в тетради, а вот поверхности в пространстве уже гораздо сложнее. Без наглядных примеров, видя только уравнения поверхностей, не все студенты могут достоверно представить себе эти поверхности. А без этого не понять свойств и характеристик этих объектов. В таких случаях стоит обращаться к помощи специальных математических программ. Конкретно в своей работе со студентами Новосибирского профессионально-педагогического колледжа мы используем среду GeoGebra. Для еще большей реалистичности можно воспользоваться функцией дополненной реальности. Для этого нужно установить само приложение GeoGebra на смартфон и программную платформу для AR в соответствии с вашей операционной системой. На сайте www.geogebra.org есть инструкция, если у вас возникнут вопросы.

Далее нужно запустить приложение, в строку ввода ввести уравнение интересующего вас объекта. Например, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ ($\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$) для эллиптического (гиперболического) параболоида. Можете варьировать дизайн поверхностей – цвет, прозрачность, толщина и стиль линий, вид штриховки и т.п. Меняя коэффициенты, можно отследить, как ведет себя некая поверхность – меняет пропорции, становится сплюснутой, меняет кривизну и т.д. Примеры поверхностей, перенесенных в пространство, представлены на рисунках 1 и 2.

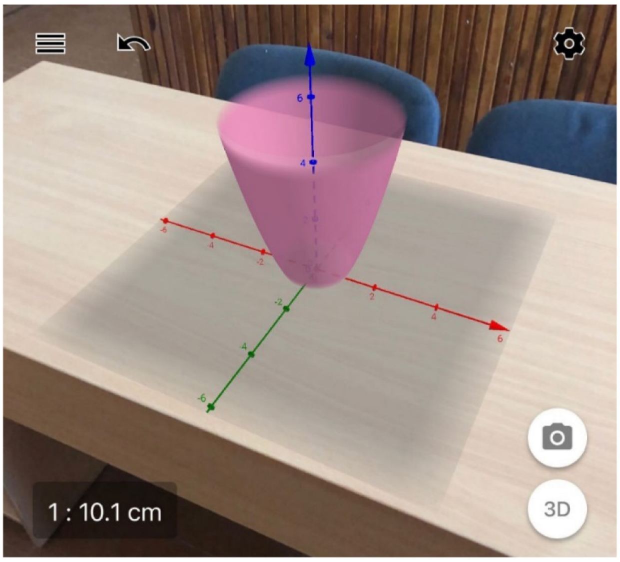


Рис. 1. Эллиптический параболоид, построенный в GeoGebra AR

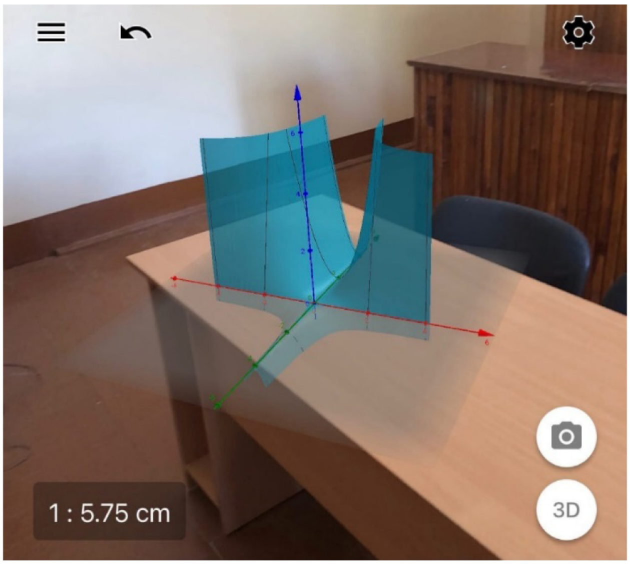


Рис. 2. Параболический параболоид, построенный в GeoGebra AR

Таким образом, использование инструментов новых технологий делает процесс обучения математике более интерактивным и занимательным, повышает мотивацию и достижения обучающихся в области математических дисциплин. Дополненная реальность способна погрузить обучающегося в среду взаимодействия с математическими объектами, тем самым повышая заинтересованность обучающихся точными науками.

Библиографический список

1. Ancochea B., Cardenas M.-I. Exploring real world environments using potential of GeoGebra AR // Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020. 2020. P. 41–46. DOI:10.37626/GA9783959871440.0.05
2. Budinski N., Lavicza Z. Teaching advanced mathematical concepts with origami and GeoGebra augmented reality // Bridges 2019 Conference Proceedings. 2019. P. 387–390. URL: https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-387.pdf
3. Osypova N.V., Tatochenko V.I. Improving the learning environment for future mathematics teachers with the use application of the dynamic mathematics system GeoGebra AR // AREdu 2021: 4th International Workshop on Augmented Reality in Education. 2021. P. 178–196. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2898/paper10.pdf

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ «1С: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР» В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ «КЛАССИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ»

METHODOLOGY OF USING MODELS «1C: MATHEMATICAL DESIGNER» IN THE PROCESS OF FORMATION OF THE CONCEPT «CLASSICAL METHOD FOR ASSESSING THE PROBABILITY OF A RANDOM EVENT»

Е.Д. Вохтомина, О.Н. Троицкая **E.D. Vohtomina, O.N. Troitskaya**

Методика, вероятность, исходы опыта, случайное событие, интерактивные модели, математический конструктор, компьютерная грамотность.
В статье представлено описание методических особенностей использования интерактивных моделей «1С: Математический конструктор», предлагаемых в процессе формирования понятия «классический способ оценки вероятности случайного события». Приведены примеры заданий, направленных на формирование у школьников умений определять равновозможные исходы опыта.

Methodology, probability, outcomes of experience, random event, interactive models, mathematical constructor, computer literacy.
The article presents a description of the methodological features of the use of interactive models offered by «1C: Mathematical Designer» in the process of forming the concept of «a classical way of assessing the probability of a random event». Examples of tasks aimed at developing schoolchildren' abilities to determine equally possible outcomes of experience are given.

Содержание стохастической линии школьного курса математики теснейшим образом переплетается с обыденными представлениями школьников, и уже к началу изучения элементов теории вероятностей в школе учащиеся обладают богатым и действенным собственным опытом оперирования суждениями о случайных явлениях, имеющих вероятностный характер. Именно это зачастую является причиной ошибок, совершаемых учащимися при решении вероятностных задач. Особенно часто они ошибаются при определении равновозможных исходов опыта. Например, при решении задачи на нахождение вероятности выпадения суммы 7 при одновременном бросании двух игральных кубиков школьники полагают, что все значения суммы (это 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) и есть равновозможные исходы опыта. Только вовлечение в деятельность исследования появления суммы 2 (это 1 и 1), суммы 3 (это 2 и 1, 1 и 2), а также суммы 4 (это 1 и 3, 2 и 2, 3 и 1) позволяет школьникам убедиться в необходимости дальнейшего поиска равновозможных исходов опыта.

Для того чтобы исключить данные ситуации, можно в процессе формирования понятия «классический способ оценки вероятности случайного события» использовать интерактивные модели, предлагаемые «1С: Математический конструктор» [1]. К их числу относятся следующие модели: «Две монеты», «Два кубика», «Варины варежки».

В качестве примера рассмотрим методические особенности работы с последней из указанных моделей. В ее основе находится ситуация: «У Вари две одинаковые пары варежек. Собираясь на прогулку, она наугад берет с собой две варежки» [2]. В процессе работы необходимо оценить вероятности двух событий. Первое событие A= «варежки на одну руку», второе B= «варежки на разные руки». Учитель делит класс на команды (минимум три), предлагает учащимся проанализировать ситуацию и выдвинуть свои предположения, какое из событий (A или B) имеет больше шансов для наступления. Желательно подтвердить выводы соответствующими математическими расчетами, округлив полученные результаты до тысячных. На доске у учителя подготовлена таблица (таблица 1).

Таблица 1

Оценка вероятностей случайных событий A и B

Команда	Вероятность случайного события A	Вероятность случайного события B
Команда 1		
Команда 2		
Команда 3		

В результате командной работы учащиеся выдвигают свои предположения и записывают на доске полученные значения. Далее учитель запускает в интерактивной модели плеер многократного повторения опыта, состоящего в случайном выборе двух варежек из ящика с двумя левыми и двумя правыми варежками. Определение вероятностей случайных событий происходит на основе статистического способа (рис. 1).

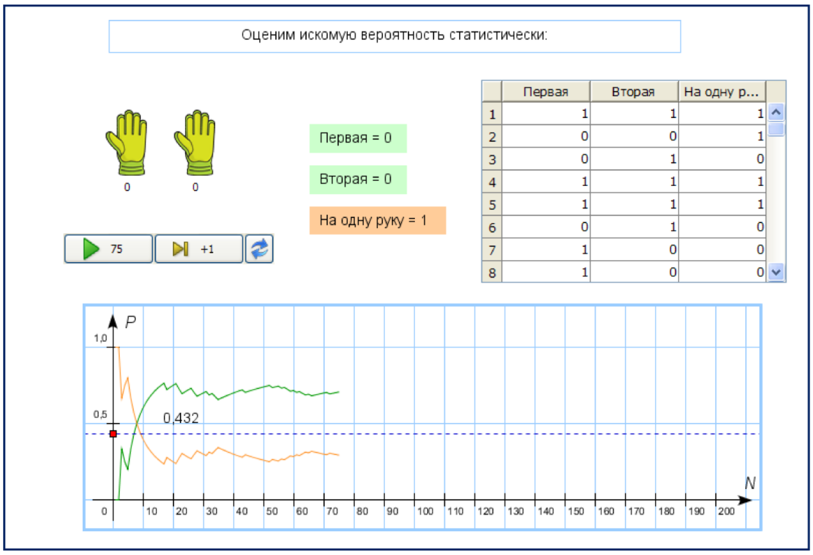


Рис. 1. Оценка вероятностей случайных событий в интерактивной модели

Из команд выбирается та, результаты которой наиболее близки к предлагаемым. Представитель данной команды раскрывает способ решения и объясняет, почему результаты его команды фактически совпали с модельными. Члены других команд, получившие иные результаты, определяют основную причину несовпадения результатов. Так, например, некоторые рассматривали такие исходы опыта: выбраны левая и правая варежки, выбраны правая и левая варежки, выбраны две левых варежки, выбраны две правых варежки.

Для уточнения полученных результатов и получения правильных выводов учитель предлагает обозначить пары варежек как Л1П1 и Л2П2. Тогда равновозможными будут следующие исходы опыта: Л1П1, Л1Л2, Л1П2, П1Л2, П1П2, Л2П2. Именно поэтому вероятность того, что варежки на одну руку составляет 0,333 (округление до тысячных), на разные руки – 0,667.

Модель «Две монеты», в основе которой находится ситуация подбрасывания двух симметричных монет и определения вероятности случайных событий: «Монеты упадут на одну сторону», «Монеты упадут на разные стороны», позволяет закрепить умения определять равновозможные исходы опыта. Учитель в режиме демонстрации запускает плеер многократного повторения рассматриваемого опыта и совместно с учащимися проводит анализ графиков изменения частот двух событий: «Монеты упадут на одну сторону», «Монеты упадут на разные стороны». Школьники приходят к выводу о том, что с увеличением числа испытаний значения вероятностей приближаются к 1/2.

Далее педагог может предложить учащимся найти объяснение несоответствия результатов, полученных при решении данной задачи известным французским математиком Даламбером. Ученый полагал, что рассматриваемый опыт имеет три исхода: первый исход – выпадение герба на обеих монетах, второй исход – выпадение решки на обеих монетах, третий исход – выпадение герба на одной монете и решки на другой монете. Так как в двух из трех исходов монеты упадут на одну и ту же сторону, то искомая вероятность может быть найдена как отношение числа 2 к числу 3.

Учащиеся выдвинут гипотезу: предложенные Даламбером исходы не являются равновозможными. Действительно, ситуация выпадения герба на одной монете и решки на другой монете наступает в двух случаях, именно поэтому равновозможных исходов четыре, а не три, а, следовательно, вероятности случайных событий «Монеты упадут на одну сторону», «Монеты упадут на разные стороны» равны 0,5.

Применение интерактивных моделей, предлагаемых «1С: Математический конструктор», в процессе формирования стохастических понятий позволяет не только избежать ошибок, совершаемых учащимися при решении вероятностных задач, но и вовлечь школьников в исследовательскую деятельность, повысить уровень их компьютерной грамотности. Кроме того, комплексное применение возможностей данного программного обеспечения при обучении математике позволит сформировать у учащихся целостное представление о разделах школьной математики и их взаимосвязи.

Библиографический список

1. Интерактивные модели по математике, 5–11 кл. [сайт]. Москва, 2007. URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/matematika_5_11_kl_kollektsiya_interaktivnykh_modeley/ (дата обращения: 16.08.2021).
2. Варины варежки. Москва, 2007. URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/matematika_5_11_kl_kollektsiya_interaktivnykh_modeley/6_veroyatnost_i_statistika/6_2_diskretnaya_veroyatnost/4934.php (дата обращения: 17.08.2021).

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В ИЗУЧЕНИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

APPLICATION OF INTERACTIVE EDUCATIONAL RESOURCES IN STUDYING THE HISTORY OF MATHEMATICS

Е.И. Ганжа, Р.Р. Майер **E.I. Ganzha, R.R. Mayer**

Образовательные технологии, интерактивный режим, история математики, учебная игра, сценарий, апробация, анализ игры.

Рассматривается подход к изучению истории математики с помощью интерактивных образовательных технологий. В рамках подхода показана целесообразность и эффективность применения учебной интеллектуальной игры в процессе обучения. Приводится сценарий игры, описание используемой программы, анализируется опыт проведения зачета по истории математики в форме интеллектуальной игры «Умники и умницы».

Educational technologies, interactive mode, history of mathematics, educational game, scenario, approbation, game analysis.

An approach to the study of the history of mathematics with the help of interactive educational technologies is considered. Within the framework of the approach, the expediency and effectiveness of the use of educational intellectual games in the learning process are shown. A scenario of the game, a description of the program used, the experience of holding a test in the history of mathematics in the form of an intellectual game «Clever and clever» is analyzed.

Интерактивный режим предполагает такую организацию образовательного процесса, при которой все обучающиеся вовлекаются в процесс познания, осознают индивидуальный опыт, на основе диалогового взаимодействия обмениваются знаниями, идеями, способами деятельности. Причем происходит это в атмосфере доброжелательности и взаимной поддержки, что позволяет не только получать новое знание, но и развивать личностный потенциал студентов.

На наш взгляд, игра является одним из самых ярких воплощений интерактивного режима организации образовательного процесса. Основные отличия игры от других образовательных технологий приводятся в работе [2], по мнению авторов, они состоят в том, что игра:

– хорошо известная, привычная и любимая форма деятельности для человека любого возраста;

– одно из наиболее эффективных средств активизации, вовлекающее участников в игровую деятельность за счет содержательной природы самой игровой ситуации и способное вызывать у них высокое эмоциональное и физическое напряжение. В игре значительно легче преодолеваются трудности, препятствия, психологические барьеры;

– мотивационна по своей природе. По отношению к познавательной деятельности она требует и вызывает у участников инициативу, настойчивость, творческий подход, воображение, целеустремленность;

– позволяет решать вопросы передачи знаний, навыков, умений, добиваться личностного осознания участниками законов природы и общества, оказывать на них воспитательное воздействие;

– многофункциональна, ее влияние на человека невозможно ограничить каким-либо одним аспектом, но все ее возможные воздействия актуализируются одновременно;

– преимущественно коллективная, групповая форма деятельности, в основе которой лежит соревновательный аспект. В качестве соперника, однако, может выступать не только человек, но и обстоятельства, и он сам (преодоление себя);

– нивелирует значение конечного результата. В игре участника устраивает любой приз: материальный (ценный приз, подарок, билеты на концерт и т.п.), моральный (поощрение, грамота, широкое объявление результата), психологический (самоутверждение, подтверждение самооценки) и другие. Причем при групповой деятельности результат воспринимается им через призму общего успеха, принимая успех группы, команды как собственный.

Учебная игра обладает богатым набором функций. Следуя [1], выделим основные из них: *активизирующая* – заключается в стимулировании познавательных процессов (например, восприятие, анализ, логическое мышление), а также интересов и потребностей; *развивающая* – в ходе учебной игры активно развиваются творческий потенциал обучающихся, их внимание и воображение, а также задатки способностей; *воспитывающая* – через организацию игрового общения происходит регуляция межличностных отношений, включаются механизмы саморегуляции поведения, эмоций и отношений; *индивидуализации обучения* – происходит за счет раскрытия и использования в ходе игры индивидуальных особенностей, опыта, личностных качеств и способностей каждого участника. Таким образом, игра является одним из действенных средств реализации режима интерактивного обучения.

В данной работе мы приводим описание интеллектуальной игры по истории математики «Умники и умницы». При разработке и организации этой игры мы придерживались следующих правил ([1]):

– вовлеченность в работу в той или иной мере всех участников;

– применение способов и приемов эмоционального настроя к непосредственному включению в те или иные формы работы. Поддержка интеллектуально-творческого напряжения в течение всей игры;

– учет взаимообусловленности количества участников и качества образования;

– предварительная подготовка помещения для работы. Пространственная среда должна быть организована таким образом, чтобы ее участники могли легко маневрировать, вживаться в определенные образы, обмениваться информацией и эмоциями в комфортных условиях;

– четкое соблюдение регламента и предусмотренных процедур;

– сотрудничество в процессе общения всех участников, что возможно лишь при реализации демократического стиля взаимодействия.

Содержание игры

Для успешного и результативного проведения игры определяющую роль играет высокое качество курса лекций по теме игры. Мы используем замечательный учебник Р.А. Майера [4], где все вопросы игры изложены ясно, строго, логично, доказательства задач приводятся подробно, а исторические факты автор излагает таким живым и эмоциональным языком, что заражает читателя своим интересом и любовью к истории математики.

При составлении вопросов к игре мы выбрали восемь тем из истории математики Древнего мира. Эти темы имеют тесную связь со школьным курсом математики и поэтому особенно важны для будущей профессиональной деятельности студента. Формулировки вопросов имеют практическую направленность. Таким образом, они дают игроку прекрасную возможность не только показать знание истории происхождения понятий и формул школьной математики, но и продемонстрировать практические умения решать методами древних математиков такие важные задачи, как, например, вычисление арифметических операций с числами и дробями (Древний Египет, Древний Вавилон); решение задач алгебры (Древний Вавилон); проведение геометрических построений (Фалес, Пифагор, Теэтэт); доказательство теорем (Евклид, Архимед, Аполлоний) и многие другие.

Кроме упомянутых выше восьми тем, игра содержит четыре дополнительных темы, которые позволяют игрокам продемонстрировать свою эрудицию в истории, математике, истории математики и математического образования. Приведем все темы игры.

1. Древний Египет.
2. Древний Вавилон.
3. Древняя Греция.
4. Задачи на построение циркулем и линейкой.
5. Задачи, неразрешимые циркулем и линейкой.
6. Предшественники Евклида.
7. «Начала» Евклида.
8. Архимед.
9. Создатели новых областей в математике.
10. Авторы знаменитых теорем.
11. Знаменитые изречения великих математиков.
12. Авторы знаменитых учебников математики.

Каждая тема содержит 5 вопросов, каждый из которых оценивается от одного до трех баллов. Приведем для примера некоторые вопросы игры.

8.1) Какие утверждения из области статики доказал Архимед и как ими пользовался при решении математических задач? В каком из своих произведений он это описал? (3 балла).

8.4) Чему равен объем параболоида вращения? Каким методом Архимед доказал этот факт? Как можно доказать этот факт, пользуясь понятием определенного интеграла? (3 балла).

8.5) Какое соотношение между цилиндром и шаром установил Архимед? Каким нестрогим методом он это соотношение обнаружил, и каким методом потом доказал его справедливость? (3 балла).

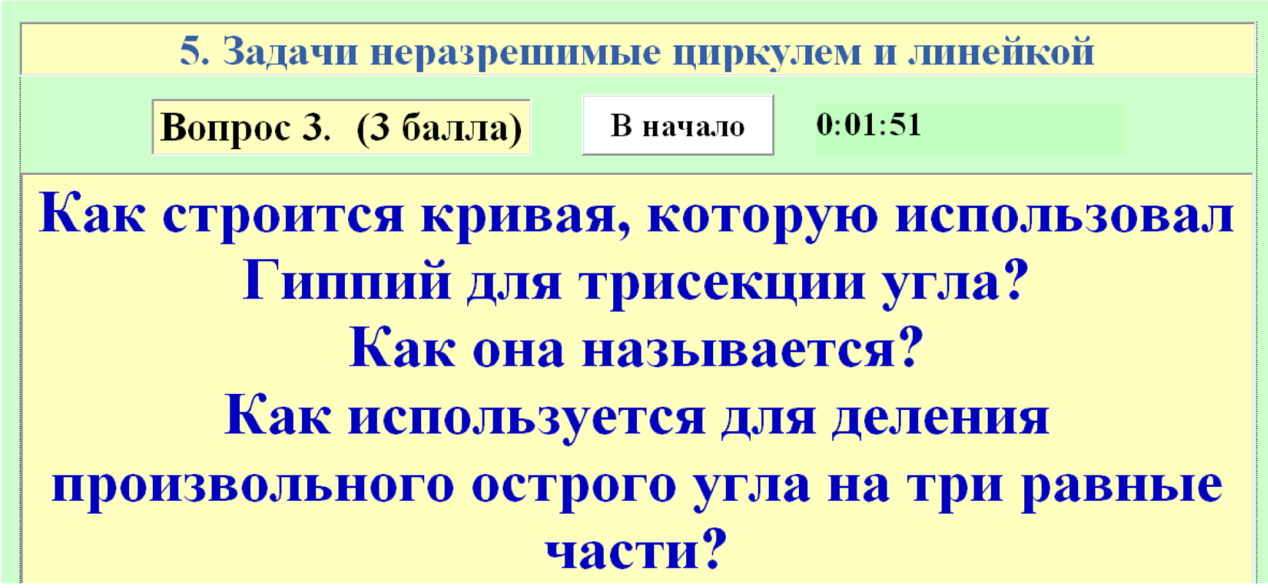
11.1) Кто, по преданию, из великих геометров древности сказал вражескому солдату, пришедшему его убить: «Не тронь моих кругов»? (1 балл).

11.3) Кто автор слов «В геометрии нет особых путей для царей!»? В связи с чем они были произнесены? (2 балла).

Проведение зачета по истории математики в форме интеллектуальной игры «Умники и умницы»

Участвуют в игре все студенты группы. Студенты, не имеющие зачета-автомата, становятся игроками, остальные входят в инициативную группу по разработке сценария, оформления, технического и информационного обеспечения и, автоматически, – главными (компетентными) болельщиками. Игра начинается с представления команд. Команды показывают творческое домашнее задание – приветствие (звучат частушки, стихотворный монтаж, разыгрывается сценка), оно связано с выбранным названием и отражает настроение команды. Основное требование к приветствию: ярко и кратко (1–2 мин). В начале игры четко объявляются правила.

Команды выбирают вопросы по очереди, причем каждый вопрос имеет свой вес в виде максимального количества баллов за верный ответ. Максимальное количество баллов указано на кнопке вопроса. Содержание самого вопроса неизвестно. Ошибки при ответе уменьшают вес вопроса. Выбирается тема, затем вопрос темы. Программой управляет оператор, который нажатием кнопки названного вопроса вызывает на экран содержание вопроса:



Время, предоставляемое на ответ – две минуты. В правом верхнем углу запускается обратный отсчет, по истечении которого вместо таймера выдается надпись «Время истекло», после чего команда должна дать ответ.

Для перехода к следующему вопросу оператор нажимает клавишу «В начало». При этом кнопка с выбранным ранее вопросом окрашивается в красный цвет и в игре не участвует.

В случае отсутствия или неверного ответа разрешается высказаться по этому вопросу другим командам или болельщикам. Правильно ответившая команда получает дополнительные баллы. Болельщики, получившие баллы, могут «подарить» их команде, за которую болеют.

Анализ игры и подведение итогов

Жюри выделяет лучшие выступления, а также личные качества отдельных участников и болельщиков, проявившиеся в процессе игры.

За время игры определяется, смогли ли участники охватить все основные разделы курса истории математики, какая часть студентов хорошо ориентируются в материалах курса лекций. Умеют ли быстро найти и правильно изложить важный материал. Причем азарт игры и атмосфера соревнования заметно активизирует умственную деятельность многих студентов.

Выводы и заключения

Практика использования программы показывает, что игре свойственна свободная доброжелательная обстановка. Члены команд смело выступали со своими догадками, гипотезами ответов на сложные вопросы и постепенно общими усилиями приходили к истине, борясь за каждый балл.

На наш взгляд, такая игра вносит существенный вклад в обучение предмету. Знания, полученные такой коллективной активной работой, несомненно, закрепятся, поскольку они окрашены эмоциональными моментами борьбы за победу своей команды. Причем выигрывают все. Даже те, кто ошибается. Ведь, переживая неудачу, они одновременно запоминают красивый правильный ответ, который по какой-то причине им не удалось найти. «А счастье было так возможно, так близко...» И слова, кажется, правильные они говорили, но не было четкого понимания, критического отношения или просто не сумели быстро сообразить. Однако от обиды поражения правильный ответ теперь крепко сидит в мозгу. В общем, студенты обучались радостно. Не замечая того, что они занимаются труднейшим делом – мыслят. Потому что играли. Жаль было останавливать игру, настолько разработались.

После торжественного процесса награждения большинство студентов получают зачеты. С теми, кто недостаточно проявил себя во время игры, обычно проводится беседа по вопросам игры, которая помогает выяснить, почему студенты, владеющие всеми необходимыми знаниями, или ошиблись, или промолчали. Просто растерялись ли во время игры, засомневались, стушевались и т.п.

Библиографический список

1. Журавлева О.П., Михалева Л.П. Интерактивный режим организации современного образовательного процесса: учебно-методическое пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П.Астафьева. Красноярск, 2012. 188 с.
2. Кругликов В.Н., Платонов Е.В., Шаранов Ю.А. Деловые игры и другие методы активизации познавательной деятельности. СПб.: П-2, 2006. 189 с.
3. Майер Р.А., Майер Р.Р. История математики: курс лекций / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2021. 428 с.
4. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. М.: СИНТЕГ. 668 с.

ПРОБЛЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ У СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ

THE PROBLEM OF FORMING COMPUTATINAL SKILLS IN MODERN PUPILS

А.Р. Гасанова **A.R. Gasanova**

Обучение школьников математике, вычислительные навыки, компьютерные технологии, устный счет.

Выработка учебных навыков всегда требовала обоснований для обучающихся. Учителю необходимо убедить обучающихся, что простого понимания материала недостаточно, необходим еще навык в обращении с этим материалом. В условиях же широкого развития вычислительной техники необходимость развития вычислительных навыков ставится под сомнение даже учителем. Однако исследования педагогов показывают, что в обучении математике вычислительный навык играет большую роль.

Teaching students mathematics, computing skills, computer technology, verbal counting.

The development of learning skills has always required a justification for the learners. The teacher needs to convince the students that a simple understanding of the material is not enough, it also needs skill in handling this material. In the context of the wide development of computing technology, the need for the development of computing skills is questioned even by a teacher. However, research among educators shows that computational skill plays a big role in teaching math.

Очень часто современные учителя сталкиваются с непониманием со стороны учеников, когда начинают от них требовать посчитать устно или посчитать рационально. У современного ученика знакомство со счетом происходит еще до того, как они начинают узнавать и понимать механизмы этих действий. Еще в дошкольном возрасте они начинают осваивать компьютеры, планшеты, смартфоны. В каждом из этих устройств есть калькулятор, который теперь всегда под рукой. В такой ситуации даже взрослому человеку сложно объяснить, зачем он должен учиться считать устно и тем более, зачем ему постоянно совершенствовать это умение. Последнее время все больше приходится говорить о необходимости развития, о воспитывающей и развивающей роли учителя. То, что раньше принималось как само собой разумеющееся, сейчас приходится декларировать в стандартах и других нормативных документах, закладывать в виде конкретных умений, компетенций, прорабатывать критерии проверки их сформированности. В таких условиях и сам учитель начинает задумываться о том, насколько нужно обучающемуся то, чему он его учит. В частности, развитие вычислительных навыков у обучающихся в условиях повсеместного распространения вычислительной техники постоянно требует доказательства. Но так ли это действительно необходимо?

Даже между педагогами по этому поводу ведутся ожесточенные дискуссии. Одни считают, что арифметическое мастерство никак не связано с математическими способностями и математическим талантом, объясняя это тем, что на смену устному и письменному счету, вычислениям в уме пришли калькуляторы и современные мощные ЭВМ, которые во многом облегчают процесс вычислений, поэтому при обучении математике важно обращать внимание на элементы компьютерной культуры, нежели арифметической. По этому пути развития сейчас идет американская школа, в которой распространено использование программируемых калькуляторов. Однако есть и другая точка зрения. Многие исследователи, занимающиеся данной педагогической проблемой, считают вычислительные навыки основным элементом культуры человека, ведь изучение вычислений вносит конкретный вклад в развитие основных умственных функций учащихся, способствуя развитию скорости мышления, внимания, памяти, позволяет полностью поглощать предметы физического и математического цикла. Пользоваться вычислительной техникой без осознания вычислительных навыков невозможно, для этого как минимум необходимо знать основные арифметические действия. Также вычислительная техника не всегда может оказаться под рукой. Следовательно, владение вычислительными навыками необходимо.

Для современного образовательного процесса внимание к устной арифметике все еще остается обязательным и традиционным. Именно поэтому программы практически всех имеющихся и рекомендованных министерством на сегодняшний день учебников математики направлены на формирование вычислительных умений и навыков, в особенности устных. Но быстрое и правильное выполнение письменных вычислений остается таким же важным элементом в обучении школьников, как в плане продолжающейся работы с числами, так и в плане практической значимости для дальнейшего обучения по данной дисциплине и другим. У обучающихся с развитыми вычислительными навыками меньше трудностей с изучением математики и других точных наук. По мнению К.Д. Ушинского, «если бы человек не имел способности к навыку, то не мог бы продвинуться ни на одну ступень в своем развитии, задерживаемый беспрестанно бесчисленными трудностями, которые можно преодолеть только навыком, освободив ум и волю для новых работ и для новых побед. Вот почему-то воспитание, которое упустило бы из виду сообщение воспитанникам полезных навыков и заботилось об их умственном развитии, лишило бы это самое развитие его сильнейшей опоры». Любой навык важен, и поэтому наличие у обучающихся прочных вычислительных навыков остается серьезной педагогической проблемой.

В психологии много внимания уделяют проблеме формирования навыков. Доказано, что механическое заучивание гораздо менее эффективно, чем заучивание при участии сознания. Важно использование принципа «повторение без повторения», когда при отработке навыка одно и то же действие не просто повторяется, а варьируется в поисках оптимального. При этом осознанию принадлежит очень важная роль. «...Малая скорость вычислений есть следствие хаоса в голове ученика, неупорядоченности его элементарных умений» – так рассуждает

А.И. Иванов. Важно понимать и осознавать, что ты делаешь и для чего. Мы считаем, что если задания на вычисления будут носить практико-ориентированный характер, то они будут формироваться быстрее и на более качественном уровне. Также психологами отмечено, что устные упражнения способствуют развитию логического мышления учащихся, волевых качеств и творческих начал, математической зоркости и наблюдательности, способствуют развитию речи учащихся, если с самого начала обучения вводить в тексты заданий и использовать при обсуждении упражнений математические термины.

Во время прохождения педагогической практики автором статьи было проведено исследование уровня сформированности вычислительных навыков у обучающихся 9 класса одной из школ города Красноярска. После этого результаты исследования были сравнены с результатами общей успеваемости в обучении математике. Данное сравнение подтвердило предположение, что обучающиеся с низким уровнем развития вычислительных навыков имеют невысокие оценки по математике. И наоборот. Во время той же и последующей педагогической практики была проведена внеурочная работа с обучающимися того же 9 класса. Эта работа содержала часть занятий из разработанного факультативного курса по развитию умения устного счета. В план этих занятий были включены различные приемы устного счета. Подборка приемов была достаточно большой, чтобы заинтересовать как «сильных», так и «слабых» обучающихся, каждый из них нашел наиболее интересные для него. Формы освоения этих приемов тоже были различными – часть обучающихся осваивала приемы под руководством руководителя факультатива, часть обучающихся самостоятельно осваивала приемы, предложенные руководителем, часть приемов была найдена обучающимися самостоятельно. Дальнейшая работа состояла в том, что каждый обучающийся помогал своим одноклассникам освоить выбранный им способ вычисления. Это помогло еще лучше усвоить эти способы и начать применять на практике. Последующие за этим исследования показали, что хотя на уроках математики обучающиеся применяли стандартные приемы вычислений, но у них появилась заинтересованность в том, чтобы выполнить вычисления наиболее рационально, уменьшилось количество ошибок, увеличилась скорость вычислений. Следствием всего этого со слов учителя (после практики) стало то, что часть «слабых» обучающихся стала проявлять больший интерес к обучению математике. Наблюдения учителя показали, что это связано с тем, что у этой категории обучающихся ушел негатив по отношению к вычислениям, на которые они раньше тратили много времени, они стали лучше понимать механизм изучаемых действий и алгоритмов.

При выборе способов организации вычислительной деятельности рекомендуется ориентироваться на развивающий характер выполняемых обучающимися работ. Все задания должны характеризоваться дифференциальностью формулировок, неоднозначностью решений, установление различных закономерностей и зависимостей, использованием различных моделей (предметных, графических, символических), что позволяет учитывать индивидуальные особенности учащегося, его жизненный опыт, предметно-действенное и нагляднообразное мышление и постепенно вводить учащегося в мир математических понятий, терминов и символов.

Не стоит забывать, что устный счет способствует математическому развитию. Одной из важнейших задач обучения математике является формирование вычислительных умений и навыков, основу которых составляет осознанное и прочное усвоение приемов устных и письменных вычислений. Оперируя при устных вычислениях даже не слишком небольшими числами, ученики лучше представляют себе состав чисел, быстрее понимают зависимость между данными и результатами действий, законы и свойства действий. Беглость в устных вычислениях достигается за счет достаточного числа упражнений. Каждый урок рекомендуется начинать с устного счета. Отмечая большое значение устных вычислений, следует в то же время признать очень важным создание у учащихся правильных и устойчивых навыков письменных вычислений. Успешная выработка таких навыков возможна лишь на базе хороших навыков устных вычислений [1].

Также стоит отметить и важность развития вычислительных навыков для сдачи государственного экзамена в 9 и 11 классах. Развитие скорости устных вычислений и преобразований, а также навыков решения простейших задач «в уме» является важным моментом подготовки ученика к ОГЭ. Важно систематически убеждать учеников в том, что только при наличии активной позиции в изучении математики и при условии приобретения практических умений и навыков можно рассчитывать на успех [2].

Подводя итог вышесказанному, можно сказать, что вычислительные навыки и умения необходимо развивать в процессе изучения математики. Но их можно считать сформированными лишь в том случае, если обучающиеся могут выполнять различные математические действия, проводить тождественные преобразования числовых и буквенных выражений, рационально вести ход вычислений, убеждать и самому быть уверенным в правильности полученных результатов. Вычислительные навыки могут помочь набрать более высокий балл на итоговой аттестации.

Библиографический список

1. Скорик Л.И. Роль вычислительных умений и навыков в развитии математических умений учащихся.
2. Турусова Н.Г. Роль вычислительных навыков в успешной подготовке к ОГЭ (из опыта работы) // Молодой ученый. 2017. № 32 (166). С. 1–4. URL: https://moluch.ru/archive/166/45334/ (дата обращения: 23.10.2021).

ОРГАНИЗАЦИЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

ORGANIZATION OF DISTANCE LEARNING OF STUDENTS USING DYNAMIC MATHEMATICAL PROGRAMS

Г.Н. Гиматдинова G.N. Gimatdinova

Математическая подготовка, Живая математика, GeoGebra, Математический конструктор, дистанционное обучение.

Статья посвящена особенностям использования таких динамических математических программ, как Живая математика, Математический конструктор и GeoGebra, в процессе организации дистанционного обучения школьников основной и старшей школы. Приведены примеры использования программ при изучении тем из различных разделов школьного курса математики с 5 по 11 классы.

Mathematical preparation, Live mathematics, GeoGebra, Mathematical constructor, distance learning.

The article is devoted to the peculiarities of using such dynamic mathematical programs as Live Mathematics, Mathematical Constructor and GeoGebra in the process of organizing distance learning for primary and secondary schoolchildren. Examples of the use of programs in the study of topics from various sections of the school mathematics course from grades 5 to 11 are given.

Дистанционное обучение не является чем-то новым для системы образования. Однако в последнее время один из обсуждаемых вопросов – организация дистанционного обучения математике обучающихся основной и старшей школы, ответ на который позволил бы сохранить качество получения знаний, формирования необходимых умений и навыков, достижения планируемых результатов. Причины такого интереса со стороны педагогического сообщества очевидны [1], среди которых применение дистанционных образовательных технологий и технологий электронного обучения в образовательных учреждениях, внедрение новых образовательных стандартов для основной школы и другое [4]. Однако одним из решений вопроса, связанного с дистанционным обучением математике, может стать внедрение в образовательный процесс динамических математических программ. В рамках данной статьи рассмотрим несколько примеров использования программ Живая математика, Математический конструктор и Geogebra, демонстрирующих их возможности при организации дистанционного обучения математике обучающихся основной и старшей школы.

Уроки математики, в не зависимости от того, в каком формате они проходят, должны заинтересовать обучающихся и побудить в них потребность получения знаний. Учебно-методический комплект (УМК) «Живая математика» достаточно давно известен многим учителям. Он позволяет организовывать процесс получения математических знаний с использованием сборника методических материалов, а также самой компьютерной среды для разработки собственных моделей. УМК ориентирован на обучающихся 7–11 классов и требует специальной установки на компьютер учителя, допустимо использование среды в 5–6 классах. Живая математика обладает огромным потенциалом к созданию моделей для учебного процесса с помощью различных команд. У обучающихся появляется возможность разглядеть геометрические объекты под разными углами зрения, проверить их свойства, провести эксперименты, выполнять преобразования и т.д. Например, программа позволяет достаточно подробно проработать с обучающимися функциональную линию в 7–11 классах и осуществить решение заданий, связанных с построением графиков функций, их исследованием при изменении заданных параметров, графического решения уравнений и неравенств, нахождений значений функции или аргументов и др. [2]. В условиях применения дистанционных образовательных технологий учитель может демонстрировать готовый или созданный материал в программе Живая математика через специальные приложения (Zoom, Skype и др.), дать право доступа к работе с ресурсом через конференцию для фронтальной работы, обучающиеся могут диктовать последовать необходимых действий или писать в чате, при возможности обучающиеся могут установить программу у себя на компьютере и демонстрировать свой экран при выполнении задания.

В процессе математической подготовки обучающихся допустимо использование программной среды «Математический конструктор» (http://urok.1c.ru), которая предназначена для создания интерактивных математических моделей, включающая этапы конструирования, моделирования, проведение эксперимента. Имеется возможность разрабатывать собственные модели, благодаря большому набору инструментов как по геометрии, так и по алгебре. Также учитель может использовать готовые модели для сопровождения занятий из любого раздела школьного курса математики. Разработчики конструктора постоянно пополняют коллекцию моделей, содержащую интерактивные задания, демонстрации, тренажеры, игры, а также методические рекомендации и описание свойств к каждой модели [3], позволяющие обеспечить качественное раскрытие математических тем с 5 по 11 классы. Так, например, при изучении темы «Построение треугольника по трем элементам» в курсе геометрии 7-го класса учитель может предложить обучающимся готовые модели на построение треугольника по стороне и двум высотам, по двум сторонам и биссектрисе и другие, которые обладают свойством проверки построенного чертежа (рис. 1). Все предложенные материалы не привязаны к конкретному учебному пособию. В случае дистанционного обучения учитель может демонстрировать экран с моделями в конференции и осуществлять совместную работу с обучающимися, или создать ссылку на сайте конструктора, разослать ее обучающимся (в этом случае для всех обязательно наличие личного кабинета на сайте), выполнить сбор результатов онлайн. Конструктор не требует обязательной установки программы на компьютер, вся учебная работа может осуществляться в браузере.

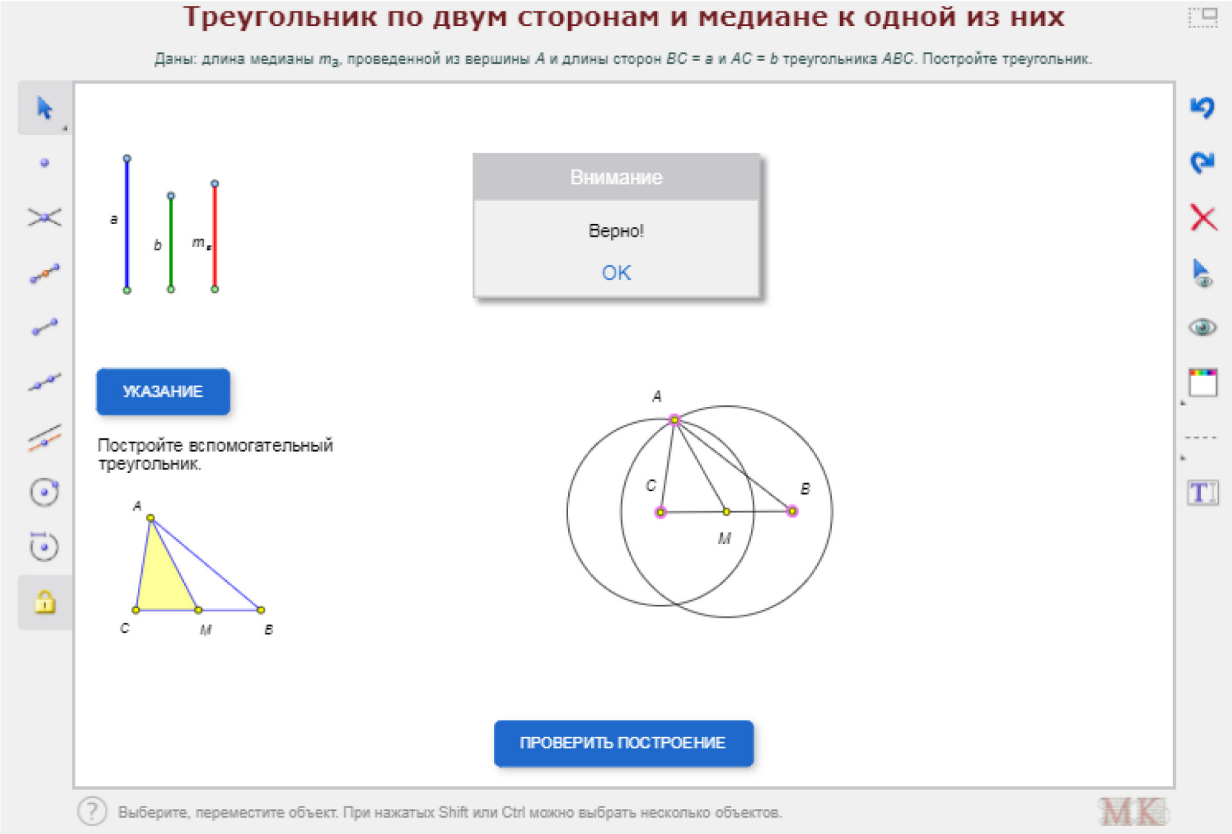


Рис. 1. Пример задания «Треугольник по двум сторонам и медиане к одной из них»

В отличие от УМК «Живая математика», имеются модели для 5–6 классов. Например, тема «Сравнение натуральных чисел» с помощью разработанной модели и методических указаний может изучаться как под руководством учителя, так и самостоятельно в классе или дома. Основное назначение модели – закрепление знаний о порядке чисел и отношениях <, >, =, а также знакомство с греческим алфавитом (рис. 2). Отметим, что многие задания представлены в игровой форме и имеют разные уровни сложности, поэтому в них присутствуют пошаговые подсказки.

Еще одним хорошим цифровым помощником учителя математики в условиях дистанционного обучения может стать динамическая математическая программа GeoGebra, которая включает в себя арифметику, геометрию, алгебру, графы, статистику, таблицы. Ресурс богат функциональными возможностями для самостоятельного создания динамических моделей. На официальном сайте GeoGebra можно найти огромное количество бесплатных готовых интерактивных моделей, тренажеров, упражнений, игр, бесплатных занятий по математике.

Среди учителей набирает популярность виртуальная платформа GeoGebra Classroom, с помощью которой они могут назначать обучающимся интерактивные задания, просматривать в режиме реального времени результаты каждого школьника, задавать вопросы всему классу и просматривать их ответы, при этом работа может вестись совместно с другими учителями, добавляя их в качестве соучителей.

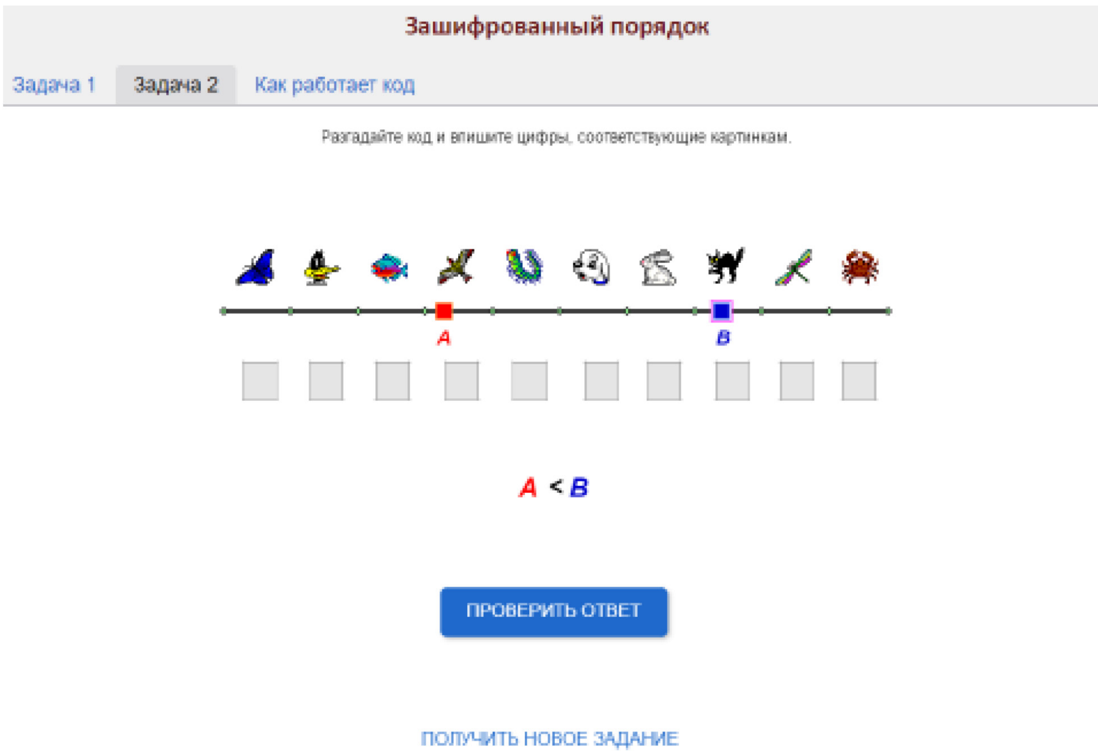


Рис. 2. Пример задания «Зашифрованный порядок»

Отметим, что среди педагогического сообщества идет бурное обсуждение создания цифровых ресурсов на сайте GeoGebra, многие учителя делятся друг с другом алгоритмами работы с ресурсом, готовыми разработками, которые можно использовать как при очном обучении, так и с применением дистанционных образовательных технологий. Например, при подготовке к ЕГЭ задание, направленное на проверку умения находить отношение площадей боковой поверхности и объемов цилиндра, может быть включено в занятие, созданное на платформе GeoGebra, и отправлено обучающимся через личный кабинет (рис. 3).

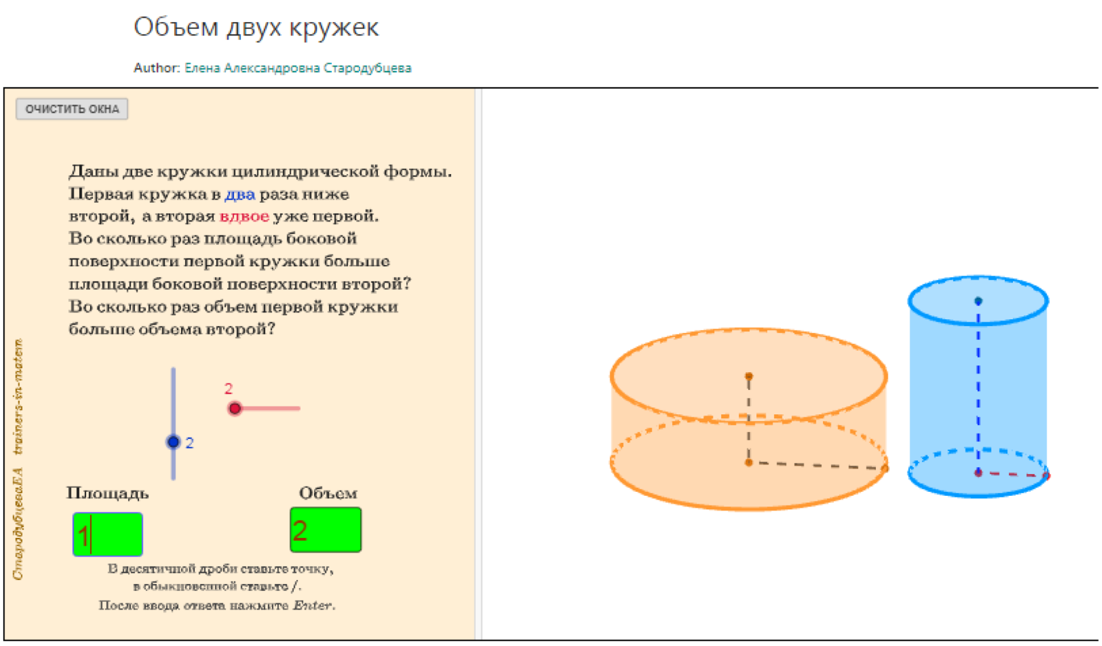


Рис. 3. Пример задания «Объем двух кружек»

Выбор динамической математической программы для дистанционного обучения зависит от многих факторов, в число которых входит изучаемая тема, цель урока и планируемые результаты, техническое оснащение участников образовательного процесса, наличие дополнительного времени на разработку заданий или подбор уже готового материала. Подчеркнем, что созданные с помощью динамических математических программ тренажеры, упражнения, игры являются хорошими инструментами формирования метапредметных результатов, в частности, регулятивных универсальных учебных действий. Так, приведенные в статье примеры готовых динамических моделей направлены на самоконтроль и самокоррецию обучающихся. Таким образом, динамические математические программы Живая математика, Математический конструктор и GeoGebra обладают достаточным потенциалом организации обучения математике с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиографический список

1. Бородицкая Г.П., Пазюк К.Т. Актуальность дистанционного образования в России // Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». 2017. Т. 8, № 1. С. 387–389.
2. Гиматдинова Г.Н. Об опыте использования среды Живая геометрия на уроках алгебры и начал математического анализа // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2015. С. 10–15.
3. Дубровский В.Н., Булычев В.А. Математика. 5–11 классы. Коллекция интерактивных моделей. Выпуск 8.0: методические рекомендации по использованию в учебном процессе. М.: 1С-Паблишинг, 2019.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 31 мая 2021 г. № 287. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/ (дата обращения: 02.11.2021).

О КОЛЛЕКЦИИ СОБСТВЕННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ПРОФИЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССАХ НА БАЗЕ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

ON THE COLLECTION OF OWN INSTRUMENTS FOR STUDYING THE BASICS OF LOBACHEVSKY'S GEOMETRY IN PROFILE MATHEMATICAL CLASSES BASED ON THE ENVIRONMENT OF LIVING MATH

А.Ф. Жеребцова, В.Р. Майер **A.F. Zherebtsova, V.R. Mayer**

Планиметрия Лобачевского, модель Кели-Клейна, среда Живая математика, динамические чертежи, собственные инструменты.

В статье рассматривается возможность создания собственных универсальных инструментов компьютерной среды Живая математика при обучении в рамках элективного курса по планиметрии Лобачевского для профильных математических классов. Приводятся алгоритмы создания некоторых инструментов коллекции.

Lobachevsky planimetry, Kelly-Klein model, Live Mathematics environment, dynamic drawings, proprietary tools.

The article considers the possibility of creating your own universal tools of the computer environment Live Mathematics when teaching in the framework of an elective course on Lobachevsky planimetry for specialized mathematical classes. Algorithms for creating some tools of the collection are given.

В предисловии к научно-популярной книге для школьников [1, с. 4] сформулирован следующий тезис, который без всякой натяжки актуален и сейчас: «В наше время с каждым годом растет потребность в квалифицированных математиках, а подготовка математика – дело длительное, начинать ее надо как можно раньше, во всяком случае, задолго до окончания школы». Мы вполне разделяем мнение авторов [2, с. 4] о том, что «одним из самых удивительных и грандиозных открытий в истории математики является открытие великим русским ученым Н.И. Лобачевским так называемой неевклидовой геометрии». Изучение основ этой геометрии в школе и даже вузе осложняется целым рядом факторов, одним из которых является стереотип мышления. Несмотря на логически корректное доказательство того или иного необычного свойства фигур или понятий этой теории, а таковых в геометрии Лобачевского предостаточно, обучающийся не воспринимает его как реально существующее, если оно противоречит аналогичному свойству школьной геометрии. Его внутреннее Я отказывается верить доказательству и требует визуального подтверждения. Преодолеть этот стереотип позволяет компьютерная среда Живая математика с ее уникальной возможностью создавать динамические чертежи, визуализирующие проблемные свойства объектов на модели Кели-Клейна плоскости Лобачевского.

Создание динамических gsp-файлов, поддерживающих элективный курс «Планиметрия Лобачевского на модели Кели-Клейна» для обучающихся профильных классов, позволяет каждому участнику курса не только познакомиться с новой геометрией, но и «прикоснуться» к этой необычной геометрии, став разработчиком одной из ее моделей. Такой методический подход, на наш взгляд, способствует не только качественному усвоению элективного курса, но и формирует у обучающихся исследовательский стиль мышления.

Самостоятельное построение собственных инструментов пользователя и решение с их помощью конкретных задач теории является неотъемлемой частью освоения курса. Процесс создания и применения таких «помощников» способствует более качественному усвоению базовых основ планиметрии Лобачевского, визуализации свойств объектов этой необычной теории.

Прежде всего, следует создать инструменты, аналогичные встроенным в Живую математику инструментам, позволяющим выполнять такие простейшие построения, как луч, прямая, параллельные и перпендикулярные прямые, нахождение середины отрезка. Отметим, что учителем так подбирается последовательность создания этих инструментов, чтобы построение очередного инструмента использовало предыдущие.

В элективном курсе, как и в большинстве математических дисциплин, центральное место отводится задачам. Такие необычные с евклидовой точки зрения понятия, как, например, направленная прямая или прямая, проходящая через точку С и параллельная прямой АВ в направлении от А к В, необходимо закрепить при решении несложных задач.

Прямая. Ясно, что одним из наиболее часто используемых инструментов коллекции окажется инструмент «Прямая», опишем алгоритм его создания. Внутри абсолюта (произвольной фиксированной окружности) выбираем две точки А и В, строим евклидову прямую АВ, находим точки пересечения этой прямой с абсолютом, строим хорду с концами в этих точках, прямую АВ скрываем. Завершая процедуру создания инструмента, подсветим сначала центр абсолюта, затем точку на абсолюте, далее – точки А и В и, наконец, построенную хорду вместе с ее концами (стиль точки, являющейся концом хорды, желательно выбрать «маленькая»). Осталось обратиться к команде «Создать инструмент», присвоить ему имя.

Направленная прямая. Следующим востребованным для модели инструментом окажется тот, что может по двум заданным точкам модели не только построить прямую, но и отметить на ней направление в виде стрелки в зависимости от того, в каком порядке пользователь выбрал (подсветил с помощью мыши) данные точки. Как и в предыдущем случае, строим внутри абсолюта произвольные точки А и В. Чтобы задать на прямой АВ направление от А к В, строим луч АВ, находим его пересечение X с абсолютом. Аналогично строим луч ВА и его пересечение Y с абсолютом. Наконец, используя инструменты

Живой математики «отрезок» и «стрелка», строим вектор $\overrightarrow{YX}$. Этот вектор и будет служить изображением направленной прямой AB, стрелка на хорде XY с концом в точке X будет указывать выбранное пользователем направление. Отметим, что при создании инструмента «Направленная прямая» следует после подсвечивания центра и точки абсолюта подсветить точки A, B, X и Y именно в том порядке, в каком они указаны.

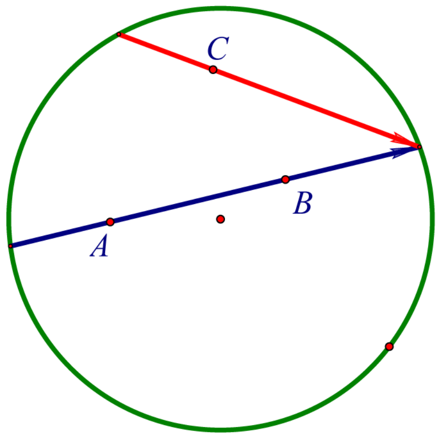


Рис. 1

Параллельная прямая. Следующий инструмент это «Прямая, параллельная направленной прямой». Его «обязанность» по заданной направленной прямой AB и не принадлежащей ей точке C построить проходящую через C прямую, параллельную AB в направлении от A к B. Внутри абсолюта выбираем три неколлинеарные точки A, B и C, строим точку X (на рис. 1 ее имя скрыто) пересечения луча AB и абсолюта, используя созданный выше инструмент, строим направленную прямую CX в направлении от C к X (инструмент «Направленная прямая» применим не только к точкам модели, но и тогда, когда они лежат на абсолюте).

Задачи. Обучающимся предлагается с использованием созданных выше инструментов выполнить следующие задачи на построение:

З а д а ч а 1. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две параллельные прямые. Постройте прямую, параллельную этим прямым и не лежащую с ними в одном пучке параллельных прямых.*

З а д а ч а 2. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две прямые, не являющиеся параллельными (пересекающиеся или расходящиеся). Постройте все прямые, параллельные обеим данным прямым.*

З а д а ч а 3. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны неколлинеарные точки A, B и C. Постройте точку D такую, чтобы четырехугольник ABCD оказался: а) параллелограммом, б) трапецией.*

Факты проективной геометрии. Для определения на модели Кэли-Клейна перпендикулярности прямых, расстояния между точками и величины угла, движений модели, равенства отрезков и углов необходимо знание некоторых фактов проективной геометрии. Не углубляясь в тонкости общей теории проективных плоскостей, нами в элективном курсе рассматриваются и доказываются все необходимые для построения модели факты этой теории, их обоснование увязывается со школьным курсом математики.

Так, сложное отношение упорядоченной четверки коллинеарных точек A, B, C и D рассматривается только для собственных точек и определяется как частное от деления простого отношения (AB,C) = $\overline{AC}/\overline{BC}$ на простое отношение (AB,D) = $\overline{AD}/\overline{BD}$. Обозначается оно (AB,CD). Деление коллинеарных векторов рассматривается в курсе геометрии 9 класса, поэтому десятиклассники с ним знакомы.

Средствами элементарной геометрии выводятся некоторые свойства, в частности инвариантность сложного отношения точек при центральном проектировании. Это свойство позволяет корректно определить сложное отношение четырех прямых одного пучка.

Вводится понятие гармонической четверки точек. Используя свойство биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника, доказывается, что пара A, B вершин треугольника APB гармонически разделяет пару точек C и D, являющихся точками пересечения прямой AB с биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине P, т.е. (AB,CD)=-1. Далее выводятся гармонические свойства полного четырехвершинника. Продолжается «проективная вставка» в элективный курс рассмотрением гармонических свойств окружностей. Одно из них заключается в том, что если рассмотреть произвольную точку D вне окружности, провести из D касательные, касающиеся окружность в точках M и N, затем – секущую, пересекающую окружность в точках A и B, то пара A, B гармонически разделяет пару C, D, где C – точка пересечения секущей с прямой MN. Таким образом, все точки, являющиеся четвертыми гармоническими к точкам A, B и D (т.е. (AB,CD) = – 1), лежат на одной прямой MN, которая называется *полярой* точки D, сама точка D называется *полюсом* прямой MN.

Завершается экскурс в теорию проективных плоскостей рассмотрением преобразований, которые отображают некоторую окружность и точки, лежащие внутри нее, на себя. Кроме движений плоскости, представляющих собой повороты вокруг центра окружности и осевых симметрий относительно прямых, содержащих центр окружности, рассматриваются следующие преобразования. Пусть S некоторая точка, лежащая вне окружности, s – поляра точки S. Произвольной точке M ставится в соответствие такая точка M′, что (SK,MM′) = -1, где K – точка пересечения прямых SM и s. Такие преобразования называются *гармоническими гомологиями* с центром S и осью гомологии s.

Перпендикулярная прямая, полюс прямой. Для создания инструмента, позволяющего строить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой, нам потребуется точка, являющаяся полюсом данной прямой. Поскольку полюсы прямых потребуются в элективном курсе неоднократно, то целесообразно создать вспомогательный инструмент «Полюс прямой». Для этого изображаются точки A и B, лежащие внутри абсолюта, находятся концы X и Y хорды, содержащей A и B, затем, касательные к окружности в точках X и Y, наконец точку пересечения касательных, которая представляет собой полюс прямой AB. Прямые назовем *перпендикулярными*, если каждая из соответствующих им евклидовых прямых содержит полюс второй прямой. Создадим теперь заявленный инструмент. Изобразим произвольные неколлинеарные точки A, B и C, для прямой AB, используя инструмент «Полюс прямой», построим точку D, которая является полюсом прямой AB, далее построим евклидову прямую CD, найдем точки пересечения CD с абсолютом, открытая хорда окружности, соединяющая эти точки, и будет искомым перпендикуляром к AB. Созданный инструмент назовем «Перпендикулярная прямая».

Расстояние. Опишем алгоритм создания инструмента, позволяющего находить расстояние между точками на нашей модели. Выберем произвольные точки A и B внутри абсолюта. Построим точку X пересечения луча AB с абсолютом и точку Y пересечения луча BA с абсолютом. Поскольку векторы $\overline{AX}$ и $\overline{BX}$ сонаправлены и AX > BX, то $\overline{AX}\,/\overline{BX} = AX\,/\,BX > 1$. Так как $\overline{AY}$ и $\overline{BY}$ тоже сонаправлены и AY < BY, то $0 < \overline{AY}\,/\overline{BY}$ = AY/BY < 1. Но тогда сложное отношение (AB,XY) равно (AX/BX) /(AY/BY) > 1. С помощью меню «Измерения» среды Живая математика найдем евклидовы длины отрезков AX, BX, AY, BY. Расстоянием между точками A и B на нашей модели назовем натуральный логарифм сложного отношения (AB,CD), т.е. AB = ln(AB,CD). Используя графический калькулятор, сначала вычислим (AB,CD) = (AX·BY)/(AY·BX), затем – натуральный алгоритм от этого сложного отношения. Завершая создание инструмента, подсветим центр и точку на абсолюте, затем точки A и B, наконец, найденное значение логарифма. Осталось обратиться к команде «Создать новый инструмент» и присвоить ему имя «Расстояние».

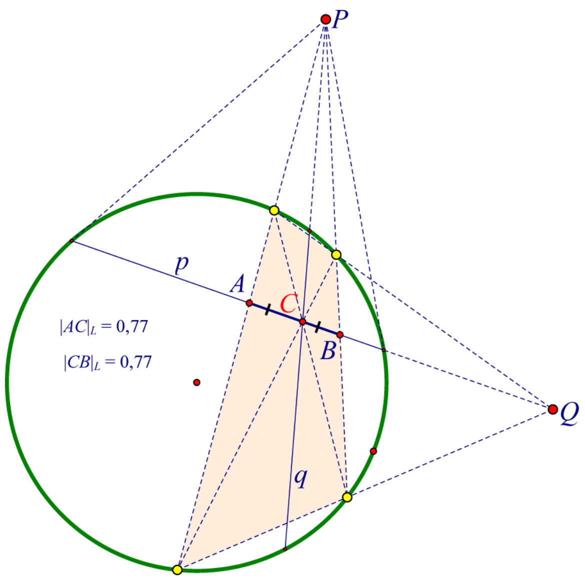


Рис. 2

Середина отрезка, удвоение отрезка, симметричная точка. Создадим инструмент, позволяющий находить середину отрезка. Для этого рассмотрим произвольные точки A и B, лежащие внутри абсолюта. Построим полюс P прямой AB = p, затем – секущие AP и BP, которые высекают на абсолюте 4 точки, являющиеся вершинами полного четырехвершинника (на рис. 2 он окрашен). Одна из его диагональных точек, обозначим ее C, будет принадлежать отрезку AB. Измерения с помощью созданного выше инструмента покажут, что AC = CB. Из гармонических свойств полного четырехвершинника следует, что точки A и B являются соответственными точками гармонической гомологии с осью PC и центром, совпадающим с полюсом Q прямой PC.

Изменяя порядок построения чертежа, представленного на рисунке 2, несложно создать еще два инструмента, один из которых позволяет удвоить отрезок, а второй – построить точку, симметричную данной относительно некоторой прямой (на рис. 2 точка B симметрична A относительно прямой q, содержащей C). По поводу второго инструмента отметим, что прямая AB перпендикулярна q, т.к. ее полюс Q принадлежит AB.

Задачи. Обучающимся предлагается с использованием созданных выше инструментов решить следующие задачи на построение:

З а д а ч а 4. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского построить прямоугольный треугольник.*

З а д а ч а 5. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского построить серединный перпендикуляр к данному отрезку. Создать соответствующий инструмент «Серединный перпендикуляр к отрезку».*

З а д а ч а 6. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского дан острый угол. Постройте прямую, параллельную одной стороне угла и перпендикулярную второй стороне этого угла.*

З а д а ч а 7. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского даны две расходящиеся прямые. Постройте прямую, перпендикулярную этим прямым.*

З а д а ч а 8. *На модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского дана прямая. Постройте множество точек, находящихся на одном расстоянии от этой прямой и по одну сторону от нее (эквидистанта этой прямой).*

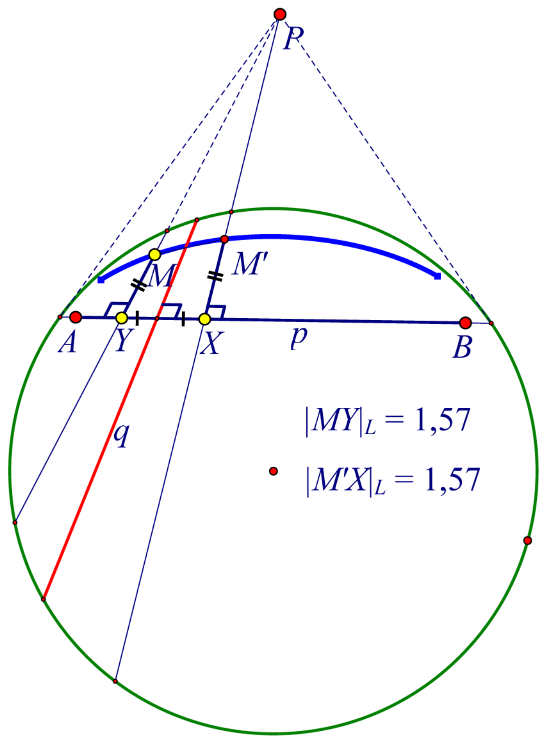


Рис. 3

В качестве примера приведем решение задачи 8. Построим точки A и B внутри абсолюта, расположим их в непосредственной близости от окружности (рис. 3). Используя инструмент «прямая», построим прямую AB нашей модели, которую обозначим p. Построим отрезок AB, поместим на него две точки X и Y. Используя соответствующий собственный инструмент, построим полюс P прямой p, затем – евклидовый луч PY, отметим точки пересечения этого луча с окружностью, построим хорду с концами в этих точках, на хорде выберем произвольную точку M.

По определению перпендикулярности прямых угол MYX равен 90º. Используя инструмент «Серединный перпендикуляр к отрезку», построим прямую q, перпендикулярную p и содержащую середину отрезка XY. Применив теперь инструмент «Симметричная точка», построим точку M′, симметричную M относительно прямой q. Точка M′ окажется на луче PX, т.е. угол M′XY равен 90º и MY = M′X. Таким образом, точка M′ – одна из искомых точек. Если заставить M′ оставлять след и начать перемещать точку X, то M′ вычертит линию равных расстояний – эквидистанту. Чтобы создать динамическое изображение эквидистанты, которое будет изменяться при перемещении точки M, подсветим точку X, затем точку M′ и обратимся к команде «Геометрическое место» меню «Построения». На рабочем поле появится изображение эквидистанты. Выполним самопроверку, измерим расстояния от M до Y и от M′ до X. Они окажутся равными. Перемещая точку M по хорде, можно наблюдать за изменениями формы эквидистанты.

Выводы. Резюмируя, отметим, что коллекция созданных нами инструментов не ограничивается перечисленными выше. Она постоянно совершенствуется и пополняется. Каждый инструмент коллекции не только существенно упрощает процесс построения геометрических фигур на модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского. Создание каждого собственного инструмента, как и любая созидательная деятельность, несет в себе элементы творчества. Одновременно с этим процедура разработки каждого инструмента выполняет и обучающую роль, поскольку требует глубокого осмысления соответствующего фрагмента той теории, для изучения которой он создается. Уверены, что процесс создания и использования собственных инструментов коллекции не только способствует успешному освоению методов решения задач на плоскости Лобачевского, но и, как следствие, усвоению основ самой теории.

Библиографический список

1. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта): кн. для внеклассного чтения. IX, X кл. М.: Просвещение, 1979. 158 с.
2. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию: кн. для внеклас. чтения учащихся 9–10 кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1988. 126 с.

МЕДИАОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ ИКТ-КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ ИТ-ИНЖЕНЕРОВ

MEDIA EDUCATIONAL TECHNOLOGIES AS A TOOL FOR DEVELOPING ICT COMPETENCE FUTURE IT ENGINEERS

Е.В. Касьянова, К.В. Сафонов **E.V. Kasyanova, K.V. Safonov**

Цифровая экономика, ИКТ-компетентность, медиакомпетентность, ИТ-инженер, медиаобразовательный проект, облачные технологии.

В статье рассматриваются вопросы освоения ИКТ-компетентности будущими ИТ-инженерами. Авторами предложена методика развития ИКТ-компетентности с помощью медиаобразовательных проектов. В процессе работы над проектами используются облачные технологии. Проведена апробация методики, проанализированы полученные результаты.

Digital economy, ICT competence, media competence, IT engineer, media education project, cloud technologies.

The article deals with the development of ICT-competence by future IT-engineers. The authors proposed a methodology for the development of ICT-competence with the help of media education projects. In the process of working on projects, cloud technologies are used. The approbation of the technique was carried out, the results obtained were analyzed.

Российское государство ставит перед высшим образованием глобальные задачи, связанные с обеспечением потребности рынка труда специалистами в сфере информационных технологий, утвердив государственную программу Российской Федерации «Цифровая экономика» и федеральный проект «Кадры для цифровой экономики» [1]. Определенные государством направления развития должны реализовывать в первую очередь ИТ-инженеры, процесс подготовки которых является основой кадрового обеспечения развития сферы информационных технологий (далее – ИТ). Необходимо разработать методику, которая бы позволяла развивать ИКТ-компетентность будущих ИТ-инженеров, то есть компетентность в области информационно-коммуникационных технологий, в соответствии с поставленными правительством задачами и национальными проектами, и учитывала при этом направления развития общества.

Формирование компетентности на основе информационно-коммуникационных технологий в высшем образовании активно обсуждается в российском и зарубежном научном сообществе. Большой интерес среди научного сообщества получило исследование развития ИКТ-компетентности у студентов гуманитарных направлений по причине невысокого уровня сформированности информационно-коммуникационной подготовки, в отличие от инженерных направлений обучения [2]. Авторами предлагается методика, которая:

– позволяет развивать ИКТ-компетентность в разрезе основных информационных процессов – поиска и анализа, сбора и фиксации, обработки и хранения, передачи и трансляции информации;

– основана на проектной технологии в целях развития предпринимательских навыков, направленных в дальнейшем на реализацию программы «Стартап как диплом» в рамках федерального проекта «Исследовательское лидерство» национального проекта «Наука и университеты»;

– использует распределенные технологии – участники, проектная деятельность и принятие решений распределены территориально и во времени.

В результате ознакомления с научными материалами выявлены многочисленные исследования среди диссертационных работ по освоению ИКТ-компетентности – в высшем, среднем и общем образовании, среди учителей в школьном образовании, в системе повышения квалификации, в условиях ресурсного центра, студентами непрофильных вузов с использованием ресурсов Интернета.

В рамках разработанной методики освоения ИКТ-компетентности ИТ-инженерами с помощью медиаобразовательных проектов авторами была определена структура информационно-коммуникационной компетенции ИТ-инженера, отражающая основные информационные процессы [3]. Определены медиакомпетенции, которые осваивают студенты при создании медиапродукта [4], уточнены этапы реализации, роли и задачи участников медиаобразовательного проекта, сформулированы организационные аспекты реализации медиапроекта в цифровой среде [5].

Методика развития ИКТ-компетентности с помощью медиаобразовательных проектов была применена авторами в СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева г. Красноярска – студенты создавали свои анимационные и видеоролики. Педагогический эксперимент проводился в учебных группах по направлениям обучения «Информатика и вычислительная техника» и «Программная инженерия». В эксперименте участвовало более 200 человек. В результате апробации методики в 2020–2021 году было разработано 42 проекта, из них завершенных – 37. Из числа сданных проектов – в технологии анимации – 20, с использованием видеосъемки – 16, проектов на основе фотоизображений – 1.

Результаты проведенного исследования дают основание для дальнейшего совершенствования методики и проведения более глубокого анализа освоения компонентов ИКТ-компетентности с уточнением критериев и показателей уровня сформированности ИКТ-компетентности. Разработанная методика применима к медиаобразовательным проектам, реализуемым в образовательных учреждениях различного уровня, обучаемым разных направлений обучения, относительно как старых, так и новых медиа.

Библиографичекий список

1. Цифровая экономика РФ. Национальная программа. М., 2021.
2. Петров П.К., Сабитова Н.Г. Формирование информационно-коммуникационных компетенций у студентов бакалавриата гуманитарных направлений с использованием дистанционного обучения // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. С. 142.
3. Касьянова Е.В. Сафонов К.В. Особенности формирования ИКТ-компетентности будущих ИТ-инженеров посредством медиаобразовательных проектов // Мир науки, культуры, образования. Горно-Алтайск. 2021. № 4 (89).
4. Касьянова Е.В., Сафонов К.В. Методика развития медиакомпетенций студентов посредством медиаобразовательных проектов // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2020. № 2 (52). С. 46–57.
5. Касьянова Е.В., Сафонов К.В. Применение сервиса Trello для реализации медиаобразовательных проектов // Цифровизация образования: теоретические и прикладные исследования современной науки: материалы XXVII Всероссийской научно-практической конференции. «Издательство ВВМ». 2021. С. 118–121.

ПОСТРОЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ГРАФОВ В СРЕДЕ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

BUILDING ANIMATED GRAPH MODELS IN GEOGEBRA ENVIRONMENT WHEN STUDYING DISCRETE MATHEMATICS

М.А. Кейв **M.A. Keiv**

Компьютерная анимация, программное средство GeoGebra, дискретная математика, теория графов, модель.

Рассматривается подход к изучению элементов теории графов с использованием динамической математики GeoGebra. В рамках подхода наглядно иллюстрируется понятие «изоморфные графы». Представлены примеры анимационных моделей для иллюстрации доказательств некоторых фактов из теории графов.

Computer animation, GeoGebra software, discrete mathematics, graph theory, model.

An approach to the study of graph theory elements using GeoGebra dynamic mathematics is considered. Within the framework of the approach, the definition of «isomorphic graphs» is clearly illustrated. Examples of animation models are presented to illustrate proofs of some facts from graph theory.

Теория графов является одним из разделов дискретной математики и входит в содержание профессиональной образовательной программы подготовки будущих учителей математики. Знакомство с языком теории графов происходит посредством изучения большого количества понятий. Качественному усвоению нового теоретического материала способствует использование анимационных моделей графов в процессе обучения дискретной математике.

Компьютерная среда GeoGebra позволяет с помощью создания интерактивных диаграмм графов, которые возможно динамически изменять, осваивать базовые понятия и алгоритмы теории графов.

В данной статье рассмотрим некоторые примеры построения анимационных моделей графов на практических занятиях по дискретной математике (компьютерный лабораторный практикум).

Одним из важных понятий теории графов является понятие «изоморфные графы». Во многих случаях не имеет значения, как изобразить граф, поскольку изоморфные графы несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, можно ли нарисовать граф на плоскости или на любой другой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались, то есть, чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом проводники не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

На языке теории графов речь идет в подобных случаях об укладке графа. Граф *G* укладывается в заданное пространство *E*, если существует изоморфизм *j* графа *G* на граф *G'*, находящийся в пространстве *E*, причем все простые кривые, соответствующие ребрам графа *G* (образы ребер графа *G*), пересекаются только в инцидентных этим ребрам вершинах.

При знакомстве студентов с данным разделом теории графов целесообразно их вовлечь в эксперимент по поиску решения задачи о трех домах и трех колодцах с помощью компьютерной среды GeoGebra [2]. Решение данной задачи на языке теории графов сводится к вопросу о существовании плоской укладки двудольного графа $K_{3,3}$.

На первом этапе решения задачи студентам предлагается изобразить диаграмму графа $K_{3,3}$ (рис. 1) в GeoGebra с помощью инструмента «Отражение относительно прямой», построив вершины, симметричные вершинам «Дом1», «Дом2», «Дом3». Изменяя положения этих вершин, получаем новые изображения графа $K_{3,3}$ – изоморфные графы [2].

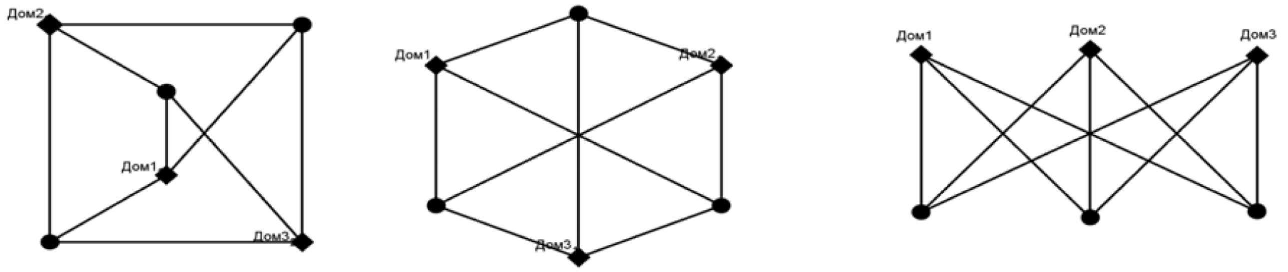


Рис. 1

При рассмотрении изоморфных графов для графа $K_{3,3}$ студентам можно предложить так называемое задание «Калейдоскоп» [1]. Результатом выполнения задания «Калейдоскоп» является анимационная модель графа $K_{3,3}$. Рассмотрим алгоритм построения такой модели.

1 шаг. Построить три концентрические окружности разных радиусов.

2 шаг. На каждой окружности построить по одной точке $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$, соответствующие трем домам (рис. 2, а).

3 шаг. С помощью инструмента «Отражение относительно прямой» построить вершины $К_1$, $К_2$, $К_3$, соответствующие трем колодцам и симметричные вершинам $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$. Ось симметрии – прямая, проходящая через диаметр окружности. Каждую вершину $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ соединить ребром (тропинкой) с каждой вершиной $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 2,б).

4 шаг. Скрыть вспомогательные окружности и ось симметрии. Включить анимацию вершин $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$. В результате перемещения этих вершин по окружностям получаем «эффект калейдоскопа»: новые изображения графа $K_{3,3}$ – изоморфные графы (рис. 2, в).

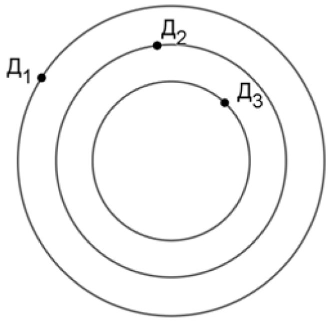


Рис. 2, а

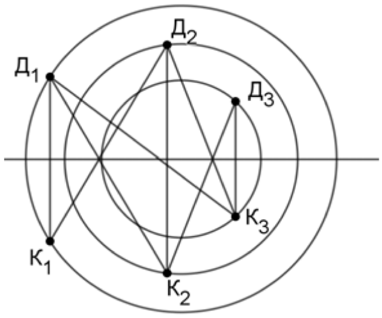


Рис. 2, б

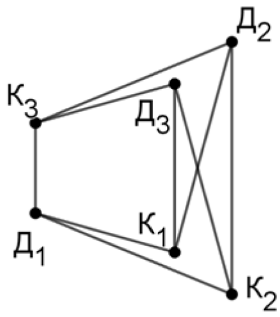


Рис. 2, в

Обучающиеся в ходе компьютерного эксперимента убеждаются, что все попытки осуществить плоскую укладку графа $K_{3,3}$ неизбежно заканчиваются неудачей. Как правило, легко нарисовать 8 непересекающихся дорожек, но девятая обязательно пересечет хотя бы одну из этих восьми (рис. 2, в). Конечно, эти неудачи не случайны. Задача не имеет решения на плоскости.

На втором этапе решения задачи студентам предлагается попробовать уложить граф $K_{3,3}$ в трехмерном евклидовом пространстве. Для демонстрации процесса укладки можно использовать следующий алгоритм построения анимационной модели графа:

1 шаг. Подготовить два полотна: Полотно и Полотно 3D. На первом полотне создать ползунок *n* (с целыми значениями от 1 до 5).

2 шаг. На полотне 3D в одной плоскости построить граф $K_{3,3}$ (рис. 3, а).

3 шаг. С помощью инструмента «Дуга по трем точкам» построить изоморфные дуги для ребер Д1К2, Д1К3, Д3К1 в этой же плоскости, а для ребра $Д_3К_2$ – дугу в другой плоскости (рис. 3, б).

4 шаг. Задать условия отображения: n=1 для ребра $Д_1К_2$ и n >1 для дуги $Д_1К_2$; n <2 для ребра $Д_1К_3$ и n >2 для дуги $Д_1К_3$; n <3 для ребра $Д_3К_1$ и n >3 для дуги $Д_3К_1$; n <4 для ребра $Д_3К_2$ и n >4 для дуги $Д_3К_2$. Включить анимацию для ползунка *n*. В результате получаем анимационную модель иллюстрации процесса укладки графа $K_{3,3}$ в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 3, в).

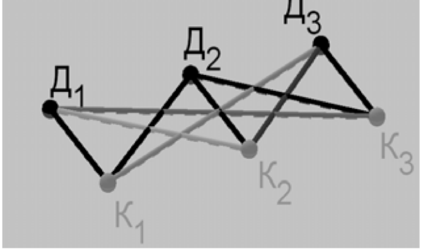


Рис. 3, а

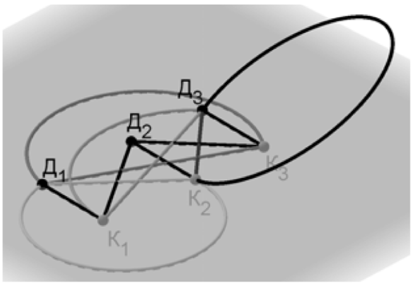


Рис. 3, б

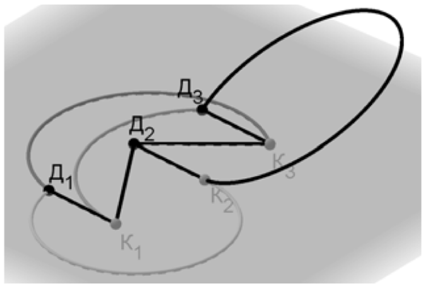


Рис. 3, в

Эксперимент в среде GeoGebra на первом и втором этапах решения задачи приводит студентов к выводу о необходимости конструирования моста или туннеля, соответствующих девятой дорожке (рис. 4).

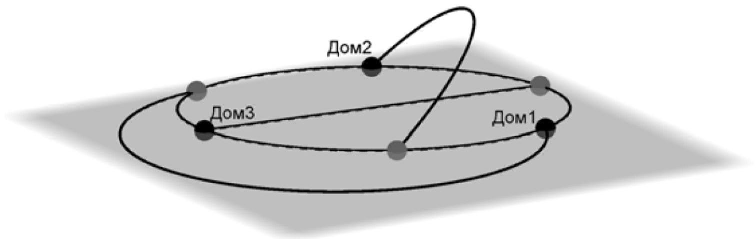


Рис. 4

После проведения описанного выше эксперимента рассматриваем и доказываем утверждение о том, что любой граф укладывается в трехмерное евклидово пространство.

Вывод. Анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra позволяют наглядно представить многие дискретные объекты и ввести компьютерную анимацию в процесс обучения дискретной математике. Компьютерный лабораторный практикум как разновидность практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» предполагает активное использование систем компьютерной математики в учебно-познавательном процессе. В ходе выполнения таких работ будущий учитель приобретает опыт применения систем компьютерной математики в будущей профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Большакова Н.С. Обучение теории графов с помощью системы динамической геометрии GeoGebra: материалы XXV Международной конференции «Применение информационных технологий в образовании», 25–26 июня 2014 г., г. Москва, г. Троицк, 2014. С. 120–122.
2. Кейв М.А. Анимационно-геометрический метод моделирования задач теории графов в среде GeoGebra // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016. С. 40–42. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27560009

ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ

LEARNING NUMBERS IN SCHOOL USING COMPUTER ANIMATION

С.В. Ларин **S.V. Larin**

Посвящается светлой памяти
Роберта Адольфовича Майера

Действительные числа, комплексные числа, многочлены, спутниковые системы, среда GeoGebra, анимационные рисунки.

Цель статьи – дать краткое описание последовательности изучения действительных и комплексных чисел в школе с использованием анимационных рисунков, которые позволяют визуализировать понятия и вычислительные алгоритмы, геометрически представлять числа и действия над ними, исключать нежелательные вычислительные трудности, организовывать проверки усвоения знаний, создавать задачи с ожидаемым ответом и задуманным необременительным решением.

Real numbers, complex numbers, polynaimals, satellite systems, GeoGebra environment, animation drawings.

The purpose of the article is to give a brief description of the sequence of studying real and complex numbers in school using animated drawings that allow you to visualize concepts and computational algorithms, geometrically represent numbers and actions on them, eliminate undesirable computational difficulties, organize tests of knowledge acquisition.

Статья представляет собой краткое изложение двух глав, посвященных числам, из подготовленного автором к печати учебного пособия «Алгебра и начала математического анализа 10 класса с анимационными рисунками» (частично представленного в [7]). Пособие содержит 5 глав: Действительные числа, Функции, Тригонометрия, Комплексные числа, Начала математического анализа. Содержание учебного пособия несколько перекрывает школьный учебник [8]. Сопутствующие анимационные рисунки выполнены в среде GeoGebra [9]. С ее анимационными возможностями можно познакомиться, например, по книге [5].

Глава 1. Действительные числа

Представим три взгляда на числа: алгебраический, геометрический и аксиоматический.

Натуральные числа. Натуральные числа целесообразно определять в школе как «числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, и так далее, где за каждым натуральным числом непосредственно следует одно и только одно натуральное число. Натуральные числа используются при пересчете объектов различной природы». Имеется в виду не только пересчет элементов конечных множеств, но и нумерация бесконечных множеств. Например, натуральными числами можно пересчитать все целые числа, все четные натуральные числа, все рациональные числа, а вот все действительные числа пересчитать, т.е. занумеровать натуральными числами, невозможно.

Записываются натуральные числа в виде слов в алфавите цифр, где начальная цифра отлична от нуля. Такая запись натуральных чисел позволяет их сравнивать, упорядочивая слова одинаковой длины по примеру расположения слов в словаре. Запись слова в алфавите цифр алгебраически означает сумму разрядных единиц, что позволяет складывать и умножать их столбиком. Эти действия представлены анимационными рисунками, на которых можно отрабатывать навыки выполнения этих операций.

Теория натуральных чисел лежит в основе метода полной математической индукции. Схема доказательства по индукции представлена анимационным рисунком, в который можно вписать свое конкретное доказательство. Это способствует отработке технологии доказательства по индукции до автоматизма.

Целые числа. Целые числа определяются в школе как «объединение трех подмножеств: натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным». Записываются целые числа с помощью алфавита цифр и знака «минус», что позволяет их сравнивать, а также складывать, вычитать и умножать столбиком. Эти операции также представлены анимационными рисунками, позволяющими решать конкретные примеры. Алгебраическое значение целых чисел состоит в том, что они обеспечивают решением всякое уравнение вида $a + x = b$, не всегда разрешимое в натуральных числах.

Поскольку далеко не всякое целое число делится на другое, то возникла целая теория делимости целых чисел, которая затем распространилась на другие, более общие объекты, например, на многочлены.

Объясняется, почему деление на нуль не определено (говорят, на нуль делить нельзя). Дано обоснование делению с остатком одного целого числа на другое целое число, отличное от нуля. Поскольку оно всегда возможно и однозначно, то не следует говорить о «делении без остатка». Остаток всегда есть. Если же остаток равен нулю, то первое число делится на второе. Создан анимационный рисунок, который реализует деление уголком с устранением вычислительных трудностей, помогая в подборе очередной цифры частного и в вычислениях шага алгоритма. Для проверки знания основных признаков делимости создан тестовый анимационный рисунок.

Создан анимационный тренажер для нахождения НОД и НОК двух натуральных чисел с помощью разложения их на простые множители.

Специальный анимационный рисунок реализует алгоритм Евклида для нахождения НОД и его линейной формы. В помощь учителю создан анимационный рисунок для придумывания «хороших» примеров на нахождение НОД двух натуральных чисел. С его помощью можно найти пару натуральных чисел с задуманным НОД и придуманной последовательностью неполных частных в алгоритме Евклида.

Рациональные числа. Рациональные числа в школе определяются по их записям, как «множество всех обыкновенных дробей $\frac{a}{b}$, где a – целое, а b – натуральное число». Алгебраическое значение рациональных чисел состоит в том, что они обеспечивают решением всякое уравнение вида $ax = b$, где $a \neq 0$, не всегда разрешимое во множестве целых чисел.

Помимо записи рационального числа в виде обыкновенной дроби, существует его представление в виде периодической десятичной дроби и создан анимационный рисунок, на котором осуществляется пошаговый алгоритм перехода от периодической десятичной дроби к обыкновенной.

Рациональные числа тесно связаны с задачами на части (и соответствующими задачами на проценты), которые наглядно решаются на соответствующих анимационных рисунках.

Иррациональные и действительные числа. Иррациональные числа в школе определяются как «непериодические десятичные дроби». Целесообразно показать примеры создания таких дробей из периодической десятичной дроби вставками, например, нулей: одного после первого периода, двух после второго периода, и так далее. Специальный анимационный рисунок помогает преобразовывать периодическую десятичную дробь в непериодическую. Периодические десятичные дроби (рациональные числа) и непериодические десятичные дроби (иррациональные числа) образуют множество всех действительных чисел. Создан анимационный рисунок, позволяющий находить приближенные значения корня из действительного числа с заданной точностью.

Геометрические представления чисел. Создан анимационный рисунок, на котором координатная прямая последовательно наполняется натуральными, целыми, рациональными и иррациональными числами, превращаясь в числовую прямую.

Созданы анимационные рисунки для анимационно-геометрического выполнения арифметических действий над действительными числами.

Числовые неравенства. Формулируются первичные свойства, определяющие отношение «меньше» для действительных чисел, и доказываются свойства, используемые при преобразованиях неравенств. Анимационные рисунки помогают усвоению определений числовых промежутков и умению находить их пересечения и объединения. С помощью анимационных рисунков решаются числовые неравенства и задачи на нахождение границ числовых выражений.

Элементы аксиоматических теорий числовых систем. Ученикам старших классов полезно знать, каковы первичные истины (аксиомы) лежат в основе учения о числах, исходя из которых можно строго логически доказать все привычные свойства чисел. Мы рассказываем, что натуральные числа можно определить с помощью словосочетания «непосредственно следует за» и четырех исходных аксиом, называемых аксиомами Пеано. Они четко формулируют свойства натуральных чисел, которые, с одной стороны, представляются нам очевидно верными, а с другой – из аксиом Пеано шаг за шагом можно вывести все свойства натуральных чисел, к которым мы привыкли, в частности, обосновать метод полной математической индукции, определить операции сложения и умножения натуральных чисел и доказать все их привычные свойства. Подобным образом строятся аксиоматические теории целых, рациональных и действительных чисел. Аксиоматические теории числовых систем лежат в основе школьного курса математики. Вместе с тем в школе числа изучаются на интуитивной основе, исходя из практических соображений, а не как в «чистой математике» формально-логически, ибо для понимания этого ученик должен подняться на соответствующую интеллектуальную высоту, с которой видны принципы построения математики как науки. Усвоение понятия числа проходит несколько этапов: от интуитивного представления о числах – к анализу знаний о них, выделению в них первичных истин, выстраиванию знаний о числах аксиоматически. В педвузовском курсе «Числовые системы» интуитивные знания о числах переводятся на твердую основу выводов, исходя из аксиом. В нем студентам предоставляется возможность с высоты накопленных знаний проанализировать школьные утверждения о числах, понять, о чем порой умалчивают школьные учебники, говоря о числах, какие научные основы скрываются за упрощенным, образным изложением соответствующего материала в школе. Автором статьи опубликованы учебные пособия по числовым системам [3; 4]. Их отличительной чертой является профессионально-педагогическая направленность изложения, подчеркивающая связь аксиоматических теорий числовых систем со школьными представлениями о числах.

Работа над учебным пособием [3] была начата автором в г. Магадане, в Магаданском педагогическом институте, куда автор был приглашен для чтения лекций по «Числовым системам» на физико-математическом факультете при содействии декана математического факультета Красноярского пединститута Р.А. Майера. Память об этом замечательном математике-педагоге автор сохранил на всю жизнь. Он оказал заметное влияние на преподавание математики в педагогическом вузе в свете профессионально-педагогической направленности.

Глава 4. Комплексные числа

Введение комплексных чисел в этой главе имеет экспериментально-исследовательский характер. Уравнение $x^2 = -1$ не имеет решения в действительных числах. Примем смелое решение и введем новое число, обозначим его буквой i и будем считать решением нашего уравнения. Тогда $i^2 = -1$. Но тогда придется ввести и произведение действительного числа b на новое число i в виде bi, а также сумму действительного числа a с числом bi в виде $a + bi$. Новые числа такого вида целесообразно складывать и умножать по примеру выражений вида $a + bx$, раскрывая скобки и приводя подобные с учетом того, что $i^2 = -1$.

В процессе дальнейшего изложения учебного материала подключаются анимационные рисунки, моделирующие действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах, нахождение степеней мнимой единицы i, извлечение корней, сопровождающие изучение дробно-линейной функции на комплексной плоскости. Дан анимационно-графический алгоритм нахождения корней многочленов с комплексными коэффициентами, который положен в основу наглядного доказательства основной теоремы алгебры (доказательство А.Н. Колмогорова под названием «Дама с собачкой»). Предложены темы для самостоятельного учебно-исследовательского творчества. Увлекательный мир чисел не заканчивается на комплексных числах, для дополнительных сведений целесообразно использовать [2].

В качестве дополнения в конце главы в учебном пособии представлена исследовательская задача построения анимационно-геометрической модели спутниковой системы, описываемой многочленом с комплексными коэффициентами. В среде GeoGebra строим единичную окружность и точку Z на ней, изображающую комплексную переменную z с условием $|z|=1$. Затем для каждого $j=0,1,\dots,n$ строим точку $S_j = a_0 + a_1 Z^{q_1} + \dots + a_j Z^{q_j}$, изображающую значение многочлена $s_j(z) = a_0 + a_1 z^{q_1} + \dots + a_j z^{q_j}$. Точку S_0 назовем планетой, а остальные точки S_j ее спутниками. При анимации точки Z эта точка бежит по единичной окружности, отсчитывая время, а спутники S_j перемещаются так, что для каждого $j > 0$ спутник S_j вращается по круговой орбите радиуса $|a_j|$ вокруг S_{j-1}, совершая при этом q_j оборотов за один оборот точки Z по единичной окружности (подробности см. в [6]).

Анимационные рисунки существенно пополняют арсенал средств дидактики современного учителя математики, являясь проявлением технологической части цифровизации обучения [1]. Разумное сочетание наглядного и абстрактного позволяет гибко подходить к проблеме обучения математике, выстраивая для каждой личности свой образовательный путь усвоения необходимых математических знаний.

Библиографический список

1. Зимнякова Т.С., Ларин С.В., Ларина Е.И. Особенности использования цифровых образовательных ресурсов в обучении математике и физике // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2019. № 2 (48). С. 26–32.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 244 с.
3. Ларин С.В. Числовые системы: учебное пособие. М.: Академия, 2001. 160 с.
4. Ларин С.В. Числовые системы: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2017.
5. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
6. Ларин С.В. Спутниковые системы как анимационно-геометрические модели полиномов // Matematica and Informatics. Bulgarian Jurnal of Educational Recearch and Practics. Volume 63. Number 4. 2020. С. 441–452.
7. Ларин С.В. Компьютерная анимация на уроках алгебры и начал математического анализа // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. 26–28 сентября 2019, Самара. С. 100–102.
8. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. М.: Мнемозина, 2009. 434 с.
9. GeoGebra: официальный сайт [Электронный ресурс]. URL: http://www.geogebra.org

СИСТЕМА ЗАДАЧ Р.А. МАЙЕРА ПО ФОРМИРОВАНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ И ЕЕ ПОДДЕРЖКА В СРЕДЕ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

R.A. MAYER'S SYSTEM OF TASKS ON THE FORMATION OF FUNCTIONAL CONCEPTS AND ITS SUPPORT IN THE GEOMETER'S SKETCHPAD

В.Р. Майер, Н.Р. Колмакова **V.R. Mayer, N.R. Kolmakova**

Посвящается светлой памяти нашего отца
Роберта Адольфовича Майера

Переменная величина, зависимость между величинами, компьютерная среда Живая математика, формирование функциональных понятий.
В статье продемонстрированы вычислительные, анимационные и графические возможности программной среды Живая математика как эффективного средства компьютерной поддержки решения специальной системы задач профессора Р.А. Майера по формированию у обучающихся основной школы функциональных понятий.

Variable value, dependence between values, the Geometer's Sketchpad software, formation of functional concepts.
The article demonstrates the computational, animation and graphic capabilities of the Geometery's Sketchpad software as an effective means of computer support for solving a special system of tasks of Professor R. A. Mayer on the formation of functional concepts among students of the basic school.

В 1965 г. издательством «Просвещение» было опубликовано учебное пособие Роберта Адольфовича Майера «Задачи по формированию функциональных понятий» для учителей 5–8 классов [1]. Пособие составлялось с целью оказать учителям восьмилетней школы помощь в совершенствовании методов изучения функциональных понятий. Работая над пособием, автор руководствовался следующими соображениями: «Во-первых, изучение функций и их свойств проходит успешнее в том случае, если учащимся ясна цель их введения, если «функциональный аппарат» применяется ими для решения задач практического содержания, особенно задач, использующих личный опыт учащихся, их живой интерес к явлениям природы, склонность к наблюдениям. Во-вторых, определяемый программами уровень математических знаний, умений и навыков позволяет решать такие задачи еще в восьмилетней школе задолго до введения элементов дифференциального исчисления» [1, с. 3].

Останавливаясь на вопросе о средствах математического выражения и изучения функциональных зависимостей, автор отмечает, что в условиях школы такими средствами являются таблицы, графики и формулы. Не умаляя роли и значения графиков при изучении зависимостей, автор считает, что следует шире пользоваться формулами, поскольку, во-первых, графики в отличие от формул плохо приспособлены для последующей математической обработки, и, во-вторых, изучение в старших классах элементов дифференциального исчисления требует особого внимания именно к аналитическим средствам. Автор рекомендует учителю «учить школьников выражать зависимость одной или несколькими формулами, учить использовать эти формулы для установления тех или иных свойств зависимости, учить целенаправленной математической обработке аналитических выражений» [1, с. 4].

Первая глава содержит 88 задач, посвященных математическому заданию и исследованию конкретных зависимостей. Система этих задач является одной из форм функциональной пропедевтики, которую предлагается осуществлять в основной (на тот период времени – восьмилетней) школе. Как отмечает автор, «с ее помощью осуществляется первый и наиболее существенный шаг в ряду последовательных абстракций, ведущих от конкретных физических зависимостей к отвлеченному понятию функций, создается необходимая база для неформального изучения в VIII классе свойств функций» [1, с. 8]. Задачи на математическое задание и исследование конкретных зависимостей, как считает Р.А. Майер, могут и должны занять подобающее им место среди других задач курса математики основной школы.

Вторая глава сборника содержит 96 задач и посвящена систематическому изучению функции. Сначала в ней на основе понятия переменной величины и зависимости между величинами вводятся основные функциональные понятия, в целом ряде случаев используется интуитивно-графическая основа. Завершается глава линейной и квадратичной функцией, изучению которых автор придает практическую направленность.

Предложенная система задач способствовала обеспечению в 60-х гг. прошлого столетия неформального усвоения функциональных понятий, подготовке основ для изучения в старших классах элементов дифференциального исчисления не только в целом ряде школ РСФСР, но и в школах прибалтийских республик, издавших у себя это пособие. Широко используя в этих задачах материал конкретных физических зависимостей, привлекая эксперимент и лабораторные работы, учителю удавалось раскрыть перед учениками коренную связь понятия функции с естественными науками, с производственной практикой людей. Не последнюю роль в том, что разработанная система задач Р.А. Майера с успехом использовалась учителями в учебном процессе, сыграла высокая мотивация молодежи того времени на изучение математики и естественных наук.

В условиях цифровизации современного общества у учителя появилась дополнительная возможность заинтересовать обучающихся основной школы в решении прикладных задач, обеспечивающих развитие функционального стиля мышления. В последние три десятилетия в школьном математическом образовании многих стран стали популярны так называемые системы динамической математики (СДМ). Одними из первых и наиболее часто используемых являются такие СДМ, как Cabry Geometry (Франция), The Geometer's Sketchpad (США, в России известна ее русскоязычная версия Живая математика) и GeoGebra (Австрия). Цель статьи – продемонстрировать возможность СДМ Живая математика [3] как эффективного средства компьютерной поддержки решения специальной системы задач Р.А. Майера [2] по формированию у обучающихся основной школы функциональных понятий. Проиллюстрируем предлагаемую нами поддержку на примере трех задач из [1].

З а д а ч а 1 (стр. 12). Высота сосны со временем изменяется в среднем в соответствии с представленной ниже таблицей (левая часть рисунка 1).

Пользуясь графиком, найдите: 1) высоту сосны в возрасте 35 лет, 72 года, 87 лет; 2) возраст сосны, высота которой 10 м, 16 м, 20 м; 3) на сколько метров выросла сосна за первые 10 лет, за вторые 10 лет; 4) на сколько метров выросла сосна в промежуток времени от 30 до 60 лет.

Покажем, как, используя графические и анимационные возможности среды Живая математика, можно осуществить компьютерную поддержку решения этой задачи. Учитель заранее готовит динамический чертеж, соответствующий условию задачи. Для этого задается прямоугольная система координат (меню «Графики»), по горизонтальной оси откладывается возраст сосны в годах, по вертикальной оси – высота сосны в метрах, составляется соответствующая условию задачи таблица. Используя команду «Построить график по данным из таблицы», на экране изображаются 11 точек, соседние точки соединяются отрезками. На горизонтальную ось помещается произвольная точка *A*, строится перпендикуляр к этой оси, находится точка пересечения *B* перпендикуляра с построенной ломаной, измеряются длины отрезков *OA* и *AB*, соответствующие значения выводятся на экран. Перемещая с помощью мышки точку *A*, у обучающегося есть возможность найти ответы на все поставленные в задаче вопросы.

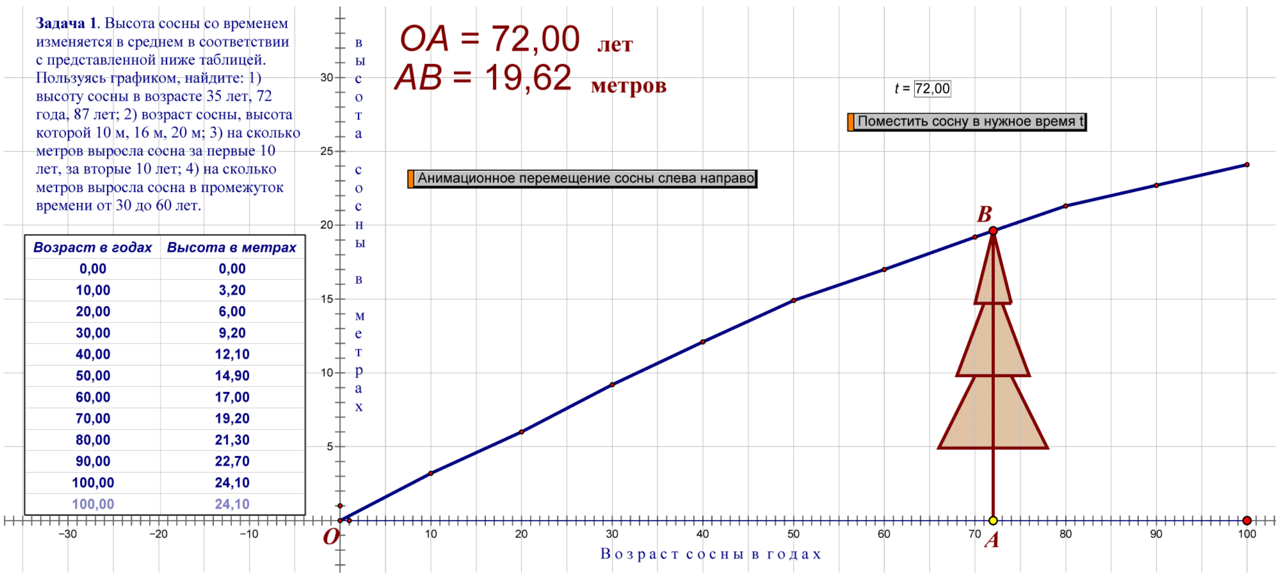


Рис. 1

З а д а ч а 28 (стр. 32). На чертеже (см. рисунок 2) изображены графики движения автомашины и велосипедиста, движущихся по одной дороге в одном направлении.

1) С какой скоростью движется автомашина, с какой – велосипедист?

2) Одновременно ли они начали двигаться? Если не одновременно, то кто из них выехал раньше и на сколько минут?

3) Из одного ли пункта начали двигаться велосипедист и автомашина? Чему было равно расстояние между ними в момент начала движения автомашины?

4) Через сколько минут автомашина догонит велосипедиста?

Как и в предыдущей задаче, подготовим в среде Живая математика динамический чертеж, соответствующий условию задачи 28. Выбираем прямоугольную систему координат, по горизонтальной оси откладываем время движения в минутах, по вертикальной оси – расстояние в километрах. Строим графики движения велосипедиста и автомашины, для этого удобно построить крайние точки каждого графика и соединить их отрезками. В отличие от задачи 1, точку *A* на горизонтальной оси зададим параметрически. Для этого выведем на экран параметр *t*, присвоим ему некоторое значение, например *t = 6* минут, построим точку *A* с координатами *(t; 0)*, найдем соответствующие ей точки *B* и *C* на графиках движения велосипедиста и автомашины, выведем на экран длины отрезков *AB*, *AC* и *BC* в километрах.

Для наглядности построим изображение часов, секундной и минутной стрелок. Для этого изобразим произвольную окружность, построим на ней исходную точку, соответствующую 0 секунд, поворачивая ее вокруг центра окружности на углы, кратные *6º* (меню «Преобразования»), построим нужные деления. Для изображения минутной стрелки, соответствующей параметру *t*, повернем по направлению движения часовой стрелки исходную точку на угол *t·6º*, соединим отрезком построенную точку с центром окружности, построим вектор (минутную стрелку) с началом в центре окружности и концом на отрезке, отрезок и точку на окружности спрячем. Минутная стрелка готова. Аналогичные построения выполняются и для создания секундной стрелки, только в качестве угла поворота берется угол *(t-trunc(t))360º*, где *trunk(t)* – целая часть *t* (левая часть рисунка 2).

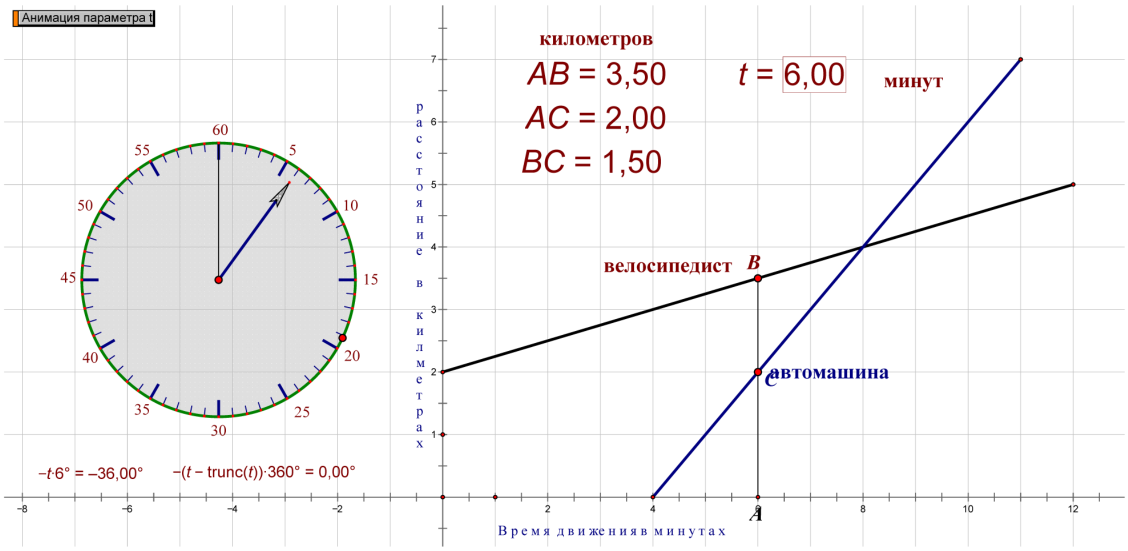


Рис. 2

Для ответа на вопросы, сформулированные в условии задачи, теперь достаточно подсветить параметр t, нажимая на клавиши «+» или «-», перемещать точку *A* по горизонтальной оси и наблюдать за теми значениями, которые принимают длины отрезков *AB*, *AC* или *BC* в километрах.

В завершение приведем задачу 182 из второй части пособия.

З а д а ч а 182 (стр. 106). Из точки С, отстоящей от точки А на расстоянии 50 см, вверх по наклонной плоскости толкнули шар (см. рисунок 3). Через 2 секунды, удалившись от точки А на расстояние 450 см, он остановился и начал двигаться вниз.

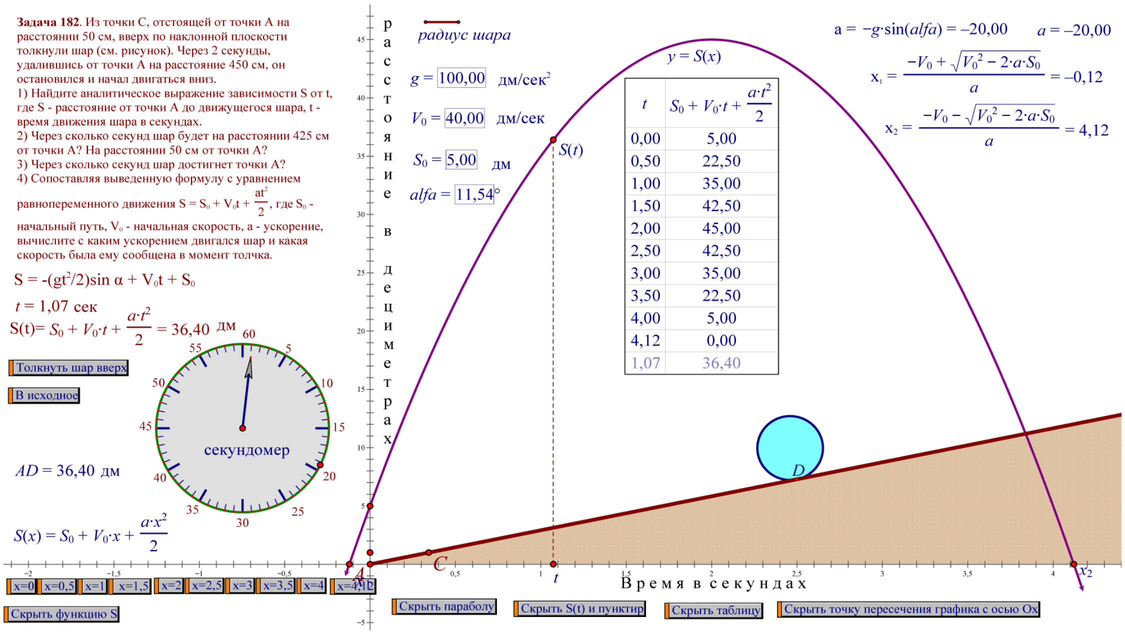
1) Найдите аналитическое выражение зависимости S от t, где S – расстояние от точки А до движущегося шара, t – время движения шара в секунду.

2) Через сколько секунд шар будет на расстоянии 425 см от точки А? На расстоянии 50 см от точки А?

3) Через сколько секунд шар достигнет точки А?

4) Сопоставляя выведенную формулу с уравнением равнопеременного движения $S = S_0 + V_0t + a\cdot t^2/2$, *где* S_0 *– начальный путь,* V_0 *– начальная скорость, а – ускорение, вычислите, с каким ускорением двигался шар и какая скорость была ему сообщена в момент толчка.*

Равнопеременное движение, в частности движение шара по наклонной плоскости, изучается в 10 классе. Девятиклассникам же при решении задачи следует воспользоваться рекомендацией о том, что зависимость расстояния *S* от времени *t* является квадратичной, следовательно, ее графиком является парабола. Не вникая в физический смысл коэффициентов, найдем эту зависимость по данным задачи. В соответствии с условием точка с координатами *(2; 450)* является вершиной параболы. Отсюда формула зависимости *S* от *t* имеет вид: $S = k(t - 2)^2 + 450$. Поскольку точка *(0; 50)* принадлежит параболе, то $50 = 4k + 450$, отсюда $k = -100$ и $S = -100t^2 + 400t + 50$. Далее несложно ответить на первые три вопроса задачи математическими методами.



t	$S_0 + V_0\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2}$
0,00	5,00
0,50	22,50
1,00	35,00
1,50	42,50
2,00	45,00
2,50	42,50
3,00	35,00
3,50	22,50
4,00	5,00
4,12	0,00
1,07	36,40

Рис. 3

При ответе на четвертый вопрос нам уже не удастся изящно обойти физику, как при ответе на предыдущие три. Знание физики нам потребуется не только для ответа на этот вопрос, но и для реализации основного дидактического принципа, рекомендующего сопроводить решение задачи наглядностью. Провести реальные наблюдения и измерения катящегося шара практически невозможно. На помощь приходят цифровые технологии. В среде Живая математика построим анимационную модель перемещения шарика по наклонной плоскости. Из физики известно, что $S = -(gt^2/2)\sin\alpha + V_0t + S_0$, где g – ускорение свободного падения, которое мы примем равным $g = 1000$ *см/сек*^{2}, α – угол наклона плоскости к земле (уклон). Сравнивая эту формулу с нашей функцией, находим $S_0 = 50$ см, $V_0 = 400$ *см/сек* и $\sin a = 0{,}2$, отсюда $\alpha \approx 11{,}54^o$.

Зададим в среде Живая математика прямоугольную систему координат с единицами измерения по горизонтальной оси, равной *1 сек*, по вертикальной оси – *1 дм*, начало координат обозначим A. Вводим параметры $g = 100$ *дм/сек*^{2}, $\alpha = 11{,}54^o$, $S_0 = 5$ *дм*, $V_0 = 40$ *дм/сек* (верхняя часть рисунка 3), подсчитаем ускорение $a = -g\cdot\sin a = -20$ *дм/сек*^{2}. Построим луч AB, образующий с осью OX угол α, поместим на ось ординат точку с координатами $(0; S_0)$, проведем через эту точку вспомогательную окружность с центром A, обозначим пересечение окружности и луча AB буквой C, скроем окружность. В соответствии с построением точка C будет находиться на наклонной AB на расстоянии $S_0 = 5$ *дм* от A, что соответствует стартовому положению шара.

Используя команду «Новая функция …» (меню «Вычисления»), зададим функцию $S(x) = S_0 + V_0x + ax^2/2$, построим график этой функции на промежутке $[0; x_2]$, где $x_2 = (-\sqrt{V_0^2 - 2aS_0} - V_0)/a$ – положительный корень уравнения второй степени $S_0 + V_0x + ax^2/2 = 0$. Поместим на ось абсцисс произвольную точку, обозначим ее t, подсчитаем $S(t)$ и поместим на ось ординат точку $(0; S(t))$, построим два перпендикуляра, один к оси абсцисс, проходящий через точку t, второй – к оси ординат, проходящий через точку $(0; S(t))$, найдем точку пересечения этих перпендикуляров, обозначим ее $S(t)$. Теперь нам осталось построить текущую точку D касания шара с лучом AB. Для этого построим окружность с центром A и радиуса $S(t)$, пересечение этой окружности с лучом AB и даст искомую точку D. Используя точку D, построим изображение шара, все вспомогательные построения скроем. Для наглядности дополнительно построим изображение секундомера (нижний левый угол рисунка 3).

Для задания кнопочной анимации перемещения шара вверх по наклонной плоскости подсветим последовательно две точки на оси абсцисс: сначала ту, что мы обозначили буквой t, затем точку x_2 пересечения параболы $y = S(x)$ с положительной полуосью абсцисс. Далее в меню команд «Правка» обратимся к опции «Кнопки» и выберем команду «Перемещение», указав скорость анимации «Быстро». Появившуюся кнопку переименуем, присвоив ей имя «Толкнуть шар вверх». Чтобы создать кнопку, помещающую шар в исходное положение, необходимо подсветить точку t, затем – точку A и выбрать команду «Перемещение», указав скорость анимации «Мгновенно». Присвоим соответствующей кнопке имя «В исходное» (центр левой трети рисунка 3).

Для компьютерного моделирования процесса, описанного в условии задачи, необходимо сначала поместить шар в исходное положение, используя для этого одноименную кнопку. Далее следует активировать кнопку «Толкнуть шар вверх». Шар устремится вверх по наклонной плоскости, одновременно с этим начнет вращаться стрелка секундомера. Через *2* секунды, удалившись от *A* на расстояние *45 дм*, шар остановится и начнет двигаться вниз, достигнув точки *A* при $t = x_2$, т.е. примерно через *4,12* секунды.

Перемещать точку *t* можно и вручную, с помощью мыши, однако этот способ не всегда позволяет расположить ее с нужной степенью точности. В этом случае рекомендуется, используя команду «Построить точку с координатами…» меню «Графики», изобразить на оси абсцисс точку по ее координатам, затем задать перемещение точки t в эту точку с помощью соответствующей кнопки. Для получения более точных значений можно создать целую серию кнопок, позволяющих помещать точку *t* в положения от 0 до x_2 с интервалом в *0,5* секунды. Это позволит сопроводить компьютерный эксперимент числовой таблицей, в которой для выбранных значений *t* будут указаны соответствующие значения расстояния от точки *A* до шара.

Компьютерная модель в отличие от статического чертежа предоставляет учителю возможность, оперативно изменив соответствующие параметры, провести для обучающихся целую серию демонстрационных экспериментов, позволяющих выяснить, каким образом влияет на перемещение шара по наклонной плоскости изменение таких величин, как угол *a* наклона плоскости, начальная скорость V_0 толчка шара, расстояние S_0 от точки *A* до точки *C* – исходного положения шара.

Подводя итог, отметим, что использование анимационных чертежей при решении задач по формированию у обучающихся функциональных понятий позволяет:

– создать на уроке виртуальную имитацию описанного в условии задачи процесса, которая, во-первых, максимально приближена к реальным условиям и, во-вторых, позволяет в мельчайших нюансах продемонстрировать особенности исследуемой зависимости;

– сопроводить компьютерный эксперимент по выявлению функциональной зависимости необходимыми числовыми значениями, подтверждающими или, наоборот, опровергающими то или иное гипотетическое предположение;

– заинтересовать обучающихся в решении задач с функциональным содержанием в самостоятельном создании анимационных чертежей, моделирующих процессы и явления, описанные в условии этих задач.

Библиографический список

1. Майер Р.А. Задачи по формированию функциональных понятий: пособие для учителей 5–8 классов. М.: Просвещение, 1965.
2. Майер Р.А. Система задач с функциональным содержанием в курсе алгебры восьмилетней школы: дис. … канд. пед. наук. М., МГПУ, 1972.
3. Живая Математика 5.0: сборник методических материалов (сост.: Г.А. Аджемян и др.). М.: ИНТ, 2013.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

DYNAMIC POLYHEDRON MODELS AS A MEANS OF LEARNING TO SOLVE OF TASKS IN STEREOMETRY

В.В. Мартынов, А.В. Вебер **V.V. Martynov, A.V. Veber**

Задачи стереометрии, вычисление расстояний и углов, система динамической математики, Живая математика, динамический чертеж.

В статье рассматриваются возможности использования подготовленных в среде Живая математика динамических моделей многогранников при обучении решению стереометрических задач на вычисление расстояний и углов.

The tasks of stereometry, calculation of distances and angles, Sistem of dynamic mathematics, The Geometer's Sketchpad, dynamic drawing.

The article discusses the possibilities of using dynamic models of polyhedra prepared in The Geometer's Sketchpad environment when teaching the solution of stereometric problems for calculating distances and angles.

Важнейшая цель обучения стереометрии в школьном курсе математики – формирование пространственного мышления, которое является одной из составляющих интеллекта человека, а его развитие становится значимым условием успешности любого вида предметной деятельности обучающихся современной школы. Далеко не каждый ученик способен осуществить безболезненный переход от планиметрии к стереометрии. Первое учебное полугодие испытывает пространственные представления большинства десятиклассников на «прочность». Чертеж, на котором перпендикуляр к ребру пирамиды пересекает это ребро под прямым углом, нередко появляется не только в тетрадях по стереометрии, но и на школьной доске. А.В. Бикбаева по этому поводу в своей статье [1] пишет следующее: «Трудности в изучении стереометрии вызваны тем, что зрительное восприятие геометрических объектов не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает. Например, скрещивающиеся прямые могут выглядеть как пересекающиеся или как параллельные прямые, прямой угол может выглядеть как острый или тупой угол, равные отрезки могут выглядеть как отрезки разной длины, и т.д.».

Неверно решенную задачу можно отнести к безобидному негативному последствию недостаточной сформированности у ученика пространственных представлений. Гораздо хуже то, что у таких обучающихся складываются неверные представления об окружающем мире, которые могут сохраниться на долгие годы, даже на всю жизнь. Поэтому важно добиться понимания учащимися того, что зрительное представление может существенно отличаться от того, что происходит в действительности. Наш опыт создания и использования динамических моделей пространственных фигур как при самостоятельном решении вычислительных задач стереометрии, так и при обучении этому учащихся старших классов, говорит о том, что сделать это можно с помощью так называемых систем динамической математики (СДМ).

Для изучения геометрии вообще и школьной стереометрии в частности больше всего, на наш взгляд, подходит СДМ Живая математика. Она позволяет не только конструировать любые геометрические конфигурации и трансформировать их с сохранением заданных отношений. С помощью Живой математики нами была освоена технология создания динамических моделей школьных стереометрических объектов, апробирована методика использования этих моделей при обучении десятиклассников решению задач на вычисление расстояний и углов в пространстве, в том числе в условиях дистанционного формата обучения.

Остановимся на некоторых аспектах этой методики. Перед решением стереометрических задач ученик самостоятельно или с помощью учителя учится создавать динамические многогранники на основе куба. Изображение куба можно позаимствовать из комплекта готовых инструментов или создать самостоятельно на основе подвижной прямоугольной системы координат (3D-репера), ее описание подробно дано в статье [2]. Проиллюстрируем алгоритм создания модели многогранника из куба на примере правильной четырехугольной пирамиды с заданными стороной основания и высотой, обозначим их *a* и *h*.

1. Построим изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (левая часть рис. 1). В качестве основания пирамиды возьмем грань *ABCD*, вершину *M* расположим в одном полупространстве с гранью $A_1B_1C_1D_1$.
2. Выведем на экран параметры *a* и *h* (на рисунке 1 выбраны следующие значения: $a=1$ *см*, $h=2$ *см*), измерим длину ребра DD_1 куба ($DD_1=7{,}24$ *см*).
3. Так как вершина *M* пирамиды находится на расстоянии *h* от центра *O* грани *ABCD*, то отрезок *OM*, параллельный боковым ребрам куба, должен удовлетворять соотношению (*) $OM/DD_1 = h/a$, поскольку параллельное проектирование сохраняет отношение длин параллельных отрезков.

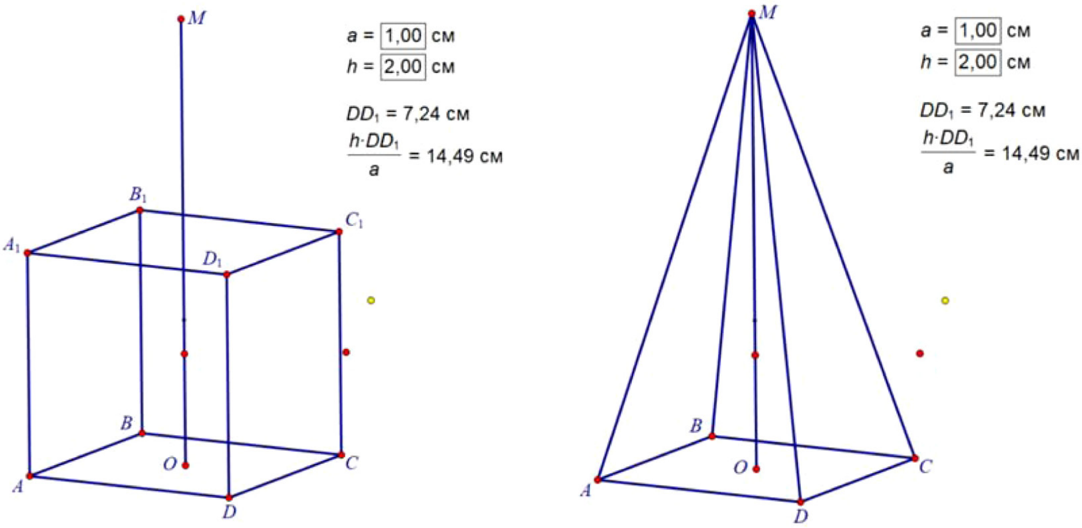


Рис. 1

4. Из (*) следует $OM = h \cdot DD_1/a$. Используя вычислительные возможности Живой математики, находим длину OM ($OM=14,49$ *см*).
5. Построим луч с началом в точке O, сонаправленный с лучом DD_1, затем окружность с центром в O и радиуса OM, наконец, точку M – пересечение окружности и построенного луча.
6. Спрячем вспомогательные построения, оставив только грань $ABCD$, точки O и M, соединим отрезками точку M с точками A, B, C, D и O, получим изображение правильной пирамиды $MABCD$ (правая часть рис. 1), в которой с точностью до подобия сторона основания равна a, а высота – h.

Построенная модель правильной пирамиды является динамической, ее можно поворачивать вокруг любой из осей и наклонять. После создания собственного инструмента «Правильная четырехугольная пирамида» модель можно использовать при решении любой задачи, связанной с правильной четырехугольной пирамидой. Например, рассмотрим применение данного инструмента при решении следующей задачи, взятой нами из [4]:

Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Через точку пересечения диагоналей основания провели плоскость α перпендикулярно ребру SA. Найдите расстояние от точки N до плоскости α, если N – середина стороны AD, AB = 4, а высота пирамиды равна 8.

Перед решением задачи следует провести пропедевтическую работу, а именно предложить учащимся построить перпендикуляр OK самостоятельно. Исходя из нашего опыта, большинство обучающихся проводит перпендикуляр, используя инструмент Живой математики (построение «перпендикуляр»), но тогда при повороте куба они видят, что точка K меняет свое положение на ребре AS. Это показывает, что чертеж не является динамически устойчивым, а значит данное построение выполнено неверно.

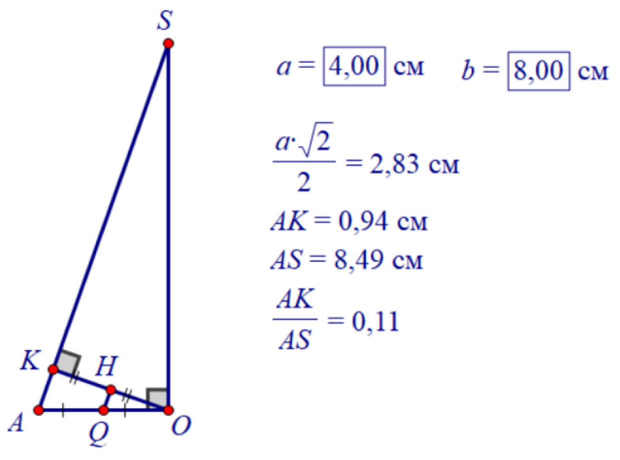


Рис. 2

Для того, чтобы правильно отметить основание K перпендикуляра, необходимо найти соотношение, в котором точка K делит отрезок AS. Для этого можно построить выносное сечение пирамиды плоскостью ASC и рассмотреть в нем треугольник AOS, это позволит применить встроенные инструменты Живой математики и найти необходимые отношения (рис. 2).

Теперь, зная отношение AK/AS, можно указать точное расположение точки K на чертеже в пространстве. Для этого надо измерить длину AS в четырехугольной пирамиде и найти длину AK. Получим AK = (AK′/AS′) ·AS, где AK' – длина AK в треугольнике AOS, AS' – длина AS в треугольнике AOS. Теперь можно отметить точку K, которая является точкой пересечения окружности с центром в точке A и радиусом AK (рис. 3).

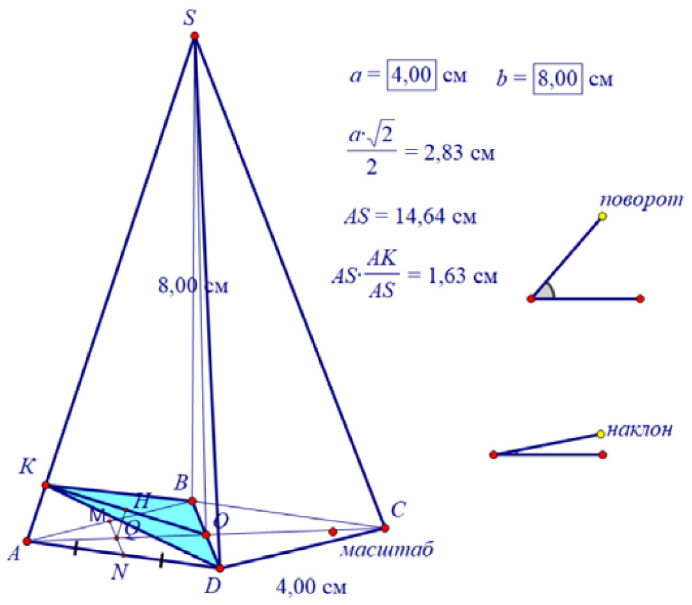


Рис. 3

Таким образом, выполнена визуальная часть решения задачи – построение основного чертежа. Проведем теперь среднюю линию *MN* треугольника *ABD*. Так как *MN* параллельна плоскости треугольника *KBD*, то расстояния от точек *N* и *Q* до этой плоскости равны между собой, где *Q* – середина *MN*. Отсюда искомое расстояние равно длине отрезка *QH*, где *H* – ортогональная проекция точки *Q* на плоскость *KBD*. Переходя теперь к прямоугольному треугольнику *ASO* (здесь лучше воспользоваться рис. 2), легко найти длины его катета *AO* и гипотенузы *AS*. Затем, используя подобие треугольников *ASO* и *AOK*, установить, что $AK=2\sqrt{2}/3$. Поскольку *QH* является средней линией треугольника *AOK*, то расстояние между точками Q и *H* равно половине *AK*, т.е. $QH=\sqrt{2}/3$.

Рассмотрим применение еще одной динамической модели четырехугольной пирамиды, в основании которой лежит квадрат, а вершина пирамиды ортогонально проектируется не в центр основания, а в одну из его вершин. Алгоритм создания такой модели очень схож с алгоритмом создания динамической модели правильной пирамиды с заданными ребром основания и высотой и отличается от него лишь тем, что вершина такой пирамиды строится на продолжении одного из боковых ребер куба (например, рис. 4).

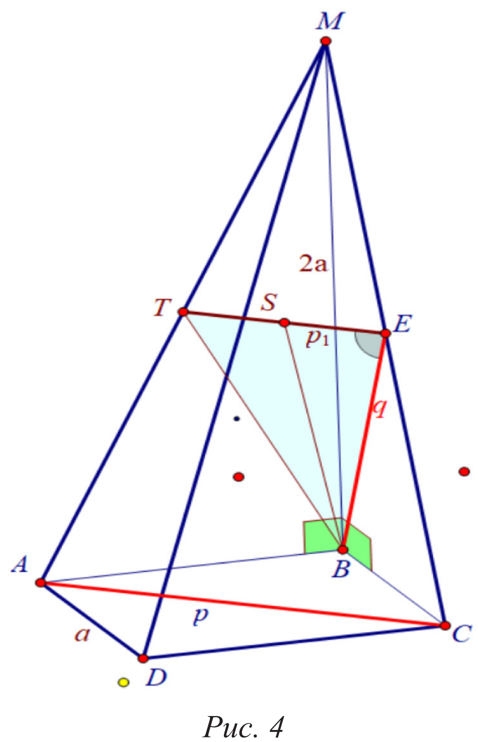


Рис. 4

Сформулируем задачу, взятую нами из [3]:

В основании пирамиды MABCD лежит квадрат ABCD, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. E – середина ребра MC. Найдите угол, который образует прямая BE с прямой AC.

Как и выше, решение задачи начинается с построения динамической модели пирамиды, анализа формулировки задачи и поиска решения. С обучающимися целесообразно обсудить основные этапы решения, связанные с нахождением угла между скрещивающимися прямыми. Именно на начальном этапе, связанном с выбором подходящей точки на одной из данных прямых и построении прямой, проходящей через эту точку и параллельной другой прямой, существенную помощь обучающимся могут оказать динамические модели. Выбор наиболее удачной проекции изображения пирамиды позволяет успешно выполнить не только начальный, но и все последующие этапы решения задачи.

На рис. 4 пирамида расположена так, что именно диагональное сечение *MAC* выглядит наиболее выигрышно. Такая проекция пирамиды естественным образом мотивирует обучающихся к построению в треугольнике *MAC* средней линии *ET*, которая параллельна прямой *AC* (одной из двух скрещивающихся прямых) и проходит через точку *E*, принадлежащую второй прямой. После удачно проведенного начального (стереометрического) этапа появляется возможность успешно выполнить завершающий (планиметрический) этап – рассмотреть равнобедренный треугольник *BET* (*BE* = *BT*), вычислить его стороны $TE = AC/2 = a\sqrt{2}/2$, $BT = AM/2 = a\sqrt{5}/2$, где a – длина ребра основания пирамиды. Косинус угла *BET* при основании *TE* треугольника *BET* находится как отношение *SE* / *BE* и равен $\sqrt{10}/10$, где *S* – середина *TE*.

Динамические модели многогранников существенно пополняют арсенал средств обучающихся, позволяя им успешно решать как позиционные стереометрические задачи, так и задачи на вычисление расстояний и углов в пространстве. При этом использовать динамические модели можно как в основном курсе геометрии, так и на элективных занятиях. Кроме того, самостоятельное создание таких моделей способствует развитию у обучающихся пространственных представлений.

Библиографический список

1. Бикбаева А.В. Проблемы, возникающие у учащихся при изучении стереометрии [Электронный ресурс]. URL: https://scienceforum.ru/2015/article/2015010501 (дата обращения: 23.10.2021).
2. Дубровский В.Н. Стереометрия с компьютером // Компьютерные инструменты в образовании. 2003. № 6. С. 3–11.
3. Литвиненко В.Н., Батугина О.А. Геометрия. Готовимся к ЕГЭ. 10 класс: учебник. М.: Просвещение, 2011.
4. Решу ЕГЭ. [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата обращения: 14.10.2021).

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ С АНИМАЦИОННЫМИ РИСУНКАМИ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ

DIVISION WITH REMAINDER WITH ANIMATED DRAWINGS IN ALGEBRA LESSONS

Д.Р. Матюшкин **D.R. Matyushkin**

Деление с остатком, деление уголком, алгоритм Евклида, наибольший общий делитель целых чисел, анимационные рисунки, среда GeoGebra.

Анимационные рисунки представляют собой новое дидактическое средство в арсенале дидактики современного учителя математики. Они могут быть использованы в качестве средства тестирования, устранения нежелательных вычислительных трудностей при осуществлении вычислительных алгоритмов, для генерирования однотипных задач с «хорошим» решением и предсказуемым ответом. Они приобщают учащегося к компьютерным технологиям, что очень важно для будущего участника и создателя цифровой экономики. Анализ школьных учебников по алгебре показал, что при изучении делимости целых чисел недопустимо мало уделяется внимания делению с остатком и связанному с ним алгоритму Евклида для нахождения НОД. Цель статьи – показать, как с использованием анимационных рисунков (выполненных в среде GeoGebra) упростить изложение этого материала, добиваясь понимания, усвоения знаний и умения их применять при решении практических задач. Самостоятельное изготовление анимационных рисунков учащимися может стать темой учебно-исследовательской работы.

Remainder division, corner division, Euclid's algorithm, the greatest common divisor of integers, animation drawings, GeoGebra environment.

Animated drawings represent a new didactic tool in the arsenal of didactics of a modern mathematics teacher. They can be used as a means of testing, eliminating undesirable computational difficulties in the implementation of computational algorithms, for generating the same type of problems with a «good» solution and a predictable answer. They introduce the student to computer technology, which is very important for the future participant and creator of the digital economy. An analysis of school textbooks on algebra showed that when studying the divisibility of integers, unacceptably little attention is paid to division with remainder and the associated Euclidean algorithm for finding nodes. The purpose of the article is to show how to simplify the presentation of this material using animated drawings (made in the GeoGebra environment), achieving understanding, assimilation of knowledge and the ability to apply them in solving practical problems. Self-production of animated drawings by students can become a topic of educational and research work.

Рассматриваемый ниже материал относится к алгебре 11 класса [3].

1. Анимационный рисунок «Деление с остатком» как пример учебно-тестирующего ресурса. На анимационном рисунке 1 неполное частное находится подбором q на ползунке, добиваясь при этом выполнения неравенства $0 \le r < b$. Остаток $r = a - bq$ находит компьютер. Ответ на рисунке можно скрыть/открыть при ручном решении задачи, и тогда анимационный рисунок можно использовать в качестве проверочного теста.

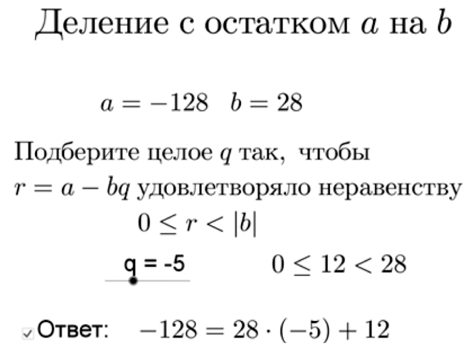


Рис. 1

2. Деление уголком с помощью анимационного рисунка как пример устранения нежелательных вычислительных трудностей при осуществлении вычислительного алгоритма.

При делении уголком наибольшую трудность составляет подбор очередной цифры частного (под уголком). На анимационном рисунке 2 подбор цифры осуществляется перемещением c на ползунке. Предварительно вводим делимое a и делитель b. Найденную компьютером цифру c находим в Арсенале цифр, цепляем ее курсором и помещаем на нужное место под уголком. Одновременно компьютер находит произведение bc и остаток r. Остается их только записать на нужных местах. Сделать это можно с помощью кнопки ABC или редактируя запись, оставшуюся после решения предыдущего примера. Таким образом, полностью сохраняются привычные действия при делении столбиком, только устраняются обременительные вычислительные трудности. После ручных вычислений по отработке алгоритма деления столбиком можно предложить использование анимационного рисунка 2.

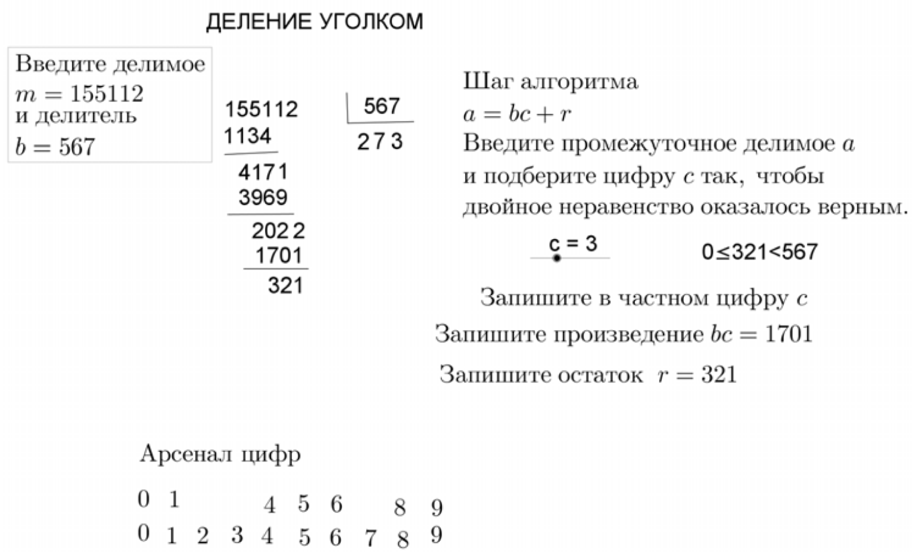


Рис. 2

Он позволяет закрепить знание алгоритма, предлагая новое, необычное выполнение деления на компьютере. Эффект новизны может повысить интерес к процессу усвоения знаний. Ценность исключения вычислительных трудностей повышается, когда мы алгоритм деления уголком используем как часть более сложного алгоритма, например, алгоритма Евклида.

3. Анимационный рисунок для нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида, осуществляемого последовательностью делений уголком с устранением вычислительных трудностей (рис. 3).

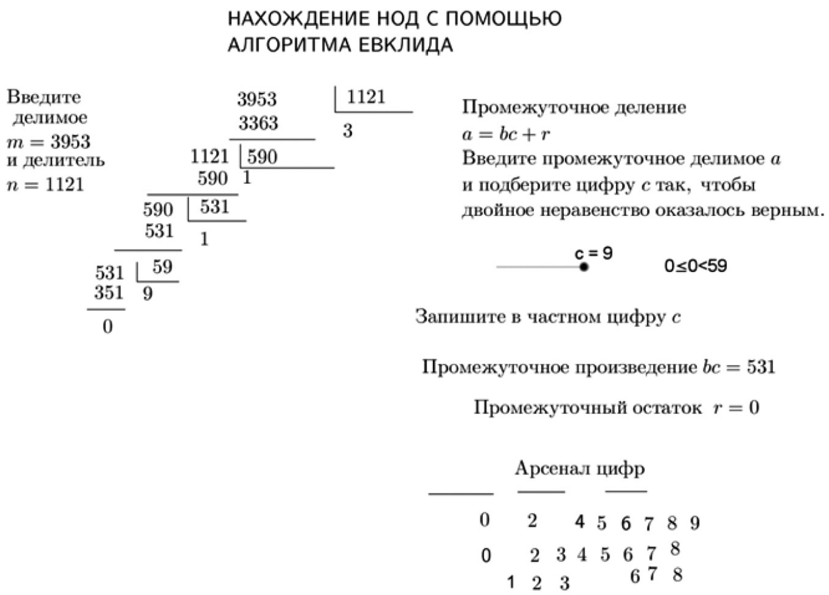


Рис. 3

4. Анимационный рисунок по созданию «хороших» пар целых чисел как пример методической помощи учителю.

Все познается в сравнении. Чтобы убедить учащегося в преимуществах нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида перед нахождением его с помощью разложения на простые множители, желательно привести пример, когда с помощью алгоритма Евклида НОД находится легко, а разложить данные числа в произведение простых очень трудно. Для построения таких примеров создан анимационный рисунок 4, который позволяет создавать пары целых чисел с задуманным НОД, придуманным числом делений с остатком в алгоритме Евклида и с заданной последовательностью неполных частных.

НАХОЖДЕНИЕ ПАРЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
$a,\ b$ с заданным НОД и заданной
последовательностью неполных частных

Введите задуманные $d = \text{НОД}(a, b)$,
число шагов алгоритма n и последовательность
неполных частных $q_1,\ \ldots,\ q_n$.

n=4 $d = 59,\ \ q_1 = 3,\ \ q_2 = 1\ \ q_3 = 1,\ \ q_4 = 9$

Введите последовательно :
$r_3 = d$
$r_2 = d \cdot q_4,$
$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3,$
$b = r_1 \cdot q_2 + r_2,$
$a = b \cdot q_1 + r_1$

Ответ :
$a = 3953,$
$b = 1121$

Рис. 4

Например, на анимационном рисунке 4 найдена пара целых чисел, для которой НОД с помощью алгоритма Евклида (рис. 3) находится легко, а разложить числа в произведение простых учащемуся довольно трудно: $a = 59 \cdot 67$, $b = 59 \cdot 19$.

5. Решение диофантовых уравнений первой степени с двумя переменными как пример практического применения линейной формы НОД.

Линейная форма НОД используется для нахождения целочисленных решений уравнения вида $mx + ny = k$, где m, n, x, y, k – целые числа. При решении нашего диофантова уравнения (рис. 5) сначала находят $d = НОД\,(m, n)$, и если k не делится на d, то данное уравнение решения не имеет в целых числах. Если же $k \vdots d$, и $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, то решаем уравнение $m_1 x + n_1 y = k_1$, где коэффициенты m_1 и n_1 взаимно просты. Находим линейную форму НОД этих чисел, например, с помощью анимационного рисунка 5.

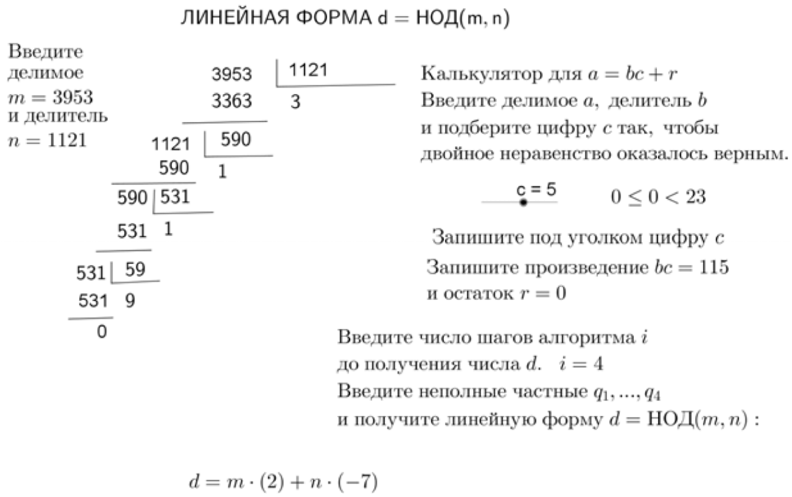


Рис. 5

Другими словами, находим целые u и v такие, что $m_1 u + n_1 v = 1$. Умножаем это равенство на dk_1 и получаем равенство $m_1 dk_1 u + n_1 dk_1 v = dk_1$. Отсюда $mk_1 u + nk_1 v = k$. Видим, что искомым частным решением нашего уравнения является пара целых чисел $x_0 = k_1 u$, $y_0 = k_1 v$.

Для нахождения общего решения из уравнения $mx + ny = k$ вычтем верное равенство $mx_0 + ny_0 = k$. Получим $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$, $m(x - x_0) = n(y_0 - y)$, откуда $m(x - x_0) \vdots n(y_0 - y)$ при любых целых x и y, а т.к. НОД $(m, n) = 1$, то $x - x_0 \vdots n$, т.е. существует целое число t такое, что $x - x_0 = nt$, откуда $x = x_0 + nt$. Но тогда $m \cdot nt + n(y - y_0) = 0$, откуда $mt + y - y_0 = 0$, $y = y_0 - nt$. Итак, установлено существование целочисленного параметра t такого, что пара целых чисел $(x_0 + nt, y_0 - mt)$ является решением нашего диофантова уравнения. Докажем, что при любом целом значении параметра t эта пара является решением этого уравнения. Сделаем это подстановкой: $m(x_0 + nt) + n(y_0 - mt) = mx_0 + ny_0 = k$.

Таким образом, рассматриваемое диафантово уравнение имеет решение

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 - mt, \end{cases}$$

где t – произвольное целое число, а (x_0, y_0) – частное решение, которое можно найти, используя линейную форму НОД.

Заметим, что задачи на делимость целых чисел являются благодатным полигоном для проверки умения логически рассуждать, проявляя сообразительность и владение основными понятиями теории делимости целых чисел. Они включены в программу ЕГЭ профильного уровня [4, задание 18] как наиболее трудные задания. Примером подготовки к такого рода заданиям являются три задачи на решение диофантовых уравнений с двумя переменными в учебнике [3, с. 259–261]. Все они решаются там частными методами «на сообразительность». Для проверки математических способностей учащегося такие решения вполне соответствуют цели. Вместе с тем, зная изложенный выше общий метод решения таких уравнений, все три задачи решить чрезвычайно просто, и они выбывают из разряда «трудных» задач. Решение задач переоткрытием общего метода демонстрировало бы выдающиеся способности школьника. А это «переоткрытие», по сути дела, весьма естественно и не содержит никаких особых трудностей.

Приведем решение задачи 1 на стр. 259 из [3] общим методом. *Найти целочисленные решения уравнения* $3x + 4y = 19$.

Решение. Поскольку НОД(3,4)=1, то решаем уравнение $3x + 4y = 1$. Очевидным частным решением будет пара чисел $(-1,1)$, а частным решением данного в задаче уравнения будет пара чисел (-19,19). Тогда общее решение имеет вид: $x = -19 + 4t$, $y = 19 - 3t$. И все! Никаких трудностей.

По нашему мнению, общие методы решения рассматриваемых в школе задач должны входить в багаж знаний по математике выпускника школы.

Выражаю благодарность профессору С.В. Ларину за научное руководство при написании статьи.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.
2. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учебное пособие для вузов. 2-е изд., исправ. и доп. М.: Юрайт, 2018. 233 с.
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: в 2 ч. учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). 3-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. Ч. 1. 287 с.
4. ЕГЭ-2021. Математика: профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по новой демоверсии 2021 / ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухов. Ростов-на-Дону: Легион, 2021.
5. GeoGebra: официальный сайт [Электронный ресурс]. URL: http://www.geogebra.org

ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА «МУЗЕЙ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ» В РАМКАХ СЕТЕВОЙ ПРОЕКТНОЙ ШКОЛЫ[1]

EXPERIENCE OF IMPLEMENTATION OF THE PROJECT «MUSEUM OF ENTERTAINING MATHEMATICS AS PART OF THE SCHOOL OF NETWORK PROJECTS

М.А. Павлова **M.A. Pavlova**

Популяризация математики, музей занимательной математики, сетевая проектная школа, проектная деятельность, сетевой проект.

В статье представлен опыт реализации проекта «Музей занимательной математики», который стартовал в сентябре 2021 года в рамках сетевой проектной школы, организованной Ассоциацией педагогов, работающих с одаренными детьми. Главной целью проекта является включение учащихся 7–10 классов в проектную и исследовательскую деятельность по разработке общедоступного виртуального музея, посвященного математике.

Popularization of mathematics, museum of entertaining mathematics, network project school, project activity, network project.

The article presents the experience of the project «Museum of Entertaining Mathematics», that was started in September 2021 as part of the school of network projects organized by the Association of Teachers Working with Gifted Children. The main goal of the project is to include students in grades 7-10 in project and research activities for the development of a public virtual museum dedicated to mathematics.

Ассоциацией педагогов, работающих с одаренными детьми [1], в рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований «Сетевое наставничество в организации исследовательской деятельности одаренных обучающихся» организована сетевая проектная школа (СПШ) для учащихся 7–10 классов. Помимо освоения программы СПШ, каждый участник может выбрать сетевой проект в соответствии со своими интересами и предпочтениями, тематика которых разрабатывается наставниками. Участник подключается к проекту вместе с учителем общеобразовательной школы, в которой обучается. Учитель выступает в качестве тьютора проекта. Наставником проекта для каждой группы обучающихся предлагаются проектные задания. Каждая группа учащихся разрабатывает свое проектное задание, которое является частью общей проектной (исследовательской) проблемы.

Научное образование и популяризация научных знаний во все времена были важными направлениями работы ученых и учителей. Они могут помочь создать атмосферу позитивного отношения к научным достижениям и исследовательской работе, повысить как учебную мотивацию подрастающего поколения, так и его интерес к научной деятельности.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-013-00730.

Музей занимательных наук – одна из самых эффективных форм популяризации науки. Однако анализ экспозиций современных музеев занимательной науки [3] показал, что математике в них уделяется мало внимания. Считается, что экспонаты, посвященные математике, не могут быть интерактивными, поэтому они не так интересны, как экспонаты для экспериментов по физике или химии.

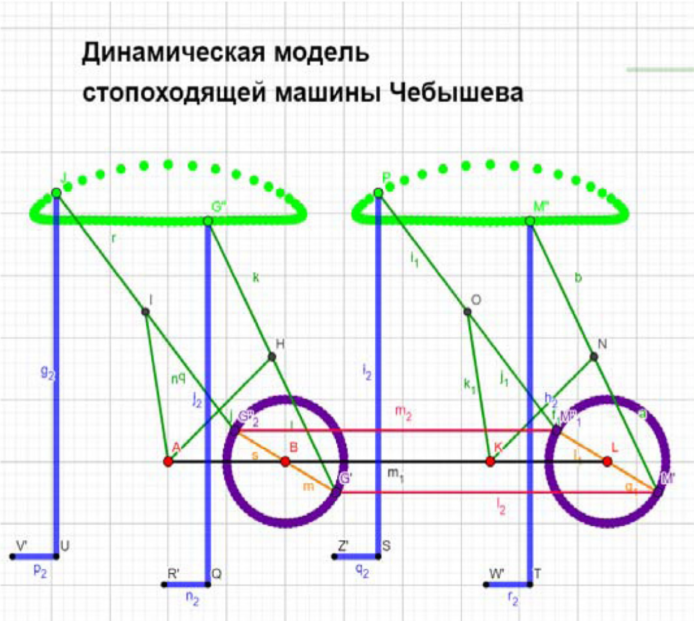
Новое время и новые технологии требуют поиска новых форм интерактивного и развлекательного представления математики. Мы решили задействовать воображение детей, увлеченных математикой, объединить их, чтобы создать музей занимательной математики в виртуальном пространстве.

Основой проекта «Музей занимательной математики» стала виртуальная экспозиция «Математический экспериментариум» [2], разработанная силами учащихся 7–9 классов, занимающихся на кружке «Экспериментальная математика» [5]. В ней представлены абстрактные математические объекты, с которыми можно экспериментировать с помощью программы GeoGebra. Экспозиция включает несколько тематических разделов: «Эксперименты в математике», «Математическая игротека», «Математика и искусство» и «Японский математический дворик» (рис. 1). Более подробное описание представлено в статье [3].

Рис. 1

Критериями отбора математических объектов в качестве экспонатов музея занимательной математики стали возможность представления их в виде динамической модели или апплета (рис. 2) и наличие занимательной научно-исторической справки о данном объекте, которая представляется в формате постера (рис. 3).

В команду проекта «Музей занимательной математики» вошли учащиеся общеобразовательных школ г. Архангельска, г. Новодвинска, г. Няндома Архангельской области, г. Новосокольники Псковской области, г. Видное Московской области, г. Арсеньев Приморского края.



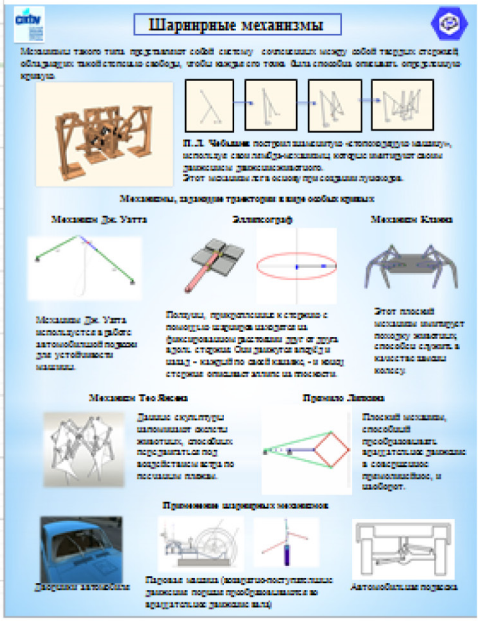


Рис. 2 *Рис. 3*

Спецификой реализации проекта в сетевом формате является активное использование информационных технологий и онлайн-сервисов. Для встреч проектной команды с наставником и обсуждения промежуточных результатов проекта используется онлайн-платформа ZOOM; для создания динамических моделей экспонатов – программа GeoGebra Classic; для размещения в общем доступе готовых ресурсов – GeoGebra.org; для размещения собранных материалов и совместного их редактирования – Google Диск с общим доступом, для визуализации тематических разделов – онлайн-сервис для создания интеллект-карт MindMeister.

Взаимодействие участников проекта осуществляется в несколько этапов:

1. Поиск идеи экспоната индивидуально или в малых группах.
2. Представление своих идей и обсуждение на ZOOM конференции.
3. Распределение ролей в каждой группе.
4. Разработка составляющих экспоната.
5. Совместное тестирование промежуточных результатов.
6. Пополнение коллекции экспонатов.
7. Коллективная работа по разработке дизайна виртуального музея.
8. Совместное обсуждение экспонатов виртуального музея, подготовка мини-экскурсий.
9. Представление результатов проекта на конкурсе «Математика и проектирование».

Первые шесть этапов составляют итерацию, способствующую накоплению экспонатов для разных тематических разделов. Вновь разработанные экспонаты вносятся в доступную для всех участников интеллект-карту (рис. 4), позволяющую отследить развитие идей участников команды и не повториться.

После трех встреч участников команды с начала старта проекта коллекция музея пополнилась четырьмя новыми тематическими разделами, а количество экспонатов увеличилось в два раза.

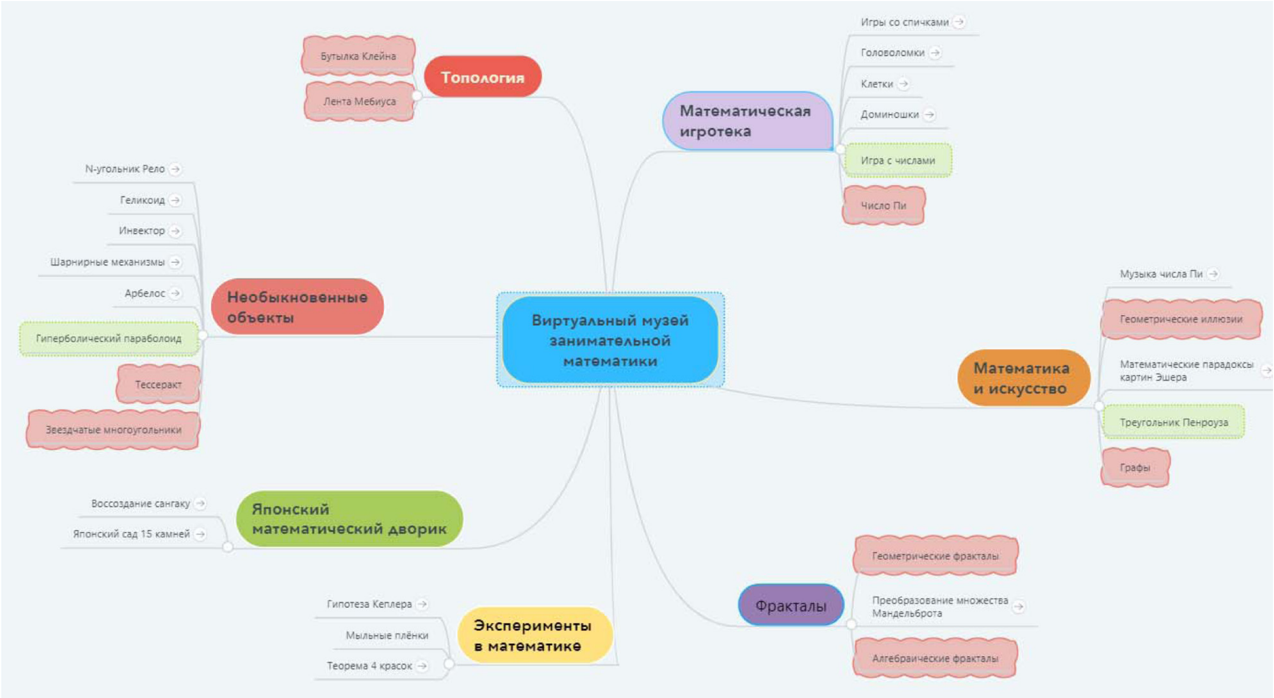


Рис. 4

Главным преимуществом реализации проекта в сетевом формате является возможность объединить усилия школьников, увлеченных математикой, из разных уголков страны. Современные технологии позволяют найти новые формы интерактивного и развлекательного представления математики и реализовать даже самые необычные идеи по созданию экспонатов для музея занимательной математики. Онлайн-сервисы позволяют участникам совместно создавать необходимые для проекта ресурсы, комментировать, редактировать и отслеживать внесенные изменения. Взаимодействие школьников с их учителями и наставником делает их работу эффективнее, позволяет преодолевать возникающие трудности. Мы живем далеко друг от друга, но это не помешает нам создать общий виртуальный музей занимательной математики.

Библиографический список

1. Ассоциации педагогов, работающих с одаренными детьми. URL: https://www.aprod
2. Виртуальная экспозиция «Математический экспериментариум». URL: https://wargat11.wixsite.com/matematika)
3. Павлова М.А., Лукина В.С., Шабанова М.В. Интерактивная экспозиция «Эксперименты в математике» для музея занимательных наук // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы II Всероссийской научно-практической конференции, Майкоп, 18–22 декабря 2018 года / Адыгейский государственный университет. Майкоп: Адыгейский государственный университет, 2018. С. 58–66.
4. Павлова М.А., Серебренников Д.В. Виртуальная экскурсия по экспозиции «Математический экспериментариум» // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича / отв. ред. В.Р. Майер; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2019. Часть. 1. С. 204–209.
5. Официальный сайт кружка «Экспериментальная математика». URL: http://itprojects.narfu.ru/kruzhok-exp-mat/

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ В СРЕДЕ GEOGEBRA НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

COMPUTER ANIMATION IN GEOGEBRA ENVIRONMENT IN GRADE 7 ALGEBRA LESSONS

С.В. Сарыглар **S.V. Saryglar**

Числовые выражения, функции, многочлены, системы линейных уравнений, среда GeoGebra, анимационные рисунки.

Цель статьи – представить фрагменты уроков алгебры в 7 классе с использованием анимационных рисунков, выполненных в среде GeoGebra.

Numerical expressions, functions, polymes, systems of linear equations, GeoGebra environment, animation figures.

The purpose of the article is to present the fragmen of algebra lessons in the 7th grade using animated drawings made in the GeoGebra environment.

Цифровизация образования востребована объективными причинами цифровизации экономики и общественных отношений. Она естественным образом распадается на две составляющих: коммуникативную и технологическую [1]. Коммуникативная часть – это дистанционное обучение, административный документооборот, связь учебного заведения с общественностью и др. Использование анимационных рисунков на уроках алгебры 7 класса относится к технологической части цифровизации обучения. При создании анимационных рисунков мы использовали свободно распространяемую программу GeoGebra (см. [5]). С ее анимационными возможностями можно познакомиться по публикациям [2; 3].

По технологии изготовления анимационных рисунков можно выделить следующие три вида анимации.

1. Геометрическая анимация, которая основана на сохранении последовательности построения чертежа при изменении первичных объектов построения.

2. Ползунковая анимация, основанная на использовании инструмента под названием «ползунок». Он представляет собой изображение точки на отрезке, где точка изображает значение параметра, а отрезок – область изменения этого параметра. Особенно эффективно использование этого инструмента при решении задач с параметром.

3. Текстовая анимация, представляющая собой изменение текста, определяемое условиями видимости и значениями параметров на ползунках.

Представим и продемонстрируем на примерах дидактические цели использования анимационных рисунков.

4. Использование анимационных рисунков в целях визуализации алгебраических понятий и утверждений

Алгебраическое понятие «Числовое выражение с переменными» эффективно демонстрирует анимационный рисунок 1.

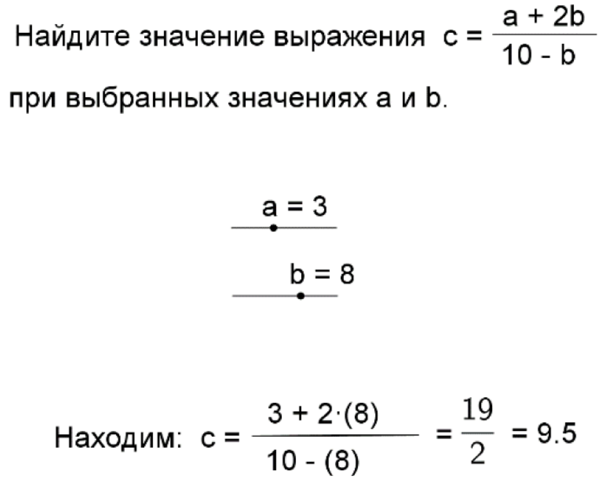


Рис. 1

Использование анимационного рисунка 1 на уроке (см. [2, с. 6–9]).

Сначала предлагается учащимся найти значение выражения $c = \frac{a+2b}{10-b}$ «вручную» и записать в тетради: При $a = 3$, $b = 8$ имеем: $c = \frac{3+2\cdot 8}{10-8} = \frac{19}{2} = 9{,}5$. Затем обращаемся к анимационному рисунку и видим полученный ответ. После этого целесообразно составить таблицу значений переменных и выражения.

Можно переменную a зафиксировать, скажем, взять $a = 3$, а переменную b изменять. Тогда значение выражения c будет изменяться в зависимости от значений b. В этом случае переменную b называют *независимой переменной* (и обычно обозначают буквой x), а переменную c *зависимой переменной* (и обозначают буквой y). Зафиксированную переменную a в этом случае называют *параметром*. На базе рисунка 1 можно изготовить анимационную модель выражения $y = \frac{a+2x}{10-x}$ с переменной x и параметром a. Тем самым проводится пропедевтика понятия функции.

При использовании анимационного рисунка 1 для другого выражения относительно тех же переменных следует в надписи заменить выражение на новое и строкой ввода ввести новое c.

5. Использование анимационных рисунков с целью устранения нежелательных вычислительных трудностей

Анимационный рисунок 1 демонстрирует одновременно и достижение этой цели, когда мы можем составить таблицу значений данного выражения, поручая вычисления компьютеру. Подчеркнем в этой связи, что мы не призываем всюду заменять «ручные» вычисления компьютерными. «Ручные» вычисления сохраняются там, где они составляют одну из целей обучения.

6. Использование анимационных рисунков для организации тестирования

Помимо умения вывести каждую формулу сокращенного умножения, ученик должен их просто вызубрить, как в свое время он вызубрил таблицу умножения и будет благодарен себе за это всю жизнь. Для проверки запоминания формул сокращенного умножения и их чтения созданы анимационные рисунки 2 и 3. На рисунке 2 по названию формулы открывается сама формула, достаточно курсором кликнуть на квадратик, чтобы появилась птичка. Это действие открывает соответствующую формулу.

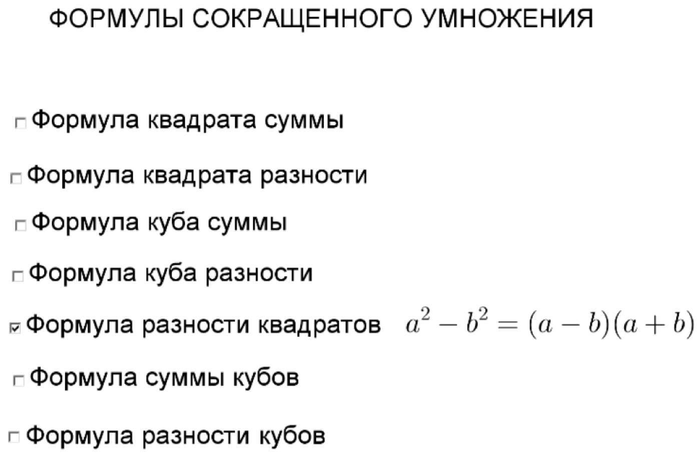


Рис. 2

Рисунок 3 помогает выучить чтение формул сокращенного умножения.

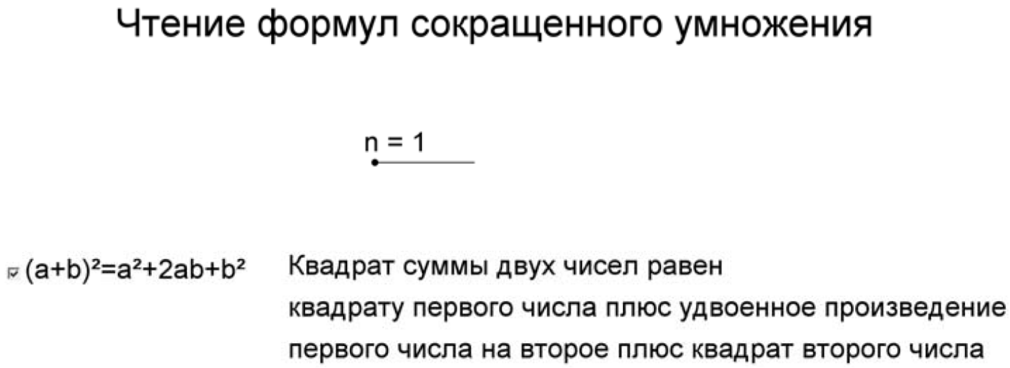


Рис. 3

На рисунке 3 использован ползунок. Изменением значения параметра *n* на ползунке появляются поочередно все 7 формул сокращенного умножения. «Птичка» возле формулы позволяет скрыть/открыть текстовую надпись.

4. Анимационные рисунки для генерирования однотипных задач с предсказуемым решением и задуманным ответом

При подготовке к уроку, посвященному решению систем линейных уравнений, учителю порой приходится самому придумывать такие системы, которые имели бы данное (хорошее) решение. Созданный анимационный рисунок 4 поможет учителю в этом творчестве. С другой стороны, задание (старшему) школьнику по изготовлению подобного рисунка может составить учебно-исследовательскую задачу.

Создание системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

имеющей заданное решение (x_1, y_1)

Установите коэффициенты и заданное решение (x_1, y_1)

$a = 2$ $b = -3$ $x_1 = -1$

$a_1 = 4$ $b_1 = -1$ $y_1 = 2$

Искомая система $\begin{cases} 2x + (-3)y = -8, \\ 4x + (-1)y = -6. \end{cases}$

Рис. 4

5. Анимационные рисунки для тренинга

Анимационный рисунок 5 позволяет закрепить алгоритм деления с остатком одного многочлена на другой, не отвлекаясь на вычислительные трудности. На этом рисунке выполнено деление «уголком» многочлена $f(x) = 2x^5 - 3x + 5$ на многочлен $b(x) = x^2 + x + 1$. При этом используется своеобразный «калькулятор», который выполняет шаг алгоритма деления «уголком».

Процесс вычислений на анимационном рисунке.

1) Вводим (с помощью строки ввода) многочлены $f(x)$ и $b(x)$ и записываем их на Полотне.

2) Вводим (строкой ввода) многочлен $a(x) = 2x^5 - 3x + 5$.

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ УГОЛКОМ

Введите делимое $f(x)$ и делитель $b(x)$.

$$2x^5 - 3x + 5 \quad \Big| \quad 3x^2 + 2x + 5$$

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{22}{27}x + \frac{104}{81}$$

$$2x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3$$

$$-\frac{4}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 3x + 5$$

$$-\frac{4}{3}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - \frac{20}{9}x^2$$

$$-\frac{22}{9}x^3 + \frac{20}{9}x^2 - 3x + 5$$

$$-\frac{22}{9}x^3 - \frac{44}{27}x^2 - \frac{110}{27}x$$

$$\frac{104}{27}x^2 + \frac{29}{27}x + \frac{135}{27}$$

$$\frac{104}{27}x^2 + \frac{208}{21}x - \frac{115}{81}$$

$$-\frac{121}{81}x - \frac{115}{81}$$

Калькулятор для промежуточного деления

$a(x) = b(x) \cdot c(x) + r(x)$

Введите промежуточное делимое $a(x)$ и слагаемое частного $c(x)$.

Запишите $c(x) = \frac{104}{81}$,

$b(x) \cdot c(x) = \frac{312x^2 + 208x + 520}{81}$

$r(x) = \frac{-121x - 115}{81}$.

Рис. 5

3) Вводим (строкой ввода) первое слагаемое частного $c(x) = \frac{2}{3}x^3$ и записываем его под уголком (с помощью кнопки ABC).

4) Записываем (с помощью кнопки ABC) готовые, найденные компьютером произведение $b(x) \cdot c(x) = 2x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3$ и остаток $r(x) = -\frac{4}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 3x + 5$.

Повторение действий, аналогичных пунктам 2), 3) и 4), приводит к ответу.

Пользуясь рисунком 5, уже не надо бояться вычислительных трудностей и можно смело выполнять деление «уголком», «не взирая» на коэффициенты многочленов, т.к. вычисления берет на себя компьютер.

Заметим, что выполнить деление с остатком для многочленов в среде GeoGebra можно одной командой: Деление $\{[$<Делимый многочлен>, <Делитель многочлен>$]\}$. В результате выполнения команды компьютер выдает (на Панели объектов) список из двух многочленов: неполного частного и остатка. Однако такое компьютерное решение задачи о делении с остатком мало что дает для понимания и усвоения алгоритма.

1. Использование анимационных рисунков для экспериментирования и учебно-исследовательской деятельности

При отработке действий с одночленами и многочленами можно использовать символьные вычисления в системе CAS программы GeoGebra. CAS – Computer Algebra Sistem – система компьютерной алгебры, которая обеспечивает символьные вычисления, вычисления с формулами. После «ручного» решения ученику предлагается для проверки выполнить вычисления, используя программу GeoGebra. С использованием системы CAS полезно решить следующие примеры, аналогичные примерам из [Макарычев, 2].

1. Вычислите значение выражения $(2m+6) \cdot n$ при $m = -2\frac{1}{2}$, $n = 3$.

2. Преобразуйте в многочлен $4(2a+1)(5a-3) - 3(a+2)(a+3)$.

3. Упростите выражение $(x+6y)^2 - (6y+5x)(6y-5x) + x(12y-6x)$.

4. Представьте в виде произведения $4y^3 - 100y^5$.

5. Представьте данный трехчлен $15ab - 9a^2 - 6\frac{1}{4}b^2$, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена.

Возможности CAS можно использовать для проверки ответа при «ручном» решении, а также при решении более сложных примеров.

При решении примера немаловажно, чтобы ученик, придя к «красивому» ответу, получил эмоционально-эстетическое удовлетворение. Работу по изготовлению «хороших» примеров может существенно облегчить система CAS, устраняя вычислительные трудности. Система CAS позволяет выполнять формульные преобразования. С помощью этого ученикам можно предложить задание по «переоткрытию» формул квадрата суммы и куба суммы n слагаемых. Например, ученику предлагается после экспериментирования сформулировать вывод: квадрат суммы n слагаемых равен сумме квадратов этих слагаемых, сложенной со всевозможными их удвоенными произведениями. Аналогично экспериментально подмечается формула куба суммы *n* слагаемых.

Полезно дать задание придумать два многочлена и найти их сумму и произведение «вручную» с проверкой на компьютере в системе CAS. Можно попросить ученика изменить данные в условии задания из учебника и решить его на компьютере.

2. Приобщение учащихся к компьютерным технологиям для будущего

Использование анимационных рисунков на уроках алгебры 7 класса способствует формированию личности, готовой раскрыть свой творческий потенциал в условиях цифровой экономики.

Представленный выше материал по алгебре 7 класса является частью учебно-методического пособия «Уроки алгебры 7 класса с анимационными рисунками», написанного в соавторстве с С.В. Лариным, и издаваемого издательством Тувинского государственного университета в 2021 г. Электронную версию пособия вместе с альбомом анимационных рисунков предполагается разместить на ресурсе [6]. В тексте электронной версии от каждого рисунка по гиперссылке можно перейти к его анимационному аналогу в альбоме, поэкспериментировать, закрыть, не сохраняя, и, вернувшись в текст, продолжить чтение.

Библиографический список

1. Зимнякова Т.С., Ларин С.В., Ларина Е.И. Особенности использования цифровых образовательных ресурсов в обучении математике и физике // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2019. № 2 (48). С. 26–32.
2. Ларин С.В. Вычисления с помощью виртуальных геометрических инструментов // Математика в школе. 2007. № 8. С. 35–43.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
4. Макарычев Ю.Н. Алгебра: учеб. для 7 кл. // Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. М.: Просвещение, 2004.
5. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra
6. URL: http://www.geogebra.org/cms/ru/

ГЕОМЕТРИЯ С GEOGEBRA

GEOMETRY WITH GEOGEBRA

М.Н. Сомова, О.М. Беличенко **M.N. Somova, O.M. Belichenko**

GeoGebra, обучение математике, дополнительное образование, школьный курс геометрии.
В статье рассматривается разработанная авторами дополнительная образовательная программа для инженерных классов «Геометрия с GeoGebra». Обосновывается актуальность разработки такой программы и ее особенности.

GeoGebra, teaching mathematics, additional education, school geometry course.
The article discusses the additional educational program developed by the authors for engineering classes «Geometry with GeoGebra». The relevance of the development of such a program and its features are substantiated.

На современном этапе Россия испытывает острую необходимость в высокопрофессиональных инженерных кадрах, имеющих инновационное мышление, активную жизненную позицию, ориентированных на социальное самоопределение и саморазвитие, участие в прорывных инновационных проектах страны. Квалифицированному инженеру необходимо обладать рядом компетенций, среди которых большое значение приобретают компетенции, связанные с использованием математического инструментария в решении профессиональных задач, в том числе с использованием новых информационных технологий. Эти технологии занимают все большее доверие школьных учителей и учащихся. Однако в школьном курсе математики не предусмотрены часы, отведенные на решение задач с использованием новых информационных технологий.

Марк Максимович Поташник сказал: «Общеизвестно, что нельзя двигаться вперед с головой, повернутой назад, а потому недопустимо в школе XXI века использовать неэффективные, устаревшие технологии обучения, изматывающие и ученика, и учителя, требующие больших временных затрат и не гарантирующие качество образования...».

Необходимость компьютерной поддержки учебного процесса определяется сегодня стремительным развитием информационных технологий, проникновением их во все сферы общественной жизни, в том числе и в сферу образования, и регламентируется требованиями федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Одной из причин трудного усвоения математики является абстрактность этой науки. Задача учителя состоит в том, чтобы приблизить математику к жизни, сделать математические факты зримыми, а значит понятными. Одним из путей визуализации математики, внесения в нее движения является использование компьютерной среды GeoGebra.

В связи с вышеизложенным авторами была разработана дополнительная образовательная программа для инженерных классов «Геометрия с GeoGebra» в объеме 34 часа, которая реализуется в 7 классах.

Программа предполагает углубление знаний школьного курса геометрии, изучение некоторых дополнительных тем, не рассматриваемых в школьном курсе геометрии 7 класса, и решение задач по этим темам в GeoGebra.

Ведущим подходом при изучении геометрии является теоретический (введение понятий аксиом, строгих определений, доказательств). Однако целесообразно наряду с теоретическими навыками развивать экспериментальные навыки. В примерной основной образовательной программе основного общего образования математика рассматривается как область для формирования умений проводить эксперименты, в том числе компьютерные [1]. GeoGebra – программа динамической математики, поэтому может широко использоваться для построения геометрических экспериментов. Для этого нужно использовать задачи в открытой формулировке, то есть без готового утверждения. Подвижный чертеж позволит учащимся самостоятельно выдвинуть гипотезу, подтвердить ее экспериментально и в случае необходимости доказать ее. Отметим, что в программах международного бакалавриата предусмотрен вид деятельности «поиск закономерностей». Навык выдвижения и подтверждения гипотез способствует развитию этого вида деятельности [2].

Важной особенностью данной программы является согласованность программы со школьным курсом геометрии 7 класса, учет возрастных особенностей учащихся, использование информационных технологий, которые обеспечивают максимальную наглядность и продуктивность занятий.

Учебно-тематическим планом предусмотрено изучение следующих тем:

1. Знакомство со средой GeoGebra (2 часа).
2. Реализация в GeoGebra понятий школьного курса геометрии (6 часов).
3. Геометрия на клетчатой бумаге (4 часа).
4. Кривые из прямых (4 часа).
5. Геометрия на подвижных чертежах (8 часов).
6. Эксперименты с GeoGebra (10 часов).

На занятиях первых двух тем учащиеся знакомятся с интерфейсом, перспективами и инструментами среды GeoGebra, учатся построению основных геометрических фигур, проверяют экспериментально теоремы школьного курса геометрии. На этих занятиях вводятся понятия «предка» и «потомка» геометрического объекта [2].

На занятиях темы «Геометрия на клетчатой бумаге» рассматриваются задачи на изучение свойств геометрических фигур, на нахождение площадей плоских фигур с целью вывода формул для нахождения площадей и формулы Пика. Рассматриваются задачи на построение на ограниченном клетчатом поле с применением только линейки, то есть с использованием только инструментов «Точка», «Прямая», «Отрезок», «Пересечение».

На занятиях темы «Кривые из прямых» учащиеся знакомятся с понятиями «семейство кривых» и «огибающая». На этих занятиях иллюстрируется связь между геометрией и другими математическими дисциплинами.

Подвижные чертежи – мощный инструмент для решения геометрических задач. Однако построение правильного динамического чертежа часто само по себе оказывается интересной геометрической задачей. Умение строить подвижные чертежи служит основой для проведения геометрических экспериментов.

Все полученные знания и умения учащиеся применяют на занятиях, посвященных проведению экспериментов с геометрическими объектами. На этих занятиях учащиеся должны получить представление о постановке математического эксперимента с использованием среды GeoGebra, умение рационально сочетать применение экспериментальных и теоретических методов в решении учебно-исследовательских задач, способность выдвигать гипотезы и подтверждать или опровергать их на основе проведенного эксперимента, делать адекватные выводы на основе экспериментальных данных с учетом ограниченности возможностей экспериментального метода [3].

Заметим, что в процессе обучения необходимо использовать различные формы, методы и подходы к изложению учебного материала с целью увлечения школьников предметом, повышения эффективности освоения учебного материала, а использование современного программного обеспечения коренным образом меняет качество уроков математики. Они становятся познавательнее, интереснее и динамичнее.

Библиографический список

1. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://fgosreestr.ru/ (дата обращения: 21.10.21).
2. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. М.: МЦНМО, 2019. 184 с.
3. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: Академия Естествознания, 2016. 300 с.

КОНСОЛИДИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ GEOGEBRA: ОБЪЕДИНЕНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СООБЩЕСТВ, РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ, УЧЕБНЫХ ПРЕДМЕТОВ И РЕАЛЬНОСТЕЙ

CONSOLIDATING FUNCTION OF GEOGEBRA: UNIFICATION OF PEDAGOGICAL COMMUNITIES, SECTIONS OF MATHEMATICS, ACADEMIC SUBJECTS AND REALITIES

М.В. Шабанова **M.V. Shabanova**

GeoGebra, дополненная реальность, педагогические сообщества, учебные предметы, школьный курс математики, разделы математики.

Возникнув как студенческая разработка Маркуса Хохенвартера, программное обеспечение GeoGebra не только очень быстро завоевало сердца пользователей, но и сплотило вокруг себя программистов всего мира, которые поддерживают его непрерывное развитие, отвечая на запросы пользователей и даже упреждая их. Сегодня GeoGebra является точкой конвергенции учебных предметов, полноценным инструментом для STEAM образования. Она позволяет создавать модели, доступные для 3D-печати, а также выводить их в качестве дополненной реальности.

В России популярность этого программного обеспечения только набирает обороты. Этому немало способствуют преподаватели педагогических вузов – любители GeoGebra. Статья представляет страницы истории формирования и развития взаимосвязей педагогических сообществ под влиянием GeoGebra.

GeoGebra, augmented reality, pedagogical communities, academic subjects, school mathematics course, mathematics sections.

Having emerged as a student development by Markus Hohenwarter, GeoGebra software not only very quickly won the hearts of users, but also rallied programmers around the world who support its continuous development, responding to user requests and even anticipating them. Today GeoGebra is a point of convergence of academic subjects, a full-fledged tool for STEAM education. Models created in GeoGebra are available for 3D printing, as well as for output as augmented reality.

The popularity of this software in Russia is only gaining momentum. Teachers of pedagogical universities – GeoGebra lovers contribute a lot to this. The paper presents the pages of the history of the formation and development of interrelations of pedagogical communities under the influence of GeoGebra.

1. Становление и развитие консолидирующего потенциала GeoGebra

Первая версия GeoGebra была создана Маркусом Хохэнвартером в 2001 г. в рамках его магистерской диссертации по математическому образованию и информатике в Зальцбургском университете в Австрии. Консолидирующие функции GeoGebra были заложены самой идеей ее создания: «The basic idea of the software is to join geometry, algebra, and calculus, which other packages treat separately, into a single easy-to-use package for learning and teaching mathematics from elementary through university level»[1] (1, c. 38). Важную роль в развитии этих функций сыграла политика Маркуса Хохенвартера в отношении созданной им программы: открытый исходный программный код, свободное (бесплатное) распространение для некоммерческого использования и кроссплатформенность.

В 2002 г. он открыл доступ пользователей к GeoGebra, разместив ее в Интернете. Он сразу же получил несколько благоприятных отзывов от учителей математики и приглашений для обучения пользователей. В 2004 г. был запущен сайт GeoGebra.org как платформа для взаимодействия пользователей и разработчиков. Рост ее популярности в период с 1 января 2004 по 1 мая 2008 г. представлен на диаграмме (рис. 1).

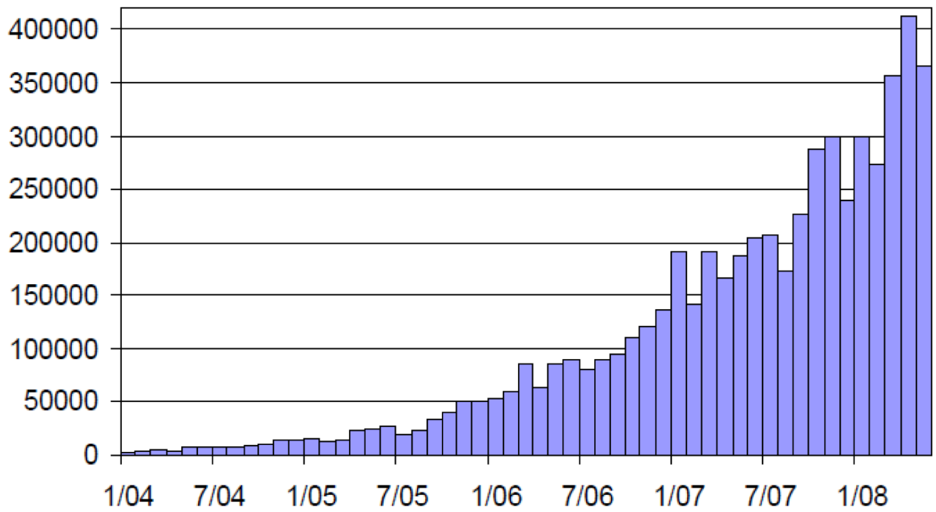


Рис. 1. Посетители сайта GeoGebra по месяцам 2004–2008 гг. [2]

Сегодня сообщество GeoGebra включает более миллиона пользователей из 190 стран мира. Для их технической поддержки, бесплатного обучения и оперативного ответа на новые вызовы в 2008 г. была создана «зонтичная» система общественных организаций – Международный институт GeoGebra. Первое заседание этой организации состоялось 1−8 мая 2008 г. в Кембриджском университете. На нем была принята следующая резолюция: «The International GeoGebra Institute (IGI) provides free dynamic mathematics software and shares expertise in training, support and the development of materials for all students and teachers to improve mathematics, science and technology education world-wide. It nurtures and promotes collaboration between practitioners and researchers, seeking to establish self-sustaining user communities"[2] [2, с. 85]. Сегодня Международный институт

[1] Основная идея программного обеспечения состоит в том, чтобы объединить геометрию, алгебру и математический анализ, которые другие пакеты рассматривают отдельно, в единый простой в использовании пакет для изучения и преподавания математики от начального до университетского уровня.

[2] Международный Институт GeoGebra (IGI) предоставляет бесплатное программное обеспечение динамической математики и делится опытом в области обучения, поддержки и разработки материалов для всех студентов и преподавателей в целях улучшения образования в области математики, науки и техники во всем мире. Он поддерживает и развивает сотрудничество между практиками и исследователями, стремясь создать самоподдерживающиеся сообщества пользователей.

GeoGebra насчитывает 62 филиала в 36 странах, включая два института Российской Федерации: Сибирский институт GeoGebra (зарегистрирован в 2011 г.)[3] и Байкальский институт GeoGebra (зарегистрирован в 2015 г.)[4].

Благодаря усилиям пользователей-волонтеров программа переведена на 72 языка. Этому немало способствовала удобная онлайн-форма, доступ к которой предоставляют разработчики программы. На сайте GeoGebra.org зарегистрировано около 13 тысяч индивидуальных и коллективных создателей образовательных ресурсов: динамических листов и электронных книг. Партнерами GeoGebra сегодня являются такие ведущие компании, как Microsoft, Google и др.

Быстрое развитие возможностей программы обеспечивается согласованной работой большого количества программистов, многие из которых также являются волонтерами (их более 400). На сегодняшний день уже выпущено 6 версий GeoGebra Classic, которые допускают установку на различные операционные системы: Windows, Mac, Linux, Android. В 2009 г. благодаря усилиям программистов решена проблема встраивания динамических листов GeoGebra на вебстраницы. В 2011 была запущена версия сайта GeoGebraTube, которая стала платформой для обмена динамическими листами, а также запущена веб-версия программы [3].

В 2014 г. программа была полностью переработана для решения проблемы поддержки изучения стереометрии, статистики, теории вероятностей и символьной алгебры. Это позволило позиционировать GeoGebra как программу для поддержки STEM и даже STEAM образования [4], [5]: «GeoGebra has become the leading provider of dynamic mathematics software, supporting science, technology, engineering and mathematics (STEM) education and innovations in teaching and learning worldwide»[5] [6].

В 2016 г. решены вопросы интеграции ресурсов, разработанных на базе GeoGebra, с системами для дистанционного обучения: Moodle, Google Classroom и др. Для удобства пользователей разработано и запущено достаточно большое количество приложений для мобильных устройств: GeoGebra Geometry, GeoGebra Scientific Calculator, GeoGebra CAS Calculator, GeoGebra 3D Calculator, GeoGebra Calculator Suite, GeoGebra Graphing Calculator.

С 2020 г. на официальном сайте программы открыт собственный GeoGebra Classroom, который обеспечивает возможность использования коллекции динамических рабочих листов сайта для организации активной образовательной деятельности учащихся и оценки их образовательных достижений в дистанционном формате [7]. Сегодня команда GeoGebra осваивает также новые технологии: 3D printing [8] и AR моделирование [9].

---

[3] URL: http://www.kspu.ru/page-15851.html

[4] URL: https://www.bsu.ru/news/12450/

[5] GeoGebra стала ведущим поставщиком программного обеспечения для динамической математики, поддерживая образование в области естественных наук, технологий, инженерии и математики (STEM), а также инновации в преподавании и обучении во всем мире.

2. Проявления консолидирующей функции GeoGebra в Архангельской области

GeoGebra стала известна в Архангельске только в 2010 г., когда команда преподавателей Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова, вошедшего в состав Северного (Арктического) Федерального университета (САФУ), была приглашена профессором Т.Ф. Сергеевой к участию в Российско-Болгарском проекте «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE). Целью проекта была разработка и апробация эффективных методик обучения математике с GeoGebra. К участию в проекте в первый год подключились 12 школ (19 учителей-экспериментаторов, 434 учащихся). Перед ними была поставлена задача разработать поурочное планирование для обучения геометрии учащихся 7–9 классов с использованием электронных образовательных ресурсов, созданных на базе GeoGebra, и рабочих тетрадей «Наглядная планиметрия» (рис. 2).

Рис. 2. Комплект «Наглядная планиметрия» для учащихся 7–9 классов

Для решения этих задач был организован постоянно действующий семинар, на котором участники проекта совместно осваивали GeoGebra, обсуждали возможности ее использования в образовательном процессе. Результатом совместной работы энтузиастов уже в первый год стало создание поурочного планирования, комплекта тематических контрольных работ и адаптированных субтестов, позволявших фиксировать изменения образовательных результатов под влиянием новой технологии обучения [10], а также учебное пособие по использованию возможностей GeoGebra при изучении геометрии [11]. Данное пособие содержало описание возможностей GeoGebra, инструкций по их использованию, нормативные основы обучения геометрии с компьютером, частные методики: формирования геометрических понятий, обучения доказательству, обучения постановке и решению многовариантных геометрических задач и задач с параметрами.

Постепенно число участников проекта росло: 2011–2012 уч. г. – 17 школ (28 учителей–экспериментаторов, 478 учащихся), 2012–2013 уч. г. – 20 школ (36 учителей–экспериментаторов, 576 учащихся), 2013–2014 уч. г. – 26 школ (41 учитель–экспериментатор, 824 учащихся). Расширялась и география участников проекта в Архангельской области: Архангельск, Северодвинск, Новодвинск, Вельский район, Октябрьский район, Ненецкий автономный округ.

Обучающие семинары и выездные сессии были дополнены взаимопосещением открытых уроков и мастер-классов, проведением семинаров самими учителями на базе школ, публикациями новых рабочих тетрадей и учебных пособий, подготовленных учителями-экспериментаторами [12], [13], [14].

Созданная в рамках проекта экспериментальная площадка стала уникальной базой не только для проведения научных исследований, но и практической подготовки учителей-новаторов в сфере математического образования на всех ступенях высшего образования: бакалавриата, магистратуры, аспирантуры. В САФУ была создана студенческая лаборатория GeoGebra, для которой задачи ставили разработчики GeoGebra и учителя-экспериментаторы, а решение осуществлялось во временных творческих коллективах, объединивших вузовских преподавателей, учителей и студентов. Примерами задач, решенных в студенческой лаборатории, являются следующие: локализация версии 4.2 данной программы и перевод на русский язык инструкции для пользователей [15]; разработка динамических тренажеров для подготовки учащихся к ОГЭ по математике; разработка лабораторного практикума для обучения алгебре и началам математического анализа с использованием GeoGebra; создание коллекции динамических листов для поддержки изучения стереометрии. В студенческой лаборатории GeoGebra аспирантами САФУ подготовлены и успешно защищены две диссертации, направленные на решение проблемы «экспериментально-теоретического разрыва» при обучении геометрии с использованием систем динамической математики и на разработку технологии исследовательского обучения в стиле экспериментальной математики.

Новым, относительно самостоятельным направлением работы стал проект «Экспериментальная математика», руководителем которого в настоящее время является М.А. Павлова. Проект стартовал в период подготовки ею кандидатской диссертации. В 2015 г. он был поддержан фондом «Династия» и сейчас включает несколько взаимосвязанных мероприятий: кружок для школьников, турнир по экспериментальной математике, сетевую лабораторию студентов и школьников по созданию экспозиции «Математический экспериментаниум» и ее виртуальной версии как части музея занимательных наук САФУ [16].

В настоящее время в рамках проекта MITE проводятся работы по оценке образовательных возможностей дополненной реальности и 3D-принтинга моделей GeoGebra [17], исследуются возможности подготовки учащихся к исследовательской деятельности в формате Science 2.0 за счет вовлечения их в сетевые исследовательские проекты с использованием GeoGebra в рамках реализации программ сетевого наставничества [18]. Работы проводятся при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-013-00730).

3. От научной дискуссии вокруг проблемы «экспериментально-теоретического разрыва» к сотрудничеству

В процессе экспериментальной апробации методики обучения геометрии с GeoGebra мы столкнулись с проблемой снижения мотивации не только у учащихся, но и у учителей-экспериментаторов в проведении дедуктивных доказательств. Снижение было вызвано не только наглядностью и убедительностью компьютерного эксперимента в GeoGebra, но и рядом сопутствующих факторов: диссонансом между увлекательностью деятельности по постановке и проведению компьютерного эксперимента и рутинностью и трудностью в освоении и проведении дедуктивных доказательств, возможностью экономии учебного времени за счет динамической визуализации геометрических теорем, отсутствием (в те годы) в КИМ ОГЭ и ЕГЭ по математике задач на доказательство, снижением требований к обоснованию ключевых моментов решения геометрических задач.

Анализ зарубежной научно-методической литературы показал, что эта проблема действительно является очень острой и сложной. Там она получила даже специальное название «экспериментально-теоретический разрыв». Естественно, что нас интересовал вопрос о том, сталкивались ли с этой проблемой и как ее решали наши соотечественники, также занимающиеся вопросами обучения математике с использованием систем динамической математики: В.И. Рыжик (РГПУ, Живая математика, Geometry Expressions), В.Н. Дубровский (Москва, 1С. Математический конструктор), В.Р. Майер (Красноярск, Живая математика), С.В. Ларин (Красноярск, GeoGebra), А.Л. Семенов (Москва, Общие вопросы информатизации математического образования). Совместно с А.В. Ястребовым (Ярославль) в 2014 г. нами был подготовлен «Мягкий манифест экспериментальной математики», который в качестве препринта статьи [19] был размещен на сайте проекта MITE. В его обсуждении приняли участие 8 экспертов[6].

В.И. Рыжик высказал идею о том, что доказывать при обучении математике нужно не все, не всегда и не для каждого ученика: «Я мыслю компьютер так же, как как мыслит физик некий прибор (осциллограф, к примеру). И тут есть два уровня. Первый (уровень пользователя) – использовать то, что он показывает, не подвергая эти показания сомнению, а только многократно проверяя. Второй (уровень теоретика) – понять, почему он такое показывает». Более подробно эту идею он развил в своей неопубликованной статье «Доказательство или показательство?».

В.Н. Дубровский [20] высказал идею о целесообразности приучать учащихся к комплексному использованию компьютерных экспериментов и дедуктивных доказательств, выстраивая процесс обучения в соответствии с этапами исследовательского цикла: 1) проведение поискового компьютерного эксперимента для выдвижения гипотез, 2) выполнение численной компьютерной проверки гипотез, 3) дедуктивное доказательство гипотезы, прошедшей проверку.

С.В. Ларин и В.Р. Майер, рассуждая о причинах возникновения данной проблемы и способах ее разрешения, пришли к выводу: «Устраняется «экспериментально-теоретический разрыв» очень просто, если вещи называть своими именами. Необходимо разъяснить ученику, что доказательство истинности утверждения не может быть сведено к наглядному эксперименту. Что суть доказательства – в установлении причинно-следственных связей, в обнаружении первичных истин, называемых аксиомами» [21; 24].

[6] URL: http://itprojects.narfu.ru/mite/forum/viewtopic.php?f=3&p=20&sid=e8c6f9ea4435d8ff13001a6065fa48f8#p20

А.В. Ястребов, решая данную проблему, прочел в 2015 г. открытую лекцию перед учащимися – членами кружка «Экспериментальной математики» и учителями–экспериментаторами проекта MITE на тему «Компьютерная помощь в решении задач»[7]. Основные методические идеи этой лекции были впоследствии изложены в нашей совместной статье [22]. Суть их состоит в выделении тех типов результатов экспериментов, которые могут быть и должны предъявляться учащимся в процессе обучения математике для мотивации проведения дедуктивных доказательств: неоднозначные, «лукавые» и некорректные.

Возникшая дискуссия специалистов оказалась не только очень интересной и поучительной, но и привела к развитию сотрудничества научных школ: создание сетевой магистерской программы по математическому образованию МПГУ и САФУ; получение САФУ заказа от компании 1С на проведение сравнительного анализа возможностей GeoGebra и Математического конструктора; организация участия студентов и учащихся Архангельской области и Красноярского края в конференциях, олимпиадах и конкурсах, проводимых САФУ и КГПУ, взаимное рецензирование научных работ и публикаций, совместное руководство исследовательскими проектами школьников и многое другое.

Выводы

Маркус Хоенвертер создал не только удобное и эффективное средство поддержки научной и образовательной деятельности, но и запустил волну, которая, достигнув всех уголков мира, размыла границы между национальными системами образования, уровнями обучения, учебными предметами, научными школами, кастами «учеников», «учителей» и «ученых». Втянутые в «воронку» GeoGebra смогли прочувствовать силу единства, понять, как много мы можем сделать вместе, как интересно работать и учиться в среде увлеченных людей.

Библиографический список

1. Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter, Yves Kreis, Zsolt Lavicza Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra // JORNAL OF APPLIED COMPUTING VOL. V No. 01. – JAN/JUN. 2009, 38–50 pp.
2. Markus Hohenwarter, Daniel Jarvis, Zsolt Lavicza. Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute // International Journal for Technology in Mathematics Education. Volume 16. No. 2, 83–86 pp.
3. Gabor Ancsin, Markus Hohenwarter, Zoltan Kovacs. GeoGebra goes Web // The Electronic Journal of Mathematics and Technology. Volume 7. 2013. No. 6. 411–418 pp.
4. Zsolt Lavicza, Kristof Fenyvesi, Diego Lieban, Hogul Park, Markus Hohenwarter, Jose Diego Mantecon, Theodosia Prodromou. Mathematics learning through arts, technology and robotics: multi- and transdisciplinary STEAM approaches // 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education 7–11 May 2018, Taipei, Taiwan, 101–122 pp.
5. Zsolt Lavicza, Theodosia Prodromou, Kristof Fenyvesi, Markus Hohenwarter, Istvan Juhos, Balazs Koren, Jose Diego-Mantecon. Integrating STEM-related technologies into mathematics education at a large scale // International Journal for Technology in Mathematics Education. Volume XX. No. 6. Y. 2020. 1–9 pp.

[7] URL: https://youtu.be/87OM7tNsWmo (видеозапись А.В. Ястребова).

6. URL: https://www.geogebra.org/about. О программе GeoGebra на официальном сайте.
7. Mariam Zakariashvili. Technological Aspects of Distance Learning in Geogebra Classroom-Math Environment // «Intercultural dialogues» Transactions, Volume 6, 2021 г. URL: https://journals.4science.ge/index.php/IDW/article/view/539 (дата обращения: 31.10.2021).
8. Ana Donevska-Todorova, Diego Lieban. Fostering heuristic strategies in mathematical problem solving with virtual and tangible manipulatives // Proceedings of the 10th ERME Topic Conference MEDA, 2020. 175–182 pp.
9. Melanie Tomaschko, Markus Hohenwarter. Augmented Reality in Mathematics Education: The Case of GeoGebra AR // Augmented Reality in Educational Settings, 2019. 325–346 pp.
10. Котова С.Н., Овчинникова Р.П., Томилова А.Е. и др. Обучение геометрии с использованием интерактивной геометрической среды: дидактические материалы для 7–9 классов / отв. ред. Шабанова М.В. / Изд-во САФУ. Архангельск: КИРА, 2011. 93 с.
11. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие / О.Л. Безумова, Р.П. Овчинникова, О.Н. Троицкая и др.; отв. ред. О.Л. Безумова. Архангельск: КИРА, 2011. 140 с.
12. Анохина Н.Е., Павлова М.А. Рабочая тетрадь к курсу «Наглядная планиметрия» для учащихся 6 класса. Архангельск: КИРА, 2012. 96 с.
13. Урок геометрии с GeoGebra: учебное пособие / под общ. ред. Р.П. Овчинниковой; Федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова». Архангельск: Издательство АО ИОО, 2017. 198 с.
14. Паршева В.А. Прикосновение к гиперболе: рабочая тетрадь № 1 для элективного курса «Кривые второго порядка» для предпрофильных 9 классов общеобразовательных школ. Архангельск: Изд-во АО ИОО. 102 с.
15. Рябова Т.С., Троицкая О.Н. Локализация программы GeoGebra 4.2 с учетом терминологического аппарата школьного и вузовского курсов математики // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 6 (13). Часть 3. С. 45–47. URL: https://research-journal.org/pedagogy/lokalizaciya-programmy-geogebra-4-2-s-uchetom-terminologicheskogo-apparata-shkolnogo-i-vuzovskogo-kursov-matematiki/ (дата обращения: 30.10.2021.).
16. Официальный сайт кружка «Экспериментальная математика». URL: http://itprojects.narfu.ru/kruzhok-exp-mat/index.php
17. Shabanova M., Bezumova O., Zatsepina E., Malysheva S., Kotova S., Ovchinnikova R. Learning stereometry in a secondary school within GeoGebra's Augmented reality app/ I International scientific conference «ASEDU-2020: Advances in Science, Engineering and Digital Education». Krasnoyarsk, 08–09 октября 2020 года, 1–9 pp.
18. Sergeyeva T., Yermakov D., Mamiy D., Shabanova M. Network research project as a model of group mentoring in work with gifted children // Education and City: Education and Quality of Living in the City. The Third Annual International Symposium. Moscow, 2021. С. 5019.
19. Ястребов А.В., Шабанова М.В. Воспитание математика-экспериментатора, или Мягкий манифест экспериментальной математики // Математика и информатика. 2015. Т. 58, № 2. С. 129.
20. Дубровский В.Н. Визуализация математических зависимостей средствами динамической геометрии // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8, № 2. С. 261–267.
21. Ларин С.В., Майер В.Р. К проблеме «Экспериментально-теоретического разрыва» при обучении математике // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2015. № 3 (33). С. 21–24.
22. Ястребов А.В., Шабанова М.В. О типологии результатов компьютерных экспериментов в облучении математике школьников // Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство: труды международной научной конференции. 2015. С. 400–403.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ, ШКОЛЬНОЙ И НЕЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ КАК СРЕДСТВО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ ПО МАТЕМАТИКЕ

COMPUTER ANIMATION AS A MEANS OF SOLVING TASKS WITH PARAMETERS IN MATHEMATICS

И.А. Ванюрин, С.В. Майер **I.A. Vanyurin, S.V. Mayer**

Памяти нашего дедушки Роберта посвящается

Задачи с параметрами, системы динамической математики, компьютерная анимация, среда Живая математика.

В статье продемонстрированы возможности компьютерной анимации как средства решения задач с параметрами по математике при подготовке к Единому государственному экзамену.

Tasks with parameters, systems of dynamic mathematics, computer animation, The Geometer's Sketchpad.

The article demonstrates the possibilities of computer animation as a means of solving problems with parameters in mathematics in preparation for the unified state exam.

Введение. В работе рассматриваются задачи с параметром, решение которых вызывает у многих школьников большие трудности. По нашему мнению, эти трудности связаны с тем, что в привычных уравнениях (неравенствах или системах) с конкретными числовыми коэффициентами и неизвестными, которые необходимо найти, отдельные коэффициенты заменены буквами или, как их принято называть, параметрами. Позже нам стало понятно, что такие задачи рассматривают не ради того, чтобы усложнить их решение, а потому, что они имеют важное прикладное значение. В реальной жизни, когда не все и не всегда можно вычислить или измерить, вместо конкретных чисел используют буквы. Поэтому, создавая модель того или иного процесса, связанного с поиском неизвестных, возникает потребность использовать параметры. Решая такое уравнение, накладывают ограничения на параметры и в зависимости от этих ограничений находят неизвестные величины.

Найти ключ к решению многих задач с параметрами нам помогает представление уравнений или неравенств в виде графиков функций или геометрических объектов. При таком подходе основная сложность заключается в том, чтобы увидеть, каким образом тот или иной параметр влияет на вид, форму, положение графика или фигуры. Преодолеть эту сложность позволяют цифровые технологии. Используя компьютерную анимацию, удается в режиме реального времени наблюдать за эволюцией исследуемых фигур в зависимости от значений параметра.

Отметим, что под компьютерной анимацией мы понимаем компьютерную имитацию реального или идеального процесса с помощью изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений с фазами движения [1, с. 8].

При решении задач с параметрами с целью их визуализации удобно использовать так называемые системы динамической математики (СДМ), которые созданы специально для исследовательского обучения математике в школе. Среди систем динамической математики наиболее популярны The Geometer's Sketchpad (в России известна ее русскоязычная версии Живая математика) [3] и GeoGebra [4]. В работе мы будет использовать среду Живая математика. Ее анимационные возможности позволяют визуализировать решение большого класса задач с параметрами. В данной работе мы рассмотрим две задачи, способы решения которых основаны на исследовании взаимного расположения геометрических фигур и графиков функций, условия обеих задач взяты нами из [2].

Задача с геометрическим контекстом и параметр. Рассмотрим сначала задачу, в условии которой фигурируют две окружности равных радиусов, не зависящие от параметра. Третья геометрическая фигура при положительном параметре тоже окружность, радиус которой уже зависит от параметра. Эта окружность вырождается в точку или окружность мнимого радиуса при значениях параметра меньше, либо равных нулю.

Задача № 1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x+3)^2+(|y|-7)^2=9\\(x-9)^2+(y-2)^2=a\end{cases}$$

(а) не имеет решения; (б) имеет ровно одно решение; (в) имеет ровно два решения; (г) имеет ровно три решения; (д) имеет ровно четыре решения.

Решение.

1. Графиком первого уравнения являются две окружности равных радиусов. Уравнение первой окружности c_2 (соответствует случаю $y \geq 0$) имеет вид $(x+3)^2+(y-7)^2=3^2$, точка $B(-3;\ 7)$ – центр окружности, 3 – ее радиус. Уравнение второй окружности c_3 (соответствует случаю $y < 0$) имеет вид $(x+3)^2+(-y-7)^2=9$ или $(x+3)^2+(y+7)^2=3^2$, ее центр $C(-3;\ -7)$, радиус тоже 3. Графиком второго уравнения являются: при $a > 0$ – окружность c_1 с центром в точке $A(9,2)$ и радиуса $R=\sqrt{a}$; при $a = 0$ – точка $A(9,2)$; при $a < 0$ – пустое множество.

В среде Живая математика выберем параметр *a*, присвоим ему некоторое положительное числовое значение, например, $a = 74{,}00$. Зададим на рабочем поле прямоугольную систему координат, построим точки *A, B* и *C*, затем окружности c_1, c_2 и c_3 (рис. 1, левый слайд).

2. Используя формулу расстояния между точками с заданными координатами, найдем расстояния между центрами окружностей: $AB=13$, $AC=15$, $BC=14$. Таким образом, центры окружностей находятся в вершинах разностороннего треугольника ABC с целочисленными сторонами.

3. Пусть *M* и *N* – точки пересечения прямой *AB* с окружностью c_2 (*M* между *A* и *B*), *K* и *L* – точки пересечения прямой *AC* с окружностью c_3 (*K* между *A* и *C*) (см. рис. 1–5). Тогда $AM = 13 – 3 = 10,\ AN = 13+3=16,\ AK = 15-3=12,\ AL = 15+3=18.$

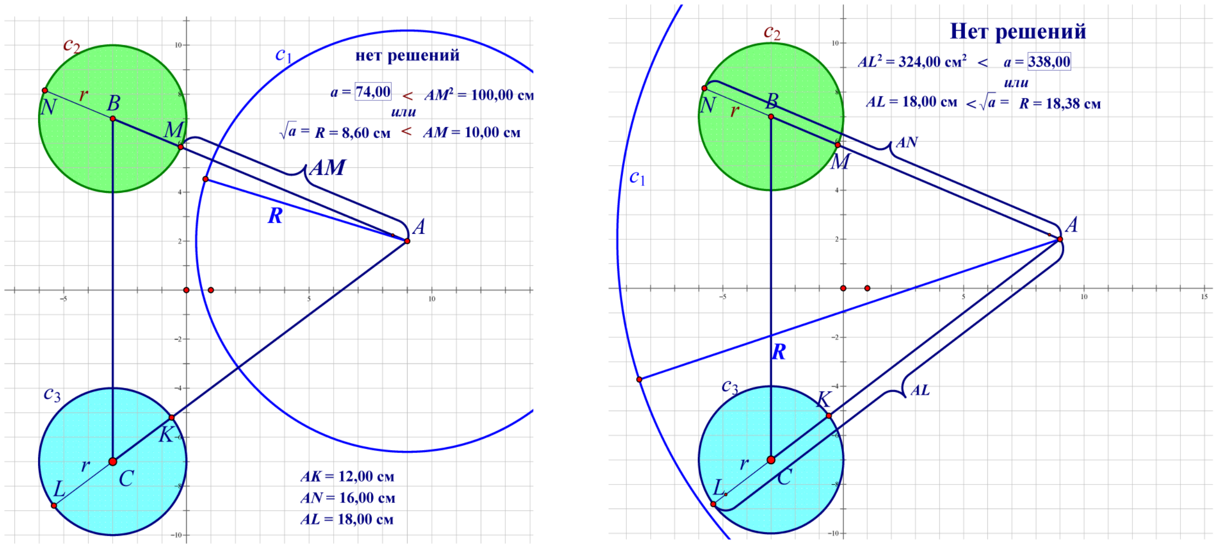


Рис. 1

4(а). Выясним, когда система не будет иметь ни одного решения. Ясно, что это случится при значении параметра a меньше, либо равном нулю. Если же $a > 0$, то система не будет иметь решений, когда окружности c_2 и c_3 будут находиться либо вне окружности c_1 (рис. 1, левый слайд), т.е. при $R = \sqrt{a} < AM = 10$ (или $a < 100$), либо – внутри этой окружности (рис. 1, правый слайд), т.е. при $R = \sqrt{a} > AL = 18$ (или $a > 324$).

4(б). Рассмотрим следующий случай, когда система имеет ровно одно решение. Используя параметрическую анимацию, начнем изменять параметр a так, чтобы окружность c_1 коснулась лишь одной из двух других окружностей.

Подсветив параметр a, нажав и удерживая в таком состоянии одну из клавиш «+» или «-», добьемся того, чтобы окружность c_1 коснулась окружности c_2 внешним образом (если c_1 коснется c_2 внутренним образом, то c_1 одновременно пересечет c_3 в двух точках и система будет иметь более одного решения). Это случится тогда, когда $R = AM$, отсюда $a=R^2=AM^2=10^2=100$ (рис. 2, левый слайд).

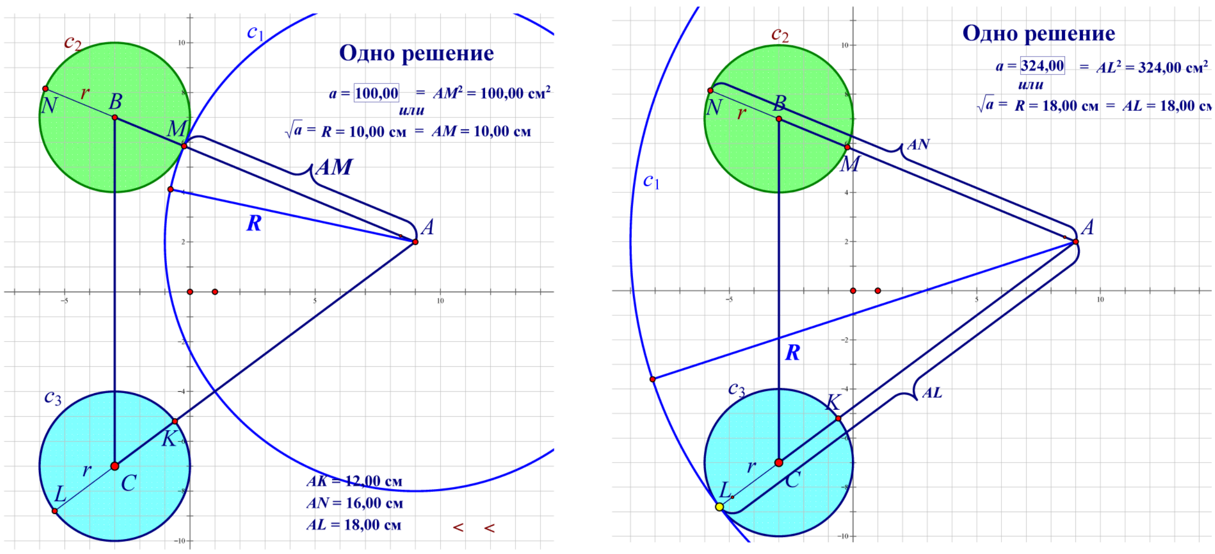


Рис. 2

Далее добьемся того, чтобы окружность c_1 коснулась окружности c_3 внутренним образом (как и выше, окружность c_1 не может коснуться окружности c_3 внешним образом). Это случится в том случае, когда $R = AL$, отсюда $a = 324$ (рис. 2, правый слайд).

4(в). Рассмотрим теперь случай, когда система имеет ровно два решения. Это произойдет лишь тогда, когда c_1 пересечет одну из окружностей c_2 и c_3 в двух точках, а вторую не пересечет. Изменяем параметр a так, чтобы окружность c_1 пересекла c_2 в двух точках ($AM < R < AN$), а окружность c_3 не пересекла ($R < AK$ или $R > AL$). Это случится тогда, когда $AM < R < AK$ или при $100 < a < 144$ (рис. 3, левый слайд).

Изменяем теперь параметр a так, чтобы окружность c_1 пересекла c_3 в двух точках ($AK < R < AL$), а с окружностью c_2 вообще не имела общих точек ($R<AM$ или $R>AN$). Это случится лишь тогда, когда $AN < R < AL$, отсюда $256 < a < 324$ (рис. 3, правый слайд).

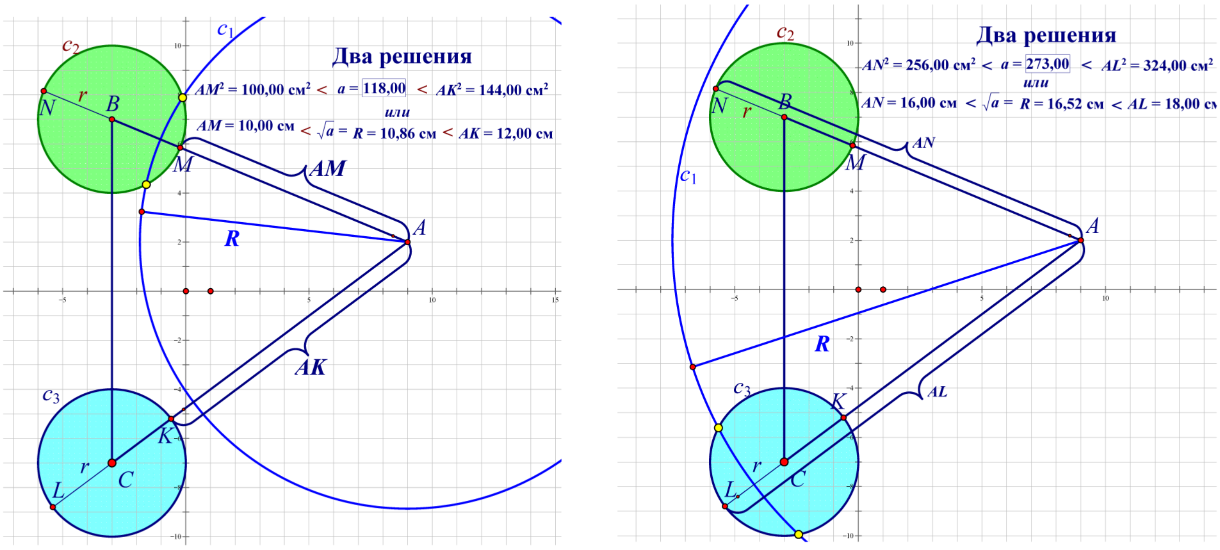


Рис. 3

4(г). Рассмотрим теперь случай, когда система имеет ровно три решения. Это произойдет лишь в том случае, когда окружность c_1 коснется одной из двух окружностей c_2 или c_3 и пересечет вторую в двух точках. Окружность c_1 может коснуться c_2 или c_3 внешним образом лишь в точках M или K, и внутренним образом – лишь в точках L или N. Если c_3 пройдет через точки L или M, то она коснется одной окружности, но не пересечет вторую. Таким образом, нас устроят только два случая: при $R = AK$, отсюда $a = AK^2 = 144$ (рис. 4, левый слайд) и при $R = AN$, отсюда $a = AN^2 = 256$ (рис. 4, правый слайд).

4(д). Рассмотрим последний случай, когда система имеет ровно четыре решения. Это произойдет лишь тогда, когда окружность c_1 пересечет каждую из окружностей c_2 и c_3 в двух точках. Это, в свою очередь, возможно лишь при условии, когда $AK < R <$ AN (рис. 5) или $144 < a < 256$.

Ответ.

(а) Система не имеет решений при $a < 100$ или при $a > 324$.

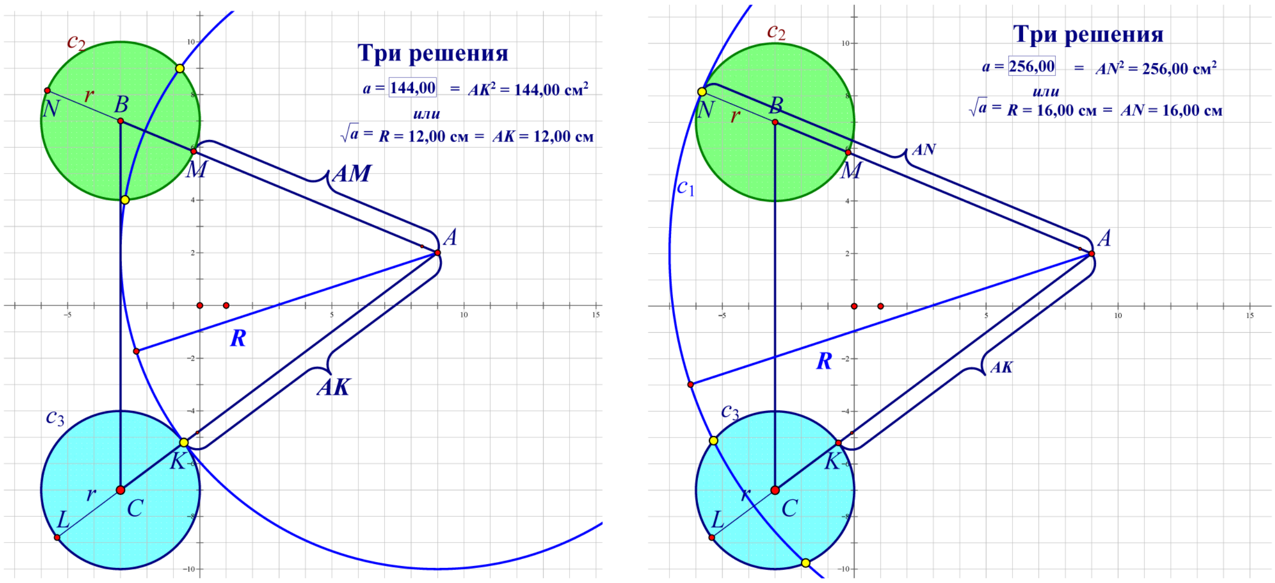


Рис. 4

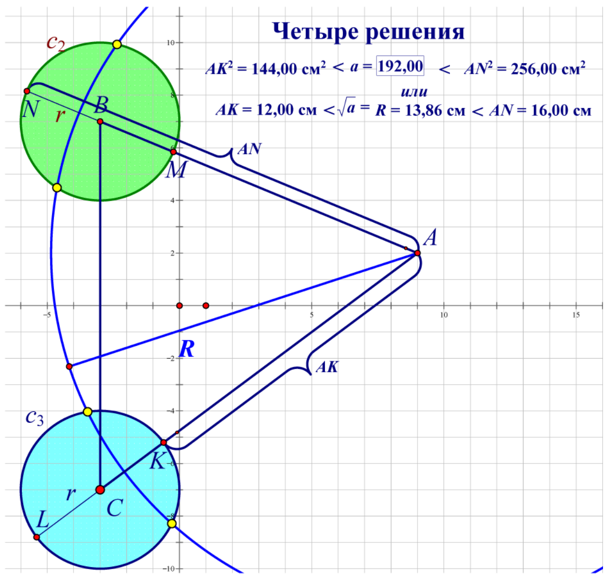


Рис. 5

(б) Система имеет ровно одно решение при $a = 100$ или при $a = 324$.

(в) Система имеет ровно два решения при $100 < a < 144$ или при $256 < a < 324$.

(г) Система имеет ровно три решения при $a = 144$ или при $a = 256$.

(д) Система имеет ровно четыре решения при $144 < a < 256$.

Задачи с функциональным контекстом и параметр. Рассмотрим теперь задачу, графический способ решения которой сводится к исследованию взаимного расположения графиков двух функций, один из которых зависит от параметра, а второй – не зависит от него.

Задача № 2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$a\,|x - 1| = x + 2 \qquad (*)$$

(а) не имеет корней; (б) имеет ровно один корень; (в) имеет ровно два корня.

Решение.

1. Обозначим через $g(x)$ выражение, стоящее в левой части уравнения (*), через $h(x)$ – выражение, стоящее в правой части этого уравнения. Таким образом, $g(x) = a\,|x - 1|$, $h(x) = x + 2$.

2. Построим в среде Живая математика график функции $g(x)$. Сначала зададим параметр а, присвоим ему некоторое значение, например, а = 2. Зададим

прямоугольную систему координат xOy. Используя меню «Графики», построим график функции $g(x)$. Он будет представлять собой два луча с общей вершиной в точке с координатами ($1;\ 0$), обозначим ее A. Точка $A(1;\ 0)$ принадлежит графику функции $g(x)$, т.к. $g(1) = a\ |1 - 1| = 0$.

Поскольку $g(0) = a \cdot |0 - 1| = a$, то один из лучей будет проходить через точку с координатами $(0;\ a)$, обозначим ее B. Так как $g(2) = a\ |2 - 1| = a$, то второй луч будет проходить через точку с координатами $(2;\ a)$, обозначим эту точку через C. Построим на рабочем поле среды Живая математика точки $A(1;\ 0)$, $B(0;\ a)$ и $C(2;\ a)$.

Отметим, что луч AB задается уравнением $y = -a \cdot (x - 1)$, где $x \leq 1$, а луч AC задается уравнением $y = a \cdot (x - 1)$, где $x \geq 1$. Из этих уравнений следует, что угловой коэффициент прямой AB равен $-a$, а угловой коэффициент прямой AC равен a. Графиком функции $y = h(x) = x + 2$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(-2;\ 0)$ и $(0;\ 2)$, т.к. $h(-2) = -2 + 0 = 0$, а $h(0) = 0 + 2 = 2$.

Ясно, что любая общая точка графиков функций $g(x)$ и $h(x)$ определяет одно из решений уравнения (*). Абсцисса x этой общей точки и является корнем уравнения $a\ |x - 1| = x + 2$.

3(а). Уравнение (*) не будет иметь корней, когда ни один из двух лучей AB и AC не будет иметь с прямой $y = x + 2$ ни одной общей точки. Поскольку лучи AB и AC симметричны относительно прямой, проходящей через A и параллельной оси ординат, то для этого достаточно, чтобы только луч AB не пересекал прямую $y = x + 2$. Но тогда угловой коэффициент $-a$ прямой AB должен быть больше или равен угловому коэффициенту 1 прямой $y = x+2$, то есть $-a \geq 1$ или $a \leq -1$. Проиллюстрируем наши выводы с помощью анимационного чертежа. Присвоим параметру a значение -2, получим изображение, представленное на рисунке 6 (левый слайд). Применим анимацию к параметру a. Будем увеличивать его значение с помощью клавиши «+» до тех пор, пока параметр a не примет значение -1 (рис. 6, правый слайд). Дальнейшее его увеличение приведет к появлению общей точки луча AB с прямой $y = x+2$.

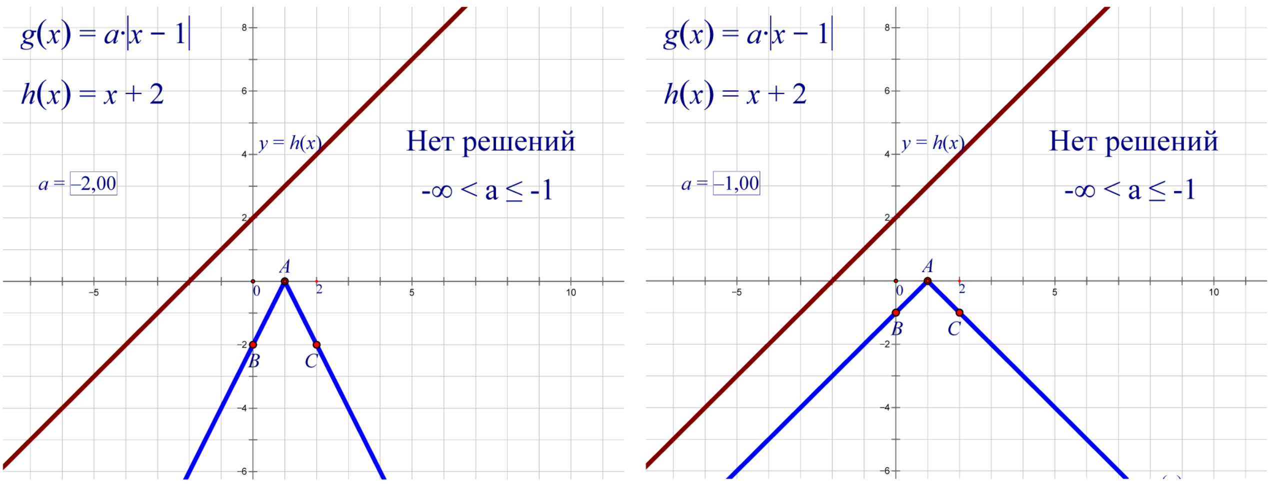


Рис. 6

3(б). Уравнение (*) будет иметь ровно одно решение только тогда, когда точно один из лучей *AB* или *AC* пересечет прямую $y = x + 2$. Продолжая анимационный процесс, начнем увеличивать значение параметра a. Луч *AB*, поворачиваясь вокруг *A* по часовой стрелке, начнет пересекать прямую $y = x+2$ в некоторой точке. На рисунке *7* (левый слайд) представлен стоп-кадр, соответствующий параметру $a = -0,63$.

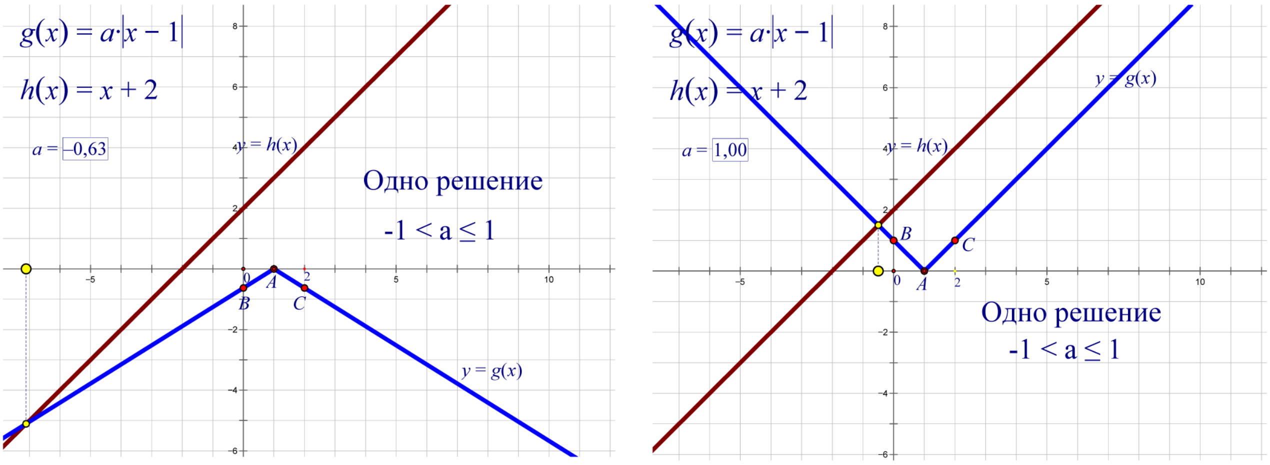


Рис. 7

Единственность решения уравнения (*) будет сохраняться для всех тех значений a, для которых луч *AC* не пересекает прямую $y = x + 2$, включая случай, когда луч *AC* окажется параллельным этой прямой (рис. 7, правый слайд). Последнее произойдет при равенстве угловых коэффициентов прямых $y = x + 2$ и *AC*, т.е. при $a = 1$.

3(б). Уравнение (*) будет иметь ровно два решения только тогда, когда оба луча *AB* и *AC* будут пересекать прямую $y = x+2$, т.е. при $a > 1$ (рис. 8).

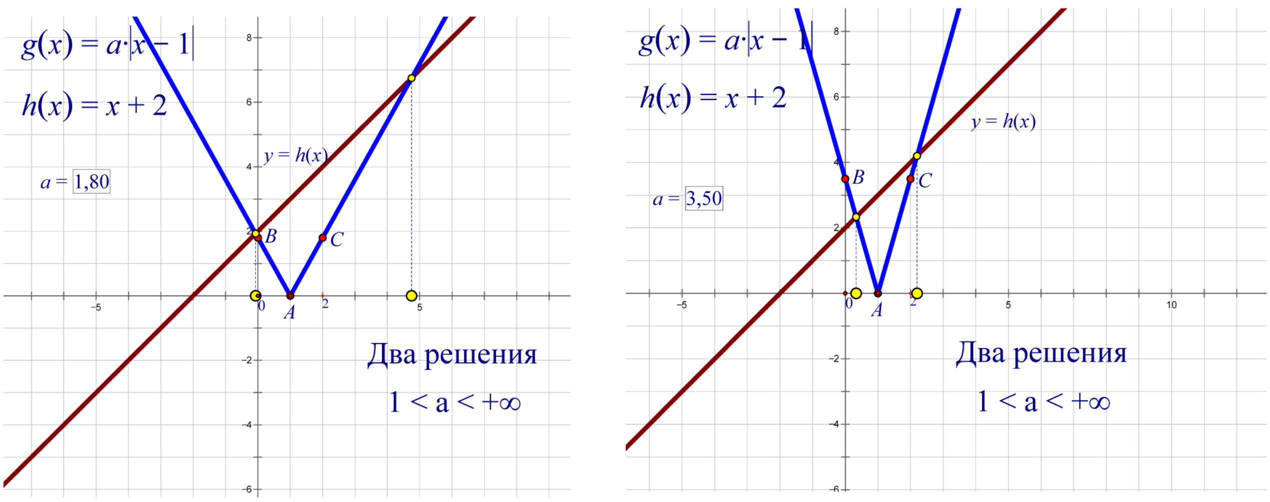


Рис. 8

Ответ.

(а) Уравнение $a\,|x - 1| = x + 2$ не имеет корней при $a \leq -1$.

(б) Уравнение $a\,|x - 1| = x + 2$ имеет ровно один корень при $-1 < a \leq 1$.

(в) Уравнение $a\,|x - 1| = x + 2$ имеет ровно два корня при $1 < a$.

Поводя итог, отметим, что в работе на конкретных примерах продемонстрировано применение при решении задач с параметром компьютерной анимации, которая позволяет визуализировать алгоритм решения каждой задачи, облегчить понимание основных его этапов. Один из основных результатов для авторов лично заключается в том, что исчез страх перед такими задачами, появилась уверенность в своих силах. Надеемся, что у старшеклассников, которые воспользуются нашими рекомендациями, такая уверенность тоже появится.

Библиографический список

1. Абдулкин В.В. и др. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе: монография / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. 164 с.
2. Жафяров А.Ж. Параметрическая паутина. Математика. ЕГЭ – уровень С: учебное пособие. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. 457 с.
3. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов (сост. Г.А. Аджемян, В.Н. Дубровский и др.). М.: ИНТ, 2013. 205 с.
4. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с. (Мастер-класс).

ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ VII ТУРНИРА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

RESULTS OF THE VII EXPERIMENTAL MATHEMATICS TOURNAMENT

Д.А. Никулина **D.A. Nikulina**

Турнир по экспериментальной математике, экспериментальная математика, GeoGebra.
В статье представлены итоги проведения VII Международного Турнира по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов, а также приведены примеры, показывающие наиболее частые ошибки при выполнении участниками некоторых заданий.

Experimental Mathematics Tournament, Experimental Mathematics, GeoGebra.
The article presents the results of the VII International Tournament on Experimental Mathematics for students of grades 5–9, and also, provides examples showing the most common mistakes when participants perform some tasks.

На базе Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова 13 февраля 2021 г. состоялся VII Международный Турнир по экспериментальной математике для учащихся 5–9 классов. Турнир проводится ежегодно в целях повышения у обучающихся интереса к изучению математики и развития их творческих способностей в области экспериментальной математики. С положением о Турнире, заданиями, решениями и критериями оценки можно познакомиться на официальном сайте [1].

Турнир проводился офлайн на базах его представителей в общеобразовательных школах. Кроме этого, была возможность индивидуального участия в режиме онлайн. География участников Турнира расширяется с каждым годом, в этом году вошли города: Тобыл, Улан-Удэ (Республика Казахстан), Новосибирск, Красноярск, Москва, Подольск, Нижний Новгород, Санкт-Петербург, Казань, Вельск, Мирный, Северодвинск, Архангельск. Общее количество участников составило 465 человек.

Задания турнира составлялись таким образом, чтобы была возможность проверить универсальные исследовательские действия математика-экспериментатора (УИД МЭ) как в комплексе, так и отдельно. Подробное описание понятия УИД МЭ представлено в статье [2].

В задании 1 предлагалось разрешить задачу правильными рассуждениями о пропорциональности измерений.

Задание 1 (9 класс). Для перевозки книг взяли коробку размером 20×30×36 см. Каждая книга имеет размер 4×15×30 см. Определите, какое наибольшее количество книг могло быть размещено в коробке.

Баллы	Критерии (9 класс)
0	Все случаи, не соответствующие представленными ниже критериям.
1	Дан верный ответ, который не подтвержден расчетами или изображениями, свидетельствующими об использовании соображения пропорциональности измерений или в результате рассуждений пропорциональности измерений получен неверный ответ в силу вычислительной ошибки.
3	Представлены правильные рассуждения о пропорциональности измерений, но получен неверный ответ в силу выбора неоптимального способа укладки книг.
5	Обоснованно дан верный ответ, т.е. ответ подтвержден правильными рассуждениями о пропорциональности измерений.

Решение. Пусть для определенности 36 см – высота коробки. Дно коробки имеет размеры 20×30. Располагая корешок книги вдоль ребра коробки в 20 см, получаем $20 \div 4 = 5$ размещенных книг. 36 ÷ 15 = 2 (ряда) книг укладываются в высоту. При таком размещении свободным останется пространство с измерениями 20×30×6, куда можно разместить еще одну книгу 15×30×4.

Ответ: 11 книг.

Приведем пример рассуждений одного из участников (рисунок 1).

1. Посчитаем общий объём коробки и поделим на объём книги: (20×30×36):(4×15×30)=12 – максимальное количество.
   Т.к. книга – твёрдое тело, она имеет определённую форму. Проверим, как будут расположены книги: в два ряда стороной 15 см книги к стороне 30 см коробки (получится 10). Остаётся полость 20×30×6, целиком туда поместится только одна книга.
   Ответ: 11

Рис. 1

Большинство участников допустили ошибку, вычисляя объемы коробки и книг. Пример самого распространенного решения представлен на рис. 2.

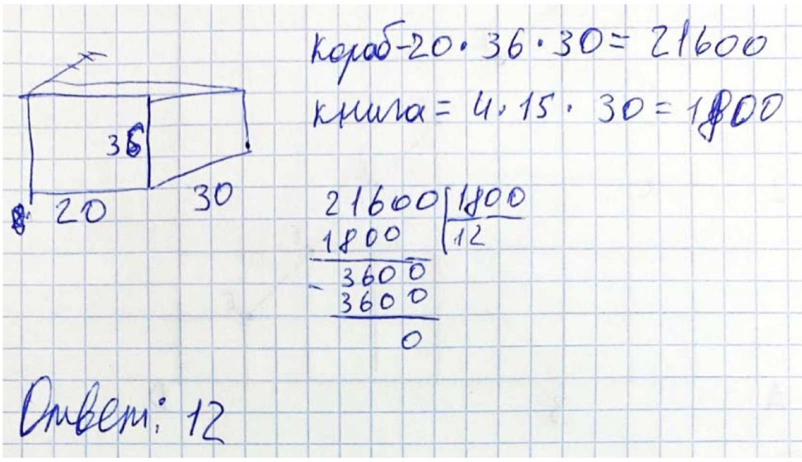


Рис. 2

У нескольких участников были попытки рассуждений о пропорциональности измерений, но они оказались ошибочными (рис. 3 и 4).

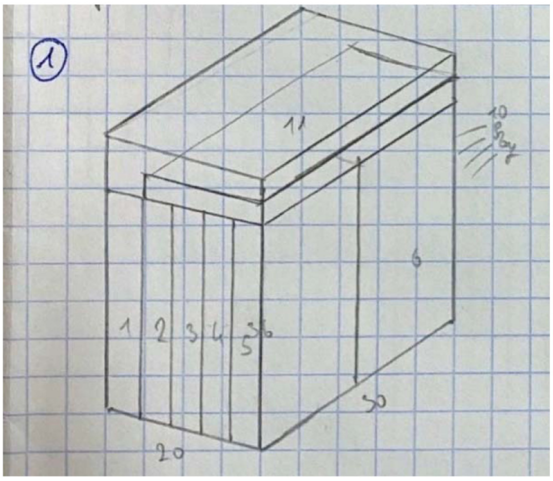


Рис. 3

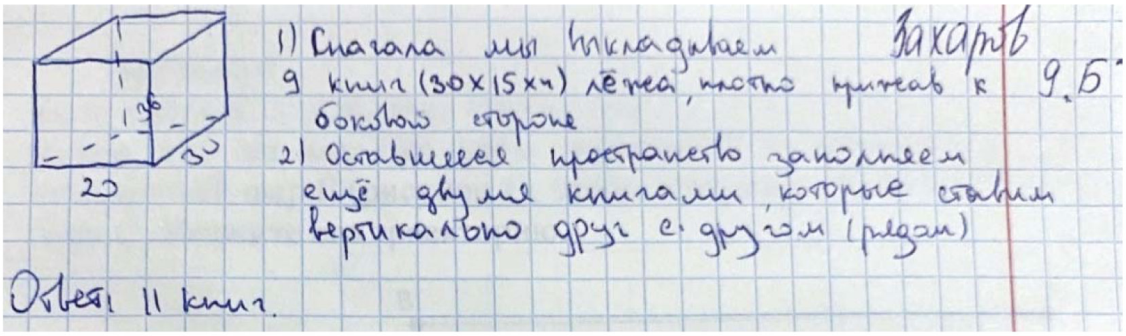


Рис. 4

В задании 2 предлагалось решить задачу указанным экспериментальным методом (методом перегибания и разрезания бумаги одним разрезом).

Задание 2 (9 класс). В листе бумаги нужно вырезать отверстие в форме правильного шестиугольника. В вашем распоряжении имеются только ножницы. Опишите, как нужно сложить лист бумаги, чтобы правильный шестиугольник мог быть вырезан одним разрезом.

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Представлен способ складывания листа бумаги, по которому можно судить о проведении эксперимента, позволяющего получить одним разрезом отверстие, являющееся правильным шестиугольником.
5	Представлен верный способ складывания листа бумаги, который гарантирует получение отверстия в форме правильного шестиугольника одним разрезом, но нет его описания.
10	Представлен верный способ складывания листа бумаги для получения отверстия в форме правильного шестиугольника одним разрезом с описанием шагов.

Решение. Правильный шестиугольник имеет 3 оси симметрии, проходящие через его вершины, которые разбивают многоугольник на шесть правильных треугольников (рис. 5а). Воспользуемся этим свойством.

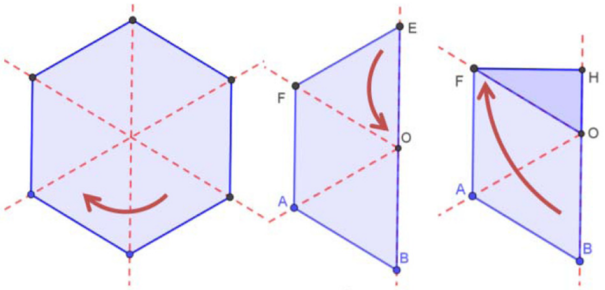
1) Перегнем бумагу по одной из осей симметрии (рис. 5б).
2) Совместим точки E и центр многоугольника O (рис. 5в).

3) Перегнем лист бумаги так, чтобы вершина B попала на построенный перпендикуляр, а линия сгиба прошла через центр многоугольника. Получим точку F (рис. 5г).

4) Перегнем лист бумаги по линии FO. Все 6 многоугольников совместятся (рис. 5д).

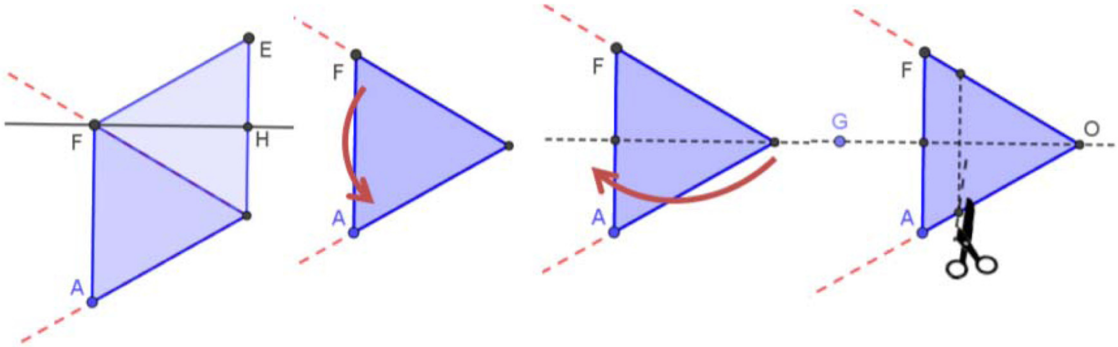
5) Строим ось симметрии треугольника AOF, совмещая точки A и F (рис. 5д-е).

6) Перегнем лист бумаги так, чтобы точка O лежала на оси получившейся симметрии (например, в т. G). Получившийся сгиб – линия разреза (рис. 5ж).



а *б* *в*

Рис. 5

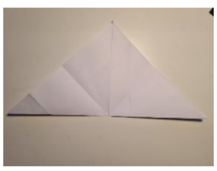


г *д* *е* *ж*

Рис. 5

Представим пример решения одного из участников, по которому можно судить о проведении эксперимента, позволяющего получить одним разрезом отверстие, являющееся правильным шестиугольником, но в описании отсутствуют некоторые шаги (табл. 1).

Таблица 1

Делаем квадрат из листа А4	Тянем за углы до тех пор, пока не получим две равные фигуры	Таким образом мы отмерили 6 углов в 60°	Загибаем угол к середине, чтобы шестиугольник получился правильным	Развернем
				

Большинство учащихся показали только результаты перегибания листа бумаги, но шаги решения не были описаны, например (рис. 6).

Рис. 6

В задании 3 предлагалось описать эксперимент для решения исследовательской задачи о бильярде.

Задание 3. Если ударить бильярдный шар по центру, то он отскакивает от борта стола под тем же углом, так же как луч света отражается от зеркала. Где необходимо поставить бильярдный шар E (рис. 7), чтобы при ударе он отразился от трех бортов и попал в лузу C. Укажите его траекторию.

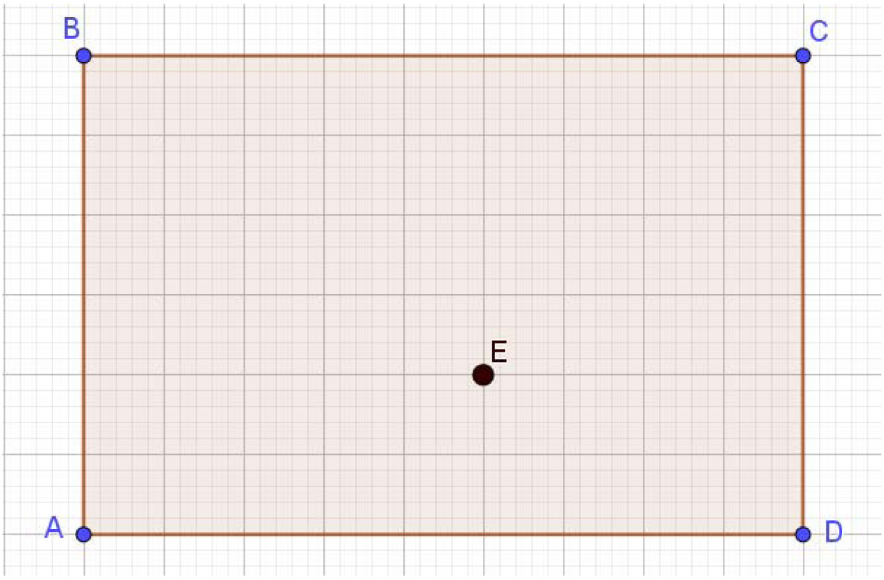


Рис. 7

Баллы	Критерии (9 класс)
3	Построена правильная траектория без раскрытия способа ее получения.
5	Найдена правильная траектория. Ее выбор обоснован либо компьютерным экспериментом, связанным с измерением углов, либо на бумаге с помощью транспортира.
10	Представлен общий способ построения траектории, т.е. способ, воспроизводимый при изменении положения точки E.

Решение.

1) Построим точку, симметричную E относительно прямой BC – E'.

2) Построим точку, симметричную C сначала относительно прямой AD, а затем прямой AB – C' и C''.

3) Найдем точки пересечения прямой E'C'' с отрезками BC и AB – точки F и H.

4) Найдем точку пересечения прямой HC' с отрезком AD – точка G.

5) По свойству симметрии и свойству вертикальных углов траектория EFHGC – искомая (рис. 8).

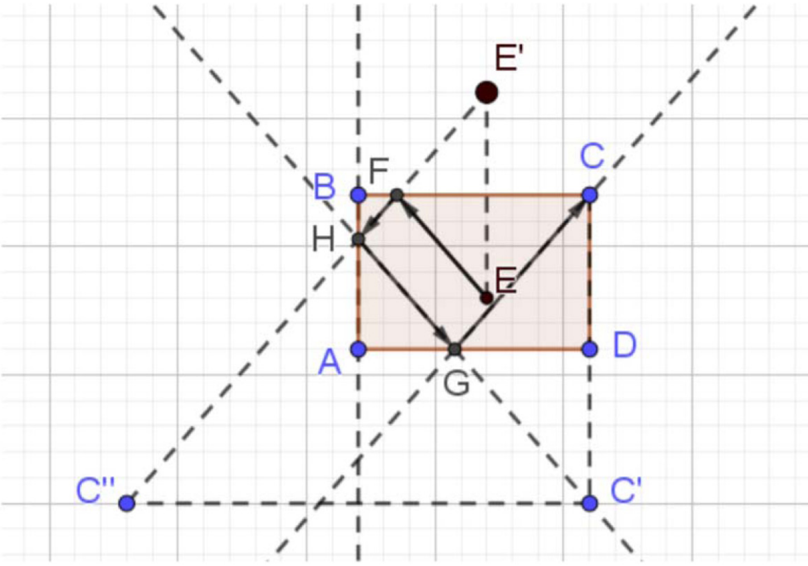


Рис. 8

Большинство учащихся представили решения, основанные либо компьютерным экспериментом, связанным с измерением углов (рис. 9), либо на бумаге с помощью транспортира (рис. 10).

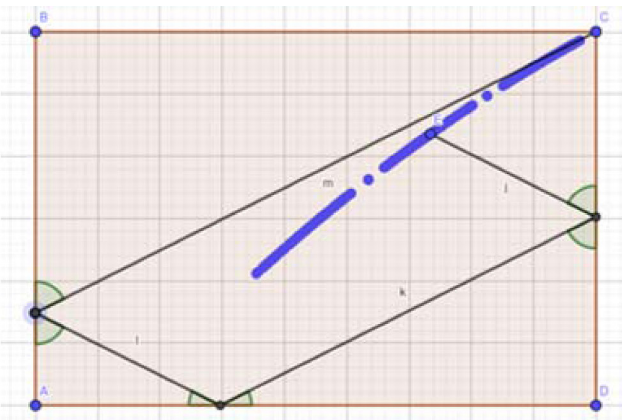


Рис. 9

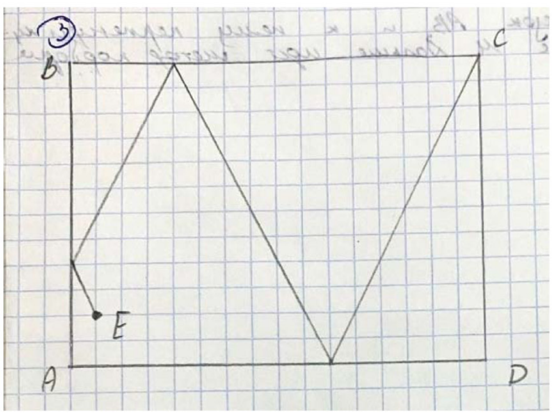


Рис. 10

Задание 4. Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) две вершины треугольника A и B и точку M – точку пересечения его высот (рис. 11). Найдите третью вершину треугольника, опишите самый короткий алгоритм построения.

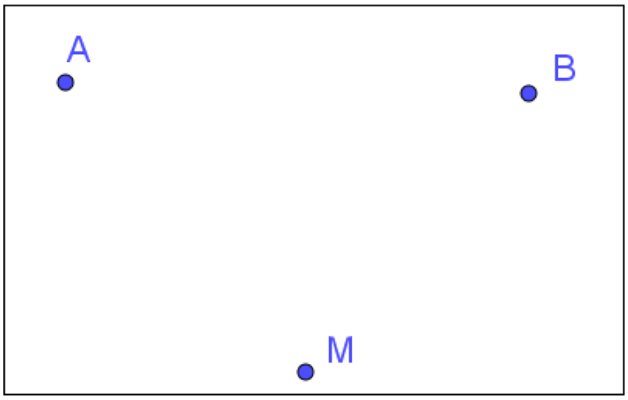


Рис. 11

Баллы	Критерии (9 класс)
5	Правильно построен треугольник ABC, но чертеж не является динамически устойчивым
10	Все построения правильны, но алгоритм не самый короткий
15	Все построения правильны, найден самый короткий алгоритм

Решение. Один из способов состоит из пяти шагов:

1) Пусть даны сторона AB и точка M.

2) Построим через точку M прямую, перпендикулярную к стороне AB.

3) Используя свойство «точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности», построим M'.

4) Построим окружность с помощью инструмента окружность по трем точкам.

5) Построим точку пересечения окружности и прямой MM' – искомая вершина C (рис. 12).

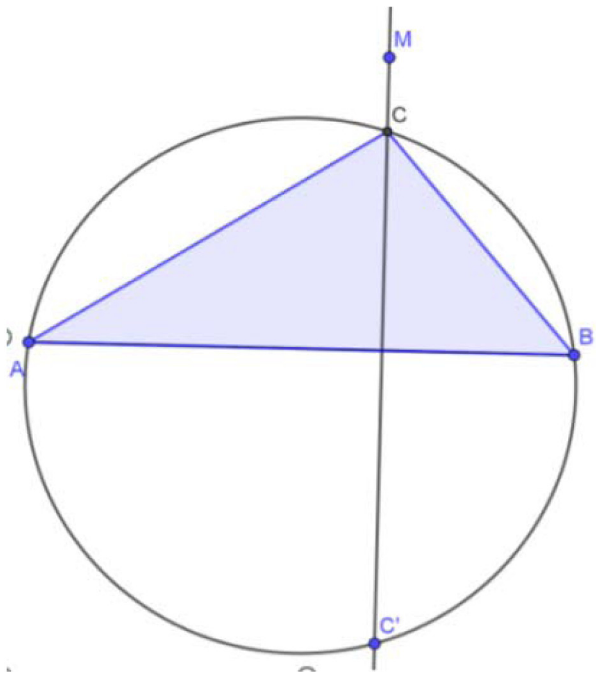


Рис. 12

Наиболее распространенным решением стал пример, представленный на рис. 13. У многих участников был описан не самый короткий алгоритм, но представлено полное описание построений.

4. Строим отрезок, соединяющий две данные точки, затем перпендикуляр к нему, проведённый из точки пересечения высот, мы получим прямую, на которой лежит третья вершина. Затем строим прямую, проходящую через точку пересечения высот и одну из вершин. И перпендикуляр из другой вершины к этой прямой. На пересечении первого построенного перпендикуляра и второго будет искомая вершина.

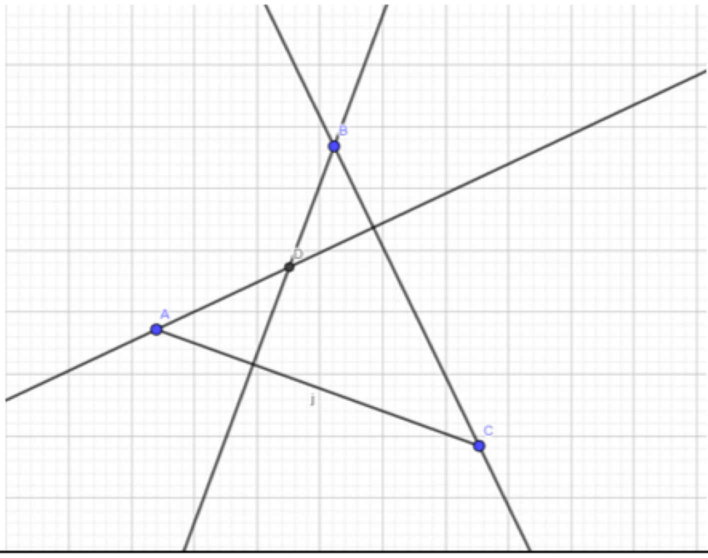


Рис. 13

В задании 5 предлагалось решить исследовательскую задачу экспериментальной математики.

Задание 5. *(Задача предложена Р.Н. Николаевым)*

Дан ромб ABCD со стороной 27 см и острым углом 60º. В ромб вписаны четыре окружности так, что окружность радиуса R касается сторон AD и CD, окружность радиуса 2R касается сторон AB и AD, окружность радиуса 3R касается AB и BC, окружность радиуса 4R касается BC и CD. Определите максимальное значение R, при котором каждые две окружности имеют максимум одну общую точку. Ответ обоснуйте.

Баллы	Критерии (9 класс)
5	Представлен чертеж или результаты эксперимента в GeoGebra, но при этом допущены ошибки
15	Задача решена экспериментально, но нет обоснования полученных результатов
20	Задача решена, но в доказательстве допущены ошибки
30	Задача решена, представлено доказательство всех ключевых моментов решения

Решение представлено на сайте Турнира [1]. Приведем только результаты конструктивного эксперимента для обоих случаев. 1 случай: ∠A=120º (рис. 14). 2 случай: ∠A=120º (рис. 15).

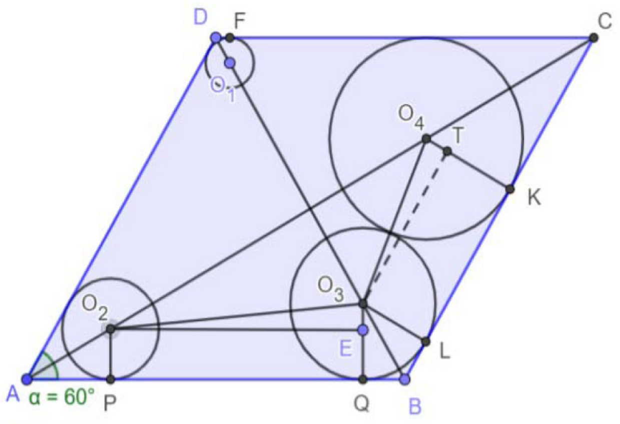


Рис. 14

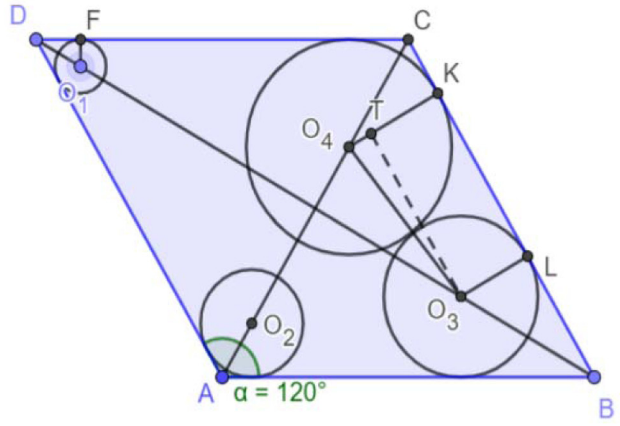


Рис. 15

Ни один из участников Турнира не смог представить полное решение данного задания. Некоторыми участниками были прикреплены файлы с построениями в GeoGebra, свидетельствующие о проведении компьютерного эксперимента, пример представлен на рис. 16.

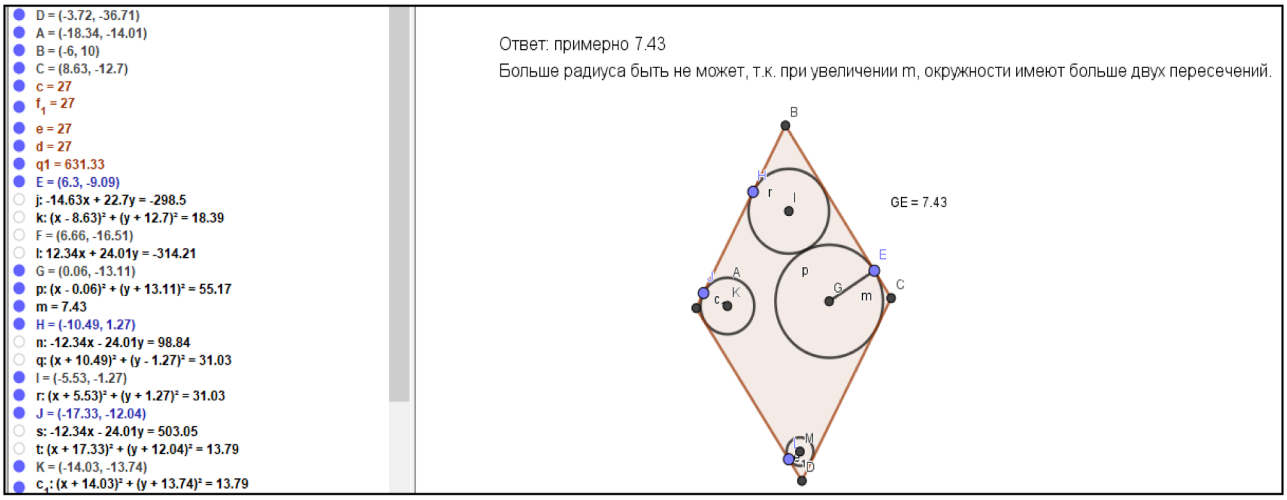


Рис. 16

В 6 задании предлагалось поставить как можно больше новых исследовательских задач на основе экспериментирования с компьютерной моделью объекта исследования к заданию 5.

Некоторые участники предлагали новые задачи, в которых были изменены только числовые данные условия задания 5, что говорит об их неумении осуществлять целесообразные модификации динамической модели. Примеры формулировок новых задач, которые были получены за счет преобразования динамического чертежа к заданию 5 звучат так: дан ромб ABCD со стороной 27 см и острым углом 60º. В ромб вписаны четыре окружности так, что окружность радиуса R касается сторон AD и CD, окружность радиуса 2R касается сторон AB и AD, окружность радиуса 3R касается AB и BC, окружность радиуса 4R касается BC и CD. Определите значение R, при котором окружности имеют *три общих точки / четыре общие точки.*

Таким образом, наиболее типичные ошибки, которые допустили участники турнира при выполнении заданий, говорят о низком уровне сформированности следующих умений:

– умения создавать динамически устойчивую модель объекта исследования для проведения эксперимента;

– умения использовать инструменты СДМ для формулировки гипотезы (отображения текущих значений, вывод аналитических интерпретаций);

– умения привлекать в качестве опоры для доказательства динамическую модель объекта исследования;

– умения проводить мысленный эксперимент или эксперимент с подручными средствами;

– умения осуществлять целесообразные модификации динамической модели.

Анализ решений, представленных участниками Турнира по экспериментальной математике, показал, что более высокий уровень сформированности УИД МЭ наблюдается у учащихся, которые имели опыт решения исследовательских задач с помощью систем динамической математики (СДМ) либо на занятиях кружка, либо при проведении индивидуальных исследовательских работ по математике. Что говорит о необходимости привлечения учащихся к решению исследовательских задач с использованием компьютерного и мысленного эксперимента во внеурочное время, начиная одновременно с пропедевтическим обучением геометрии в 5–6 классах.

Библиографический список

1. Официальный сайт турнира по экспериментальной математике. URL: https://it-projects.narfu.ru/turnir/
2. Павлова М.А., Шабанова М.В. Формирование универсальных исследовательских действий математика-экспериментатора у учащихся основной школы // Сборник научных трудов VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» / отв. ред. В.Р. Майер; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2017. С. 17–33.

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ АРБЕЛОСА

CONSTRUCTION OF DYNAMIC MODELS FOR INVESTIGATION THE PROPERTIES OF ARBELOS

З.О. Пестова, М.А. Павлова **Z.O. Pestova, M.A. Pavlova**

Арбелос, свойства арбелоса, динамическая модель арбелоса, GeoGebra.
В статье представлены алгоритмы построения в GeoGebra динамических моделей для визуализации и изучения свойств арбелоса. Разработанная коллекция моделей размещена на сайте GeoGebra.org в свободном доступе и может быть полезна тем, кто исследует свойства этой необычной фигуры.

Arbelos, properties of arbelos, dynamic model of arbelos, GeoGebra.
The article presents algorithms for constructing dynamic models in GeoGebra for visualizing and studying the properties of arbelos. The developed collection of models is available on the website GeoGebra.org and can be useful to those who explore the properties of this unusual figure.

Арбелос («нож сапожника» в греческом языке) назван так из-за своего сходства с лезвием ножа, который использовали при изготовлении обуви [1]. Это плоская область, ограниченная тремя полукругами с тремя вершинами, так что каждый угол каждого полукруга является общим с одним из других (связанных), все на той же стороне прямой, которая содержит их диаметры (рисунок 1).

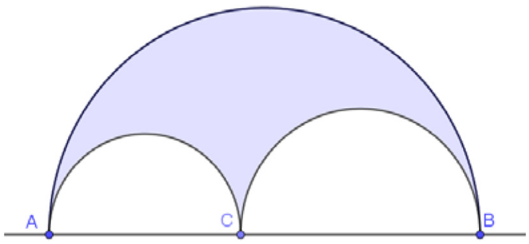


Рис. 1

В статьях [1–5] представлены различные свойства арбелоса, а также рисунки, демонстрирующие их. Для того чтобы убедиться в том, что представленные на них свойства сохраняются в динамике, мы решили создать коллекцию динамических моделей.

Чтобы построить динамическую модель арбелоса в GeoGebra, достаточно, чтобы точка С перемещалась по отрезку АВ (рис. 2). Для этого нужно задать ползунок a, затем построить отрезок АВ. Затем с помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построить окружность с центром в точке А и радиусом a, заданным ползунком. Построить точку пересечения этой окружности с отрезком АВ (точка С). Точка С будет перемещаться по АВ.

Затем построить три полуокружности по двум точкам (АВ, АС и СВ). Задать в свойствах цвет и заливку, получаем арбелос (рис. 2).

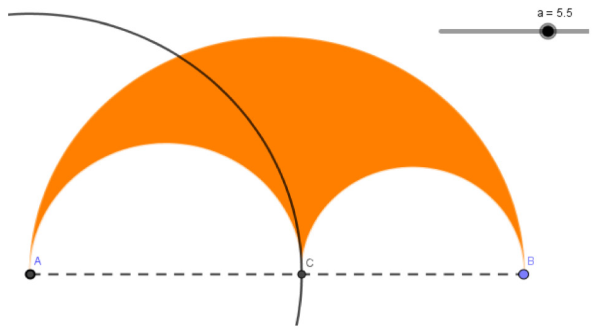


Рис. 2

Представим алгоритм построения модели, визуализирующей первое свойство: площадь радикального круга равна площади арбелоса [4].

Через точку C построим прямую, перпендикулярную к AB. Найдем точку пересечения перпендикуляра с дугой AB (точка D). Построим круг с диаметром CD (его называют радикальным). Площадь круга с диаметром CD равна площади арбелоса (рис. 3). Чтобы проверить это свойство в динамике, необходимо вывести на экран значения площадей арбелоса и построенного круга и нажать «Анимировать» ползунок *a*.

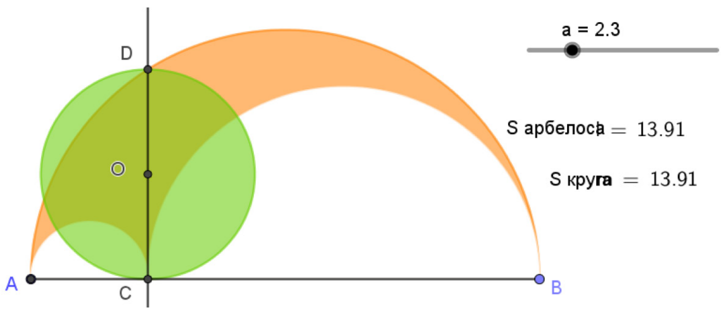


Рис. 3

Второе свойство (рис. 4): если прямая KS касается полуокружности AC в точке K и полуокружности CB в точке S, тогда отрезок KS является диаметром радикального круга [4].

Построим через точку C прямую, перпендикулярную к AB. Найдем точку пересечения перпендикуляра с дугой AB (точка D). Построим отрезки AD и BD, найдем точки пересечения этих отрезков с дугами AC и CB (точки K и S). Построим прямую KS. Прямая KS совпадает с касательной к дугам AC и CB. Построим радикальную окружность, убедимся, что при анимации ползунка отрезок KS является ее диаметром.

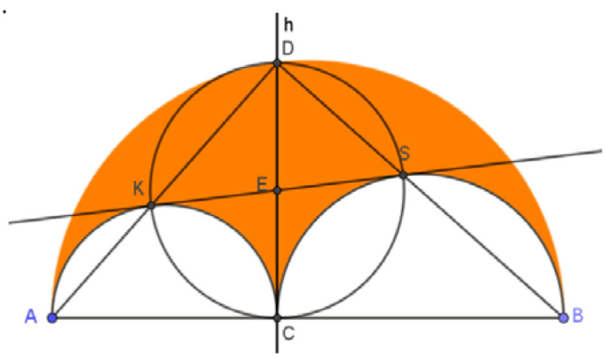


Рис. 4

Третье свойство (рис. 5): если отрезок AD пересекает полуокружность AC в точке A, отрезок DB пересекает полуокружность CB в точке E, тогда DECF является прямоугольником [4].

Построим через точку C прямую, перпендикулярную к AC. Найдем точку пересечения перпендикуляра с дугой AB (точка D). Построим отрезки AD и DB, найдем точки пересечения этих отрезков с дугами AC и CB (точки F и E). Построим отрезки FC и CE. FDEC является прямоугольником при анимации ползунка *a.* Когда точка C является серединой отрезка AB, то FDEC – квадрат.

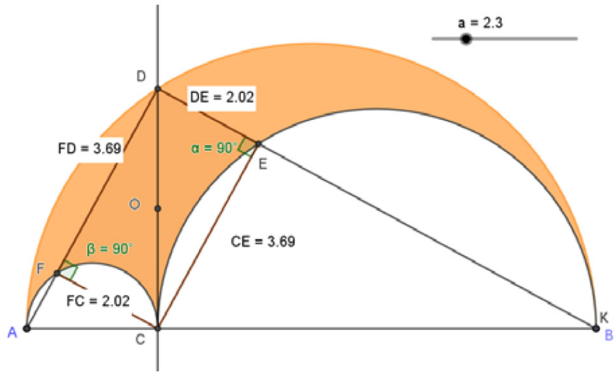


Рис. 5

Четвертое свойство: в арбелос можно вписать окружность [4].

Первый способ построения (рис. 6): найдем центры полуокружностей AC и CB (точки D и E). Построим через эти точки прямые, перпендикулярные к AB. Найдем точки пересечения перпендикуляров с дугами AC и CB (точки H и J). Построим отрезки AJ и BH, найдем точки пересечения этих отрезков с дугами AC и CB. Построим точку пересечения отрезков AJ и BH (точку L). Построим прямую CL. Найдем точку пересечения прямой CL с дугой AB. Через найденные три точки построим окружность с помощью инструмента «Окружность по трем точкам». Перемещая точку C по отрезку AB, построенная окружность остается вписанной в арбелос.

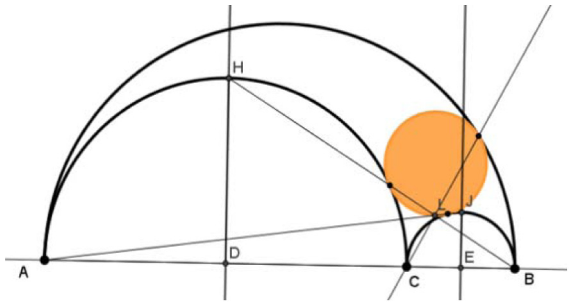


Рис. 6

Второй способ построения (с помощью инверсии): построим окружность с центром в точке B и радиусом AB (рис. 7). С помощью инструмента «Отражение относительно окружности» построим прообраз дуги AC относительно этой окружности (получаем дугу DA). Через центр этой полуокружности точку E построим перпендикулярную прямую к DA. Построим окружность того же радиуса как дуга DA, которая ее касается. Найдем отображение этой окружности относительно основной окружности, получаем прообраз – вписанную в арбелос окружность, которая остается вписанной в арбелос при анимации ползунка *a.*

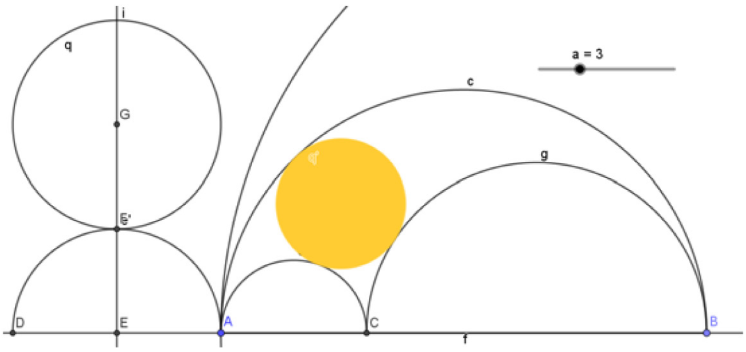


Рис. 7

Пятое свойство (рис. 8): точки, полученные в результате пересечения окружностей s_1 и s_2 с дугами арбелоса, лежат на окружности, вписанной в арбелос [1].

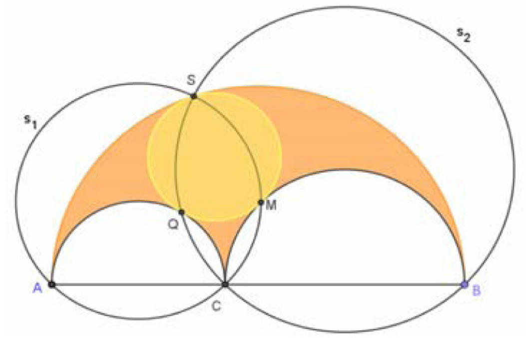


Рис. 8

С помощью серединных перпендикуляров к отрезкам AC и CB найдем середины дуг AC и CB (точки H и K). Построим окружность с центром в точке H и радиусом HA и окружность с центром в точке K и радиусом KB. Найдем точки пересечения этих окружностей с дугами BA и AC (точки Q и M) и между собой (точка S). Все три точки лежат на вписанной в арбелос окружности (рис. 9). В динамике это свойство сохраняется.

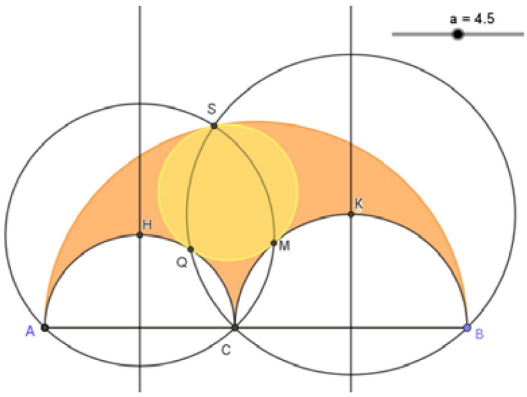


Рис. 9

Шестое свойство: окружность, вписанная в треугольник, который образован соединением центров боковых дуг и центра вписанной в арбелос окружности, называется окружностью Бэнкоффа [1].

Круг (окружность) Бэнкоффа, или триплетный круг Бэнкоффа, был впервые построен Леоном Бэнкоффом в 1974 г. Круг Бэнкоффа – это некий архимедов круг, который может быть построен в арбелосе [5].

Построим треугольник TVU (рис. 10), где T – центр полуокружности AC, V – центр вписанной в арбелос окружности, U – центр полуокружности CB. Окружность Бэнкоффа строим по трем точкам Q, M и C. При анимации модели эта окружность сохраняет свои свойства.

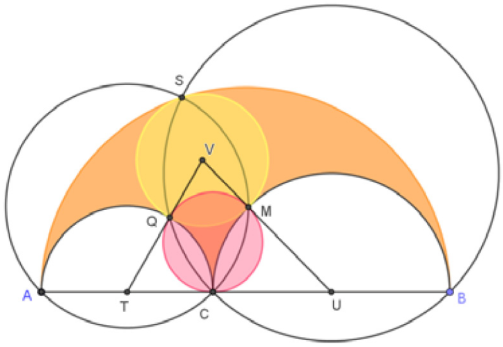


Рис. 10

Свойство семь (рис. 11): пусть d – диаметр вписанной в арбелос окружности, параллельный прямой AB, а DE – его проекция на AB, тогда прямоугольник между отрезками AC и CB – квадрат [1].

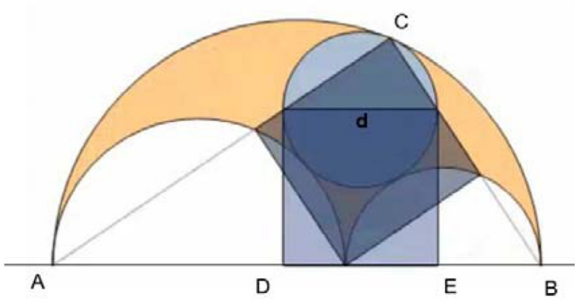


Рис. 11

Построим DE – диаметр вписанной в арбелос окружности, параллельный AB (рис. 12). Из точек D и E опустим перпендикуляры на AB, получим точки H и K. Построим квадрат HDEK. Построим прямые AD и BE, найдем точку их пересечения (точка S). AD пересекает дугу AC в точке M, BE пересекает дугу CB в точке N. Получаем MSNC – квадрат, который сохраняет свои свойства при анимации модели.

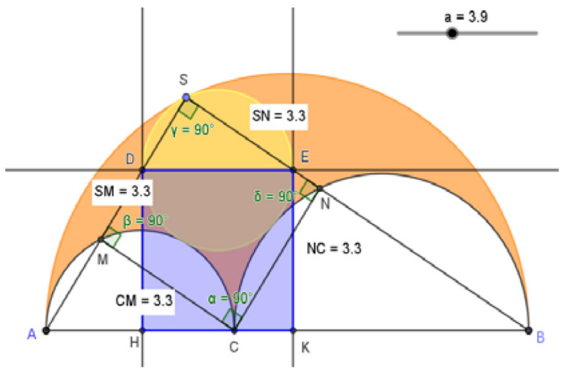


Рис. 12

Свойство 8 (рис. 13): из точки C восстановлен перпендикуляр к прямой AB, пересекающий окружность s в точке D. В два образовавшихся криволинейных треугольника вписаны окружности α и β: первая касается отрезка CD, полуокружности s_1 и дуги AD, вторая – отрезка CD, полуокружности s_2 и дуги BD. Круги α и β еще называют кругами-близнецами Архимеда, потому что они равны. Радиус этих кругов равен $\frac{ab}{a+b}$, где a – радиус дуги AC, b – радиус CB [4].

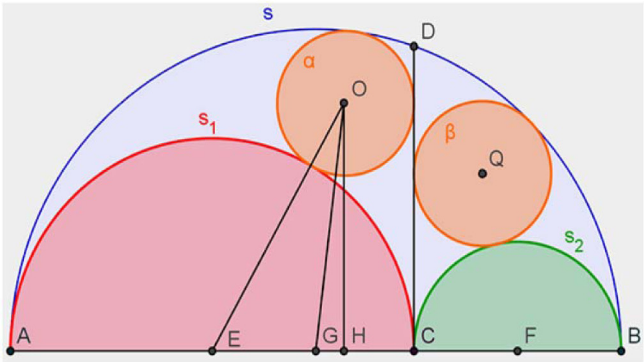


Рис. 13

Для построения модели нам нужно знать длину отрезков OE и CH. Если r – это радиус искомого круга, a – радиус дуги AC, b – радиус CB, то OE = $a+r$, HC = r.

Построение (рис. 14): найдем центр искомого круга, как точку пересечения окружности с центром в точке E и радиусом $a+r$ и перпендикуляра, проведенного через точку H к AB (точка O). Построим через точку O прямую, параллельную AB. Найдем точку S. Один круг готов.

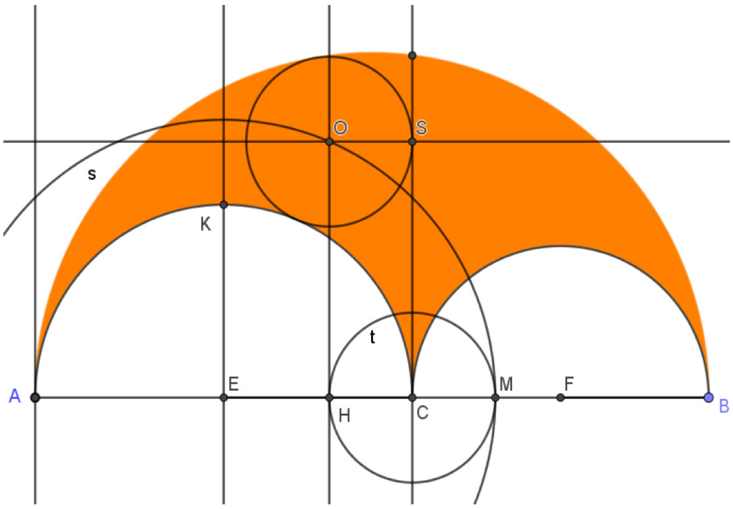


Рис. 14

Аналогично построим второй круг (рис. 15): найдем центр искомого круга, как точку пересечения окружности с центром в точке F и радиусом $b+r$ и перпендикуляра, проведенного через точку M к AB (точка Q). Построим через точку Q прямую, параллельную AB. Найдем точку U. Построим окружность с центром в точке Q и радиусом QU. Близнецы Архимеда готовы.

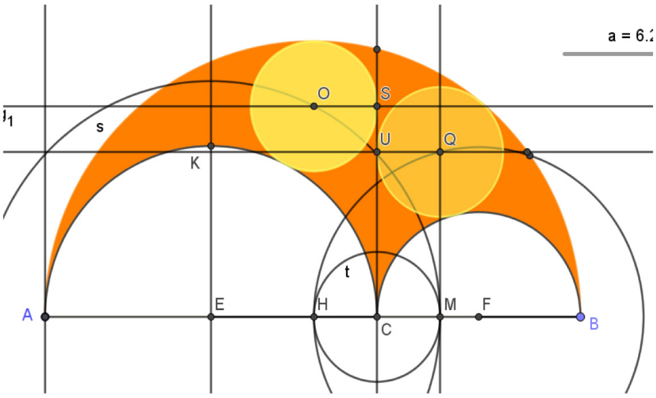


Рис. 15

Свойство 9 (рис. 16). Задача Паппа Александрийского. В восьмом утверждении «Лемм» Архимед упоминает цепочку кругов, которые формально ввел Папп Александрийский. Он рассматривал цепочку кругов, вписанных в арбелос, и доказал, что расстояние от центра n-го круга до прямой BC равно произведению диаметра этого круга на n, то есть $h_n = nd_n$ (например, $O_2L_2 = 2 \cdot d_2$, где d_2 – диаметр круга с центром O_2) [3].

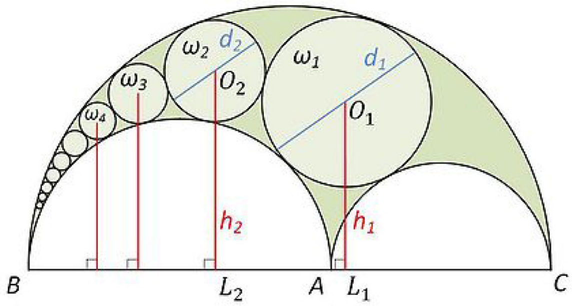


Рис. 16

Для построения динамической модели нам нужно использовать инструмент «Отражение относительно окружности» (рис. 17). Построим окружность инверсии (окружность с центром в точке B и радиусом AB). Построим прообраз дуги AC относительно этой окружности (дуга с центром в точке H и радиусом HP). Построим вверх от прямой AB несколько окружностей с радиусом, равным HP так, чтобы они касались друг друга. Найдем прообразы этих окружностей относительно окружности инверсии, получаем цепь кругов Паппа Александрийского.

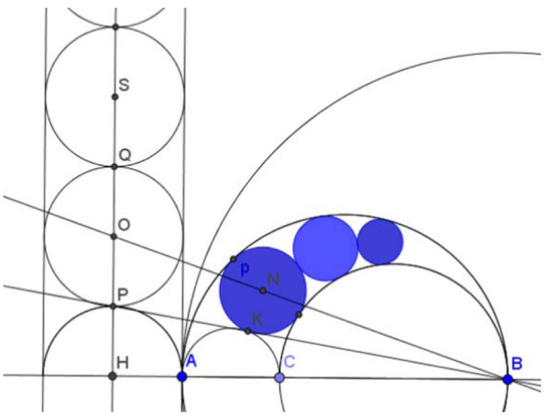


Рис. 17

Аналогично выполним построения цепи кругов Паппа Александрийского в левой части арбелоса, используя инверсию (рис. 18).

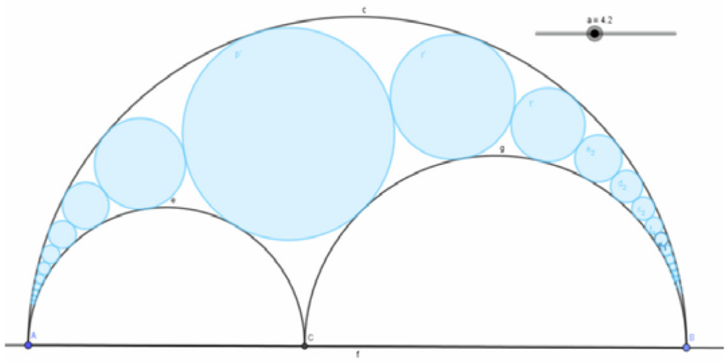


Рис. 18

Все динамические модели размещены в ресурсах аккаунта в GeoGebra.org в свободном доступе: https://www.geogebra.org/u/zlatapestova и могут быть полезны учителям для показа удивительных свойств арбелоса в динамике и школьникам, которые хотят построить новые модели.

Библиографический список

1. Хайме Рангель-Мондрагон. Арбелос. Вписанная окружность, радикальный круг, радикальная ось, близнецы, обобщения и доказательства без слов // Журнал «MATHEMATICA». Т. 16 (Перевод статьи. URL: https://itnan.ru/post.php?c=1&p=257319)
2. Mortimer B. The Geometry of The Arbelos. Carleton University, 1998.
3. Жижилкин И.Д. Инверсия. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. 72 с.
4. Бычков Б. Арбелос Архимеда // Электронный журнал Математика. URL: https://elementy.ru/problems/127/Arbelos_Arkhimeda
5. Сайт компании Wolfram: https://demonstrations.wolfram.com/BankoffCircle

Резолюция X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании»

Конференция имела статус сателлитной конференции 29-го Международного конгресса математиков в Санкт-Петербурге и была посвящена 100-летию со дня рождения профессора Роберта Адольфовича Майера.

Заслушав и обсудив пленарные и секционные доклады, а также выступления на круглом столе, посвященном памяти профессора Р.А. Майера, участники конференции отмечают, что в настоящее время в большинстве университетов и в целом ряде школ страны при обучении математике успешно используются информационные технологии. Математические кафедры и кафедры информатики многих высших учебных заведений совместно с учителями, аспирантами и студентами ведут исследования и создают программные средства для применения их при обучении математике в школе и вузе. К сожалению, эти средства не всегда доходят до адресата, и далеко не все учителя и преподаватели, получившие доступ к ним, имеют возможность использовать эти средства по назначению.

В связи с отмеченным выше конференция считает целесообразным:

1. Создать сайт, представляющий собой коллекцию подготовленных коллективами различных вузов и школ программных средств, предназначенных для использования их при обучении математике, организовать постоянно действующий сетевой семинар преподавателей и учителей математики по обмену опытом в области применения информационных технологий в математическом образовании.

2. Использовать анимационные чертежи и картинки, созданные с помощью программных средств систем динамической математики, при обучении геометрии, алгебре и началам математического анализа с целью тренинга, устранения нежелательных вычислительных трудностей и визуализации математических объектов и понятий.

3. В практике преподавания математики в школе придерживаться исследовательского стиля обучения, активнее использовать информационные технологии, позволяющие включить компьютерный эксперимент как средство учебно-научного исследования, выдвижения гипотез, проверки утверждений, поиска решения.

4. Изучить вопрос об увековечивании памяти профессора Майера Роберта Адольфовича.

12.11.2021 Организационный комитет конференции

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНТИПОВА Ирина Августовна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Сибирский федеральный университет; e-mail: iantipova@sfu-kras.ru

БЕЗУМОВА Ольга Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: o.bezumova@narfu.ru

БЕЛИЧЕНКО Оксана Михайловна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва; e-mail: oksanabelichenko4@mail.ru

БОЧКАРЁВА Даниэла Владимировна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель, ГБПОУ НСО «НППК», г. Новосибирск; e-mail: danaloro13@gmail.com

БУШУЕВА Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: nbushueva@sfu-kras.ru

ВАНЮРИН Илья Андреевич – студент 2 курса, Технический университет в Брно, Чехия,
e-mail: ilya.vanyurin@icloud.com

ВЕБЕР Александра Викторовна – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: imfi18veberav@gmail.com

ВОХТОМИНА Ева Дмитриевна – студент, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова – САФУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: eva.vohtomina@yandex.ru

ГАНЖА Елена Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева, г. Красноярск; e-mail: eiganzha@mail.ru

ГАСАНОВА Айсун Рамил кызы – студент 5 курса, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: aysungs19@gmail.com

ГИМАТДИНОВА Галия Нурулловна – учитель математики, муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Средняя школа № 150 имени Героя Советского Союза В.С. Молокова», г. Красноярск; e-mail: frenchwomen_2014@mail.ru

ДЕМОНОВА Ирина Вадимовна – магистр 1 года обучения, Кубанский государственный университет; e-mail: rina.forg@gmail.com

ЕГОРУШКИН Олег Игоревич – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск. e-mail: olegegoruschkin@yandex.ru

ЖЕРЕБЦОВА Анастасия Федоровна – студент, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: stenka97@mail.ru

КАСЬЯНОВА Елена Васильевна – доцент кафедры прикладной математики, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнёва, г.Красноярск; e-mail: space201@inbox.ru

КЕЙВ Мария Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mkejv@yandex.ru

КЛЕШКОВА Екатерина Андреевна – аспирант кафедры теории функций, Сибирский федеральный университет; e-mail: ekleshkova@gmail.com

КОЛБАСИНА Ирина Валерьевна – старший преподаватель, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск; e-mail: kabaskina@yandex.ru

КОЛМАКОВА Наталья Робертовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики 2, Сибирский федеральный университет; e-mail: kolmakovanr@yandex.ru

ЛАРИН Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: larin_serg@mail.ru

ЛЫТКИНА Лидия Ивановна – доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск; e-mail: lytkina@yandex.ru

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАЙЕР Ромуальд Робертович – инженер-программист кафедры математики и методики обучения математике, ИМФИ КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mayro1765@mail.ru

МАЙЕР Софья Валерьевна – ученица 11 класса, гимназия № 14, г. Красноярск;
e-mail: sofamajer3574@gmail.com

МАРТЫНОВ Василий Васильевич – студент 31 группы, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: Vasya007.1997@yandex.ru

МАТЮШКИН Дмитрий Романович – студент 2 курса бакалавриата, КГПУ им. В.П. Астафьева;
e-mail: dima.matyushkin2002@mail.ru

МИХАЛКИН Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mikhalkin@bk.ru

МЕЛЬНИКОВА Ирина Витальевна – кандидат технических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: mullar.iv@mail.ru

НИКУЛИНА Дарья Андреевна – магистрант 1 курса, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: dashanikulina1998@yandex.ru

ОВЧИННИКОВА Илона Владимировна – магистрант, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: blumenil@bk.ru

ОВЧИННИКОВА Раиса Петровна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: m.pavlova@narfu.ru

ПАРАЩУК Иван Александрович – аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: ivan-ia-95@mail.ru

ПЕСТОВА Злата Олеговна – учащаяся 8 «Б» класса, МБОУ ЭБЛ (Эколого-биологический лицей), г. Архангельск; e-mail: zlatapestova34@gmail.com

РЕПИН Роман Леонидович – студент, Кубанский государственный университет;
e-mail: romarepin23rus@gmail.com

РОЖКОВ Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет; e-mail: ros@math.kubsu.ru

САРЫГЛАР Сайдыс Васильевна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель Тувинского государственного университета; e-mail: ya.saydis@yandex.ru

САФОНОВ Константин Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, г. Красноярск; e-mail: safonovkv@rambler.ru

СВЕТАШЕВА Алёна Дмитриевна – магистр 1 года обучения, Кубанский государственный университет; e-mail: alena.kotenka@mail.ru

СЕНАШОВ Владимир Иванович – ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; e-mail: sen1112home@mail.ru

СОЗУТОВ Анатолий Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: sozutov_ai@mail.ru

СОМОВА Марина Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва; e-mail: somova.marina@mail.ru

ТРОИЦКАЯ Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: o.troitskaya@narfu.ru

ФИЛОНЦЕВА Екатерина Олеговна – магистрант, Кубанский государственный университет;
e-mail: filontseva99@mail.ru

ЦИХ Август Карлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск; e-mail: atsih@mail.ru

ШАБАНОВА Мария Валерьевна – доктор педагогических наук, профессор, заместитель начальника отдела МЦКО г. Москва, профессор кафедры САФУ им. М.В. Ломоносова г. Архангельск;
e-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

ШКЕРИНА Людмила Васильевна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой, КГПУ им. В.П. Астафьева, shkerina@mail.ru

ЯНЧЕНКО Михаил Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; e-mail: yanch1964@yandex.ru

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИКЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы X Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции,
посвященной 100-летию со дня рождения профессора
Майера Роберта Адольфовича

Конференция включена в план научно-образовательных мероприятий,
приуроченных к проведению 29-го Международного конгресса математиков
в Санкт-Петербурге

Красноярск, 11–12 ноября 2021 г.

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасаншина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 02.12.21.
Формат 60х84 1/8.
Усл. печ. л. 21,87