МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

БОРОДЕЙКА АНЖЕЛА ВЯЧЕСЛАВОВНА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5 КЛАССА

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы
Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
проф., д-р пед. наук Шкерина Л.В.
Л. Шкр
____

Научный руководитель
канд. пед. наук, доцент Кейв М.А.
Кейв
____

Дата защиты
____

Обучающийся
Лавриненко Т.С.
Бор
____

Оценка________________________

Красноярск 2021

Содержание

Введение 2

Глава 1. Теоретические аспекты методики обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса. 6

1.1 Элементы теории графов в системе математической подготовки обучающихся 5 класса. 6

1.2 Дидактические условия формирования умений применять язык теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 класс.

Глава 2. Методическое обеспечение для включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса. 29

2.1. Цикл уроков по математике для 5 класса, в содержание которых включены элементы теории графов. 29

2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты. 66

Заключение 67

Библиографический список 69

Приложения 70

Введение

В настоящее время общество развивается очень динамично, поэтому невозможно точно определить, какие именно знания пригодятся ребенку в его последующей жизни, и на первый план выходит вопрос формирования у них умений самостоятельно продолжать образование на протяжении всей жизни, т.е. обладать метапредметными компетентностями [Донец Г.А., 1982,15]. Согласно ФГОС ООО одним из требований к метапредметным результатам освоения основной образовательной программы по математике является: «умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач [55]».

Пытаясь решить какую-нибудь проблему, человек часто интуитивно рисует схему, по сути своей - граф. Граф является простейшим и наиболее ясным способом описания системы, структуры или ситуации. Китайская поговорка «рисунок полезнее тысячи слов» вполне оправдывается в математическом моделировании. Язык теории графов это - знаки, символы, схемы, чертежи. Процесс построения графа является примером знакового (математического) моделирования.

Графы позволяют многочисленные явления и процессы представить в виде моделей и схем, которые удобно использовать при обработке информации и поиска решений. При помощи графов можно наглядно продемонстрировать взаимоотношения между событиями или объектами в сложных ситуациях или же системах. После того, как произойдет адекватное соотношение вершин графа интересующими нас объектами, а ребрам – отношения между данными вершинами, полученный граф станет знаковой (математической) моделью данного явления. Язык теории графов, а также методы теории графов, проникают во многие сферы человеческой деятельности, тем самым становятся неотъемлемой составной частью общей математической культуры.

Одной из специфик теории графов, которая позволяет задаться вопросом о введении ее элементов в школьный курс математики, есть возможность представить граф геометрически – в виде удобного, простого в обращении рисунка.

Вопросу обучения элементам теории графов посвящён ряд работ таких авторов, как: Мельников О.И., Глухова А.К., Ложакова Е.А., Волкова С.В., Егорина В.С., Березина Л.Ю., Зыков А.А. и др. Граф – как математическая модель реальных ситуаций рассматривается в учебно-методических комплектах Босовой Л.Л., Полякова К. Ю., Семакиной И. Г., Гейн А. Г.

Однако частные методики обучения элементам теории графов в рамках школьного курса математики отсутствуют. Одной из самых актуальных проблем школьного математического образования на сегодняшний день, является поиск возможностей включения элементов теории графов в программу подготовки школьников.

Тема выпускной квалификационной работы посвящена методике обучения элементам теории графов учащихся 5 класса в процессе их общей математической подготовки.

Цель исследования. Методическая разработка уроков математики для 5 класса, в содержание которых включены элементы теории графов.

Объект исследования: математическая подготовка обучающихся 5 класса.

Предмет исследования: методика обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса.

Гипотеза исследования: если в систему математической подготовки обучающихся 5 класса включить уроки с содержанием элементов теории графов, то это будет способствовать развитию умений создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

Задачи исследования:

1) Обосновать целесообразность включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса.

2) Разработать диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности у обучающихся 5 класса умений создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

3) Описать дидактические условия для включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса.

4) Разработать методическое обеспечение для уроков математики в 5 классе, в содержание которых включены элементы теории графов.

5) Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

Данная квалификационная работа состоит из 2-х глав, заключения, библиографического списка и приложений.

В первой главе работы рассматриваются теоретические аспекты методики обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса.

Во второй главе представлено методическое обеспечение для включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса.

В приложения включены: диагностическая карта, примерная методическая разработка, выписка из федерального списка учебников, рекомендованных ФГОС ООО (5 класс).

Глава 1. Теоретические аспекты методики обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса

1.1 Элементы теории графов в системе математической подготовки обучающихся 5 класса

«Теория графов - это область дискретной математики, изучающая отношения, связи между объектами и имеющая свой язык» [Энциклопедия, 2004,с. 48].

Приведенные далее определения являются результатом анализа и осмысления этих понятий в математической литературе на эту тему. И тогда, суммируя различные источники по математике, можно сказать, что:

- Математическое моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики.
- Знаковое моделирование – это моделирование, которое подразумевает использование в качестве моделей различные знаковые преобразования разного вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов.

Если использовать определение знаковой модели как информационной модели, выраженной средствами формального языка, то граф по существу является знаковой моделью.

Таким образом, построение графа- это знаковое моделирование, то есть такое моделирование, где в качестве основной модели используют знаковые преобразования разного вида: схемы, чертежи, формулы, наборы символов, пиктограммы. Знаковая модель – это условный образ какого-либо процесса или явления («оригинала») рассматриваемой модели, используемой в качестве его «заместителя».

Граф это рисунок и в то же время знаковая модель. Освоение теории графов это фактически умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач, при этом обучающийся сможет:

- выделять различными знаками и символами явления и/или предметы;
- выявлять логические связи между разными предметами и/или явлениями, а также выделять логические связи с помощью знаков в схеме;
- создавать абстрактный или реальный образ предмета и/или явления;
- выстраивать модель/схему опираясь на условие задачи и/или способ ее решения;
- создавать модели (вербальные, вещественные и информационные) с выделением имеющихся характеристик данного объекта для дальнейшего определения способа решения задачи, который будет соответствовать ситуации;
- изменять модели для выявления общих законов, которые определяют данную предметную область;
- производить перевод сложной по составу (многоаспектную) информации из графического или формализованного (символьного) представления в текстовое, и наоборот;
- выстраивать схемы, множественные алгоритмы действий, а также производить исправления или восстановления не встречающихся ранее алгоритмов, в основе имеющегося знания об объекте, к которому будет применяется алгоритм;
- выстраивать множественные виды доказательств: прямые, косвенные, от противного;
- производить анализ/рефлексию опыта данной разработки и реализации учебного проекта, исследования (теоретического, эмпирического) на основе выбранной проблемной ситуации, поставленных целей и/или определенных критериев оценки продукта/результата [55].

При этом не стоит забывать, что достаточно важно научить обучающихся смысловому чтению [Волкова С.В.,2002.]:

- производить выборку требуемой информации в тексте (в соответствии с целями своей деятельности);
- ориентироваться в содержании текста, понимать целостный смысл текста, структурировать текст;
- устанавливать взаимосвязь описанных в тексте событий, явлений, процессов;
- резюмировать главную идею текста;
- преобразовывать текст, «переводя» его в другую модальность, интерпретировать текст (художественный и нехудожественный – учебный, научно-популярный, информационный, текст non-fiction);
- критически оценивать содержание и форму текста.

Элементы теории графов в рекомендованных учебниках по математике и информатике (приложение) отсутствуют. Но есть материал, который можно использовать для внеклассной работы с целью развития у учащихся интереса к предмету. При преподавании теории графов обратить внимание, например, на следующую литературу:

- Березина Л. Ю. Графы и их применение. Пособие для учителей. – М.: просвещение, 1979.
- Мельников О.И. Теория графов для учителей, для школьников…И не только! Книга, которая научит вас теории графов и поможет обучать ей других. Под ред. Метельского Ю.М., Москва, Ленанд, 2017 г.240с.
- «Изучение элементов теории графов» В помощь учителю математики «Йошкар-Ола, 1972.

В этой перечисленной учебной литературе приведена методика проведения занятий по решению задач по теме «Элементы теории графов» на факультативных занятиях, т.е. вне рамок уроков математики. Из этого приведенного материала будем использовать основную идею преподавания теории графов на уроках математики 5 класса, а именно, чтобы учащиеся увидели возможность перевести условие задачи на язык графов и решить задачу «внутри теории графов», и затем интерпретировать полученное решение в исходных терминах.

В рекомендованных учебниках по математике для учащихся 5 класса [29,30,31,32,33,34] не дается тема «теория графов» , но даются основные геометрические понятия, такие как точка и линия на плоской поверхности. Причем на плоскости приводятся линии разных форм - прямая, отрезок, луч, кривая, зигзаг, дуга и другие. После освоения этих понятий геометрии можно приступить к изучению теории графов.

При этом учащиеся должны научиться [Глухова А.К, , 2016 г.]:

- опирировать понятиями фигура, точка, отрезок, прямая, луч, ломаная, угол, многоугольник, треугольник и четырёхугольник, прямоугольник и квадрат, окружность и круг, прямоугольный параллелепипед, куб, призма, шар, пирамида, цилиндр, конус;
- извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах;
- изображать изучаемые фигуры от руки и с помощью линейки, циркуля, компьютерных инструментов;

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- решать практические задачи с применением простейших свойств фигур.

Приступая к изучению теории графов [Алексеев В.В, 1974], для учащихся 5 класса не стоит давать строгое определение графа, как математического объекта. Достаточно будет сформулировать нестрогое определение графа и его элементов и ряд простых, понятных фактов из теории графов, показать, как они работают при решении задач.

В течение преподавания этой новой для 5 класса темы необходимо отследить продвижение пятиклассника по усвоению этих новых знаний. Диагностика результата преподавания теории графов необходима как для учителя (учитель получает информацию для коррекционной работы), так и для учащихся (они должны видеть результаты своей учебы).

Оценивание метапредметных результатов возможно проводить в ходе различных процедур: создания, применения и преобразования знаков и символов, моделей и схем для решения задач творческого и поискового характера. На основе диагностической карты (таблица 1) ведется мониторинг сформированности основных учебных умений. Диагностическая карта представляет собой таблицу, включающую уровень сформированности (высокий, средний, низкий), критерии и показатели (индикаторы сформированности).

«Крите́рий - это признак, основание, правило принятия решения по оценке чего-либо на соответствие предъявленным требованиям (мере),[55]».

«Показатель – это обобщённая характеристика какого-либо объекта, процесса или его результата,[55]».

«Индикатор – это объект, отображающий изменения какого-либо параметра, в форме, наиболее удобной для непосредственного восприятия, [55]».

Для фиксации результатов будем использовать оценочные листы, листы индивидуальных достижений обучающихся (таблица 1).

Диагностическая карта оценки уровня сформированности умений знакового моделирования на языке теории графов у обучающихся 5 класса

Таблица 1

Компонент	Показатель	Уровень сформированности		
		высокий	средний	низкий
Знаниевый	Знать основные понятия теории графов (граф, вершина, ребро, степень вершины, маршрут, дерево)	Обучающийся знает и четко формулирует определение графа, считает число вершин, ребер, определяет виды графа и его составляющие…	Обучающийся знает определение графа, считает число вершин, ребер, степень вершины, но четко не может определить вид графа.	Обучающийся знает определение графа, считает число вершин, ребер, но не может определить степень вершины и вид графа.

Деятельностный	Уметь определять связи между вершинами графа и объектами, строить граф (знаковую модель) для решения задач	Обучающийся демонстрирует умение строить граф по словесному описанию (смысловое чтение текста) и четко определяет связи между элементами графа.	Обучающийся демонстрирует умение строить граф по словесному описанию, но бывают затруднения в определении связей между объектами графа.	Обучающийся демонстрирует умение строить граф по словесному описанию, но определяет связи между объектами графа с подсказкой
	Владеть способами решения задач с помощью теории графов	Обучающийся демонстрирует навыки владения способами решения задач и решает их самостоятельно	Обучающийся демонстрирует навыки владения способами решения задач, но иногда решает их с подсказкой	Обучающийся демонстрирует навыки владения способами решения задач и решает их с только с подсказкой

Вывод:

Диагностические карты дают дополнительную возможность увидеть динамику подготовки и усвоения материала по каждому учащемуся и в целом по классу. Также в данные карты возможно включить оценку уровня преподавания учителя.

1.2. Дидактические условия формирования умений применять язык теории графов в процессе математической подготовки обучающихся 5 класса

Дидактические условия – один из важнейших компонентов образовательного процесса.

Сегодня в педагогической науке можно встретить разные определения понятия «дидактические условия» (Егорина В.С., Волкова С.В., Ложакова Е.А.). Уточним, что это «специально создаваемые педагогом обстоятельства педагогического процесса, при котором оптимально сочетаются процессуальные компоненты системы обучения» [Андреев В.И., 1996].

Содержание дидактических условий может изменяется в зависимости от поставленных задач перед педагогом в ходе учебного процесса.

Математическая подготовка обучающихся 5-го класса с внедрением элементов теории графов заключается в разработке специальной методической системы обучения:

- особое содержание обучения элементам теории графов: история возникновения теории графов; язык теории графов; сведения о применении теории графов при построении моделей; примеры различных задач с применением графовых моделей (таблица 2);
- специальные формы, методы и средства обучения.

Примерное содержание обучения элементам теории графов

Таблица 2

Определение

Граф – это несколько точек, часть из которых соединены друг с другом линиями (отрезками, стрелками, дугами). Точки называются вершинами графа, а соединяющие их линии – рёбрами (рис.4). Штрихованные стрелки на рис. 4 – это указатели элементов графа.

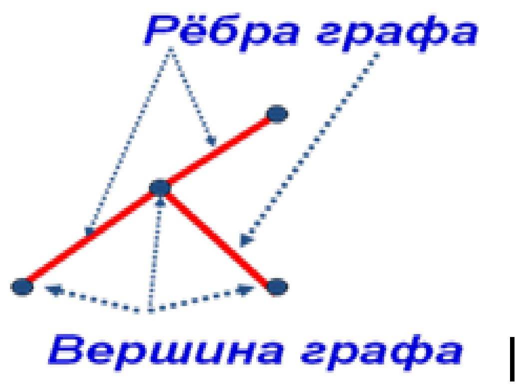


Рисунок 4. Указатели элементов графа

Некоторые виды графов

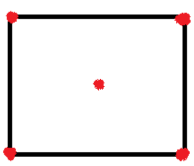
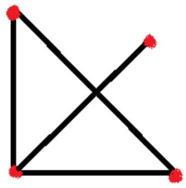
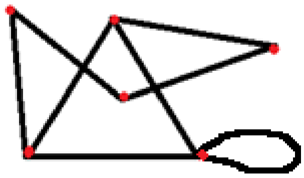
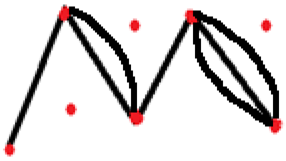
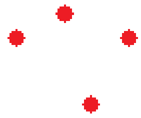






рисунок 5 рисунок 6 рисунок 7 рисунок 8 рисунок 9

Основные понятия теории графов

1. **Вершина графа -** элемент (точка) графа, обозначающий объект любой природы, входящий в множество объектов, описываемое графом.
2. **Ребро графа -** линия, соединяющая две вершины графа.
3. **Неориентированный граф**. Если ребра не имеют ориентации, граф называется неориентированным.
4. **Ориентированный граф.** Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ориентированным графом.
5. **Смешанный граф**. Если не все ребра ориентированы
6. **Взвешенный граф.** Граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение-число (вес ребра).
7. **Цепь –** это маршрут, в котором все ребра различны.
8. **Цикл -** цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.
9. **Связный граф** – граф, в котором любые две вершины соединяет маршрут
10. **Степень вершины графа -** число ребер, выходящих из каждой вершины графа, называют *степенью этой вершины*. Если из вершины выходит нечетное число ребер – она будет называться *нечетной*, а если четное – *четной*.
11. **Кратные ребра** – это ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин **2-**мя и более ребрами.
12. **Дерево** – связный граф без циклов.

Под содержанием обучения мы будем понимать «не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а также сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач» [24]. Задачи, которые приводятся ниже, взяты из Интернет-ресурсов. При этом каждая задача анализировалась и подвергалась собственной обработки (с учетом имеющихся знаний и навыков обучающихся 5 класса).

Задача № 1. Андрей, Виктор, Максим, Николай при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение: обозначим объекты точками по заглавной букве имени: А, В, М, Н (вершины графа), а ребра – рукопожатия.

Задача № 2. Артем, Владимир, Михаил, Никита обменялись СМС с поздравлением друг друга с Новым Годом. Сколько всего СМС было послано? Обозначим объекты точками по заглавной букве имени: А, В, М, Н (вершины графа), а ребра – СМС.

Решением задач № 1 и №2 является подсчет числа ребер у построенных графов. Подсчет ребер вполне доступен для 5-тиклассников и тогда получаем ответ. При этом нужно отметить в задаче №1- неориентированный граф, в задаче №2 - ориентированный граф.

Задача №3. На участие в соревнованиях по шахматам было выдвинуто 6 человек: Андрей, Борис, Виктор, Георгий, Денис и Егор. Данное соревнование проводится по определенной системе, которая называется круговой. Её суть состоит в том, что каждый из заявленных участников играет с каждым из оставшихся только один раз. На данный момент уже были проведены игры: Андрей сыграл с Борисом, Георгием и Егором; Борис сыграл с Андреем, а также с Георгием; Виктор сыграл с Георгием, Денисом и Егором; Георгий провел игры с Андреем, Борисом и Виктором, Денис сыграл с Виктором, Егором провел игры с Андреем и Виктором.

Назовите число проведенных игр на данный момент, также число игр, которые ещё нужно провести?

Участников будем изображать точками: Андрея – точкой А, Бориса – точкой Б и т.д. – это вершины графа. Если двое участников уже сыграли между собой, то будем соединять изображающие их точки отрезками – это ребра графа.

Так же относительно графов в задачах №1,2.3 можно задать вопрос и получить ответ:

1. Пожалуйста, назовите сколько ребер выходит из каждой вершины, а также назовите степень вершины каждого графа? *(учащиеся отвечают на поставленный вопрос);*

2.Ответьте: сколько ребер, сколько вершин, какова сумма степеней? *(учащиеся отвечают);*

3.На ваш взгляд, как связаны количество ребер и сумма степеней? Если учащиеся не отвечают, то подсказать: ***количество ребер *2= сумма степеней вершин***.

Задача № 4. Медвежата Тим, Тём, Том решили пойди в парк. Каждый из них надел шляпу, определенного цвета. Кто-то из них был в желтой, другой в голубой, а третий в оранжевой шляпах. Их ботинки тоже были этих трех цветов. Ботинки и шляпа Тима были одного цвета. На Томе не было ничего желтого. Ботинки Тима были голубые, а шляпа нет. Каких цветов были ботинки и шляпы у Тома и Тима?

Решение этой задачи выполняется с помощью графа. Обозначим вершины графа Тим, Тём, Том, Ж, Г, О – цвета ботинок и шляп.

Вот так доступно 5-тиклассникам объяснить решение этой логической задачи с помощью графов. Получаем ответ.

Ответ: Том – голубая шляпа и оранжевые ботинки. Тём – оранжевая шляпа и голубые ботинки.

Задача № 5. ***Задача о Кёнигсбергских мостах.*** Бывший Кёнигсберг расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены. Жители города предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз (рисунок 1).

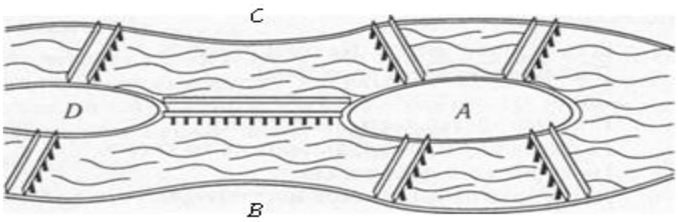


Рисунок 1

Произвести прогулку по данным городским мостам предложили и Эйлеру. После того, как было произведено некое количество безуспешных попыток создать необходимый обход, Эйлер сумел начертил упрощенную схему мостов. У него получился граф, вершины которого – части города, разделенные рекой, а ребра – мосты (рисунок 2).

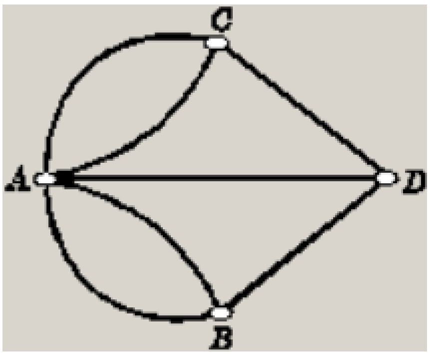


Рисунок 2

Провести линии по всем ребрам - "мостам", не отрывая карандаша от бумаги не получится. У Эйлера также это не получилось сделать. А в чем причина? Причина заключается в числе ребер, которые сходятся в вершине. *Леонард Эйлер сформулировал правило:*

Обход возможен если:

1. все вершины – четные, то его можно начать с любой вершины;
2. две (2) вершины – нечетные, то его нужно начать с одной из нечетных вершин.

Обход невозможен, если нечетных вершин больше 2.

Если подсчитать сколько ребер сходится в каждой вершине графа, то в вершине А сходится 5 ребер, в вершине В - 3, в вершине С - 3, в вершине Д - 3. Все вершины являются нечетными.

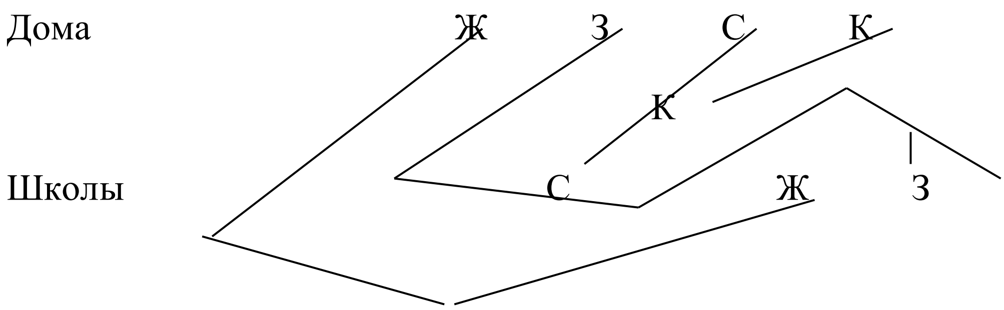
Ответ: во время прогулки по городу нельзя пройти по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

Такие задачи называются «*Вычерчивание фигур одним росчерком*».

Задача № 6. *Головоломка Генри Э. Дьюдени*. Четыре школьника, которые живут в желтом, зеленом, синем и красном домах, ходят в разные школы. Однажды, на свежем снегу особенно хорошо было видно, что следы четырех мальчиков нигде не пересекают друг друга и не выходят за пределы квадрата. Возьмите карандаши и продолжите их пути так, чтобы каждый мальчик из своего дома попал в школу такого же цвета, что и его дом (рисунок 3).

Рисунок 3

Рисуем граф



Специальные формы, методы и средства обучения элементам теории графов обучающихся 5 класса

Воспользовавшись переводом с греческого methodos означает "путь исследования, теория", по другому – это способ достижения какой-либо цели или решения конкретной задачи. И. Ф. Харламов понимает под методами обучения "способы обучающей работы учителя и организации учебно-познавательной деятельности учащихся по решению различных дидактических задач, направленных на овладение изучаемым материалом". Н. В. Савин считает, что «методы обучения - это способы совместной деятельности учителя и учащихся, направленные на решение задач обучения».

Таким образом, на современном этапе развития педагогики одним из наиболее приемлемых считается данное определение: методы обучения - это способы организации учебно-познавательной деятельности ученика с заранее определенными задачами, уровнями познавательной активности, учебными действиями и ожидаемыми результатами для достижения дидактических целей.

Опираясь на педагогические методики, различные педагогические приёмы и происходит взаимодействие ученика и учителя, а также происходит решение задач школьного образования.

В определенной методике приводится классификация следующих методов обучения [Единая коллекция образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/]:

- Пассивный. Учитель-доминант, обучающиеся в данном случае пассивны. Такой методы в рамках ФГОС признан одним из самых эффективных, хотя используются на отдельных уроках обучающего типа. Наиболее распространенный прием пассивных методов — лекция.
- Активный (АМО). Учитель, ученик - равноправные участники урока, взаимодействие происходит по вектору учитель = ученик.

- Интерактивный (ИМО). Считается эффективным методом. В рамках этого метода у обучающихся происходит взаимодействие не только с учителем, но и друг с другом. Вектор: учитель = ученик = ученик.

В рамках ФГОС [55] подразумевается использование наиболее активных и интерактивных методов, которые являются наиболее действенными и эффективными, среди которых рекомендованы следующие методы обучения:

Кейс-метод. Метод подразумевает задание какой-либо ситуация (реальной или максимально приближенной к реальности). Ученики должны приступить к исследовать ситуацию, после исследования предложить варианты ее разрешения, а далее выбрать лучшие из предложенных решений.

Метод проектов. Данный метод подразумевает самостоятельный анализ заданной ситуации и умение находить решение данной проблемы. Метод проектов объединяет исследовательские, поисковые, творческие методы и приемы обучения по ФГОС [55].

Проблемный метод. Предложенный метод предполагает постановку проблемы (проблемной ситуации, проблемного вопроса) и поиск решений этой проблемы, осуществляющийся через анализ подобных ситуаций (вопросов, явлений).

Метод развития критического мышления через чтение и письмо(РКМЧП). Данный метод направлен на развитие критического (самостоятельного, творческого, логического) мышления. В методике предлагается своя структура уроков, состоящая из этапов вызова, осмысления и размышления.

Эвристический метод – объединяет в себе разнообразные игровые приемы в форме конкурсов, ролевых и деловых игр, различных соревнований и исследований.

Исследовательский метод близок с проблемным методом обучения. Отличие только в том, что здесь учитель сам формулирует проблему. Задача учеников - организовать исследовательскую работу по изучению проблемы.

Для того, чтобы выбрать подходящий метод обучения необходимо учитывать многие условия: установленные цели обучения; уровень подготовленности обучающихся, а также возрастные особенности; время, которое необходимо отвести на изучение данного материала; оснащенность школы ресурсами; уровень и подготовленности учителя, как теоретический, так и практический.

Вывод: если учитывать уровень подготовленности учащихся и возраст, то в процессе преподавания теории графов в 5 классе можно использовать такие специальные методы и формы организации обучения как: дидактические игры (например, «Путешествие в страну графов»); квест-игры (например, решение логических задач с помощью графов); конкурс задач с молниеносным решением и др.

Глава 2. Методическое обеспечение для включения элементов теории графов в систему математической подготовки обучающихся 5 класса

2.1. Цикл уроков по математике для 5 класса, в содержание которых включены элементы теории графов

Согласно учебному плану основного общего образования на изучение предмета «Математика» в 5 классе отводится 5 часов в неделю, всего 175 часов в год. В рамках данного исследования, элементы теории графов предлагаем включить в содержание следующих тем школьного курса математики: «Линии» – 8 часов, «Углы и многоугольники» - 9 часов, «Треугольники и четырехугольники» - 10 часов, «Многогранники» - 10 часов (таблица 3).

Тематическое планирование уроков математики

по теме «Элементы теории графов» в 5 классе.

Таблица 3

№	Содержание урока	Количество часов
1	Введение. Сведения из истории графов. Граф и его элементы.	2
2	Эйлеровы и гамильтоновы пути в графе.	2
3	Решение комбинаторных и логических задач с помощью теории графов.	2
4	Деревья. Прикладные задачи теории графов.	2
5	Итоговое занятие	2
6	Всего	10 час.

Конспект занятия №1

***Тема*: «**Введение. Сведения из истории графов. Граф и его элементы. Различные способы записи графов.**»** (2ч)

Основная дидактическая цель: знакомство с базовыми понятиями теории графов: граф, вершина, ребро, степень вершины.

План

1. Организационный момент; (5 мин)

2. Экскурс в историю возникновения теории графов; (15 мин)

3. Введение в теорию графов: основные понятия; (40 мин)

4. Практикум: решение задач; (20 мин)

5. Итог урока; (15 мин)

6. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

1. Организационный момент

Здравствуйте!

Наш сегодняшний урок называется “Графы”. В рамках урока, мы познакомимся с понятием “Графы”, научимся изображать графы и решать задачи по этой теме. Важно спросить у учащихся, как они могут оперировать такими понятиями как фигура, точка, отрезок, прямая, луч, ломаная, угол, многоугольник, а также треугольник и четырёхугольник, прямоугольник и квадрат, окружность и круг, прямоугольный параллелепипед, куб, призма, шар, пирамида, цилиндр, конус и изображать изучаемые фигуры от руки и с помощью линейки, циркуля, компьютерных инструментов. Перейдем теперь к изложению теоретических основ.

Начало теории графов датируют 1736 г., когда Л. Эйлер решил популярную в то время «задачу о кенигсбергских мостах», ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. Термин «граф» впервые был введен спустя 200 лет (в 1936 г.) венгерским математиком Денешем Кенигом. В начале 20 века наряду с термином «граф» употреблялись другие термины, например карта, комплекс, диаграмма.

Слово «граф» в математике означает рисунок (картинку), где нарисовано некоторое количество точек, которые чаще всего соединены между собой линиями (могут и не все). С дворянским титулом «граф» их связывает общее происхождение от латинского слова «графио» - пишу. Граф однокоренное слово со словами география, биография, библиография и др.

Типичные графы, с которыми встречаются учащиеся в жизни – это схемы метро, схемы дорог как автомобильных, так и железнодорожных, схемы авиалиний и другие схемы (рисунок 4,5).

Рисунок 4 Схема Новосибирского метрополитена

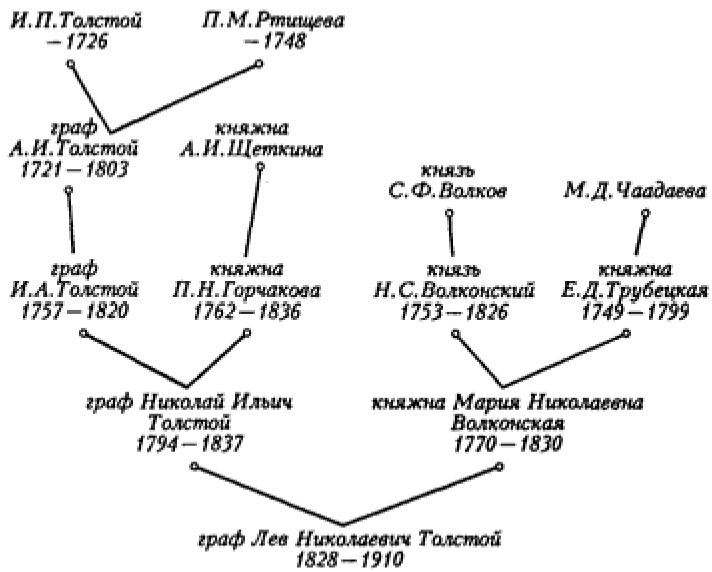


Рисунок 5 Генеалогическое дерево великого русского писателя графа Л.Н. Толстого

Теория

«Граф– это несколько точек, часть которых соединены друг с другом линиями (отрезками, стрелками, дугами). Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии – рёбрами».

Некоторые виды графов:

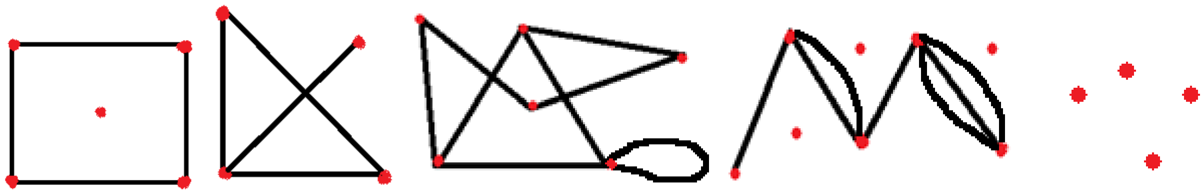


рис.1 рис.2 рис.3 рис.4 рис.5

1. **Граф-вершина.** Элемент (точка) графа, обозначающий объект любой природы, входящий в множество объектов, описываемое графом. То же: узел, точка.

2. **Граф-ребро.** Линия, соединяющая пару смежных вершин графа.

3. **Вершина** называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра. Не все вершины графа могут соединяться друг с другом ребром.

4. **Неориентированный граф**. Если ребра не имеют ориентации, граф называется неориентированным.

5. **Ориентированный граф.** Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ориентированным графом.

6. **Смешанный граф**. Если не все ребра ориентированы

7. **Взвешенный граф.** Граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение-число (вес ребра).

8. **Путь –** это маршрут, в котором все ребра различны.

9. **Цепь**— путь по вершинам и рёбрам, включающий любое ребро графа не более одного раза

10. **Цикл -** цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают.

11. **Сеть -** граф с циклом

Число ребер, выходящих из каждой вершины графа, называют «*степенью этой вершины*». Если из вершины выходит нечетное число ребер – она будет называться *нечетной*, а если четное – *четной*. Известно, что «*сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равно удвоенному числу ребер*». *Кратные ребра* – это ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин **2-**мя и более ребрами. Четкого, строгого обозначения вершин не существует, вершины обозначают исходя из условия задачи: это или буквенные выражения (русскими, латинскими) или цифрами. Графы могут состоять всего лишь из одних вершин. Встречаются и такие графы, у которых две вершины соединяются несколькими ребрами одновременно. Существуют и такие графы, у которых ребро может «выходить и заходить» в одну и ту же вершину несколько раз. Именно такие ребра называют «петлями».

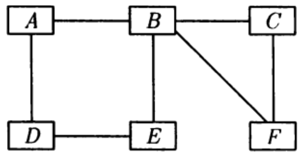
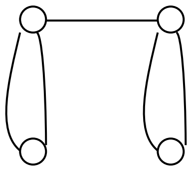
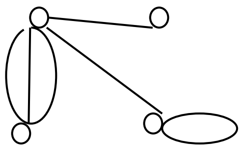
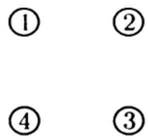
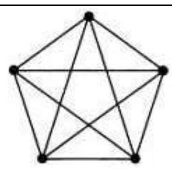
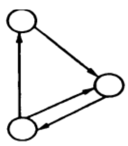
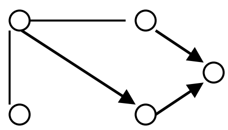
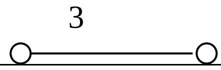
Нужно усвоить, что вершины и ребра – это элементы графа. Чтобы построить граф, нужно определить его элементы (таблица 4).

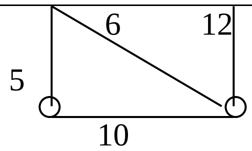
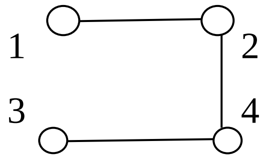
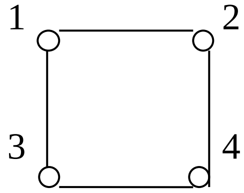
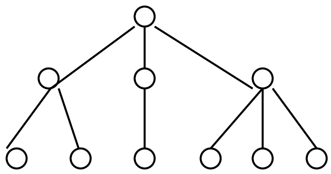
Вершины графа - это *объекты.*

Ребра графа – выражают *отношения* между объектами.

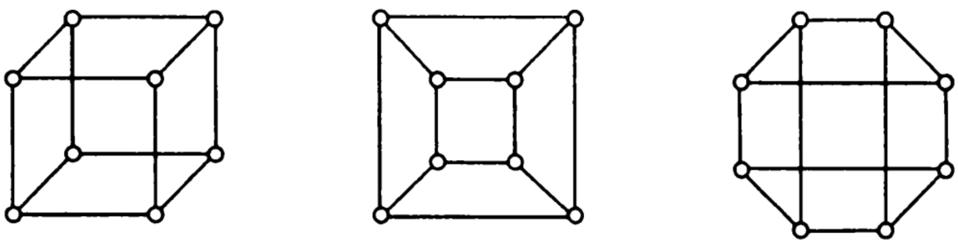
Таблица сведений о графах.

Таблица 4

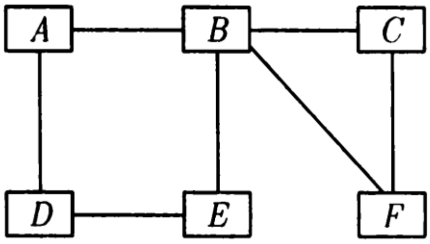
№	**Название графа**	**Рисунок**	**Число ребер и вершин**	**Примечание**
1.	Граф (простой, обыкновенный - без кратных ребер, без петель		В=6 Р=7	
2.	Граф (мультиграф - есть кратные ребра, имеющие одинаковые начальные и конечные вершины)		В=4 Р=5	
3.	Граф (псевдограф, кратные ребра и петли)		В=4 Р=5 Петля =1	
4.	Нуль (пустой) граф (не имеет ребер)		В=4 Р=0	
5.	Полный граф (каждая пара различных вершин смежная)		В=5 Р=10 полный граф имеет n вершин, то число ребер равно $\frac{n(n-1)}{2}$.	
6.	Ориентированный граф		В=3 Р=4	
7.	Смешанный граф		В=5 Р=5	
8.	Взвешенный граф		В=4 Р=5	

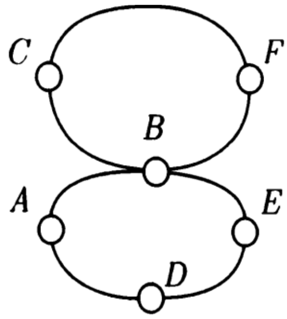
			Веса ребер 5,3,12,10,6	
9.	Граф с цепью		В=4 Р=3 Цепь 1,2,4,3	
10.	Граф с циклом (сеть)		В=4 Р=4 Цикл 1,2,4,3,1; 2,4,3,1,2; 3,4,2,1,3	
11.	Граф - дерево		В=10 Р=9	

Одним из явных примеров существования графов в математике, считается абсолютно любой многогранник, находящийся в трехмерном пространстве. Куб- пример такого графа. Вершины и ребра куба можно рассматривать как вершины и ребра графа. Не заостряем внимание на то, как располагаются элементы куба в пространстве. Необходима лишь информацию о том, какие вершины соединены ребрами. Обратим внимание на три способа изображения одного и того же графа, в данном случае трехмерного куба.



Следующие графы изображают одну и ту же структуру связей между элементами *A, B, C, D, E, F*.





Способ изображения элементов, формы, длина линий не имеет никакого значения. Важным лишь одно- какие именно пары элементов соединены линиями.

Какой бы случай не рассматривали, граф будет состоять из двух множеств - множества вершин и множества ребер, причем для каждого ребра указана пара вершин, которые это ребро соединяет.

Слово «граф» в математике означает рисунок (картинку), где нарисовано некоторое количество точек, которые чаще всего соединены между собой линиями (могут и не все).

Будем учиться строить графы и решать задачи с помощью графов.

Практическая работа:

№1 Построить граф, если A, B, C, D, – вершины графа, числа – степень вершины (количество ребер, инцидентных вершине графа)

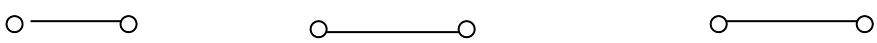
A – 3 B – 3 C – 2 D – 2

№2. Построить граф, если A, B, C, D, E – вершины графа, числа – степень вершины (количество ребер, инцидентных вершине графа)

A – 2 B – 3 C – 1 D – 2 E – 3

№3 Построить граф по условию (смысловое чтение текста)

Приведем наглядный пример. Пусть на первых партах сидят Саша, Маша Гриша, Наташа, Ваня, Галя. Всего 3 парты. Нарисовать граф размещения школьников по партам. Объекты графа – школьники, ребра графа – парты.



Саша Маша Гриша Наташа Ваня Галя

Из графа на рисунке видно, что за одной партой сидят Саша и Маша, Гриша и Наташа, Ваня и Галя. А Саша не сидит с Гришей, Наташей, Ваней и Галей за одной партой. Граф рассадки учеников можно нарисовать для всего класса, тогда и учащимся, и преподавателям не надо вспоминать кто с кем сидит. Прекрасно видно из графа.

Используя свойство графа, что «сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равно удвоенному числу ребер», можно ответить на вопросы:

1. Возможно ли 5 столбов соединить проводами так, чтобы каждый был соединен ровно с 3-мя другими? Ответ: Нельзя, т.к. сумма степеней всех вершин (телефонов) графа четное число, а у нас 5*3=15 – нечетное число.
2. Может ли в микрорайоне, в котором от каждого дома выходит 3 дороги, быть ровно 10 дорог? Ответ: Нельзя, т.к. сумма степеней вершин (домов)графа должна быть четной и кратна 3, а 10*2 - четное число, но не кратно 3. Заметим, что если бы было 12 дорог, то - можно, и в таком микрорайоне 8 домов.

Итог урока

Ребята, на сегодняшнем уроке вы узнали новые слова, назовите их? (Граф, вершина графа, ребра графа.)

- Что же могут обозначать вершины графа? (Города; объекты, люди и другие, которые между собой связаны.)

- А ребра графа, что они будут обозначать? (Пути, движения, направления)

Приведите несколько пример, где в жизни мы можем с ними встретиться?

Как изображаются графы?

Домашнее задание: повторить теоретический материал по методичке и решить предложенные задачи № 1-4.

Конспект занятия №2

***Тема*: «**Задачи, связанные с графами». Эйлеровы пути в графе, Гамильтоновы пути. (2ч)

Основная дидактическая цель: формировать умение выделять отношения, связывающие объекты. Развивать внимание, способность к логическому рассуждению. Переводить текст задачи в знаковую модель

План

1. Организационный момент; (5 мин)

2. Опрос по домашнему заданию. Сверить ответы. Нерешенные задачи решить в классе, при этом вызвать ученика, у которого возникли трудности с решением; (20мин)

3. Новая тема: Эйлеров граф, правило Эйлера. Гамильтонов путь. Виды графов; (40 мин)

3. Разобрать задачи, которые решаются по правилам Эйлера;(40 мин)

4. Практикум: решение задач; (20 мин)

5. Итог урока; (15 мин)

6. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

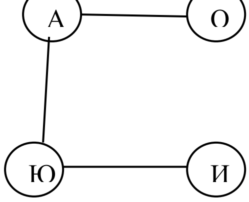
1. Организационный момент

Здравствуйте!

Какие трудности возникли при выполнении домашнего задания.

Разобрать спорные моменты при решении. У всех ли получился такой ответ к задаче.

№4



Перейдем к новому дальнейшему изучению теории графов.

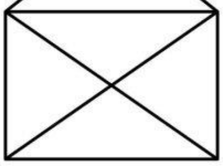
Коротко об истории возникновения теории графов

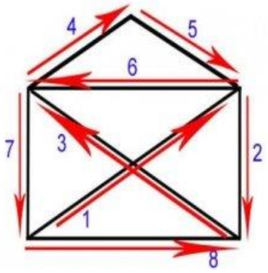
Рисунок 6 Леонард Эйлер

Леонард Эйлер (1707-1783) – математик, механик, физик и астроном. Ученый необычайной широты интересов (рисунок 6). Является автором более 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. Леонард Эйлер по происхождению швейцарец. В 1726г. был приглашен работать в Петербург, в 1727г. переехал жить в Россию. Являлся академиком, а затем почетным членом Петербургской академии наук.

Первая работа по теории графов принадлежит именно ему (1736), хотя термин «граф» впервые ввел в 1936 году венгерский математик Денеш Кениг. Эйлером была решена задача «о Кёнигсбергских мостах», а также сформулировано правило обхода:

- если все вершины чётные, то его можно начать с любой вершины;
- 2 вершины нечетные, то его нужно начать с одной из нечетных вершин.

Задача №6 <u>«распечатанное письмо»</u>  обозначим по часовой стрелке вершины А, Б, С, Д, Е.



Применим правило Эйлера.

В вершине А сходится 3 ребра, в вершине Б сходится 4, в вершине С сходится 2, в вершине Д сходится 4(3 вершины – четные, 2 – нечетные).

Возможно ли произвести обход этого графа, используя правило Эйлера? (Начать обход в одной из нечетных вершин А или Е, а завершить в другой.) Такие задачи называются «*Вычерчивание фигур одним росчерком».* Решая задачи на языке теории графов, можно увидеть, что каждая из данных задач сводится к изображению графа «одним росчерком».

Изображение птицы(рисунок 9).

Рисунок 7

Точки, в которых пересекаются линии-вершины графа. Считаем количество получившихся вершин. Выходит 7, но не все имеют нечетную степень, а всего лишь 2. Именно поэтому в данном графе будет существует эйлеров путь. Из этого следует, что изображенную на рисунке птицу возможно нарисовать при помощи одного росчерка.

Задача №7. Какие буквы русского алфавита можно нарисовать одним росчерком?

Ответ: Б, В, Г, З, И, Л, М, О, П, Р, С, Ф, Ъ, Ь, Я.Остальные нет. Например, А – у нее 4 (больше 2) вершины нечетные, Ш – у нее 3 (больше 2) вершины нечетные.

Путь, проходящий по всем рёбрам графа и притом только по одному разу, назвали **- Эйлеров путь (эйлерова** цепь) в графе.

Если задачу **«о Кёнигсбергских мостах»** поставить по- другому: побывать в каждой части города по одному разу (рисунок 10).

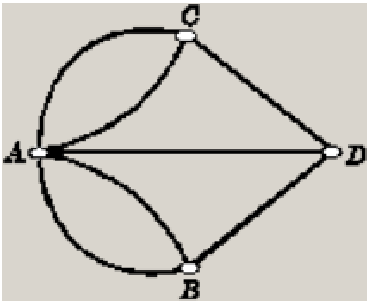


Рисунок 8

Это означает, что на этом графе построить путь, в котором каждая вершина встречается ровно один раз.

Путь, проходящий по всем вершинам графа ровно один раз, называется **Гамильтонов путь.**

Задача № 8. На рисунке 11 изображена некая схема. На данной схеме при помощи квадрата отмечено почтовое отделение «Почта Росси», а оставшиеся вершины -это те места куда курьеру следует отвезти посылки. Как курьеру следует построить маршрут, чтобы развести всё посылки к каждому месту, при этом не подъезжать ни к одному месту более одного раза, и вернуться назад (рисунок 11)?

«Почта России»

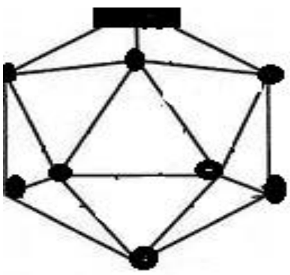


Рисунок 9

Заказчики: верхний ряд **1,2,3** (слева направо), ниже **4,5,6,7** и последний **8.**

Тогда гамильтонов путь:

М,3,2,5,6,7,8,4,1

М,1,4,5,2,6,8,7,3

М,2,3,7,8,6,5,4,1

М,1,2,5,4,8,6,7,3

Этот список путей можно продолжить самостоятельно.

Чтобы вернуться в магазин, в конце каждого пути нужно добавить **М.**

М,3,2,5,6,7,8,4,1М

Это цикл.

Домашнее задание:

Ответить на вопрос: Почему буквы А, Д, Е, Ж, К, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Э, Ю нельзя написать одним росчерком?

Конспект занятия №3

***Тема*: «**Решение комбинаторных и логических задач с помощью теории графов**»** (2ч)

Дидактическая цель: Обучить логически мыслить, ставить и решать логические и комбинаторные задачи с помощью графов.

План

1. Организационный момент; (5 мин)

2.Проверка домашнего задания (15 мин).

3.Дальнейшая отработка полученных знаний (ориентированные, неориентированные и смешанные графы). Научить последовательно строить согласно условию задачи граф, который даст ответ на поставленный вопрос в задаче (40 мин).

4. Разобрать комбинаторные и логические и задачи (40 мин).

5. Практикум: решение задач (20 мин).

6. Итог урока (15 мин).

7. Рефлексия (5 мин)

Домашнее задание.

Ход занятия

Здравствуйте!

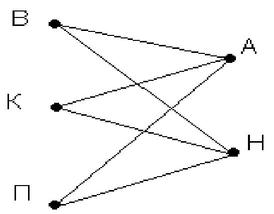
Вернемся к предыдущему уроку и проверим домашнее задание. Может у кого-то получилось написать предложенные буквы одним росчерком.?

Далее на этом уроке мы научимся решать логические и комбинаторные задачи.

Задача №9. Витя, Костя, Паша, Алина и Надя являются наиболее активными учащимися в 7 класса. Для участия в мероприятии необходимо произвести выбор из них одного мальчика и одну девочку. Сколько существует способов выбора?

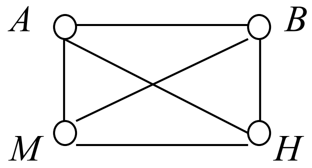
Решение: Подсчет числа способов относится к такому разделу математики как комбинаторика.

Эту задачу можно решить с помощью графа. Рисуем 5 вершин и обозначаем их первыми буквами имени – В, К, П, А, Н. Витя может составить пару с Алиной и Надей. Вершину В соединяем ребром с вершинами А и Н. Костя может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину К с вершинами А и Н. Паша может составить пару с Алиной и Надей. Соединяем вершину П с вершинами А и Н.



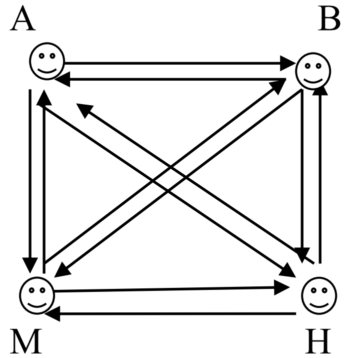
Число способов составить различные пары соответствует числу ребер в графе. Ответ: 6 способов.

Задача № 10. Андрей, Виктор, Максим, Николай при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано? Нарисуем четыре вершины и обозначим их заглавными буквами имени: А, В, М, Н. Андрей обменялся рукопожатием с Виктором, Максимом и Николаем. Соответственно рисуем ребра. Виктор обменялся рукопожатием с Андреем (ребро уже нарисовано), Максимом и Николаем. Рисуем недостающие ребра. Николай обменялся рукопожатием с Андреем, Виктором (ребра нарисованы) и Максимом. Рисуем недостающее ребро - Максим обменялся рукопожатием с Андреем, а с Виктор и Николаем ребра уже нарисованы. Число рукопожатий равно числу ребер.



Ответ: 6 (количество ребер)

Задача № 11. Артем, Владимир, Михаил, Никита обменялись СМС с поздравлением друг друга с Новым Годом. Сколько всего СМС было послано? Построим граф, в котором вершины соответствуют Артему, Владимиру, Михаилу и Никите, а ребра в графе кто кому послал СМС. Рисуем 4 вершины(можно в виде смайликов), которые обозначаем первыми буквами имен: А,В,М,Н. Артем послал Владимиру, проводим ребро со стрелкой от А к В, а Владимир послал Артему, проводим ребро от со стрелкой от В к А. Аналогично проводим ребра между А и Н, А и М, В и Н, В и М, Н и М.



Нетрудно подсчитать число ребер.

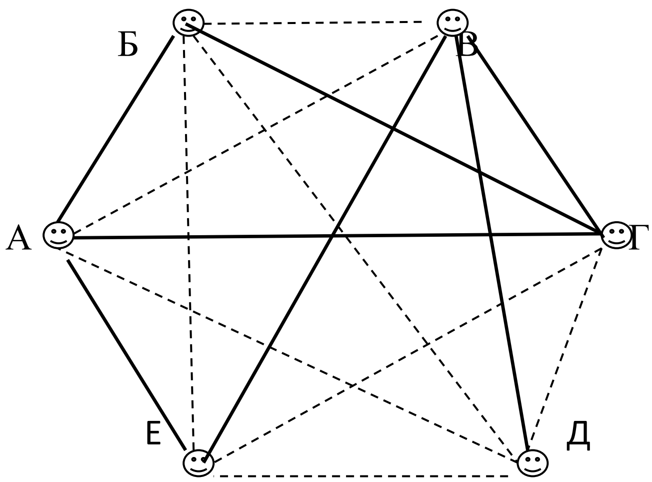
Ответ: 12.

В задачах №9, № 10 и №11 ответы получаем путем подсчета ребер графов. Нужно отметить в задаче №10 - неориентированный граф, в задаче №11 - ориентированный граф.

Задача №12. Чтобы принять участие в соревнованиях по шашкам в 6 классе было выдвинуто 6 претендентов: Антон, Богдан, Валера, Гена, Даня и Егор. Система соревнований будет круговая, то есть каждый из ребят играет с каждым из остальных ребят один раз. На данное время некоторые из ребят успели сыграть: Антон сыграл с Богданом, Геной и Егором; Богдан, как уже говорилось, с Антоном и еще с Геной; Валера – с Геной, Даней и Егором; Гена – с Антоном, Богданом и Валерой, Даня – с Валерой, Егором – с Антоном и Валерой.

Сколько игр проведено к данному моменту и сколько следует еще провести?

Участников обозначаем точками: Антон – точкой А, Богдан – точкой Б и т.д. – это вершины графа. Если двое участников уже сыграли между собой, то будем соединять изображающие их точки отрезками – это ребра графа. Читаем внимательно текст задачи и последовательно согласно условиям задачи рисуем ребра. Сплошными линиями обозначим сыгранные партии, штрихованными линиями – несыгранные.



Сосчитаем ребра те и другие.

Ответ: сыграно 7 игр, осталось сыграть 8 игр.

Так же относительно этого графа можно получить ответы на следующие вопросы:

1. Вам нужно назвать сколько ребер будет выходит из каждой вершины. Ещё необходимо назвать степени вершин каждого графа? Ответ: из

каждой вершины выходит 5 ребер, из этого следует, что степень каждой из вершин тоже будет равна 5.

2. Ответьте: сколько ребер, сколько вершин, какова сумма степеней? Ответ: 6 вершин, 15 ребер. Если n – число вершин, то количество ребер равно n*(n-1)/2.

3. Ваше мнение: как связаны количество ребер и сумма степеней? *Количество ребер *2= сумма степеней вершин.*

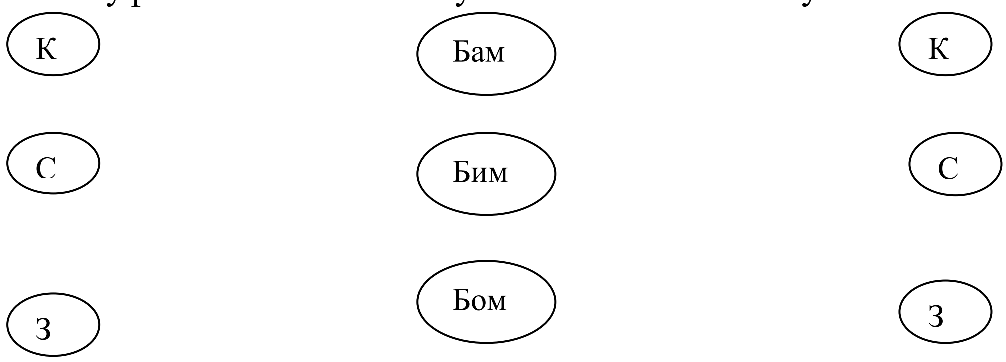
Логические задачи (Кто есть кто?). В этих задачах очень важно смысловое чтение текста задачи и не пропустить ни одну деталь в условиях задачи.

Задача № 13. Клоуны Бам, Бим, Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли тоже были этих трех цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были синие, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

Решение выполним с помощью графа

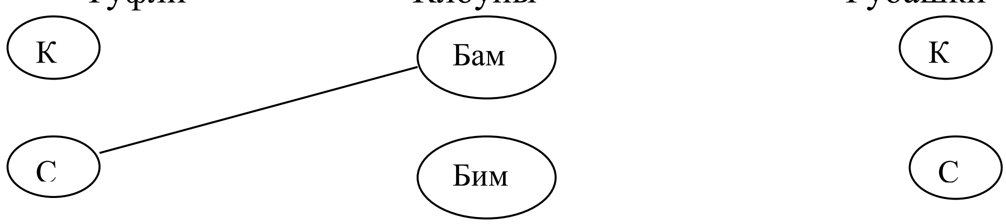
Обозначим вершины графа Бам, Бим, Бом, К, С, З - цвета туфель и рубашек. Всего 9 вершин.

Туфли Клоуны Рубашки

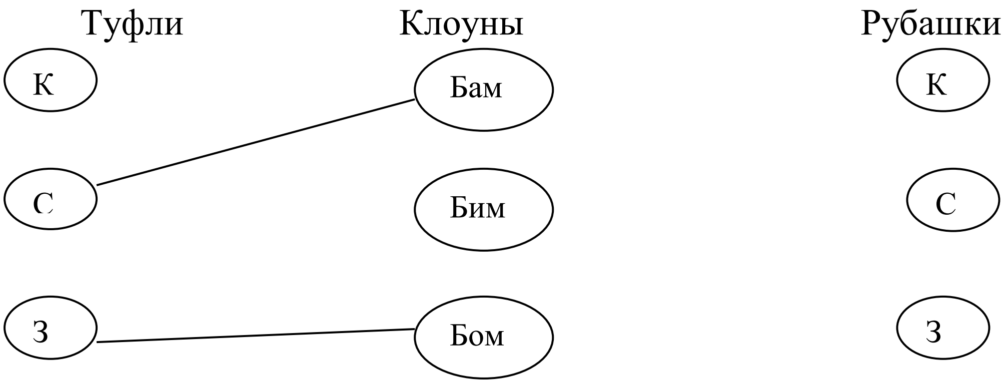


Туфли Бама по условию синие, проводим ребро.

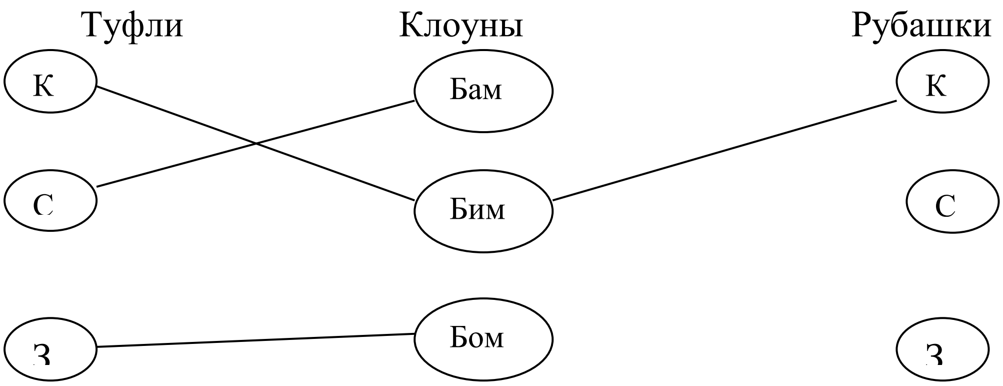
Туфли Клоуны Рубашки



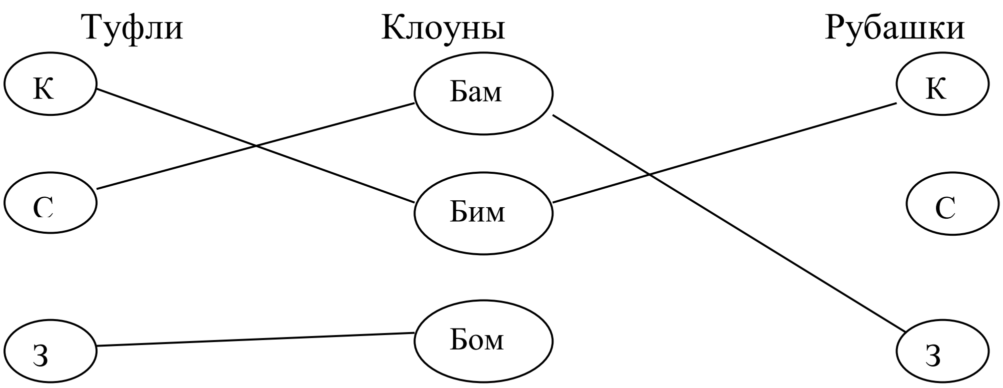
На Боме не было ничего красного, значит у него зеленые туфли, проводим ребро



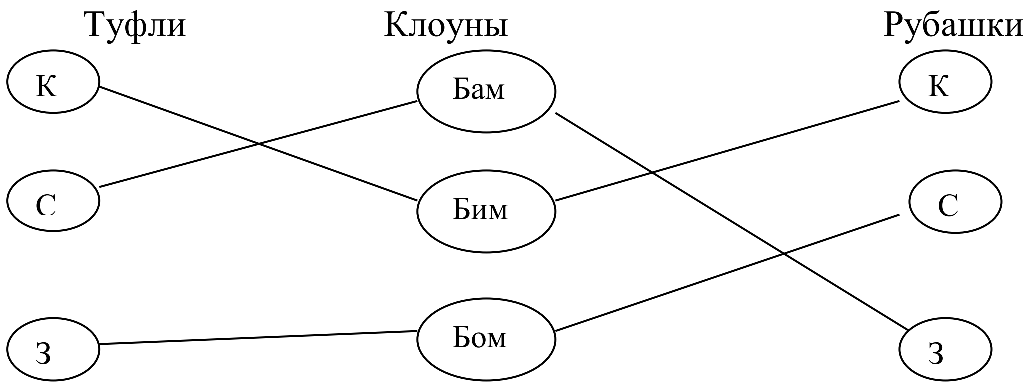
Тогда Биму достались красные туфли, а рубашка и туфли у Бима одного цвета, проводим 2 ребра



Туфли у Бама синие, а рубашка нет, значит ему достается только зеленая. Проводим ребро.



Значит Бому достается синяя рубашка. Проводим ребро.



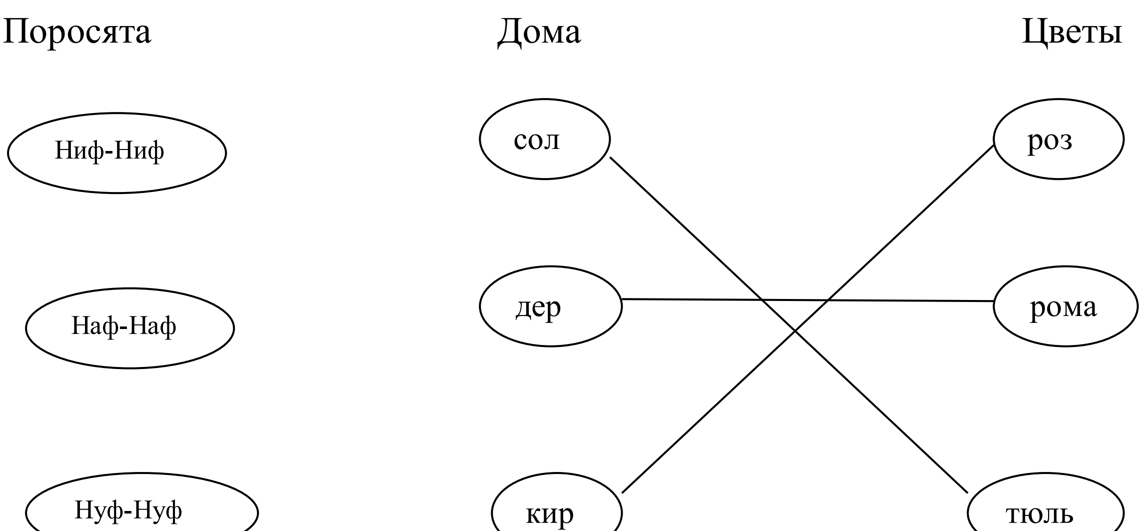
Ответ: Бом – синяя рубашка и зеленные туфли. Бам – зеленая рубашка и синие туфли.

Аналогично решить

Задача №14. «*Три поросёнка*»

Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Ими были построены 3 домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Поросята выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном; возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки. У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их. Узнайте, кто в каком домике живет и какие цветы выращивает.

Вершины графа Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф, соломенный, деревянный, кирпичный(дома), розы, ромашки, тюльпаны (цветы)

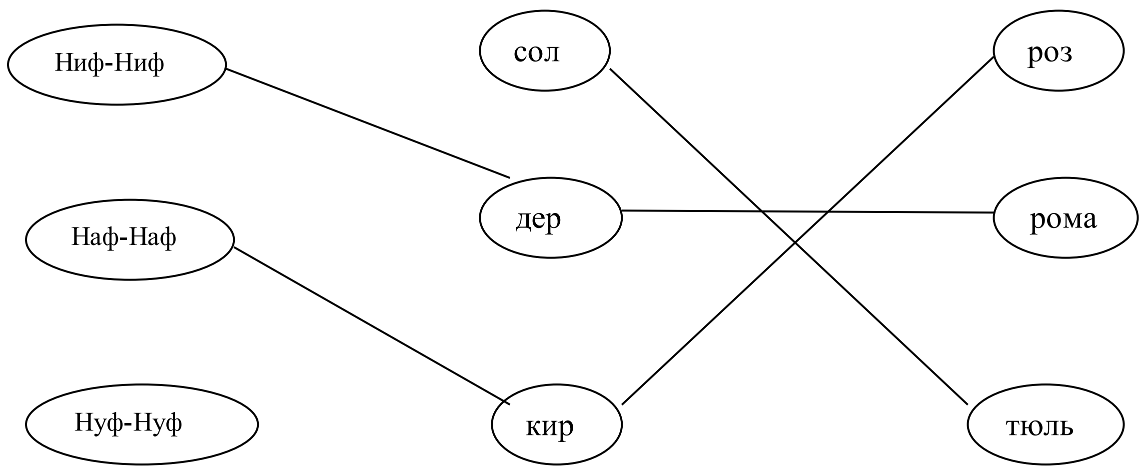


У того, кто живет в деревянном домике, в клумбе будут расти ромашки. Проводим ребро дер – рома.

Далее, возле соломенного домика растут не розы, следовательно тюльпаны. Проводим ребро кир – розы.

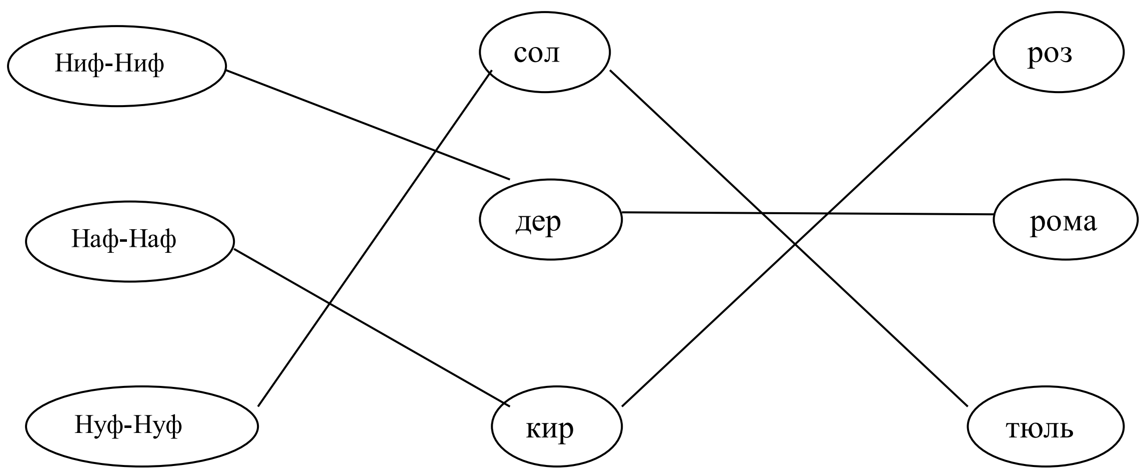
Тогда тюльпаны растут у соломенного домика. Проводим ребро сол – тюль. Наф-Наф живет не в деревянном домике, значит в соломенном или кирпичном, но у него аллергия на тюльпаны. Следовательно он живет в кирпичном доме. Проводим ребро Наф-Наф – кир

Поросята Дома Цветы



Ниф-Ниф живет в не соломенном домике, значит в деревянном. Проводим ребро Ниф-Ниф – дер.

Поросята Дома Цветы



Нуф-Нуфу остается соломенный домик. Проводим ребро Нуф-Нуф – сол.

Ответ: Наф-Наф: кирпичном домике, возле которого растут розы; Ниф-Ниф: деревянном домик, возле которого растут ромашки; Нуф-Нуф: соломенном домике, возле которого растут тюльпаны. На основе логических задач предложить учащимся составить и квест- игру.

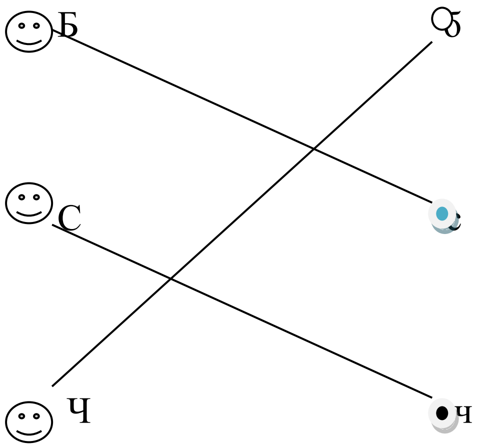
Следующие задачи попробовать решить самостоятельно.

Задача №15: Друзья

Повстречались три товарища - Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: «Интересно, что на одном из нас белый костюм, на другом - серый и на третьем — черный, но на каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии». Какой цвет костюма у каждого из друзей?

Вершины графа Б, С, Ч (фамилии), б,с,ч (цвета костюмов)

Строим граф



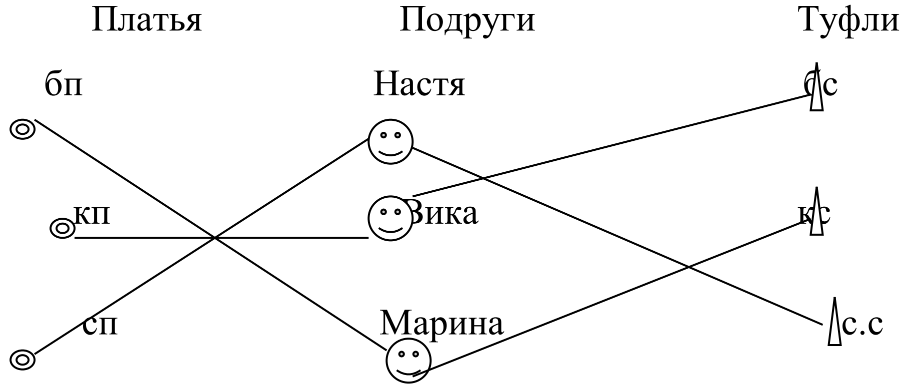
Чернов встретил друга, одетому в серый костюм и цвет костюма не соответствует фамилии, значит на Чернове не серый и не черный костюм. Рисуем ребро Ч – б. На Серове не может быть серый костюм, остается – черный костюм. Значит на Белове - серый костюм. Рисуем ребра С – ч, Б – с.

Ответ: Чернов в белом костюме, Белов - в сером, Серов - в черном.

Задача №16: Подруги:

Настя, Вика и Марина решили пойти в кино. Каждая из них надела пальто определенного цвета: одна надела белое, другая-красное, а третьясинее пальто. Сапоги их были тех же трех цветов, но только у Насти цвета сапог и пальто совпадали. При этом у Вики ни пальто, ни сапоги не были синими, а Марина была в красных сапогах. Узнайте цвет пальто и сапог каждой из подруг.

Вершины графа: Настя, Вика, Марина, бп, кп,сп, бс,кс,сс.



Строим ребра. Марина в красных сапогах. Проводим ребро Марина – кс, у Вики сапоги были не синие, значит белые. Проводим ребро Вика – бс. Значит Настя в синих сапогах. Проводим ребро Настя – сс. У Насти цвет пальто и сапог совпали. Проводим ребро Настя – сп. Поскольку только у Насти цвет пальто и сапог совпали, остается на Марине белое пальто, а на Вике - красное пальто. Проводим ребра Марина –бп, Вика – кп.

Ответ: У Насти пальто и сапоги синего цвета; у Вики сапоги белые, пальто красное; у Марины сапоги красные, плальто белое.

Задача №17: Друзья

Как-то при встрече троих приятелей: Белова, Рыжова и Чернова. Брюнет сказал Белову: "Любопытно, что ни у кого из нас цвет волос не соответствует фамилии, да и ты не брюнет".

Какого цвета волосы у каждого из друзей?

Задача аналогична задачи № 15. Построить граф и записать ответ. Домашнее задание.

Задача №18: Подруги:

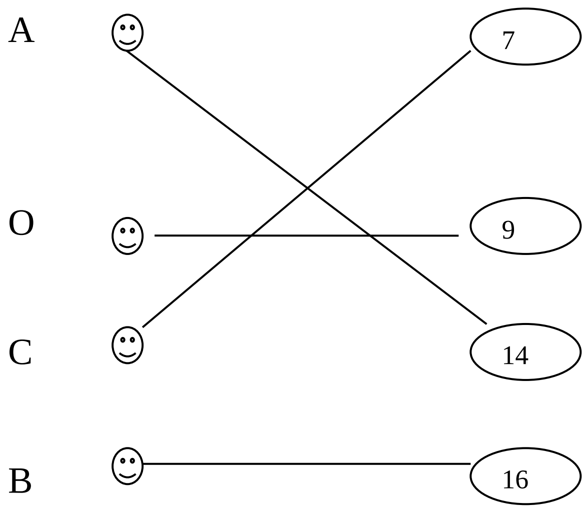
Валя, Галя и Катя пришли в театр в костюмах разного цвета: костюм одной бел голубой, другая пришла в фиолетовом, а третья явилась в черном. Катя была не в черном, Валя не в черном и не в голубом. Определи, в какой костюм каждая из них была одета.

Задача аналогична задачи № 15. Построить граф и записать ответ. Домашнее задание.

Задача №19

В доме находится 4 детей. Им 7, 9, 14 и 16 лет. Их имена: Алёна, Олег, Света и Вова. Сколько лет каждому из них, если одна девочка ходит в детский сад, Алёна старше, чем Олег, а сумма лет Алёны и Светы делится на 3?

Вершины графа: А, О, С, В, 7,9,14,16. Строим граф



Поскольку Олег – мальчик, то ему или 9,14,16 лет, значит Алёне 14 или 16. Только если к 14 прибавить 7, то число 21 делится на 3. Значит Свете 7 лет, а Алёне 14. Проводим соответствующие ребра. Олегу 16 лет не может быть, значит ему 9 лет. Проводим ребро. Остается Вова, ему 16 лет. Проводим ребро.

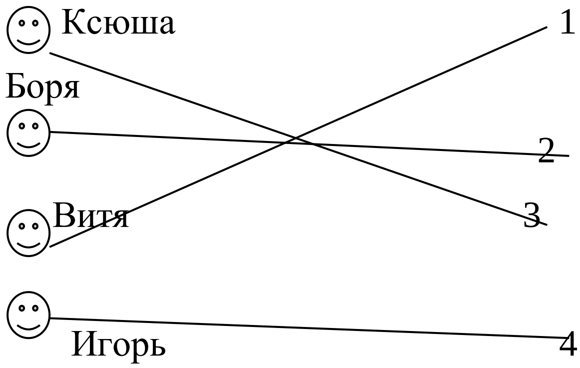
Ответ: Алене – 14 лет, Олегу – 9 лет, Свете – 7 лет, Вове – 16 лет.

Задача № 20

Принимая участие в соревнованиях, ребята: Ксюша, Боря, Витя и Игорь смогли заняли первые четыре места. Ксюша не удалось занять ни первое, ни последнее место, Боря смог занять второе место, Витя оказался в числе первых трех призеров. Какое место на олимпиаде занял Игорь?

Вершины графа Ксюша, Боря, Витя, Игорь, 1,2,3,4(места).

Строим граф



Боря занял 2-е место, проводим ребро Боря -2. Ксюша не заняла ни 1-е , ни 4-е место, значит 3-е, проводим ребро Ксюша - 3. Витя оказался в числе призеров, значит занял 1-е место, проводим ребро Витя – 1. Игорю досталось 4-е место.

Ответ: последнее (четвертое)

Задача № 21

Три товарища Егор, Слава и Виталик едут после школы домой. Транспорт у каждого из них разный: велосипед, самокат, автобус. Как-то раз после всех уроков Егор решил проводить одного из своих товарищей домой до автобусной остановки. Третий товарищ поехал на велосипеде. Проезжая мимо ребят он сказал: «Слава, ты оставил в школе свою кепку». Кто на чем ездит домой? Обозначить вершины графа. Построить ребра согласно условиям задачи. Решить самостоятельно дома.

Задача № 22 Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

• Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.

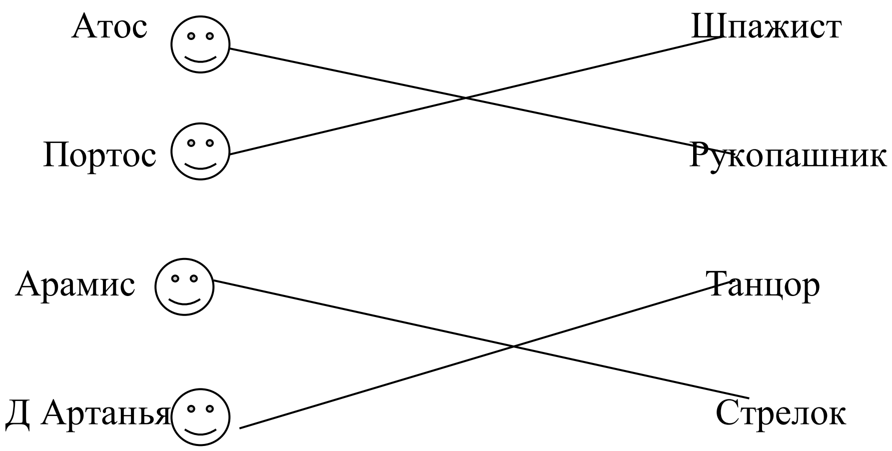
• Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем рукопашника.

• Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.

• Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

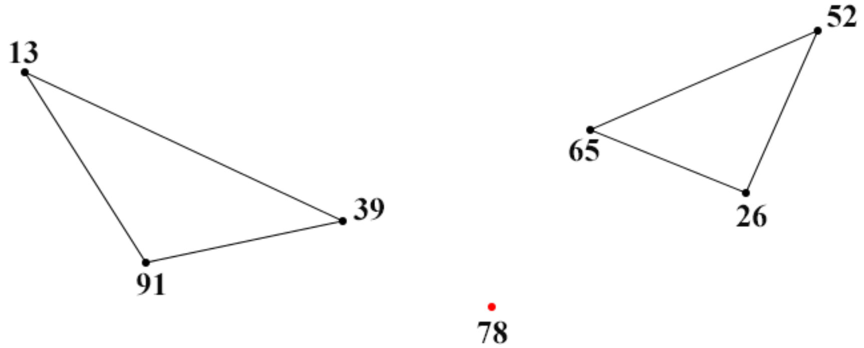
Определяем вершины графа Атос, Портос, Арамис, Д'Артаньян, шпажист, рукопашник, танцор, стрелок. Строим граф.



Читаем внимательно текст. Портос – не стрелок, не рукопашник, не танцор. Портос – шпажист. Проводим ребро. Атос - не стрелок, не танцор, не шпажист. Атос – рукопашник. Проводим ребро. Арамис – не танцор. Значит Арамис – стрелок. Остается Д Артаньян – танцор.

Задача №23. В некоем 10-м числе каждые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, которое делится на 13. Докажите, что среди этих цифр нет цифры 8.

Решение. Существует 7 двузначных чисел, которые делятся на 13 – это 13,26,39,52,65,78,91. Обозначим эти числа точками (вершины графа), и, если вторая цифра одного числа совпадает с первой цифрой другого числа, соединим их линией (ребро графа). Видим, что если 10-значное число обладает заданным свойством, то оно состоит из периодически повторяющихся чисел 1391 или 6526… Цифры 8 быть не может.



Вершина 78 – обособлена, значит и цифры 7 и 8 не входят в 10-значное число.

Это задача повышенной трудности и может быть непосильна для всех пятиклассников.

Домашнее задание: задачи №17,18,21.

Конспект занятия №4

***Тема*: «**Деревья. Кратчайшие пути. Прикладные задачи теории графов**»** (2ч)

Основная дидактическая цель: развитие памяти, внимания; развитие самостоятельности; воспитание познавательной активности.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Научить строить граф в виде дерева согласно условию и который даст ответ на поставленный вопрос в задаче; (40 мин)
3. Практикум: решение задач; (20 мин)
4. Итог урока; (15 мин)
5. Рефлексия; (5 мин)

Ход занятия

Здравствуйте! Проверим домашнее задание. У всех ли получились такие ответы:

№ 17 Белов – рыжий, Чернов – блондин, Рыжов – брюнет

№ 18 Валя – в белом, Галя – в черном, Катя – в сером

№21 Алеша ездит на трамвае, Боря - на автобусе, Витя – на троллейбусе

Сегодня мы научимся строить еще один вид графов, который называется дерево.

Задачи на построение деревьев

Задача №24

В кафе «Ветерок» на сегодняшний день существует меню, в котором на первое можно покушать щи, суп и борщ, на второе – котлету и рыбу, а на третье – чай и морс. Какое количество обедов возможно собрать из данных блюд(рисунок12)?

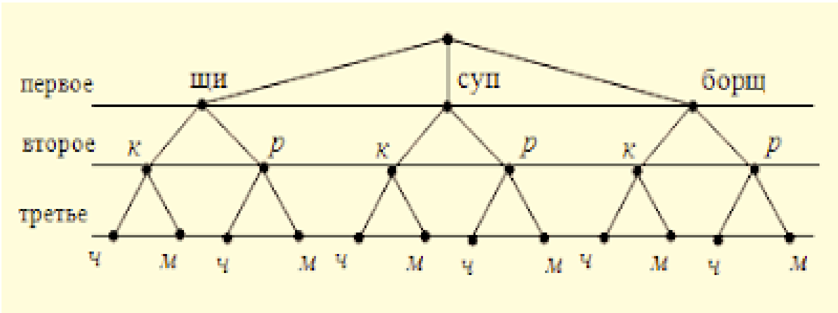
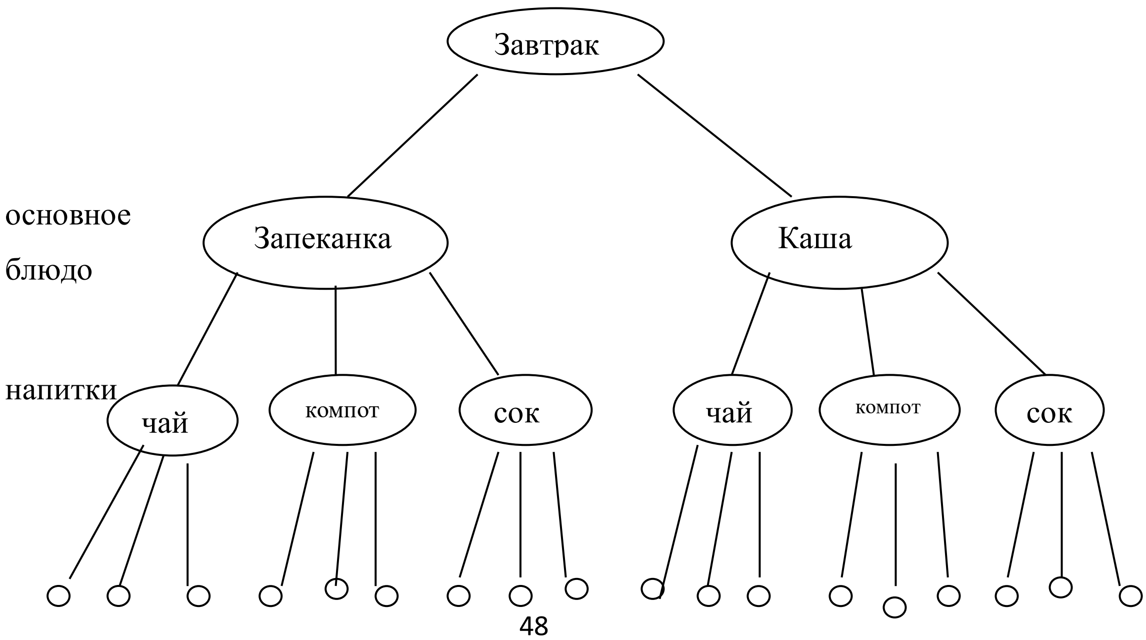


Рисунок 10

Ответ: 12 обедов.

Задача №25

В школьной столовой на завтрак предлагают, как основное блюдо: кашу и запеканку, напитки: чай, компот, сок, выпечка: коржик ватрушка, булочка. Сколько различных завтраков можно заказать?



к в б к в б к в б к в б к в б к в б

Ответ: 18 завтраков.

Задача № 26

Дана стоимость проезда между городами **А, Б, С, Д, Е**.

А – Д = 1ед.; **А – С**=3 ед;

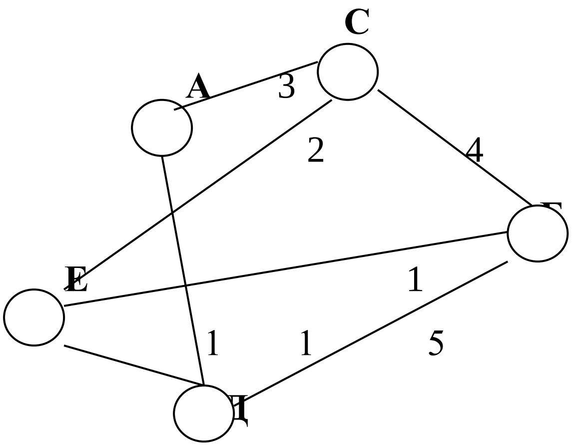
С – Е = 2 ед., **С – Б** = 4 ед.

Б – Д = 5 ед., **Б – Е** = 1 ед.

Д – Е = 1ед.

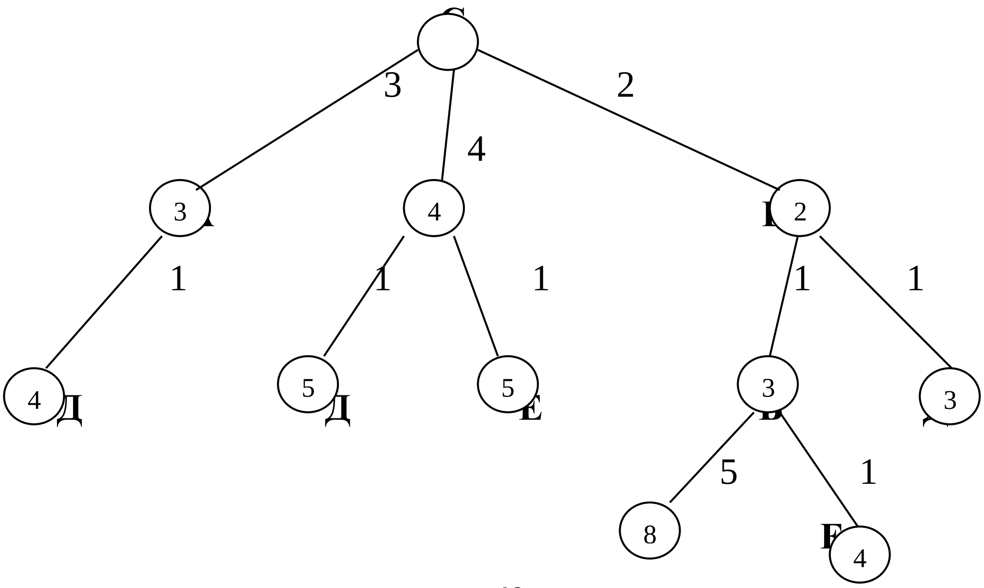
Найти путь из **С** в **Д** с минимальной стоимостью.

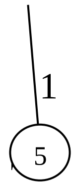
По словесному описанию построим граф, у которого вершины – это города, ребра – пути из одного города в другой. На каждом ребре укажем стоимость проезда. Получился граф или схема проезда с указанием стоимости.



На основании этого взвешенного графа строим граф – дерево всех путей из С в Д.

Для удобства в каждом кружке считаем стоимость.





Из рисунка видно, что путь **С – Е – Д** с минимальной стоимостью **3 ед.**

Для закрепления материала самостоятельно найти путь (построить дерево) из **А** в **Б** с минимальной стоимостью.

Задача на построение кратчайшего маршрута аналогична задачи на построение минимального по стоимости маршрута.

Задача № 27

Между населенными пунктами **А, Б, С, Д, Е** проложены дороги следующей протяженности

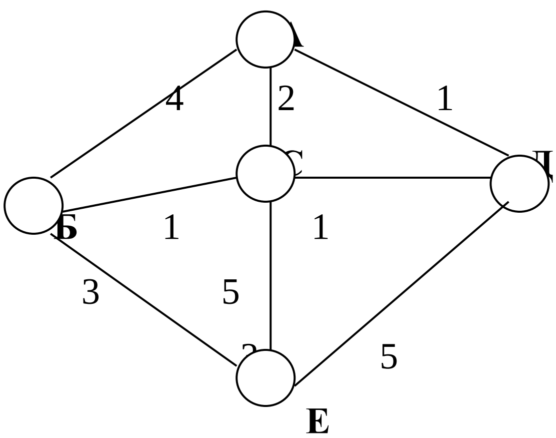
А – Д = 1км; **А – В** = 4км; **А – С** = 2 км;

С – Д = 1 км; **С – Б** = 1км; **С – Е =** 5 км;

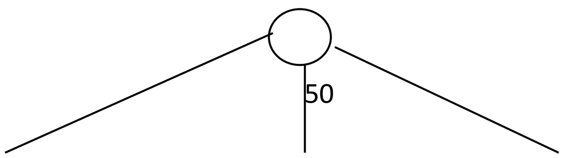
Б – Е = 3 км; **Д – Е** = 5 км.

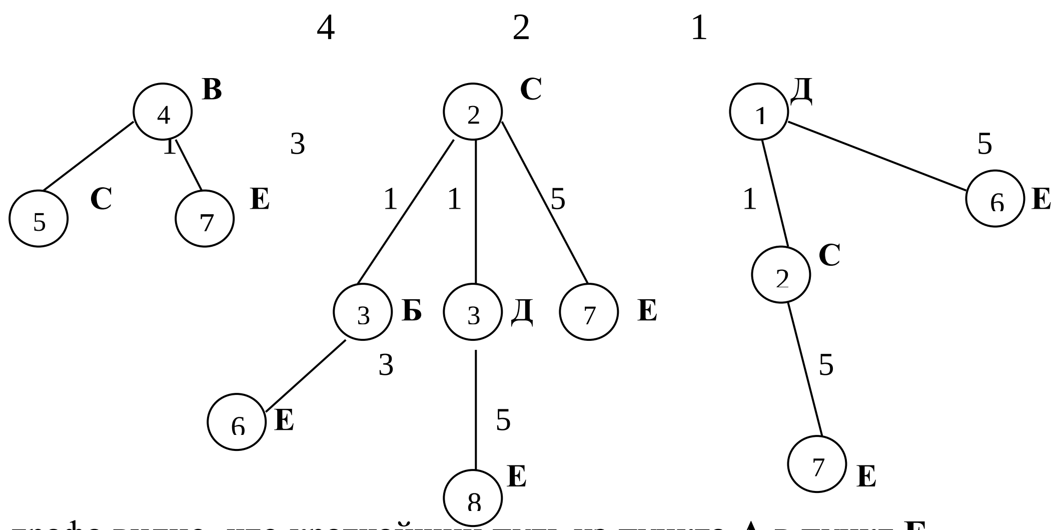
Найти кратчайший путь из пункта **А** в пункт **Е**.

По словесному описанию строим граф – схему дорог между заданными населенными пунктами. Вершины графа – населенные пункты, ребра графа - дороги с указанием расстояния.



На основании этого взвешенного графа строим различные маршруты из **А** в **Е** с указанием пройденного расстояния.





Из графа видно, что кратчайший путь из пункта **А** в пункт **Е**

1. **А – Д – Е** и равен 6 км
2. **А – С - Б – Е** и равен 6 км

Ответ: 2 пути в 6 км.

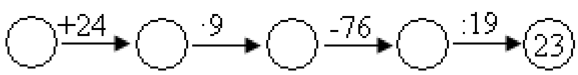
Задача № 28:

В уме было задумано некое число. К этому числу прибавлю 24, после то, что получилось умножу на 9, далее из полученного произведения вычту 76, а после возьму полученную разность разделю на 19. После всех этих действий у меня вышло 23. Найдите задуманное мною число.

Решение:

1 способ:

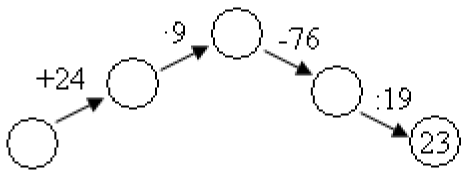
Сделаем рисунок (граф).



Исходя из рисунка видим, чтобы найти задуманное число, надо выполнить обратные действия:

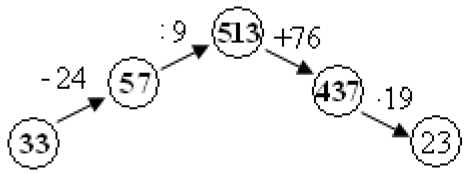
$23 \cdot 19 = 437,\ 437 + 76 = 513,\ 513 : 9 = 57,\ 57 - 24 = 33.$

2 способ:



Видно, что решать задачу следует с конца, заменяя каждое действие на обратное ему.

Получаем:



Ответ: 33.

С помощью таких задач можно проводить конкурс задач с молниеносном решением.

Конспект занятия №5

***Тема*: «**Итоговое занятие Оценка УДД**»** (2ч)

Основная дидактическая цель: оценка уровня усвоения и самостоятельности в изучении языка теории графов.

План

1. Организационный момент; (5 мин)
2. Самостоятельная работа; (40 мин)
3. Подведение итогов; (40 мин)

Оценка полученных знаний.

Ход занятия.

Здравствуйте!

Мы познакомились с элементами теории графов. Освоили язык теории графов. Узнали виды графов. Используя язык (знаки) теории графов, вы текстовое содержание задачи можете перевести в знаковую модель, позволяющую решить и ответить на вопросы, поставленные в задаче. Кратко повторим основные определения и свойства графов. Опрашиваем учащихся. И тогда сейчас проверим уровень усвоенной информации по теории графов, выполнив самостоятельную работу. Самостоятельная работа проводится по 2-м вариантам (таблица 5).

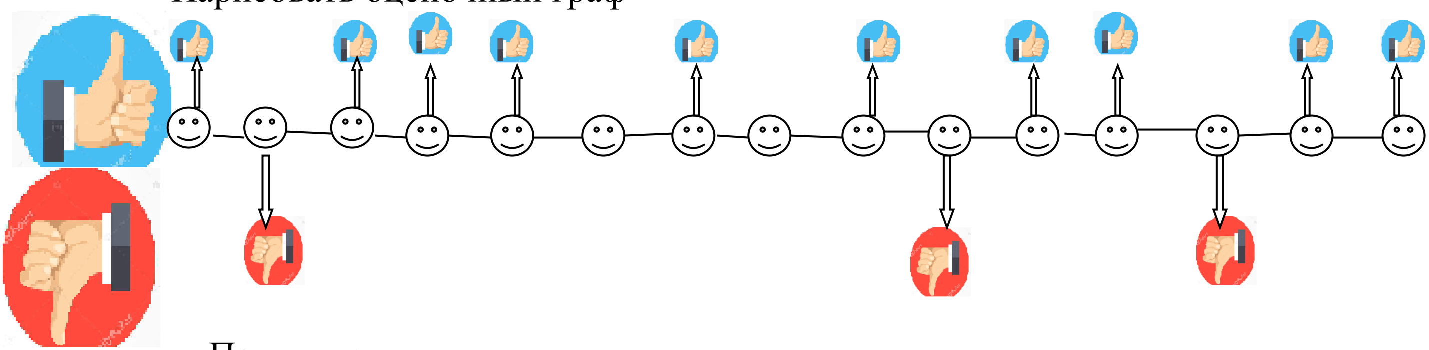
Таблица 5

Номер задачи	Вариант 1	Вариант 2
1	Нарисовать граф и сосчитать сумму степеней графа А-2, Б- 2, В-5, Г- 3	Нарисовать граф и сосчитать сумму степеней графа А-3, Б- 3, В-2, Г- 4
2	Можно ли одним росчерком написать буквы H, M, F	Можно ли одним росчерком написать буквы P, R, E
3	В уме было задумано некое число. К этому числу прибавлю 24, после то, что получилось умножу на 9, далее из полученного произведения вычту 76, а после возьму полученную разность разделю на 19. После всех этих действий у меня вышло 23. Найдите задуманное мною число.	В уме было задумано некое число. Умножу его на 7, а потом прибавлю 15. Далее полученную сумму умножу на 10, а после из произведения вычту 76. Возьму полученную разность и разделю на 6. После всех этих действий у меня вышло 24. Найдите задуманное мною число.

Подведем итоги. Выставим оценки.

В качестве оценки уровня полученных знаний по этой теме можно предложить учащимся вести в виде графа. Объекты – учитель, ученики класса. Отношения – оценка усвоенных знаний. Сделать такие карточки.

Нарисовать оценочный граф



Получился

смешанный граф.

Стрелка вверх 5 баллов. Стрелка вниз 2 балла. Если стрелки нет, учащийся получил – 3 балла.

Считаем среднюю оценку: 5*10+ 3*2+ 2*3 =62. Делим на 15. Получаем в среднем 4,1 балла.

Учащимся будет интересно оценивать знания с помощью теории графов. Сведения вносить в таблицу и увидеть динамику подготовки и усвоения материала по каждому учащемуся и в целом по классу. Возможно включить сюда можно и оценку уровня преподавания учителя.

2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Педагогический эксперимент проходил на базе МБОУ СШ № 75, 5А класс. В классе присутствовало в среднем 15 учеников.

Цель эксперимента: формирование умений знакового моделирования на языке теории графов.

Этапы эксперимента:

1. Констатирующий этап – входная диагностика уровня сформированности умений знакового моделирования на языке теории графов.
2. Формирующий этап – экспериментальное обучение элементам теории графов на основе авторской методики.
3. Заключительный этап – итоговая диагностика уровня сформированности умений знакового моделирования на языке теории графов.

В конце первого занятия составим диагностическую карту (таблица6).

Таблица 6

Задание	Вид УУД	Уровень сформированности	Процент сформированности
1.Построение графа по кол-ву ребер и вершин	Знать язык теории графов (знаки, символы и др.), основные понятия (вершины, ребро, степень вершины, цикл, маршрут, дерево,	Высокий (3балла)	80%-100%
		Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	<50%
2.Построение	Уметь сопоставить связи	Высокий (3балла)	80%-100%

графа по словесному описанию	между вершинами(объектами). построить граф (знаковую модель)	Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	< 50%
3.Ответить на вопрос: Можно ли 5 столбов соединить проводами так, чтобы каждый был соединен ровно с 3-мя другими?	Владеть способами решения задач с помощью теории графов	Высокий (3балла)	80%-100%
		Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	< 50%

Подсчитаем баллы и занесем в таблицу (таблица 7).

Таблица 7

Количество баллов	Отметка	Количество обучающихся
7-9	5	6
4-6	4	8
3	3	1
< 3	2	

Из данных в таблице видим, что большинство учащихся 5 класса усвоили основные понятия теории графов и сумели решит предложенные задачи уже после 1-го занятия.

В конце каждого из проведенных занятий № 2,3,4 составляем диагностическую карту согласно теме урока соответственно:

- Эйлеровы и Гамильтоновы пути в графе (задачи на рисование фигур одним росчерком),

- решение комбинаторных задач (подсчет числа способов) и логических задач («кто есть кто») с помощью теории графов,
- деревья, прикладные задачи теории графов.

И наконец, после проведенного последнего занятия № 5 с учетом выполненной итоговой (самостоятельной) работы имеем (таблица 8).

Таблица 8

Задание	Вид УУД	Уровень сформированности	Процент сформированности
1.Нарисовать граф и сосчитать сумму степеней графа	Знать язык теории графов (знаки, символы и др.), основные понятия (вершины, ребро, степень вершины, цикл, маршрут, дерево	Высокий (3балла)	80%-100%
		Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	<50%
2.Можно ли одним росчерком написать буквы Н, М, F	Уметь сопоставить связи между вершинами(объектами). построить граф (знаковую модель)	Высокий (3балла)	80%-100%
		Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	< 50%
3. В уме было задумано некое число. К этому числу прибавлю 10, после то, что получилось умножу на 3, далее из полученного произведения вычту 16, а после возьму полученную разность	Владеть способами решения задач с помощью теории графов	Высокий (3балла)	80%-100%
		Средний (2 балла)	50%-70%
		Низкий (1 балл)	< 50%

разделю на 3. После всех этих действий у меня вышло 23. Найдите задуманное мною число.			

Подсчитаем баллы и занесем в таблицу (таблица 9).

Таблица 9

Количество баллов	Отметка	Количество обучающихся
7-9	5	7
4-6	4	8
3	3	
< 3	2	

Сравнение полученных результатов показывает положительную динамику усвоения теории графов 5тиклассниками.

Предложенная методика, а именно усвоение теории графов происходило в процессе решения различных типов задач. И немало важно, что усвоение теории графов 5-тиклассниками - это отнюдь не является достоянием только лишь талантливых от природы учащихся - это развитие аналитических способностей и навыков, необходимых при выполнении сложных преобразований, четких представлений и алгоритмического мышления, необходимых при отыскании путей к решению нешаблонных творческих задач.

Заключение

В ходе проведенного исследования можно прийти к выводу, что на данный момент существуют определенные возможности для включения элементов теории графов в содержание математической подготовки школьников 5 класса. Одной из главных особенностей теории графов, которая позволяет ставить вопрос о введении элементов теории графов в школьный курс математики, является возможность представить граф (как математическую модель или как отвлеченный образ) геометрически – в виде простого и наглядного (имеется в виду удобного для человека) в обращении рисунка: вершины отождествляются с точками на плоскости, а ребра – с линиями, соединяющими вершины. При построении рисунков графов, соответствующих какому-то явлению, мы имеем дело с так называемым знаковым моделированием.

Перспективным и достаточно естественным является использование изобразительного языка графов в качестве служебных средств, при решении различных методических вопросов, связанных с обучением математике.

В рамках данного исследования охарактеризованы основные дидактические условия для включения элементов теории графов в математическую подготовку учащихся 5 класса.

Разработана примерная программа по теме «Элементы теории графов» для включения в математическую подготовку обучающихся 5 класса, рассчитанная на 10 часов. Представлено соответствующее методическое сопровождение – методическая разработка цикла уроков по теме «Элементы теории графов». Для каждого урока отобрано и адаптировано для 5 класса специальное содержание обучения элементам теории графов. В методической разработке представлен комплекс разнообразных задач, направленный на формирование навыков знакового моделирования у обучающихся 5 класса.

На базе МБОУ «Тиличетская СШ» проведен педагогический эксперимент по формированию навыков знакового моделирования у обучающихся 5 класса.

Результаты педагогического эксперимента подтверждают гипотезу исследования: изучение элементов теории графов способствует формированию умений создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

В ходе проведѐнного исследования все основные задачи выполнены и цель достигнута.

Библиографический список

1. Алексеев В.В., Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. (ред.) Теория графов. Покрытия, укладки, турниры. Сборник переводов - М.: Мир, 1974.— 224.
2. Альсина К. Карты метро и нейронные связи. Теория графов. / Пер. с исп.- М.: Де Агостини, 2014 г.

1. Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Задачи по дискретной математике: Учебно- методическое пособие. — Казань: Казанский федеральный университет, 2013. — 26 с

2. Андреев В.И. Педагогика творческого саморазвития. Казань, 1996. С.568

3. Асельдеров З.М., Донец Г.А. Представление и восстановление графов - К.:Наукова Думка, 1991, 96 стр.

4. . Березина Л. Ю. Графы и их применение. Пособие для учителей. – М.: просвещение, 1979.

5. Берж К. «Теория графов и ее применение», М, «Мир», 1980;

6. Богомолова О.Б. Логические задачи. 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277с. :ил.

7. Большой энциклопедический словарь: в 2-х т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – Сов. энциклопедия, 1991

8. Болховитинов В. Н., Колтовой В. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. М.: Детская литература, 1975.

9. Волкова С.В. Дидактические условия реализации учащимися личностных смыслов в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Петрозаводск, 2002.

10. «В помощь учителю математики», Йошкар-Ола, 1972 (ст. «Изучение элементов теории графов»)

11. Гарднер М. «Математические головоломки и развлечения», М. «Мир», 1972.

12. Глухова А.К, «Элементы теории графов в школьном курсе математики», диссертация, Москва, 2016 г.

13. Государственная программа Российской Федерации "Развитие образования" (С изменениями и дополнениями от: 22 февраля, 30 марта, 26 апреля, 11 сентября, 4 октября 2018 г., 22 января, 29 марта 2019 г).

14. Донец Г.А., Шор Н.З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов - К.: Наукова думка, 1982. — 144 с.

15. Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения. - Автореф. дисс. к.п.н. - Брянск, 2001

16. Зыков А.А. Основы теории графов. - М.:Наука, 1987, 384 с.

17. Жуковская Е.П. Дидактические аспекты организации факультативов [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://festival.1september.ru.

18. Игнатьев, Е.И. Хрестоматия по математике «В царстве смекалки, или арифметика для всех» – Ростов, 1995 г

19. Калмыков Г. И. Древесная классификация помеченных графов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 192 с.

20. Кейв М.А. Дискретная математика для будущего учителя: уч. пос.- Красноярск: КГПУ им В.П. Астафьева, 2009.

21. Кейв М.А. Дискретная математика: учебное пособие [электронное издание]. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2016.

22. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие. – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2015.

23. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с анг. - М.:Мир, 1978, 432 с.

24. Курьянов, М.А. Активные методы обучения : метод. пособие / М.А. Курьянов, В.С. Половцев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с. – 50 экз.

25. Лернер И.Я., Дидактические основы методов обучения. М.: Педагогика, 1981. - 186 с

26. Ложакова Е.А. Педагогические условия и принципы обеспечения эффективности процесса формирования информационной компетентности студентов музыкальных специальностей в ходе обучения информатики // Вестник РУДН. - 2011. - № 3. - С. 3-6.

27. Луначарский А.В., статья из «Учительской газеты» №1, 1924 г.

28. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Г.В.Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б.Суворов и др.под ред. Г.В.Дорофеева, И.Ф. Шарыгина, 5-е изд.М: Просвещение, 2017-287с

29. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.) М: Просвещение

30. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.) М: Просвещение

31. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.) М: Просвещение.

32. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Б.) М: Просвещение

33. Математика, 5 класс: учеб. для общеобразовательных организаций (Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие) М: Просвещение.

34. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств - М.:Наука, 1974, 304 с.

35. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд.3, испр. и доп. 2009. 232 с.

36. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов, уч.-Метод. Пособие/ Изд-е 2-е, стереотип.- Минск: НТОО «ТетраСистемс», 2001.

37. Мельников, О.И. Незнайка в стране графов. – М.: КомКнига/URSS, 2006.

38. Мельников О.И. Теория графов для учителей, для школьников…И не только! Книга ,которая научит вас теории графов и поможет обучать ей других. Под ред Метельского Ю.М., Москва,Ленанд, 2017 г.240с.

39. Оре О. Графы и их применение: пер. с англ./ Под ред. И предисл. И.М. Яглома. Изд. 4-е.- М.: Издательство ЛКИ, 2008.

40. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. - М.:Мир, 1984, 456 с.

41. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 576 с.

42. «Соросовский образовательный журнал» №11, 1996 (ст. «Плоские графы»)

43. Татт, У. Теория графов. – М.: Мир, 1988.

44. Фарков, А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 класс. – М., 2004

45. Шевченко, В.Е. Некоторые способы решения логических задач. – Киев, Вища школа, головное изд-во, 1979 – 80 с.

46. Энциклопедия: Дискретная математика /Гл. ред. В.Я. Козлов. – М.: БРЭ, 2004.

47. Уилсон Р. Введение в теорию графов. Пер. с анг. 1977. 208 с.

48. Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы. Пер. с англ. - М.:Мир, 2002, 176 с.

49. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утв.приказом Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010г.N 1897). С изменениями и дополнениями от: 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., 11 декабря 2020 г.

50. Харари Ф. Теория графов / Пер.с англ. и предисл. В. П. Козырева. Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 296 с.

51. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов - М.: Мир, 1977. - 324 с.

52. Хотченкова Е.А. Развитие логического мышления школьников средствами учебного предмета «Математика». – Автореф. дисс. к.п.н. - Ставрополь, 2006.

Цифровые образовательные ресурсы

53. Федеральный государственный образовательный стандарт (официальный сайт) http://standart.edu.ru/

54. Сайт издательского центра «Вентана-Граф» http://www.vgf.ru/

55. Программа по математике (5-9 класс). Издательский центр «Вентана-Граф» http://www.vgf.ru/tabid/210/Default.aspx

56. Федеральный портал «Российское образование» http://www.edu.ru

57. Единая коллекция образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/

58. Всероссийский интернет-педсовет http://pedsovet.org

59. Портал «Открытый класс» http://www.openclass.ru/

60. Презентации по всем предметам http://powerpoint.net.ru/

61. Сайт учителя математики Е.М.Савченко http://powerpoint.net.ru/

62. Электронное пособие. Математика, поурочные планы 5-6 классы. Издательство «Учитель»

63. http://naukovedenie.ru/PDF/06PVN515.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06PVN515

ПРИЛОЖЕНИЕ
Выписка

Список учебников по математике 5-6 кл. АО "Издательство "Просвещение", включенных в федеральный перечень учебников

На основании Приказа Министерства просвещения № 766 от 23.12.2020 г. о внесении изменений в федеральный перечень учебников, утвержденный Приказом Министерства просвещения № 254 от 20.05.2020 г.

Номер ФПУ	Наименование по федеральному перечню	Авторы по федеральному перечню	Класс по федеральному перечню	Линия УМК	Предмет	Издательство по федеральному перечню	Правообладатель	Специальный учебник / углубленное обучение
1.1.2.4.1.1.1	Математика	Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и другие	5	Математика. "Сферы" (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.1.2	Математика	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и другие	6	Математика. "Сферы" (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.11.1	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	5	Математика. Истомина Н. Б. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.11.2	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	6	Математика. Истомина Н. Б. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.12.1	Математика (в 2 частях)	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.	5	Математика. Виленкин Н.Я. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.12.2	Математика (в 2 частях)	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С.И.	6	Математика. Виленкин Н.Я. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	

1.1.2.4.1.3.1	Математика (в 2 частях)	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	5	Математика. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. (5-6)	Математика	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.3.2	Математика (в 3 частях)	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	6	Математика. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. (5-6)	Математика	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.4.1	Математика	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и другие	5	Математика. Дорофеев Г.В. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.4.2	Математика	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и другие	6	Математика. Дорофеев Г.В. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.6.1	Математика	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Е.	5	УМК Мерзляка. Математика (5-6)	Математика	ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.6.2	Математика	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Е.	6	УМК Мерзляка. Математика (5-6)	Математика	ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ»; АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.7.1	Математика	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие	5	Математика. Никольский С.М. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.7.2	Математика	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и другие	6	Математика. Никольский С.М. и др. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	
1.1.2.4.1.8.1	Математика	Ткачёва М.В.	5	Математика. Ткачёва М. В. (5-6)	Математика	АО «Издательство «Просвещение»	АО «Издательство «Просвещение»	