МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им.В.П.АСТАФЬЕВА

(КГПУ им.В.П.Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики

(полное наименование института/факультета)

Кафедра алгебры, геометрии и МП

(полное наименование кафедры)

Специальность 050201.65 математика с доп. специальностью 050202.65 информатика

(код ОКСО и наименование специальности)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой алгебры, геометрии и МП

(полное наименование кафедры)

д. п. н., профессор В.Р. Майер

(подпись) (И.О.Фамилия)

«________» ____________ 2015 г.

Выпускная квалификационная работа

Изложение тригонометрии в школе с использованием анимации в среде GeoGebra

Выполнил магистр

Асел Аскарова

(И.О.Фамилия) (подпись, дата)

Форма обучения очная

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., профессор

С.В. Ларин

(ученая степень, должность, И.О.Фамилия)) (подпись, дата)

Рецензент

д.п.н., профессор, зав. каф

информатики и

информационных технологий

в образовании Н.И.Пак

(ученая степень, должность, И.О.Фамилия) (подпись, дата)

Дата защиты 30.06.2015

Оценка

Красноярск - 2015

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

Закон Республики Казахстан «Об образовании»	27.07.2007г.
Государственные стандарты Республики Казахстан. Информационные технологии.	СТ РК 34.017-2005
Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы	07.12.2010г. №118
Послание Президента народу Казахстана. Социально – экономическая модернизация – главный вектор развития Казахстана	27.01.2012г.
Национальный план действий на 2012-2016 годы по развитию функциональной грамотности школьников	25.06.2012г. №832
Государственный общеобязательный стандарт среднего образования (начального, основного среднего, общего среднего образования).	23.08.2012г. №1080

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей диссертации используются следующие понятия:

Математический анализ	наука работающая с исследованием функций; дифференциальное и интегральное исчисление – наука исследующая интегрирование и дифференцирование функций, а также решение дифференциальных и интегральных уравнений.
Методика	в широком смысле слова, понимается как совокупность методов практического выполнения чего-либо. В образовательном процессе этот термин применяется к определенному предметному содержанию.
Методика обучения математике	– исследует закономерности обучения математике в соответствии с поставленными обществом учебными целями, учитывающими современный уровень развития науки математики.
Преемственность в обучении математике	это установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения.
Производная функции	Производной функции y=f(x),заданной на интервале (a;b), в точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.
Физический и геометрический смысл производной	Физический (механический) смысл производной: если s(t) – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: v=s'(t). Геометрический смысл производной: если к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x=a можно провести касательную, непараллельную оси y, то f'(a) выражает угловой коэффициент касательной: k=f'(a).

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

РК	Республика Казахстан
МОН РК	Министерство образования и науки Республики Казахстан
ИКТ	Информационно - коммуникационные технологии
IEA	International Association for the Evaluation of Educational Achievements
PISA	Program for International Student Assessment
РФ	Российская Федерация
ЭО	Элементы обучения
ВУЗ	Высшее учебное заведение
ШКМ	Школьный курс математики
GeoGebra	A geometry package providing for both graphical and algebraic input.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В настоящее время стремительно возрастает роль образования, усиливается его влияние на все сферы социальной жизни. Переход от индустриального общества к постиндустриальному и информационному означает, что процессы создания и распространения знания становятся ключевыми. Усиление роли знаний в общественном развитии, постепенное превращение информации в основной капитал принципиально изменяют роль образования в структуре общественной жизни современного мира. Эти процессы в значительной степени опираются на использование и развитие образовательных систем различного уровня: от обычного общеобразовательного учреждения до международных проектов, охватывающих своим влиянием не только несколько стран, но даже целые континенты. В это же время существенно увеличивается значение образования как важнейшего фактора формирования нового качества не только экономики, но и общества в целом.

В современном обществе наряду с накоплением эмпирических данных в различных областях знаний наблюдается динамический рост теоретических исследований, который сопровождается изменением самой парадигмы их проведения. Изменения коснулись и теории обучения, а с развитием кибернетики и информационных технологий, основанных на применении компьютеров в обучении, обнаружились общие проблемы. Методология их решения привела к новому пониманию проблемы управления учебной деятельностью и ее диагностики. Однако преимущества информационных технологий могут быть быстро утрачены, если не будет осуществлена глубокая и всесторонняя модернизация образования с выделением необходимых для этого ресурсов и созданием механизмов их эффективного использования.

Специфика современной системы образования состоит в том, что она должна быть способна не только вооружать обучающегося знаниями, но и формировать у него потребность в непрерывном самостоятельном и творческом подходе к овладению новыми знаниями, создавать возможности для отработки умений и навыков самообразования. Современные тенденции социально - экономического развития Казахстана и России заставляют переосмыслить цели школьного образования, соответственно по-новому сформулировать и планируемые результаты образования.

Создание Программы информационного обучения является одним из важнейших направлений государственного подхода к развитию образования. Такая программа было принята президентом РК Н.А.Назарбаевым и Парламентом РК в 2010 году. В соответствии с ней информационное обучение в РК в 2011-2020 годы было внедрено в образовательную систему [1]. На сегодняшний день система информационного образования в развитых странах имеет хорошие показатели.

Наша цель – способствовать внедрению информационно-коммуникационных технологий в обучение математике. При этом мы сосредоточим свои усилия на наиболее сложных вопросах школьной математики старших классов и рассмотрим начала математического анализа.

Обучая математике, следует понимать, что для некоторых учащихся это «смысл жизни», а для кого-то «суровая необходимость». Ясно, что развитие личности при одинаковых условиях будет совершенно разным, так как индивидуальные склонности и интересы учащихся всегда будут побуждать к активному изучению какого-то предмета или группы предметов, что совершенно естественно. Безусловно, учитель, организуя учебный процесс, во-первых, должен знать об этих интересах и склонностях, уважать и ценить их (даже если они не связаны с его предметом), а во-вторых, обучать своему предмету так, чтобы целостно влиять на развитие личности каждого школьника, стремясь развивать все его стержневые качества, не забывая о сопутствующих. При этом следует стимулировать интерес учащихся к данному предмету, так как только таким целостным образом можно влиять на развитие личности.

В развитии и совершенствовании методического мастерства учителей - предметников, безусловно, играет роль правильно отобранное содержание методики обучения математике, включающее систему знаний, умений и навыков, выстроенные принципы и методы обучения математике и др. К подмножеству содержания обучения относится деятельность преподавателей по передаче учебных материалов студентам: методы, формы, средства обучения, методы проверки знаний, умений и т.п. Содержание обучения должно соответствовать педагогическим принципам, таким как воспитание, научность, систематичность, последовательность, развитие и др. Реализация этих принципов возможна при условии выполнения следующих требований: воспитание у учащихся интереса к учению, овладение основами педагогического мастерства, стремление к творческой деятельности и т.п.

Отметим, что содержание образования в общеобразовательной школе разбивается на отдельные образовательные области и математика рассматривается в качестве одной из них, включающая следующие дисциплины:

- математика в начальной и в основной школе (5 – 6 кл.);
- алгебра и геометрия в основной средней школе (7 – 9 кл.);
- алгебра и начала анализа, геометрия в общей средней школе по направлениям (10 – 11 кл.).

Основу содержания образовательной области «Математика» составляют:

- теория числовых систем;
- теория тождественных преобразований;
- теория элементарных функций (алгебраических, трансцендентных);

- теория элементарных уравнений и неравенств, их систем и методов решения;
- элементы математического анализа и его приложения;
- теория приближенных вычислений;
- плоские и пространственные фигуры, их свойства;
- геометрические величины;
- геометрические преобразования;
- элементы комбинаторики и теории вероятности;
- математические методы, методы решения задач и др. [А.Е.Абылкасымова. Теория и методика обучения математике: дидактико- методические основы,с 22]

Известно, что структура и содержание школьной математики должны соответствовать целям обучения и воспитания учащихся. Поэтому школьный курс математики по возможности должен способствовать развитию математического мышления, воспитанию личности учащихся и интереса к предмету. Возникает естественный вопрос: от чего зависит достижение целей обучения математике в общеобразовательных школах; развитие и воспитание личности учащихся?

Оно зависит, прежде всего, от следующих факторов:

1) от содержания обучения, от того, какими знаниями, умениями и навыками овладевают учащиеся в процессе обучения, в каком порядке, в каком сочетании даются эти знания, умения и навыки, какой глубины и широты эти знания, насколько прочны умения и навыки;

2) от связи обучения математике с окружающей действительностью, на основе каких жизненных представлений, явлений и фактов формируются абстрактные математические понятия, какие практические приложения получают приобретенные знания и умения, как освещаются исторические аспекты математики;

3) от осуществления межпредметных связей в обучении математике «по вертикали»;

4) от рациональной организации методов обучения математике;

5) от отношения учащихся к обучению математике и приобщения их к самостоятельной познавательной деятельности в процессе обучения.

Последний фактор является стержневым, от него во многом зависит выполнение предыдущих факторов.

По вопросу отбора содержания школьного курса математики написано немало методических пособий. Уровень характера интеллекта личности зависит от способностей воспринимать информацию и использовать ее для достижения поставленной цели. Понятно, что обучение должно развивать личность. Однако развивающая задача обучения не должна ограничиваться только на применение способностей для решения различных задач и проблемных ситуаций. Необходимо добавить, что все это достигается воспитанием сознания личности. Г.В.Дорофеев также высказывает интересную мысль о построении школьного курса математики. Он отмечает, что система обучения математике должна строиться как система, направленная на решение противоречий между конкретным человеком и целым обществом. Построение отношений между двумя субъектами процесса цивилизованного развития общества, имеющих свои цели, так, чтобы каждый из них с пониманием относился к выполнению задач, стоящих перед другим, предыдущим, является необходимым условием демократизации систем современного и будущего образования.

Итак, обучение математике должно обеспечить усвоение всеми учащимися необходимого для реализации целей математического образования объема знаний и подготовить специалистов для всех сфер общества, требующих математических знаний и умений. При этом содержание образования должно:

- создать возможность для полноценной организации математической деятельности учащихся (интеллектуальная составляющая);
- обеспечить возможность реализации усвоения всеми учащимися программных знаний в условиях уровневой и профильной подготовки и индивидуализации обучения;
- создать по возможности на каждом этапе обучения условия для формирования, поддержки и развития интереса учащихся к изучению математики (познавательная составляющая);
- определить у учащихся математические и обще интеллектуальные способности с целью точного выбора учебного профиля и правильного выбора специальности (контрольно-прогнозирующая составляющая);
- обеспечить возможность связи с другими школьными предметами.

Известно, что основа каждой науки закладывается их понятиями. Все законы, правила, теории, аксиомы, теоремы формируется с помощью понятия. Изложение указанных единиц в процессе обучения математике должно осуществляться методически выверенно. Не вызывает сомнения и то, что в результате обучения учащиеся должны усвоить определенную систему знаний умений и навыков. Однако проблемой является определение того, как измеряется усвоение системы знаний, а также связь с умениями и навыками, которые должны основываться на знании, в противном случае оно может не сформироваться. В этой связи А.А.Столяр предлагал рассматривать обучение математике как процесс «формирования и развития мыслительной деятельности из известной структуры, называемой математической деятельностью». Он придерживался следующего принципа: полноценное усвоение математики предполагает активность учащихся в учебном процессе. Без активной познавательной деятельности невозможно осознанно и прочно овладеть знаниями, усвоить и сформировать навыки. А.А.Столяр считал, что учащиеся в учебном процессе должны проявлять активность не только в широком смысле, но и в математической деятельности, т.е. специфическую для математики активность. Деятельность учащихся в процессе обучения математике – учебная, благодаря которой они знакомятся с особенностями математической деятельности и усваивают ее. (9 деп тур)

[А.Е.Абылкасымова. Теория и методика обучения математике: дидактико-методические основы,с 35]

Тема «Производная» занимает центральное место в курсе алгебры и начал анализа. Изучение данной темы весьма актуально, так как оно имеет большое образовательное значение, ведь с нее начинается изучение элементов математического анализа, а это дает новые методы решения математических, физических и геометрических задач.

Одним из основных достоинств компьютерных технологий в образовании являются возможности анимации, создание живых рисунков (анимационных чертежей), демонстрирующих математические понятия и теоремы. Особенно это злободневно при изучении элементов математического анализа, в котором рассматриваются процессы изменения связанных друг с другом переменных величин. Одним из важнейших и одновременно сложных для понимания учащимися тем математического анализа является понятие производной. Трудность овладения этим понятием связана с чрезмерной абстрактностью, с отсутствием движения при изучении движения. Восполнить пробел и помочь в преподавании этой темы, обеспечивая наглядность, как раз и призваны компьютерные программы, позволяющие создавать анимационные чертежи. Наиболее приспособленной для этих целей является компьютерная среда GeoGebra. Она не требует специальных знаний программирования, проста в применении, использует геометрическое моделирование. Например, учитель, сотрудничая с учеником, может построить чертеж, который при анимации точки, изображающей переменную x, вычерчивает «непрерывно» график данной функции, а также график ее производной. Можно не только анимационно изобразить график функции, но и смоделировать движение, которое описывает данная функция.

Особенность динамического (кинематического) определения можно представить на примере. В соответствии со школьным определением окружностью называется множество тех и только тех точек плоскости, каждая из которых удалена от фиксированной точки плоскости на данное фиксированное расстояние. В соответствии с динамическим (кинематическим) определением окружность есть линия, которую *вычерчивает* точка плоскости при непрерывном вращении ее вокруг фиксированной точки этой плоскости. При этом мы получаем непрерывную замкнутую кривую в интуитивном понимании этих слов. Непрерывность линии понимаем, как возможность начертить ее, не отрываясь от плоскости, а замкнутость – как возможность, продвигаясь в одном направлении, вернуться в исходную точку. Математическое описание непрерывности и замкнутости линии мы не рассматриваем.

В рамках динамической математики многие понятия и теоремы становятся для учащихся «видимыми» и «осязаемыми». Параллельно ученик учится использованию компьютерных технологий не только в обучении, но и при решении исследовательских задач.

Решение задачи в динамической математике проходит три ступени:

1) Геометрическое моделирование условия задачи на экране компьютера.

2) Решение задачи на экране с использованием возможностей анимации.

3) Построение математической модели решения, увиденного на экране.

Одним из представителей компьютерной составляющей динамической математики является среда GeoGebra. Как сказано в Википедии [19], «GeoGebra – свободно распространяемая динамическая геометрическая среда, которая дает возможность создавать чертежи, в частности, с использованием построений с помощью циркуля и линейки. Кроме того, у программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т. д.) за счёт команд встроенного языка (который, кстати, позволяет управлять и геометрическими построениями). Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java (работает на большом числе операционных систем). Переведена на 39 языков. Полностью поддерживает русский язык. В настоящее время активно разрабатывается».

Компьютерная среда GeoGebra позволяет визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования при решении математических задач не только геометрического характера. Особенностью этой среды является возможность создания на экране чертежей, выполненных циркулем и линейкой, причем, если некоторую точку чертежа переместить (с помощью мышки) в другое место, то все зависимые элементы чертежа изменяют свое положение так, что сохраняется последовательность построения чертежа, а значит взаимная принадлежность точек и прямых и параллельность прямых. Если, к примеру, по точке X и некоторому набору параметров (длин отрезков, радиусов окружностей) с помощью инструментов, заложенных в этой системе, построена зависимая точка $f(X)$, то можно задать анимацию точки X, при которой эта точка будет перемещаться по заданной линии (например, по оси абсцисс), в то время как зависимая точка $f(X)$, оставляя след, будет вычерчивать некоторую кривую. Это позволяет помимо графиков функций вычерчивать линии, заданные динамическими определениями (эллипс, гиперболу, параболу, циклоиду, кардиоиду, овалы Кассини, циссоиду и др.)..

С методической точки зрения среда GeoGebra позволяет создавать на экране компьютера чертежи, которые можно использовать на разных стадиях изучения учебного материала, от чертежей иллюстративного характера (живых плакатов) до исследовательских чертежей. Особенно поучительным является сам процесс создания соответствующего рисунка.

Таким образом, использование среды GeoGebra *вносит движение* в преподавание математики. Можно, конечно, игнорировать эти новые дидактические возможности и «учить по старому». Но, как сказано в английской пословице, «A good example is the best sermon» в переводе «Хороший пример – лучшее поучение» или «Ничто не убеждает людей лучше примера».

Какова сложность освоения среды GeoGebra? Эта среда представляет собой «мастерскую с инструментами» по изготовлению анимационных чертежей и надо лишь знать под какой кнопкой лежит нужный инструмент. Никаких специальных знаний по программированию не требуется.

Для первого знакомства с компьютерной средой GeoGebra читателю предлагается открыть файл в GeoGebra и выполнить простейшие упражнения, смело экспериментируя и внимательно читая появляющиеся пояснительные надписи. Первичные знания, заложенные в этих упражнениях, в дальнейшем по мере надобности будут дополнены описаниями других возможностей данной компьютерной среды. (Для последовательного изучения GeoGebra можно воспользоваться учебным ресурсом [22]).

Проблемой настоящего исследования является выявление эффективных с профессионально-педагогической точки зрения форм и методов организации учебно-исследовательской деятельности учащихся в процессе изучения математики с использованием информационных технологий.

Решение этой проблемы составляет цель данного исследования.

Объект исследования – «Методические особенности изучения производной и исследования функции с помощью производной в школьном курсе математики».

Предмет исследования – дидактические возможности изложения темы «Производная» в школьном курсе математики с использованием информационного ресурса GeoGebra.

Цель исследования – теоретически обосновать и предложить средства и методы обучения с использованием информационных технологий, способствующие повышению уровня усвоения учащимся учебного материала по теме «Методические особенности изучения производной и исследования функции с помощью производной в школьном курсе математики».

Гипотеза исследования: Методические особенности изучения производной и исследования функций с помощью производной в школьном курсе математики, опирающиеся на динамические возможности компьютерных сред, повышают уровень усвоения знаний по указанной теме.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи**:

- ✓ Проанализировать методику изучения производной и исследования функций с помощью производной в ШКМ
- ✓ Выявить основные проблемы и затруднения при изучении темы
- ✓ Определить дидактические возможности компьютерных сред для изучения производной
- ✓ Предложить методику изучения производной с использованием компьютерных сред
- ✓ Провести опытно экспериментальные занятия в школе и проанализировать их результат.
- ✓ Разработать методику использования компьютерной среды GeoGebra при изучении темы «Производная».

Методы исследования. Изучение литературы по теме исследования, анализ методических проблем, создание дидактического материала и апробирование его путем проведения образовательного эксперимента с последующей обработкой результатов эксперимента.

Научная новизна. На базе использования новых информационных технологий с целью улучшения качества образования создан новый дидактический материал по теме «Производная и исследование функции с помощью производной» с использованием анимационных чертежей созданных в среде GeoGebra.

Теоретическая значимость. Использование информационных технологий в обучении математике является новым требованием времени и имеет первостепенное значение в современной методике преподавания математики.

Практическая значимость. Созданный дидактический материал готов к использованию в практике современного школьного учителя математики и будет востребован не только при изучении учебного материала, но и при организации самостоятельной учебно-исследовательской деятельности учащихся.

Достоверность и обоснованность полученных результатов отчасти опирается на проведенный эксперимент. Результаты доложены на Научном семинаре кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, г. Красноярск, РФ.

Основные результаты работы, выносимые на защиту:

1. Анализ методологических работ по исследованию функции с помощью производной.
2. Дидактические возможности компьютерных сред при изучении производной и ее приложений.
3. Методика изучения начал математического анализа с использованием компьютерных сред
4. Особенности организации деятельности учащихся в компьютерной среде в процессе изучения производной.
5. Методика организации экспериментальной работы по изучению темы «Исследования функции с помощью производной» с использованием компьютерных сред.

Апробация работы организована в школах г. Алматы и на базе студенческих групп Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, г. Красноярск, РФ.

Публикации:

1. «Орта мектепте тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің әдістемелік жүйесі» // «Педагогика және психология» − № 4 (21). Алматы, 2014. – Б.209-212 (А.Е.Әбілқасымова және А.С.Мамутова бірлестікте)

2. «Динамический компьютерный «фитнес» памяти» // XIV Международная научно-практическая интернет-конференция «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах Европы и Азии», 30-31 мая 2015г., г. Переяслав-Хмельницкий, Украина.−184-187с. (совместно с А.С.Мамутовой)

3. «Изучение производной в школе с использованием анимации в среде GeoGebra» // III Всероссийской научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании», 18-20 ноября 2014г., г.Красноярск, РФ. – 10-20с. (совместно с С.В.Лариным)

Структура диссертации. Во вводной части формулируются цели, задачи исследования, обосновывается его значимость. Глава 1 посвящена анализу методической проблемы, а в главе 2 представлено изложение материала с использованием анимационных чертежей, созданных в компьютерной среде GeoGebra. В Приложениях А и Б даны разработки двух уроков по теме исследования, а в приложении С (на диске) представлены файлы, созданные в компьютерной среде GeoGebra, которые используются при изложении математического материала.

Список литературы содержит … названий.

Глава 1. АНАЛИЗ МЕТОДИК ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ И ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЕ

1.1 Место и значение изучения производной в школьном курсе математики

При изучении элементов анализа в школе основное внимание уделяется производной и первообразной. Это связано с широким использованием этих понятий как в школьной математике, так и в физике. В математике производная активно используется при исследовании функций, первообразная – при вычислении площадей криволинейных фигур. В Большой Советской энциклопедии написано: «Математический анализ – наука работающая с исследованием функций; дифференциальное и интегральное исчисление – наука исследующая интегрирование и дифференцирование функций, а также решение дифференциальных и интегральных уравнений» [20].

Сначала перечислим все новые понятия анализа вводимые в курсе математики старшей общеобразовательной школы. С одной стороны, понятие функции является «ключевым», с другой стороны, есть требование включения понятий дифференциальных и интегральных исчислений. Отсюда в основные понятия элементов математического анализа отнесем понятия, связанные с дифференциальными и интегральными исчислениями, а именно:

- предел последовательности;
- ограниченность последовательности;
- граница последовательности;
- окрестность точки, радиус окрестности;
- сходящиеся последовательности;
- свойства пределов (предел суммы равен сумме пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов; постоянный множитель можно вынести за знак предела);
- предел функции на бесконечности;
- предел функции в точке;
- непрерывная функция;
- приращение аргумента и приращение функции;
- производная;
- формулы дифференцирования;
- правила дифференцирования (включает 5 теорем)
- уравнение касательной к графику функции;
- исследование функций на монотонность;
- точки экстремума функции и их нахождение; нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке;

Определения основных понятий:

- Если каждому натуральному числу *n* поставлено в соответствие некоторое вещественное число x_n, то говорят, что задана *числовая* *последовательность* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$. Кратко она обозначается символом $\{x_n\}, n \in N$, x_n называют n-м членом последовательности. Совокупность этих чисел называют множеством значений последовательности.

Существует несколько способов задания числовых последовательностей.

1. Последовательность может быть задана при помощи формулы, позволяющей вычислить каждый ее член по номеру (например, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$).

2. Часто последовательность задается при помощи ***рекуррентной формулы***, позволяющей определить каждый член последовательности по одному или нескольким предыдущим; при этом необходимо задание одного или нескольких первых членов последовательности. К таковым относятся арифметическая и геометрическая прогрессии или, например, ***последовательность Фибоначчи***, задаваемая формулой

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ при $n\rangle 0$ и условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

3. Иногда последовательность задается описанием ее членов, например, последовательность, у которой x_n равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\pi = 3{,}14159265358979323\ldots$, задается следующим образом: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, $x_5 = 9$, $x_6 = 2$, $x_7 = 6$, $x_8 = 5$, $x_9 = 3$, $x_{10} = 5$ и т. д.

- Число b называется пределом функции f(x) в точке x=a, если для любого числа ε>0 найдется такая окрестность точки x=a, что для любых x(x≠a) из этой окрестностей выполняется неравенство |f(x)-b|< ε и записывается: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

- Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $M \in R$, что для любого номера $n, x_n \le M$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число $m \in R$, что для любого номера $n, x_n \ge M$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограниченная сверху и ограниченная снизу, то есть существует такое число $M > 0$, что для любого номера $n, |x_n| \le M$

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого числа $M > 0$, что существует такой номер n , что $x_n \ge M$

1. На числовой оси *окрестность* точки – любой интервал (открытый промежуток), содержащий данную точку. В частности открытый (не содержащий границ) промежуток (a – δ; a + δ) с центром в точке a называется *δ-окрестностью* точки a (положительное число δ – радиус δ-окрестности).

2. В n-мерном пространстве окрестность точки – любая область, содержащая данную точку. В частности совокупность точек $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, координаты

которых удовлетворяют неравенству, $\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<\delta$ называется шаровой (сферической) δ-окрестностью точки $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ – окрестностью радиуса δ. Иначе говоря, указанное множество точек M образует в n-мерном пространстве (открытый) шар радиуса δ с центром в точке A.

Множество точек $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x_1-a_1|<\delta_1 \\ |x_2-a_2|<\delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_n-a_n|<\delta_n, \end{cases}$$

называется параллелепипедальной окрестностью точки $A(a1; a2; \ldots; an)$. Иначе: указанное множество точек M образует в n-мерном пространстве параллелепипед с центром в точке A.

3. Окрестность точки A в метрическом пространстве – любая область, содержащая точку A. В частности все точки M, расстояние от которых до точки A меньше некоторого положительного числа δ, образуют ее (т.е. точки A) сферическую окрестность радиуса δ с центром в точке A.

- Существует три определения **сходящейся последовательности**:

1. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует число a такое, что последовательность $\{x_n-a\}$ является бесконечно малой. При этом число a называется пределом последовательности.
2. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число a, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что при всех $n\geq N$ выполняется соотношение $|x_n-a|<\varepsilon$. При этом число a называется пределом последовательности.
3. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число a, что в любой ε-окрестности точки a находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера.

- 1° Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности их пределов:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

2° Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

3° Предел частного двух функций равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

4° Константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

5° Предел степени с натуральным показателем равен степени предела:

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n, n \in N$$

Проведем сравнительный анализ самых популярных в РФ и РК учебников. Это соответственно учебники старшей общеобразовательной школы А.Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа. 10-11 классы» (учебник) [3] и Абылкасымовой А.Е. и др. «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс» [2].

По нашему мнению, в учебнике Мордковича А.Г. теоретический материал по введению понятий математического анализа предложен на доступном уровне, ученики могут самостоятельно знакомиться с материалом, разбирать примеры, которые предложены в учебнике, и опираясь на них решать задачи, предлагаемые в задачнике. Задачи предложены разного уровня сложности и в достаточно большом количестве, решать которые в полном объеме просто не хватает времени. С другой стороны, у учителя всегда есть возможность дополнительно позаниматься со школьниками или наиболее успешным по математике школьниками, предложить дополнительную работу на уроке и в домашнем задании. Учебник Абылкасымовой и др. рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. Но существует вопрос: можно ли написать одинаково доступным языком для школьников как базового, так и профильного уровня? В целом, учебник написан доступным для учащихся языком, содержит большое количество примеров к изучаемым формулам и основным задачам. Учебник содержит материал для дополнительного повторения.

1.2 Тематическое планирование

Чтобы понять, как распределяется учебный материал, приведем соответствующие выдержки из названных учебников.

Учебник А.Г. Мордковича [3].

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

I вариант – 4 ч в неделю, II вариант – 5 ч в неделю, III вариант – 6 ч в неделю

Таблица 1

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА			
§ 1. Натуральные и целые числа	3	4	5
§ 2. Рациональные числа	1	2	2

§ 3. Иррациональные числа	2	2	2
§ 4. Множество действительных чисел	1	2	3
§ 5. Модуль действительного числа	2	2	3
Контрольная работа №1	1	1	1
§ 6. Метод математической индукции	2	3	4
Итого:	12	16	20
Глава 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ			
§ 7. Определение числовой функции и способы ее задания	2	2	3
§ 8. Свойства функций	3	3	4
§ 9. Периодические функции	1	2	3
§ 10. Обратная функция	2	3	4
Контрольная работа №2	1	1	1
Итого:	9	11	15
Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ			
§ 37. Числовые последовательности	2	3	3
§ 38. Предел числовой последовательности	2	2	3
§ 39. Предел функции	2	3	4
§ 40. Определение производной	2	2	2
§ 41. Вычисление производных	3	4	5
§ 42. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции	2	3	3
§ 43. Уравнение касательной к графику функции	3	3	4
Контрольная работа №7	2	2	2
§ 44. Применение производной для исследования функций	3	4	5
§ 45. Построение графиков функций	2	2	3
§ 46. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин	4	5	6
Контрольная работа №8	2	2	2
Итого:	29	35	42

Учебник А. Абылкасымовой [2].

СОДЕРЖАНИЕ

Изучаемый материал
Глава 1. ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК
§ 1. Функция и способы ее задания
§ 2. Простейшие преобразования графиков функций
§ 3. Свойства функции
§ 4. Исследование функции и построение ее графика

Проверь себя!
Что вы усвоили из этой главы
Исторические сведения
Глава 4. ПРОИЗВОДНАЯ
§ 10. Понятие предела функции в точке и непрерывность функции
§ 11. Определение производной
§ 12. Правила нахождения производных
§ 13. Физический и геометрический смысл производной. Касательная к графику функции
§ 14. Производная сложной функции
§ 15. Производные тригонометрических функций
§ 16. Приближенные вычисления
Проверь себя!
Что вы усвоили из этой главы
Исторические сведения
Глава 5. ПРИМЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ
§ 17. Признаки возрастания и убывания функции
§ 18. Критические точки и экстремумы функции
§ 19. Исследование функции с помощью производной и построение ее графика
§ 20. Наибольшее и наименьшее значения функции
Проверь себя!
Что вы усвоили из этой главы
Исторические сведения

1.3 Основные методические проблемы

Источником термина *методика* являются греческие слова *метод, путь*. Под термином *методика*, в широком смысле слова, понимается совокупность методов практического выполнения чего-либо. В образовательном процессе этот термин применяется к определенному предметному содержанию. Словосочетание *методика обучения математике* используется сегодня для обозначения как науки, так и учебного предмета, который реализует программы среднего и высшего педагогического образования.

До 80-х годов прошлого века курс методики обучения математике назывался «Методика преподавания математики». Новое название акцентирует внимание на двусторонность процесса обучения, в котором превалируют субъект - субъектные отношения. Методику обучения математике называют также «Педагогика математики», «Дидактика математики». Эти названия выражают концептуальные подходы ученых-методистов к раскрытию проблем процесса обучения математике. Методика обучения математике – одна из областей педагогической науки. Она исследует закономерности обучения математике в соответствии с поставленными обществом учебными целями, учитывающими современный уровень развития науки математики. Методика обучения математике должна ответить на три взаимосвязанных вопроса:

Для чего обучать математике? (вопрос *целевого* компонента, который определяет конечный результат и основные направления достижения этого результата).

Что изучать? (содержание) из теоретических основ математики и по какой последовательности, по какому порядку? (вопрос содержательного компонента, представляющий адаптированный общественно-исторический опыт в области математики, которым должен овладеть ученик в процессе обучения).

Как обучать математике? (вопрос предметно-процессуального компонента, который определяет методы, формы и средства обучения).

Перед методикой обучения математике стоят следующие конкретные задачи:

- определение целей математического образования в целом и по уровням образования (начального, основного среднего и общего среднего);
- разработка содержания и структуры школьного курса математики;
- изучение существующих методов и форм обучения математике, их теоретическое обоснование и разработка новых;
- разработка учебных изданий и методических пособий для учителя математики, апробация их на практике;
- разработка средств обучения математике, в том числе технических средств обучения, их проверка на практике;
- исследование вопросов самообучения математике.

Фундаментальной основной дидактики математики являются развивающиеся математические науки. Они непосредственно содействуют развитию школьного курса математики, обновлению ее содержания. Математика и обучения математике исторически взаимосвязаны, так как одним из основных условий жизнедеятельности общества является передача из поколения в поколение науки и знаний, т.е. формирование образовательной традиции. В итоге все это вливается в вопросы педагогики и методики. Например, в обществе математическими письменными памятниками являются папирусы, написанные в Египте 4-5 тыс.лет тому назад. В этих документах можно встретить наряду с арифметическими, геометрическими задачами и их решения в виде стандартных правил, занимательные задачи для повышения интереса учащихся. Многовековая история методики обучения математике свидетельствует о том, что содержание обучения математике подвергалось изменению начиная от простого счета давних времен до сформированных систем математических дисциплин (начальный курс арифметики с элементами наглядной геометрии, арифметика, алгебра, планиметрия, стереометрия и систематический курс тригонометрии).

С накоплением математических знаний и навыков, углублением и расширением их содержания изменяются, усложняются вопросы преподавания и изучения, тем самым появляются новые методические примеры. Самый сложный вопрос, который ставится перед методикой математики, - отбор содержания, т.е. проблема тщательного выбора из накопленного математического наследия того содержания, которое соответствует требованиям современности, возможностям мышления учащихся и их способностям. В этой связи содержание предмета математики постоянно находится в изменении. Эти изменения являются следствиями следующих основных причин:

а) расширение учебных целей и предъявляемые к школе новые требования, связанные с развитием общества и его технико-экономической потребностью;

б) непрерывное развитие математической науки, появление в ней новых предметных областей;

в) усиление общего развития учащихся, раскрытие новых возможностей и граней познавательных способностей детей и подростков в процессе развития общества;

г) развитие педагогической и методической наук, использование передового опыта многих школ. Например, 25-30 лет тому назад в составе предметов школьной математики были предметы «арифметика», «тригонометрия», в настоящее время они не являются отдельными предметами, их содержания включены в другие математические предметы (математика начальных классов, алгебра, геометрия, алгебра и начала анализа в старших классах). Вместо них были введены множество новых разделов, как производная, векторы, координаты, геометрические преобразования и др.

В программе школьной математики эти направления изучаются в различных классах. В 4-5 классах – математика, в 6-7 классах – алгебра, геометрия (планиметрия), в 10-11 классах – алгебра и начала анализа, геометрия (стереометрия).

В начале XX в. началось движение по модернизации обучения математике в средних школах, которое усилилось в середине XX в.

В настоящее время проводимая в нашей стране реформа по совершенствованию содержания математического образования общеобразовательных школ является продолжением этого процесса. Поэтому одной из главных проблем методики обучения математике является обновление содержания системы математического образования в школах. В этой связи перед методикой ставится задача – обоснование принципов отбора системы математической информации и ее дидактической обработки, анализа. Наряду с вопросом, какая информация должна быть в предмете математики, что нужно изучать, должна найти свое решение и проблема порядка и последовательности расположения материала для рационального обучения курсу. Для этого рассматриваются результаты новых исследований отечественных и зарубежных психологов, педагогов и методистов. Например, достигнутые результаты науки психологии показывают, что на усвоение некоторых современных математических идей способны дети начальных классов. Это учитывается при совершенствовании, изменении структуры и содержания математики начального класса.

При совершенствовании преподавания математики необходимо учитывать следующие факторы:

1) использованием возможности изменения, преобразования внутренней логики предмета; 2) учет внутренней взаимосвязи вопросов, составляющих содержание курса; 3) определение сути этих вопросов в школьном математическом образовании; 4) дидактическая обработка, анализ материалов, раскрытие возможности повышения уровня восприятия, доступности.

В методике обучения математике важной является проблема поиска новых рациональных методов обучения, так как новое содержание математического образования и его система изложения требуют от учителей и учащихся применения новых методов. Кроме этого, традиционные методы обучения не всегда приводят к желаемым результатам. Поэтому в последнее время на уроках широко используются новые методы, основанные на самостоятельных работах учащихся.

Ученые-методисты, работая в тесном контакте с учителями, непрерывно ведут работу по поиску путей совершенствования методов обучения, особенно в условиях разно уровневых программ обучения. Поэтому указанные выше три дидактические проблемы математики остаются главной проблемой методической науки. Структурирование и отбор содержания материала и последовательность изучения того или иного раздела или темы определяются учебными программами и учебниками школьной математики. Таким образом, предметом изучения методики обучения математике является система целей, содержания, методов и средств обучения, обеспечивающих математическое образование учащихся (методическую систему обучения математике), а также процесс осуществления обучения математике.

Предмет «Методика обучения математике» можно условно разделить на две раздела:

1. Общая методика обучения математике (изучение принципов, методы обучения и т.д.).

2. Частная методика обучения математике, которую можно разделить на следующие разделы:

1) специальная методика обучения математике (например, обучение функции в школьном курсе математики);

2) конкретная методика обучения математике, которая состоит из двух частей: а) частные вопросы общей методики (например, планирование уроков 10 класса); б) частные вопросы специальной методики (например, методика обучения темы «Разложение многочленов на множители»).

Каждая из вышеуказанных трех основных проблем методики обучения математике делится на мелкие проблемы. Для их решения используется разные методы научного исследования. Эти методы основывается на известной философской теории – методологии. Метод научного исследования является дидактическим методом. Методология каждой науки (или групп однотипных наук), разработанная на этой основе, имеет свою специфику, и это естественно. Методика математики по своему предмету и своей методологии близка к педагогической науке. При исследовании методических проблем и вопросов используются эмпирические и экспериментально-теоретические методы, как по отдельности, так и вместе.

Методика математики использует наряду со свойственными ей методами и другие исследовательские методы, которые являются общими для всех теоретических наук.

В педагогической и методической литературе выделяют следующие, свойственные методике обучения математике методы:

1) исследование и использование истории математики и математического образования;

2) обобщение, исследование и использование отечественного и зарубежного передового опыта по методике обучения математике;

3) применение научных идей по проблеме методов и их дидактическая обработка;

4) эксперимент

[Абылкасымова А.Е. Теория и методика обучения математике. Алматы «Мектеп»2013, 14с]

Трудности при обучении любому предмету возникают уже при отборе материала, которому собираются учить, и, быть может, еще больше при установлении принципов, которым следует руководствоваться при обучении. Эти трудности усугубляются тем, что обычно каждый педагог в своей области искренно убежден, что он хорошо знает, что и как надо преподавать свой предмет, и в каком объеме надо подбирать материал.

При обучении математике дело усложняется благодаря широкому ее использованию в различных областях человеческой жизни и поэтому проблемы математического образования – неотложные. Одна из проблем это преемственность и непрерывность обучения математике. На сегодняшний день эта проблема в системе «Школа - Колледж - ВУЗ» является жизненно необходимым условием общекультурных и профессиональных компетенций, математической культуры.

Преемственность в обучении математике – это установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Отсутствие преемственности в обучении приводит к непониманию предмета, резкому снижению успеваемости обучающихся. Однако преемственность образования – это прежде всего преемственность его содержания. Преемственность содержания – непрерывное развитие предметно-содержательного компонента, который включается в общую логику развертывания курса в целом, а именно создание на каждом этапе базы для последующего изучения учебного предмета на более высоком уровне за счет расширения и углубления тематики. А это осуществляется путем обеспечения «сквозных» линий в содержании, повторений, а также использование принципа концентричности в организации содержания учебных программ и связей предмета на каждом этапе обучения. Мы руководствовались этими принципами при разработке изучения начал математического анализа с использованием среды GeoGebra на всех этапах обучения.

В учебной программе по предметам образовательной области «Математика и информатика» уровня общего среднего образования (10-11 классы общественно-гуманитарного и естественно-математического направлений), утвержденной приказом МОН РК № 115 от 03.04.2013 г. для специальности естественно-математического направления закреплено изучение курса алгебры и начал анализа в 10-11 классах в объеме: 6 часов в неделю по классам, всего - 204 часа в каждом классе, в инвариантном (базовом) компоненте в качестве профильного предмета. [найти данный закон Асель]

В школьных учебниках существуют различные подходы к изложению темы «Производная». Здесь речь пойдет о различных вариантах изложения этой темы в учебниках для классов с углубленным изучением математики и учебниках для общеобразовательных школ.

Приведем пример изложения темы.

1. Различные подходы к изложению темы «Производная» в классах с углубленным изучением математики.

А.Г.Мордкович (профильный уровень)

I. Изучение темы «Производная» начинается с рассмотрения физической задачи (на вычисление мгновенной скорости прямолинейного движения).

II. При решении геометрической задачи, приводящей к понятию производной сначала выясняется, что будет пониматься под касательной к произвольной плоской кривой. Дана кривая L (рис.учебник) на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на кривой, причем достаточно близкую к M – точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Если можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некоторое предельное положение секущей, то эту прямую – предельное положение секущей – называют касательной к кривой L в точке M.

III. В процессе решения задачи на мгновенную скорость и задачи на касательную пришли к новой математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. В учебнике вскользь сказано о том, что многие задачи из других областей знаний приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучать, т.е.:

1) присвоить ей новый термин;
2) ввести для нее обозначение;
3) исследовать свойства новой модели.

IV. Определение производной.

Определение: Пусть функция $y=f(x)$ определена в конкретной точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности.

Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции y=f(x) в точке x и обозначают f'(x).

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

V. Физический (механический) смысл производной: если s(t) – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: v=s'(t).

Геометрическая смысл производной: если к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x=a можно провести касательную, непараллельную оси y, то f'(a) выражает угловой коэффициент касательной: k=f'(a).

VI. Истолкование определения производной с точки зрения приближенных равенств.

VII. Дается пяти-шаговый алгоритм отыскания производной. Затем рассматриваются два примера на использование этого алгоритма.

VIII. Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, название операции нахождения производной.

IX. Обсуждается вопрос: как связаны между собой два достаточно тонких свойства функции – непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

X. Выясняется – как по графику сделать вывод о дифференцируемости функции.

XI. Даются формулы дифференцирования, найденные по определению производной: C'=0, (x)'=1, (kx+m)'=k, ($(x^2)' = 2x$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $(x \neq 0)$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x>0), (sinx)'=cosx, (cosx)'=–sinx. Затем вводятся правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной, в результате которых выводятся формулы производных для тангенса и котангенса. На интуитивном уровне определяется формула для дифференцирования степенной функции.

XII. Дается понятие второй, третьей производной и производной n-ого порядка. Делается вывод, что ускорение есть вторая производная функции координаты по времени, а это является механическим смыслом второй производной.

XIII. Дается определение композиции (сложной функции). Выводится формула для нахождения производной сложной функции. Вычисляется производная для функции y=f(kx+m), а также формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций – арксинус и арккосинус.

XIV. Выводится уравнение касательной к графику функции в точке. Предоставляется алгоритм составления уравнения касательной к графику функции.

XV. Определяется в процессе рассуждений смысл приближенных вычислений.

XVI. Применения производной: для исследования функции на монотонность (связь между характером монотонности и знаком ее производной); для доказательства тождеств и неравенств; для построения графиков функций.

Формулируются: признак возрастания (убывания) функции, определение критической точки функции, признак максимума и минимума (экстремумы), теорема о постоянстве функции; теорема о нахождении точек максимума и минимума.

Вводятся понятия горизонтальной и вертикальной асимптот. Приводятся алгоритмы: исследования функции на монотонность и экстремумы; исследования функции и построение ее графика; нахождения наименьших и наибольших значений непрерывной функции на промежутке.

XVII. Рассматриваются задачи на оптимизацию.

XVIII. После изучения логарифмической и показательной функций, определяется их производная.

К учебнику прилагается соответствующий задачник. Он содержит два блока системы упражнений, выстроенных по каждой теме: первый блок состоит из базового уровня (никак не отмечен) и среднего уровня трудности (отмечен белым кружком), второй блок – из дополнительных заданий среднего уровня и заданий повышенной трудности (отмечены черным кружком). Количество задач представлено в достаточном и даже избыточном объеме, что дает возможность реализовать уровневую дифференциацию на уроке.

Итоги анализа. Изложение темы «Производная» представлено на наглядно-интуитивном, рабочем и формально-логическом уровне. Определение производной дается с использованием понятия предела, которое вводится перед изучением данной темы на наглядно-интуитивном уровне. [Исследовательская деятельность, Байслонова Р.Н]

2. Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Шойынбеков К.Д., Корчевский В.Е. 10 класс (естественно – математическое направление).

I. Изучение темы «Производная» начинается с рассмотрения: на вычисление мгновенной скорости прямолинейного движения, на вычисление тангенса угла наклона касательной к графику функции. Определяются понятия приращения функции и дифференцирования функции.

II. Определение производной.

Определение: Производной функции y=f(x),заданной на интервале (a;b), в точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

III. Определяется механический (v(t)=f'(t)) и геометрический (угол наклона касательной) смыслы производной.

IV. Вводятся правила дифференцирования: производная суммы, разности, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной. Вводятся формулы дифференцирования элементарных функций: производная степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических функций. Доказываются соответствующие теоремы.

V. Вводится понятие дифференциала функции. Формулируется понятие дифференциала функции df=f'(x)dx (df=dy). Вычисляются приближенные значения функции.

VI. Определяется производная сложной функции.

VII. Вводится производная обратной функции (отмечено звездочкой, для углубленного изучения).

VIII. Формулируются определения: максимальной, минимальной, критической точек. Применение производной: для нахождения точек максимума и минимума функции; для нахождения возрастания и убывания функции.

IX. Выводится уравнение касательной.

X. Формулируются и доказываются теоремы Ролля и Лагранжа.

XI. Определяются вторая производная и производные высших порядков, а также механический смысл второй производной.

Применение второй производной для определения выпуклости и вогнутости графика функции, а также геометрический смысл второй производной (отмечено звездочкой, для углубленного изучения).

XII. Рассматриваются особенности экстремума функции с единственной критической точкой. Решаются задачи на оптимизацию.

XIII. Использование производных для построения графиков функций (с применением второй производной).

XIV. Вводится дополнительный углубленный материал, отмеченный звездочкой: на нахождение асимптот (рассматриваются дробно-линейные функции), на разложение функции в ряд Тейлора.

Итоги анализа. Введение понятия производной предваряется знакомством со средней и мгновенной скоростями движения, с тангенсом угла наклона касательной, что приводит к понятию разностного отношения. Определение производной дается как предел разностного отношения. Понятие предела изучается ранее. При нахождении производных простейших функций пользуются наглядными представлениями. Представлен достаточный по объему дополнительный и углубленный материал, что позволяет учащимся более широко и глубоко овладеть знаниями.

1.4 GeoGebra – кроссплатформенное математическое программное обеспечение.

Это программа, которая предоставляет каждому возможность ощутить невероятные идеи, которые математика воплощает в реальность.

В чем заключаются важности программы GeoGebra для нашей аудитории:

- Ученики её любят, потому что она делает математику ощутимой. GeoGebra устанавливает связь между геометрией и алгеброй в совершенно новой, визуальной форме. Отныне ученики могут видеть и ощущать математику.

- Учителя любят, потому что она позволяет учителям не прерывать преподавание. GeoGebra не заменяет учителей, она помогает им делать лучшее, что они могут – учить.

- Школы ее любят, потому что ученики которые используют GeoGebra, более мотивированы к учению, успевающие ученики. [21]

Это три особенных фактора для полной организации деятельности учащихся.

Описание программы и как ее приобрести.

GeoGebra (www.geogebra.org) - это бесплатная динамическая математическая среда для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном в использовании пакете. Делитесь интерактивными обучающими проектами, созданными с помощью GeoGebra, которые будут общедоступны на сайте www.geogebratube.org

GeoGebra - самая популярная динамическая математическая программа в мире. Она была удостоена множества наград. GeoGebra поддерживает STEM-образование в США и всячески способствует нововведениям в сфере образования по всему миру.

Динамическая математика для всех.

* Бесплатная в использовании программа, позволяющая учиться, изучать и оценивать
* Абсолютно интерактивный, легкий в освоении интерфейс с мощным функционалом
* С GeoGebra вы имеете неограниченный доступ к постоянно расширяющемуся хранилищу материалов/проектов на www.geogebratube.org
* Программа доступна на многих языках
* Поймите, насколько весело и интересно изучать математику вместе с GeoGebra
* GeoGebra будет полезна в выполнении домашних заданий и различных проектов
* Миллионы пользователей по всему миру

[https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra&hl=ru]

Описание программы GeoGebra

Откроем файл в GeoGebra и рассмотрим экранное изображение сверху вниз. Список вверху: Файл, Правка, Вид, Настройки, Инструменты, Окно, Справка – составляет «Главное меню». Пробегая его курсором, можно просмотреть появляющиеся списки команд.

Следующая строка называется «Панелью инструментов». На этой панели представлены инструменты, которыми можно пользоваться. На каждой из подсказывающих картинок в правом нижнем углу имеется значок в виде маленького треугольника, кликнув на который, можно просмотреть появившийся список инструментов и выбрать нужный из них. Главную часть экрана составляет так называемое «Полотно» – поле для построений (по аналогии с художественным полотном). Присутствующие на нем оси системы координат можно спрятать, кликнув на Полотно правой кнопкой мыши и выбирая команду «Оси». Слева от Полотна находится «Панель объектов». Она служит для записи построенных объектов (точек, прямых, отрезков, векторов, уравнений линий и т.д.). Наконец, в самом низу экрана словом «Ввод» помечено окно, называемое «Строкой ввода». Если, к примеру, в этой строке написать уравнение некоторой линии, то после ввода на Полотне появится график этой линии.

1) Что мы видим открывая программу GeoGebra?

При открытии программы видим изображение, представленное данным ниже рисунком.

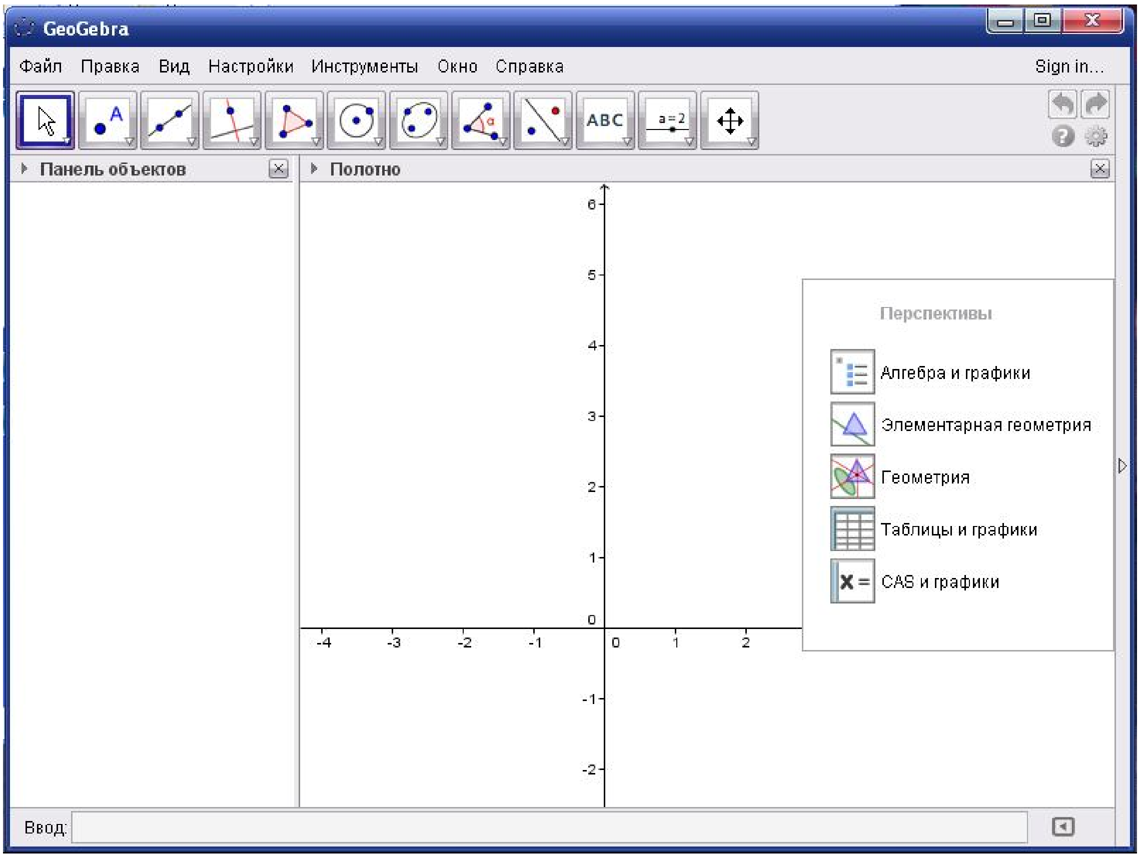


Рисунок 1.

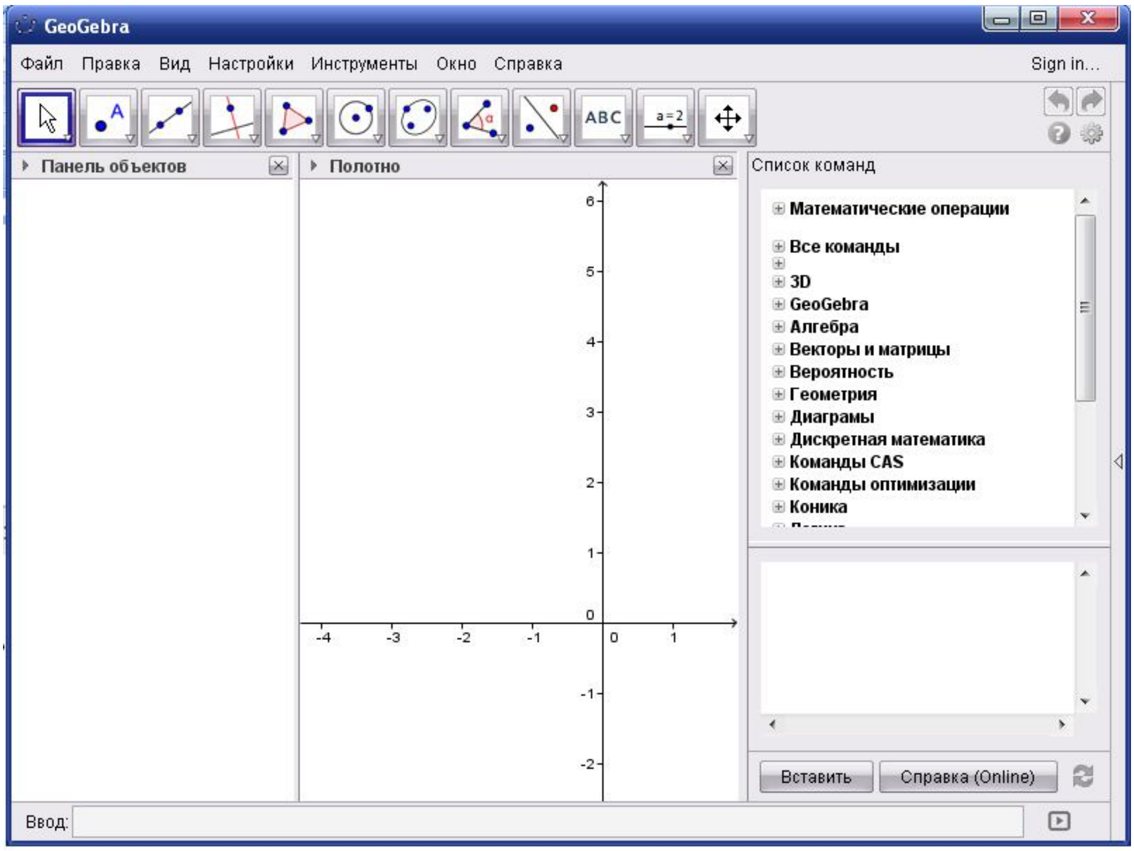


Рисунок 2.

2) В окошке «Файл» приведены вспомогательные функции как на рисунке.

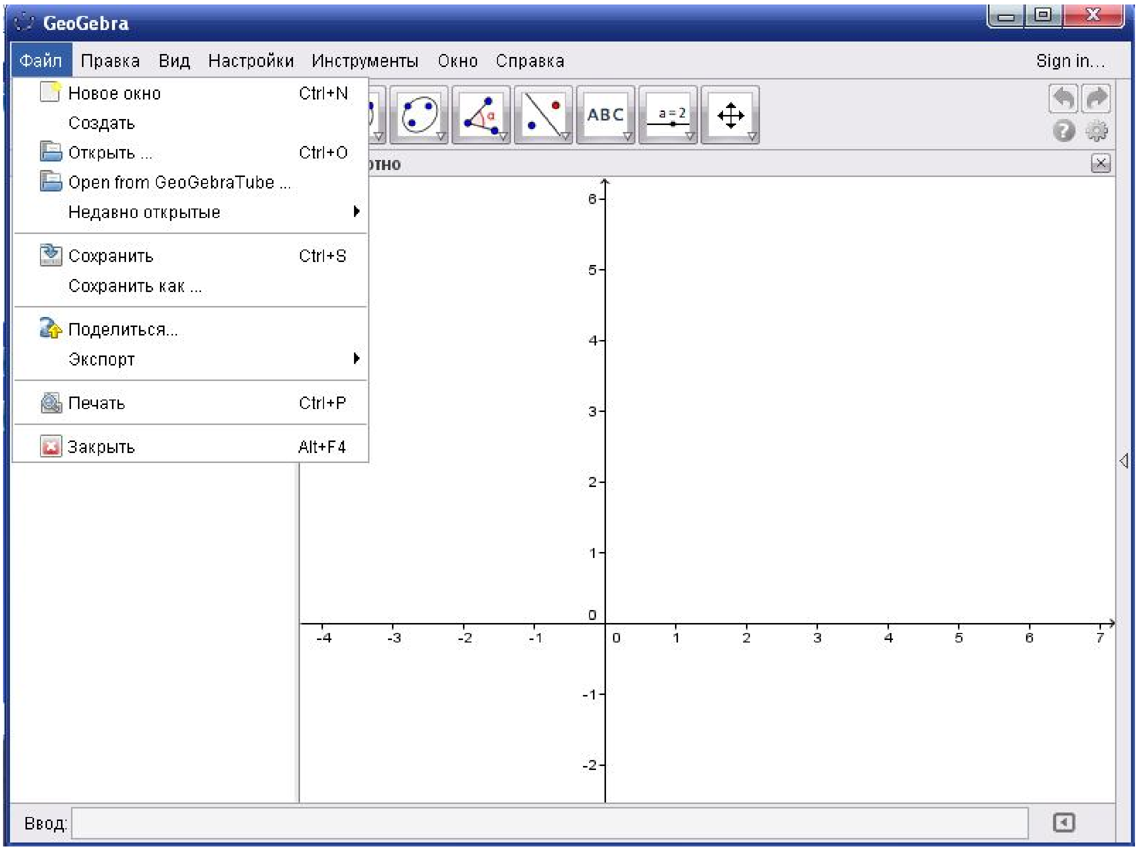
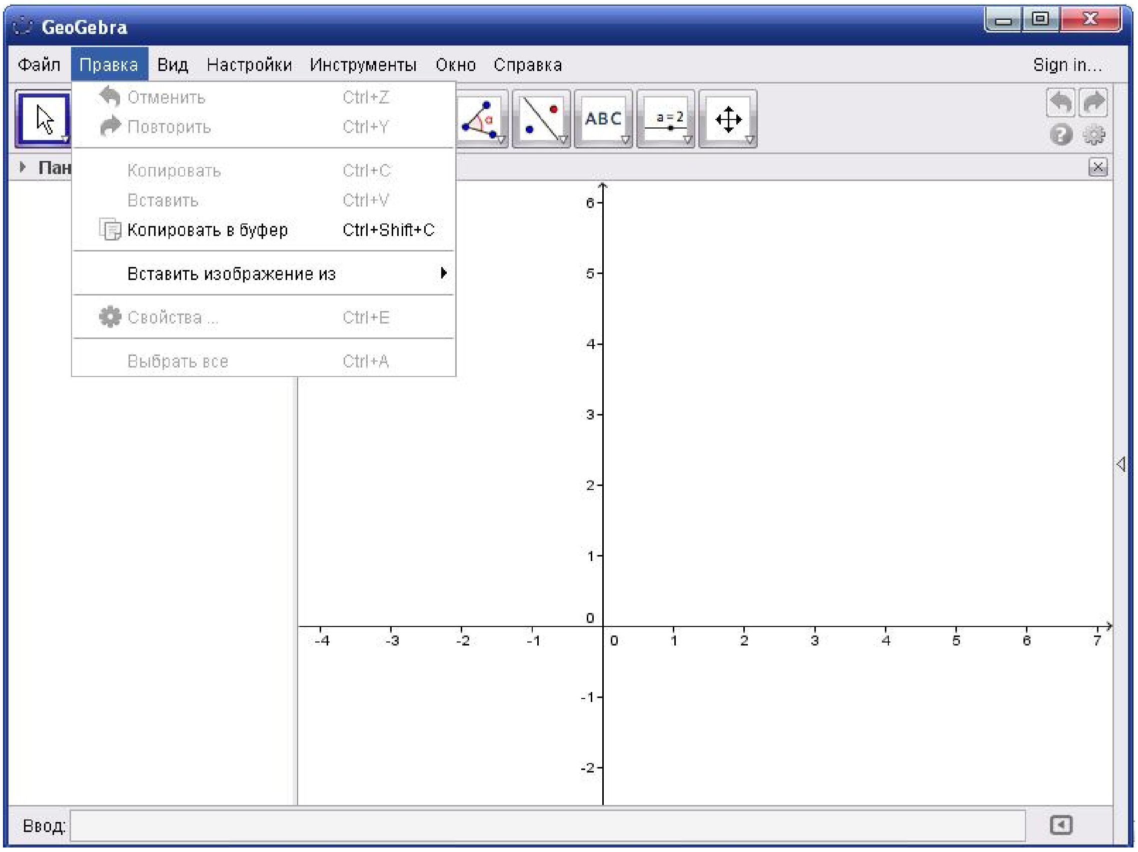
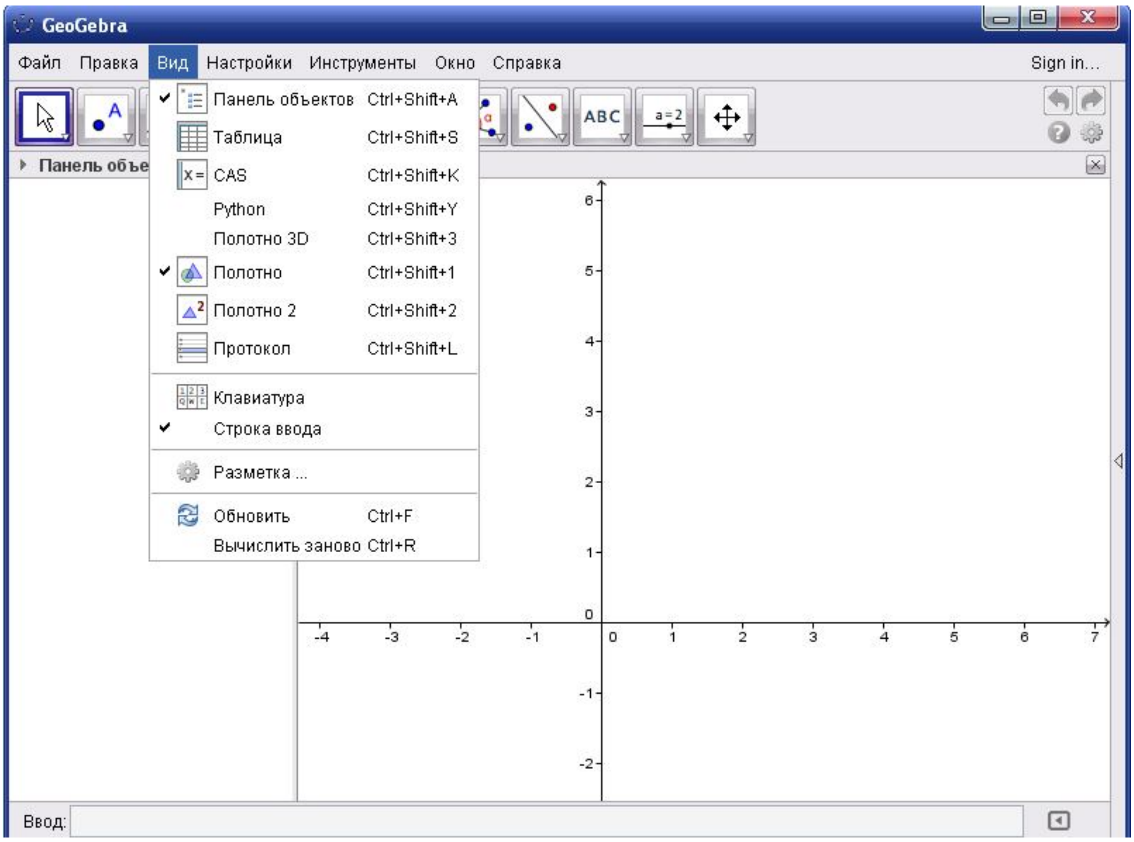


Рисунок 3.

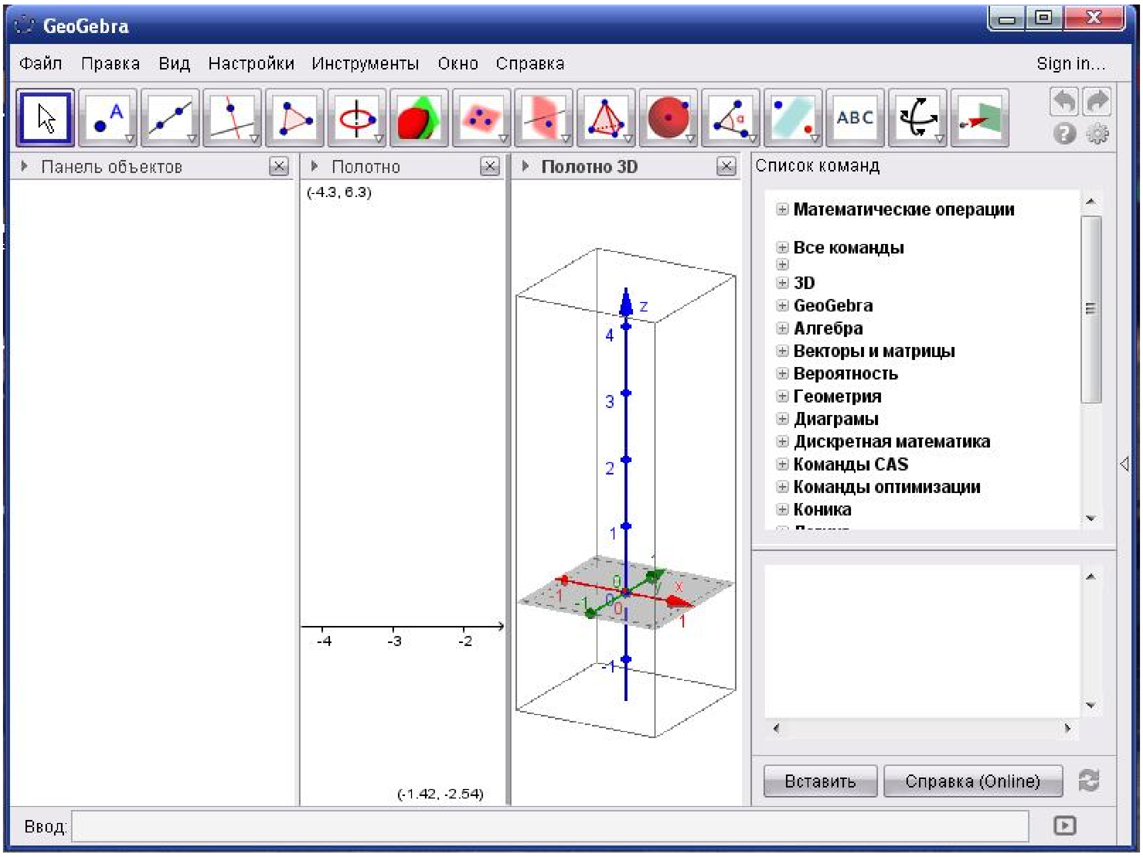
3) Второе окно «Правка» имеет свойства отменять действия или повторить, а также можно использовать ниже предложенные действия.



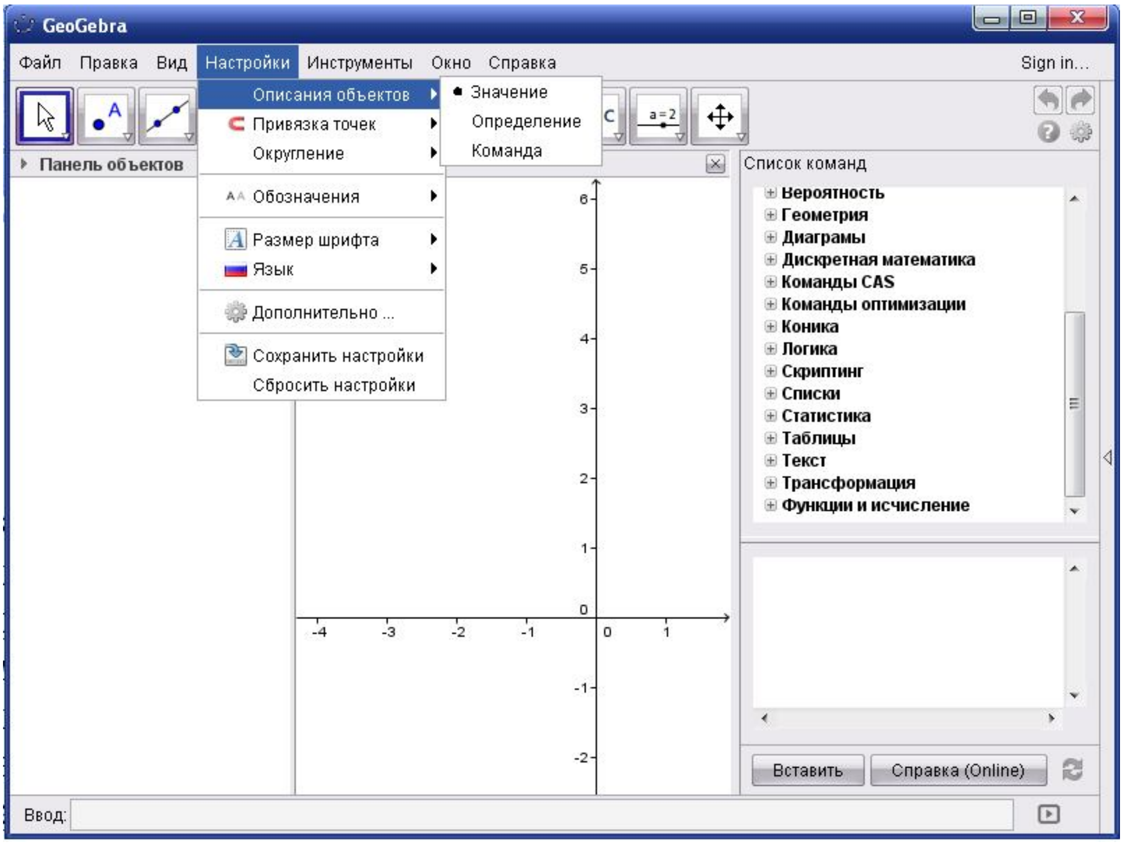
4) В окошке «Вид» имеются очень важные детали для конструирования. Если выберем полотно 3D у нас появятся новые возможности построения пространственных чертежей.



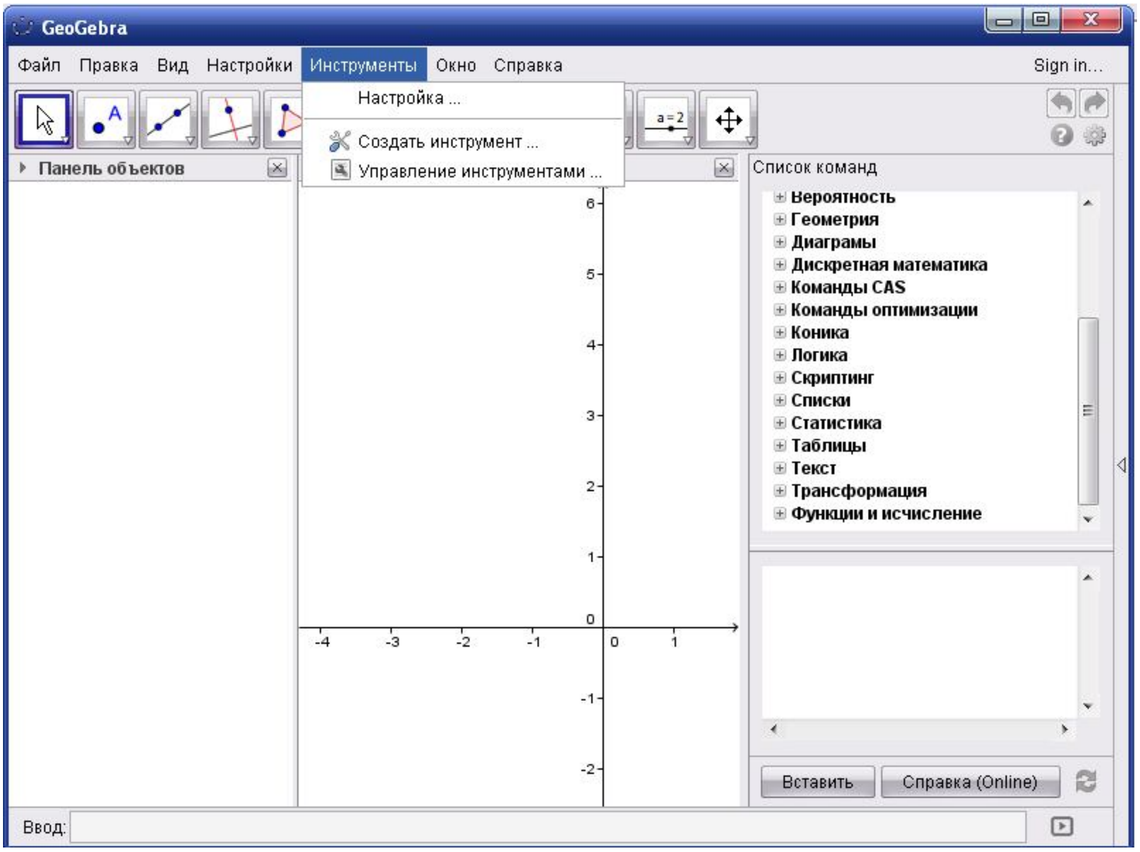
На рисунке ниже показаны 3D-возможности построения пространственных изображений.



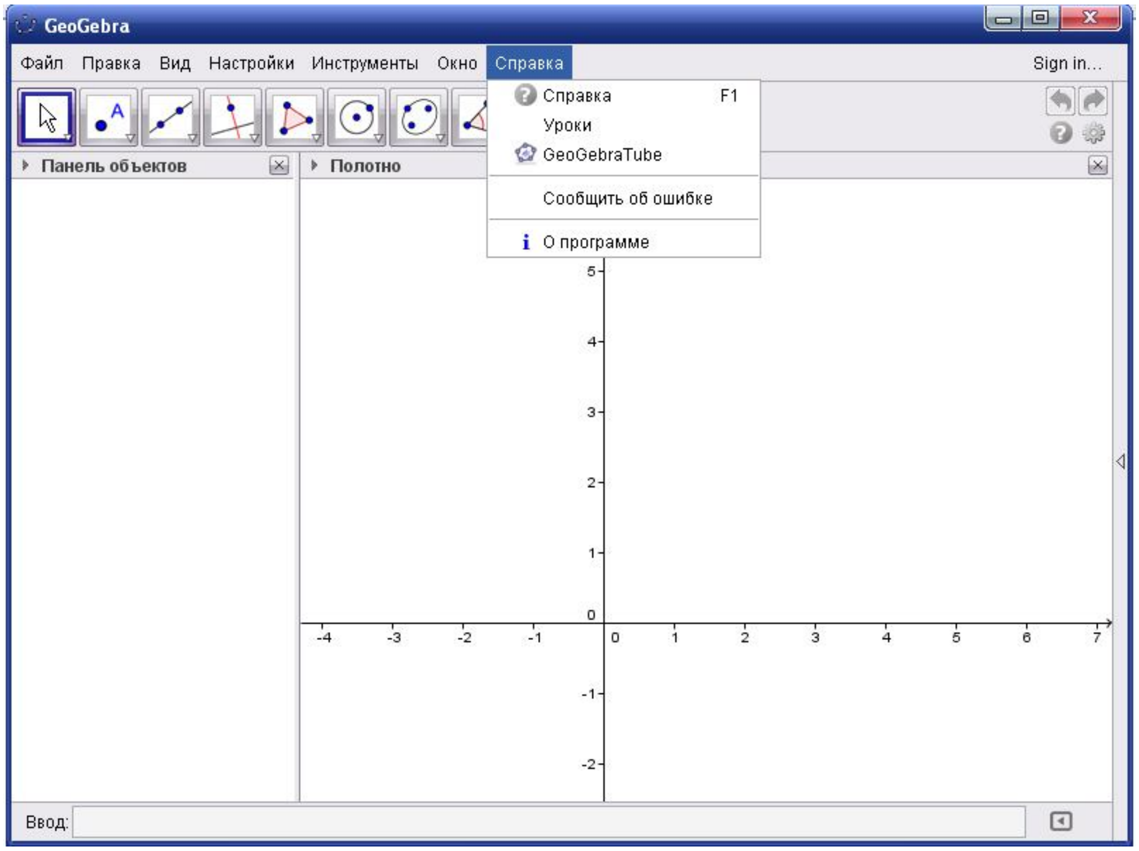
5) Окно «Настройки» содержит команды, управляющие внешним видом изображения.



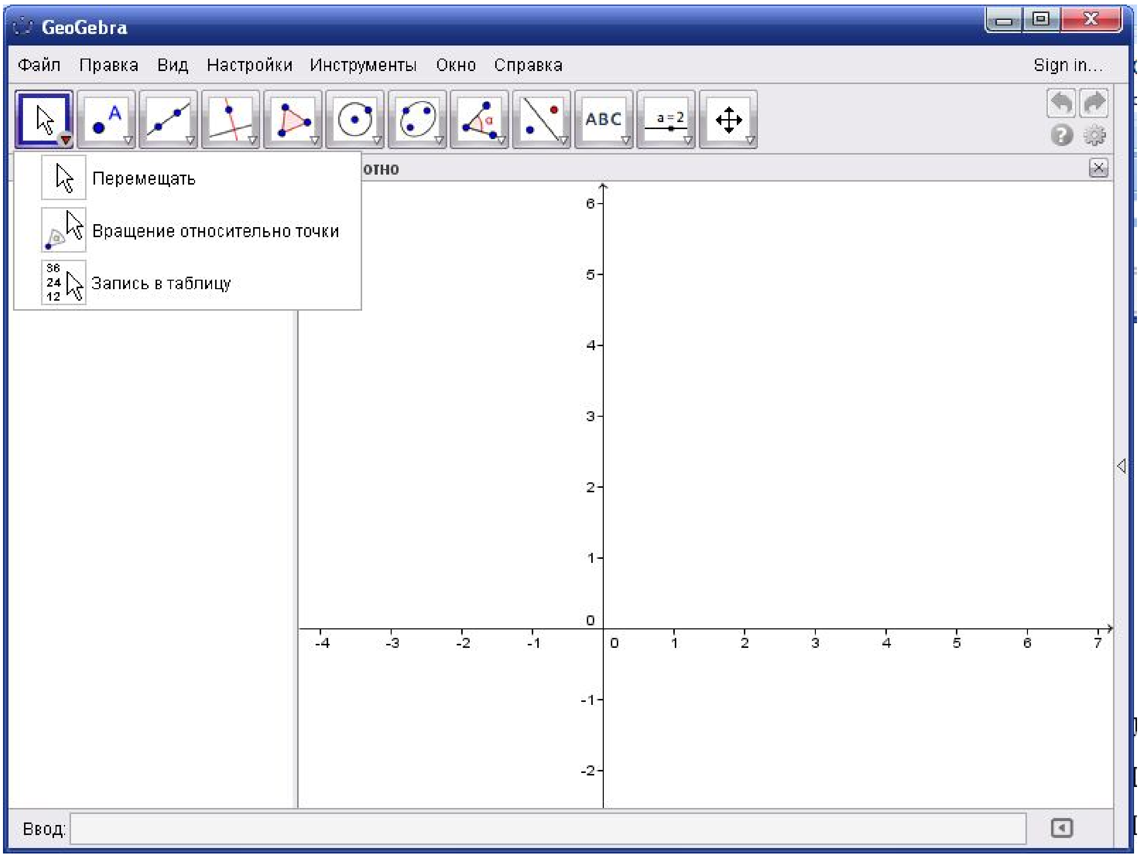
6) Окошко «Инструменты» содержит команды для настройки и создания новых инструментов для использования в дальнейшим при построении более сложных изображений.



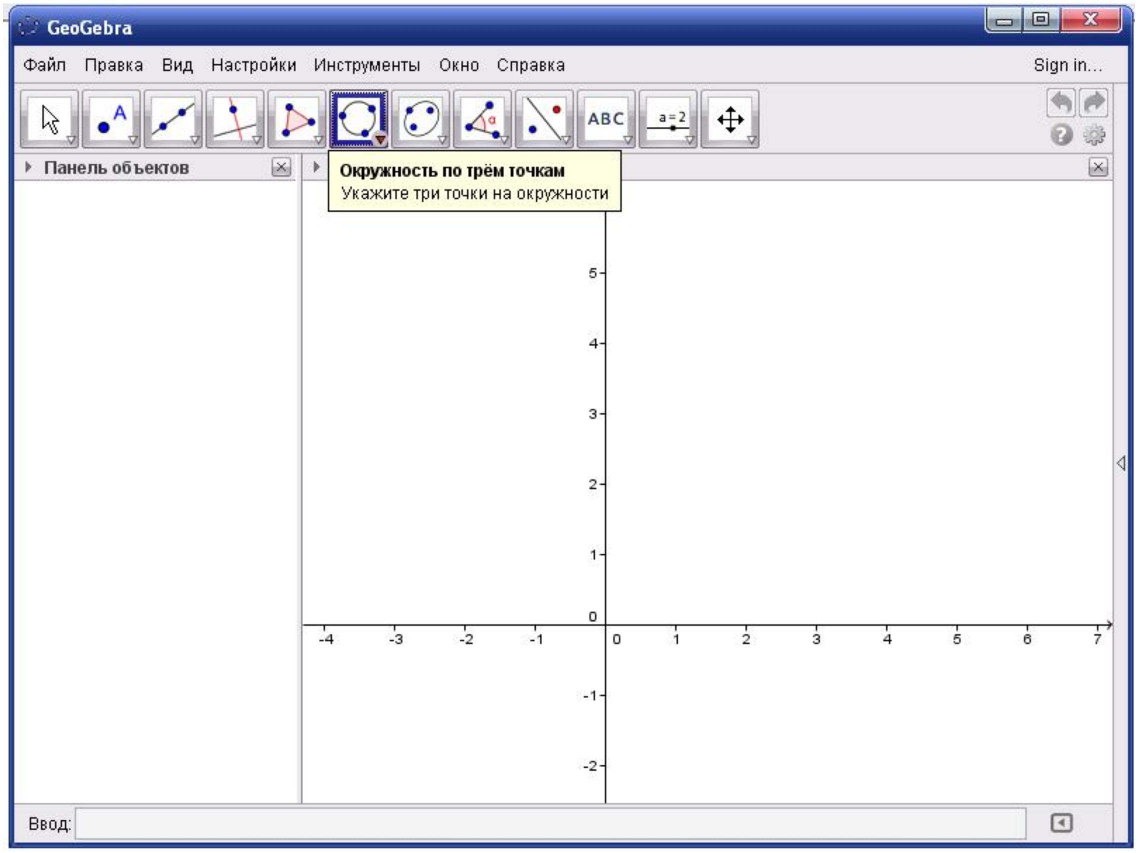
7) Окошко «Окно» для открытие нового чистого листа для выполнения новых задач. Следующая «Справка» работает с поддержкой сетей.



8) Теперь рассмотрим идущий ниже ряд кнопок. В правом нижнем углу каждой кнопки изображен маленький треугольник. Если кликнуть на него, то выпадает список встроенных инструментов, которыми можно пользоваться.



При выборе инструмента появляется изображение нажатой кнопки с подсказывающей картинкой. Если подвести курсор к нажатой кнопке, то всплывет подсказка как использовать выбранный инструмент.



Компьтерная среда GeoGebra является очень эффективным средством для визуализации математики. Она помогает абстрактные понятия и теоремы сделать видимыми, что способствует пониманию, помогает избежать излишней абстрактности изложения материала. Компьютерная поддержка является важным инструментом в котором нуждается математика. Особенно там, где есть возможность геометрического моделирования на экране компьютера абстрактных понятий и утверждений, развивая образное мышление. Как говорится в народе, «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Это высказывание в полной мере относится к программе GeoGebra, которая позволяет увиденное ощутить и этим облегчает понимание математики. Динамическая математика может быть эффективным средством обучения математике не только в школе, но в высших образовательных учреждениях.

Методические особенности преподавания математики с использованием информационных технологий очень разносторонни:

1) Новые приемы организации занятий
2) Междпредметные связи
3) Эффективность получения новых знаний
4) Стимулирование развития индивидуальности личности

Глава 2. ПРОИЗВОДНАЯ В СРЕДЕ GEOGEBRA

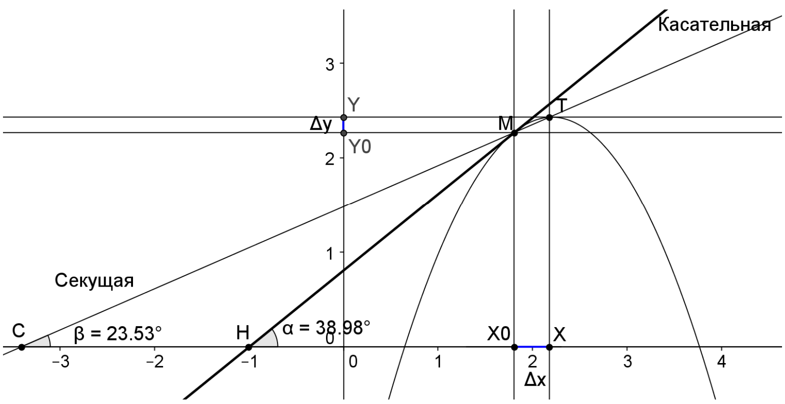
Обычно начинают изучение производной функции «по Фихтенгольцу», с «задач, приводящих к понятию производной» [14,19]. На самом же деле «решение» приводимой при этом физической задачи является *определением* мгновенной скорости, а «решение» геометрической задачи о касательной к графику функции – *определением* углового коэффициента касательной. Общим для этих определений является техника нахождения мгновенной скорости и углового коэффициента касательной. Она и ложится в основу определения производной. Естественно было бы начать с определения производной, а затем говорить о ее физическом или геометрическом смысле, как и поступают, например, в вузовском учебнике [20]. Но что допустимо для вузовского учебника неприемлемо для школьного изложения, где введению всякого нового понятия должны предшествовать примеры, приводящие к этому понятию. Мы хотим предложить изложение материала, соответствующее этой концепции, но в несколько иной последовательности, называя вещи своими именами. Одновременно мы создадим дидактический материал в виде компьютерной поддержки в среде GeoGebra.

2.1 Определение касательной

Напомним, что *секущей* называется прямая, соединяющая две точки данной кривой.

Определение 1. *Касательной* к кривой l в точке $M \in l$ называется предельное положение секущей MT, когда точка $T \in l$, двигаясь по кривой l, стремится к точке M.

Для наглядного представления этого определения в среде GeoGebra создаем анимационный чертеж.



с. 47

Построение (рис. 47).

1) С помощью строки ввода строим параболу $y = -x^2$, а затем, ухватившись за график, переносим его на «хорошее место».

2) На параболе отмечаем точку M и проводим через нее вертикальную и горизонтальную прямые, отмечая точки X_0 и Y_0 пересечения вертикали и горизонтали с соответствующими осями координат.

3) Вводим число $d = 0.5$ и строим точки, вводя в строку ввода $A = (x(X) - d,0)$ и $B = (x(X) + d,0)$. Строим отрезок AB и отмечаем на нем точку X. Точки A и B прячем за ненадобностью. Строим отрезок Строим отрезок X_0X, выделяем его толщиной и цветом и надписываем «Δx».

4) Через точку X проводим вертикаль и отмечаем точку T пересечения вертикали с параболой.

5) Проводим прямую через точки M и T (секущую MT). Строим касательную к параболе в точке M. Построение закончено.

Задаем анимацию точки X (по отрезку AB) и наблюдаем, как «точка $T \in l$, двигаясь по кривой l, стремится к точке M», а касательная есть «предельное положение секущей». Делаем надписи «Касательная» и «Секущая», причем вторую «привязываем» к секущей: при движении секущей перемещается и надпись.

Пользуясь определением касательной, выведем ее уравнение. При этом данную кривую l будем считать графиком некоторой функции $f(x)$ с областью определения $D \subseteq R$. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то есть $x_0 \in D$ и $y_0 = f(x_0)$. Прирастим значение аргумента x_0 некоторым малым по абсолютной величине действительным числом Δx и будем считать, что отрезок с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения D данной функции. Число Δx называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции*. На рисунке 47 построена точка $T(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ и выделены отрезки, соответствующие величинам Δx и Δy. Через α и β обозначены углы наклона соответственно касательной и секущей к положительному направлению оси абсцисс. При анимации точки X можно наблюдать как при $\Delta x \to 0$ угол β наклона секущей стремится к углу α наклона касательной, при этом $k_1 = tg\beta \to k = tg\alpha$. Поэтому естественно считать по определению, что угловой коэффициент касательной k в уравнении касательной $y = kx + b$ есть предел углового коэффициента k_1 секущей в уравнении секущей $y = k_1 x + b_1$. Это определение углового коэффициента касательной записывается в виде $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_1$.

Поскольку касательная проходит через точку $M(x_0, y_0)$, то $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$ и уравнение касательной принимает вид $y = kx + f(x_0) - kx_0 = k(x - x_0) + f(x_0)$.

Секущая $y = k_1 x + b_1$ проходит через точки $M(x_0, y_0)$ и $T(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, поэтому $f(x_0) = k_1 x_0 + b_1$ и $f(x_0 + \Delta x) = k_1(x_0 + \Delta x) + b_1$. Вычитая из второго равенства первое, получаем $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k_1(x_0 + \Delta x) - k_1 x_0 = k_1 \Delta x$. Отсюда $k_1 = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Таким образом, по определению, $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Словами: *угловой коэффициент касательной к кривой* $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ *по определению равен пределу отношения приращения функции* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *к приращению аргумента* Δx *при условии, что* *приращение аргумента* Δx *стремится к нулю*. Этот предел принято обозначать $f'(x_0)$. Следовательно, угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$ и уравнение касательной принимает вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2.2 Определение мгновенной скорости

Пусть материальная точка движется по прямой от некоторого начального положения с переменной скоростью и за время t проходит расстояние $s(t)$. Зафиксируем некоторый момент времени t_0 и значению переменной t_0 придадим малое приращение Δt так, чтобы отрезок $[t_0, t_0 + \Delta t]$ принадлежал области определения D данной функции $s(t)$. За время Δt движущаяся точка пройдет расстояние $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ в физике называют *средней скоростью* на временном отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$, а предел этого отношения при Δt стремящемся к нулю называют *мгновенной скоростью в момент времени* t_0. Обозначим среднюю скорость через $v_{ср.}$, а мгновенную скорость $v(t_0)$. Тогда $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Словами: *мгновенная скорость* $v(t_0)$ *равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю*.

2.3 Определение производной

Замечаем, что техника нахождения мгновенной скорости материальной точки в данный момент времени и углового коэффициента касательной к графику функции в данной точке одна и та же. Это обстоятельство побуждает нас к изучению этой техники и построению соответствующей математической модели. Отвлекаясь от конкретного содержания, сформулируем определение базового понятия, повторяя эту общую технику.

Определение 2. Пусть дана функция $f(x)$. Пусть точка x_0 и некоторая окрестность этой точки принадлежат области определения функции D. Выберем приращение Δx так, чтобы отрезок с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$ принадлежал окрестности точки x_0, содержащейся в D. Найдем приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *значением производной* данной функции при $x = x_0$ и обозначается $f'(x_0)$. Отображение, сопоставляющее всякому значению $x = x_0$ число $f'(x_0)$, определяет новую функцию, которая называется *производной* данной функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$.

Таким образом, *угловой коэффициент касательной к графику функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *равен значению производной* $f'(x_0)$. В этом состоит *геометрический смысл производной. Если движение материальной точки по прямой определяется функцией* $s(t)$*, то мгновенная скорость в момент времени* t_0 *равна значению производной* $s'(t_0)$. В этом состоит *физический смысл производной*.

Говорят, что функция дифференцируема в точке x_0, если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заметим, что из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 вытекает ее непрерывность в этой точке. В самом деле, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_1 \Delta x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_1 \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = k \cdot 0 = 0$. Другими словами, если приращение аргумента Δx стремится к нулю ($\Delta x \to 0$), то и Δy стремится к нулю ($\Delta y \to 0$). Но это и означает непрерывность функции в точке x_0.

Далее изучаются правила дифференцирования, этот материал мы здесь не рассматриваем.

Задача. Тяжелый снежный ком падает с крыши пятнадцатиэтажного дома (высота одного этажа 3 м.). Чему равна скорость падения снежного кома в момент удара о землю?

Решение. По закону свободного падения $s = s(t) = \frac{gt^2}{2}$, где g – коэффициент свободного падения, который возьмем с точностью до целых равным $g = 10\ м/сек^2$. По условию, $s = 45\ м$. Тогда $45 = \frac{10t^2}{2}$, откуда $t = 3\ сек$. Для вычисления мгновенной скорости находим производную: $s'(t) = \frac{g}{2} \cdot 2t = 10t$. При $t = 3$ получаем $s'(3) = 30\ м/сек$.

Ответ: мгновенная скорость падения снежного кома в момент столкновения с землей равна $30\ м/сек$.

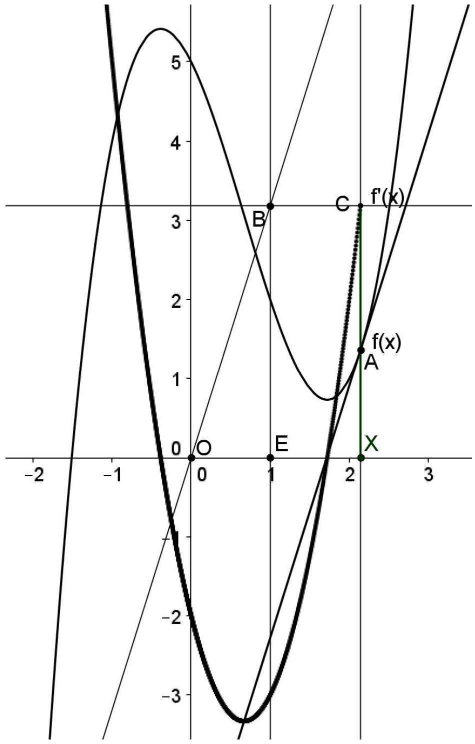
Живой чертеж к задаче построим в следующем пункте.

Часто физическую терминологию переносят на произвольный процесс изменения одной переменной в зависимости от изменения другой переменной. Если мы наблюдаем график некоторого процесса изменения переменной величины y от возрастания переменной x, которая возрастая пробегает множество всех неотрицательных действительных чисел R_0^+, то вполне осмысленным является понятие скорости этого процесса. Но тогда значение производной $f'(x_0)$ естественно назвать мгновенной скоростью при $x = x_0$. Например, наблюдаем процесс изменения площади круга в зависимости от увеличения радиуса. Он, как известно, задается функцией $s(r) = \pi r^2$. Вполне осознанно можно говорить о скорости изменения площади круга в зависимости от увеличения радиуса. Эта скорость задается формулой $s'(r) = 2\pi r$. Но тогда можно говорить о мгновенной скорости изменения площади круга для данного значения радиуса $r = r_0$, которая равна $s'(r_0) = 2\pi r_0$. Таким образом, мгновенная скорость изменения площади круга при значении $r = r_0$ численно равна длине окружности этого круга. Аналогично нетрудно показать, что скорость изменения объема куба равна утроенной площади его грани.

2.4 Механическое построение графика производной данной функции

В среде GeoGebra построим виртуальный прибор для механического вычерчивания графика производной данной функции.

Пример. Построить график производной функции $y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 5$.



с. 48

Построение (рис. 48).

1) С помощью строки ввода строим график данной функции $y = f(x)$.

2) На оси абсцисс отмечаем точку X и проводим через нее вертикальную прямую. Отмечаем точку A пересечения этой прямой с графиком данной функции.

3) С помощью инструмента «Касательная» через точку A проводим касательную к графику функции.

4) Отмечаем точкой O начало координат и через начало координат проводим прямую параллельно касательной.

5) Отмечаем единичную точку E оси абсцисс, проводим через нее вертикальную прямую и отмечаем точку B пересечения этой прямой с прямой параллельной касательной, проходящей через начало координат. Получаем угол $\alpha = \angle BOE$. Ордината точки B равна $tg\alpha$. С другой стороны, тангенс угла наклона касательной к графику данной функции в точке $A(x_0, f(x_0))$ равен производной данной функции $f'(x_0)$.

6) Через точку B проводим горизонтальную прямую и отмечаем точку C пересечения построенной прямой с вертикальной прямой, проходящей через точку X. Построение закончено.

Заставляем точку C оставлять след и задаем анимацию точки X. Наблюдаем как точка C, оставляя след, вычерчивает график производной данной функции. Этот способ вычерчивания графика производной по графику данной функции назовем *механическим*, а построенный чертеж – *виртуальным прибором* для механического вычерчивания графика производной.

Прибор можно настроить на вычерчивание графика производной другой функции. Для этого нужно правой кнопкой мышки кликнуть на график данной функции и в «Свойствах» задать новую функцию.

Само построение прибора доказывает, что если две функции отличаются только постоянным слагаемым: $h(x) = f(x) + c$, $c \in R$, то графики производных этих функций совпадают.

На рисунке 49 представлен живой чертеж к решенной выше задаче про снежный ком, падающий с крыши 15-этажного дома. На чертеже изображено свободное падение тяжелого шара с высоты 45 м. При падении шара точка F вычерчивает график свободного падения (зависимость пути от времени), а точка P рисует график изменения скорости от времени (производную). Последовательность построений можно проследить, если кликнуть правой кнопкой мыши на Полотно и в выпавшем меню выбрать Шаги построения, или нажать клавишу Вид и в выпавшем списке команд открыть Протокол. Заметим, что модель свободного падения можно сделать более реалистичной, если подобрать подходящие параметры анимации и изменить масштабы по осям координат.

График производной данной функции можно построить введением соответствующей команды в строку ввода. Но такое решение задачи «нажатием одной кнопки» не дает того образовательного эффекта, который дает «механическое вычерчивание». Особенно поучительным является создание соответствующего виртуального прибора.

Можно отказаться от услуг кнопки «Касательная» и строить график производной приближенно. Для этого мы касательную в точке $A(x_0, f(x_0))$ заменим секущей AB, где $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ при достаточно малом по абсолютной величине Δx.

Построение (рис. 50).

1) С помощью строки ввода строим график данной функции $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 5$.

2) На оси абсцисс отмечаем точку X, проводим через нее вертикальную прямую и отмечаем точку A пересечения построенной прямой с графиком данной функции.

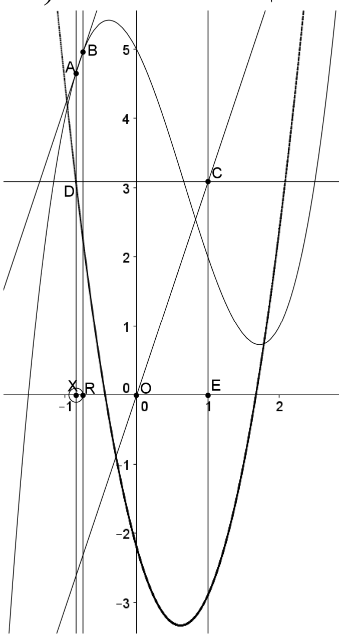


Рис. 50

3) Пусть абсцисса точки X равна x_0. Выбираем $\Delta x = 0.1$ и строим точку $R(x_0 + \Delta x, 0)$, проводим через нее вертикальную прямую и отмечаем точку B пересечения построенной прямой с графиком данной функции.

3) Проводим секущую AB.

4) Строим единичную точку $E(1,0)$ и проводим через нее вертикальную прямую. Отмечаем точку C пересечения вертикальной прямой с прямой, проходящей через начало координат параллельно касательной. Ордината точки C равна тангенсу угла $\angle COE$, а этот угол приближенно равен углу наклона α касательной к графику функции в точке A. Но $tg\alpha = f'(x_0)$. Следовательно, ордината точки C

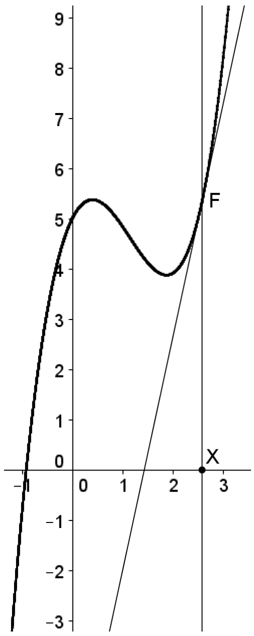
приближенно равна $f'(x_0)$,

5) Проектируем точку C на вертикальную прямую, проходящую через точку X , и получаем точку D . Построение закончено.

Теперь заставляем точку D оставлять след и задаем анимацию точки X . Наблюдаем как точка D, оставляя след, вычерчивает приближенный график производной данной функции. Для увеличения точности построения графика производной можно выбрать еще меньшее по абсолютной величине Δx .

Для лучшего усвоения уравнения касательной у графику функции в данной точке полезно по данной функции, заданной аналитически, действуя по алгоритму, написать уравнение касательной, а затем с его помощью построить график данной функции.

Пример. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin x + x^3 - 3x^2 + x + 5$ и, зная уравнение касательной в каждой точке, постройте график данной функции.



с. 51

Решение. Общее уравнение касательной к графику данной функции ы точке x_0 имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. В нашем случае $f'(x_0) = \cos x_0 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$, $f(x_0) = \sin x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 5$ и уравнение касательной принимает вид $y = (\cos x_0 + 3x_0^2 - 6x_{0)} + 1)(x - x_0) + \sin x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 5$. Зная график касательной в каждой точке x_0, мы можем найти точку $(x_0, f(x_0))$ графика данной функции, как точку пересечения прямой-касательной и вертикальной прямой, проходящей через точку $X(x_0,0)$.

Построение (рис. 51).

1) На оси абсцисс отмечаем «текущую» точку X и проводим через нее вертикальную прямую.

2) Строкой ввода вводим число $x_0 = x(X)$ (абсциссу точки X).

3) Строкой ввода строим прямую $y = (\cos x_0 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1)(x - x_0) + \sin x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 5$ и отмечаем точку F пересечения этой прямой с вертикальной прямой, проходящей через точку X . Построение закончено.

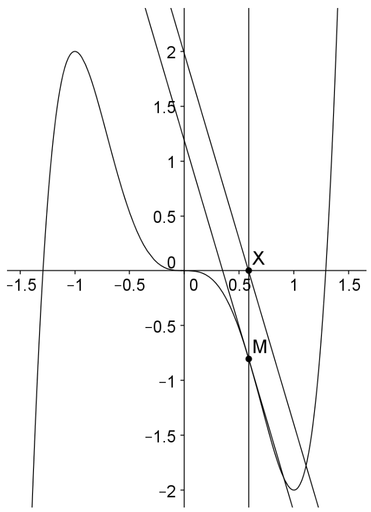
Заставляем точку F оставлять след и задаем анимацию точки X . Точка F вычерчивает график данной функции.

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

3.1 Построение графика функции с использованием производной

Изложенный ниже материал направлен на более осмысленное усвоение «Алгоритма исследования непрерывной функции $f(x)$ на монотонность и экстремумы» с последующим схематичным построением графика функции.

Пусть дана функция $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. В среде GeoGebra строим график этой функции (рис. 52). На оси абсцисс отмечаем точку X. Проводим через нее прямую параллельно оси ординат и отмечаем точку M пересечения прямой с графиком данной функции. Через точку M проводим касательную к графику функции. Точка X является проекцией точки M на ось абсцисс. Через точку X проведем прямую параллельную касательной. Построенную прямую будем называть *прямой наклона касательной*. Задаем анимацию точке X и наблюдаем, как при ее перемещении по оси абсцисс слева направо точка M перемещается по графику функции, увлекая за собой касательную, а прямая наклона касательной показывает угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.



с. 52

Теперь уберем (спрячем) график функции и касательную, оставив лишь прямую наклона касательной. При анимации точки X мы увидим, как изменяется угол наклона касательной. Поставим задачу: восстановить график данной функции, наблюдая изменения угла наклона касательной.

Составим упрощенную схему изменения угла наклона касательной. Сначала выделим точки оси абсцисс, соответствующие касательным параллельным этой оси. Это будут точки -1, 0 и 1. Затем над остальными областями оси абсцисс отметим схематично углы наклона касательной (рис. 53).

с. 53

Приведем схему (рис. 54), показывающую изменения наклона касательной.

По этой схеме мы можем сказать, что на промежутке $(-\infty, -1)$ функция $f(x)$ возрастает, на промежутке $(-1, 0)$ она убывает, а значит в точке $x = -1$ имеем максимум функции. Далее, на промежутке $(0, 1)$ функция убывает, а значит $x=0$ является точкой перегиба. Наконец, на промежутке $(1,+\infty)$ функция возрастает, а значит при $x=1$ имеем минимум функции.

x	< -1		$< x < 0$		$< x < 1$		x
Наклон касательной							

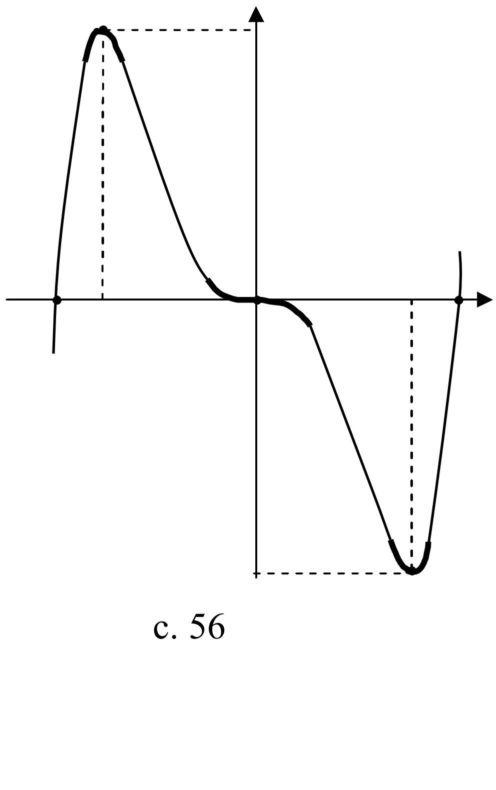
Рис. 54

На основании проведенных исследований составим схему поведения графика функции. Точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, называются *стационарными* точками. Для схематичного изображения частей графика функции вблизи стационарных точек предлагается использовать наглядные значки (рис. 55).

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x$
График $f(x)$							

Рис. 55

Для уточнения графика функции вычисляем значения функции в стационарных точках: $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$. Наконец, решая уравнение $3x^5-5x^3=0$, находим точки пересечения графика функции с осью абсцисс: $x_0=0$, $x_1=-\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2=\sqrt{\frac{5}{3}}$. В результате мы можем схематично представить график функции. Сначала отмечаем ключевые точки $(-\sqrt{\frac{5}{3}},0)$, $(-1,2)$, $(0,0)$, $(1,-2)$, $(\sqrt{\frac{5}{3}},0)$. Затем в окрестности точки $(-1,2)$ рисуем подобие части параболы ветвями вниз и вершиной в данной точке, в окрестности начала координат рисуем перегиб, а в окрестности точки $(1,-2)$ рисуем подобие параболы ветвями вверх и вершиной в точке $(1,-2)$. Соединяя построенные части графика, получаем схематичный график данной функции (рис. 56).



с. 56

Упражнение. Дана таблица изменения угла наклона касательной непрерывной функции $f(x)$ (рис. 57).

x	$< a$	a	$< x < b$		$< x < c$		$< x$
Наклон касательной	↗	—	↗	—	↘	—	↗

с. 57

Придумайте приемлемые значения для a, b, c, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, составьте таблицу изменения значений функции и нарисуйте схематично график функции.

Если в некоторой точке графика непрерывной функции касательная не существует, то в таблице изменения угла наклона касательной в соответствующей клетке будем ставить один из наглядных знаков. Точки, в которых касательная не существует, называются *критическими* точками.

Приведем пример такой таблицы (рис. 58).

x	$< a$	a	$< x < b$		$< x < c$		$< x$
Наклон касательной	↗		↗	∧	↘	∨	↗

с. 58

Приведите пример графика непрерывной функции, который соответствовал бы данной таблице.

Опираясь на геометрический смысл производной, приведем пример использования производной для схематичного вычерчивания графика функции.

Пример. Построить схематично график функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, используя ее производную.

Решение. 1) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.

2) Найдем производную данной функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

3) Решая уравнение $3x^2 - 6x = 0$, находим стационарные и критические точки. В нашем случае корни уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ являются стационарными точками.

4) Составляем таблицу изменения знаков производной, соответственно угла наклона касательной и поведения графика функции (рис. 59).

x	$x<0$	0	$< x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Наклон касательной	/	—	\	—	/
График $f(x)$	↗	∩	↘	∪	↗

5) Находим значения функции в стационарных точках: $f(0)=4$, $f(2)=0$, находим корни многочлена: $x_1=-1$, $x_{2,3}=2$ и строим схематично график данной функции.

с. 59

Для проверки постройте график в GeoGebra.

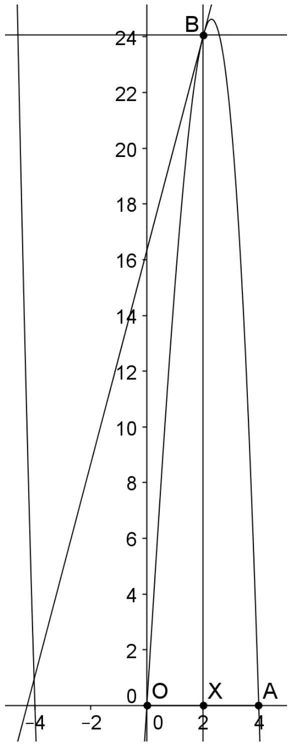
Задачи на максимум и минимум

Задача 2. *Из цилиндрического бревна изготавливают балку прямоугольного сечения, вписанного в окружность сечения бревна. Известно, что упругость балки пропорциональна произведению ширины прямоугольника сечения на высоту. Найдите размеры сечения, при котором прочность балки максимальна.*

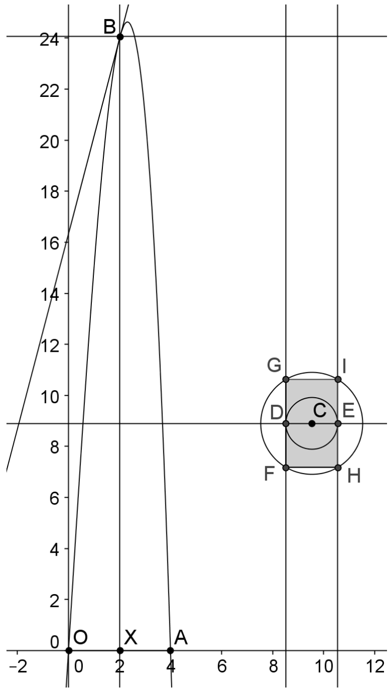
Решение.

1. *Составление математической модели.* Искомую ширину балки обозначим через x, высоту h, радиус бревна r, упругость балки y, а коэффициент пропорциональности k. Тогда $x^2+h^2=4r^2$, откуда $h^2=4r^2-x^2$. По условию, упругость $y=kxh^2$, откуда $y=kx(4r^2-x^2)=4kr^2x-kx^3$. Полученная функция $y=4kr^2x-kx^3$ выражает искомую зависимость упругости балки y от ширины балки x. Задача сводится к нахождению наибольшего значения полученной функции. Математическая модель задачи построена.

2. *Графическое решение задачи на анимационном чертеже.*



с. 9

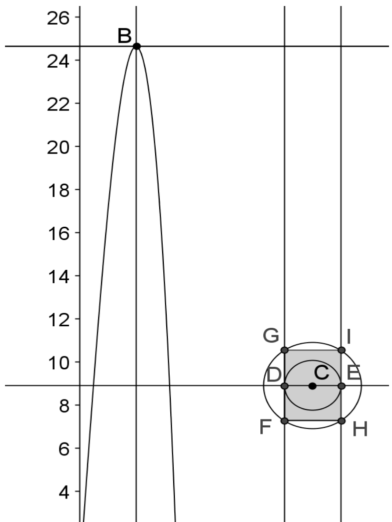


с. 10

Построение в среде GeoGebra. (рис. 9). 1) Строкой ввода вводим параметры k и r, полагая для определенности $k = 1$, $r = 2$ (считаем, что r равно двум десяткам см.).

2) Строкой ввода строим график функции $y = 4kr^2x - kx^3$.

3) Отмечаем начало координат (как точку пересечения осей) и строим отрезок OA длиной $2r$. На этом отрезке отмечаем точку X, при ее анимации впоследствии она будет перемещаться по этому отрезку. Абсцисса x точки X будет равна ширине сечения балки. Через точку X проводим вертикаль и отмечаем точку B пересечения вертикали с графиком функции. Через точку B проводим касательную к графику функции и горизонткальную прямую.



с. 11

У нас все готово для графического решения задачи. Для наглядности построим изображение сечения балки шириной x в виде прямоугольника, вписанного в окружность, которая представляет собой сечение бревна радиуса r (рис. 10).

4) На свободном месте Полотна отмечаем точку C и проводим окружность с центром в этой точке радиуса r, изображающую сечение бревна. Затем проводим окружность с центром в точке C радиуса $x(X)/2$ (половина абсциссы точки X). Через точку

C проводим горизонтальную прямую и отмечаем точки D и E пересечения этой прямой с малой окружностью. Через точки D и E проводим вертикали и отмечаем точки G, F и I, H пересечения вертикалей с внешней окружностью. Строим прямоугольник $GFHI$ сечения балки. Построение закончено.

Приступим к графическому решению задачи. Сначала для большего понимания связи графика с изображением сечения перемещаем точку X по отрезку OA и наблюдаем за соответствующим изменением сечения балки. Видим, что наибольшая упругость балкм $y_{наиб.}$ достигается, когда касательная в точке B занимает горизонтальное положение, сливаясь с горизонталью, проведенной через точку B. Нам остается лишь «поймать» соответствующее положение точки X (рис. 11). Сначала вручную подбираем положение точки X, «близкое к идеальному». Затем путем испытаний подбираем одну за другой очередную цифру абсциссы точки X. Например, пусть вручную мы установили точку $X(2.28{,}0)$. Видим, что касательная не совпадает с горизонталью и нужно точку X двигать вправо. Тогда в строку ввода записываем: $X=(2.29{,}0)$. Видим, что этой прибавки мало. Вводим $X=(2.3{,}0)$. Еще мало. Вводим $X=(2.31{,}0)$. Много! Вводим $X=(2.305{,}0)$. И так далее. Удовлетворительное приближение получаем при $X=(2.3094{,}0)$.

Ответ: наибольшая упругость балки достигается при ширине сечения балки, примерно равным $x=2.3094$.

3. *Аналитическое решение задачи.*

Требуется найти такое значение переменной x (ширины сечения балки), при котором функция принимает наибольшее значение $y_{наиб.}$. Решая задачу графически, мы видели, что искомое $x=x_0$ соответствует горизонтальному положению касательной к графику функции в точке x_0. Но касательная горизонтальна $\Leftrightarrow$ угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс равне 0 $\Leftrightarrow$ тангенс этого угла равен 0 $\Leftrightarrow$ производная функции в точке x_0 равна 0. Следовательно, нужно найти производную функции в данной точке, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение: $y'=(4kr^2x-kx^3)'=4kr^2-3kx^2=0$, откуда $x_1=\frac{2r}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Поскольку ширина сечения балки есть положительное число, то второй корень для нас является посторонним.

Итак, в точке $x_1=\frac{2r}{\sqrt{3}}$ касательная горизонтальна. Но будет ли в этой точке значение данной функции наибольшим? Вспомним, что $0<x<2r=4$. Необходимо убедиться, что на концах отрезка [0,4] значения функции не больше, чем в точке x_1. Вычисляем: $y(0)=0$, $y(2r)=8kr^3-8kr^3=0$. Следовательно, $y_{наиб.}$ достигается в точке $x_1=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Ответ: ширина сечения балки равна $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Найдем соотношение между шириной x и высотой h сечения балки. Имеем: $h^2 = 4r^2 - x^2 = 4r^2 - \frac{4r^2}{3} = \frac{8}{3}r^2$, откуда $h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$. Следовательно, $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$ и $h = x \cdot \sqrt{2}$.

4. *Графическая проверка ответа.*

В строку ввода записываем $X = (2*r/sqrt(3),0)$ и после ввода видим, что касательная горизонтальна, это соответствует $y_{наиб.}$. Одновременно видим соответствующее сечение балки. На нем отмечаем отрезки FH и GF (ширину и высоту сечения балки). Вводим число $x(X)*sqrt(2)$ и видим, что это число совпадает с длиной отрезка GF (при выбранных $k = 1$ и $r = 2$).

Таким образом, графическое решение не только является источником аналитического решения, делает его осознанным, но и позволяет выполнить проверку найденного аналитического решения.

Заключение

В дидактике часто возникает вопрос: «современный или не современный урок?», но все зависит от того, как он организован. В то же время следует отметить, что сущность урока как дидактического понятия очень сложна, так как такое определение должно включать большое количество компонентов. Одна из важнейщих особенности традицинного урока заключается в том, что учитель в первую очередь озабочен организацией своей работы на уроке, а не деятельностью учащихся, хотя сущность процесса обучения требует продумывания, организации и стимулирования познавательной деятельности учащихся.

Задача формирования интеллектуального потенциала, определяющего будущее страны, её науку, культуру, искусство, технологии, лежит на системе её общего среднего образования. В этом контексте успех казахстанский науки, экономики и культуры будет зависеть от того, удастся ли в ближайшее время подготовить новое поколение специалистов, которые могут создавать конкуретноспособную науку, экономику и духовные ценности. Те требования, которые предъявляются сегодня высококвалифицированным спецалистам в соответствии с национальной доктриной образования, делают актуальной проблему научно–методического, технологического обеспечения средней школы, что в свою очередь тесно связано с разработкой и совершенствованием государственных общеобразовательных стандартов общего образования.

Главное назначение содержания образования состоит в том, что оно призвано служить средством и условием воспитания разносторонней и целостной личности, развития творческого мышления учащихся и, тем самым, привить способность адекватно, свободно и ответственно мыслить и действовать в любой сфере жизни, быть мобильным в разных ситуациях.

Решение проблем видится нами в изменении распространенного понимания образования как «передачи ученику знаний». В традиционном обучении ученик в начале «получает знания», а затем применияет их, в том числе и творчески. Считается, что приращение знаний, как личных, так и общечеловеческих, возможно только после знакомства с уже имеющимися знаниями. Результаты исследования показали, что ученик способен изначально констатировать знания в исследуемой области реальности, опираясь на личный образовательный потенциал и определенную технологию деятельности. Полученный учеником продукт деятельности (гипотеза, сочинение, подделка и т.п.) сопоставляется затем с культурно-историческими аналогами, в результате чего данный продукт переосмысливается, достраивается или драматизируется, вызывая необхадимость новой деятельности. Личное образовательное приращение ученика (его знаний, чувств, способностей, опыта, материальной продукции) в этом случае неизбежно. Иногда это приращение выступает одновременно общекультурным приращением, тогда ученик оказывается включенным в культурно-исторические процессы в качестве их полноправного участника. Задача учителя – помочь ученику в построении индивидуальной траектории его образования, соотносящейся с общепринятыми достижениями человечества и направленной на их приращение. Решить эту задачу призвана особая методология организации образовательной деятельности. [А.Е.Абылкасымова, Современный урок, 192с]

Новые информационные технологии в математике и в преподавании математики появились сравнительно недавно и пока еще очень мало работ на эту тему. Еще только предстоит выявить значение и указать место этих технологий в области обучения математике. Наша научная работа лежит в русле этих методических задач.

Наши исследования и методические рекомендации относятся к изучению в школе наиболее трудного и чрезвычайно абстрактного материала, относящегося к началам математического анализа. Мы не только проанализировали существующие учебники по этой теме, но и обосновали целесообразность использования компьютерной программы GeoGebra с целью увеличения наглядности и устранения излишней абстрактности при изучении материала. Продемонстрировали большие возможности среды GeoGebra как для учителей, так и для учеников при организации их самостоятельных исследований. Особенностью предложенной нами методики изучения темы «Производная и исследование функции с помощью производной» заключается в создании живых рисунков, сопровождающих объяснение материала и решение задач. Важное значение проделанной работы подтверждается научно-методическим экспериментом во время научно-педагогической практики в Красноярском государственном педагогическом университете им. В.П. Астафьева и при обсуждении результатов работы на Научном семинаре при кафедре алгебры, геометрии и методики их преподавания. Часть работы описана в виде статьи «Изучение производной в школе с использованием анимации в среде GeoGebra» // III Всероссийской научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании», 18-20 ноября 2014г., г. Красноярск, РФ. – 10-20с. (совместно С.В.Лариным)

Планируется продолжение исследований по использованию среды GeoGebra в преподавании математики как в школе, так и в высших образовательных учреждениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011 – 2020 годы // Индустриальная Караганда. – 2010. – № 199-200. – С. 5-10.

2. Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Шойынбеков К.Д.,Корчевский В.Е., Алгебра и начала анализа: учебник для 10 кл. Естественно-математическое направление. — Алматы: Мектеп, 2006.

3. Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Шойынбеков К.Д.,Корчевский В.Е., Алгебра и начала анализа: учебник для 11 кл. Естественно-математическое направление. — Алматы: Мектеп, 2006.

4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. Профильный уровень. Ч. 1. Учебник 10. – М.: «Мнемозина», 2008.

5. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала математического анализа. Профильный уровень. Ч. 2. Задачник 10. – М.: «Мнемозина», 2008.

6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1. – М.: «Наука», 1968.

7. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). – М.: «Наука», 1969.

Добавить:

2. Вейль, Г. Математическое мышление // Г. Вейль. – М.: Наука, 1989.

6. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии // Ф. Клейн. – М.: Наука, 1989.

9. Ларин, С.В. Вычисления с помощью виртуальных геометрических инструментов / С.В. Ларин // Математика в школе – №8, 2007, с. 35-43.

10. Ларин С.В. Электронное издание «Компьютерная анимация в математике в среде GeoGebra». 2014. Размещено на сайте КГПУ, Электронная библиотечная система.

5. Ларин, С.В. Формулы для нахождения площадей сегментов кривых второго порядка / С.В. Ларин // Математика в школе – №1, 2015, с. 26-35.

10. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 кл.: Учеб. для шк. и кл. с углуб. изуч. Математики // Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков – М.: Мнемозина 2001.

11. Маркушевич, А.И. Комплексные числа и конформные отображения // А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1980.

12. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1985.

15. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. Профильный уровень. Ч. 1. Учебник 11. – М.: «Мнемозина», 2009.

16. Пуанкаре, А. Наука и метод / А. Пуанкаре // О науке. – М.: Наука, 1983.

Интернет-источники

20. http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

21. http://www.geogebra.org/cms/ru/

22. GeoGebra Institute of Siberia. Сибирский институт GeoGebra.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Урок по алгебре и началам анализа в 10 классе.
Поурочный план.

Тема: Производная. Применение производной.

Цель:1) Совершенствование знаний по теме;

2) Развитие навыков применения производной к различным типам задач;

3) Воспитание коллективизма и

Ход урока:

Организационный момент.
Приветствие, сообщение темы и задач урока.

Проверка домашнего задания.
Учащиеся решают по вариантам.

Вариант 1	*а, в*	№710
Вариант 2	*б, г*	

Объяснение нового материала.
Объяснение нового материала (стр. 163-165):

1. Алгоритм отыскания производной
2. Используя алгоритм найти производную функции $y = C$ и $y = \frac{1}{x}$.
3. Дифференцирование функции.

Закрепление нового материала.
1) Используя алгоритм отыскания производной, найти производную функций: $y = 7x + 4$, $y = -6x + 1$, $y = x^3$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^3$.
2) Найдите скорость изменения в точке x_0 $y = 4x - 19$, $y = -3x + 5$, $y = \sqrt{3x}$, $y = \sqrt{2 - 4x}$, $y = \frac{5}{3x}$, $y = (x-3)^3 + 2$, $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = \cos 2x$.

Решение заданий по теме.
Решить задания из №722-726 у доски учащимися группы Б, с полным объяснением решения.

Подведение итогов.

Домашнее задание: №727, 734, 735; *теория в учебнике стр. 163-165.*

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Урок по алгебре и началам анализа в 11 классе.

Поурочный план.

Тема: Производная. Применение производной.

Цели урока: повторить нахождение производной функции по формулам, применяя правила дифференцирования; закрепить умение дифференцирования функции простого аргумента, функции сложного аргумента и дифференцирования сложной функции.

Ход урока:

Организационный момент.

Приветствие, сообщение темы и задач урока.

Составление конспекта.

<table>
<tr><td colspan="2">Дифференцирование функции простого аргумента</td></tr>
<tr><td>Правила дифференцирования</td><td>Формулы дифференцирования</td></tr>
<tr><td>1. $C' = 0$
2. $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$
3. $\left(f(x) + g(x) - h(x)\right)' = f'(x) + g'(x) - h'(x)$
4. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
6. Если $y = f(u)$, $u = h(x)$, то $y' = f'(u) \cdot h'(x)$</td><td>1. $(kx+m)' = k$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формула дифференцирования функции сложного аргумента</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f'(kx+m) = f'(kx+m)(kx+m)' = kf'(kx+m)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применение формул: $\left((kx+m)^n\right)' = n \cdot k \cdot (kx+m)^{n-1}$, $\sin'(kx+m) = k \cdot \cos(kx+m)$, $ctg'(kx+m) = -\frac{k}{\sin^2(kx+m)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формула дифференцирования сложной функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если $u = g(h(x))$ и $v = h(x)$, то $f'\left(g\left(h(x)\right)\right) = f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x)$.</td></tr>
</table>

Решение задач по теме.

Составляя конспект, решаются задания из задачника.

1. Дифференцирование функции простого аргумента: №787, 740, 743, 749, 752, 764.
2. Дифференцирование функции сложного аргумента: №771, 772, 773, 774.
3. Дифференцирование сложной функции:

Задание: Пусть $y=f(x)=\sqrt{x}$, $y=g(x)=\sin x$, $y=h(x)=\cos x$, $y=t(x)=tgx$, $y=p(x)=ctgx$, $y=s(x)=x^5$.

Найдите производную сложной функции: $y=f(t(s(x)))$; $y=g(f(h(x)))$; $y=h(g(s(x)))$; $y=t(f(s(x)))$; $y=h(f(g(x)))$; $y=s(t(p(x)))$.
Учитель объясняет решение первого задания, а остальные решают учащиеся самостоятельно.

Решение: $y=f(t(s(x)))=\sqrt{tgx^5}$. $\left(\sqrt{tgx^5}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{tgx^5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^5}\cdot 5x^4$.

Решение по карточкам.

Карточка №1	Карточка №2	Карточка №3
Найдите производные функций:		
$y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$	$y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$	$y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$
$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$y=x+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$	$y=\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
$y=\cos 2x-2\sin x$	$y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$	$y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

Карточка №4	Карточка №5	Карточка №6
Найдите производные функций:		
$y=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$	$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$	$y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$
$y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$	$y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-5)}$	$y=\sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$
$tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{3}$	$y=\sin^4 x+\cos^4 x$	$y=\sin x\cdot\sin 3x$

Карточка №7	Карточка №8	Карточка №9	Карточка №10
Найдите производные функций:			
$y=1-x+\sqrt{\frac{x^2}{3+x}}$	$y=\frac{3x-x^3}{1+x^2}$	$y=\frac{1+x^4}{1-x^4}$	$y=\frac{4x^3-x^5}{2x-3x^3}$
$y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$	$y=\sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$	$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$y=\sqrt{x^3}-\sqrt{x^2+1}$
$y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$	$y=\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$	$y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$	$y=\frac{\cos x}{2-\sin x}$

Подведение итогов.

Домашнее задание: Найдите производные функций y: $y=h(t(h(g(x))))$; $y=g(g(h(h(x))))$; $y=p(s(g(f(x))))$; $y=t(p(t(p(x))))$

Если $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\cos x$, $t(x)=tgx$, $p(x)=ctgx$, $s(x)=x^5$.

Задача недели: Найдите все определенные на множестве $(0;+\infty)$ функции f такие, что для любого $x>0$ выполняется неравенство $f(x)>0$ и при всех $x>0$ и $y>0$ выполняется равенство $f\left(xf(y)\right)+f(x)+f(y)=f(x+y)$.

Ответ: таких функций не существует.