

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В. П. АСТАФЬЕВА»  
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики  
Кафедра физики и методики обучения физике

Половинкина Валерия Вячеславовна

### ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Разработка элективного курса для старших школьников «Особенности  
парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование  
Направленность (профиль) образовательной программы Физика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ



Заведующий кафедрой  
профессор, доктор педагогических наук  
В.И. Тесленко

17.06.21 В.И. Тесленко  
(дата, подпись)

Руководитель  
доцент, канд. физ.-мат. наук  
И.Н. Орлова

18.05.2021 И.Н. Орлова  
(дата, подпись)

Дата защиты 01.07.2021

Обучающийся Половинкина В.В.  
(фамилия инициалы)

19.05.2021 В.В. Половинкина  
(дата, подпись)

Оценка отлично  
(прописью)

Красноярск 2021

Согласие  
на размещение текста выпускной квалификационной работы,  
научного доклада об основных результатах подготовленной научно-  
квалификационной работы в ЭБС КГПУ им. В.П. АСТАФЬЕВА

Я, Тршовенкина Валерия Вячеславовна  
(фамилия, имя, отчество)

разрешаю КГПУ ИМ. В.П. Астафьева безвозмездно воспроизводить и размещать (доводить до всеобщего сведения) в полном объеме и по частям написанную мною в рамках выполнения основной профессиональной образовательной программы выпускную квалификационную работу, научный доклад об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (далее ВКР/НКР)

на тему: Разработка тематического курса для старших школьников "Объекты парциальной системы на примере  
(название работы) мужского - матеи. шабаны

(далее – работа) в ЭБС КГПУ им. В.П.АСТАФЬЕВА, расположенном по адресу <http://elib.kspu.ru>, таким образом, чтобы любое лицо могло получить доступ к ВКР/НКР из любого места и в любое время по собственному выбору, в течение всего срока действия исключительного права на работу.

Я подтверждаю, что работа написана мною лично, в соответствии с правилами академической этики и не нарушает интеллектуальных прав иных лиц.

22.06.21

дата

подпись

## СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа  
на наличие заимствований









Красноярский государственный  
педагогический университет им.  
В.П.Астафьева

### ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

**Автор работы:** Половинкина Валерия Вячеславовна  
**Самоцитирование**  
**рассчитано для:** Половинкина Валерия Вячеславовна  
**Название работы:** Разработка элективного курса для старших школьников «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»  
**Тип работы:** Выпускная квалификационная работа  
**Подразделение:** Институт математики, физики и информатики КГПУ им. В.П.Астафьева

### РЕЗУЛЬТАТЫ

■ ОТЧЕТ О ПРОВЕРКЕ КОРРЕКТИРОВАЛСЯ: НИЖЕ ПРЕДСТАВЛЕНЫ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ ДО КОРРЕКТИРОВКИ

ЗАИМСТВОВАНИЯ		18.87%	ЗАИМСТВОВАНИЯ		18.87%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ		68.41%	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ		68.41%
ЦИТИРОВАНИЯ		12.72%	ЦИТИРОВАНИЯ		12.72%
САМОЦИТИРОВАНИЯ		0%	САМОЦИТИРОВАНИЯ		0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 29.06.2021

ДАТА И ВРЕМЯ КОРРЕКТИРОВКИ: 29.06.2021 21:19

**Модули поиска:** ИПС Адилет; Библиография; Сводная коллекция ЭБС; Интернет Плюс; Сводная коллекция РГБ; Цитирование; Переводные заимствования (RuEn); Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu); Переводные заимствования по Интернету (EnRu); Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn); eLIBRARY.RU; СПС ГАРАНТ; Модуль поиска "КГПУ им. В.П. Астафьева"; Медицина; Диссертации НББ; Перефразирования по eLIBRARY.RU; Перефразирования по Интернету; Патенты СССР, РФ, СНГ; Шаблонные фразы; Кольцо вузов; Издательство Wiley; Переводные заимствования

**Работу проверил:** Орлова Ирина Николаевна

ФИО проверяющего

**Дата подписи:**

30.06.21



Подпись проверяющего



Чтобы убедиться  
в подлинности справки, используйте QR-код,  
который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование  
корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего.  
Предоставленная информация не подлежит использованию  
в коммерческих целях.

**ОТЗЫВ**  
**научного руководителя**  
**на выпускную квалификационную работу**

**Половинкиной Валерии Вячеславовны**

направление **44.03.01 Педагогическое образование**

направленность (профиль) образовательной программы: **Физика**

**«Разработка элективного курса для старших школьников «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»**

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы студент освоил следующие компетенции:

Формируемые компетенции	Продвинутый уровень сформированности компетенций	Базовый уровень сформированности компетенций	Пороговый уровень сформированности компетенций
ОК-1 Способен использовать основы философских и социогуманитарных знаний для формирования научного мировоззрения	+		
ОК-3 Способен использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	+		
ОК-4 Способен к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия		+	
ОК-6 Способен к самоорганизации и самообразованию	+		
ОК-10 Способен использовать основы экономических знаний в различных сферах жизнедеятельности	+		
ОПК-1 Готов сознавать социальную значимость своей профессии. Обладать мотивацией к осуществлению профессиональной деятельности	+		
ОПК-2 Способен осуществлять обучение, воспитание и развитие с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся	+		
ОПК-4 Готов к профессиональной деятельности в соответствии с нормативно-правовыми документами сферы образования	+		
ПК-1 Готов реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	+		
ПК-2 Способен использовать современные методы и технологии обучения и диагностики	+		
ПК-4 Способен использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	+		

ПК-7 Способен организовывать сотрудничество обучающихся, поддерживать их активность, инициативность и самостоятельность, развивать творческие способности	+		
ПК-11 Готов использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования	+		

В начале работы перед Половинкиной В.В. были поставлены две большие задачи. Во-первых, провести фундаментальное исследование – построить диаграмму степени перекачки энергии в пружинно-математическом маятнике в зависимости от соотношения частот и соотношения амплитуд парциальных мод. Во-вторых, на основе этого исследования разработать элективный курс для старших школьников для изучения сложного явления параметрического резонанса, всесторонне проанализировать с методической, нормативно-правовой сторон аспекты такой формы проведения занятий. С поставленными задачами Половинкина В.В. справилась в полном объеме. Полученные в процессе работы результаты имеют наряду с научной ценностью значение для внедрения в школах приоритетных на современном этапе фундаментальных и прикладных научных направлений, осуществления более тесного сотрудничества школ и высших учебных заведений, могут быть применены учителями физики для проведения учебных занятий в рамках часов для элективных курсов.

При выполнении выпускной квалификационной работы студент проявил себя как самостоятельный, активный, регулярно выполняющий задания исследователь. Валерией были подобраны ряд интересных примеров прикладного для техники характера, которые являются украшением этого курса. Безусловным достоинством работы считаю успешное участие Половинкиной В.В. с фундаментальной частью этой работы в акселерационной программе «Стажер-исследователь КГПУ», ее работа была сертифицирована.

В качестве недостатков работы Половинкиной В.В. отмечу в ряде элементов элективного курса неполноту методической проработки, которую считаю допустимой, учитывая первичность этого методического материала и существенную ограниченность по времени для его разработки.

Содержание, структура, оформление ВКР соответствует предъявляемым требованиям.

Считаю, что работа Половинкиной Валерии Вячеславовны может быть оценена на «отлично». Выпускная квалификационная работа рекомендуется к защите.

18.05.2021

Научный руководитель:



к.ф.-м.н, доцент кафедры физики  
и методики обучения физике Орлова И.Н.

## Оглавление

Введение.....	7
Глава 1. Теоретические аспекты парциальных систем .....	11
1.1 Понятие и сущность пружинно-математического маятника.....	11
1.2 Пружинно-математический маятник: математическая модель ...	15
Глава 2. Оригинальные результаты в области фундаментального исследования парциальных систем .....	24
Глава 3. Процесс разработки элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника».....	29
3.1 Нормативно-правовая база проведения элективного курса .....	29
3.2 Элективные курсы как часть учебного плана .....	30
3.3 Теоретические аспекты процесса разработки элективного курса	30
3.4 Содержание элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника».....	36
3.5 Методические материалы .....	40
Заключение .....	52
Список литературы .....	54
Приложения .....	57

## Введение

**Актуальность:** Сегодняшний день характеризуется постоянным ускорением темпа жизни, что возможно, в том числе, благодаря стремительному развитию наукоемких процессов. Наблюдаемый рост высокотехнологичных производств требует все большего числа кадров, способных работать в новых условиях. И речь в данном случае идет именно о высококвалифицированных кадрах, чьи навыки, умения и компетенции могли бы стойко отвечать техническим вызовам, которые ставит сегодняшние реалии.

Общеобразовательная школа, существующая сегодня в условиях крайне ограниченного количества часов, выделенных на ту или иную дисциплину, не способна по большей части подготовить будущих специалистов, что особенно заметно по курсу физики. Сегодня этот курс носит в первую очередь характер знакомства с базовыми физическими концепциями, что позитивно влияет на общий уровень образованности, но совершенно недостаточно для решения практических задач, понимания научных основ физических законов и, как следствие – недостаточно для подготовки будущих специалистов [22].

Выше обозначенная проблема решается по-разному: с помощью репетиторов, внешкольных кружков и секций, а так же через самостоятельную учебно-исследовательскую деятельность старших школьников, что напрямую способствует развитию необходимых для дальнейшего профильного развития специалиста компетенций.

Формирование учебно-исследовательских компетенций обучающихся возможно при учете их индивидуальных особенностей, стремлений и профессиональных интересов, что соответствует задачам профильного обучения. Именно такое обучение способно дифференцировать образовательный процесс, индивидуализировать его под конкретные задачи

обучения через изменение структуры, форм, методов и, конечно же, содержания [11].

Именно естественнонаучные дисциплины в образовательном плане в большей степени ориентированы на формирование учебно-исследовательских компетенций, так как имеют наибольшие возможности для поведения непосредственных исследовательских процессов, таких как лабораторные работы и эксперименты. Однако для повышения уровня физического образования необходим постоянный поиск новых, эффективных форм его реализации. И в первую очередь этому могут поспособствовать элективные курсы. Именно в рамках элективных курсов по физике возможна интеграция выходящего за пределы обязательной программы содержания в образовательный процесс, через повышение сложности содержания курса и метапредметных аспектов, включающих в себя смешные области научного знания.

Элективный курс для старших школьников «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника» – это как раз тот курс, который способствует подготовке будущих специалистов в области высоких технологий, необходимых обществу, через углубление содержания курса и сопутствующее развитие учебно-исследовательских компетенций.

**Проблема исследования:** каким должен быть элективный курс «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника» для старших школьников, формирующий их самостоятельную учебно-исследовательскую деятельность.

**Объект исследования:** пружинно-математический маятник как компонент системы профильного обучения по физике в школе.

**Предмет исследования:** аспекты перекачки энергии в системе и способы интеграции школьников в совместное научное исследование в рамках элективного курса.

Проблема, объект и предмет исследования определяют **цель исследования:** Изучение аспектов явления перекачки энергии в системе



«пружинно-математический маятник» и возможностей адаптации темы в научное исследование школьников.

В рамках достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Определить физическую величину, однозначно характеризующую степень перекачки энергии в системе, а также параметры, от которых она зависит

2. Разработать программный модуль для построения диаграммы степени перекачки энергии в системе

3. Рассмотреть возможность движения маятника с произвольно большими амплитудами

4. Исследовать систему на наличие детерминированного хаоса

5. Найти другие примеры парциальных колебательных систем, изучить их отношение к параметрическому возбуждению колебаний

6. Провести анализ научной и методической литературы по проблеме исследования;

7. Рассмотреть требования, принципы и формы организации элективного курса по физике;

8. Разработать программу элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»

9. Отобрать формы контроля эффективности элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»

**Методы исследования:** теоретические (изучение и анализ педагогической, психологической, методической и предметной литературы по теме исследования, анализ теоретических и эмпирических данных, изучение и обобщение педагогического опыта, сравнительный анализ, классификация); эмпирические (наблюдение, беседа, тестирование, педагогический эксперимент); методы математической статистики

(количественный и качественный анализ данных, графическое представление результатов).

**Апробация и внедрение результатов.** Материалы данного исследования были представлены на конференции «Молодежь и наука – 2021» (материалы включены в сборник) и в рамках программы «Стажер-исследователь».

**Структура выпускной квалификационной работы** определена логикой научного исследования. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложений.

# Глава 1. Теоретические аспекты парциальных систем

## 1.1 Понятие и сущность пружинно-математического маятника

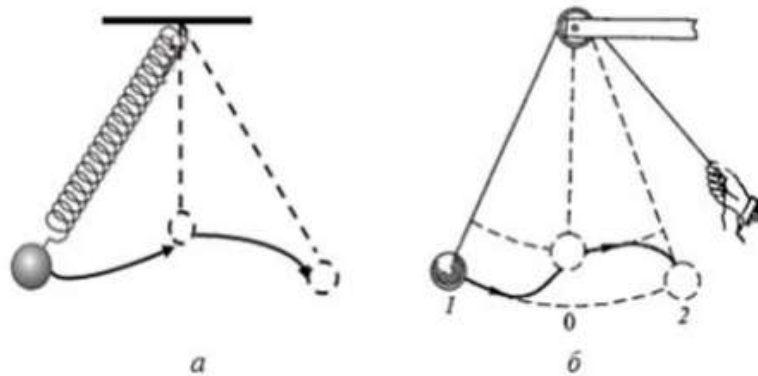
Знакомая многим по кабинету физики установка, представляющая собой груз, закрепленный на пружине, названная соответственно пружинным маятником. Если обратить более подробное внимание на колебания, выполняемые данной установкой (угловые и вертикальные), то поведение этой системы позволяет выявить закономерности, находящие свое отражение в рамках совершенно разных областей человеческой деятельности. К ним относятся вантовые конструкции, самолеты сверхзвуковых полетов и даже быстроходные корабли.

История постановки опыта с качающейся пружиной началась в 1931 г., когда была опубликована работа Э. Ферми с квантово-механическим объяснением эффекта расщепления линий в спектре комбинационного рассеяния на молекуле CO<sub>2</sub>. В том же году выдающийся советский физик Мандельштам Л. И. в лаборатории колебаний поделился впечатлениями об этой работе и высказал предположение, что эффект имеет не квантовую, а классическую природу [9]. По мнению Мандельштама Л. И., эффект обусловлен особенностями колебаний молекулы.

Мандельштам Л. И. предложил проверить это на простейшей модели качающегося пружинного маятника. Ученик Мандельштама Витт А. А. моментально рассчитал движение такой системы и показал, что при соотношении частот 2:1 должна наступать периодически полная перекачка энергии из вертикальных колебаний в горизонтальные и обратно [5]. Другой ученик Мандельштама, Горелик Г. С. подтвердил этот теоретический вывод.

Описанное явление можно легко понять, если провести аналогию между угловыми колебаниями качающейся пружины (рис. 1а) и параметрическим возбуждением колебаний математического маятника,

длину которого в нижнем положении немного укорачивают, а в крайних положениях немного увеличивают (рис. 1б). Из этой аналогии видно, что максимальная раскачка достигается в том случае, когда частота изменения параметра системы (длины нити) в два раза превышает собственную частоту колебаний системы. В связи с этим можно вспомнить колебания качелей. Для длительного поддержания их колебаний необходимо быстро приседать в момент наибольшего отклонения качелей от равновесного положения и также быстро вставать при прохождении нижнего положения.



**Рис. 1.** Аналогия между угловыми колебаниями качающейся пружины (а) и параметрическим возбуждением колебаний математического маятника (б)

Следует подчеркнуть, что в случае, изображенном на рис. 1а, в отличие от случая, представленного на рис. 1б, нет внешнего источника энергии. Поэтому нарастание угловых колебаний качающейся пружины сопровождаются затуханием вертикальных колебаний. Затем происходит обратное явление: раскачка вертикальных колебаний за счет убыли энергии угловых колебаний. Потом весь процесс начинается сначала и т. д. Повторяющаяся последовательная перекачка энергии от одних колебаний к другим происходит до тех пор, пока все колебания не затухнут из-за трения.

Результаты выполненных Виттом А. А. и Гореликом Г. С. исследований отражены в работе [4], которая оказала глубокое влияние на развитие физики колебаний и волн, прикладной физики и ряда инженерных дисциплин. В 1935 г. Горелик Г. С. идею параметрической связи применил к анализу взаимодействия между стоячими звуковыми волнами в

ограниченном объеме газа. Было показано, что наличие параметрической связи в системе может привести к умножению или делению частоты волн.

Проникновение идей теории нелинейных механических колебаний в нелинейную оптику обусловлено «интернациональной» сущностью теории колебаний, как выражался Мандельштам Л. И.. Колебания качающегося пружинного маятника имеют самое непосредственное отношение к динамике самолётов и кораблей. В 50-60-х гг. прошлого века были выявлены эффекты нарушения устойчивости и управляемости быстроходных кораблей и сверхзвуковых самолётов. Оказалось, что наиболее интенсивная раскачка боковых колебаний имеет место, когда колебания по углу атаки происходят с частотой вдвое большей частоты боковых колебаний [5].

В строительной механике важную роль играет видоизмененная модель качающегося пружинного маятника – модель гибкой нити. Гибкая нить – это своеобразная пружина, работающая только на растяжение. В типовой двумерной модели гибкая нить одновременно может совершать поперечные колебания в своей плоскости (аналог угловых колебаний качающейся с грузом пружины) и маятниковые колебания относительно хорды, соединяющей опорные закрепления (аналог вертикальных колебаний) [8]. При соотношении частот этих колебаний 1:2 происходит потеря динамической устойчивости, проявляющаяся в том, что возникают поперечные колебания нити, амплитуда которых может достигать весьма больших значений. Возможность возникновения таких явлений необходимо учитывать при расчете многообразных конструкций (висячие мосты, вантово-балочные системы, канатные дороги, линии электропередачи, различные космические тросовые системы для удержания объектов, гибкие шланги, разнообразные антенны и т.д.).

Рассматриваемая колебательная система обнаруживает весьма сложное поведение. Например, при отведении груза строго вертикально вниз, через некоторое время мы наблюдаем возникновение поперечных к вертикали движений маятника (качаний). Визуально, таким образом, система

обнаруживает некую неустойчивость к вертикальным колебаниям. На этом этапе возникает затруднение даже в определении этого явления: квалифицировать ли такое поведение как хаос или как что-то другое.

Понятно, что эта система представляет собой некоторую «смесь» двух простых систем: математического маятника и пружинного маятника, движение которых хорошо известно. В физике для описания таких суперпозиций возник термин: «парциальные системы», которое еще будет подробно рассмотрено в рамках данного исследования. Ясно, что сложная система в своем поведении должна будет проявлять характерные свойства как первой парциальной системы, так и второй. В значительной степени это относится, разумеется, к собственным частотам  $\omega_{0g}$  и  $\omega_{0k}$  подсистем.

На самом деле, эта система в научной литературе фигурирует так редко, что, как показал анализ источников, за ней еще не закрепилось никакого официального названия. А назвать ее просто пружинным маятником или грузом на пружине или математическим маятником нельзя, ибо все это – закрепившиеся термины, подразумевающие другие известные простые системы. Поэтому в рамках данного исследования предлагается другое название – «пружинно-математический маятник», - отражающее обе стороны этой системы.

Рассмотренное взаимодействие вертикальных и угловых колебаний качающегося пружинного маятника описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, и для их решения используются численные методы, о чем пойдет речь в следующем параграфе данного исследования. Сейчас этот опыт выполняют школьники, занимающиеся по индивидуальному плану, нацеленному на формирование у них исследовательских навыков, что соответствует логике работы.

## 1.2 Пружинно-математический маятник: математическая модель

Рассмотрим пружинный маятник, то есть груз, висящий на пружине, верхний конец которой закреплён (Рис.2). Мы будем считать, что движение происходит в одной определённой вертикальной плоскости. Принципиальная схема колебательной системы представлена на рисунке 3 (Рис.3).

Далее будут описаны действия, со следующими обозначениями:

$r$  - мгновенное значение длины пружины,

$l_0$  - недеформированная длина пружины,

$\varphi$  – малый угол отклонения,

$m$  - масса груза,

$k$  - постоянная упругости пружины,

$g$  - ускорение свободного падения.



Рис.2 Вид лабораторной установки

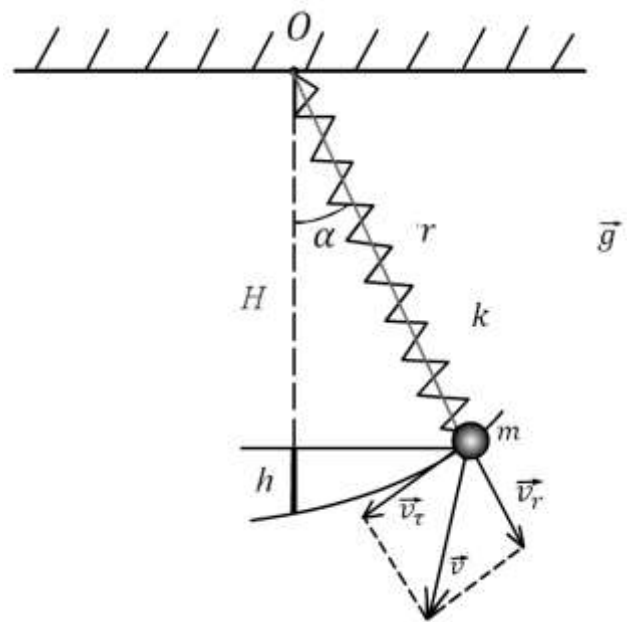


Рис.3 Принципиальная схема колебательной системы

Для кинетической и потенциальной энергии нашей системы мы имеем соответственно:

$$E_k = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Так как  $\dot{r}^2 = v_r^2$ ,  $r^2\dot{\varphi}^2 = v_t^2$ , тогда перепишем  $E_k$ :

$$E_k = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_t^2)$$

$$V = \frac{k\Delta x^2}{2} + mgh$$

Исходя из того, что математически

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),$$

то можем записать чему равно  $h$ :

$$h = r - r\cos\alpha = r(1 - \cos\alpha) = r \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Если  $\alpha \ll 1$ , то  $h = r \cdot 2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} = r \cdot \frac{\alpha^2}{2} = r \frac{d^2}{2}$

Это если потенциальная энергия, то нужно отсчитывать от несуществующего начального положения.

Если отсчитывать от точки крепления  $O$  (Рис.3), то :

$$V_g = A_{r \rightarrow 0} = -mgH = -mgr \cdot \cos\alpha = -mgr \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + 0 \cdot \alpha^2\right)$$

С учетом того, что  $\cos\alpha = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$$V_{т.о} \approx -mgr \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad \text{при } \alpha \ll 1$$

$$V = \frac{k}{2}(r - l_0)^2 - mgr \cdot \cos\alpha$$

Иначе

$$V_0 = -mgr \cdot \cos\alpha$$

Если ввести относительное удлинение по сравнению со статистической длиной

$$\eta = \frac{r - l}{l}$$

Если пружина висит вниз в состоянии покоя, то ее статистическая длина выражается таким образом:

$$k\Delta x = mg$$



$$k(l - l_0) = mg$$

$$l - l_0 = \frac{mg}{k}$$

$$l = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Отсюда для кинетической и потенциальной энергии системы имеем следующее соотношение, где точками обозначено дифференцирование по времени.:

$$\begin{cases} E_k = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \\ V = -mgr\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{k}{2}(r - l_0)^2 \end{cases}$$

где

$$r = r(\eta)$$

$$\eta = \frac{r - l}{l} = \frac{r}{l} - 1$$

$$l = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Соответственно

$$\frac{r}{l} = \eta + 1$$

Тогда нужно записать  $r$  в следующем виде

$$r = l(1 + \eta) = \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)(1 + \eta),$$

где  $\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) = const.$

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} = const(t)$$

Так как  $\varphi$  - независимая от  $\eta$  переменная, то

$$\dot{r} = l\dot{\eta}$$

$$r = l(1 + \eta), r \sim l.$$

Значит

$$\begin{aligned} r - l_0 &= l(1 + \eta) - l_0 = \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)(1 + \eta) - l_0 = l_0(1 + \eta) + \frac{mg}{k}(1 + \eta) - l_0 \\ &= l_0\eta + \frac{mg}{k}(1 + \eta) = r - l_0 \end{aligned}$$

$$T \equiv E_k = \frac{m}{2} [l^2 \dot{\eta}^2 + l^2(1 + 2\eta + \eta^2)\dot{\varphi}^2] = \frac{ml^2}{2} (\dot{\eta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\eta\dot{\varphi}^2 + \eta^2\dot{\varphi}^2)$$

Так как  $2\eta\dot{\varphi}^2$  3 порядка, то его запишем как есть, а так как  $\eta^2\dot{\varphi}^2$  4 порядка, то мы можем этим значением пренебречь, тогда

$$T \approx \frac{ml^2}{2} (\dot{\eta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\eta\dot{\varphi}^2) \quad (1)$$

$$V = \frac{k}{2} [l(1 + \eta) - l_0]^2 - mgl(1 + \eta) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right), \quad \text{где значение в}$$

квадратных скобках равняется  $(r - l_0)$ ,

$$\begin{aligned} V &= \frac{kl^2}{2} \left[1 + \eta - \frac{l_0}{l}\right]^2 - mgl(1 + \eta) + mgl(1 + \eta) \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \\ &= \frac{kl^2}{2} \left\{1 + \eta^2 + \left(\frac{l_0}{l}\right)^2 + 2\eta - 2\frac{l_0}{l} - \frac{2\eta l_0}{l}\right\} - mgl(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{kl^2}{2} \eta^2 = \frac{ml^2}{2} \cdot \frac{k}{m} \eta^2$$

$$\frac{kl^2}{2} \left\{1 + \left(\frac{l_0}{l}\right)^2 + 2\eta - 2\frac{l_0}{l} - \frac{2\eta l_0}{l}\right\} - mgl(1 + \eta) = 0$$

Лагранжевы уравнения движения:

1)  $L \equiv T - V$  - Лагранжиан (функция Лагранжа) является функцией обобщенных координат  $\varphi_i(s)$  и описывает эволюцию системы.

2) Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  - обобщенные импульсы, где  $q$  - обобщенные координаты

$F \equiv \frac{\partial L}{\partial q}$  - обобщенные силы

$\frac{dp}{dt} = F$  - обобщенный второй закон Ньютона.

Если принять:

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\eta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\eta\dot{\varphi}^2), \quad V = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{k}{m} \eta^2 + \frac{g}{l} \varphi^2 + \frac{g}{l} \varphi^2\right),$$

то находим уравнения Лагранжа:

$$g_i = (\varphi, \eta)$$

$$\dot{q}_i = (\dot{\varphi}, \dot{\eta})$$

$$L \equiv T - V = \dots$$

Путем математических преобразований рассчитываем чему равно  $\frac{\partial L}{\partial q_1}$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}, \frac{\partial L}{\partial q_2} \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{ml^2}{2} \cdot \frac{q}{l} \cdot [2\varphi + 2\eta\varphi] = \\ &= -\frac{ml^2}{2} \cdot \frac{q}{l} \cdot 2\varphi(1 + \eta) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(T) - \frac{\partial V}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\varphi} + 2\eta \cdot 2\dot{\varphi}) = \frac{ml^2}{2} \cdot 2\dot{\varphi}(1 + 2\eta) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{ml^2}{2} \cdot 2\dot{\varphi}^2 - \frac{ml^2}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot 2\eta - \frac{ml^2}{2} \cdot \frac{g}{l} \varphi^2 = \\ &= \frac{ml^2}{2} \left[ 2\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m} \cdot 2\eta - \frac{g}{l} \varphi^2 \right] = \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{\eta}} = \frac{ml^2}{2} 2\dot{\eta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}$$

Путем математических преобразований и используя (1) и (2) приходим к уравнению Лагранжа № 1 для  $q_1 = \varphi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{ml^2}{2} 2\dot{\varphi}(1 + 2\eta) \right] + \frac{ml^2}{2} \cdot \frac{q}{l} \cdot 2\varphi(1 + \eta) = 0$$

$$[\dot{\varphi}(1 + 2\eta)]'_t + \frac{q}{l} \varphi(1 + \eta) = 0$$

$$\ddot{\varphi}(1 + 2\eta) + \dot{\varphi} \cdot 2\dot{\eta} + \frac{q}{l} \varphi(1 + \eta) = 0$$

Компонуюем для удобства:

$$\ddot{\varphi} + \frac{q}{l}\varphi + \left(\frac{q}{l}\eta\varphi + 2\dot{\eta}\dot{\varphi} + 2\eta\ddot{\varphi}\right) = 0$$

Путем математических преобразований и используя (1) и (2) приходим к уравнению Лагранжа №2: ( $q_2 = \eta$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{ml^2}{2} \cdot 2\dot{\eta} \right] - \frac{ml^2}{2} \left[ 2\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m} 2\eta - \frac{q}{l} \varphi^2 \right] = 0$$

$$2\ddot{\eta} = 2 \left[ \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m} \eta - \frac{q}{l} \frac{1}{2} \varphi^2 \right] = 0$$

Или вновь komponуем в удобном виде:

$$\ddot{\eta} + \frac{k}{m} \eta + \left( \frac{1}{2} \frac{q}{l} \varphi^2 - \dot{\varphi}^2 \right) = 0$$

В итоге получаются следующие уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{q}{l}\varphi + \left(\frac{q}{l}\eta\varphi + 2\dot{\eta}\dot{\varphi} + 2\eta\ddot{\varphi}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\eta} + \frac{k}{m} \eta + \left(\frac{1}{2} \frac{q}{l} \varphi^2 - \dot{\varphi}^2\right) = 0, \quad (4)$$

где  $(\varphi, \eta)$  - две переменные,  $\left(\frac{1}{2} \frac{q}{l} \varphi^2 - \dot{\varphi}^2\right)$  и  $\left(\frac{q}{l}\eta\varphi + 2\dot{\eta}\dot{\varphi} + 2\eta\ddot{\varphi}\right)$  - добавки, которые объединяют уравнения.

Выделены уравнения движения парциальных систем. Наиболее интересным и сложным это движение будет, когда частоты этих парциальных систем равны или примерно равны или кратны друг другу.

Из вышесказанного можно отметить, что если  $\left(\frac{1}{2} \frac{q}{l} \varphi^2 - \dot{\varphi}^2\right)$  и  $\left(\frac{q}{l}\eta\varphi + 2\dot{\eta}\dot{\varphi} + 2\eta\ddot{\varphi}\right)$  будут равны нулю, то для пружинного маятника будет справедливо:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \frac{q}{l}\varphi = 0 \\ \ddot{\eta} + \frac{k}{m}\eta = 0 \end{cases}$$

$$\beta \equiv \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi = -\omega_{\text{од}}^2 \cdot \varphi$$

$$a_z \equiv \ddot{\eta} \equiv -\frac{k}{m} \eta = -\omega_{\text{ок}}^2 \eta,$$

где  $\dot{\varphi} = \omega$  - угловая скорость,  $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \beta$  - угловое ускорение, а  $z \equiv \eta$  – это относительное удлинение,  $\dot{\eta}$  – скорость ( $v_z$ ),  $\ddot{\eta}$  - ускорение ( $a_z$ )

Запишем относительное удлинение и преобразуем, затем распишем некоторые математические выкладки:

$$\eta = \frac{r-l}{l},$$

где  $l$  – статическая длина.

$$\dot{\eta} = \left(\frac{r}{l}\right)' = \frac{1}{l} \cdot \dot{r} = \frac{v_r}{l}$$

$$\ddot{\eta} = \frac{\dot{v}}{l} = \frac{a_r}{l}$$

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow d\varphi = \omega dt$$

$$\varphi(t + dt) = \varphi(t) + d\varphi$$

$$\varphi(t + dt) = \varphi(t) + \omega dt$$

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = \beta dt$$

$$\omega(t + dt) = \omega(t) + d\omega$$

$$\omega(t + dt) = \omega(t) + \beta dt$$

Спроецируем силы, которые действуют на маятник вдоль направления движения, то есть на касательную траекторию (90 градусов). Из математических соображений ясно, что второй угол тоже равен  $\varphi$ . Пишем, что

$$ma_x = -mgsin\varphi, \tag{5}$$

где  $a_x$ - это скорость изменения или вторая производная от  $x$ , то есть

$$\dot{v}_x = \ddot{x}.$$

Тогда перепишем

$$\ddot{x} = -gsin\varphi$$

Мы хотим выразить это все через угловые переменные. Запишем как связаны  $x$  и угол  $\varphi$ , то есть отношение дуги к радиусу:

$$\varphi \equiv \frac{s}{R} = \frac{x}{R}$$

Такая запись справедлива, когда колебания малы, то есть  $\varphi \ll 1$ , отсюда соответственно

$$s \approx x, \sin\varphi \approx \varphi. \quad (6)$$

Теперь можно выразить  $x$  через  $\varphi$ :

$$x = \varphi R, \quad (7)$$

$$\dot{x} = \dot{\varphi} R.$$

Затем подставим полученные выражения (6), (7) в формулу (5) и получим

$$\ddot{\varphi} R = -g\varphi,$$

то есть

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\varphi$$

Тогда уравнение движения линейного математического маятника для малых отклонений запишется так:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0 \quad (8)$$

Здесь как раз эта часть является частью уравнения ниже, где  $l$  статическая длина. Если пренебречь или выключить колебания на пружинке, то получается, что длина этого маятника это некая константа – статическая длина  $l$ . Уравнение движения математического маятника без значения в скобочках (3) (4) совпадает с беспечными малыми отклонениями, то есть это линейное уравнение движения математического маятника. Линейное означает, что сила здесь пропорциональна смещению  $F \sim x$ .

Возвращающая сила для малых отклонений это

$$F_{\text{возвр}} = mg\sin\varphi \approx mg\varphi \approx mg\frac{x}{R}$$

Эти записи сделаны для того, чтобы увидеть, что  $\ddot{\varphi} \equiv \beta$ .

Стоит также записать, что

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}$$

или

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Вот так меняется угловое ускорение в зависимости от  $\varphi$  для малых отклонений:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi$$

Или

соответственно

$$\beta = -\omega_0^2 \varphi$$

Для больших (любых) отклонений будет целесообразно спроецировать на касательную, не на  $x$ , а вдоль  $s$ :

$$ma_s = -mgsin\varphi$$

Так как  $a_s = \dot{v}_s = \ddot{s}$ , то

$$\dot{v}_s = -gsin\varphi,$$

$s$  – дуга, равная произведению  $\varphi R$ .

Тогда

$$\varphi \ddot{R} = -gsin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} sin\varphi$$

Так как  $\ddot{\varphi} \equiv \beta$ , то запишем

$$\beta = -\omega_0^2 sin\varphi$$

Вот так выглядит уравнение колебаний для математического маятника при как угодно больших отклонениях.

В рамках исследования по данной теме были получены оригинальные результаты, касающиеся изучения особенностей парциальных систем. Им посвящен следующий параграф данной работы.

## Глава 2. Оригинальные результаты в области фундаментального исследования парциальных систем

Настоящее исследование опирается на результаты предыдущего исследования научной группы [15], в котором путем моделирования было показано, что в системе наблюдается перекачка энергии при различных соотношениях частот и амплитуд парциальных мод. Именно эта работа показала актуальность дальнейших исследований, в-частности, расчета степени перекачки энергии, которое и было осуществлено в рамках настоящей ВКР.

В статье 2018 г. [17], посвященной изучаемой системе, описывается явление перекачки энергии при соотношении парциальных частот 1:2, и ничего не говорится об аналогичных свойствах при других соотношениях частот. Данный факт ставит сразу два ключевых вопроса:

- Как выглядит область вблизи соотношения частот 1:2, в которой наблюдается явление перекачки энергии?
- Как она зависит от соотношения амплитуд?

В рамках поиска ответов на указанные вопросы была поставлена исследовательская цель: построение диаграммы степени перекачки энергии в системе «пружинно-математический маятник».

Используемый для построения данной диаграммы алгоритм использует уравнения движения маятника в линейном приближении в рамках формализма Лагранжа:

$$L = T - V, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_{0g}^2 \varphi \left( \frac{1 + \eta}{1 + 2\eta} \right) + \frac{2\dot{\eta}\dot{\varphi}}{1 + 2\eta} = 0$$

$$\ddot{\eta} + \omega_{0k}^2 \eta + \left( \frac{1}{2} \omega_{0g}^2 \varphi^2 - \dot{\varphi}^2 \right) = 0$$

$$(\omega_{0g}^2 = \frac{g}{l}, \omega_{0k}^2 = \frac{k}{m})$$



Степень перекачки энергии рассчитывалась по следующим формулам. Если нет смещения положения равновесия (см. рис. 4, а; синий график — колебания пружины, а красный — раскачивание):

$$\text{deg } ree = \frac{Ampl_{\max}^2 - Ampl_{\min}^2}{Ampl_{\max}^2} = 1 - \left( \frac{Ampl_{\min}}{Ampl_{\max}} \right)^2$$

При смещенном положении равновесия, т.е. в общем случае:

$$A_0 = \frac{z_{\min} + Ampl_{\max}}{2}$$

Амплитуды относительно смещенного положения равновесия и степень перекачки энергии (рисунок 4, б):

$$a_{\max, \min} = Ampl_{\max, \min} - A_0$$

$$\text{deg } ree = 1 - \left( \frac{a_{\min}}{a_{\max}} \right)^2$$

Результатом работы этого приложения явилась диаграмма степени перекачки энергии, представленная на рисунке 5. Черный цвет соответствует 100% перекачиванию энергии из одной моды в другую, белый—0%. Как видно из этой диаграммы, в полном соответствии с другими работами это тематики, максимальная, 100%-я степень перекачки энергии между модами наблюдается при соотношении

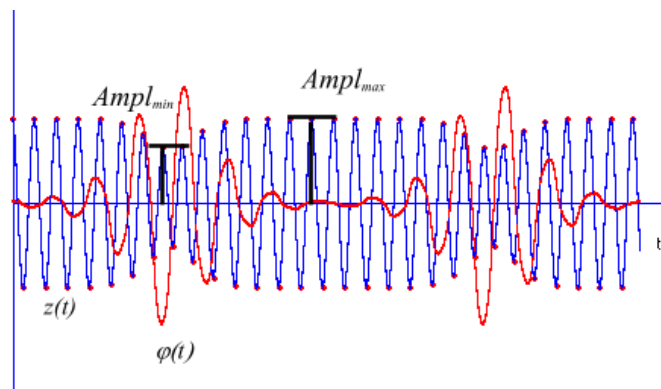


Рис. 4, а. Законы движения парциальных систем при соотношении частот 1:2.3 и начальных отклонениях  $\varphi_0=0,001$  и  $\eta=0,2$

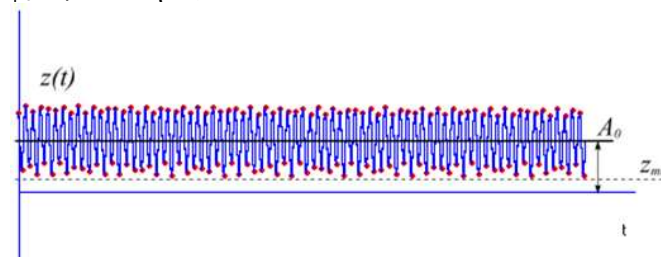


Рис. 4, б Колебания со смещенным положением равновесия пружинной подсистемы и принятые обозначения

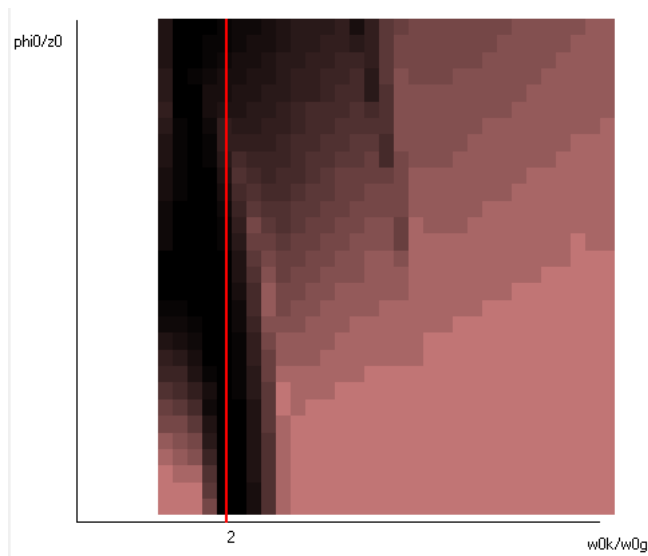
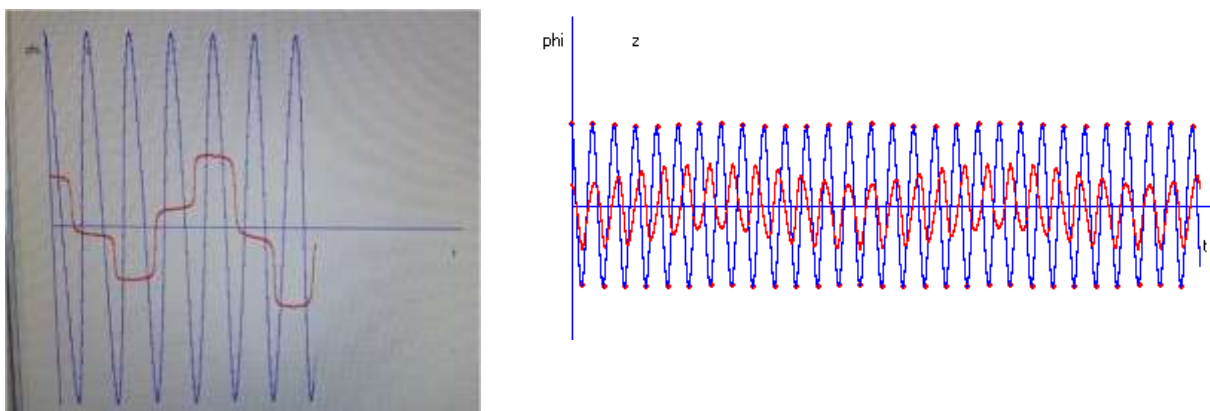


Рис. 5. Диаграмма степени перекачки энергии

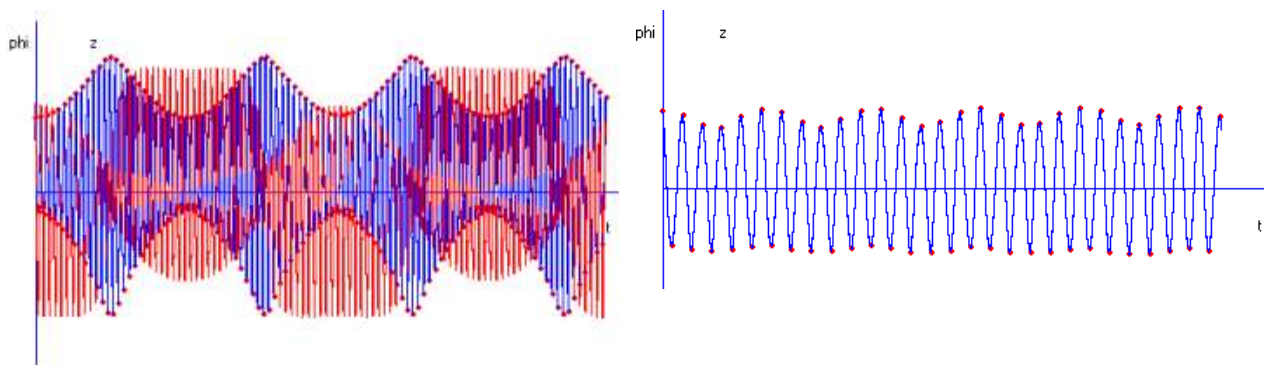
частот 2:1. Характер полученного распределения не дельтаобразный при этом соотношении, а плавный. То есть перекачка энергии в системе присутствует в системе и при других соотношениях частот, но в меньшей степени. Также видно, что степень перекачки зависит от соотношения амплитуд мод. Обращает на себя внимание проявление на диаграмме слабого второго максимума на удвоенной по отношению к первой частоте, то есть при соотношении частот примерно 4:1 (своего рода обертона). Также видно, что выбранная степень дискретизации области на диаграмме не позволяет судить однозначно о его наличии для небольших значений соотношения амплитуд, требуются дополнительные расчеты.

В процессе работы программы мы не раз наблюдали возникновение необычных законов движения, на рисунках б. а, б, показаны некоторые из них. Мы полагаем, что эти иллюстрации могут служить неплохим дидактическим материалом для обсуждения со школьниками в рамках элективного курса.



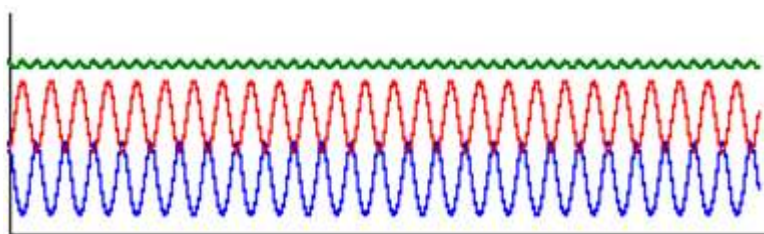
**Рис. 6, а, б.** Необычные законы движения

Еще одним интересным феноменом, пока не нашедшим своего объяснения, явилось обнаруженное нами отсутствие симметрии по отношению к растяжению-сжатию у пружины в задаче (для  $z > 0$ ,  $z < 0$ ). Соответствующие иллюстрации представлены на рисунке 7.



**Рис. 7, а, б.** Отсутствие симметрии у пружины по отношению к растяжению-сжатию

Корректность работы алгоритма отслеживалась по динамике энергий парциальных мод и полной энергии системы, иллюстрация приведена на рисунке 8.



**Рис. 8.** Пример динамики парциальных энергий и полной энергии системы (зеленым)

На рисунке 8 полная энергия (зеленым) остается почти постоянной, и это правильно, подтверждает корректность работы алгоритма. Однако так бывает далеко не во всех точках полученной диаграммы, рис. 5, и это свойство всех алгоритмов, не сохраняющих энергию, каким также является использованный в приложении алгоритм Верле.

В работе использовались следующие методы и методики:

- Разработка программных модулей для построения диаграммы (авторское приложение, язык Delphi);
- Моделирование динамики системы путем численного решения уравнений движения интеграционным алгоритмом Верле (2 порядка);
- Численный эксперимент;
- Анализ динамики парциальных энергий;

- Поиск оптимального с точки зрения сохранения энергии алгоритма Верле;
- Разработка алгоритма с различными  $dt$  (для достижения одинаковой точности на диаграмме);
- Составление и систематизация базы различных типов движения системы вблизи резонансных точек.

Данные результаты имеют высокий научный потенциал и интересны в ознакомлении при углубленном изучении физики в старшей школе, например, в рамках элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника», процессу разработки и апробации которого посвящена следующая глава настоящего исследования.

## **Глава 3. Процесс разработки элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»**

### **3.1 Нормативно-правовая база проведения элективного курса**

Профильное обучение является одним из основных направлений современной образовательной системы. Его цель – это личностное и профессиональное самоопределение. Для достижения данной цели могут применяться элективные курсы, которые зарекомендовали себя как эффективный способ предоставления учащимся дополнительных знаний в интересующей их области знаний.

Процесс реализации разработки и реализации элективных курсов школе регламентирован следующими нормативно-правовыми актами:

- Федеральный закон №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [21];
- Приказ Министерства образования РФ «Об утверждении федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования» [21];
- Письмо Министерства образования РФ «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования» [18];
- Концепцией профильного обучения на старшей ступени общего образования, утвержденной Приказом Министра образования № 2783 [13];
- Приказом Министерства образования РФ «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» [20];
- Локальными нормативными актами, организующими деятельность конкретного общеобразовательного учреждения (т.н. Положениями об

элективных курсах, структура и содержание которых немного варьируется от школы к школе, примеры таких Положений приведены в Приложении).

### **3.2 Элективные курсы как часть учебного плана**

Элективные курсы осуществляются в школе за счет времени, которое отводится на компонент образовательного учреждения. В связи с этим в примерных учебных планах предусмотрены часы в 10-11 классах на организацию учебных практик, проектов, исследовательской деятельности. При этом организация обучения в рамках элективного курса предполагает разделение класса, по крайней мере, на две группы. **Продолжительность** элективного курса составляет 17,34 или 51 учебных часов, а посещение является **обязательным** для всех учащихся, они включаются в расписание, берутся из общего лимита часов в неделю на учащегося, результаты прохождения элективного курса заносятся в документ об окончании школы.

### **3.3 Теоретические аспекты процесса разработки элективного курса**

#### **Назначение элективных курсов:**

1.они помогают учащимся определиться со специализацией и дальнейшим выбором своей профессии.

2.элективные курсы выполняют роль некоторого дополнения к базовому курсу, что позволяет углубить и расширить знания обучающегося в интересующем его направлении.

#### **Три основных вида элективных курсов [12]:**

- Предметные. Они расширяют знания по определенному школьному предмету;
- Межпредметные. Они объединяют знания по нескольким предметам;
- курсы по предметам, которые выходят за рамки школьного курса.

#### **Элективные курсы решают следующие задачи [11]:**

- удовлетворение образовательных потребностей учеников;

- реализация индивидуализации обучения;
- создание условий для проверки учащимся правильности выбора направления дальнейшего обучения, который связан с определенным видом профессиональной деятельности;
- помощь старшекласснику, который выбрал образовательную область для более детального изучения, увидеть многообразие видов деятельности, которые связаны с ней.
- развитие содержания базового курса физики, изучение которого в школе осуществляется на общем уровне, что позволяет поддерживать на профильном уровне или получать дополнительную подготовку для сдачи ЕГЭ;
- дополнение содержания профильного курса физики, выступают его надстройкой, что позволяет профильному курсу быть в полной мере углублённым;
- удовлетворение разнообразных познавательных интересов школьников, выходящих за рамки выбранного ими профиля, в различных сферах человеческой деятельности;
- развитие мышления, воспитание мировоззрения и ряда личностных качеств средствами углублённого изучения физики.

Необходимо также сказать, что ученики, изучающие определенный предмет в малой группе учащихся, всегда могут попросить учителя уделить больше внимание той теме, в которой у них возникли наибольшие трудности.

#### **Разновидности элективных курсов, решающие данные задачи:**

- Пробные: их можно сравнить с факультативными курсами, программы которых ориентированы на знакомство с видами деятельности, характерными для работы в той или иной деятельности;
- Ориентационные;
- Общекультурные;
- Углубляющие: на данных элективных курсах происходит углублённое рассмотрение вспомогательного раздела. [11]

## **2. По связи с предметом:**

- предметные;
- межпредметные;
- элективные курсы по предметам, выходящим за рамки школьной программы.

## **3. По содержанию:**

- элективные курсы продвинутого уровня, которые направлены на более детальное изучение математики;

- элективные спецкурсы повышенного уровня, которые направлены на детальное изучение некоторых тем основного курса физики, которые входят в обязательную программу изучения;

- элективные спецкурсы повышенного уровня, которые направлены на углубленное изучение отдельных тем основного курса физики, которые не входят в обязательную программу изучения;

- прикладные элективные курсы, которые направлены на знакомство обучающихся с важными способами и методами применения знаний и умений по математике на практике;

- элективные курсы, которые посвящены изучению методов и способов решения различных конкретных задач.

Таким образом, из приведённых типологий элективных курсов можно сделать вывод о том, что существуют элективные курсы:

- помогающие глубоко изучить предмет, входящий в базовый учебный план,
- помогающие показать межпредметные связи изучаемых предметов,
- помогающие изучить предметы, которые выходят за рамки школьной программы.

Элективный курс по физике представляет собой одну тему, которая рассмотрена более глубоко. Элективные курсы представляют так же огромные возможности для подготовки к городским и областным олимпиадам или к поступлению в вуз.



Таким образом, элективные курсы позволяют **развивать и формировать у учащихся:**

- культуру мышления,
- разносторонние интересы,
- умение самостоятельно восполнять знания,
- приобщают школьников к самостоятельной исследовательской работе,
- дают возможность познакомиться с некоторыми современными достижениями науки.

Помимо этого, они помогают раскрыться внутреннему потенциалу учеников, а также создают условия для их самореализации и развития. Элективные занятия дают шанс наиболее успешно применять индивидуальный подход к каждому школьнику, учитывая его способности, и более полно удовлетворить познавательные и жизненные интересы учащихся.

Введение элективных курсов в программу старшей школы, бесспорно, потребует разнообразия форм и методов обучения.

При выборе форм, методов и приёмов обучения на элективных курсах важно учитывать структуру и содержание курса, уровень развития и подготовки учащихся, их интерес к тем или иным разделам программы.

Одним из главных требований к формам и методам заключается в активизации мышления учащихся, развитии самостоятельности в различных формах её проявления.

Рассмотрим возможные **формы организации занятий элективного курса**. К ним относятся:

- лекции,
- беседы,
- дискуссии,
- групповые соревнования,
- игры,

- индивидуальные консультации,
- теоретические практикумы по решению задач,
- практическая и исследовательская работа в группах и индивидуально,
- дистанционное обучение
- создание проектов.

При этом дифференцированный подход к обучению учащихся осуществляется путем выбора задач и работ, содержащих различные уровни сложности.

В конце изучения каждой темы может быть проведено зачетное занятие в форме игры или мини-олимпиады. Контроль по изучению всего материала может быть осуществлен путем творческого задания по составлению задач и проверочные тесты.

Итогом освоения программы элективного курса может также являться представление личных достижений по пониманию содержания, индивидуальной творческой работы по выбору учащихся или работа в форме проектной деятельности, как каждым учащимся, так и группой учащихся. При этом может быть организован круглый стол – как презентация творческих работ, проектов и подведение итогов.

Рассмотрим отдельные требования и рекомендации, передерживание которых играет большую роль при разработке элективного курса.

В процессе разработки программы элективного курса **необходимо** [12]:

- выделить цель курса и его функцию в рамках выбранного профиля;
- выявить отличительные моменты, входящие в содержание элективного курса от содержания сообразного учебного предмета в рамках выбранного профиля;
- разбить содержание программы курса по темам и определить необходимое количество часов на каждую из них;
- продумать образовательные продукты, создаваемые в процессе освоения материалов курса;

- выявить обеспеченность курса различными учебно-методическими материалами и при необходимости доработать их;
- составить список литературы необходимый для учителя и обучающихся;
- выделить основные виды деятельности школьников и определить долю их самостоятельности, творчества ученика при изучении курса;
- определить критерии, с помощью которых можно оценить успешность освоения курса;
- продумать форму отчетности учащихся по итогам освоения программы курса (проект, реферат, выступление и т.д.).

#### **Содержание курса может:**

- представлять собой углубленный вариант определенного раздела базового курса (подобные курсы призваны помочь ученику подготовиться к ЕГЭ);
- служить основой для внутри профильной специализации обучения
- подобные курсы гарантируют профессиональное самоопределение и знакомят с основными принципами профессиональной деятельности;
- служить удовлетворением познавательных интересов школьников в сферах, выходящих за рамки выбранного им профиля;
- выполнять роль «надстройки», приобщать материал к содержанию профильного курса. Такой дополнительный курс становится углубленным, а класс, в котором он изучается, превращается в класс с более глубоким и детальным изучением отдельных дисциплин.

В зависимости от профилизации обучения, учитывая индивидуальные особенности обучаемых, выбираются методы и формы обучения на элективных курсах. Так, чаще выделяются **следующие преимущества** методики преподавания элективных курсов:

- обучение на основе опыта и сотрудничества;
- интерактивность (работа в малых группах, метод проектов и др.);
- личностно-деятельностный подход в обучении [12].

Выделяют следующие **основные требования** к элективным курсам:

- избыточность (их должно быть много);
- оригинальность содержания и названия;
- результативность (курс должен иметь логическое заключение, например, творческое сочинение, проект и т.д.) и др.

В рамках данного исследования, попробуем объединить вышеназванные компоненты в рамках элективного курса по физике для старших школьников «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»

### **3.4 Содержание элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника»**

Предлагаемый элективный курс поддерживает и углубляет базовые знания по физике. Он предназначен для учащихся старших классов общеобразовательных школ, школ естественно-научного (физико-математического) профиля общеобразовательной школы. Изучение курса поможет проверить целесообразность выбора профиля обучения.

Курс опирается на знания и умения, полученные учащимися при изучении физики. В процессе занятий предполагается приобретение учащимися опыта поиска информации по предполагаемым вопросам. Учащиеся совершенствуют умения подготовки рефератов, исследовательских работ, сообщений, презентаций по изучаемым вопросам. Используются различные формы занятий: компьютерные технологии, семинары, лабораторные работы и др.

Содержание курса рассчитано на 34 часа. Подведение итогов изучения разделов предусмотрено в виде семинаров. Работы по физическому практикуму оформляются в виде презентаций с помощью Power Point. На

семинарах также заслушиваются рефераты, доклады и исследовательские работы.

**Цель курса:**

Развитие познавательной активности и самостоятельности, установки на продолжение образования. Расширение и углубление предметных знаний по физике.

**Задачи курса:**

1. Развитие мышления учащихся, формирование у них умений самостоятельно приобретать и применять знания, наблюдать и объяснять физические явления

2. Формирование познавательного интереса к физике и технике, развитие творческих способностей, подготовка к продолжению образования и сознательного выбора профессии

3. Приобретение общих представлений о физике как фундаментальной науке, понимание ее роли в современной культуре и в процессе формирования мировоззрения

4. Приобретение учащимися знаний о научном познании, о месте эксперимента в нем, об истории развития физики, о научной деятельности ученых и биографии ученых.

5. Приобретении учащимися предметных умений, планирования изучения материала, самостоятельная работа с литературой, применять математические методы к решению задач.

6. Приобретение учащимися общеучебных умений: готовить сообщения и доклады, оформлять их, использовать технические средства обучения, участие в дискуссиях.

Содержание курса в общем виде представлено в учебно-тематическом плане (Таблица 1):

**Таблица 1. Учебно-тематический план**

Наименование темы	Количество часов		Форма проведения занятий
	Теория	Практика	
Кинематика гармонического движения	1		Фронтальная
Способы графического представления гармонического движения	1		Фронтальная, групповая
Динамика гармонического движения	1		Фронтальная, индивидуальная
Простейшие пружинные маятники	1		Фронтальная
Пружинно-математический маятник и его особенности	2	2	Фронтальная, групповая, индивидуальная
Затухающие колебания	1	1	Фронтальная, индивидуальная
Способы визуализации (представления, анализа) затухающих колебаний	1	1	Фронтальная, индивидуальная
Определение периода колебаний математического маятника. Независимость периода колебаний от длины подвеса и массы груза		2	Индивидуальная
Определение периода колебаний пружинного маятника на 2х пружинах: соединенных		2	Индивидуальная

<b>последовательно и параллельно</b>			
<b>Изучение колебаний шарика в желобе</b>		2	Индивидуальная
<b>Определение частоты колебаний шарика в желобе</b>			
<b>Некоторые особенности вынужденных колебаний</b>	1		Фронтальная,
<b>Явление резонанса</b>	1		Фронтальная
<b>Параметрические колебания</b>	2		Фронтальная, групповая
<b>Колебания нелинейных систем</b>	2		Фронтальная, групповая
<b>Свободные колебания системы с двумя степенями свободы</b>	2		Фронтальная, групповая
<b>Системы со многими степенями свободы</b>	1		Фронтальная, групповая
<b>Решение задач</b>		3	Индивидуальная
<b>Итоговый семинар по теме курса</b>		4	Групповая, индивидуальная
<b>Итого</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	

### **3.5 Методические материалы**

#### **1. Сформулированы формы отчетности по элективному курсу:**

Поскольку курс носит характер практикума, это диктует преимущественные формы аттестации – в первую очередь, это оформление отчета по практикуму в виде описания хода выполнения лабораторных работ с анализом наблюдаемых явлений. Для повышения личной заинтересованности и самостоятельности учащимся целесообразно выполнить также индивидуальное задание исследовательского плана (с поиском примеров парциальных систем, поиском научной литературы по этой системе, поиском примеров использования изученного явления в технике, быту, промышленности), которое должно быть защищено на одном из завершающих занятий в виде представления презентации исследования. Промежуточные формы контроля включают в себя оценивание объяснений домашних задач по теме возле доски, выполнение тестирования.

- Оформление отчета по практикуму
- Тестирование
- Выполнение и объяснение у доски задач по теме

#### **2. Критерии успешности освоения курса – как для модульно-рейтинговой системы:**

Деятельность разбивается на модули, по каждому учащийся получает баллы. По сумме набранных баллов определяется результативность прохождения курса.

#### **3. Создан примерный перечень вопросов и задач по теме**

Перечень включает 30 вопросов и 15 задач.

#### **4. Список лабораторных работ:**

1. Эксперименты с лабораторной установкой «Пружинно-математический маятник»
2. Перекачка энергии в пружинно-математическом маятнике (работа с готовым Lazarus -приложением)



## **Лабораторная работа 1.**

### **Эксперименты с лабораторной установкой «Пружинно-математический маятник»**

#### **Задания:**

1. Определите собственную частоту вертикальных колебаний пружины (отклонения должны быть малы). Для повышения точности сделайте несколько экспериментов, результаты заносите в таблицу 1. Вычислите среднее арифметическое.

2. Аналогично определите собственную частоту качаний грузика в вертикальной плоскости. Результаты заносите в таблицу 2. Вычислите среднее арифметическое.

3. Выясните, во сколько раз в этой установке отличаются друг от друга собственные частоты таких движений системы. Они называются парциальными.

4. Обратите внимание на следующий феномен: при попытке заставить пружину колебаться строго вертикально спустя некоторое время всегда возникает раскачивание маятника из стороны в сторону, то есть качания его по принципу математического маятника. При этом можно заметить, что сжатия и растяжения пружины при этом затухают до нуля. После этого события развиваются в обратном направлении: затухают качания из стороны в сторону и вновь развиваются вертикальные колебания пружины. Вы наблюдаете явление перекачки энергии из одной парциальной моды в другую (или биения).

5. Выясните, зависит ли скорость перекачки энергии от начальной амплитуды вертикальных колебаний пружины.

6. Проведите противоположный эксперимент: возникнет ли явление перекачки, если в начальный момент заставить систему колебаться в математической моде?

Таблица 1. Расчет собственной частоты вертикальных колебаний груза на пружине			
№	Время, с	Количество периодов, N	Период, с
1			
2			
..			
10			
Среднее по всем экспериментам:			$T_{cp} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\omega_{пруж} = 2\pi / T_{cp} = \underline{\hspace{2cm}}$

Таблица 2. Расчет собственной частоты качаний маятника в математической моде			
№	Время, с	Количество периодов, N	Период, с
1			
2			
..			
10			
Среднее по всем экспериментам:			$T_{cp} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\omega_{mat} = 2\pi / T_{cp} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\omega_{пруж} / \omega_{mat} = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Описание наблюдений:**

**Выводы:**

## Лабораторная работа 2.

### Перекачка энергии в пружинно-математическом маятнике (работа с готовым Lazarus -приложением)

#### Ход выполнения:

1. В предложенном приложении установите некоторое соотношение частот парциальных мод в окрестности 2:1.

2. По графикам законов движения мод определите степень перекачки энергии. Результаты занесите в таблицу 1.

3. Сделайте то же самое при других соотношениях частот.

4. Постройте график зависимости степени перекачки энергии от отношения частот мод при одном и том же соотношении их амплитуд (укажите, каком).

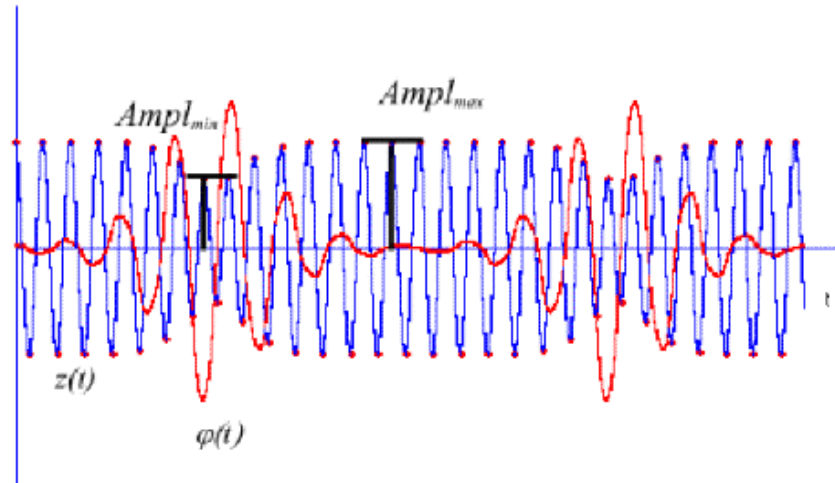
5. Зафиксируйте отношение частот на отметке, отличной от резонансного соотношения. Меняйте отношение амплитуд и измеряйте степень перекачки энергии. Результаты заносите в таблицу 2. Постройте график снятой зависимости.

6. Покажите на диаграмме степени перекачки энергии области, для которых вы выполнили расчет степени перекачки. Соответствуют ли ваши результаты данным предложенной готовой диаграммы?

7. Сделайте выводы

Таблица 1. Зависимость степени перекачки от соотношения частот мод при неизменном соотношении амплитуд	
Соотношение амплитуд выбрано на уровне:	
Соотношение частот мод	Степень перекачки (в долях от 1)
1	
2	
3	
...	
...	
10	

Степень перекачки энергии рассчитывают по следующим формулам.



Если нет смещения положения равновесия (см. рис.)

$$\text{deg } ree = \frac{Ampl_{\max}^2 - Ampl_{\min}^2}{Ampl_{\max}^2} = 1 - \left( \frac{Ampl_{\min}}{Ampl_{\max}} \right)^2$$

Смещенное положение равновесия: (среднее арифметическое):

$$A_0 = \frac{z_{\min} + Ampl_{\max}}{2}$$

Амплитуды относительно смещенного положения равновесия и степень перекачки энергии:

$$a_{\max, \min} = Ampl_{\max, \min} - A_0, \quad \text{deg } ree = 1 - \left( \frac{a_{\min}}{a_{\max}} \right)^2$$

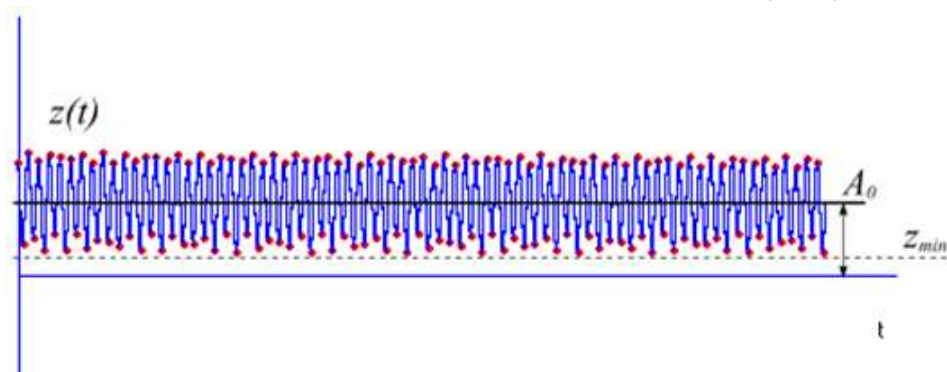
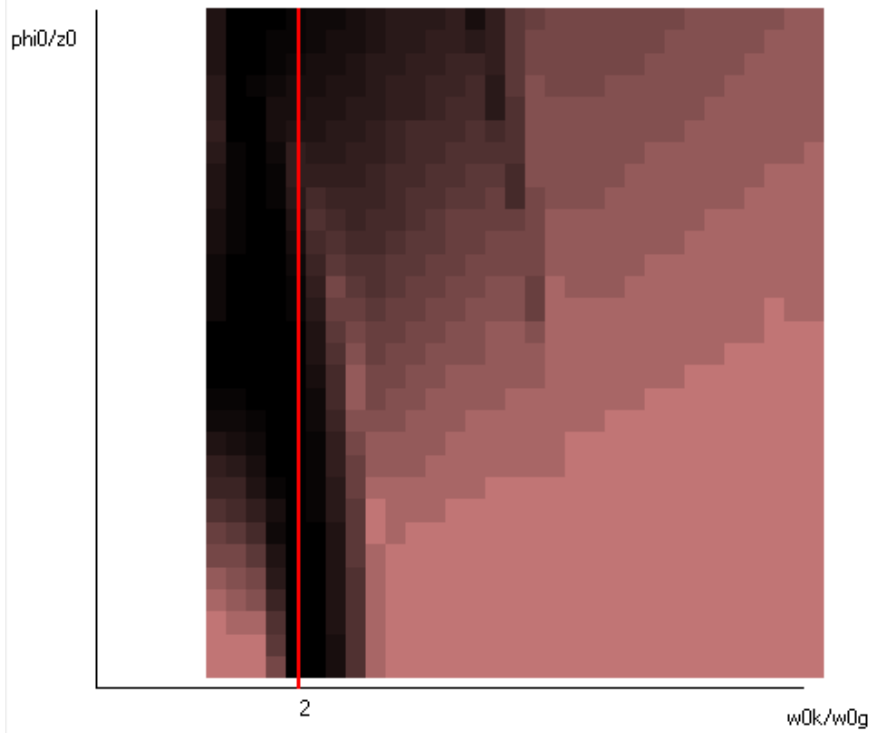


Таблица 2. Зависимость степени перекачки от соотношения амплитуд мод при неизменном соотношении частот мод	
Соотношение частот выбрано на уровне: _____	
Соотношение амплитуд мод	Степень перекачки (в долях от 1)
1	
2	
3	
...	
...	
10	

### ДИАГРАММА СТЕПЕНИ ПЕРЕКАЧКИ ЭНЕРГИИ



#### Выводы:

1) Степень перекачки энергии зависит от \_\_\_\_\_.

2) Максимальная степень перекачки, равная \_\_\_\_\_, наблюдается при соотношении частот \_\_\_\_\_, где в это число раз больше должна быть частота \_\_\_\_\_ моды.

### **Задание для мини групп:**

1. Найдите в интернете примеры того, как явление параметрического самовозбуждения колебаний возникает в технике, строительстве, быту и а) имеет паразитную функцию или б) используется во благо.

2. Осуществите библиографический поиск научных или научно-популярных статей на эту тему

3. Подберите или составьте самостоятельно примеры задач по теме и подготовьте их объяснение

4. Результаты исследования оформите в виде группового доклада-презентации

## Вопросы и задачи

1. На рисунке 1 представлена фазовая плоскость подсистемы математического маятника. По рисунку определите соотношение частот парциальных мод.

2. Самолет попадает в зону турбулентности и начинает испытывать носовую вибрацию. При каком соотношении собственных частот носовых и боковых колебаний самолета такая вибрация наиболее опасна (рис.2)?

3. Почему явление самовозбуждения парциальных мод относят к параметрическому резонансу?

4. Как называется колебательное движение, закон движения которого выглядит так, как на рисунок 3?

5. Поясните, как движется пружинно-математический маятник, когда его закон движения выглядит так, как на рисунке 4 и 5.

6. Как движется пружинная подсистема, если ее фазовая траектория имеет вид как на рисунке 6?

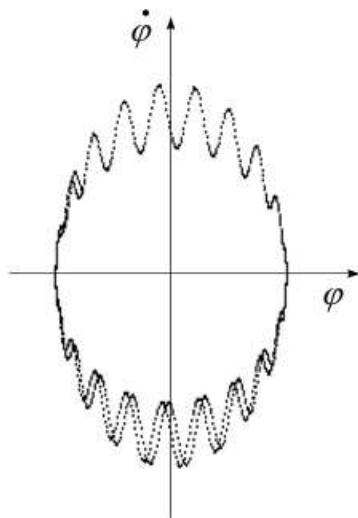


Рисунок 1

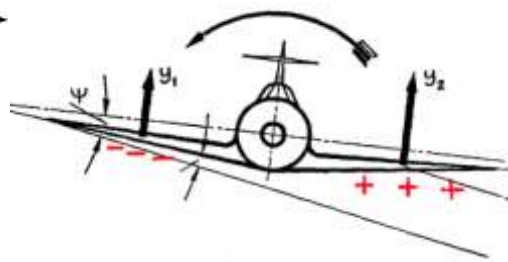
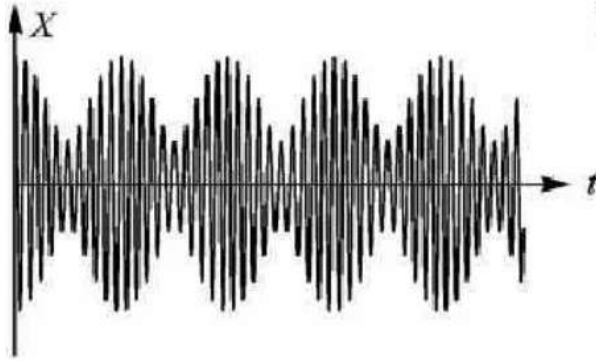
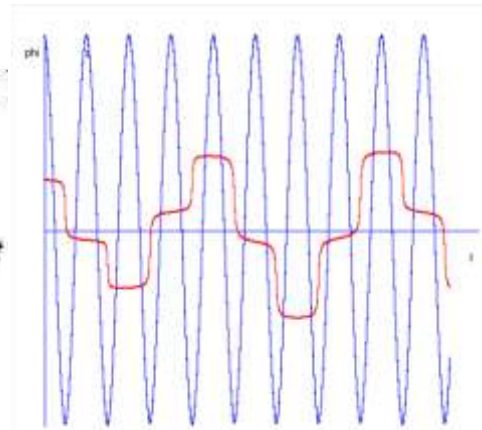


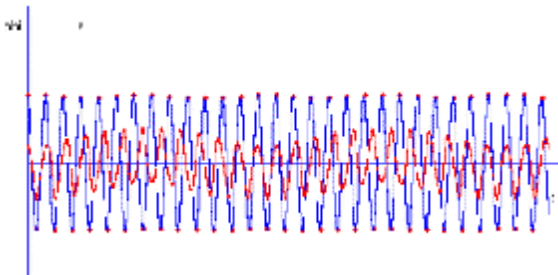
Рисунок 2



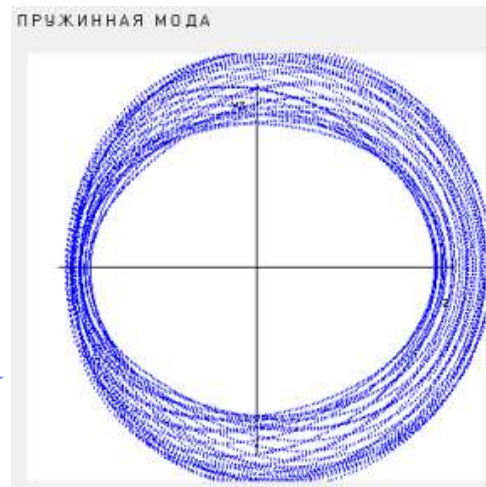
**Рисунок 3**



**Рисунок 4**



**Рисунок 5**



**Рисунок 6**

**Задача 7:**

Пусть на колеблющийся маятник массы  $M$  садится без толчка жук массы  $m$ , соизмеримой с массой маятника. Найдем влияние жука на режим колебаний. Это влияние существенно зависит от типа маятника и момента посадки.

Отсчет времени будем вести от момента посадки жука.

В случае математического маятника никаких изменений в характере колебаний не произойдет (мы предполагаем, что жук не меняет практически точечного характера массы системы), так как в этом случае масса не влияет на условия колебаний, а посадка без толчка автоматически обеспечивает



внесение в систему дополнительной энергии, необходимой для движения дополнительной массы.

Если маятник пружинный, горизонтальный (при этом сила тяжести не влияет на движение системы) это увеличение массы вызовет уменьшение первоначальной частоты.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \text{ до величины } = \sqrt{\frac{\kappa}{M + \mu}}$$

При посадке жука в момент наибольшего отклонения энергия системы не меняется, а поэтому не должна меняться амплитуда; в этом легко убедиться, приравнявая друг другу наибольшие значения потенциальной и кинетической энергии обоих маятников:

$$\frac{1}{2} \kappa X_m^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 X_m^2 = \frac{1}{2} (M + m) \omega_1^2 X_1^2 = \frac{1}{2} \kappa X_1^2$$

Если же жук садится в момент прохождения маятника через положение равновесия, то он вносит дополнительную кинетическую энергию.

Тогда

$$\frac{1}{2} M \omega^2 X_m^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 = \frac{1}{2} (M + m) \omega_1^2 X_1^2$$

Поэтому и амплитуда возрастет до величины

$$X_1 = X_m \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

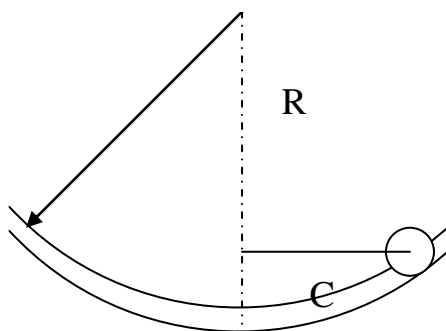
Посадка жука в промежуточные моменты даст меньшее возрастание амплитуды

Если маятник пружинно-математический, то этот случай можно дать учащимся для самостоятельного изучения и оформить в виде доклада, которые можно рассмотреть на уроке.

### **Задача 8:**

Найдем движение шарика массой  $m$  и радиуса  $r$ , катящегося без скольжения по желобу радиуса  $R+r$ , причем  $R \gg r$ . При подъеме на высоту  $h$  шарик приобретает потенциальную энергию:

$$W_p = mgh$$



**Рис.5. Иллюстративный материал к задаче**

Заменяв дугу хордой АВ, проведя ВС=а и построив треугольник с катетом

АВ и гипотенузой 2R, получим

$$a^2 = (2R-h)h \approx 2Rh$$

Поэтому

$$W_p = \frac{1}{2} mg \frac{a^2}{R}$$

а-амплитуда колебаний. Поэтому амплитуда скорости центра тяжести есть

$$V = \omega a = \Omega r$$

$\omega$  - частота колебаний шарика

$\Omega$ -угловая скорость вращения шарика вокруг мгновенной оси, проходящей через его центр тяжести. Кинетическая энергия шарика в самом низком положении равна вычисленной ранее потенциальной энергии:

$$W_k = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} I\Omega^2 = \frac{m}{2} a^2 \omega^2 + \frac{I}{2} \frac{a^2}{r^2} \omega^2 = \frac{7}{5} \frac{m}{2} a^2 \omega^2 = \frac{m}{2} g \frac{a^2}{R}$$

Следовательно, частота колебаний шарика равна

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7R}} = 0.84\omega_0$$

$\omega_0$ =частота колебаний маятника, который получится, если подвесить шарик на нити длиной R и убрать желоб

Данный элективный курс имеет высокий научный потенциал и отвечает задачам построения элективных курсов, отраженных в данной работе. Общие результаты исследования представлены в заключении исследования.

## Заключение

В ходе данного исследования были получены следующие теоретические и практические результаты:

1. Создан программный модуль для демонстрации степени перекачки энергии, определена величина, служащая мерой искомой степени и ее независимые переменные;

2. На основании полученной диаграммы установлено, что зависимость от аргументов не является дельтаобразной при соотношении частот мод 1:2, а является плавной, то есть перекачка энергии в различной степени наблюдается в широкой области параметров в окрестности отмеченного соотношения частот 1:2;

3. Установлено, что степень перекачки энергии зависит не только от соотношения частот мод, но и от начальных условий (от соотношения энергий);

4. На диаграмме отмечается слабый резонанс при удвоенной по отношению к первой частоте (1:4) («обертон»);

5. Разработан алгоритм с различными  $dt$ , позволяющий сохранять примерно одинаковую точность на всей диаграмме;

6. Обнаружено отсутствие симметрии свойств пружины по отношению к растяжению-сжатию ( $z > 0$ ,  $z < 0$ );

7. Получены интересные законы движения для использования с дидактической целью;

8. Определены направления дальнейших исследований системы (возможность детерминированного хаоса, расширение модели до трехмерной, произвольно большие амплитуды).

9. Рассмотрены и в дальнейшем применены все требования в области разработки элективных курсов для старших школьников;

10. Разработано содержание элективного курса «Особенности парциальных систем на примере пружинно-математического маятника».

Таким образом, все поставленные задачи выполнены, а цель исследования достигнута. Дальнейшая работа в рамках данного исследования может быть сосредоточена в двух основных направлениях – продолжение исследование особенностей парциальных систем со стороны физического содержания работы, и апробация разработанного элективного курса с методической стороны данного исследования.

## Список литературы

1. Алдошин Г. Т. Замечания к методу линеаризации нелинейных уравнений с двумя степенями свободы. В сб. «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе»/Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. – М.: МФЮФ, 2009. – 227 с.
2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики). – М.: Физический факультет МГУ, 2001. - 144 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – 2-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 1959. – 920с
4. Бендриков Г. А., Сидорова Г. А.. Александр Адольфович Витт / История и методология естественных наук. Вып. XXVI. Физика. Изд-во МГУ, 1981, с.150-168.
5. Витт А. А., Горелик Г. С. Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем. — «Журн. техн. физики», 1933, т. 3, № 2—3, с. 294— 307.
6. Витт А., Горелик Г.. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. Журнал технической физики, том 3, вып. 2-3, 1933 г.
7. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория не линейных колебаний и волн. - УФН, 1979, т.108, вып.4, с.579 – 624.
8. Горелик Г. С. Колебания и волны. – М.: Физматлит, 1959. – 572 с.
9. Горелик Г. С. Л. И. Мандельштам и учение о резонансе. — «Изв. АН СССР, сер.физическая», 1946, т. IX, № 1—2, с. 61—76.

10. Горелик Г. С. О параметрической связи между стоячими акустическими волнами в газах. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 8, вып. 8, с. 1436—1439.

11. Десненко С. И., Десненко М. А. Элективные курсы в системе методической подготовки будущего учителя физики в условиях реализации новых образовательных стандартов // Ученые записки ЗабГУ. Серия: Педагогические науки. 2018. №6.

12. Ермаков Д., Петрова Г. Элективные учебные курсы для профильного обучения [Текст] /Д. Ермаков, Г. Петрова // Народное образование . – 2004 . - № 2 . – С. 114-119

13. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования, утвержденной Приказом Министерства образования № 2783;

14. Коровин В.А. Программы элективных курсов. Физика. 9-11 кл. Профильное обучение [Текст] / В.А. Коровин. – М.: Дрофа, 2006.

15. Орлова И.Н., Мичурина Д.С. Физика пружинно-математического маятника. Современная физика в системе школьного и вузовского образования: материалы III Всероссийской научно-практической конференции. Красноярск, 22 мая 2020 г. ; Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2020. (ISBN 978-5-00102-449-1) с. 77. (7 ст)

16. Петров А.Г. О повороте видимой плоскости колебаний качающейся пружины при резонансе  $1 : 1 : 2$  // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 3. С. 18–30.

17. Петров А.Г., Вановский В.В. Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе  $1:1:2$ . Теория, эксперимент и физические аналогии. Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2018, т. 300, с. 168–175.

18. Письмо Министерства образования РФ «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования»;

19. Поляков М.О. О связи парциальных и собственных частот в линейных механических системах с двумя степенями свободы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. №3 (51).

20. Приказ Министерства образования РФ «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования»;

21. Приказ Министерства образования РФ «Об утверждении федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования»;

22. Тарасова Т. А., Немых О. А. Разработка элективного курса по физике для учащихся профильных классов // Kant. 2019. №4 (33).

23. Федеральный закон №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

24. Хохлов Р. В. О нелинейных волновых процессах. – УФН, 1965, т. 87, вып. 1, с. 17 – 21.

25. Хохлов Р. В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях. - «Радиотехника и электроника», 1961, № 7, с. 1116—1127.

26. Vanovskii V.V., Petrov A.G.. Spring analogy of non-linear oscillations of a bubble in a liquid at resonance Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Volume 81, Issue 4, 2017, Pages 305-316.



## Приложения

### Пример Положения об элективных курсах

ПРИНЯТО  
на заседании Педагогического совета  
МБОУ СОШ № 73  
протокол № 22 от «22» июня 2020 г.



УТВЕРЖДАЮ  
Директор МБОУ СОШ № 73  
Н.Г. Мелоян  
«22» июня 2020 г.

**Положение об элективных курсах, факультативных курсах,  
курсах по выбору в муниципальном бюджетном общеобразовательном  
учреждении муниципального образования город Краснодар  
средней общеобразовательной школе № 73  
имени Александра Васильевича Молчанова**

#### **1. Общие положения**

1.1. Настоящее положение разработано на основании Федерального закона Российской Федерации от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации" в соответствии с письмом министерства образования и науки Российской Федерации от 4 марта 2010 г. №03-413 «О методических рекомендациях по реализации элективных курсов».

1.2. Настоящее положение определяет статус, цели и задачи элективных курсов, факультативных курсов, курсов по выбору (далее – курсов) в МБОУ СОШ № 73 (далее - Школа)

1.3. Курсы реализуются в школе за счет части учебного плана, формируемой участниками образовательной организации.

1.4. Курсы нацелены на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого учащегося. Их деятельность даёт возможность обучающимся:

- дополнить, углубить свои знания по предмету;
- развивать умение самостоятельно приобретать, применять знания, наблюдать и объяснять природные и общественные явления;
- развивать творческие способности;
- подготовиться к продолжению образования и сознательному выбору профессии;
- сформировать разного рода компетенции

1.5. Школа принимает решение и несет ответственность за содержание и проведение курсов. Учебные программы курсов разрабатывается учителями, согласуются на заседании методического совета школы.

#### **2. Порядок формирования групп для организации занятий**

2.1. Занятия на факультативных учебных предметах, курсах, дисциплинах (модулях) (далее – занятия) не являются обязательными для обучающихся и организуются по тем предметам и направлениям, которые они выбрали из предложенного перечня в пределах максимально допустимой учебной нагрузки для данного класса.

- 2.2. Перечень занятий на каждый год формируется, исходя из пожеланий обучающихся, родителей (законных представителей), из реальных возможностей учебного плана, кадровых, материально-технических и финансовых возможностей школы.
- 2.3. Группы для проведения занятий, как правило, комплектуются из одного или параллельных классов и являются группами постоянного состава.
- 2.4. Число групп определяется в пределах общего количества часов на эти занятия, устанавливаемых в школе на основе действующего учебного плана.
- 2.5. Наполняемость групп (не более 15 человек) определяется в зависимости от специфики занятий, количества детей в классе (параллели).
- 2.6. Зачисление обучающихся в группы для проведения занятий производится учителем, ведущим занятие, утверждается руководителем учреждения.

### **3. Организация и порядок проведения**

- 3.1. Курсы могут иметь различный объем. Объем курсов может быть –17-34 часа в год в 9 классах и 34-68 часов в год в 10-11 классах. Курсы могут иметь продолжительность от одного года до двух лет.
- 3.2. Курсы могут реализовывать учебную программу, прошедшую экспертизу на муниципальном, региональном или федеральном уровнях.
- 3.3. Занятия проводятся во внеурочное время согласно расписанию, подготовленному заместителем директора по УВР.
- 3.4. Допускается проведение еженедельного занятия, один раз в две недели.
- 3.5. Допускается сменяемость занятий каждым обучающимся по выбору 1 раз в полугодие.
- 3.6. Занятия ведут учителя школы или приглашенные специалисты, имеющие подготовку в данной образовательной области.
- 3.7. Формы обучения на курсах могут быть как традиционными, так и ориентированными на инновационные педагогические технологии (коммуникативная, групповая, проектно-исследовательская и т. д.).
- 3.8. При проведении занятий используются различные формы, методы обучения и виды учебной деятельности обучающихся, например, лекции, семинары, практикумы, лабораторные занятия, экскурсии, проекты, рефераты, доклады и др.
- 3.9. Ежегодный набор курсов зависит от:
- образовательных запросов учащихся;
  - материальных, финансовых и кадровых возможностей школы

### **4. Документация**

- 4.1. Для занятий используются программы и учебники, утвержденные Министерством образования и науки РФ, а при их отсутствии разработанные учителями программы, рассмотренные на заседании педагогического совета, утвержденные приказом директора школы. В качестве учебной литературы используется познавательная литература.

4.2. Учитель регулярно заполняет электронный журнал, в котором отмечает дату и тему занятия, посещаемость обучающимися занятий.

## **5. Оценка качества работы**

5.1. Контроль эффективности проведения занятий осуществляется по следующим показателям:

- метод проведения занятий (лекции, беседы, решение задач, лабораторию – практические занятия и т. д.);
- формы занятий ( семинар, диспут и т.д.), их адекватность заявленному содержанию и эффективность;
- активность и самостоятельность учащихся в процессе занятий;
- посещаемость занятий;
- результаты участия в предметных конкурсах, олимпиадах, научно-практических конференциях, внеклассных мероприятиях.

## **7. Контроль за проведением факультативных занятий**

7.1. Контроль за проведением занятий осуществляет заместитель директора по учебно- воспитательной работе в соответствии с общешкольным планом работы через проверку журналов не реже 1 раза в четверть, через посещение занятий.

## Текст программного модуля

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Button1: TButton;
    PaintBox1: TPaintBox;
    PaintBox2: TPaintBox;
    Label1: TLabel;
    PaintBox3: TPaintBox;
    Button2: TButton;
    PaintBox4: TPaintBox;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    PaintBox5: TPaintBox;
    Label4: TLabel;
    Memo1: TMemo;
    PaintBox6: TPaintBox;
    Label5: TLabel;
    Memo2: TMemo;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure PaintBox5Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

const

  // dt=0.0001;
  N_dt=1e6; // взамен фиксированного dt лучше фиксированное число шагов на интервале просмотра:
            // поскольку при увеличении w период уменьшается и фиксированное dt оставляет все
            // большую часть от T
            // - расходимости
  pi=3.14;

  m=1; g=10;

  bkcolor=clWhite;      g_color=clred;      k_color=clblue;

  Ncol=17;

  col : array[1..Ncol] of
integer=(clAqua, clBlue, clDkGray, clFuchsia, clGray, clGreen, clLime, clLtGray, clMaroon, clNavy, clOlive,
clPurple,
                                clRed, clSilver, clTeal, clWhite, clYellow); //, clNone

  N_omega=30; N_ampl=30; // количество интервалов разбиения плоскости параметров для диаграммы
степени перекачки

var
  Form1 : TForm1;

  phi, w, beta, z, vz, az, t, r,
  vzs, Ampl, Ampl_max, Ampl_min,
  A0, a_min, a_max, z_min,
  x, y, xs, ys : real;
  mx1, my1, d_x1, d_y1,
  mx2, my2, d_x2, d_y2,
  mx3, my3, d_x3, d_y3,
  mx4, my4, d_x4, d_y4,
  mx5, my5, d_x5, d_y5,
  mx6, my6, d_x6, d_y6,
  x1, y1, x2, y2, N_T : integer;
  l, k, ws, wmax,
  omega0_g, omega0_k, T0_g, T0_k,
  z0, phi0, zmax, phi_max,
  min_E_k, E_k_0, degree,
  omega0_k_0, omega0_k_k, domega0_k,
```

```

phi0_0, phi0_k, dphi0, E_g, E_k, dt, tk : real;

Process_end, first_t          : boolean;
st : string;
col_ : array[1..Ncol] of integer;

implementation

{$R *.dfm}

procedure parameters;
begin
    // выбор отношения собственных частот мод // 4,10 интересно, 14,20
    omega0_g:=1;          omega0_k:=2.57; // стояло // при отличии собственных частот в 2
    паза возникает явление перекачки энергии // - так же как при параметрических
    колебаниях
    // выбор начальных отклонений
    z0:=0.3;          phi0:=0.001; // phi0:=pi/30;
end;

procedure granices;
begin
    // выбор максимальных значений отклонений (для линейной задачи должны оставаться малыми)
    phi_max:=pi/4;          zmax:=0.3; // относительное удлинение

    omega0_k_0 := 1.1;          omega0_k_k := 7;          domega0_k :=(omega0_k_k - omega0_k_0)/N_omega;
    phi0_0 := 0.01;          phi0_k := phi_max;          dphi0 := (phi0_k - phi0_0) / N_amp1;

    N_T:=30; // количество периодов математического или пружинного? выяснить маятника, сколько
    будем смотреть
end;

procedure constants;
begin
    ws:=2*omega0_g;          wmax:=2*ws;          wmax:=0.5*wmax; // константы задачи
    l:=g/sqr(omega0_g);          k:=m*sqr(omega0_k);
    T0_g:=2*pi/omega0_g;          T0_k:=2*pi/omega0_k;

    tk:=N_T*T0_k; dt:=tk/N_dt;
end;

procedure graph_const;
begin
    with form1.PaintBox1 do begin          mx1:=Width; my1:=height; d_x1:=round(mx1/15);
    d_y1:=round(my1/15); end;
    with form1.PaintBox2 do begin          mx2:=Width; my2:=height; d_x2:=round(mx2/15);
    d_y2:=round(my2/15); end;
    with form1.PaintBox3 do begin          mx3:=Width; my3:=height; d_x3:=round(mx3/15);
    d_y3:=round(my3/15); end;
    with form1.PaintBox4 do begin          mx4:=Width; my4:=height; d_x4:=round(mx4/15);
    d_y4:=round(my4/15); end;
    with form1.PaintBox5 do begin          mx5:=Width; my5:=height; d_x5:=round(mx5/10);
    d_y5:=round(my5/15); end;
    with form1.PaintBox6 do begin          mx6:=Width; my6:=height; d_x6:=round(mx6/10);
    d_y6:=round(my6/15); end;

    with form1.PaintBox5.canvas do begin          brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx5,my5));
    pen.color:=clblack;
    x1:=d_x5; y1:=round(my5-d_y5); x2:=mx5-d_x5; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
    textout(x2-10, y2+10, 'w0k/w0g');
    x1:=round(d_x5); y1:=my5-d_y5; x2:=x1; y2:=d_y5; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
    textout(2, y2+10, 'phi0/z0');
    end;

    with form1.PaintBox6.Canvas do begin          brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx6,my6));
    x1:=d_x6; y1:=round(my6-d_y6); x2:=mx6-d_x6; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
    textout(x2-10, y2+20, 't');
    x1:=round(d_x6); y1:=my6-d_y6; x2:=x1; y2:=d_y6; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
    textout(2, y2+10, 'E_k, E_g');
    end;
end;

procedure clear_graphics;
begin
    with form1.PaintBox1.Canvas do begin          brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx1,my1));
    pen.color:=clblack;
    x1:=d_x1; y1:=round(my1/2); x2:=mx1-d_x1; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
    textout(x2-10, y2+20, 'phi');
end;

```

```

        x1:=round(mx1/2); y1:=my1-d_y1; x2:=x1; y2:=d_y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-20, y2+10, 'w');
        end;
        with form1.PaintBox2.Canvas do begin brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx2,my2));
        x1:=d_x2; y1:=round(my2/2); x2:=mx2-d_x2; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-10, y2+20, 't');
        x1:=round(d_x2); y1:=my2-d_y2; x2:=x1; y2:=d_y2; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-20, y2+10, 'phi');
textout(x2+40, y2+10, 'z');
        end;
        with form1.PaintBox3.Canvas do begin brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx3,my3));
end;
        with form1.PaintBox4.Canvas do begin brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx4,my4));
pen.color:=clblack;
        x1:=d_x4; y1:=round(my4/2); x2:=mx4-d_x4; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-10, y2+20, 'z');
        x1:=round(mx4/2); y1:=my4-d_y4; x2:=x1; y2:=d_y4; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-20, y2+10, 'vz');
        end;
        with form1.PaintBox5.Canvas do begin
        x1:=round(d_x5 + 2/(omega0_k_k/omega0_g) * (mx5-2*d_x5)); x2:=x1; y1:=round(my5-d_y5);
y2:=round(d_y5);
pen.Color:=clred; brush.color:=clwhite; pen.width:=2; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x1, y1+5, '2');
        end;
        with form1.PaintBox6.Canvas do begin brush.Color:=bkcolor; fillrect(rect(0,0,mx6,my6));
pen.color:=clblack;
        x1:=d_x6; y1:=round(my6-d_y6); x2:=mx6-d_x6; y2:=y1; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-10, y2+20, 't');
        x1:=round(d_x6); y1:=my6-d_y6; x2:=x1; y2:=d_y6; polyline([point(x1,y1),point(x2,y2)]);
textout(x2-20, y2+10, 'E_g,');
textout(x2+40, y2+10, 'E_k');
        end;
end;

procedure first_config;
begin
phi:=phi0; w:=0; // phi:=0; w:=0;
z:=z0; vz:=0; // z:=0.1; vz:=0;
end;

(*procedure poincare_map;
begin
if i_dt=k*N_dt then begin k:=k+1;
with form1.paintbox3.canvas do begin
x1:=round(mx3/2+phi[1]*mas_phi);
y1:=round(my3/2+w[1]*mas_w);
pixels[x1,y1]:=clblack;
end;
end;
*)

procedure put_pixel_on_ph_diagr;
begin
with form1.PaintBox1.Canvas do begin
x1:=round(mx1/2+phi/(3*phi_max)*mx1/2); y1:=round(my1/2-w/(10*phi_max*omega0_g)*my1/2); //
для парциальной системы математического маятника (качаний)
pen.Color:=g_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1, y1+1);
end;
with form1.PaintBox4.Canvas do begin
x1:=round(mx4/2+z/(zmax)*mx4/2); y1:=round(my4/2-vz/(zmax*omega0_k)*my4/2); // для
парциальной системы пружинного маятника
pen.Color:=k_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1, y1+1);
end;
end;

procedure draw_x_t;
begin
with form1.paintbox2.Canvas do begin
x1:=round(d_x2+t/tk*(mx2-2*d_x2));
y1:=round(my2/2-phi/phi_max*(my2/2-d_y2)); pen.Color:=g_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1,
y1+1);
y1:=round(my2/2-z/(2.3*zmax)*(my2/2-d_y2)); pen.Color:=k_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1,
y1+1);
end;
end;

```

```

end;
with form1.paintbox6.Canvas do begin // энергии парциальных систем
  x1:=round(d_x6+t/tk*(mx6-2*d_x6));
  y1:=round(my6-d_y6-E_g/1500*(my6-2*d_y6)); pen.Color:=g_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1,
y1+1);
  y1:=round(my6-d_y6-E_k/1500*(my6-2*d_y6)); pen.Color:=k_color; ellipse(x1-1, y1-1,x1+1,
y1+1);
  y1:=round(my6-d_y6-(E_g+E_k)/1500*(my6-2*d_y6)); pen.Color:=clgreen; ellipse(x1-1, y1-
1,x1+1, y1+1);
end;
end;

procedure energy_of_partial_system;
var r_l0, V_g, V_k, K_g, K_k : real;
begin
  r:=1*(1+z); r_l0:=g*(1/sqr(omega0_g)*z+1/sqr(omega0_k));
  V_g:=-m*g*r*(1-sqr(phi)/2)+2*m*g*l; V_k:=k/2*sqr(r_l0); // потенциальные энергии подсистем
// +2mg1 добавлено чтобы избавиться
от отрицательности потенциальной энергии
  K_g:=m/2*sqr(r*w); K_k:=m/2*sqr(vz); // кинетические энергии подсистем
  E_g:=K_g+V_g; E_k:=K_k+V_k; // полные механические энергии
подсистем

  // str(K_g,st); form1.Memo2.Lines.Append(st);

  draw_x_t;

  if first_t then begin min_E_k:=E_k; E_k_0:=E_k; end;
  if E_k < min_E_k then min_E_k:=E_k; // ищем минимальное на всем интервале просмотра
значение энергии пружинной подсистемы
// - по ней определяем, какова степень перекачки -
какая доля DeltaE/E передается в подсистему
// математического маятника
end;

procedure draw_mayatnik;
begin
  xs:=x; ys:=y;
  x:=r*sin(phi); y:=r*cos(phi);
  with form1.paintbox3.canvas do begin x2:=round(mx3/2+0*(mx3/2)/1);
y2:=round(d_y3+0*(mx3/2)/1);
  x1:=round(mx3/2+xs*(mx3/2)/1);
  pen.color:=bkcolor; ellipse(x1-3, y1-3, x1+3, y1+3);
polyline([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]);
  x1:=round(mx3/2+x*(mx3/2)/1);
  pen.color:=clblack; ellipse(x1-3, y1-3, x1+3, y1+3);
polyline([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]);
end;
end;

procedure amplituda;
begin
  if {(z>0) and} (vz*vzs <= 0) then begin Ampl:=abs(z);
  if Ampl> Ampl_max then Ampl_max:=Ampl;
  if Ampl< Ampl_min then Ampl_min:=Ampl;
  if z<z_min then z_min:=z; // нижнее значение
z: может быть как <0, так и >0: нужно для определения смещенного положения равновесия
  with form1.PaintBox2.Canvas do begin
  x1:=round(d_x2+t/tk*(mx2-2*d_x2));
  pen.Color:=clred{k_color}; ellipse(x1-2, y1-
2,x1+2, y1+2);
  brush.Color:=clred;
floodfill(x1,y1,clred,fsborder);
end;
end;
end;

procedure motion;
begin
  first_config;
  t:=0; first_t:=true; Ampl_min:=1000; Ampl_max:=0; z_min:=1000;
  repeat
  // лучше всего сходится, когда сначала все - про одну моду, потом все - про другую
  vzs:=vz; // предыдущее значение скорости пружины - для определения амплитудных отклонений

```

```

    az := -sqr(omega0_k)*z - 1/2*sqr(omega0_g)*sqr(phi) + sqr(w); // полная энергия
системы идет вдоль той парциальной, чья группа команд здесь вычисляется первой
    vz := vz + az*dt;    z := z + vz*dt;

    beta := -sqr(omega0_g)*sin(phi) * (1+z)/(1+2*z) - 2*vz*w/(1+2*z); //для
нелинейных колебаний beta:=-sqr(omega0)*sin(phi)
    w := w + beta*dt;    phi := phi + w*dt;
    put_pixel_on_ph_diagr;    energy_of_partial_system;    amplituda; // draw_mayatnik;

    Application.ProcessMessages;
    t:=t+dt;    first_t:=false;
    until (t>tk) or (Process_end=true);
end;

procedure main;    begin    granices; parameters;    graph_const; clear_graphics; constants;
motion; end; //Вариант 2020 (with Мичурина Дарья): демонстрация перекачки энергии

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);    begin    Process_end:=false;    main;    end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);    begin    Process_end:=true;    end;

    procedure col_RGB;
        var ic : integer;
            R, G, B : byte;
        begin
            for ic:=1 to Ncol do begin                R:=round((1-sqrt(ic/Ncol))*255);
                                                        G:=round((1-sqrt(ic/Ncol))*155);
                                                        B:=round((1-sqrt(ic/Ncol))*155);
                                                        col_[ic]:=RGB(R, G, B );
            end;
        //col_[ic]:=RGB2Color(col_int);
        end;

    end;

    procedure put_on_degree_diagramm;
        var j : integer;
            d_degree : real;
        begin
            d_degree:=1/Ncol;
            with form1.paintbox5.Canvas do begin
                x1:=round(d_x5 + ( omega0_k / omega0_g) / (omega0_k_k/omega0_g) * (mx5-2*d_x5));
                y1:=round(my5-d_y5 - ( phi0 /z0)/(phi0_k/z0)* (my5-2*d_y5));
                x2:=round(d_x5 + ((omega0_k+domega0_k)/omega0_g) / (omega0_k_k/omega0_g) * (mx5-2*d_x5));
                y2:=round(my5-d_y5 - ((phi0+dphi0)/z0)/(phi0_k/z0)* (my5-2*d_y5));

                for j:=1 to Ncol do if (degree > (j-1)*d_degree) and (degree < j*d_degree) then brush.Color:=
col_[j];
                fillrect(rect(x1,y1,x2,y2));
            end;
        end;

    end;

    procedure degree_of_E_transfer;
        begin
            granices; graph_const; col_RGB;

            omega0_g:=1; // на что нормируем
            omega0_k:=omega0_k_0; constants;
            repeat
                z0:=zmax; // на что нормируем
                phi0:=phi0_0;
                repeat
                    clear_graphics;
                    motion;

                    //degree:=abs(E_k_0-min_E_k)/E_k_0; // степень перекачки по энергии
                    A0:=1/2*(z_min+Ampl_max); // смещенное положение равновесия
                    a_min:=Ampl_min-A0; a_max:=Ampl_max-A0;
                    degree:=1-sqr(a_min/a_max); // degree:=1-sqr(Ampl_min/Ampl_max); так,
когда положение равновесия не смещено, в этом случае формулы совпадают
                    put_on_degree_diagramm;

                    str(degree*100:2:2,st); form1.Memo1.lines.Append('degree='+st+'%');

                    Application.ProcessMessages;
                    phi0:=phi0 + dphi0;
                    until (phi0 > phi0_k) or (Process_end=true);
        end;

```



```
        omega0_k:=omega0_k + domega0_k;  
    until (omega0_k > omega0_k_k) or (Process_end=true);  
end;  
  
procedure TForm1.PaintBox5Click(Sender: TObject); begin Process_end:=false;  
degree_of_E_transfer; end;  
  
end.
```