

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
**«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени В.П. Астафьева»**

Институт математики, физики и информатики  
Кафедра физики  
Специальность 050203.65 «Физика» с дополнительной специальностью  
050202.65 «Информатика»

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ  
Зав. кафедрой физики  
Баранов А.М. \_\_\_\_\_  
«\_15\_» июня 2015 г

Выпускная квалификационная работа

## **Смещение перигелия Меркурия и закон тяготения Ньютона**

Выполнил студент группы 57  
К.И. Стеганцов \_\_\_\_\_  
Форма обучения очная

Научный руководитель:  
Доктор физико-математических наук, профессор  
А.М. Баранов \_\_\_\_\_  
Рецензент:  
кандидат технических наук, доцент  
С.В. Бортновский \_\_\_\_\_

Красноярск  
2015

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
Глава I	
<b>1. Проблема формирования межпредметных связей у обучающихся в общеобразовательных школах .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Задача двух тел и центральное поле .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Уравнение орбиты и коническое сечение .....</b>	<b>14</b>
Глава II	
<b>1. Периоды обращения планет Солнечной системы и законы Кеплера..</b>	<b>20</b>
<b>2. Движение планет согласно теории Эйнштейна .....</b>	<b>27</b>
<b>3. Модификация всемирного закона тяготения Ньютона.....</b>	<b>30</b>
<b>Заключение.....</b>	<b>35</b>
<b>Литература.....</b>	<b>35</b>

## Введение

В 1859 году французский математик и астроном Урбен Леверье сообщил, что существует аномальное смещение перигелия Меркурия [1], то есть ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты перемещается по направлению движения Меркурия, ввиду этого, возникает медленная прецессия орбиты. Данное открытие положило начало споров о справедливости закона тяготения Ньютона, ведь прецессию Меркурия так и не смогли за десятки лет полностью объяснить на основе расчёта влияния известных планет согласно ньютоновской механике.

Однако Леверье не отступал. Пытаясь разгадать данную небесную загадку, он выдвинул гипотезу о том, что внутри орбиты Меркурия расположена еще одна планета небольшого размера или еще один пояс астероидов.

Далее начинается целая кампания по поиску загадочной планеты, продлившаяся практически много лет. Единственный способ, который мог позволить обнаружить интрамеркурианские объекты, на тот момент, был вести наблюдения во время полного солнечного затмения. Одним из ученых, проводивших наблюдения был профессор Рудольф Вольф, который обнаружил на диске Солнца подозрительный точки. Иные астрономы так же наблюдали подобные пятна. Поиски истины осложнялись тем, что все зафиксированные на Солнце затемнения подходили для роли двух планет, лежащих внутри орбиты Меркурия. Страсть Леверье по решению данной загадки подогрело письмо от астронома Лескарбо, который сообщал, что наблюдал, как круглая точка, похожая на планету проходила по диску Солнца. Лескарбо так же привел свои расчеты о наклоне орбиты планеты, ее эксцентриситете. На основе полученных данных Леверье вычислил период обращения, составивший 19 дней и 7 часов, среднее расстояние до Солнца, диаметр планеты и ее массу. Но оказалось, что это тело не достигает той массы, которая способна отклонить орбиту Меркурия. Тогда Леверье, не желая отказываться от этой красивой идеи о интрамеркурианских объектах, предполагает, что это наибольший из астероидов среди множества. Он даже придумал ему название «Вулкан».

Во время полного Солнечного затмения в 1860 году на поиски Вулкана были брошены все силы астрономов Франции. Но неуловимое небесное тело так и не было обнаружено, подобно интрамеркурианскому поясу астероидов.

В 1877 году Леверье скончался, так и не узнав истинную причину странного поведения орбиты Меркурия. Но со смертью ученого охота за Вулканом не прекратилась. В июле 1878 года астроном Ватсон утверждал, что видел две планеты внутри орбиты Меркурия. В то же время другой астроном Свифт так же видел некий объект и определил его, как Вулкан. Только Вулкан Свифта находился в ином месте, в отличие от двух планет Ватсона.

Эта загадка так и оставалась неразрешенной вплоть до начала двадцатого столетия. Пока в 1915 году Эйнштейн не опубликовал свою общую теорию относительности [2], с помощью которой удалось объяснить аномальное смещение орбиты Меркурия [1].

В данной работе поставлено несколько задач:

- 1) объяснить эффект аномальной прецессии орбиты Меркурия в рамках классической физики, то есть фактически ввести некие поправки в ньютоновскую теорию тяготения;
- 2) сформировать у обучающихся общеобразовательных учреждений метапредметную связь физики, математики и астрономии;
- 3) показать, что явления, изучаемые в астрономии являются одними из фундаментальных явлений нашей Вселенной.

Здесь следует сказать, что данная работа рассчитана на учеников старших классов с углубленным изучением математики и физики.

## Глава I

### 1. Проблема формирования межпредметных связей у обучающихся в общеобразовательных школах

Нередко обучающиеся современных школ не способны найти связи между учебными предметами. И так как данная работа посвящена рассмотрению физических явлений, имеющих место быть в нашей Солнечной системе, то с нашей стороны логичным будет рассмотреть связь физики и математики, а так же астрономии, изучение которой было прекращено в 2008 году. Зачастую неразрывная связь физики и математики в школе остается без должного внимания, что зачастую приводит к значительным трудностям у студентов, поступившим в ВУЗы. В Федеральном Государственном Образовательном стандарте основного общего образования [3] говорится, что «Изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить: сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления». Использование различных технологий обучения помогает ученикам осознать значимость изучаемого математического материала и увидеть его применение в практических задачах. Одной из таких технологий может быть метод проектов. За основу проекта можно взять материалы, представленные в данной работе. Перед обучающимся старшей школы ставится задача по решению проблемы смещения перигелия орбиты планеты Меркурий. Проблема эта была решена Эйнштейном, о чем говорилось во введении, однако старшеклассники должны объяснить данное явление, в рамках ньютоновской теории тяготения, не прибегая к теории относительности.

Реализация проекта будет производиться по следующему плану:

1. Выбор темы проекта;
2. Постановка цели(ей) проекта;
3. Формирование проблемы;
4. Краткая историческая справка, касающаяся выбранной темы;
5. Предложенное решение проблемы;
6. Общий вывод о проделанной работе.

Применение данной технологии будет способствовать формированию таких результатов образования, как: «сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач; сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры,

универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления», таким образом будут раскрыты межпредметные связи математики и физики.

Однако, отсутствие преподавания астрономии, как изучаемой дисциплины в средней школе создает благоприятную почву для повсеместного распространения лженаучных представлений о мире, как например астрологии, что не позволяет должным образом сформировать у выпускников школ научное мировоззрение. Представленный нами проект позволит обучающимся сформировать представление об астрономии, как о науке.

Таким образом, обучающиеся смогут самостоятельно увидеть применение законов физики и математических вычислений на практике, что в свою очередь может помочь выпускникам средних школ в выборе будущей профессии. В методическом пособии для педагогов-руководителей проектов учащихся основной школы под редакцией д.ф.-м.н., проф. Е.Я. Когана [4] сказано: «Задача системы образования всегда состояла в формировании у подрастающего поколения тех знаний, поведенческих моделей, ценностей, которые позволят ему быть успешным вне стен школы».

## 2. Задача двух тел и центральное поле

В астрономии задачей двух тел называется задача, в которой рассматривается движение двух тел массами  $m_1$  и  $m_2$ , взаимно притягивающихся согласно закону тяготения Ньютона. В такой задаче притягивающиеся тела принимаются за материальные точки, что справедливо, если они имеют сферическую структуру или если расстояния между ними весьма велики по сравнению с их размерами. Это условие в значительной мере выполняется для Солнца и каждой из планет солнечной планетарной системы.

При решении задачи двух тел обычно сводят рассмотрение к движению одного тела относительно некоторого центра. При этом исходная зависимость потенциальной энергии взаимодействия между двумя телами зависит только от расстояния между этими телами, что приводит в конечном итоге к центральному силовому полю, в котором движется тело приведенной массы,  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Движение в этой задаче происходит по коническим сечениям — окружности, эллипсу, параболе, гиперболе— согласно законам Кеплера [5,6].

Прежде чем решать данную задачу покажем, каким образом она может быть существенно упрощена. Это упрощение состоит в разложении системы на движение центра инерции (центра масс) и движения точек относительно него.

Вспомним, что потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними. Это расстояние является абсолютной величиной разности их радиус-векторов. Отсюда функция Лагранжа такой системы имеет вид:

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}|), \quad (1)$$

где  $\vec{r}$  — вектор взаимного расстояния обеих точек:  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Поместим начало координат в центре инерции (центре масс), получим:  $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ .

Из двух последних равенств получаем:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (2)$$

Подставив выражения для  $r_1$  и  $r_2$  в (1), имеем:

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(r) , \quad (3)$$

где  $m$ - приведенная масса, условная характеристика распределения масс в движущейся системе, зависящая от ее физических параметров и от закона движения:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (4)$$

Таким образом, задача о движении двух, взаимодействующих друг с другом тел, сводится к решению задачи одной точке в заданном внешнем поле  $U(r)$ .

Теперь, когда мы свели задачу двух тел к задаче одного, движущегося во внешнем поле, перед нами встает вопрос об определении движения частицы в этом поле. Стоит отметить, что здесь потенциальная энергия частицы зависит только от расстояния  $r$  до определенной неподвижной точки.

При этом сила, действующая на частицу тоже зависит только от  $r$  и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора:

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{dU}{dr} . \quad (5)$$

При движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля:  $M=[rp]$ . Так как векторы  $M$  и  $r$  взаимно перпендикулярны, неизменность  $M$  означает, что во время движения частицы ее радиус-вектор остается в одной плоскости, перпендикулярной  $M$ . Следовательно, траектория движения частицы в центральном поле лежит в одной плоскости.

Перепишем функцию Лагранжа, введя полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) . \quad (6)$$



В этой функции не содержится в явном виде координата  $\varphi$ . Любая обобщенная координата  $q_i$ , не входящая явным образом в функцию Лагранжа называется циклической. Для такой координаты в силу уравнения Лагранжа имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \quad (7)$$

То есть соответствующий ей обобщенный импульс  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  является интегралом движения. Этот факт приводит к тому, что задача интегрирования уравнений движения циклических координат существенно упрощается. В данном случае обобщенный импульс  $p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$  совпадает с моментом  $M_z = M$ , так что мы получаем закон сохранения момента:

$$M = mr^2 \dot{\varphi} = const . \quad (8)$$

Для плоского движения одной частицы в центральном поле этот закон допускает простую геометрическую интерпретацию. Выражение  $\frac{1}{2} r * r d\varphi$  - площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории (рис. 1).

Обозначив ее за  $df$ , напишем момент частицы в виде:

$$M = 2mf \quad (9)$$

где производная от  $f$  называется секториальной скоростью. Следовательно, сохранение момента означает неизменность секториальной скорости, т.е. за

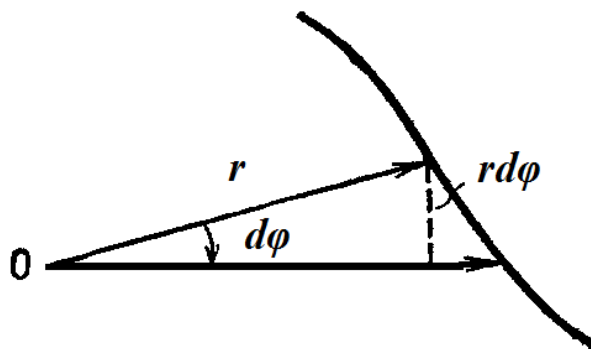


Рис. 1

равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает (замечает) равные площади. Данное утверждение носит название второго закона Кеплера [5,6].

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле можно получить, воспользовавшись законом сохранения энергии и момента. При этом сами уравнения движения не записываются. Выразив  $\dot{\varphi}$  через  $M$  из уравнения (8) и подставив в выражение для энергии, получим:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) , \quad (10)$$

отсюда выразим  $\dot{r}$  :

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2[E - U(r)]}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2}} , \quad (11)$$

разделив переменные ( $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$ ) и проинтегрировав, будем иметь:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E - U(r)]}{m} - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const . \quad (12)$$

Теперь запишем выражение (8) в виде:  $d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$  и подставим в него  $dt$  из (11) и возьмем от получившегося выражения интеграл:

$$\varphi = \int \frac{\frac{Mdr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2m[E - U(r)]}{m} - \frac{M^2}{r^2}}} + const . \quad (13)$$

Отметим, что формулы (12) и (13) являются решениями поставленной задачи в неявном виде. Выражение (12) определяет в неявном виде расстояние  $r$  движущейся точки от центра как функцию времени. Скажем так же, что угол  $\varphi$  изменяется со временем монотонно. В свою очередь, формула (13) является уравнением траектории, т.е. определяет в неявном виде связь  $r$  и  $\varphi$ .

Формула (10) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное в поле с «эффективной» потенциальной энергией [6]:

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad (14)$$

где  $\frac{M^2}{2mr^2}$  – центробежная энергия. Значения  $r$ , при которых определяют границы области движения по расстоянию от центра. Радиальная скорость  $\dot{r}$  обращается в нуль, если выполняется равенство:

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E. \quad (15)$$

Однако, этот факт не говорит об остановке частицы, как при одномерном движении, так как угловая скорость  $\dot{\varphi}$  не равна нулю. Равенство  $\dot{r}=0$  означает точку поворота траектории, в которой функция  $r(t)$  переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

В случае, если область изменения  $r$  ограничена одним условием  $r \geq r_{\min}$ , то движение частицы инфинитно. Это значит, что ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность. Если же область изменения  $r$  имеет не одну, а две границы  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , то движение является финитным, что означает нахождение траектории движения внутри кольца, ограниченного окружностями  $r = r_{\max}$  и  $r = r_{\min}$ . Но это не говорит о том, что траектория является замкнутой кривой. Ведь за время, в течение которого  $r$  изменяется от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$ , а затем снова до  $r_{\min}$ , радиус-вектор повернется на угол  $\Delta\varphi$ , значение которого, согласно выражению (13) равно:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{Mdr}{r^2}}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (16)$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от  $2\pi$ , то есть имел вид  $\Delta\varphi = \frac{2\pi m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа. Следовательно через  $n$  повторений этого периода времени, радиус-вектор точки, сделав  $m$  полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением. Это значит, что траектория будет замкнутой.

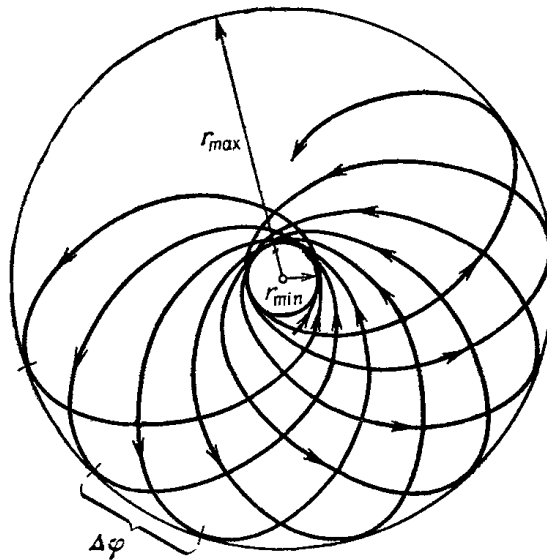


Рис. 2

Но подобные случаи скорее исключение, чем правило, потому при произвольном виде  $U(r)$  угол  $\Delta\varphi$  не является рациональной частью  $2\pi$ . Потому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесконечное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние, как показано на рисунке 2, и за бесчисленное время заполняет все кольцо между граничными окружностями. Существуют только два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия пропорциональна  $\frac{1}{r}$  или  $r^2$ .

При  $r$  стремящейся к 0, центробежная энергия обращается в бесконечность, а  $\frac{1}{r^2}$  приводит к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля, даже если оно имеет характер притяжения. Попадание частицы в центр возможно лишь тогда, когда потенциальная энергия быстро стремится к  $-\infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Из неравенств:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0,$$

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2,$$

следует, что  $r$  может принимать любые малые значения при условии:

$$r^2 U(r) |_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m}, \quad (17)$$

следовательно  $U(r)$  должно стремиться к  $-\infty$  или как  $-\frac{\alpha}{r^2}$  с  $\alpha > \frac{M^2}{2m}$ , либо пропорционально  $-\frac{\alpha}{r^n}$  с  $n > 2$ .

### 3. Уравнение орбиты и коническое сечение

Если эллипс имеет нулевой эксцентриситет, то он является одним из видов конического сечения. Коническое сечение представляет собой сечение плоскостью конуса, в зависимости от взаимного расположения которых, получают гиперболу, параболу и эллипс. Как известно, орбиты планет представляют собой эллипс, но ввиду мощного гравитационного воздействия со стороны Солнца, они временами могут принимать вид и других конических сечений. Однако, вернемся к рассмотрению центральных полей.

Очень важным случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна  $r$  и соответственно силы обратно пропорциональны  $\frac{1}{r^2}$ . К таким полям относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические. Стоит отметить, что кулоновские поля могут быть как полями притяжения, так и полями отталкивания. Для начала рассмотрим поле притяжения, в котором:

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad (18)$$

если  $\alpha$  положительна, то график потенциальной энергии:

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad (19)$$

принимает вид, как показано на рис. 3.

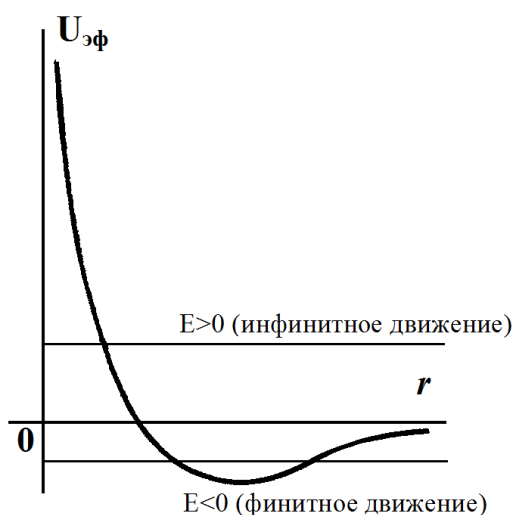


Рис. 3

При  $r \rightarrow 0$ ;  $U_{эф} \rightarrow \infty$ , а при  $r \rightarrow \infty$ ;  $U_{эф} \rightarrow 0$  со стороны отрицательных значений и имеет минимум при  $r = -\frac{M^2}{\alpha m}$ , равный:

$$(U_{эф})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} . \quad (20)$$

Посмотрев на график, становится ясным, что при  $E > 0$  движение частицы инфинитно, а при  $E < 0$  финитно. Форма траектории получается с помощью формулы (13), подставив в которую  $U = -\frac{\alpha}{r}$  и произведя интегрирование, получим:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{ma}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2}}} + const . \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$p = \frac{M^2}{2\alpha} ; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} , \quad (22)$$

затем выберем начало отсчета  $\varphi$  таким образом, чтобы  $const=0$  и теперь получим уравнение конического сечения (23), переписав формулу для траектории в виде:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi . \quad (23)$$

Фокус находится в начале координат, а  $p$  и  $e$  – это параметр и эксцентриситет орбиты. Согласно выражению (23) выбранная точка с  $\varphi=0$  ближайшая к центру, такая точка называется перигелий орбиты. В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону (18), орбита каждой из частиц представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции.

Посмотрев на выражение эксцентриситета (22), можно заметить, что при  $E < 0$ ,  $e < 1$ , это значит, что орбита является эллипсом, а движение финитно (рис. 4).

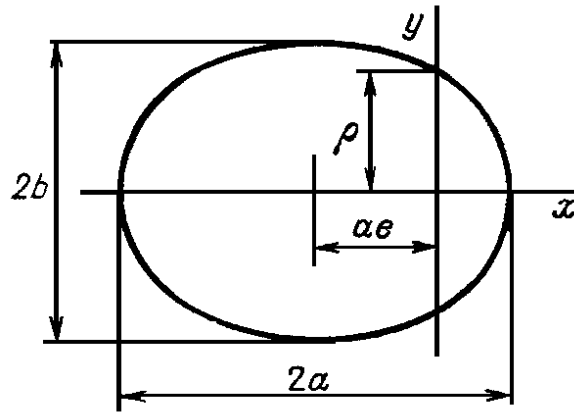


Рис. 4

Согласно формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса:

$$\alpha = \frac{P}{1-b^2} = \frac{\alpha}{2|E|}; \quad b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} . \quad (24)$$

При совпадении самого малого значения энергии совпадает с выражением (20), эллипс трансформируется в окружность. При этом, минимальные и максимальные расстояния до фокуса эллипса имеют вид:

$$r_{\min} = \frac{P}{1+e} = \alpha(1-e); \quad r_{\max} = \frac{P}{1-e} = \alpha(1+e) . \quad (25)$$

Период обращения по эллиптической орбите определим из закона сохранения момента в форме интеграла площадей:  $M = 2m\dot{S}$ . Взяв интеграл от этого выражения по времени в границах от 0 до T, будем иметь:

$$2mS = TM , \quad (26)$$

здесь S является площадью орбиты. Будем иметь ввиду, что для эллипса  $S = \pi ab$  и учитывая этот факт, подставим a и b из формул (24):

$$T = 2\pi\alpha^2 \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E^3|}} . \quad (27)$$

Стоит отметить, что в случае  $E \geq 0$  движение инфинитно. Ссылаясь на формулу (22), заметим, что при  $E > 0$  эксцентриситет  $e > 0$ . Отсюда вывод: траектория представляет собой гиперболу, огибающую фокус (рис. 5)



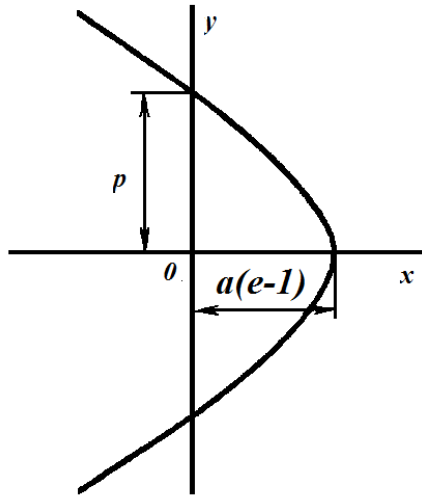


Рис. 5

Расстояние перигелия от центра выражается формулой:

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1) . \quad (28)$$

С помощью формулы (12) можно найти зависимость координаты частицы от времени. Эту формулу можно представить в параметрическом виде.

Учитывая формулы (22) и (24), рассмотрим эллиптические орбиты. Запишем интеграл, определяющий время:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{\alpha}{|E|}r - r^2 - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} , \quad (29)$$

и совершив подстановку  $r - a = -ae \cos \zeta$  приведем интеграл к виду:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \zeta) d\zeta = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\zeta - e \sin \zeta) + const . \quad (30)$$

Обратим const в нуль и получим параметрическое представление зависимости  $r$  от  $t$ , выбрав начало отсчета соответствующим образом:

$$r = a(1 - e \cos \zeta) ; \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\zeta - e \sin \zeta) . \quad (31)$$

Через параметр  $\zeta$  возможно выразить декартовы координаты частицы  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Воспользовавшись выражениями (23) и (31) получим:

$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \zeta) = ae(\cos \zeta - e)$  а  $y$  найдем, как  $\sqrt{r^2 - x^2}$ .  
Окончательно получим:

$$x = a(\cos \zeta - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \zeta . \quad (32)$$

Очевидно, что полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра  $\zeta$  от нуля до  $2\pi$ . Аналогичным образом получаем результат для гиперболических траекторий:

$$r = a(ech\zeta - e), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esh\zeta - \zeta), \quad x = a(e - ch\zeta), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}sh\zeta , \quad (33)$$

здесь параметр  $\zeta$  пробегает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Теперь рассмотрим движение в поле отталкивания. Здесь  $U = \frac{\alpha}{r}$ , а эффективная потенциальная энергия  $U_{эф.} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$  монотонно убывает от  $+\infty$  до нуля при изменении  $r$  от 0 до  $\infty$ . В этом случае движение инфинитно, а энергия частицы только положительна. Вычисления для этого случая производятся аналогичным образом. Траектория движения представляет собой гиперболу, которая проходит не через центр поля (рис. 6).

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi . \quad (34)$$

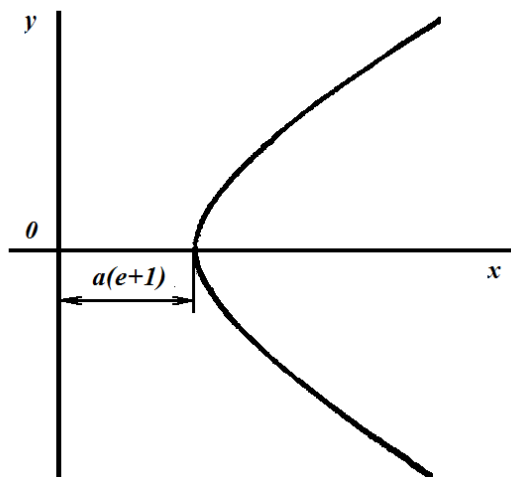


Рис. 6

Перигелий в данном случае имеет вид:

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) . \quad (35)$$

Параметрические уравнения зависимости от времени в данном случае имеют вид:

$$r = a(ech\zeta + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esh\zeta + \zeta), \quad x = a(e + ch\zeta), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}sh\zeta . \quad (36)$$

При движении в поле  $U = \frac{\alpha}{r}$  величина

$$[vM] + \frac{\alpha r}{r} = const . \quad (37)$$

Возьмем полную производную по времени:  $\left[ \dot{v}M \right] + \frac{\alpha \dot{v}}{r} - \frac{\alpha r(\dot{v}r)}{r^3}$  и подставим  $M = m[r\dot{v}]$ , будем иметь:  $m r(\dot{v}\dot{v}) - m v(r\dot{v}) + \frac{\alpha \dot{v}}{r} - \frac{\alpha r(\dot{v}r)}{r^3}$ . Приняв  $m\dot{v} = \frac{\alpha r}{r^3}$ , увидим, что это выражение обращается в нуль.

## Глава II

### 1. Периоды обращения планет Солнечной системы и законы Кеплера

Прежде всего следует привести законы Кеплера в их современной формулировке [7].

Первый закон: каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;

Второй закон: каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причем за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади;

Эти первые два закона показаны на рисунке 7.

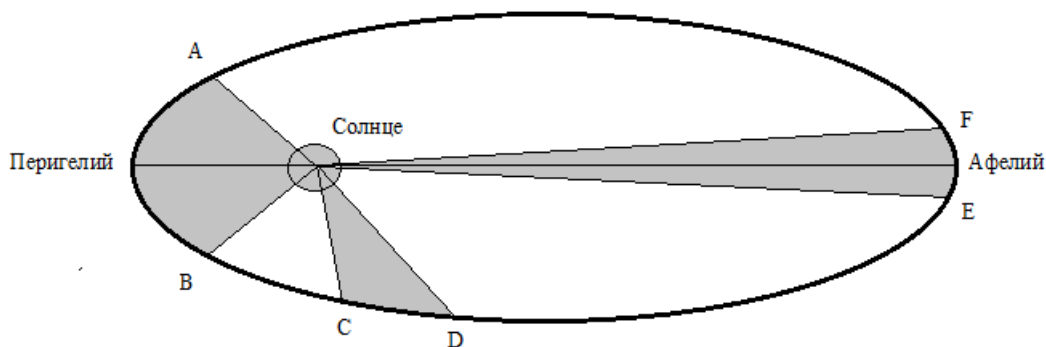


Рис. 7

Второй закон можно сформулировать иным образом, высказав, что секториальная скорость планет - постоянная величина или: в любых двух произвольных точках орбиты отношение скоростей планеты обратно-пропорционально отношению их радиусов.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{d_1}{d_2} . \quad (38)$$

Кеплер определил эллипс следующим образом: это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) постоянна. Согласно этому определению Джеймс Максвелл предложил для построения эллипса, так называемый «метод садовника». Заключается данный метод в том, что в точки фокусов эллипса втыкаются две булавки, к ним привязываются концы нити, после чего с помощью третьей булавки нить оттягивается в сторону и булавка, оттягивающая нить, скользит, описывая при этом эллипс. Второй закон подразумевает, что чем

ближе планета к перигелию, тем больше ее скорость по сравнению когда планета находится в афелии.

Пришло время рассмотреть третий закон Кеплера [5,7]. Рассмотрим его для круговой орбиты с нулевым эксцентриситетом, используя при этом закон Всемирного, который Кеплеру был неизвестен. В данном случае сила гравитационного притяжения, действующая на планету, равна ее массе под действием центробежной силы:

$$\frac{GM_c m}{d^2} = m \frac{V^2}{d} . \quad (39)$$

Здесь  $M_c$ -масса Солнца,  $d$ - расстояние от планеты до Солнца,  $V$ - скорость планеты,  $m$ - масса планеты. При чем  $G$  и  $M$  являются постоянными независимо от рассматриваемой планеты.

$$V^2 d = const$$

Приняв во внимание формулу связи линейной и угловой скорости

$$V = \Omega d , \quad (40)$$

и тот факт, что период обращения  $T$  связан с угловой скоростью:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (41)$$

Получим, что  $\frac{d^3}{T^2} = const$ . Таким образом сформулируем третий закон Кеплера.

Третий закон: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбиты.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3} . \quad (42)$$

Для получения данного вывода нам, в отличии от Кеплера не потребовалось много времени, т.к. мы использовали закон Всемирного тяготения Ньютона.

Ниже, в таблице 1, приведены округленные значения расстояний планет до Солнца. В первом столбце указаны названия планет, во втором- расстояния от них до Солнца в миллионах километров, в третьем эти расстояния приведены в астрономических единицах.

Но и здесь не все так просто. Мы уже неоднократно говорили о том, что орбиты планет имеют эллиптическую орбиту, следовательно третий закон Кеплера требует некоторого уточнения, так как в формуле (42) он получен для круговых орбит, что на самом деле не соответствует действительности.

**Таблица 1**

Название планеты	Расстояние в миллионах километров	Расстояние в астрономических единицах
Меркурий	58	0,387
Венера	108	0,723
Земля	150	1
Марс	228	1,524
Юпитер	778	5,203
Сатурн	1427	9,5539
Уран	2870	19,18
Нептун	4497	30,06

Если вновь обратиться к закону тяготения, то имеет место выражение:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_3 + m_4} \frac{T_{12}^2}{T_{34}^2} = \frac{d_{12}^3}{d_{34}^3}, \quad (43)$$

$m_1, m_2, m_3, m_4$  - массы тел, обращающиеся вокруг друг друга с периодами  $T_{12}$  и  $T_{34}$ ,  $d_{12}$  и  $d_{34}$  - средние расстояния между телами.

Теперь предположим, что оба тела вращаются по круговым орбитам с периодом  $T$ , а их расстояния до центра масс  $d_1$  и  $d_2$ . Расстояние между их центрами обозначим, как  $d$ . Следовательно скорость тела относительно центра масс представим выражением (44)

$$V_1 = \frac{2\pi d_1}{T}, \quad (44)$$

т.к. угловая скорость, это изменение угла поворота с течением времени, то имеет место формула (45)

$$\omega = \frac{360}{T}. \quad (45)$$

Для выражения ускорения будем иметь

$$a_1 = \frac{2\pi\omega V_1}{360}. \quad (46)$$

Подставив угловую скорость из выражения (45) в (46), получим

$$a_1 = \frac{4\pi^2 d_1}{T} . \quad (47)$$

Кроме того, ускорение можно получить используя второй закон Ньютона и закона Всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} . \quad (48)$$

Согласно второму закону сила равна произведению массы тела на его ускорение, следовательно

$$m_1 a_1 = G \frac{m_1 m_2}{d^2} , \quad (49)$$

отсюда

$$a_1 = G \frac{m_2}{d^2} . \quad (50)$$

Подставляя выражение (50) в (47), получим

$$G \frac{m_2}{d^2} = \frac{4\pi^2 d_1}{T^2} . \quad (51)$$

Очевидно, что для второго тела имеет место выражение (52)

$$G \frac{m_1}{d^2} = \frac{4\pi^2 d_2}{T^2} , \quad (52)$$

теперь просуммируем (51) и (52)

$$G \frac{m_1}{d^2} + G \frac{m_2}{d^2} = \frac{4\pi^2 d_2}{T^2} + \frac{4\pi^2 d_1}{T^2}$$

$$\frac{G}{d^2} (m_1 + m_2) = \frac{4\pi^2}{T^2} d . \quad (53)$$

Где  $d = d_2 + d_1$ . Переписав выражение (53) в ином виде, как представлено в формуле (54), получим справедливое соотношение для любых двух тел движущихся вокруг центра масс, например Земля и Солнце.

$$(m_1 + m_2)T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G} . \quad (54)$$

Однако существует иная точка зрения по отношению к справедливости законов Кеплера. Ниже приведены основные идеи иной теории, в справедливости которых на данный момент нельзя быть полностью уверенными.

Итак, отличной от Струве, корректировке законов Кеплера основной акцент делается на то, что орбиты представлены в виде эллипса и исходя из этого строится вся теория.

В реальности радиус орбит планет превосходит большую полуось на величину  $\Delta r$ .

$$\Delta r = k \cdot e \cdot \langle d \rangle , \quad (55)$$

где  $k$  - коэффициент эксцентричности орбиты,  $e$  - эксцентриситет орбиты,  $\langle d \rangle$  - среднее расстояние до Солнца.

Отсюда получим, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} , \quad (56)$$

где  $a$  - истинный радиус орбиты планеты.

$$a = d + \Delta r = d + k \cdot e \cdot \langle d \rangle . \quad (57)$$

Таким образом третий закон Кеплера примет немного иную формулировку: «квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы реальных радиусов орбит этих планет».

Кроме этого так же стоит внести коррективы во второй закон Кеплера. Ввиду того, что орбиты планет представлены эллипсами, выходит, что линейная скорость данных планет вовсе не постоянные величины. Следовательно стоит уточнить второй закон Кеплера.

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^n . \quad (58)$$

Здесь показатель степени выражается путем логарифмирования:

$$n = \frac{z}{j} , \quad (59)$$



$$z = \ln \frac{V_2}{V_1} ; j = \ln \frac{d_1}{d_2} , \quad (60)$$

Но перед нами встает новая проблема. Если сослаться на Кеплера, то получается, что скорости планет обратно пропорциональны их расстоянию от Солнца. Но если данный закон справедлив, то когда планета находится в перигелии или в афелии, то центробежная сила равна силе тяготения, т.е. нет силы, под действием которой планета должна двигаться по своей орбите. Однако мы знаем, что это не так. В поисках разрешения проблемы, обратимся к математике. В полярных координатах получен закон, в котором приведена вторая производная радиуса орбиты по времени, вследствие чего мы получаем радиальное ускорение  $\varepsilon$ . При этом величина  $\varepsilon$  в перигентре и апоцентре различается лишь знаком.

$$\varepsilon = \pm e\sigma . \quad (61)$$

В свою очередь

$$\sigma = \frac{F_{ц.б.}}{m_{пл}} , \quad (62)$$

где  $e$  - эксцентриситет орбиты,  $\sigma$  - центробежное напряжение,  $m_{пл}$  - масса планеты,  $F_{ц.б.}$  - центробежная сила, действующая на планету.

Подсчитано, что соответствие между силами и напряжениям ускорений достигается тогда, когда показатель степени в формуле (44) равен 1,5. Из сведений об эллипсе имеем

$$\rho = \frac{d}{(1-e^2)^{0,5}} . \quad (63)$$

В данном случае  $\rho$  - радиус кривизны в средней малоосной точке орбиты. Теперь соотнесем напряжения гравитационной и центробежных сил

$$\varepsilon = \delta(1-e^2)^{0,5} , \quad (64)$$

$\delta$  - среднее значение гравитационного напряжения. Гравитационное напряжение в перигентре возрастает в соответствии с законом Всемирного тяготения, а напряжение центробежного ускорения в соответствии с формулой (44). Путем вычитания получим суммарное радиальное напряжение, равное радиальному ускорению планет

$$\varepsilon = \sigma - \delta = \sigma - \delta(1-e^2)(1-e) = e\sigma(e^2 - e^3)\sigma . \quad (65)$$

Также были произведены расчеты, в которых показатель степени в формуле (44) не равен 1,5. При этом они не дали равенства кинематических и динамических ускорений.

Теперь, обратившись к формуле (44), покажем какие соотношения кинематических величин можно получить, рассмотрев такие два участка орбиты, как перигелий и малоосная точка.

$$\omega_m = \frac{v_m}{d_m}; \quad \omega_e = \frac{v_e}{d_e}, \quad (66)$$

$$d_m = d_e(1 - e). \quad (67)$$

С учетом формулы (54) зависимость (44) примет вид:

$$\frac{V_e}{V_m} = \left( \frac{d_m}{d_e} \right)^n = \frac{1}{(1 - e)^n}, \quad (68)$$

здесь  $\omega_m, \omega_e$  - угловые скорости в малоосной точке и перигелии соответственно;  $v_m, v_e$  - линейные скорости в малоосной точке и перигелии соответственно.

## 2. Движение планет согласно теории Эйнштейна

В данном разделе представленной работы будем ссылаться на труды Альберта Эйнштейна, посвященные теории относительности и опубликованные в 1905-1920 гг. [2]. В этой теории при движении материальной точки в поле тяжести выполняются уравнения геодезической или наикратчайшей линии между двумя геометрическими точками пространства - времени. Эти уравнения записываются как

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^\nu \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\tau}{ds}, \quad (69)$$

Если материальная точка движется со скоростью много меньше скорости света, тогда  $dx_4$  много больше  $dx_1, dx_2, dx_3$ , что приводит к получению уравнения в первом приближении, в котором правый член содержит  $\sigma = \tau = 4$ . Ссылаясь на то, что  $\Gamma_{44}^\sigma = \Gamma_{4\sigma}^4 = -\frac{\alpha}{2} \frac{x_\sigma}{r^3}$ , и зная, что  $\nu$  пробегает от 1 до 3, что будем иметь

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \Gamma_{44}^\nu - \frac{\alpha}{2} \frac{x_\sigma}{r^3}; \quad \frac{d^2 x^4}{ds^2} = 0. \quad (70)$$

Отсюда следует, что в первом приближении можем положить  $S = x_4$ , что в свою очередь даст нам то, что первые три уравнения не будут противоречить Ньютону. Вводя полярные координаты, получим уравнения с сохранением момента инерции и энергии

$$\frac{U^2}{2} - \frac{\alpha}{2r} = A; \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = B. \quad (71)$$

Здесь А и В – константы законов сохранения момента инерции и энергии. Далее решаем уравнения (74) с точностью до более высоких порядков, учитывая при этом  $\Gamma_{44}^\sigma = \Gamma_{4\sigma}^4 = -\frac{\alpha}{2} \frac{x_\sigma}{r^3}$ , получим

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 2 \sum_{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^4 \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\tau}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds} \frac{dx_4}{ds}. \quad (72)$$

С точностью до величин первого порядка получим:

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \quad (73)$$

Обращаясь к уравнениям (74), будем иметь в их правой части:

$$\text{-для } \sigma = \tau = 4, \Gamma_{44}^{\sigma} \left( \frac{dx_2}{ds} \right)^2$$

$$\text{-для } \sigma \neq 4, \tau \neq 4, -\frac{dx_4}{r^3} = \sum_{\sigma\tau} \left( \delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2} \frac{x_{\sigma} x_{\tau}}{r^2} \right) \frac{dx_{\sigma}}{ds} \frac{dx_4}{ds}$$

Получив сумму, будем иметь:

$$\frac{d^2 x_v}{ds^2} = -\frac{\alpha x_v}{r^3} \left( U^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right), \quad (74)$$

Следует отметить, что при движении тела по окружности уравнения (70) и (73) соответствуют третьему закону Кеплера. В свою очередь из уравнения (70) получаем точную применимость уравнения

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = B. \quad (75)$$

Прибегнув к уравнению (70), получим смещение эллиптической орбиты за сто лет. Для этого заметим члены первого порядка с помощью уравнений (75) и (71):

$$\left( 1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2} \right). \quad (76)$$

Заменим время переменной  $s = s\sqrt{1-2A}$ , при этом немного изменив константу В, будем иметь:

$$\frac{dx_v}{ds^2} = -\frac{\partial\theta}{\partial x_v}. \quad (82)$$

Здесь  $\theta = -\frac{\alpha}{2} \left( 1 + \frac{B^2}{r^2} \right)$ . Определяя форму орбиты, получим из уравнений (71),

учитывая тот факт, что  $U^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{ds^2}$ , выражение:

$$2A - 2\theta = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{ds^2}. \quad (77)$$

Вновь прибегнув к уравнению (80), исключим  $ds$ , обозначив  $\frac{1}{r}$  за  $x$ :

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3, \quad (78)$$

отсюда, проведенный между перигелием и афелием радиус-вектор, описывает угол:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}}, \quad (79)$$

здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются корнями уравнения, полученного после отбрасывания последнего члена

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 = 0. \quad (80)$$

Заменяем уравнение (79) на

$$\varphi = (1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{-(x - \alpha_1)(x - \alpha_1)(x - \alpha x)}. \quad (81)$$

Разложив  $(x - \alpha x)^{\frac{1}{2}}$  и взяв интеграл, будем иметь  $\varphi = \pi(1 + \frac{3}{4}\alpha(\alpha_1 + \alpha_2))$ . Однако,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются обратными величинами перигелия и афелия Меркурия.

$$\varphi = \pi(1 + \frac{3}{2}\alpha \frac{1}{a(1 - e^2)}). \quad (82)$$

Отсюда за один оборот перигелий смещается на угол:

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{3}{2}\alpha \frac{1}{a(1 - e^2)}, \quad (83)$$

где  $a$  - большая полуось,  $e$  - эксцентриситет орбиты.

Теперь введем период обращения и получим результат Эйнштейна:

$$\Delta\varphi = 2\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}. \quad (84)$$

Следует помнить, что в данном случае период выражается в секундах, а скорость света в см/с.

### 3. Модификация всемирного закона тяготения Ньютона

Необходимо отметить, что смещение перигелия, полученное А.Эйнштейном [2], связано с поправками, которые определяются искривлением пространства-времени.

Однако, в классической физике (ньютоновской физике) доминирует силовой подход в 3-х мерии (т.е. в нашем 3-х мерном пространстве) без учета геометрии пространства времени.

Поэтому рассмотрев теоретический материал, представленный выше, было бы не безынтересно исследовать возможность модификации классического закона тяготения, чтобы получить, например, наблюдаемое смещение перигелия Меркурия в ньютоновской физике [8,9]. Но прежде чем приступить к рассмотрению задачи, следует сказать, что в данном пункте нашей работы мы опираемся на [6].

Используем тот факт, что при добавлении к потенциальной энергии  $U = -\frac{\alpha}{r}$  малой добавки  $\delta U(r)$  траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину  $\delta\phi$ . Начнем с анализа возмущений по обратным степеням расстояния, начиная со второй. Далее попробуем определить  $\delta\phi$  для случаев:

а)  $\delta U = \frac{\beta}{r^2}$ , б)  $\delta U = \frac{\gamma}{r^3}$ , в)  $\delta U = \frac{\lambda}{r^4}$ , где  $\beta, \gamma, \lambda$  суть некоторые постоянные.

При изменении  $r$  от  $r_{min}$  до  $r_{max}$  и снова до  $r_{min}$  угол  $\partial\phi$  изменяется на

величину:  $\Delta\phi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$ . представим ее в виде [6]:

$$\Delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}} dr \quad (85)$$

Эта запись позволит нам избежать финитно расходящихся интегралов. Добавим к нашей потенциальной энергии малое возмущение и будем иметь:

$U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ . Теперь разложим подынтегральное выражение по степеням  $\delta U$ , нулевой член разложения даст  $2\pi$ , а член первого порядка искомое смещение:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U dr}{\sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\varphi \right) . \quad (86)$$

Здесь мы сделали переход от интегрирования по  $dr$  к интегрированию по  $d\varphi$  вдоль траектории движения без возмущений. Мы имеем три случая с различными возмущениями и наша задача рассмотреть их, то есть найти угловую величину  $d\varphi$  для каждого из них, воспользовавшись уравнением конического сечения. Для этого поочередно подставим в выражение (86) все возмущения, предлагаемые нам в задаче. В итоге получим

$$\text{а) } \delta\varphi = \frac{\delta}{\delta M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \frac{\beta}{r^2} d\varphi \right) = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

Здесь  $p$ - параметр орбиты невозмущенного эллипса.

б) В этом случае немного изменим запись возмущения без изменения его математической нагрузки:  $r^2 \delta U = \frac{\gamma}{r}$  и взяв  $\frac{1}{r}$ , получим:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \frac{\gamma}{r^3} d\varphi \right) = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}$$

в) Рассмотрим последний, из представленных нам случаев.

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \frac{\lambda}{r^4} d\varphi \right) = -\frac{\lambda}{p^2} 2m\pi \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

Таким образом, мы видим, что  $\delta\varphi$  зависит от внешнего возмущения.

Учитывая, что  $TM = 2mS$ , а  $S = \pi ab$ , выразим  $M$  ( $M = \frac{2m\pi ab}{T}$ ) и подставим его

в полученные выше выражения для трех, рассмотренных нами случаев.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{а) } \delta\varphi &= -\frac{\beta T^2}{2\pi m a^2 b^2} ; \\ \text{б) } \delta\varphi &= -\frac{3\alpha\gamma T^4}{8\pi^3 m^2 a^4 b^4} ; \\ \text{в) } \delta\varphi &= -\frac{\lambda T^2}{p^2 2\pi m a^2 b^2} . \end{aligned} \quad (87)$$

Чтобы сравнить полученный результат с астрономическими данными, приведем окончательные выражения с учетом накопления эффекта за 100 лет.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \delta\varphi &= -\frac{\beta\Gamma^2}{2\pi m a^2 b^2} * 100 ; \\
 \text{б) } \delta\varphi &= -\frac{3\alpha\gamma\Gamma^4}{8\pi^3 m^2 a^4 b^4} * 100 ; \\
 \text{в) } \delta\varphi &= -\frac{\lambda\Gamma^2}{r^2 2\pi m a^2 b^2} * 100 ;
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

Учитывая выражения (88), выразим коэффициенты  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \beta &= -\frac{\delta\varphi 2\pi m a^2 b^2}{100\Gamma^2} ; \\
 \text{б) } \gamma &= -\frac{\delta\varphi 8\pi^3 m^2 a^4 b^4}{300\alpha\Gamma^4} ; \\
 \text{в) } \lambda &= -\frac{\delta\varphi r^2 2\pi m a^2 b^2}{100\Gamma^2} .
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

Теперь посчитаем численные значения выраженных коэффициентов для Меркурия, используя характеристики этой планеты и ее орбиты, приведенные в таблице 2 и рассчитанные нами ниже

$$\delta\varphi = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$\alpha = 41,8 * 10^{43} \text{ Дж} \cdot \text{м}$$

$$r = 55,46255 \cdot 10^9 \text{ м}$$

Подставляем эти данные в (89) и получаем:

$$\beta = -1,3203 * 10^{35}; \quad \gamma = -6,27327427414 * 10^{34}; \quad \lambda = -1,327 * 10^{38} .$$

В итоге мы получили, что потенциальная энергия  $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ , где  $\delta U$  есть добавка к потенциальной энергии  $U$ , то смещение перигелия Меркурия за век должно составить примерно 43 угловые секунды. Однако полученные нами величины коэффициентов имеют порядки, которые нельзя считать малыми, то есть взятые нами выражения для возмущений не могут являться малыми.

Следовательно, необходимо найти иные пути для учета малой поправки к закону Ньютона, чтобы добиться необходимого результата.



Поэтому следует попытаться как-то модифицировать закон тяготения в 3-х мерном пространстве.

Известно, что период обращения Меркурия вокруг Солнца  $T$  (в дальнейшем мы будем называть его период) связан с гравитационной постоянной  $G$  и большой полуосью его орбиты  $a$ . При  $m/M_c \ll 1$ , согласно третьему закону Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_c a^3}, \quad (90)$$

где  $M_c$  - масса Солнца,  $m$  - масса Меркурия. Согласно Ньютону  $U = -\frac{\alpha}{r}$ , где параметр  $\alpha = GM_c m$ .

Но для того, чтобы объяснить anomальное поведение перигелия Меркурия в рамках классической механики, следует подкорректировать ньютоновский потенциал, то есть предположить нарушение ньютоновского закона тяготения, которое на очень больших расстояниях (асимптотически) должен стремиться к классическому закону тяготения Ньютона. Однако проведенный анализ показывает, что такая модификация возможна для нашей задачи, начиная с некоторого расстояния от силового центра (центра притяжения), достаточно большого с астрономической точки зрения. Для этого представим  $U$  в виде следующей экспоненциальной зависимости, удовлетворяющей указанной выше асимптотике:

$$U = -\frac{\alpha}{r} e^{\beta_0/r} = U_N e^{\beta_0/r}, \quad (91)$$

где  $\beta_0$  - некоторая постоянная.

Разложив приведенную зависимость в ряд, будем иметь:

$$U = -U_N \left(1 + \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} \dots\right), \quad (92)$$

где  $\beta = \alpha\beta_0$ ,  $\gamma = \alpha\beta_0^2/2$ ,  $\lambda = \alpha\beta_0^3/3!$ .

Теперь  $\delta\varphi$  с учетом первого приближения из разложения (92) примет вид:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\beta}{\alpha p} = \frac{2\pi\beta_0}{p} = \frac{2\pi\beta}{\alpha a(1-e^2)} = \frac{2\pi\beta T^2}{4\pi a^4 m(1-e^2)}. \quad (93)$$

При взятии  $\delta\varphi = 43''$  с учетом, что  $\beta = \beta_0\alpha$ , получим для Меркурия величину  $\beta_0$ , используя выражение (92),

$$\beta = \frac{\delta\varphi\alpha\rho}{2\pi}; \beta_0 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta\varphi\rho}{2\pi} \quad (94)$$

или

$$\beta_0 = 17,7 \cdot 10^4 \text{ м} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ км} = 200 \text{ км}. \quad (95)$$

Зная теперь выражение для потенциальной энергии (91), нетрудно найти модифицированную силу тяготения, отличающуюся от ньютоновской,

$$F = \frac{\alpha}{r^2} e^{\beta_0/r} + \frac{\alpha\beta_0}{r^3} e^{\beta_0/r} = \frac{\alpha}{r^2} e^{\beta_0/r} \left( 1 + \frac{\beta_0}{r} \right), \quad (96)$$

то есть

$$F_{\text{mod}} = -\text{grad}U_{\text{mod}} \text{ или } F_{\text{mod}} = F_N \cdot (1 + \beta_0/r) \cdot e^{\beta_0/r}, \text{ где } F_N = \frac{\alpha}{r^2}. \quad (97)$$

Используя полученные результаты, рассмотрим отношение модифицированной силы тяготения к величине силы тяготения Ньютона:

$$\frac{F_{\text{mod}}}{F_N} = \frac{\frac{\alpha}{r^2} e^{\beta_0/r} (1 + \beta_0/r)}{\frac{\alpha}{r^2}} = (1 + \beta_0/r) \cdot e^{\beta_0/r}. \quad (98)$$

Для того, чтобы произвести некоторые физические оценки возьмем для примера отношение (98) на поверхности Земли ( $r = R_{\text{земли}} \approx 6400 \text{ км}$ ) и на орбите Луны ( $r = R_{\text{орбиты}} \approx 360000 \text{ км}$ ). В первом случае оценка дает  $\frac{F_{\text{mod}}}{F_N} \approx 1,031$ , а в другом случае находим  $\frac{F_{\text{mod}}}{F_N} \approx 1,00055$ .

Это означает справедливость нашей гипотезы о возможном нарушении классического закона тяготения Ньютона, начиная с расстояния порядка  $10^5 \text{ м}$ . Другими словами, для объяснения смещения перигелия Меркурия в рамках классической (силовой) физики можно использовать введенную модификацию закона тяготения Ньютона в форме (91) для расстояний от силового центра несколько сотен километров, что ничтожно по сравнению с астрономическими масштабами планетарных орбит.

## Заключение

Подводя итоги данной работы, приведем поставленные нами цели, обозначенные во введении, а так же кратко обрисовываем пути их достижения и результаты.

Во-первых, необходимо было внести поправки в закон тяготения Ньютона, с целью объяснения аномального смещения перигелия Меркурия, используя при этом законы классической физики.

Во-вторых, целью данной работы является формирование у школьников межпредметных связей.

В-третьих, необходимо показать, что астрофизика (астрономия) является одной из фундаментальных наук.

Для достижения указанных целей нами было сделано следующее.

Во-первых, рассмотрен обширный теоретический материал, включающий в себя несколько точек зрения, объясняющих аномальную прецессию орбиты Меркурия. В результате нами была предложена гипотеза в виде модифицированного закона всемирного тяготения Ньютона, которая позволила получить искомый результат, справедливый для расстояний в сотни километров от силового центра, что ничтожно мало по сравнению с астрономическими масштабами орбит в солнечной планетарной системе.

Во-вторых, материалы и выкладки, приведенные в данной работе возможно использовать, как пособие для проекта (план которого приведен в первом пункте первой главы настоящей работы) по астрофизике и астрономии обучающимися старших классов в школах с углубленным изучением физики и математики.

Реализация подобного проекта позволит:

- сформировать у обучающихся представление об астрономии, как науке;
- сформировать прочные межпредметные связи таких учебных дисциплин, как физика и математика, путем вычисления различных физических величин, рассмотренных в приведенной работе.

В-третьих, в том случае, если обучающиеся выполнят проект согласно нашему плану, используя при этом материалы, представленные в нашей работе, то мы достигаем выполнения поставленной нами третьей цели, а именно, формируем у обучающихся представление об астрономии, как науке изучающей фундаментальные взаимодействия в нашей Вселенной. Ведь, как известно, гравитационные взаимодействия являются одними из фундаментальных взаимодействий.

## Литература

1. Меркурий. [Электронный ресурс]. Режим доступа [http://volamar.ru/subject/04sirius/view\\_post.php?cat=2&id=4](http://volamar.ru/subject/04sirius/view_post.php?cat=2&id=4)
2. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том 1. Работы по теории относительности 1905-1920. М.:«Наука», 1965.-701 с.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс] Министерство образования и науки Российской Федерации 17.05.2012 № 413. Режим доступа: [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_131131/?frame=1](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131131/?frame=1)
4. Голуб, Г.Б., Метод проектов- технология компетентностно-ориентированного образования [Текст]: Методическое пособие для педагогов-руководителей проектов учащихся основной школы / Г.Б. Голуб, Е.А. Перелыгина, О.В. Чуракова; под ред. д.ф.-м.н., проф. Е.Я. Когана. – Самара: Изд-во «Учебная литература», Издат. дом «Федоров», 2006. – 176 с.
5. Наука. Величайшие теории: выпуск 4: Танцы со звездами. Кеплер. Движение планет./Пер.с исп.-М.: Де Агостини, 2015.-160 с.
6. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. «Механика». Курс теоретической физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. .- Т.1, - 206 с.
7. Уточнение второго и третьего законов Кеплера. [Электронный ресурс]. Режим доступа <http://www.ornithopter.ru/1/files/ndex26.html>
8. Роузвер Н.Т. Перигелий Меркурия. От Лавуазье до Эйнштейна: Пер. с англ.- М.: Мир, 1985.-246 с., ил.
9. Перигелий Меркурия без Эйнштейна. [Электронный ресурс]. Режим доступа <http://vvs-ya.narod.ru/about2.htm>
10. О смещении перигелия планет. [Электронный ресурс]. Режим доступа <http://energy-source.ru/glava-tri/s11----.html>
11. Математический энциклопедический словарь./Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. Кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И, Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д.

Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич.- М.: Сов. Энциклопедия, 1988.-847 с., ил.

12. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года. [Электронный ресурс] Правительство Российской Федерации. Распоряжение 17.11.2008 № 1662-р. Режим доступа <http://www.ifar.ru/ofdocs/rus/rus006.pdf>